Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

O Primeiro Autovalor do p-Laplaciano em Variedades

Antonio Kelson Vieira da Silva

Teresina - 2011

Antonio Kelson Vieira da Silva

Dissertação de Mestrado:

O Primeiro Autovalor do p-Laplaciano em Variedades

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Newton Luís Santos

Teresina - 2011

S586p Silva, Antonio Kelson Vieira da

O Primeiro autovalor do p-Laplaciano em variedades/Antonio Kelson Vieira da Silva. - 2011

68f. 3il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Piauí, 2011.

Orientação: Prof. Dr. Newton Luís Santos

1. Geometria diferencial. 2. p-Laplaciano. 3. Primeiro autovalor (Matemática). I. Título

CDD 516.36

Dedico este trabalho em memória de minha avó, Maria das Dores Marques.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, pois foi quem primeiro me amou, dando-me a graça do dom da vida. Ele que é Pai, criador de todas as coisas, Filho, nosso salvador e Espírito Santo, consolador. Sem ele nada disso teria sentido e não poderia ser realizado. A Nossa Senhora, nossa mãe e mãe de Deus, por ter me acolhido como filho, intercedido por mim junto a Deus e me consolando em meio à vida.

À minha mãe Vanda, por ter me gerado com amor e carinho, me educado desde criança e criado segundo os bons costumes. Ao meu pai, Antonio, por ter me criado, educado e zelado por mim, com amor e dedicação. Agradeço a ambos, que juntos deram a mim oportunidades que não tiveram.

À minha família, com quem cresci e vivi, sempre com muita alegria e amor. Aos meus avós, Otávio, Maria da Conceição, Domingos e Maria das Dores (em memória). A meus tios Fernando, Manuel, Amarildo, Domingos e "Nego". A minhas tias Fátima Sousa, Fátima Vieira, Ducarmo, Dora, Graça, Conceição, Francisca, Valnice e Socorro. Aos meus primos e irmãos, Alisson, Diego, Rafael, Tiago e Talysson. A minhas primas e irmãs, Davila, Priscilia, Alana, Ravena e Flávia.

À Vilmara, que por quase 2 anos tem me suportado, literalmente, especialmente nos últimos 6 meses antes da defesa da dissertação. Obrigado pela força, pelo apoio, pela paciência e pelo amor.

A todos os meus amigos do bairro São João, em especial a "galera da esquina", que de várias formas contribuíram para esse momento, onde me incentivavam a estudar, jogar futebol, videogame, etc.

Aos meus grandes amigos e guerreiros do saudoso colégio Humanos. A Givaggo, Deângeles e Ricardo, amigos de longa data. A Sebastião e todos os professores, que contribuíram para meu conhecimento e minha formação acadêmica e humana. A Daniel Rodrigues, que ninguém imaginaria abandonar a matemática, e a Anderson Gomes que, pelo menos ainda, não abandonou o "verdão" Palmeiras e me faz companhia no jejum de títulos. Por fim, aos que tiveram o prazer de assistirem aula comigo, seja de matemática, com os mini testes, seja de química.

À turma do antigo CEFET-PI, pela amizade, brincadeiras, ideias de estudo, pelos inter-clássicos, peças teatrais, filmes no clube dos diários, almoços no refeitório, e tanta loucura que só Deus sabe.

A toda a galera do Encontro de Jovens com Cristo, o EJC, que me proporcionaram momentos ímpares em minha vida. Em especial, a galera do EJC da Paróquia João XXIII, que me acolheu e me iniciou na missão.

Aos amigos e irmãos da Renovação Carismática Católica, que me fez conhecer um novo mundo, ampliar muitos minhas amizades e os horizontes. Especialmente, a todos do Ministério Universidades Renovadas, que desde o início me acolheram, amaram e me fizeram levar esse amor a tantos outros, para que juntos pudéssemos sonhar com um mundo e uma universidade renovada.

Ao professor Gilvan, pois foi quem primeiro me motivou no estudo da matemática na UFPI, com suas provas de 4 horas, questões "impossíveis" , mas que sempre encorajou a turma nessa carreira, pois confiava nos caras.

Ao professor Mário Gomes, pois foi quem me direcionou para uma iniciação científica e quem sempre quebrava o galho na coordenação de matemática.

Ao professor Newton, quem teve a coragem e paciência de me orientar por 2 anos na graduação e por este ano no mestrado, se dispondo a tirar minhas dúvidas, explicando o que não compreendia, e me formando para ser um bom pesquisador em matemática.

Aos professores Barnabé e Fábio Montenegro, por terem aceitado o convite de participar da minha banca e pelas contribuições para este trabalho.

Aos professores Xavier, Paulo Alexandre, Barnabé, Paulo Sérgio, Sissy, Juscelino, Humberto, Jurandir (esse aqui é profissional!), Roger, Liane, Marcondes, Isaias, Benício, Marcão. Enfim, a todos os professores do departamento da UFPI, pelos ensinamentos e que, de algum modo, contribuíram para minha formação acadêmica.

A todos os meus colegas de estudo que ingressaram em 2007 no curso de bacharelado em matemática, como Ailton, Ramon (o cientista), Edilson, Edvaldo, Edvalter, Valdir, Jennilson, George (o Galego), Diogo, etc. A todos que fui conhecendo ao longo do curso e aos que lutaram comigo nas disciplinas de mestrado, como Ítalo, Fracianne, Alex, Valdinêz, Yuri, Cleidinaldo (o Naldo), Leandro, Renatinha, Venâncio, Daniel, Domingão, Arimatéa e tantos outros.

Agradeço a CAPES pelo incentivo e apoio financeiro.

Por fim, mas não menos importante, agradeço a todos os funcionários dos Restaurantes Universitários (RU's), que, com paciência, trabalho e dedicação, contribuíram para minha alimentação e nutrição durante esses 4 anos e 6 meses que estive estudando na UFPI.

"*Mas vós não vos façais chamar rabi, porque um só é o vosso preceptor, e vós sois todos irmãos. E a ninguém chameis de pai sobre a terra, porque um só é vosso Pai, aquele que está nos céus. Nem vos façais chamar de mestres, porque só tendes um Mestre, o Cristo. O maior dentre vós será vosso servo.*"

Mateus 23, 8-11.

Resumo

Nesta dissertação, são estudadas estimativas para o primeiro autovalor de operador p-Laplaciano em variedades Riemannianas suaves, completas e sem bordo. Tais resultados são extensões de resultados clássicos obtidos por Cheng, Faber-Krahn, Lichnerowicz-Obata, Cheeger e Buser para o operador Laplace-Beltrami. O trabalho aqui desenvolvido baseia-se no artigo "*First eigenvalue for the p-Laplace operator*" de Ana-Maria Matei (Nonlinear Analysis, vol.39 (2000), p. 1051-1068).

Abstract

In this dissertation, estimates are studied for the first eigenvalue of the operator p-Laplacian on complete smooth Riemannian manifolds, without boundary. These results are extensions of classical results obtained by Cheng, Faber-Krahn, Lichnerowicz-Obata, Cheeger and Buser for the Laplace-Beltrami operator. The analysis presented here is based on the article "*First eigenvalue for the p-Laplace operator*" Ana-Maria Matei (Nonlinear Analysis, vol.39 (2000), p. 1051-1068).

Sumário

Introdução

O operador Laplaciano, denotado por Δ, aparece naturalmente na modelagem matemática de muitos fenômenos físicos, como a equação da onda, equação do fluxo do calor, equação da membrana vibrante, etc. Seu uso em problemas matemático são inúmeros. Em particular, em Geometria Diferencial, tem-se interesse nas possíveis relações do espectro de Δ entre duas variedades, considerando-se algumas hipóteses como condições das curvatura destas variedades.

Mais recentemente observou-se, em alguns fenômenos físicos, modelos do tipo

$$\begin{aligned} \Delta_p f &= F(x, f), \quad x \in \Omega \\ f(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

onde Ω é um domínio de $\mathbb{R}^n$ e $\Delta_p := -\text{div}\ (\|\nabla f\|^{p-2}\nabla f)$ para $1 \leqslant p < \infty$. Tal operador é chamdiado p-Laplaciano, pois quando $p = 2$ coincide com o Laplaciano. Para $p \neq 2$, o operador Δ_p tem aparecido em vários modelos físicos, relacionados à dinâmica dos fluidos. A tensão de cisalhamento $\overrightarrow{\tau}$ e o gradiente de velocidade ∇f estão relacionados de modo que $\overrightarrow{\tau} = r(x)\|\nabla f\|^{p-2}\nabla f$, onde para $p = 2$ (respectivamente, $p < 2$ e $p > 2$) se o fluido é Newtoniano (respectivamente, pseudoplástico e dilatante). Ademais, Δ_p aparece no estudo de fluxo através de meios porosos (para $p = 3/2$), elasticidade não linear ($p \geqslant 2$) e glaciologia ($p \in (1, 4/3]$) [18].

Com isso, vem-se tentando estender resultados clássicos da teoria elítica do Laplaciano para o p-Laplaciano, tais como simplicidade do primeiro autovalor, estrutura espectral do máximo, entre outros. Mas, diferentemente do Laplaciano, Δ_p não é um operador linear para $p \neq 2$. Mesmo assim, adaptou-se um estudo espectral para Δ_p. Dizemos que f é uma autofunção de Δ_p se existe λ real tal que

$$\Delta_p f = \lambda |f|^{p-2} f.$$

O número real λ é dito um autovalor de Δ_p associado à autofunção f (para mais detalhes conferir [20]). Um fato interessante é que mesmo Δ_p não sendo linear (pois não é aditivo, ou seja, em geral $\Delta_p(f+g) \neq \Delta_p f + \Delta_p g$), se f for uma autofunção, então cf também será, para toda constante real c. Com efeito,

$$\begin{aligned}\Delta_p(cf) &= -\text{div }(\|\nabla(cf)\|^{p-2}\nabla(cf)) \\ &= -|c|^{p-2}c \text{ div }(\|\nabla f\|^{p-2}\nabla f) \\ &= |c|^{p-2}c\ \lambda|f|^{p-2}f \\ &= \lambda|cf|^{p-2}(cf).\end{aligned}$$

O conjunto $\sigma_p(M)$ dos autovalores não nulos de Δ_p é um subconjunto ilimitado de $(0,\infty)$ [16].

Define-se o tom fundamental como sendo

$$\lambda^*(\Omega) := \inf \sigma_p(M)$$

Nesta dissertação apresentaremos uma generealização para o p-Laplaciano de teoremas clássicos de comparação do Laplaciano. No que segue M é uma variedade Riemanniana m-dimensional completa sem bordo e de diâmetro d_M e $\mathbb{M}_k$ é a forma espacial de dimensão $m = \dim(M)$ e curvatura seccional k. Denotaremos por $B(x_0, r_0)$ a bola de centro x_0 e raio r_0 em M, $V_m(k, r_0)$ a bola de raio r_0 em $\mathbb{M}_k$, por λ_1 o tom fundamental do Laplaciano e por μ_1 o primeiro autovalor do Laplaciano com a condição de Dirichlet, isto é, considerando apenas funções que se anulem no bordo. Disso, temos os seguintes resultados clássicos do Laplaciano:

Teorema 0.1. (Cheng [11]). *Se* $\text{ric}^M \geqslant (m-1)k$, *então para quaisquer* $x_0 \in M$, $r_0 \in (0, d_M)$

$$\mu_1(B(x_0, r_0)) \leqslant \mu_1(V_m(k, r_0)).$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $B(x_0, r_0)$ *é isométrico a* $V_m(k, r_0)$.

Teorema 0.2. ($\mathsf{Faber-Krahn}$ [1]). *Seja* M^m *compacta. Suponha que existe uma constante positiva* k *tal que* $\text{ric}^M \geqslant (m-1)k$. *Seja* Ω *um domínio em* M *e* Ω^* *uma bola geodésica na esfera Euclidiana* m*-dimensional de curvatura seccional constante igual a* k, $\mathbb{S}^m_k$, *tal que*

$$\frac{\text{Vol}(\Omega)}{\text{Vol}(M^m)} = \frac{\text{Vol}(\Omega^*)}{\text{Vol}(\mathbb{S}^m_k)}.$$

Então,

$$\mu_1(\Omega) \geqslant \mu_1(\Omega^*).$$

A igualdade vale se, e somente se, existe uma isometria de M^m em $\mathbb{S}^m_k$ que envia Ω em Ω^*.

No que segue considere M^m compacta.

Teorema 0.3. ($\mathsf{Lichnerowicz - Obata}$ [*7*]). *Se existe $k > 0$ tal que $\mathrm{ric}^M \geqslant (m-1)k$, então,*

$$\lambda_1(M^m) \geqslant \lambda_1(\mathbb{S}^m_k).$$

A igualdade vale se, e somente se, M for isométrico a $\mathbb{S}^m$.

Teorema 0.4. *Se existe $k > 0$ tal que $\mathrm{ric}^M \geqslant (m-1)k > 0$, então temos a seguinte estimativa*

$$\lambda_1(M) \geqslant (m-1)k.$$

Agora, sendo Ω subvariedade aberta de M, denotaremos por h_M a constante isoperimétrica de Cheeger dada por

$$h_M := \inf_{\Omega \subset M} \frac{\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial\Omega)}{\mathrm{Vol}(\Omega)}.$$

Teorema 0.5. ($\mathsf{Cheeger}$ [*10*]).

$$\lambda_1(M) \geqslant \left(\frac{h_M}{2}\right)^2.$$

Teorema 0.6. ($\mathsf{Cheeger}$ [*10*]). *Se M tem curvatura seccional não-negativa, então*

$$\lambda_1(M) \leqslant \frac{2^4(m+2)^{m+2}}{(m-1)^{m-1}} \frac{1}{d_M^2}.$$

Teorema 0.7. (Buser [*6*]). *Se $\mathrm{ric}^M \geqslant -(m-1)$, então existe uma constante $c = c(m)$, dependendo de m, tal que*

$$\lambda_1(M) \leqslant c(h_M + h_M^2).$$

Em [24], Ana-Maria Matei generalizou estes teoremas para o p-Laplaciano. Veremos detalhadamente tais demonstrações no Capítulo 3. No capítulo 2 apresentaremos alguns resultados da teoria de comparação e de análise funcional que nos ajudarão nessa tarefa. No capítulo 1 temos as definições básicas de Geometria Riemanniana.

Capítulo 1

Definições Básicas

Neste capítulo iremos estabelecer as notações a serem usadas e recordar de alguns conceitos e fatos básicos, necessários ao desenvolvimento dos capítulos seguintes. As provas de alguns dos resultados não serão feitas, mas em todo o texto ficará clara a referência para obter tais justificativas.

Denotaremos por M^n, ou simplesmente M, uma variedade Riemanniana n-dimensional suave, com a métrica $g(\cdot,\cdot) = \langle \cdot,\cdot \rangle$. ∇ será a conexão Riemanniana de M e $\mathfrak{X}(M)$ será o conjunto dos campos de vetores suaves ao longo de M. Dado $p \in M$, indicaremos por T_pM o espaço tangente de M no ponto p e TM o fibrado tangente de M. Os resultados deste capítulo podem ser encontrados em [8], [9], [12] e [26].

1.1 Volume

Definição 1.1. *Seja* M *um espaço topológico. Se* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função real sobre* M*, chamaremos de **suporte** de* f*, denotado por* supp f*, o fecho do conjunto dos pontos onde* f *não se anula, ou seja,*

$$\text{supp } f := \overline{\{p \in M; f(p) \neq 0\}}.$$

Definição 1.2. *Seja* M *um espaço topológico. Uma coleção* $\mathfrak{A}$ *de subconjuntos de* M *é dita **localmente finita** se cada ponto de* M *possui uma vizinhança que intercecta apenas uma quantidade finita de conjuntos em* $\mathfrak{A}$.

Definição 1.3. (Partição da unidade). *Seja* M *um espaço topológico e seja* $\mathfrak{A} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *uma cobertura, qualquer, de abertos sobre* M*. Uma **partição da uni-***

dade subordinada *a* $\mathfrak{A}$ *é uma coleção de funções contínuas* $\{\psi_\alpha : M \longrightarrow \mathbb{R}\}_{\alpha \in A}$*, com as seguintes propriedades:*

(i) $0 \leqslant \psi_\alpha(x) \leqslant 1$*, para todo* $\alpha \in A$ *e todo* $x \in M$.

(ii) $\operatorname{supp} \psi_\alpha \subset U_\alpha$.

(iii) O conjunto dos suportes $\{\operatorname{supp} \psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *é localmente finito.*

(iv) $\sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(x) = 1$*, para todo* $x \in M$.

Se M *for uma variedade suave e cada função* ψ_α *também for suave, diremos que tal partição da unidade é suave.*

Teorema 1.1. (Existência de partição da unidade). *Se* M *é uma variedade suave e* $\mathfrak{A} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *é uma cobertura, qualquer, de abertos de* M*, então existe uma partição da unidade suave subordinada a* $\mathfrak{A}$.

Demonstração: Ver [22]. ∎

Dada (M, g) uma variedade Riemanniana n-dimensional suave, seja $\{(\Omega_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ um atlas suave sobre M. Pelo Teorema 1.1, obtemos uma partição da unidade suave, $\{\psi_\alpha\}$, subordinada ao conjunto $\mathfrak{A} = \{\Omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Dada $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com suporte compacto, definimos a integral de f sobre um domínio $\Omega \subset M$ por

$$\int_\Omega f dv_g = \sum_{\alpha \in A} \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap \Omega)} \left(f \circ \varphi_\alpha^{-1}\right)\left(\psi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}\right) \sqrt{|g|} dx,$$

onde $|g|$ é o determinante da matriz (g_{ij}), representada pelos coeficientes da métrica g no atlas acima e dx é o elemento de volume do $\mathbb{R}^n$. Pela notação acima, diremos que dv_g é o coeficiente de volume de M. Quando $f \equiv 1$ é a função constante 1 e Ω é um domínio limitado, então

$$\int_\Omega dv_g = \mathrm{Vol}(\Omega).$$

1.2 Gradiente, Divergente, Laplaciano, Hessiano

Definição 1.4. (Referencial Local Móvel) *Sejam* M^n *uma variedade,* $p \in M$ *e* U *uma vizinhança de* p *onde é possível definir campos* $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$*, de modo que em cada* $q \in U$*, os vetores* $\{X_i(q), i = 1, \ldots, n\}$ *formam uma base de* T_qM*. Diremos, neste* *caso, que* $\{X_i, i = 1, \ldots, n\}$ *é um* ***referencial móvel*** *em* U. *Se o conjunto de campos* $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$ *são dois a dois ortonormais, isto é, formam uma base ortonormal de* T_qM *para cada* $q \in U$, *então dizemos que* $\{X_i, i = 1, \ldots, n\}$ *é um referencial ortonormal local.*

Definição 1.5. (Gradiente) *Seja* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função suave. O* ***gradiente*** *de* f *é o campo vetorial suave* $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$, *defindo sobre* M *por*

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f), \tag{1.1}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

É imediato, a partir da definição acima, que o gradiente de uma função suave é unicamente determinado por (1.1). A existência é assegurada pela proposição a seguir.

Proposição 1.1. *Seja* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função suave e* $\{X_1, \ldots, X_n\}$ *um referencial ortonormal local em uma vizinhança aberta* $U \subset M$. *Então, em* U *temos*

$$\nabla f = \sum_{j=1}^{n} X_j(f) X_j, \tag{1.2}$$

e o segundo membro da igualdade acima independe do referencial escolhido.

Demonstração: Seja $\nabla f = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$. Então,

$$X_i(f) = \langle \nabla f, X_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i X_i, X_j \right\rangle = a_j.$$

Logo

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} X_i(f) X_i.$$

Por outro lado, se $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ for um outro referencial ortonormal em U com $Y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_i$ em U, então a matriz $(a_{ij}(x))$ é ortogonal em todo ponto $x \in U$. Daí,

$$\sum_{j=1}^{n} Y_j(f) Y_j = \sum_{j,i,k=1}^{n} a_{ij} a_{kj} X_i(f) X_k = \sum_{j,i,k=1}^{n} \delta_{ik} X_i(f) X_k = \sum_{j=1}^{n} X_i(f) X_i.$$

■

Proposição 1.2. *Se* $f, g : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *são funções diferenciáveis (suaves), então*

(a) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$.

(b) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.

Demonstração: Para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\langle \nabla(f+g), X\rangle = X(f+g) = X(f) + X(g) = \langle \nabla f, X\rangle + \langle \nabla g, X\rangle = \langle \nabla f + \nabla g, X\rangle$$

e

$$\langle \nabla(fg), X\rangle = X(fg) = X(f)g + fX(g) = \langle \nabla f, X\rangle g + f\langle \nabla g, X\rangle = \langle g\nabla f + f\nabla g, X\rangle.$$

Donde concluimos o resultado. ■

Proposição 1.3. *Seja* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função diferenciável (suave). Dados* $p \in M$ *e* $\upsilon \in T_pM$, *seja* $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ *uma curva suave tal que* $\alpha(0) = p$ *e* $\alpha'(0) = \upsilon$. *Então*

$$\langle \nabla f, \upsilon\rangle_p = \frac{d}{dt}(f\circ\alpha)(t)\Big|_{t=0} = \upsilon(f).$$

Demonstração: Imediata. Para detalhes ver [12]. ■

Corolário 1.1. *Se* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *são funções suaves, então*

$$\nabla(\phi\circ f) = \phi'(f)\nabla f.$$

Demonstração: Seja $p \in M$, $\nu \in T_pM$ e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ uma curva suave tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \nu$. Então, pela proposição anterior,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla(\phi\circ f)(p), \nu(p)\rangle &= \frac{d}{dt}(\phi\circ f\circ\alpha)(t)\Big|_{t=0} \\
&= \phi'(f(p))\frac{d}{dt}(f\circ\alpha)(t)\Big|_{t=0} \\
&= \phi'(f(p))\langle \nabla f(p), \nu(p)\rangle \\
&= \langle \phi'(f(p))\nabla f(p), \nu(p)\rangle
\end{aligned}$$

■

Definição 1.6. (Divergente) *Seja* X *um campo vetorial suave em* M^n. *A* ***divergência*** *de* X *é a função suave em* M *dada por*

$$\begin{aligned}
\text{div } X \; : \; M &\longrightarrow \mathbb{R} \\
p &\longmapsto (\text{div } X)(p) = \mathrm{tr}\{\upsilon \longmapsto (\nabla_\upsilon X)(p)\}
\end{aligned}$$

onde $\upsilon \in T_pM$ *e* tr *denota o traço de operador linear entre chaves.*

Dizemos que um referencial (ortonormal) $\{X_1, \ldots, X_n\}$ em um aberto $U \subset M$ é **geodésico** em $p \in U$ se $(\nabla_{X_i} X_j)(p) = 0$ para todos $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Proposição 1.4. *Seja* X *um campo suave em* M^n *e* $\{X_1, \ldots, X_n\}$ *um referencial ortonormal local em uma vizinhança aberta* $U \subset M$. *Se* $X = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ *em U, então*

$$\text{div } X = \sum_{i=1}^{n} \big(X_i(a_i) - \langle \nabla_{X_i} X_i, X \rangle \big). \tag{1.3}$$

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in U$, *então temos em p que*

$$\text{div } X = \sum_{i=1}^{n} X_i(a_i).$$

Demonstração:

Pela definição de divergência de um campo vetorial, temos

$$\begin{aligned} \text{div } X &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{X_i} X, X_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} X_i \langle X, X_i \rangle - \langle X, \nabla_{X_i} X_i \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(X_i(a_i) - \langle X, \nabla_{X_i} X_i \rangle \big) \end{aligned}$$

O resto segue da definição de referencial geodésico. ■

Proposição 1.5. *Se* X, Y *são campos vetoriais suaves em* M^n *e* $f : M^n \longrightarrow R$ *é uma função suave, então*

(a) $\text{div } (X + Y) = \text{div } X + \text{div } Y$.

(b) $\text{div } (fX) = f(\text{div } X) + \langle \nabla f, X \rangle$.

Demonstração: Vide [9]. ■

Teorema 1.2. (Divergência) *Seja* M *uma variedade Riemanniana orientada e* Ω *um domínio de* M *com fronteira suave* $\partial\Omega$. *Se* ν *é um campo vetorial normal unitário ao longo de* $\partial\Omega$, *então para* $X \in \mathfrak{X}(M)$, *com suporte compacto em* M *temos*

$$\int_{\Omega} \text{div } X dv_g = \int_{\partial\Omega} \langle X, \nu \rangle da.$$

Demonstração: Vide [9]. ■

Definição 1.7. (Laplaciano) *Sejam* M *uma variedade Riemanniana e* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função suave. O* ***Laplaciano*** *de* f *é a função* $\Delta f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$\Delta f = -\text{div }(\nabla f). \tag{1.4}$$

Proposição 1.6. *Seja* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função suave e* $\{X_1, \ldots, X_n\}$ *um referencial ortonormal em um aberto* $U \subset M$. *Então*

$$-\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \big(X_i(X_i(f)) - (\nabla_{X_i} X_i)(f)\big) \tag{1.5}$$

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in U$, *então temos em p que*

$$-\Delta f = \sum_{i=1}^{n} X_i(X_i(f)).$$

Demonstração:

Pela proposição 1.1, temos que $\nabla f = \sum_{i=1}^{n} X_i(f) X_i$. Agora, segue da definição de laplaciano de uma função e da proposição 1.4 que

$$-\Delta f = \text{div }(\nabla f) = \sum_{i=1}^{n} \big(X_i(X_i(f)) - \langle \nabla_{X_i} X_i, \nabla f \rangle\big) \overset{(1.1)}{=} \sum_{i=1}^{n} \big(X_i(X_i(f)) - (\nabla_{X_i} X_i)(f)\big).$$

■

Definição 1.8. (Hessiano) *Seja* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função suave. O* ***Hessiano*** *de* f *em* $p \in M$ *é o operador linear* $\big(\text{Hess } f\big)_p : T_pM \longrightarrow T_pM$, *dado por*

$$\big(\text{Hess } f\big)_p(v) = \nabla_v \nabla f.$$

Segue das propriedades da conexão Riemanniana que se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é qualquer extensão de v em uma vizinhança de $p \in M$, então

$$\big(\text{Hess } f\big)_p(v) = \big(\nabla_X \nabla f\big)(p).$$

Proposição 1.7. *Se* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função suave e* $p \in M$, *então* $\big(\text{Hess } f\big)_p : T_pM \longrightarrow T_pM$ *é um operador linear auto-adjunto.*

Demonstração: Vide [12]. ■

Proposição 1.8. *Se* $f : M \longrightarrow$ *é uma função suave, então*

$$-\Delta f = \text{tr}\big(\text{Hess } f\big). \tag{1.6}$$

Demonstração: É suficiente provar a igualdade do enunciado em cada $p \in M$, pois $-\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$ e o $\operatorname{div}(\nabla f)$ é uma função real em M. Para tanto, seja $U \subset M$ uma vizinhança de p onde esteja definido um referencial móvel $\{X_1, \ldots, X_n\}$. Então,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\big(\text{Hess } f\big)_p &= \big\langle \big(\text{Hess } f\big)_p(X_i), X_i\big\rangle = \big\langle \big(\nabla_{X_i}\nabla f\big), X_i\big\rangle_p = \\ &= \operatorname{div}\big(\nabla f\big)(p) = -\Delta f(p). \end{aligned}$$

■

1.3 Curvaturas

Definição 1.9. (Curvatura) *A **curvatura** R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z, \ \forall Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Observe que se $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X,Y)Z = 0$ para todo X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$.

Em termos de um sistema de coordenadas $(U, x_1, \ldots, x_n)$ em torno de $p \in M$. Seja $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Como $[X_i, X_j] = 0$, obteremos

$$R(X_i, X_j)X_k = \nabla_{X_j}\nabla_{X_i}X_k - \nabla_{X_i}\nabla_{X_j}X_k.$$

E ainda, $\nabla_{X_i}X_k = \sum\limits_l \Gamma_{ik}^l X_l$ e $\nabla_{X_j}X_k = \sum\limits_l \Gamma_{jk}^l X_l$. Daí,

$$\begin{aligned} R(X_i, X_j)X_k &= \nabla_{X_j}\nabla_{X_i}X_k - \nabla_{X_i}\nabla_{X_j}X_k = \sum_l \nabla_{X_j}\Gamma_{ik}^l X_l - \sum_l \nabla_{X_i}\Gamma_{jk}^l X_l = \\ &= \sum_l \Big[X_j(\Gamma_{ik}^l)X_l + \Gamma_{ik}^l \nabla_{X_j}X_l\Big] - \sum_l \Big[X_i(\Gamma_{jk}^l)X_l + \Gamma_{jk}^l \nabla_{X_i}X_l\Big] = \\ &= \sum_l \Big[X_j(\Gamma_{ik}^l)X_l + \Gamma_{ik}^l \sum_s \Gamma_{jl}^s X_s - X_i(\Gamma_{jk}^l)X_l - \Gamma_{jk}^l \sum_s \Gamma_{il}^s X_s\Big] = \\ &= \sum_s \left[\frac{\partial}{\partial x_j}(\Gamma_{ik}^s) - \frac{\partial}{\partial x_i}(\Gamma_{jk}^s) + \sum_l \Big(\Gamma_{ik}^l\Gamma_{jl}^s - \Gamma_{jk}^l\Gamma_{il}^s\Big)\right] X_s. \end{aligned}$$

Proposição 1.9. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:*

(i) R *é* $\mathcal{C}^\infty(M)$*-bilinear em* $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$*, isto é,*

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

$f,\ g \in \mathcal{C}^\infty(M),\ X_1,\ X_2,\ Y_1,\ Y_2 \in \mathfrak{X}(M).$

(ii) *Para todo par* $X,\ Y \in \mathfrak{X}(M)$*, o operador curvatura* $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ *é* $\mathcal{C}^\infty(M)$*-linear, isto é,*

$$R(X,Y)(Z+W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W,$$

$$R(X,Y)(fZ) = fR(X,Y)Z,$$

$f \in \mathcal{C}^\infty(M),\ Z,\ W \in \mathfrak{X}(M).$

(iii) *Vale a Primeira Identidade de Bianchi.*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0. \tag{1.7}$$

(iv) *Para todo* $X,\ Y,\ Z,\ T \in \mathfrak{X}(M)$ *valem as seguintes propriedades de simetria:*

(a) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle + \langle R(Y,Z)X, T\rangle + \langle R(Z,X)Y, T\rangle = 0$

(b) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(Y,X)Z, T\rangle$

(c) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(X,Y)T, Z\rangle$

(d) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = \langle R(Z,T)X, Y\rangle$.

Demonstração: Vide [12]. ■

Definição 1.10. (Curvatura Seccional) *Dado um ponto* $p \in M$ *e um subespaço bidimensional* $\sigma \subset T_pM$*, o número real*

$$K(\sigma) = K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2},$$

onde $\{x,y\}$ *é uma base qualquer de* σ *e* $|\ x \wedge y\ |^2 = \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2$ *é a área do paralelogramo determinado por* x *e* y*, é chamado* ***curvatura seccional*** *de* σ *em p (verifica-se que* $K(\sigma)$ *não depende da escolha dos vetores* $x,y \in \sigma$*).*

No caso particular em que M tem curvatura seccional constante, digamos, K_0, isto é, para todo ponto $p \in M$ e para todo plano $\sigma \subset T_pM$, $K(\sigma) = K_0$ temos que o tensor de curvatura de M, R^{K_0}, é dado simplesmente por

$$R^{K_0}(x,y)z = K_0(\langle x,z\rangle y - \langle y,z\rangle x), \quad \forall x,y,z \in T_pM.$$

Definição 1.11. (Formas Espacais) *Seja* M *uma variedade Riemanniana* m*-dimensional. Se* M *tiver curvatura seccional constante igual a* k*, então diremos que* M *é uma* ***forma espacial*** *de dimensão* m *curvatura seccional constante* k*. Para* M *variedade qualquer, denotaremos por* $\mathbb{M}_k$ *a forma espacial de curvatura seccional constante* k *e dimensão* $m = \mathrm{dim}(M)$.

As variedades Riemannianas de curvatura seccional constante desempenham um papel fundamental no desenvolvimento da Geometria Riemanniana, por possuirem uma geometria relativamente simples e bem conhecida. Servem como espaços modelo para geometria de comparação. Construções geométricas com tais espaços são menos complicadas de serem feitas do que quando se considera variedades abstratas quaisquer.

Definição 1.12. (Tensor de Ricci) *Sejam* M *uma variedade Riemanniana. Dados* X*,* $Y \in \mathfrak{X}(M)$ *o* ***tensor de Ricci*** *é definido por*

$$\mathrm{ric}^M(X,Y)(p) = \mathrm{tr}\left\{z \longmapsto \big(R(X,z)Y\big)(p)\right\},$$

ou se $\{X_1,\dots,X_n\}$ *é um referencial ortonormal local*

$$\mathrm{ric}^M(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(X,X_i)Y, X_i\rangle.$$

Definição 1.13. (Curvatura Ricci) *Sejam* M *uma variedade Riemanniana,* $p \in M$*,* x *um vetor unitário em* T_pM*. A* ***curvatura Ricci*** *de* M *na direção* x *em* p *é definida por*

$$\mathrm{Ric}_p^M(x) = \mathrm{ric}^M(x,x)(p). \tag{1.8}$$

Se $\{z_1,\dots,z_{n-1},z_n = x\}$ *for uma base ortonormal de* T_pM*, então* (ver [*12*])*, a curvatura Ricci pode ser escrita como*

$$\mathrm{Ric}_p^M(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(x,z_i)x, z_i\rangle. \tag{1.9}$$

Seja $\mathbb{M}_k$ é a forma espacial de curvatura seccional constante k, n-dimensional. Seja $\{X_1, \ldots, X_n\}$ um referencial ortonormal local em torno de $p \in \mathbb{M}_k$. Então o tensor de Ricci de $\mathbb{M}_k$ na direção p é dada por

$$\begin{aligned}
\mathrm{ric}^{\mathbb{M}_k}(X,Y)(p) &= \sum_{i=1}^{n} \langle R(X,X_i)Y, X_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle k(\langle X,Y\rangle X_i - \langle X_i,Y\rangle X), X_i\rangle \\
&= k\sum_{i=1}^{n} \langle \langle X,Y\rangle X_i - \langle X_i,Y\rangle X, X_i\rangle \\
&= k\sum_{i=1}^{n} \big(\langle X,Y\rangle\langle X_i,X_i\rangle - \langle X_i,Y\rangle\langle X,X_i\rangle\big) \\
&= k\sum_{i=1}^{n} \langle X,Y\rangle - k\sum_{i=1}^{n} \langle X_i,Y\rangle\langle X,X_i\rangle \\
&= kn\langle X,Y\rangle - k\langle X,Y\rangle \\
&= k(n-1)\langle X,Y\rangle.
\end{aligned}$$

Em particular, obtemos que a curvatura Ricci de $\mathbb{M}_k$ na direção X, unitário, é dada por

$$\mathrm{Ric}_p^{\mathbb{M}_k}(X) = \mathrm{ric}^{\mathbb{M}_k}(X,X) = k(n-1)\langle X,X\rangle = k(n-1).$$

Assim, para M uma variedade Riemanniana e $C \in \mathbb{R}$ qualquer, diremos que

$$\mathrm{ric}^M \geqslant C,$$

quando

$$\mathrm{ric}^M(X,X)(p) \geqslant C\langle X,X\rangle,$$

para todo $p \in M$ e todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.14. (Curvatura Escalar) *Sejam M uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e $\{z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n\}$ uma base ortonormal de T_pM. A **curvatura escalar** de M em p é definida por*

$$K(p) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ric}_p^M(z_j). \tag{1.10}$$

A curvatura Ricci e a curvatura escalar não dependem da escolha das correspondentes bases ortonormais, ver [12].

Definição 1.15. (Ponto de Mínimo, Cut Point, Cut Locus) *Seja* M *uma variedade Riemanniana completa, seja* $\mathsf{p} \in \mathsf{M}$ *e seja* $\gamma : [0, \infty) \longrightarrow \mathsf{M}$ *uma geodésica normalizada com* $\gamma(0) = \mathsf{p}$*. Em [12] vê-se que se* $\mathsf{t} > 0$ *é suficientemente pequeno* $\operatorname{dist}(\gamma(0), \gamma(\mathsf{t})) = \mathsf{t}$*, ou seja,* $\gamma([0, \mathsf{t}])$ *é uma geodésica minimizante. Ademais, se* $\gamma(\mathsf{t}_1)$ *não é minimizante, o mesmo se passa para todo* $\mathsf{t} > \mathsf{t}_1$*. Por continuidade, o conjunto dos números* $\mathsf{t} > 0$ *para os quais* $\operatorname{dist}(\gamma(0), \gamma(\mathsf{t})) = \mathsf{t}$ *é da forma* $[0, \mathsf{t}_0]$ *ou* $[0, \infty)$*. Se* $I_\gamma = \{\mathsf{t} > 0; \operatorname{dist}(\gamma(0), \gamma(\mathsf{t})) = \mathsf{t}\}$ *então* I_γ *é conexo e se* I_γ *for limitado e* $\mathsf{t}_0 = \sup I_\gamma$*, chamaremos* $\gamma(\mathsf{t}_0)$ *de* ***ponto de mínimo*** *de* p *ao longo de* γ *e* $\mathsf{t}_0 = \sup I_\gamma$ *de* ***cut point****. Se* I_γ *for ilimitado, dizemos que* γ *é um raio geodésico e, para quaisquer* $\mathsf{t}_1, \mathsf{t}_2 \in [0, \infty)$*,* $\gamma_{|[\mathsf{t}_1, \mathsf{t}_2]}$ *é geodésica minimizante ligando* $\gamma(\mathsf{t}_1)$ *a* $\gamma(\mathsf{t}_2)$*. Chamaremos de* ***cut locus*** *de* p *o conjunto dos pontos mínimos de* p *ao longo de todas as geodésicas de* M *que partem do ponto* p*. Tal conjunto será denotado por* $\mathsf{Cut}(\mathsf{p})$*.*

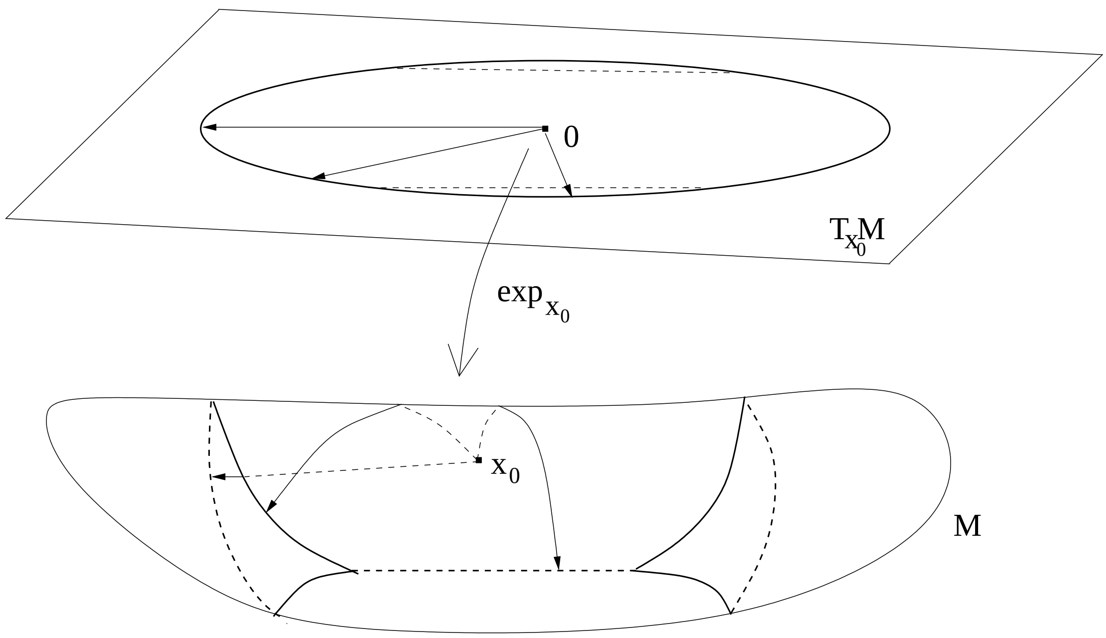


Figura 1.1: Cut Locus

Capítulo 2

Noções Preliminares

2.1 Fórmula de Weitzenböck

Lema 2.1. (Identidade de Ricci). *Seja* M *uma variedade Riemanniana* n*-dimensional e* $\{X_i\}_{i=1}^n$ *um referencial móvel local em uma vizinhança de* $p \in M$. *Se* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função suave, então para* $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$

$$f_{kji} = f_{kij} + \sum_{s=1}^{n} R_{ijk}^{s} f_s, \tag{2.1}$$

onde

$$f_i = X_i(f) = \langle \nabla f, X_i \rangle$$

e R_{ijk}^s *são os coeficientes do tensor de curvatura* R, *com relação o referencial* $\{X_i\}_{i=1}^n$, *dados por*

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_{s=1}^{n} R_{ijk}^{s} X_s.$$

Demonstração: Ver [13]. ∎

Proposição 2.1. (Fórmula de Weitzenböck). *Seja* M *uma variedade Riemanniana* n*-dimensional. Se* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função suave, então*

$$\langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle = |\mathrm{Hess}\ f|^2 + \frac{1}{2}\Delta(\|\nabla f\|^2) + \mathrm{ric}^M(\nabla f, \nabla f),$$

onde Hess *denota o Hessiano de f.*

Demonstração: Considere uma sistema local de coordenadas em torno de um ponto $p \in M$ qualquer e $\{X_i\}_{i=1}^n$ um referencial móvel local em uma vizinhança de p, geodésico em p. Denotaremos

$$f_i = X_i(f) = \langle \nabla f, X_i \rangle.$$

Disso, obtemos pela proposição 1.1

$$\|\nabla f\|^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i^2.$$

Derivando a expressão acima em relação a j, tem-se

$$(\|\nabla f\|^2)_j = \frac{\partial}{\partial x^j}(\|\nabla f\|^2) = (\sum_{i=1}^{n} f_i^2)_j = 2\sum_{i=1}^{n} f_i f_{ij},$$

isto é,

$$\frac{1}{2}(\|\nabla f\|^2)_j = \sum_{i=1}^{n} f_i f_{ij}.$$

Derivando a expressão acima, novamente em relação a j,

$$\frac{1}{2}(\|\nabla f\|^2)_{jj} = \sum_{i=1}^{n} (f_{ij}^2 + f_i f_{ijj}).$$

Pela proposição 1.6, obtemos

$$-\frac{1}{2}\Delta(\|\nabla f\|^2) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\|\nabla f\|^2)_{jj} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(f_{ij}^2 + f_i f_{ijj}) = \sum_{i,j=1}^{n}(f_{ij}^2 + f_i f_{ijj}). \tag{2.2}$$

Como o Hessiano é um 2-tensor covariante simétrico temos $f_{ij} = f_{ji}$ e portanto $f_{ijj} = f_{jij}$. Assim, pela Identidade de Ricci (lema 2.1),

$$f_{ijj} = f_{jij} = f_{jji} + \sum_{k=1}^{n} R_{iji}^k f_s.$$

Substituindo essa expressão na equação (2.2), obtemos

$$-\frac{1}{2}\Delta(\|\nabla f\|^2) = \sum_{i,j,k=1}^{n} [f_{ij}^2 + f_i(f_{jji} + R_{iji}^k f_s)].$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\Delta(\|\nabla f\|^2) &= \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} f_i f_{jji} + \sum_{i,j,k=1}^{n} R_{iji}^k f_k f_i \\
&= |\text{Hess } f|^2 - \sum_{i=1}^{n} f_i(\Delta f)_i + \sum_{i,k=1}^{n} R_{ki} f_k f_i \\
&= |\text{Hess } f|^2 - \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + \sum_{i,k=1}^{n} \text{ric}^M(X_k, X_i) f_k f_i \\
&= |\text{Hess } f|^2 - \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + \text{ric}^M\left(\sum_{k=1}^{n} X_k f_k, \sum_{i=1}^{n} X_i f_i\right) \\
&= |\text{Hess } f|^2 - \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + \text{ric}^M(\nabla f, \nabla f).
\end{aligned}$$

Com isso concluimos a demonstração. ∎

Teorema 2.1. (Hopf − Rinow). *Seja* M *uma variedade Riemanniana e seja* $p \in M$*. As afirmações abaixo são equivalentes:*

(a) $\exp_p$ *está definida em todo* T_pM*.*

(b) *Os conjuntos limitados e fechados em* M *são compactos.*

(c) M *é completa como espaço métrico.*

(d) M *é geodesicamente completa.*

(e) *Existe uma sucessão de compactos* $K_n \subset M$*,* $K_n \subset \mathrm{int}(K_{n+1})$ *e* $\cup_n K_n = M$*, tais que se* $q_n \notin K_n$*, então* $\mathrm{dist}(p, q_n) \to \infty$*, ou seja,* $\mathrm{dist}(p, M \backslash K_n) \to \infty$*.*

Além disso, cada uma das afirmações acima implicam que

(f) *Para todo* $q \in M$ *existe uma geodésica* γ *ligando* p *a* q *com comprimento de* $\gamma = \mathrm{dist}(p, q)$*.*

Demonstração: Ver [12]. ■

Corolário 2.1. *Se* M *é compacta, então* M *é completa.*

2.2 Desigualdades Isoperimétricas

Definição 2.1. *Seja* M *uma variedade Riemanniana. Para cada subvariedade aberta* $\Omega \subset M$*, com fecho compacto e fronteira suave definimos a* ***constante de Cheeger****,* h_M*, por*

$$h_M = \inf_{\Omega} \frac{\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial\Omega)}{\mathrm{Vol}(\Omega)}.$$

No que se segue, seja M uma variedade Riemanniana m-dimensional e V seu elemento m-dimensional de volume.

Teorema 2.2. (Fórmula da coarea). *Seja* Ω *uma domínio compacto de* M*. Seja* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função em* $\mathcal{C}^0(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathrm{int}(\Omega))$*, onde* $f_{|\partial\Omega} = 0$*. Para qualquer valor regular* t *de* $|f|$*, sejam*

$$\Gamma(t) = |f|^{-1}(t), \qquad A(t) = A(\Gamma(t)),$$

e dA_t *o elemento* $(m-1)$*-dimensional de volume de* $\Gamma(t)$*. Então*

$$dV_{|\Gamma(t)} = \frac{dA_t dt}{\|\nabla f\|}, \tag{2.3}$$

e para qualquer função $\phi \in L^1(\Omega)$ *temos*

$$\int_\Omega \phi\|\nabla f\|dV = \int_0^{\sup f} dt \int_{\Gamma(t)} \phi dA_t. \tag{2.4}$$

Demonstração: Ver [9]. ■

Teorema 2.3. (Bishop). *Seja* M *uma variedade Riemanniana compacta* m*-dimensional tal que* $\mathrm{ric}^M \geqslant (m-1)k > 0$*. Então para todo* $x_0 \in M$ *e* $r_0 > 0$*, temos*

$$\mathrm{Vol}(B(x_0, r_0)) \leqslant \mathrm{Vol}(V_m(k, r_0)),$$

onde $B(x_0, r_0)$ *é a bola de centro* x_0 *e raio* r_0 *em* M *e* $V_m(k, r_0)$ *é uma bola de raio* r_0 *em* $\mathbb{M}_k$*, o espaço de curvatura constante* k *e de mesma dimensão que* M*. A igualdade vale se, somente se,* $B(x_0, r_0)$ *é isometrico a* $V_m(k, r_0)$*.*

Demonstração: Ver [9]. ■

Teorema 2.4. (Desigualdade de Gromov). *Seja* M *uma variedade Riemanniana compacta* m*-dimensional tal que* $\mathrm{ric}^M \geqslant (m-1)k > 0$ *e seja* $\mathbb{M}_k$ *a esfera* m*-dimensional de curvatura seccional igual a* $k > 0$*. Então o teorema de Bishop (teorema 2.3) nos dá que*

$$\beta := \frac{\mathrm{Vol}(M)}{\mathrm{Vol}(\mathbb{M}_k)} \leqslant 1.$$

Assim para qualquer $\Omega \subset M$ *podemos associar um disco* $\Omega^* \subset \mathbb{M}_k$ *satisfazendo*

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \beta \mathrm{Vol}(\Omega^*).$$

Então

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial\Omega) \geqslant \mathrm{Vol}_{n-1}(\partial\Omega^*)$$

e a igualdade vale se, e somente se, existe uma isometria de M *em* $\mathbb{M}_k$ *que envia* Ω *em* Ω^**.*

Demonstração: Ver [9]. ■

Teorema 2.5. (Comparação de Volume de Bishop − Gromov). *Seja* M^m *uma variedade Riemanniana completa e suponhamos que, para* k *constante,*

$$\mathrm{ric}^M \geqslant (m-1)k.$$

Então

$$\mathrm{Vol}(B(x_0, r_0)) \leqslant \mathrm{Vol}(V_m(k, r_0)).$$

onde $V_m(k, r_0)$ *é uma bola geodésica de raio* r *em* $\mathbb{M}_k$*, a forma espacial de curvatura seccional constante* k*. A igualdade vale, se toda curvatura seccional ao longo de geodésicas ligando* x_0 *a* x*, para planos contendo o vetor radial, for constante igual a* k*.*

2.3 Noções de Análise Funcional

Nesta seção veremos alguns elementos de análise funcional que usaremos no próximo capítulo. Tais resultados foram extraídos de [4], [5], [25] e [17].

Definição 2.2. *Sejam* E *e* F *dois espaços vetoriais normados. Chamaremos de* $\mathfrak{L}(E, F)$ *o espaço dos* ***operadores lineares contínuos*** *(ou limitados) de* E *em* F*, munido da norma*

$$\|T\|_{\mathfrak{L}(E,F)} := \sup\{\|T(x)\|; x \in E, \|x\| = 1\},$$

ou seja, os operadores lineares $T : E \longrightarrow F$*, tais que* $\|T\|_{\mathfrak{L}(E,F)} < \infty$.

Definição 2.3. (Espaços Dual e Bidual). *Seja* E *um espaço vetorial. Se* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função linear sobre* E*, isto é,* $f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$*, para* $\alpha \in \mathbb{R}$*,* $x, y \in E$*, quaisquer, diremos que* f *é um funcional linerar sobre* E*. Se* E *é normado, denotaremos por* $E^* = \mathfrak{L}(E, \mathbb{R})$ *o conjunto dos funcionais lineares contínuos sobre* E *e o chamaremos de* ***espaço dual*** *de* E*. Chamaremos ainda de* $E^{**} = (E^*)^*$ *o* ***espaço bidual*** *de* E*. A tais espaços equiparemos com a norma dada na definição 2.2.*

Definição 2.4. (Espaço de Banach). *Seja* $E = (E, \|\cdot\|)$ *um espaço normado. Dizemos que* E *é um* ***espaço de Banach****, quando* E *é completo, em relação a norma* $\|\cdot\|$*. Ou seja, toda sequência de Cauchy em* E*, é convergente em* E*.*

Definição 2.5. (Espaço Reflexivo). *Seja* $E = (E, \|\cdot\|)$ *um espaço normado e* $(E^{**}, \|\cdot\|_{**})$ *seu espaço bidual. Defina a aplicação canônica* $J : E \longrightarrow E^{**}$ *por* $J(x)f := f(x)$*, para todo* $x \in E$*,* $f \in E^*$*. Tal aplicação é uma isometria ente* E *e* E^{**}*, isto é,* $\|J(x)\|_{**} = \|x\|$*. Se a aplicação canônica* J *for sobrejetiva diremos que* E *é um* ***espaço reflexivo****.*

Definição 2.6. (Convegência fraca). *Seja* $E = (E, \|\cdot\|)$ *um espaço de Banach. Diremos que uma seqência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* E*,* ***converge fracamente*** *para* x *em* E *se* $f(x_n)$ *converge para* $f(x)$*, para todo funcional linear contínuo* $f \in E^*$*.*

Proposição 2.2. (Propriedades da convegência fraca). *Seja* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência do espaço de Banach* $(E, \|\cdot\|)$*.*

(i) *Se* (x_n) *converge para* x *em* E*, então* (x_n) *converge fracamente para* x *em* E*.*

(ii) *Se* (x_n) *converge fracamente para* x *em* E*, então* (x_n) *é limitada em* E *e* $\|x\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$*.*

(iii) *Se* (x_n) *converge fracamente para* x *em* E *e* (f_n) *converge (fortemente) para em* E^* *(isto é,* $\|f_n - f\|_* \to 0$*), então* $f_n(x_n)$ *converge para* $f(x)$.

Demonstração: Ver [4]. ■

Teorema 2.6. (Princípio da Limitação Uniforme). *Sejam* E *e* F *dois espaços de Banach e seja* $(\Phi_i)_{i\in I}$ *uma família qualquer em* $\mathfrak{L}(E,F)$. *Se*

$$\sup_{i\in I} \|\Phi_i(f)\| < \infty \quad \forall f \in E,$$

então

$$\sup_{i\in I} \|\Phi_i\|_{\mathfrak{L}(E,F)} < \infty.$$

Em outras palavras, existe uma constante c *tal que*

$$\|\Phi_i(f)\|_{\mathfrak{L}(E,F)} < c\|f\|, \qquad \forall f \in E,\ i \in I.$$

Corolário 2.2. (Teorema de Banach − Steinhaus). *Sejam* E *e* F *dois espaços de Banach. Seja* (Φ_n) *uma sequência de operadores lineares contínuos, onde para cada* $f \in E$ *existe o limite* $\lim_n \Phi_n(f)$, *o qual denotaremos por* $\Phi(f)$. *Assim*

(a) $\sup_n \|\Phi_n\|_{\mathfrak{L}(E,F)} < \infty$.

(b) $\Phi \in \mathfrak{L}(E,F)$.

(c) $\|\Phi\|_{\mathfrak{L}(E,F)} \leqslant \liminf_n \|\Phi_n\|_{\mathfrak{L}(E,F)}$.

Proposição 2.3. *Sejam* E *e* F *dois espaços de Banach e seja* (Φ_n) *uma sequência em* $\mathfrak{L}(E,F)$. *Assuma que para todo* $f \in E$, $\Phi_n(f)$ *converge em* F, *quando* $n \to \infty$, *para um limite denotado por* Φf. *Se* $f_n \to f$ *em* E, *então* $\Phi_n(f_n) \to \Phi(f)$ *em* F.

Demonstração: Pelo item (a) do teorema de Banach-Steinhaus (corolário 2.2), existe uma constante real c tal que $\|\Phi_n\| < c$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $f_n \to f$ em E, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\Phi_n(f_n) - \Phi(f)\| &= \|\Phi_n(f_n) - \Phi_n(f) + \Phi_n(f) - \Phi(f)\| \\
&\leqslant \|\Phi_n\|\|f_n - f\| + \|\Phi_n(f) - \Phi(f)\| \\
&\leqslant c\|f_n - f\| + \|\Phi_n(f) - \Phi(f)\|.
\end{aligned}$$

Ao limite com $n \to \infty$, obtemos que $\|\Phi_n(f_n) - \Phi(f)\| \to 0$, ou seja, $\Phi_n(f_n) \to \Phi(f)$ em F. Como queriamos demonstrar. ■

Teorema 2.7. *Seja* E *um espaço de Banach reflexivo e seja* (f_n) *uma sequência limitada em* E. *Então existe uma subsequência* (f_{n_k}) *que é fracamente convergente em* E.

Demonstração: Ver [4]. ∎

Definição 2.7. (Conjuntos e domínios nodais) *Seja* M *uma variedade Riemanniana. Seja* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então o conjunto* $f^{-1}(0)$ *é dito o* ***conjunto nodal*** *de* f *e as componentes conexas de* $M \backslash f^{-1}(0)$ *são chamados* ***domínios nodais*** *de* f.

Definição 2.8. *Seja* $\Omega \subset M$ *um domínio aberto e seja* $0 < p < \infty$. *Dada* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *mensurável, com* $|f|^p$ *também mensurável, definimos*

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p d\nu_g \right)^{1/p},$$

e $L^p(\Omega) := \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } \|f\|_p < \infty\}$. *Diremos ainda que uma sequência* $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *converge em* $L^p(\Omega)$ *para* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *se* $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$. *Denotaremos por* $\mathcal{C}^k(\Omega), k \in \mathbb{N}$ *o espaço das funções* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *continuamente diferenciáveis de ordem* k.

Definição 2.9. (Convergência em medida) *Seja* (X, μ) *um espaço de medida. Dizemos que uma sequência* (f_n), *de funções reais em* X, ***converge em medida*** *para a função* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *quando*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(\{x \in X; |f_n(x) - f(x)| \geqslant \alpha\}\big) = 0,$$

para cada $\alpha > 0$.

Definição 2.10. (Convergência Uniforme) *Seja* (X, μ) *um espaço de medida. Dizemos que uma sequência* (f_n), *de funções reais em* X, ***converge uniformemente*** *para a função* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, *quando para todo* $\varepsilon > 0$ *existir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_0$ *implica*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

seja qual for $x \in X$.

Teorema 2.8. *Seja* (X, μ) *um espaço de medida e seja* (f_n) *uma sequência de funções reais em* X. *Se* f_n *converge uniformemente para uma função* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, *então* f_n *também deve convergir em medida para a mesma* f.

Demonstração: Seja $\alpha > 0$. Como f_n converge uniformemente para f, temos, para n suficientemente grande, que o conjunto

$$\{x \in X; |f_n(x) - f(x)| \geqslant \alpha\}$$

é vazio. Com isso concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X; |f_n(x) - f(x)| \geqslant \alpha\}) = \mu(\emptyset) = 0,$$

ou seja, f_n também converge em medida para f. ■

Teorema 2.9. *Seja* (X, μ) *um espaço de medida e seja* (f_n) *uma sequência de funções reais em* X. *Se* f_n *converge na norma* $L^p(X)$ *para uma função* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, *então* f_n *também deve convergir em medida para a mesma* f.

Demonstração: Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha > 0$ defina o conjunto $E_n(\alpha) := \{x \in X; |f_n(x) - f(x)| \geqslant \alpha\}$. Então

$$\int_X |f_n - f|^p d\mu \geqslant \int_{E_n(\alpha)} |f_n - f|^p d\mu \geqslant \alpha^p \int_{E_n(\alpha)} d\mu = \alpha^p \mu(E_n(\alpha)).$$

Como $\alpha > 0$, se $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$, então $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n(\alpha)) = 0$. Ou seja, a convergência L^p implica em convergência em medida. Como queríamos demonstrar. ■

Teorema 2.10. *Seja* (X, μ) *um espaço de medida e seja* (f_n) *uma sequência de funções reais em* X. *Se* f_n *converge em medida para* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, *então existe uma subsequência* (f_{n_k}) *que converge uniformemente para* f.

Demonstração: Conferir [5]. ■

Corolário 2.3. *Seja* (X, μ) *um espaço de medida e seja* (f_n) *uma sequência de funções reais em* X. *Se* f_n *converge na norma* L^p *para* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, *então existe uma subsequência* (f_{n_k}) *que converge uniformemente para* f.

Demonstração: Segue dos teoremas 2.9 e 2.10, respectivamente. ■

Teorema 2.11. (Desigualdade de Hölder). *Sejam* p *e* q *indices conjugados, isto é,* $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Se* $u \in L^p(M)$ *e* $v \in L^q(M)$. *Então* $uv \in L^1(M)$ *e*

$$\int_M |uv| \leqslant \|u\|_p \|v\|_q = \left(\int_M |u|^p\right)^{1/p} \left(\int_M |v|^q\right)^{1/q}.$$

Demonstração: Ver [4]. ∎

Definição 2.11. (Espaço de Sobolev em $\mathbb{R}^n$). *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*, um domínio aberto, e* $p \in \mathbb{R}$*,* $1 \leqslant p \leqslant \infty$*. O* ***espaço de Sobolev*** $W^{1,p}(\Omega)$ *é dado por*

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega); \exists \{g_i\}_{i=1}^n \subset L^p(\Omega) \text{ onde } \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \phi \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty, \forall i \right\}.$$

Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *definimos* $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$ *e escreveremos*

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

Definição 2.12. (Espaço de Sobolev em variedades). *Seja* M^n *uma variedade Riemannina suave. Dado* $p \geqslant 1$ *real, seja*

$$\mathcal{C}_1^p(M) := \left\{ u \in \mathcal{C}^\infty(M); \int_M |f|^p dv_g < \infty \text{ e } \int_M \|\nabla f\|^p dv_g < \infty \right\}.$$

Para $u \in \mathcal{C}_1^p(M)$*, seja ainda*

$$\|u\|_{1,p} := \left(\int_M |f|^p dv_g \right)^{1/p} + \left(\int_M \|\nabla f\|^p dv_g \right)^{1/p}.$$

Definimos o espaço de sobolev sobre a variedade M, $W^{1,p}(M)$*, como o completamento do espaço* $\mathcal{C}_1^p(M)$*, em relação a norma* $\|\cdot\|_{1,p}$ *dada acima. Quando* M *for compacta, obtemos que* $\mathcal{C}_1^p(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$*.*

Exemplo 2.1. (Derivada fraca de $|\cdot|$). *A função* $u : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$*, dada por* $u(x) = |x|$*, pertence a* $W^{1,p}(\mathbb{R})$*, onde,* $u' = \text{sinal}$*, sendo*

$$\text{sinal}(x) = \begin{cases} +1, & \textit{se } 0 < x \leqslant +1; \\ -1, & \textit{se } -1 \leqslant x < 0. \end{cases}$$

Com efeito, para $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty([-1,1])$ *qualquer, temos em particular que* $\phi(-1) = \phi(1) = 0$*.*

Logo

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(|x|\phi'(x)+\text{sinal}(x)\phi(x))dx =& \int_{-1}^{0}(|x|\phi'(x)+\text{sinal}(x)\phi(x))dx\\ &+\int_{0}^{1}(|x|\phi'(x)+\text{sinal}(x)\phi(x))dx\\ =& \int_{-1}^{0}(-x\phi'(x)-\phi(x))dx\\ &+\int_{0}^{1}(x\phi'(x)+\phi(x))dx\\ =& -x\phi(x)\Big|_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0}\phi(x)dx-\int_{-1}^{0}\phi(x)dx\\ &+x\phi(x)\Big|_{0}^{1}-\int_{0}^{1}\phi(x)dx+\int_{0}^{1}\phi(x)dx\\ =& \ 0.\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{-1}^{1}|x|\phi'(x)dx=\int_{-1}^{1}\text{sinal}(x)\phi(x)dx.$$

Teorema 2.12. (Sobolev Banach Reflexivo). *O Espaço $W^{1,p}$ é Banach para $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e é reflexivo para $1 < p < \infty$.*

Demonstração: Ver [4]. ∎

Teorema 2.13. *Seja Ω um domínio suave em $\mathbb{R}^n$ e seja $f \in W^{1,p}(\Omega)$ para $1 \leqslant p < \infty$. Então existe uma sequência (f_n) em $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_{n|\Omega}$ converge para f em $W^{1,p}(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [4]. ∎

Corolário 2.4. *Seja Ω um domínio suave em uma variedade Riemanniana n-dimensional M e seja $f \in W^{1,p}(\Omega)$ para $1 \leqslant p < \infty$. Então existe uma sequência (f_n) em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ tal que $f_{n|\Omega}$ converge para f em $W^{1,p}(\Omega)$.*

Definição 2.13. (Função de Morse). *Seja M uma variedade Riemanniana suave. Dizemos que $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse se $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e não possui pontos críticos degenerados.*

Obs 2.1. *Se M for uma variedade Riemanniana compacta e $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ for uma função de Morse, então f possui apenas uma quantidade finita de pontos críticos. Com efeito, sendo f de Morse, podemos tomar uma vizinhança em torno de cada ponto crítico onde este* *é único. Se tais vizinhanças cobrirem* M*, pelo fato de* M *ser compacta, podemos extrair uma subcobertura finita de vizinhanças desse tipo, donde* f *só possuiria uma quantidade finita de pontos críticos, pela caracterização daquelas vizinhanças. O outro caso é trivial.*

Teorema 2.14. *Seja* M *uma variedade Riemanniana suave. Dada* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função suave qualquer, então podemos aproximar* f *uniformemente por funções de Morse.*

Demonstração: Ver [25]. ∎

Corolário 2.5. (Teorema de densidade). *Seja* Ω *um domínio compacto suave em uma variedade Riemanniana n-dimensional* M *e seja* $f \in W^{1,p}(\Omega)$ *para* $1 \leqslant p < \infty$*. Então existe uma sequência* (f_n) *de funções de Morse que convergem para* f *em* $W^{1,p}(\Omega)$*.*

Demonstração: O resultado segue combinando o corolário 2.4 e o teorema 2.14. ∎

Capítulo 3

Teoremas de comparação do primeiro autovalor de Δ_p

Neste capítulo apresentaremos as extensões para o p-Laplaciano dos teoremas de comparação vistos na introdução. Estes resultados foram obtidos por Ana-Maria Matei, no artigo "First eigenvalue for the p-Laplace operator"[24]. Estabeleceremos, primeiramente, algumas notações que serão usadas no decorrer deste capítulo.

Seja M uma variedade Riemanniana, suave, completa e sem bordo. O primeiro auto valor de Δ_p em M, denotado por $\lambda_{1,p}(M)$, é caracterizado por

$$\lambda_{1,p}(M) = \inf\left\{\frac{\int_M \|\nabla f\|^p d\nu_g}{\int_M |f|^p d\nu_g};\ f \in W^{1,p}(M), f \neq 0 \text{ e } \int_M |f|^{p-2} f d\nu_g = 0\right\}. \tag{3.1}$$

Denominaremos as funções $f \in W^{1,p}(M),\ f \neq 0$, tais que $\int_M |f|^{p-2} f d\nu_g = 0$, de **funções admissíveis**.

Agora, considerando o problema de Dirichlet para Δ_p

$$\Delta_p f(x) = \mu |f|^{p-2} f, \quad x \in \Omega,$$
$$f(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

onde Ω é um domínio limitado de M. Denotaremos por $\mu_{1,p}(\Omega)$ o infimo do conjunto dos autovalores deste problema, caracterizado por

$$\mu_{1,p}(\Omega) = \inf\left\{\frac{\int_\Omega \|\nabla f\|^p d\nu_g}{\int_\Omega |f|^p d\nu_g};\ f \in W^{1,p}(\Omega), f \neq 0\right\}. \tag{3.2}$$

Ao longo do capítulo, denotaremos por $B(x_0, r_0)$ a bola geodésica de centro x_0 e raio r_0 em M^m, por $V_m(k, r_0)$ a bola geodésica de mesmo raio r_0 em $\mathbb{M}_k$, a forma espacial de curvatura seccional constante k e dimensão $m = \dim(M)$, (cf. definição 1.11) e por $d_M := \sup_{p,q\in M} \operatorname{dist}_M(p,q)$ o diâmetro de M.

3.1 Teorema de Comparação do tipo Cheng para o primeiro autovalor do p-Laplaciano

Teorema 3.1. (Teorema 1.1 de [24]). *Seja M uma variedade Riemanniana m-dimensional completa e seja k uma constante real tal que $\operatorname{ric}^M \geqslant (m-1)k$. Então para quaisquer $x_0 \in M, r_0 \in (0, d_M)$ e $p \geqslant 2$*

$$\mu_{1,p}\big(B(x_0,r_0)\big) \leqslant \mu_{1,p}\big(V_m(k,r_0)\big).$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $B(x_0,r_0)$ é isométrico a $V_m(k,r_0)$.

Demonstração: Seja $f : V_m(k,r_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma primeira autofunção do problema de Dirichlet para Δ_p em $V_m(k,r_0) \subset \mathbb{M}_k$. Como $\mathbb{M}_k$ é dois-pontos homogêneo, temos, pelo mesmo argumento de [3], que f é radial, isto é, existe $\phi : [0,r_0] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f = \phi \circ r_k$, onde $r_k : V_m(k,r_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função distância de $V_m(k,r_0) \subset \mathbb{M}_k$, em relação ao centro de $V_m(k,r_0)$. Note que $f = \phi \circ r_k$ está bem-definida, pois $r_k(V_m(k,r_0)) = [0,r_0]$. Ainda por [3], podemos assumir que $f > 0$, donde $\phi > 0$. Seja $r : B(x_0,r_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ a função distância de $B(x_0,r_0) \subset M$, em relação a x_0. Veja que $\operatorname{dist}(\cdot,x_0) : M\backslash \mathrm{Cut}(x_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ é suave e $r_0 < d_M$, daí $B(x_0,r_0)\cap \mathrm{Cut}(x_0) = \emptyset$, donde $r = \operatorname{dist}(\cdot,x_0)_{|B(x_0,r_0)}$ também é suave. Então, de modo análogo, r_k é suave e $f \in W_0^{1,p}(V_m(k,r_0))$. Com isso, $\phi \in W_0^{1,p}([0,r_0])$ e, pelo fato de r ser suave, $\phi \circ r \in W_0^{1,p}(B(x_0,r_0))$. Assim, pela caracterização variacional de $\mu_{1,p}$, dada na expressão (3.2),

$$\mu_{1,p}\big(B(x_0,r_0)\big) \leqslant \frac{\int_{B(x_0,r_0)} \|\nabla\phi \circ r\|^p d\nu_g}{\int_{B(x_0,r_0)} |\phi \circ r|^p d\nu_g}. \tag{3.3}$$

Para $u \in T_{x_0}M, |u| = 1$, seja $a_u := \min\{l_u, r_0\}$, onde $\exp_{x_0}(l_u u)$ é o *cut point* de x_0 ao longo da geodésica $t \mapsto \exp_{x_0}(tu)$ (ver definição 1.15). Como M é completa, segue do teorema de Hopf-Rinow (teorema 2.1) que

$$B(x_0,r_0) = \{\exp_{x_0}(tu);\ u \in S^{m-1} \subset T_{x_0}M, t \in [0,a_u)\}.$$

Como a exponencial, $\exp_{x_0}$, restrita ao domínio estrelado $A := \{tu;\ u \in S^{m-1} \subset T_{x_0}M, t \in [0,a_u)\}$ é um difeomorfismo sobre $B(x_0,r_0)$, então, pelo teorema da mudança de variáveis, depois pelo teorema de Fubini e usando que $\nabla(\phi \circ r) = \phi' \nabla r$ (corolário 1.1), obtemos

$$\int_{B(x_0,r_0)} \|\nabla \phi \circ r\|^p d\nu_g = \int_{S^{m-1}} \left(\int_{(0,a_u]} |\phi'|^p t^{m-1} \theta(tu) dt \right) d\sigma \tag{3.4}$$

e

$$\int_{B(x_0,r_0)} |\phi \circ r|^p d\nu_g = \int_{S^{m-1}} \left(\int_{(0,a_u]} |\phi|^p t^{m-1} \theta(tu) dt \right) d\sigma, \tag{3.5}$$

onde $d\sigma$ é o elemento de volume de $S^{m-1} \subset T_{x_0}M$ e $t^{m-1}\theta(tu)$ é a densidade de volume induzida por $\exp_{x_0}$. Abusando da notação, ϕ está denotando $\phi \circ r$, que será comum a partir daqui. Ademais, como estamos supondo $f > 0$,

$$\begin{aligned} \Delta_p f &= \mu_{1,p}\big(V_m(k, r_0)\big)|f|^{p-2} f \\ &= \mu_{1,p}\big(V_m(k, r_0)\big) f^{p-2} f \\ &= \mu_{1,p}\big(V_m(k, r_0)\big) f^{p-1}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \Delta_p f &= -\text{div } \big(\|\nabla f\|^{p-2} \nabla f\big) \\ &= \|\nabla f\|^{p-2}\big(-\text{ div } (\nabla f)\big) - \big\langle \nabla\big(\|\nabla f\|^{p-2}\big), \nabla f \big\rangle \\ &= \|\nabla f\|^{p-2} \Delta f - \big\langle \nabla\big(\|\nabla f\|^{p-2}\big), \nabla f \big\rangle. \end{aligned}$$

Usando que $f = \phi \circ r$, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta f &= -\text{div } (\nabla f) = -\text{div } \big(\phi' \nabla r\big) \\ &= \phi'\big(-\text{ div } (\nabla r)\big) - \big\langle \nabla \phi', \nabla r \big\rangle \\ &= \phi' \Delta r - \phi'', \end{aligned}$$

pois,

$$\big\langle \nabla \phi', \nabla r \big\rangle = \big\langle \nabla \phi'(r) \nabla r \big\rangle = \nabla r\big(\phi'(r)\big) = \frac{\partial}{\partial r} \phi'(r) = \phi''(r) = \phi''.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\big\langle \nabla\big(\|\nabla f\|^{p-2}\big), \nabla f\big\rangle &= \big\langle \nabla\big(|\phi'|^{p-2}\big), \phi'\nabla r\big\rangle \\
&= \phi'\big\langle \nabla\big(|\phi'|^{p-2}\big), \nabla r\big\rangle \\
&= \phi'\nabla r\big(|\phi'(r)|^{p-2}\big) \\
&= \phi'\frac{\partial}{\partial r}\big(|\phi'(r)|^{p-2}\big) \\
&= \phi'(p-2)|\phi'|^{p-3}\frac{\partial}{\partial r}\big(|\phi'(r)|\big) \\
&= (p-2)\phi'|\phi'|^{p-3}\mathrm{sinal}(\phi')\phi'' \\
&= (p-2)|\phi'|^{p-2}\phi''.
\end{aligned}$$

Disso,

$$\begin{aligned}
\mu_{1,p}\big(V_m(k,r_0)\big)\phi^{p-1} = \Delta_p f &= \|\nabla f\|^{p-2}\Delta f - \big\langle \nabla\big(\|\nabla f\|^{p-2}\big), \nabla f\big\rangle \\
&= |\phi'|^{p-2}\big(\phi'\Delta r - \phi''\big) - (p-2)|\phi'|^{p-2}\phi'' \\
&= |\phi'|^{p-2}\big[\phi'\Delta r - \phi'' - (p-2)\phi''\big] \\
&= |\phi'|^{p-2}\big[\phi'\Delta r - (p-1)\phi''\big].
\end{aligned}$$

Usando [11]

$$\begin{aligned}
-\Delta r &= \frac{(\theta_k^m(tu)t^{m-1})'}{\theta_k^m(tu)t^{m-1}} \\
&= \frac{(\theta_k^m(tu))'t^{m-1} + (m-1)\theta_k^m(tu)t^{m-2}}{\theta_k^m(tu)t^{m-1}} \\
&= \frac{\theta_k^m(tu)'}{\theta_k^m(tu)} + \frac{m-1}{t},
\end{aligned} \tag{3.6}$$

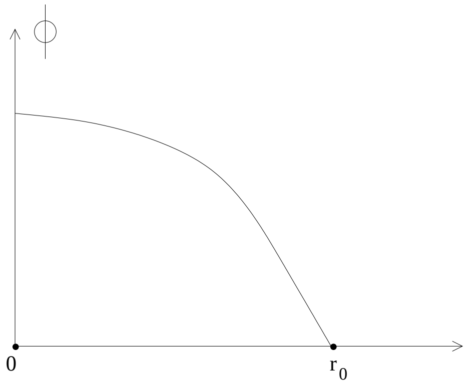
donde

$$\mu_{1,p}\big(V_m(k,r_0)\big)\phi^{p-1} = -|\phi'|^{p-2}\left[(p-1)\phi'' + \phi'\left(\frac{\theta_k^m(tu)'}{\theta_k^m(tu)} + \frac{m-1}{t}\right)\right]. \tag{3.7}$$

Como $\phi > 0$ e $\phi(r_0) = 0$ (pois $\phi \circ r_k \in W_0^{1,p}$ e $\phi(r_0) = \phi \circ r_k(\overline{x})$, para algum $\overline{x} \in \partial V_m(k,r_0)$) temos que $\phi' < 0$ em $(0,r_0)$. De fato, como $\phi \in W^{1,p}((0,r_0))$ obtemos, por [21], que $\phi \in \mathcal{C}^{1,\alpha}((0,r_0))$. Então, pela equação (3.7) acima, $\phi'(r) \neq 0$, para todo $r \in (0,r_0)$, pois $\mu_{1,p}\big(V_m(k,r_0)\big)$ e ϕ são positivos. Agora, suponha, por absurdo, que existe $r_1 \in (0,r_0)$, tal que, $\phi'(r_1) > 0$. Como $\phi > 0$ em $(0,r_0)$ e $\phi(r_0) = 0$, obtemos que

$$\frac{\phi(r_0) - \phi(r_1)}{r_0 - r_1} = -\frac{\phi(r_1)}{r_0 - r_1} < 0.$$

Pelo teorema do valor médio, existe $r_2 \in (r_1, r_0)$ tal que $\phi'(r_2) < 0$. Portanto, pelo teorema do valor intermediário, existe $r \in (r_1, r_2)$, tal que $\phi'(r) = 0$. Uma contradição (ver Figura 3.1 (b)). Logo $\phi' < 0$ em $(0, r_0)$ (ver Figura 3.1 (a)).



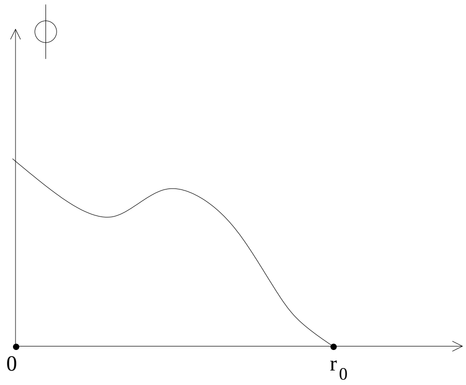


Figura 3.1:

Agora, usando integração por partes para $-\phi$ e $(-\phi')^{p-1}t^{m-1}\theta(tu)$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{a_u} (-\phi')^p t^{m-1}\theta(tu)dt &= \int_0^{a_u} (-\phi')\big[(-\phi')^{p-1}t^{m-1}\theta(tu)\big]dt = \\
&= \big[-\phi(-\phi')^{p-1}t^{m-1}\theta(tu)\big]\Big|_0^{a_u} \\
&- \int_0^{a_u} -\phi\big\{(p-1)(-\phi')^{p-2}(-\phi)''\big[t^{m-1}\theta(tu)\big] + (-\phi')^{p-1}\big[\theta(tu)t^{m-1}\big]'\big\}dt \\
&\leqslant \int_0^{a_u} \phi(-\phi')^{p-2}\Big\{-(p-1)\phi''\big[t^{m-1}\theta(tu)\big] - \phi'\big[\theta(tu)t^{m-1}\big]'\Big\}dt \\
&= \int_0^{a_u} \phi(-\phi')^{p-2}\Big\{-(p-1)\phi'' - \phi'\Big[\frac{\theta(tu)'}{\theta(tu)} + \frac{m-1}{t}\Big]\Big\}t^{m-1}\theta(tu)dt, \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

onde na desigualdade usamos que $\phi'(0) = 0$ e que $\big[-\phi(-\phi')^{p-1}t^{m-1}\theta(tu)\big](a_u) \leqslant 0$, pois $t^{m-1}\theta(tu) \geqslant 0$, $\phi > 0$ e $\phi' < 0$. Pelas hipóteses sobre a curvatura Ricci, obtemos do teorema de comparação de Bishop-Gromov (teorema 2.5),

$$
\frac{(\theta(tu)t^{m-1})'}{\theta(tu)t^{m-1}} \leqslant \frac{(\theta_k^m(tu)t^{m-1})'}{\theta_k^m(tu)t^{m-1}}.
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
&(-\phi')^{p-2}\Big\{-(p-1)\phi'' - \phi'\Big[\frac{\theta(tu)'}{\theta(tu)} + \frac{m-1}{t}\Big]\Big\} \\
&\leqslant (-\phi')^{p-2}\Big\{-(p-1)\phi'' - \phi'\Big[\frac{\theta_k^m(tu)'}{\theta_k^m(tu)} + \frac{m-1}{t}\Big]\Big\} \\
&\leqslant \mu_{1,p}\big(V_m(k, r_0)\big)\phi^{p-1}. \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

Assim, das equações (3.8) e (3.9), obtemos

$$\int_0^{a_u} (-\phi')^p t^{m-1}\theta(tu)dt \leqslant \mu_{1,p}\big(V_m(k,r_0)\big)\int_0^{a_u} \phi^p t^{m-1}\theta(tu)dt. \tag{3.10}$$

Portanto das equações (3.3), (3.4), (3.5) e (3.10), respectivamente, concluimos, integrando (3.10) em S^{m-1}, que

$$\mu_{1,p}\big(B(x_0,r_0)\big) \leqslant \mu_{1,p}\big(V_m(k,r_0)\big).$$

Quando ocorre a igualdade $\mu_{1,p}\big(B(x_0,r_0)\big) = \mu_{1,p}\big(V_m(k,r_0)\big)$, obtemos, pelo argumento acima, igualdade nas equações (3.8) e (3.9). Portanto $a_u = r_0$ para quase todo u e, por continuidade, na verdade para todo u. Assim, pelo teorema de Bishop-Gromov (teorema 2.5), $B(x_0,r_0)$ é isometrico a $V_m(k,r_0)$. ■

Corolário 3.1. *Seja* M *uma variedade Riemanniana* m*-dimensional compacta e seja* k *uma constante real tal que* $\mathrm{ric}^M \geqslant (m-1)k$. *Então para* $p \geqslant 2$

$$\lambda_{1,p}(M) \leqslant \mu_{1,p}\left(V_m\left(k,\frac{d_M}{2}\right)\right)$$

Demonstração: Sejam $x_1,x_2 \in M$ pontos maximalmente afastados, isto é, tais que $\mathrm{dist}(x_1,x_2) = d_M$, onde d_M é o diâmetro de M. Daí, $B(x_1,d_M/2)$ e $B(x_2,d_M/2)$ são disjuntos. Seja $r : \mathbb{M}_k \longrightarrow \mathbb{R}$ a função distância sobre $\mathbb{M}_k$ em relação ao centro de $V_m(k,d_M/2)$, uma bola geodésica de $\mathbb{M}_k$ com raio $d_M/2$, e seja $f = \phi\circ r : V_m\left(k,\frac{d_M}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ a primeira autofunção associada a $\mu_{1,p}\big(V_m(k,d_M/2)\big)$. Sejam $\phi_i = \phi\circ r_i$, onde $r_i : B(x_i,d_M/2) \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função distância de $B(x_i,d_M/2)$ em relação a x_i; $i = 1,2$. Estenda ϕ_i por zero fora de $B(x_i,d_M/2)$ e aplique o teorema da divergência (teorema 1.2) para $f = \phi_i$ e $X = \|\nabla\phi_i\|^{p-2}\nabla\phi_i$. Assim,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_M \mathrm{div}\,\big(\phi_i\cdot\|\nabla\phi_i\|^{p-2}\nabla\phi_i\big)d\nu_g\\
&= \int_{B(x_i,d_M/2)} \big[\phi_i\mathrm{div}\,\big(\|\nabla\phi_i\|^{p-2}\nabla\phi_i\big) + \big\langle\nabla\phi_i, \|\nabla\phi_i\|^{p-2}\nabla\phi_i\big\rangle\big]d\nu_g\\
&= \int_{B(x_i,d_M/2)} -\phi_i\Delta_p(\phi_i)d\nu_g + \int_{B(x_i,d_M/2)} \|\nabla\phi_i\|^p d\nu_g\\
&= \int_{B(x_i,d_M/2)} -\phi_i\mu_{1,p}\big(B(x_i,d_M/2)\big)|\phi_i|^{p-2}\phi_i d\nu_g + \int_{B(x_i,d_M/2)} \|\nabla\phi_i\|^p d\nu_g\\
&= -\mu_{1,p}\big(B(x_i,d_M/2)\big)\int_{B(x_i,d_M/2)} |\phi_i|^p d\nu_g + \int_{B(x_i,d_M/2)} \|\nabla\phi_i\|^p d\nu_g\\
&\geqslant -\mu_{1,p}\left(V_m\left(k,\frac{d_M}{2}\right)\right)\int_{B(x_i,d_M/2)} |\phi_i|^p d\nu_g + \int_{B(x_i,d_M/2)} \|\nabla\phi_i\|^p d\nu_g,
\end{aligned}$$

onde usamos o teorema 3.1 na desigualdade acima. Logo

$$\int_{B(x_i,d_M/2)} \|\nabla\phi_i\|^p d\nu_g \leqslant \mu_{1,p}\left(V_m\left(k,\frac{d_M}{2}\right)\right)\int_{B(x_i,d_M/2)} |\phi_i|^p \phi d\nu_g. \tag{3.11}$$

Agora tome α real tal que

$$\int_{B(x_1,d_M/2)} |\phi_1|^{p-2}\phi_1 d\nu_g + \alpha|\alpha|^{p-2}\int_{B(x_2,d_M/2)} |\phi_2|^{p-2}\phi_2 d\nu_g = 0,$$

sua existência segue do teorema do valor intemediário aplicado a função continua $\xi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\xi(t) = t|t|^p - \eta$, onde

$$\eta = \frac{\int_{B(x_1,d_M/2)} |\phi_1|^{p-2}\phi_1 d\nu_g}{\int_{B(x_2,d_M/2)} |\phi_2|^{p-2}\phi_2 d\nu_g}.$$

Como $M\backslash\big(B(x_1,d_M/2)\bigcup B(x_2,d_M/2)\big) = \mathbb{S}(x_1,d_M/2) = \mathbb{S}(x_2,d_M/2)$, ou seja, o conjunto $B(x_1,d_M/2)\bigcup B(x_2,d_M/2)$ cobre M a menos de uma esfera geodésica de raio $d_M/2$, que é um conjunto de medida nula, e $\mathrm{supp}(\phi_i) \subset B(x_i,d_M/2)$, tem-se

$$\int_M |\phi_1 + \alpha\phi_2|^{p-2}(\phi_1+\alpha\phi_2)d\nu_g = 0.$$

Assim, pela caracterização variacional do primeiro autovalor (ver expressão (3.1)) e por $\phi_1 + \alpha\phi_2$ ser uma função admissível,

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,p}(M)\int_M |\phi_1+\alpha\phi_2|^p d\nu_g &\leqslant \int_M \|\nabla(\phi_1+\alpha\phi_2)\|^p d\nu_g \\
&= \int_{B(x_1,d_M/2)} \|\nabla\phi_1\|^p d\nu_g + \int_{B(x_2,d_M/2)} \|\alpha\nabla\phi_2\|^p d\nu_g \\
&\overset{eq.(3.11)}{\leqslant} \mu_{1,p}\left(V_m\left(k,\frac{d_M}{2}\right)\right)\left(\int_{B(x_1,d_M/2)} |\phi_1|^p d\nu_g + \right. \\
&\left. + \int_{B(x_2,d_M/2)} |\alpha\phi_2|^p d\nu_g\right) \\
&= \mu_{1,p}\left(V_m\left(k,\frac{d_M}{2}\right)\right)\int_M |\phi_1+\alpha\phi_2|^p d\nu_g.
\end{aligned}$$

Portanto, concluimos que

$$\lambda_{1,p}(M) \leqslant \mu_{1,p}\left(V_m\left(k,\frac{d_M}{2}\right)\right).$$

■

3.2 Uma desigualdade isoperimétrica do tipo Faber-Krahn

Em [1], Bérard e Meyer generalizaram a clássica desigualdade de Faber-Krahn para o primeiro autovalor do Laplaciano, com a condição de Dirichlet para domínios limitados com curvatura de Ricci positiva (confira também [8]). Em 1999, Bhattacharya em [2] fez isso para o p-Laplaciano no $\mathbb{R}^n$. Aqui será apresentado a versão para uma variedade Riemanniana compacta.

Teorema 3.2. (Teorema 2.1 de [24]). *Seja* M *uma variedade Riemanniana* m*-dimensional compacta. Suponha que existe uma constante positiva* k *tal que* $\mathrm{ric}^M \geqslant (m-1)k$*. Seja* Ω *um domínio em* M *e* Ω^* *uma bola geodésica na esfera Euclidiana* m*-dimensional de curvatura seccional constante igual a* k*,* $\mathbb{S}_k$*, tal que*

$$\frac{\mathrm{Vol}(\Omega)}{\mathrm{Vol}(M)} = \frac{\mathrm{Vol}(\Omega^*)}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}_k)}.$$

Então, para $p > 1$*,*

$$\mu_{1,p}(\Omega) \geqslant \mu_{1,p}(\Omega^*).$$

A igualdade vale se, e somente se, existe uma isometria de M *em* $\mathbb{S}_k$ *que envia* Ω *em* Ω^**.*

Obs 3.1. *Quando* $M = \mathbb{S}_k$ *temos que, dentre todos os domínios com volume dado, as bolas geodésicas são os que tem o menor primeiro autovalor do problema de Dirichlet para o p-Laplaciano.*

Demonstração: Mostraremos inicialmente a desigualdade. Pelo teorema de densidade (corolário 2.5) é suficiente mostrarmos que para qualquer função de Morse não negativa sobre $\Omega, f \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, vale

$$\frac{\int_\Omega \|\nabla f\|^p d\nu_g}{\int_\Omega |f|^p d\nu_g} \geqslant \mu_{1,p}(\Omega^*).$$

Seja f tal função. Defina $\Omega_t := \{x \in \Omega; f(x) > t\}$. Disto, simetrize Ω_t tomando a bola geodésica Ω_t^* em $\mathbb{S}_k^m$, de mesmo centro de Ω^*, satisfazendo $\mathrm{Vol}(\Omega_t) = \beta \mathrm{Vol}(\Omega_t^*)$, onde $\beta = \mathrm{Vol}(M)/\mathrm{Vol}(\mathbb{S}_k^m)$. Tomando

$$\begin{aligned}
V(t) &= \mathrm{Vol}(\Omega_t) = \mathrm{Vol}(f^{-1}(t,\infty)),\\
A(t) &= \mathrm{Vol}_{n-1}(\partial\Omega_t) = \mathrm{Vol}_{n-1}(f^{-1}(t)),\\
V^*(t) &= \mathrm{Vol}(\Omega_t^*),\\
A^*(t) &= \mathrm{Vol}_{n-1}(\partial\Omega_t^*),
\end{aligned}$$

observe que, para $r(t)$ o raio de Ω_t^*, tem-se

$$V(t) = \beta V^*(r(t)).$$

Agora para $r_0 = r(0)$, defina a função real $r : [0, \sup f] \longrightarrow [0, r_0]$. Sendo R_f o conjunto dos pontos regulares de f, obtemos que $r \in \mathcal{C}^0([0, \sup f]) \cap \mathcal{C}^\infty(R_f \cap (0, \sup f))$, a qual é estritamente decrescente (ver [8]). Seja $\psi : [0, r_0] \longrightarrow [0, \sup f]$ a função inversa de r. Então, para $r^* : \Omega^* \longrightarrow \mathbb{R}$ a função distância em relação ao centro de Ω^*, defina $f^* : \Omega^* \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f^* = \psi \circ r^*.$$

Veja que f^* está bem definida, é radial, decrescente e satisfaz $f^*_{|\partial\Omega^*_t} = t$. Com efeito, se $x \in \Omega^*_t$, tem-se $r^*(x) =$ raio de $\Omega^*_t = r(t)$, donde $f^*(x) = \psi(r^*(x)) = \psi(r(t)) = t$. Daí $f^* \in W_0^{1,p}(\Omega^*)$ e

$$\begin{aligned} V^*(t) &= \mathrm{Vol}(\Omega^*_t) = \mathrm{Vol}((f^*)^{-1}(t, \infty)), \\ A^*(t) &= \mathrm{Vol}_{n-1}(\partial\Omega^*_t) = \mathrm{Vol}_{n-1}((f^*)^{-1}(t)). \end{aligned}$$

Agora, sendo f de Morse, a menos de um número finito de $t's$, a fronteira $\partial\Omega_t = f^{-1}(t)$ de Ω_t é uma hipersuperfície fechada regular. Então, da desigualdade de Gromov (teorema 2.4), obtemos $\mathrm{Vol}(\partial\Omega_t) \geqslant \beta\mathrm{Vol}(\partial\Omega^*_t)$. Assim, pela fórmula da coarea (teorema 2.2), obtemos

$$V(t) = \int_{\Omega_t} dv_g = \int_0^{\sup f} \int_{f^{-1}(t)} \|\nabla f\|^{-1} dv_g,$$

donde, pelo teorema fundamental do cálculo,

$$V'(t) = -\int_{f^{-1}(t)} \|\nabla f\|^{-1} dv_g,$$

Agora, para $p \geqslant 1$ real, temos, da desigualdade de Hölder (teorema 2.11),

$$\begin{aligned} \int_{f^{-1}(t)} \|\nabla f\|^{p-1} dv_g &\geqslant \left(\int_{f^{-1}(t)} 1^{1/p} dv_g \right)^p \left(\int_{f^{-1}(t)} (\|\nabla f\|^{p-1})^{\frac{1}{1-p}} dv_g \right)^{1-p} \\ &= (A(t))^p \left(\int_{f^{-1}(t)} (\|\nabla f\|^{-1} dv_g \right)^{1-p} \\ &= \frac{(A(t))^p}{[-V'(t)]^{p-1}} \\ &= \frac{(A(t))^p}{\beta^{p-1}[-(V^*)'(r(t))]^{p-1}} \\ &\geqslant \frac{\beta^p (A^*(t))^p}{\beta^{p-1}[-(V^*)'(r(t))]^{p-1}} \\ &= \frac{\beta (A^*(t))^p}{[-(V^*)'(r(t))]^{p-1}} \\ &= \beta \int_{(f^*)^{-1}(t)} \|\nabla f^*\|^{p-1} dv^*_g, \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue de [19]. Por outro lado, ainda por [19],

$$\begin{aligned}\int_{f^{-1}(t)} |f|^{p-1} d\nu_g &= -\int_0^{\sup f} t^p A'(t) d\nu_g \\ &= -\int_0^{\sup f^*} t^p (A^*)'(t) d\nu_g^* \\ &= -\beta \int_{(f^*)^{-1}(t)} |f^*|^{p-1} d\nu_g^*.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_t} \|\nabla f\|^{p-1} d\nu_g &\geqslant \beta \int_{\Omega_t^*} \|\nabla f^*\|^{p-1} d\nu_g^*, \\ \int_{\Omega_t} |f|^{p-1} d\nu_g &= \beta \int_{\Omega_t^*} |f^*|^{p-1} d\nu_g^*. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Em particular,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \|\nabla f\|^{p-1} d\nu_g &\geqslant \beta \int_{\Omega^*} \|\nabla f^*\|^{p-1} d\nu_g^*, \\ \int_{\Omega} |f|^{p-1} d\nu_g &= \beta \int_{\Omega^*} |f^*|^{p-1} d\nu_g^*. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Com isso,

$$\frac{\int_\Omega \|\nabla f\|^{p-1} d\nu_g}{\int_\Omega |f|^{p-1} d\nu_g} \geqslant \frac{\int_{\Omega^*} \|\nabla f^*\|^{p-1} d\nu_g^*}{\int_{\Omega^*} |f^*|^{p-1} d\nu_g^*} \geqslant \mu_{1,p}(\Omega^*).$$

E a desigualdade segue da densidade de Morse, como comentado inicialmente.

Agora vamos analisar quando ocorre a igualdade. Seja f uma primeira autofunção para o problema de Dirichlet em Ω e seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in W^{1,p}(\Omega)$ uma sequência de funções de Morse que convergem para f em $W^{1,p}(\Omega)$. Seja $(f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência das respectivas funções simetrizadas, como feito acima. Como $\|f_n^*\|_{1,p} \leqslant \beta\|f_n\|_{1,p}$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limidata (pois é convergente), temos que $(f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ também é limitada. Como $W^{1,p}(\Omega^*)$ é Banach e reflexivo, pelo teorema 2.7 e por [5], podemos extrair uma subsequência de $(f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$, se necessário, tal que f_n^* converge fracamente em $W^{1,p}(\Omega^*)$ para $f^* \in W^{1,p}(\Omega^*)$ e fortemente em $L^p(\Omega^*)$. Agora, pelas propriedades de convergência fraca (proposição 2.2) f_n^* é limitada em $W^{1,p}(M)$ e $\|f^*\|_{1,p} \leqslant \liminf \|f_n^*\|_{1,p}$. Assim, pelo teorema da convergência dominada (ver [5]), $(f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ também converge fortemente em $L^p(\Omega^*)$. Daí, pela equação (3.13),

$$\int_\Omega |f|^p d\nu_g = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n|^p d\nu_g = \beta \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega^*} |f_n^*|^p d\nu_g = \beta \int_{\Omega^*} |f^*|^p d\nu_g, \tag{3.14}$$

$$\int_\Omega \|\nabla f\|^p d\nu_g = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|\nabla f_n\|^p d\nu_g \geqslant \beta \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega^*} \|\nabla f_n^*\|^p d\nu_g^* \geqslant \beta \int_{\Omega^*} \|\nabla f^*\|^p d\nu_g^*. \tag{3.15}$$

Portanto, como f é primeira autofunção do problema de Dirichlet para Δ_p e pelas equações acima,

$$\mu_{1,p}(\Omega) = \frac{\int_\Omega \|\nabla f\|^p d\nu_g}{\int_\Omega |f|^p d\nu_g} \geqslant \frac{\int_{\Omega^*} \|\nabla f^*\|^p d\nu_g^*}{\int_{\Omega^*} |f^*|^p d\nu_g^*} \geqslant \mu_{1,p}(\Omega^*).$$

Como estamos supondo $\mu_{1,p}(\Omega) = \mu_{1,p}(\Omega^*)$, obtemos que a desigualdade acima na verdade dever ser uma igualdade, isto é,

$$\mu_{1,p}(\Omega) = \frac{\int_\Omega \|\nabla f\|^p d\nu_g}{\int_\Omega |f|^p d\nu_g} = \frac{\int_{\Omega^*} \|\nabla f^*\|^p d\nu_g^*}{\int_{\Omega^*} |f^*|^p d\nu_g^*} = \mu_{1,p}(\Omega^*) \tag{3.16}$$

e das equações (3.14) e (3.16) obtemos

$$\int_\Omega \|\nabla f\|^p d\nu_g = \beta \int_{\Omega^*} \|\nabla f^*\|^p d\nu_g^*. \tag{3.17}$$

Disso, concluimos que f^* é uma primeira autofunção para o problema de Dirichlet de Δ_p em Ω^*. Como M é compacta temos do corolário 2.3 que, a menos de subsequências, f_n e f_n^* convergem uniformemente para f e f^*, respectivamente. Daí, como cada f_n^* é uma simetrização de f_n, concluimos que f^* também é uma simetrização de f. Agora seja (a, b) um intervalo de valores regulares de f. De modo análogo ao feito no caso da desigualdade deste teorema, obtemos

$$\int_{f^{-1}(a,b)} \|\nabla f\|^p d\nu_g \geqslant \beta \int_{(f^*)^{-1}(a,b)} \|\nabla f^*\|^p d\nu_g^*. \tag{3.18}$$

Por outro lado, também usando o fato de f_n^* ser uma simetrização de f_n, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\Omega \setminus f^{-1}(a,b)} \|\nabla f_n\|^p d\nu_g \geqslant \beta \int_{\Omega^* \setminus (f^*)^{-1}(a,b)} \|\nabla f_n^*\|^p d\nu_g^*.$$

Assim, de modo inteiramente análogo a equação (3.15),

$$\int_{\Omega \setminus f^{-1}(a,b)} \|\nabla f\|^p d\nu_g \geqslant \beta \int_{\Omega^* \setminus (f^*)^{-1}(a,b)} \|\nabla f^*\|^p d\nu_g^*.$$

Por outro lado, da equação (3.17) e da equação acima, respectivamente,

$$\begin{aligned}
\int_{f^{-1}(a,b)} \|\nabla f\|^p d\nu_g &= \int_\Omega \|\nabla f\|^p d\nu_g - \int_{\Omega \setminus f^{-1}(a,b)} \|\nabla f\|^p d\nu_g \\
&= \beta \int_{\Omega^*} \|\nabla f^*\|^p d\nu_g^* - \int_{\Omega \setminus f^{-1}(a,b)} \|\nabla f\|^p d\nu_g \\
&\leqslant \beta \int_{\Omega^*} \|\nabla f^*\|^p d\nu_g^* - \beta \int_{\Omega^* \setminus (f^*)^{-1}(a,b)} \|\nabla f^*\|^p d\nu_g^* \\
&= \beta \int_{(f^*)^{-1}(a,b)} \|\nabla f^*\|^p d\nu_g^*.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Portanto, das desigualdades (3.18) e (3.19), obtemos

$$\int_{f^{-1}(a,b)} \|\nabla f\|^p d\nu_g = \beta \int_{(f^*)^{-1}(a,b)} \|\nabla f^*\|^p d\nu_g^*.$$

Com isso, obtemos $\mathrm{Vol}(f^{-1}(t)) = \mathrm{Vol}((f^*)^{-1}(t))$, para qualquer valor regular t de f. Mas a igualdade na desigualdade isoperimétrica de Gromov (teorema 2.4) implica na existência de uma isometria de M em $\mathbb{S}_k^m$ que envia Ω_t em Ω_t^*. Seja $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de valores regulares de f que converge para 0. Então Ω_{t_n} são bolas geodésicas de mesmo centro contidas em Ω com $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Vol}(\Omega_{t_n}) = \mathrm{Vol}(\Omega)$ ■

3.3 Teorema do tipo Lichnerowicz-Obata para o operador p-Laplaciano

Teorema 3.3. (Teorema 3.1 de [24]). *Seja* M *uma variedade Riemanniana* m*-dimensional compacta. Suponha que existe* $k > 0$ *tal que* $\mathrm{ric}^M \geqslant (m-1)k$. *Então, para* $p > 1$

$$\lambda_{1,p}(M) \geqslant \lambda_{1,p}(\mathbb{S}_k^m).$$

A igualdade vale se, e somente se, M *for isométrico a* $\mathbb{S}^m$.

Teorema 3.4. (Teorema 3.2 de [24]). *Seja* M *uma variedade Riemanniana* m*-dimensional compacta. Suponha que existe* $k > 0$ *tal que* $\mathrm{ric}^M \geqslant (m-1)k > 0$. *Então, para* $p \geqslant 2$ *temos a estimativa*

$$\lambda_{1,p}(M) \geqslant \left(\frac{(m-1)k}{p-1}\right)^{p/2}$$

A demonstração destes teoremas seguem a partir da página 43, pois para prová-los usaremos agurmentos em relação a domínios nodais (definição 2.7), ou seja, as componentes conexas de $M \setminus f^{-1}(\{0\})$. Em [27] Veron provou o seguinte resultado

Proposição 3.1. (Veron) *Seja* M *uma variedade Riemanniana* m*-dimensional. Seja* $\mathcal{T}_M$ *a topologia de* M, *isto é, o conjunto dos abertos de* M. *Denote por* Λ *o conjunto dos pares de subconjuntos não vazios disjuntos e abertos de M, isto é,*

$$\Lambda := \{(\omega_1, \omega_2); \omega_1, \omega_2 \in \mathcal{T}\backslash\{\emptyset, M\}, \omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset\}.$$

Então

$$\lambda_{1,p}(M) = \min_{(\omega_1,\omega_2)\in\Lambda} \{\mu_{1,p}(\omega_1), \mu_{1,p}(\omega_2)\}.$$

Ademais, se f *é autofunção não nula associada a* $\lambda_{1,p}$, *então* f *tem dois domínios nodais.*

Com isso, se M for compacta, então $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$ e $f^{-1}(\mathbb{R}_-)$ serão seus (únicos) domínios nodais. Com efeito, se existisse A domínio nodal com elementos $x, y \in A$ onde $f(x) < 0$ e $f(y) > 0$, como $f(A)$ é conexo em $\mathbb{R}$, pois A é conexo e $f \in W^{1,p}(M) \subset \mathcal{C}^0(M)$, obteremos que $f(A) \supset [f(x), f(y)] \supset \{0\}$, ou seja, $A \cap (M \backslash f^{-1}(0)) \neq \emptyset$. Isso contaria o fato de A ser nodal.

Lema 3.1. *Seja* f *uma primeira autofunção de* Δ_p *sobre* M*, uma variedade Riemanniana compacta,* $p > 1$ *e* A *um domínio nodal sobre* f*. Então*

$$\lambda_{1,p}(M) = \frac{\int_A \|\nabla f\|^p d\nu_g}{\int_A |f|^p d\nu_g}.$$

Demonstração: Veja inicialmente que a função f possui valores positivos e negativos. De fato, pela condição de ortogonalidade, dada na expressão (3.1), temos

$$0 = \int_M |f|^{p-2} f d\nu_g, \qquad f \neq 0.$$

Assim, ou $f \equiv 0$ ou f muda sinal, donde concluimos nossa afirmação, do fato de $f \neq 0$. Agora, pelo teorema de densidade (corolário 2.5), podemos supor que f é o limite, em $W^{1,p}(M)$, de funções $f_n \in \mathcal{C}^\infty(M)$ onde 0 é valor regular para cada f_n. Pelo comemtário acima sobre domínios nodais, podemos supor, sem perda de generalidade, que $A = f^{-1}(\mathbb{R}_+)$. Desse modo, tome $A_n = f_n^{-1}(\mathbb{R}_+)$. Como $\partial A_n = f_n^{-1}(0)$ é uma hipersuperfície regular, pois 0 é valor regular de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,p}(M) \int_{A_n} |f|^{p-2} f f_n d\nu_g &= \int_{A_n} (\Delta_p f) f_n d\nu_g = \int_{A_n} -\text{div } (\|\nabla f\|^{p-2} \nabla f) f_n d\nu_g \\
&= \int_{A_n} -\text{div } (\|\nabla f\|^{p-2} \nabla f) f_n d\nu_g - \int_{A_n} \langle \nabla f_n, \|\nabla f\|^{p-2} \nabla f \rangle d\nu_g \\
&+ \int_{A_n} \langle \nabla f_n, \|\nabla f\|^{p-2} \nabla f \rangle d\nu_g \\
&= \int_{A_n} -\text{div } (f_n \|\nabla f\|^{p-2} \nabla f) d\nu_g + \int_{A_n} \|\nabla f\|^{p-2} \langle \nabla f_n, \nabla f \rangle d\nu_g \\
&= \int_{\partial A_n} f_n \|\nabla f\|^{p-2} \langle \nabla f, \nu \rangle d\nu_g + \int_{A_n} \|\nabla f\|^{p-2} \langle \nabla f_n, \nabla f \rangle d\nu_g \\
&= \int_{A_n} \|\nabla f\|^{p-2} \langle \nabla f_n, \nabla f \rangle d\nu_g, \qquad (\text{pois } f_{n|\partial A_n} = 0)
\end{aligned}$$

onde ν é o vetor normal exterior a ∂A_n. Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_{1,p}(M) = \frac{\int_{A_n} \|\nabla f\|^{p-2} \langle \nabla f_n, \nabla f \rangle d\nu_g}{\int_{A_n} |f|^{p-2} f f_n d\nu_g}. \tag{3.20}$$

Como f_n converge para f em $W^{1,p}(M)$, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_M |f_n - f|^p d\nu_g + \int_M \|\nabla f_n - \nabla f\|^p d\nu_g\right) = 0$$

e cada termo da parcela acima é não negativo, devemos ter

$$\lim_{n\to\infty}\int_M |f_n - f|^p d\nu_g = 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\int_M \big|\|\nabla f_n\| - \|\nabla f\|\big|^p d\nu_g \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_M \|\nabla f_n - \nabla f\|^p d\nu_g = 0,$$

ou seja, f_n e $\|\nabla f_n\|$ convergem em $L^p(M)$ para f e $\|\nabla f\|$, respectivamente. Pelo corolário 2.3, podemos supor, a menos de subsequências, que f_n e $\|\nabla f_n\|$ e convergem uniformemente para f e $\|\nabla f\|$, respectivamente. Agora defina o seguinte funcional linear

$$\Phi_n(g) = \int_{A_n} \|\nabla f\|^{p-2}\langle\nabla f, \nabla g\rangle d\nu_g, \quad \forall g \in W^{1,p}(M).$$

Veja que, para qualquer $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\begin{aligned}
|\Phi_n(g)| &= \left|\int_{A_n} \|\nabla f\|^{p-2}\langle\nabla f, \nabla g\rangle d\nu_g\right| \\
&\leqslant \int_{A_n} \|\nabla f\|^{p-2}\big|\langle\nabla f, \nabla g\rangle\big| d\nu_g \\
&\leqslant \int_{A_n} \|\nabla f\|^{p-2}\|\nabla f\|\|\nabla g\| d\nu_g \\
&= \int_{A_n} \|\nabla f\|^{p-1}\|\nabla g\| d\nu_g \\
&\leqslant \left(\int_{A_n} \left(\|\nabla f\|^{p-1}\right)^q d\nu_g\right)^{1/q}\left(\int_{A_n} \|\nabla g\|^p d\nu_g\right)^{1/p} \\
&\leqslant \left(\int_M \|\nabla f\|^p d\nu_g\right)^{1/q}\left(\int_M \|\nabla g\|^p d\nu_g\right)^{1/p} \\
&\leqslant \left(\|f\|_{W^{1,p}(M)}\right)^{p/q}\|g\|_{W^{1,p}(M)}
\end{aligned}$$

Logo, obtemos que Φ_n é um funcional linear contínuo, para cada $n \in \mathbb{N}$. Veja ainda que $\Phi_n(g)$ converge para $\Phi(g)$, para toda função $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, onde

$$\Phi(g) = \int_A \|\nabla f\|^{p-2}\langle\nabla f, \nabla g\rangle d\nu_g, \quad \forall g \in W^{1,p}(M).$$

Com efeito, veja inicialmente que para $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e $n \in \mathbb{N}$ qualquer

$$\begin{aligned}
\left| \int_{A_n \backslash A} \|\nabla f\|^{p-2} \langle \nabla f, \nabla g \rangle d\nu_g \right| &\leqslant \int_{A_n \backslash A} \|\nabla f\|^{p-2} \big| \langle \nabla f, \nabla g \rangle \big| d\nu_g \\
&\leqslant \int_{A_n \backslash A} \|\nabla f\|^{p-2} \|\nabla f\| \|\nabla g\| d\nu_g \\
&= \int_{A_n \backslash A} \|\nabla f\|^{p-1} \|\nabla g\| d\nu_g \\
&\leqslant \left(\int_{A_n \backslash A} \left(\|\nabla f\|^{p-1} \right)^q d\nu_g \right)^{1/q} \left(\int_{A_n \backslash A} \|\nabla g\|^p d\nu_g \right)^{1/p} \\
&\leqslant \left(\int_{A_n \backslash A} \|\nabla f\|^p d\nu_g \right)^{1/q} \left(\int_{A_n \backslash A} \|\nabla g\|^p d\nu_g \right)^{1/p} \\
&\leqslant \left(\int_M \|\nabla f\|^p d\nu_g \right)^{1/q} \sup_{x \in M} \|\nabla g(x)\| \left(\int_{A_n \backslash A} d\nu_g \right)^{1/p} \\
&= \big(\|\nabla f\|_p \big)^{p/q} \sup_{x \in M} \|\nabla g(x)\| \mathrm{Vol}(A_n \backslash A)^{1/p}. \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

Como M é compacta, $f \in W^{1,p}(M)$ e estamos tomando $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, obtemos $\big(\|\nabla f\|_p\big)^{p/q} \sup_{x \in M} \|\nabla g(x)\| < \infty$. Por outro lado, como f_n converge uniformemente para f temos para $\alpha > 0$ qualquer e n suficientemente grande

$$\begin{aligned}
A_n \backslash A &= \big\{ x \in M; f_n(x) > 0, f(x) \leqslant 0 \text{ e } |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha \big\} \\
&\subset \big\{ x \in M; |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha \big\}. \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Ainda, pelo fato de f_n convergir uniformemente para f, temos, pelo teorema 2.8, que f_n converge em medida para f. Daí, pela expressão (3.22), concluimos que

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{Vol}(A_n \backslash A) = 0. \qquad (3.23)$$

Logo, por (3.21) e (3.23), obtemos

$$\lim_{n \to \infty} \left| \int_{A_n \backslash A} \|\nabla f\|^{p-2} \langle \nabla f, \nabla g \rangle d\nu_g \right| = 0, \qquad (3.24)$$

para toda $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. De modo inteiramente análogo, obtemos

$$\lim_{n \to \infty} \left| \int_{A \backslash A_n} \|\nabla f\|^{p-2} \langle \nabla f, \nabla g \rangle d\nu_g \right| = 0, \qquad (3.25)$$

para toda $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Agora, como $A_n = (A_n \backslash A) \dot\cup (A_n \cap A)$ e $A = (A \backslash A_n) \dot\cup (A_n \cap A)$, temos, para toda $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$
\begin{aligned}
|\Phi_n(g) - \Phi(g)| &= \left| \int_{A_n} \|\nabla f\|^{p-2} \langle \nabla f, \nabla g \rangle d\nu_g - \int_A \|\nabla f\|^{p-2} \langle \nabla f, \nabla g \rangle d\nu_g \right| \\
&= \left| \int_{A_n \setminus A} \|\nabla f\|^{p-2} \langle \nabla f, \nabla g \rangle d\nu_g + \int_{A_n \cap A} \|\nabla f\|^{p-2} \langle \nabla f, \nabla g \rangle d\nu_g \right. \\
&\quad \left. - \int_{A \setminus A_n} \|\nabla f\|^{p-2} \langle \nabla f, \nabla g \rangle d\nu_g - \int_{A_n \cap A} \|\nabla f\|^{p-2} \langle \nabla f, \nabla g \rangle d\nu_g \right| \\
&= \left| \int_{A_n \setminus A} \|\nabla f\|^{p-2} \langle \nabla f, \nabla g \rangle d\nu_g + \int_{A \setminus A_n} \|\nabla f\|^{p-2} \langle \nabla f, \nabla g \rangle d\nu_g \right| \\
&\leqslant \left| \int_{A_n \setminus A} \|\nabla f\|^{p-2} \langle \nabla f, \nabla g \rangle d\nu_g \right| + \left| \int_{A \setminus A_n} \|\nabla f\|^{p-2} \langle \nabla f, \nabla g \rangle d\nu_g \right|.
\end{aligned}
$$

Passando o limite com $n \to \infty$ na desigualdade acima, concluimos por (3.24) e (3.25), que

$$\lim_{n \to \infty} |\Phi_n(g) - \Phi(g)| = 0, \tag{3.26}$$

ou seja, $\Phi_n(g)$ converge para $\Phi(g)$, para toda $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Agora, pela proposição 2.3 segue que $\Phi_n(f_n)$ converge para $\Phi(f)$. De modo inteiramente análogo, obtemos que $\Psi_n(f_n)$ converge para $\Psi(f)$, onde

$$\Psi_n(g) = \int_{A_n} |f|^{p-2} f g d\nu_g, \quad \forall g \in W^{1,p}(M)$$

e

$$\Psi(g) = \int_A |f|^{p-2} f g d\nu_g, \quad \forall g \in W^{1,p}(M).$$

Tomando limite com $n \to \infty$ na equação (3.20), concluimos que

$$\lambda_{1,p}(M) = \frac{\int_A \|\nabla f\|^{p-2} \langle \nabla f, \nabla f \rangle d\nu_g}{\int_A |f|^{p-2} f f d\nu_g} = \frac{\int_A \|\nabla f\|^p d\nu_g}{\int_A |f|^p d\nu_g}$$

■

Lema 3.2. *Seja* f *uma primeira autofunção de* Δ_p *em* M*,* $p > 1$ *e sejam* $A_1 = f^{-1}(\mathbb{R}_+)$ *e* $A_2 = f^{-1}(\mathbb{R}_-)$ *os domínios nodais de* f*. Então*

$$\lambda_{1,p}(M) = \mu_{1,p}(A_1) = \mu_{1,p}(A_2).$$

Demonstração: Para cada $i = 1, 2$ temos, da definição de $\mu_{1,p}$ e do lema acima, respectivamente, que

$$\mu_{1,p}(A_i) \leqslant \frac{\int_{A_i} \|\nabla f\|^p d\nu_g}{\int_{A_i} |f|^p d\nu_g} = \lambda_{1,p}(M)$$

Com isso $\lambda_{1,p}(M) \geqslant \max\{\mu_{1,p}(A_1), \mu_{1,p}(A_2)\}$. Sejam f_1, f_2 as primeiras autofunções do problema de Dirichlet para Δ_p em A_1 e A_2, respectivamente. Estenda cada f_i por zero no complementar de A_i e tome $\alpha \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\int_M |f_1 + \alpha f_2|^{p-2}(f_1 + \alpha f_2) d\nu_g = 0,$$

ou seja, f satisfaz (3.1) e é uma função admissível. Daí,

$$\begin{aligned}
&\lambda_{1,p}(M)\int_{A_1}|f_1|^p d\nu_g + \lambda_{1,p}(M)\int_{A_2}|\alpha f_2|^p d\nu_g \qquad (3.27)\\
=&\lambda_{1,p}(M)\left(\int_{A_1}|f_1|^p d\nu_g + \int_{A_2}|\alpha f_2|^p d\nu_g\right)\\
=&\lambda_{1,p}(M)\left(\int_{A_1}|f_1+\alpha f_2|^p d\nu_g + \int_{A_2}|f_1+\alpha f_2|^p d\nu_g\right)\\
=&\lambda_{1,p}(M)\int_M |f_1+\alpha f_2|^p d\nu_g\\
\leqslant&\int_M \|\nabla(f_1+\alpha f_2)\|^p d\nu_g\\
=&\int_{A_1}\|\nabla(f_1+\alpha f_2)\|^p d\nu_g + \int_{A_2}\|\nabla(f_1+\alpha f_2)\|^p d\nu_g\\
=&\int_{A_1}\|\nabla f_1\|^p d\nu_g + \int_{A_2}\|\nabla(\alpha f_2)\|^p d\nu_g\\
=&\mu_{1,p}(A_1)\int_{A_1}|f_1|^p d\nu_g + \mu_{1,p}(A_2)\int_{A_2}|\alpha f_2|^p d\nu_g \qquad (3.28)\\
\leqslant&\lambda_{1,p}(M)\int_{A_1}|f_1|^p d\nu_g + \lambda_{1,p}(M)\int_{A_2}|\alpha f_2|^p d\nu_g. \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

Logo, destacando da desigualdade acima (3.27), (3.28) e (3.29), vemos que

$$\begin{aligned}
&\lambda_{1,p}(M)\int_{A_1}|f_1|^p d\nu_g + \lambda_{1,p}(M)\int_{A_2}|\alpha f_2|^p d\nu_g\\
=&\mu_{1,p}(A_1)\int_{A_1}|f_1|^p d\nu_g + \mu_{1,p}(A_2)\int_{A_2}|\alpha f_2|^p d\nu_g,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left[\lambda_{1,p}(M) - \mu_{1,p}(A_1)\right]\left(\int_{A_1}|f_1|^p d\nu_g\right) + \left[\lambda_{1,p}(M) - \mu_{1,p}(A_2)\right]\left(\int_{A_2}|\alpha f_2|^p d\nu_g\right) = 0.$$

Como $\int_{A_1}|f_1|^p d\nu_g$ e $\int_{A_2}|\alpha f_2|^p d\nu_g$ são termos positivos, concluimos que

$$\lambda_{1,p}(M) = \mu_{1,p}(A_1) = \mu_{1,p}(A_2).$$

■

Corolário 3.2. *Seja* $p > 1$ *e* f *primeira autofunção de* Δ_p *em* $\mathbb{S}^m$*. Então os domínios nodais de* f *são os hemisférios de* $\mathbb{S}^m$*, denotados por* $\mathbb{S}^m_+$ *e* $\mathbb{S}^m_-$*. Além disso, vale*

$$\lambda_{1,p}(\mathbb{S}^m) = \mu_{1,p}(\mathbb{S}^m_+) = \mu_{1,p}(\mathbb{S}^m_-).$$

Demonstração: Como f é radial, digamos em torno de $x_0 \in \mathbb{S}^m$, tem-se que os domínios nodais de f são bolas geodésicas centradas em x_0 e $-x_0$. Do contrário, existiriam $x \in f^{-1}(\mathbb{R}_+)$ e $y \in f^{-1}(\mathbb{R}_-)$, tais que $r(x) = r(y)$, onde r é a função distância de $\mathbb{S}^m$ em relação a x_0. Mas isso contraria a radialidade de f. Denotemos por B_1 e B_2 tais bolas, respectivamente. Do lema 3.2, temos

$$\mu_{1,p}(B_1) = \mu_{1,p}(B_2).$$

Assim, pelo teorema de Faber-Krahn (teorema 3.2), $\mathrm{Vol}(B_1) = \mathrm{Vol}(B_2)$, donde segue que B_1 e B_2 possuem o mesmo raio. Portanto $B_1 = \mathbb{S}^m_+$ e $B_2 = \mathbb{S}^m_-$, os hemiférios norte e sul em relação a x_0, respectivamente. ∎

Demonstração do Teorema 3.3: Seja f a primeira autofunção de Δ_p sobre M e seja $\Omega = f^{-1}(\mathbb{R}_+)$. Como

$$\mathrm{Vol}(M) \geqslant \mathrm{Vol}\big(f^{-1}(\mathbb{R}_+)\big) + \mathrm{Vol}\big(f^{-1}(\mathbb{R}_-)\big) = \mathrm{Vol}\big(f^{-1}(\mathbb{R}_+)\big) + \mathrm{Vol}\big((-f)^{-1}(\mathbb{R}_+)\big),$$

podemos, substituindo f por $-f$ se necessário, supor que $\mathrm{Vol}(\Omega) \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{Vol}(M)$. Pelo lema 3.2

$$\lambda_{1,p}(M) = \mu_{1,p}(\Omega). \tag{3.30}$$

Agora, seja Ω^* a bola geodésica de centro x_0 em $\mathbb{S}^m_k$ satisfazendo $\mathrm{Vol}(\Omega)/\mathrm{Vol}(M) = \mathrm{Vol}(\Omega^*)/\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^m_k)$. Pelo teorema de Faber-Krahn (teorema 3.2)

$$\mu_{1,p}(\Omega) \geqslant \mu_{1,p}(\Omega^*). \tag{3.31}$$

Como

$$\mathrm{Vol}(\Omega^*) = \frac{\mathrm{Vol}(\Omega)}{\mathrm{Vol}(M)}\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^m_k) \leqslant \frac{1/2\mathrm{Vol}(M)}{\mathrm{Vol}(M)}\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^m_k) = \frac{1}{2}\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^m_k),$$

obtemos que Ω^* está contido no hemisfério de centro x_0, que denotaremos por $\mathbb{S}^m_{k+}$. Do corolário 3.1

$$\mu_{1,p}(\Omega^*) \geqslant \mu_{1,p}(\mathbb{S}^m_{k+}) = \lambda_{1,p}(\mathbb{S}^m_k). \tag{3.32}$$

Das equações (3.30), (3.31) e (3.32), respectivamente, concluimos que

$$\lambda_{1,p}(M) \geqslant \lambda_{1,p}(\mathbb{S}_k^m).$$

No caso de igualdade na hipótese deste teorema, também teremos a igualdade na equação (3.31), e pelo teorema de Faber-Krahn (teorema 3.2) M é isométrico a $\mathbb{S}_k^m$.

■

Demonstração do Teorema 3.4: Pelo teorema 3.3 é suficiente provarmos o teorema 3.4 para o caso $M = S_k^m$. No caso em que $n = 2$ temos o teorema de Licherowicz (teorema 0.3). Suponha $p > 2$. Para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ temos

$$\begin{aligned}
\int_M \Delta_p f \Delta f d\nu_g &= \int_M -\mathrm{div}\ \big(\|\nabla f\|^{p-2}\nabla f\big)\Delta f d\nu_g \\
&= \int_M -\mathrm{div}\ \big(\Delta f\|\nabla f\|^{p-2}\nabla f\big)d\nu_g + \int_M \|\nabla f\|^{p-2}\big\langle\nabla f, \nabla(\Delta f)\big\rangle d\nu_g \\
&= \int_M \|\nabla f\|^{p-2}\big\langle\nabla f, \nabla(\Delta f)\big\rangle d\nu_g.
\end{aligned}$$

Pela fórmula de Weitzenböck (proposição 2.1)

$$\begin{aligned}
\int_M \Delta_p f \Delta f d\nu_g = \int_M \|\nabla f\|^{p-2}|\mathrm{Hess}\ f|^2 d\nu_g + \frac{1}{2}\int_M \|\nabla f\|^{p-2}\Delta\big(\|\nabla f\|^2\big)d\nu_g \\
+ \int_M \|\nabla f\|^{p-2}\mathrm{ric}^M\big(\nabla f, \nabla f\big)d\nu_g.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Ademais,

$$\begin{aligned}
\int_M \|\nabla f\|^{p-2}\Delta\big(\|\nabla f\|^2\big)d\nu_g &= -\int_M \|\nabla f\|^{p-2}\mathrm{div}\ \big[\nabla\big(\|\nabla f\|^2\big)\big]d\nu_g \\
&= \int_M \big\langle\nabla\big(\|\nabla f\|^{p-2}\big), \nabla\big(\|\nabla f\|^2\big)\big\rangle d\nu_g - \int_M \mathrm{div}\ \big[\|\nabla f\|^{p-2}\nabla\big(\|\nabla f\|^2\big)\big]d\nu_g \\
&= \int_M \big\langle(p-2)\|\nabla f\|^{p-3}\nabla(\|\nabla f\|), 2\|\nabla f\|\nabla(\|\nabla f\|)\big\rangle d\nu_g \\
&= 2(p-2)\int_M \|\nabla f\|^{p-2}\|\nabla(\|\nabla f\|)\|^2 d\nu_g \\
&\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Logo, da equação (3.33) e pela hipótese da limitação de ric^M,

$$\int_M \Delta_p f \Delta f d\nu_g \geqslant \int_M \|\nabla f\|^{p-2}\mathrm{ric}^M(\nabla f, \nabla f)d\nu_g \geqslant (m-1)k\int_M \|\nabla f\|^{p-2}d\nu_g \tag{3.34}$$

Como f é suave em M, obtemos, por densidade, que a desigualdade acima ainda vale para $f \in W^{1,p}(M)$ uma primeira autofunção de Δ_p sobre M. Ainda para esta função f

obtemos, pelo fato de f ser primeira autofunção,

$$\begin{aligned}
\int_M \Delta_p f \Delta f d\nu_g &= \lambda_{1,p}(M)\int_M |f|^{p-2} f\Delta f d\nu_g = -\lambda_{1,p}(M)\int_M |f|^{p-2} f \mathrm{div}\ (\nabla f) d\nu_g \\
&= \lambda_{1,p}(M)\int_M \big\langle \nabla(|f|^{p-2}f), \nabla f\big\rangle d\nu_g - \int_M \mathrm{div}\ \big[\nabla(|f|^{p-2}ff)\big] d\nu_g \\
&= \lambda_{1,p}(M)\int_M \big\langle (p-2)|f|^{p-3}\nabla(|f|)f + |f|^{p-2}\nabla f, \nabla f\big\rangle d\nu_g \\
&= \lambda_{1,p}(M)\int_M \big\{(p-2)|f|^{p-3} f \big\langle \nabla(|f|), \nabla f\big\rangle + |f|^{p-2}\big\langle \nabla f, \nabla f\big\rangle\big\} d\nu_g \\
&= \lambda_{1,p}(M)\int_M \big\{(p-2)|f|^{p-3} f\ \mathrm{sinal}(f)\langle \nabla f, \nabla f\rangle + |f|^{p-2}\langle \nabla f, \nabla f\rangle\big\} d\nu_g \\
&= \lambda_{1,p}(M)\int_M \big\{(p-2)|f|^{p-3}|f| + |f|^{p-2}\big\}\|\nabla f\|^2 d\nu_g \\
&= (p-1)\lambda_{1,p}(M)\int_M |f|^{p-2}\|\nabla f\|^2 d\nu_g.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder (teorema 2.11), temos

$$\int_M \Delta_p f \Delta f d\nu_g \leqslant (p-1)\lambda_{1,p}(M)\bigg(\int_M |f|^p\bigg)^{1-2/p}\Big(\|\nabla(f)\|^p\Big)^{2/p} d\nu_g, \tag{3.35}$$

Sendo f primeira autofunção de Δ_p, vale $\int_M |f|^p d\nu_g = (\lambda_{1,p}(M))^{-1}\int_M \|\nabla f\|^p d\nu_g$. Portanto da desigualdade (3.35) acima

$$\int_M \Delta_p f \Delta f d\nu_g \leqslant (p-1)(\lambda_{1,p}(M))^{2/p}\int_M \|\nabla(f)\|^p d\nu_g, \tag{3.36}$$

Das equações (3.34) e (3.36) segue o resultado.

∎

3.4 Estimativas (inferior e superior) do tipo Cheeger

Aqui faremos estimativas do tipo Cheeger. Assim denotaremos por h_M a constante isoperimétrica de Cheeger (ver definição 2.1).

Teorema 3.5. (Teorema 4.1 de [24]). *Seja* M *uma variedade Riemanniana compacta. Então, para* $p > 1$,

$$\lambda_{1,p}(M) \geqslant \left(\frac{h_M}{p}\right)^p.$$

O caso $p = 2$, é o teorema 0.5. Ademais, se $\mathrm{ric}^M \geqslant 0$ então, por [15], $h_m \geqslant 2/d_M$, onde d_M é o diâmetro de M. Por [10], obtemos, do teorema 3.5, a seguinte estimativa inferior de $\lambda_{1,p}(M)$ em função de d_M,

$$\lambda_{1,p}(M) \geqslant \frac{2}{p^p d_M^p} \qquad (p > 1).$$

Por outro lado, também podemos estimar $\lambda_{1,p}(M)$ por cima em função de d_M e h_M. É o que nos diz os seguintes resultados:

Teorema 3.6. (Teorema 4.2 de [24]). *Seja M uma variedade Riemanniana compacta. Suponha que M tem curvatura seccional não-negativa. Então, para $p > 1$,*

$$\lambda_{1,p}(M) \leqslant \frac{2^{2p+2}(m+p)^{m+p}}{(m-1)^{m-1}p^p}\frac{1}{d_M^p}.$$

Teorema 3.7. (Teorema 4.3 de [24]).*Seja M uma variedade Riemanniana compacta. Suponha que $\mathrm{ric}^M \geqslant -(m-1)$. Então, para $p > 1$, existe uma constante $c = c(m,p)$, dependendo de m e p tal que*

$$\lambda_{1,p}(M) \leqslant c(h_M + h_M^p).$$

Quando $p = 2$ nos teoremas 3.6 e 3.7, obtemos, respectivamente, os teoremas 0.6 e 0.7.

Obs 3.2.

(i) *Quando a curvatura seccional de M é não-negativa, obtemos, pelos teoremas 3.5 e 3.6, que*

$$\frac{2}{p^p d_M^p} \leqslant \lambda_{1,p}(M) \leqslant \frac{2^{2p+2}(m+p)^{m+p}}{(m-1)^{m-1}p^p}\frac{1}{d_M^p},$$

ou seja, $\lambda_{1,p}(M) = O(d_M^{-1})$.

(ii) *Sob as hipóteses do teorema 3.7, obtemos, pelos teoremas 3.5 e 3.7, que para uma sequência de variedades Riemannianas compactas $(M_j)_{j\in\mathbb{N}}$, ou para uma sequência de métricas Riemannianas $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em uma variedade Riemanniana M, isto é, $M_j = (M_j, g_j)$, tem-se*

$$\lim_{j\to\infty} \lambda_{1,p}(M_j) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{j\to\infty} h_{M_j} = 0.$$

Pelos teoremas 3.5 e 3.7, obtemos, para todo $j \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{h_{M_j}}{p}\right)^p \leqslant \lambda_{1,p}(M_j) \leqslant c(h_{M_j} + {h_{M_j}}^p).$$

Se $\lim_{j\to\infty} h_{M_j} = 0$, então obtemos $\lim_{j\to\infty}\lambda_{1,p}(M_j) = 0$. Reciprocamente, pelo teorema 3.5, obtemos, para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant h_{M_j} \leqslant p(\lambda_{1,p}(M_j))^{1/p}.$$

Assim, se $\lim_{j\to\infty}\lambda_{1,p}(M_j) = 0$, teremos $\lim_{j\to\infty} h_{M_j} = 0$.

Demonstração do Teorema 3.5: Seja $\overline{f} \in W^{1,p}(M)$ a primeira autofunção de Δ_p. Pelo teorema de densidade (corolário 2.5), existe uma sequência de funções de Morse, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que converge em $W^{1,p}$ para $\overline{f}$. Sejam $A_n = f_n^{-1}(\mathbb{R}_+)$ e $B_n = f_n^{-1}(\mathbb{R}_-)$. Como cada $\partial A_n = \partial B_n = f_n^{-1}(0)$ é uma hipersuperfície regular e fechada, pois sendo cada f_n de Morse, podemos supor 0 valor regular para cada f_n. Pelo mesmo argumento usado no fim da demonstração do lema 3.1, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_{A_n} \|\nabla f_n\|^p d\nu_g}{\int_{A_n} |f_n|^p d\nu_g} = \lambda_{1,p}(M). \tag{3.37}$$

Fixado $n \in \mathbb{N}$, para amenizar a notação, assuma $f = f_n$, $A = A_n$ e $B = B_n$. Pela desigualdade de Hölder (teorema 2.11),

$$\begin{aligned}
\int_A \|\nabla(f^p)\| d\nu_g &= \int_A p|f|^{p-1}\|\nabla f\| d\nu_g \\
&\leqslant p\left(\int_A \left(|f|^{p-1}\right)^q d\nu_g\right)^{1/q}\left(\int_A \|\nabla f\|^p d\nu_g\right)^{1/p} \\
&= p\left(\int_A |f|^p d\nu_g\right)^{1-1/p}\left(\int_A \|\nabla f\|^p d\nu_g\right)^{1/p} \\
&= p\frac{\int_A |f|^p d\nu_g}{\left(\int_A |f|^p d\nu_g\right)^{1/p}}\left(\int_A \|\nabla f\|^p d\nu_g\right)^{1/p},
\end{aligned}$$

onde q é o conjugado de p, ou seja, $1/p + 1/q = 1$. Daí, temos

$$\frac{\int_A \|\nabla f\|^p d\nu_g}{\int_A |f|^p d\nu_g} \geqslant \frac{1}{p^p}\left(\frac{\int_A \|\nabla(f^p)\| d\nu_g}{\int_A |f|^p d\nu_g}\right)^p. \tag{3.38}$$

Assim, por (3.37) e (3.38), é suficiente provar que

$$\frac{\int_A \|\nabla(f^p)\| d\nu_g}{\int_A |f|^p d\nu_g} \geqslant h_M. \tag{3.39}$$

Pela compacidade de M e do fato de f ser função de Morse, temos que, a menos de uma quantidade finita de valores t, $A(t) = (f^p)^{-1}(t)$ é uma hipersuperfície regular de M. Daí, pela fórmula da coarea (teorema 2.2),

$$\begin{aligned}
\int_A \|\nabla(f^p)\| d\nu_g &= \int_0^{\sup f^p}\left(\int_{A(t)} \|\nabla(f^p)\|\|\nabla(f^p)\|^{-1} d\sigma_t\right)dt \\
&= \int_0^{\sup f^p}\left(\int_{A(t)} d\sigma_t\right)dt \\
&= \int_0^{\sup f^p} \mathrm{Vol}_{n-1}(A(t))dt,
\end{aligned} \tag{3.40}$$

onde $d\sigma_t$ denota o elemento de volume da métrica Riemanniana induzida sobre a hipersuperfície $A(t) = (f^p)^{-1}(t)$. Seja $V(t) = (f^p)^{-1}\big((t,\infty)\big)$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\mathrm{Vol}(A) \leqslant \mathrm{Vol}(B)$. Disto e pela definição de h_M (definição 2.1)

$$h_M = \inf_{\Omega\subset M} \frac{\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial\Omega)}{\mathrm{Vol}(\Omega)} \leqslant \frac{\mathrm{Vol}_{n-1}(A(t))}{\mathrm{Vol}(V(t))}. \tag{3.41}$$

Logo, de (3.40) e (3.41), temos

$$\int_A \|\nabla(f^p)\| d\nu_g \geqslant h_M \int_0^{\sup f^p} \mathrm{Vol}(V(t))dt. \tag{3.42}$$

Integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^{\sup f^p} \mathrm{Vol}(V(t))dt &= t\mathrm{Vol}(V(t))\Big|_0^{\sup f^p} - \int_0^{\sup f^p} t\frac{d}{dt}\big[\mathrm{Vol}(V(t))dt\big] \\ &= -\int_0^{\sup f^p} t\frac{d}{dt}\big[\mathrm{Vol}(V(t))dt\big]. \end{aligned}\tag{3.43}$$

Mas

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big[\mathrm{Vol}(V(t))\big] &= \frac{d}{dt}\int_{V(t)} ds \\ &= \frac{d}{dt}\int_t^{\sup f^p}\left(\int_{A(s)} \|\nabla(f^p)\|^{-1} d\sigma_s\right)dt \\ &= \int_{A(s)} \|\nabla(f^p)\|^{-1} d\sigma_s\Big|_t^{\sup f^p} \\ &= -\int_{A(t)} \|\nabla(f^p)\|^{-1} d\sigma_t. \end{aligned}\tag{3.44}$$

Combinando (3.43), (3.44) e usando a fórmula da coarea, obtemos

$$\int_0^{\sup f^p} \mathrm{Vol}(V(t))dt = \int_0^{\sup f^p}\int_{A(t)} t\|\nabla(f^p)\|^{-1} d\sigma_t = \int_A f^p d\nu_g. \tag{3.45}$$

Portanto, de (3.42) e (3.45), concluimos que vale (3.39). O que conclui nossa demonstração.

■

Demonstração do Teorema 3.6: Seja $x_0 \in M$. Então existe uma constante r_0 tal que a função $f = r - r_0$, onde r é a função distância de M em relação a x_0, satisfaz $\int_M |f|^{p-2} f d\nu_g = 0$. De fato, considere a função real

$$h(t) = \int_M |r-t|^{p-2}(r-t)d\nu_g = \int_M |r-t|^{p-1} r d\nu_g - \int_M |r-t|^{p-1} t d\nu_g, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Daí veja que h é contínua com $\lim_{t\to\infty} h(t) = -\infty$ e $\lim_{t\to-\infty} h(t) = \infty$. Logo, nossa afirmação segue do teorema do valor intermediário. De posse disso, e da definição do primeiro autovalor de Δ_p (expressão (3.1)), temos

$$\lambda_{1,p}(M) \leqslant \frac{\int_M \|\nabla f\|^p dv_g}{\int_M |f|^p dv_g}. \tag{3.46}$$

Mas $\|\nabla f\| = \|\nabla(r - r_0)\| = \|\nabla r\| = 1$ em $M\backslash\{x_0 \cup \mathrm{Cut}(x_0)\}$, onde $\mathrm{Cut}(x_0)$ denota o *cut locus* de x_0 (definição 1.15). Então

$$\lambda_{1,p}(M) \leqslant \frac{\mathrm{Vol}(M)}{\int_M |f|^p dv_g}.$$

Usando o mesmo argumento de [10] para esta função $f = r - r_0$, vemos que para

$$A_{\alpha,\beta} := \left\{x \in M; |f(x)| \geqslant \frac{\alpha(1-2\beta)}{2^2} d_M\right\}, \qquad \alpha \in (0,1),\ \beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right),$$

vale,

$$\mathrm{Vol}(A_{\alpha,\beta}) \geqslant \frac{\alpha\beta(1-\alpha)^{m-1}\mathrm{Vol}(M)}{2}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\int_M |f|^p dv_g &\geqslant \int_{A_{\alpha,\beta}} |f|^p dv_g \\
&\geqslant \frac{\alpha^p(1-2\beta)^p}{2^{2p}} d_M^p \int_{A_{\alpha,\beta}} dv_g \\
&= \frac{\alpha^p(1-2\beta)^p}{2^{2p}} d_M^p \mathrm{Vol}(A_{\alpha,\beta}) \\
&\geqslant \frac{\alpha^p(1-2\beta)^p}{2^{2p}} d_M^p \frac{\alpha\beta(1-\alpha)^{m-1}\mathrm{Vol}(M)}{2} \\
&= \frac{(1-\alpha)^{m-1}\alpha^{p+1}\beta(1-2\beta)^p}{2^{2p+1}} d_M^p \mathrm{Vol}(M).
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Pelas equação (3.46), a melhor estimativa superior para $\lambda_{1,p}(M)$ seria uma boa estimativa inferior para $\int_M |f|^p dv_g$. Assim, pela estima inferior (3.47), devemos procurar um ponto $(\alpha, \beta) \in (0,1) \times \left(0, \frac{1}{2}\right)$ de modo que maximize $(1-x)^{m-1}x^{p+1}y(1-2y)^p$ sobre o retângulo aberto $(0,1) \times \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Para isto, seja $F : [0,1] \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$F(x,y) = (1-x)^{m-1}x^{p+1}y(1-2y)^p.$$

Como F é suave, em particular contínua, sobre o compacto $Q = [0,1] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$, obtemos que F atinge um máximo neste compacto Q. Veja que $F_{|\partial Q} = 0$ e $F > 0$ em $(0,1) \times \left(0, \frac{1}{2}\right)$, pois

$$(1-x)^{m-2}x^p \neq 0, \qquad \forall x \in (0,1), \tag{3.48}$$

$$y(1-2y)^p \neq 0, \qquad \forall y \in \left(0, \frac{1}{2}\right). \tag{3.49}$$

Logo F deve atingir seu máximo no aberto $(0,1) \times \left(0, \frac{1}{2}\right)$, justamente o que queremos. Para encontrarmos o máximo, estudaremos os pontos críticos de F. Seja (x, y) um ponto crítico de F. Então,

$$0 = F_x(x,y) = \left[-(m-1)(1-x)^{m-2}x^{p+1} + (p+1)(1-x)^{m-1}x^p\right]y(1-2y)^p.$$

Por (3.48),

$$\begin{aligned} 0 &= -(m-1)(1-x)^{m-2}x^{p+1} + (p+1)(1-x)^{m-1}x^p \\ &= (1-x)^{m-2}x^p[-(m-1)x + (p+1)(1-x)]. \end{aligned}$$

Agora por (3.49),

$$\begin{aligned} 0 &= -(m-1)x + (p+1)(1-x) \\ &= -(m-1)x + (p+1) - (p+1)x \\ &= -(m+p)x + (p+1). \end{aligned}$$

Assim,

$$x = \frac{p+1}{m+p}. \tag{3.50}$$

Além disso,

$$0 = F_y(x,y) = (1-x)^{m-1}x^{p+1}[(1-2y)^p - 2py(1-2y)^{p-1}],$$

donde, por (3.48),

$$\begin{aligned} 0 &= (1-2y)^p - 2py(1-2y)^{p-1} \\ &= (1-2y)^{p-1}[1-2y-2py] \end{aligned}$$

e, por (3.49),

$$0 = 1 - 2y - 2py = 1 - 2y(1+p).$$

Daí,

$$y = \frac{1}{2(p+1)}. \tag{3.51}$$

Portanto

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{p+1}{m+p}, \frac{1}{2(p+1)}\right) \tag{3.52}$$

é o único ponto crítico de F. Logo tal ponto deve ser, o único, ponto de máximo de F. Substituindo este ponto na equação (3.47), obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_M |f|^p d\nu_g &\leqslant \frac{(1-\alpha)^{m-1}\alpha^{p+1}\beta(1-2\beta)^p}{2^{2p+1}}(d_M)^p \mathrm{Vol}(M) \\
&\leqslant \frac{\left(1-\frac{p+1}{m+p}\right)^{m-1}\left(\frac{p+1}{m+p}\right)^{p+1}\frac{1}{2(p+1)}\left(1-\frac{2}{2(p+1)}\right)^p}{2^{2p+1}}(d_M)^p \mathrm{Vol}(M) \\
&= \frac{\left(\frac{m-1}{m+p}\right)^{m-1}\left(\frac{p+1}{m+p}\right)^{p+1}\frac{1}{2(p+1)}\left(\frac{p}{(p+1)}\right)^p}{2^{2p+1}}(d_M)^p \mathrm{Vol}(M) \\
&= \frac{\frac{(m-1)^{m-1}}{(m+p)^{m-1}}\frac{p^p}{2(m+p)^{p+1}}}{2^{2p+1}}(d_M)^p \mathrm{Vol}(M) \\
&= \frac{\frac{(m-1)^{m-1}}{(m+p)^{m+p}}\frac{p^p}{2}}{2^{2p+1}}(d_M)^p \mathrm{Vol}(M) \\
&= \frac{p^p}{2}\frac{1}{2^{2p+1}}\frac{(m-1)^{m-1}}{(m+p)^{m+p}}(d_M)^p \mathrm{Vol}(M) \\
&= \frac{p^p}{2^{2p+2}}\frac{(m-1)^{m-1}}{(m+p)^{m+p}}(d_M)^p \mathrm{Vol}(M) \qquad (3.53)
\end{aligned}
$$

Substituindo a estimativa (3.53) acima em (3.46), concluimos que

$$\lambda_{1,p}(M) \leqslant \frac{2^{2p+2}(m+p)^{m+p}}{(m-1)^{m-1}p^p}\frac{1}{d_M^p},$$

o que encerra a demonstração do teorema.

■

Demonstração o Teorema 3.7: Seja X uma hipersuperfície que divide M em dois domínios disjuntos A e B. Seja $\mathcal{H} = \mathrm{Vol}(X)/\inf\{\mathrm{Vol}(A), \mathrm{Vol}(B)\}$ e denote por $\beta(r)$ o m-volume da bola hiperbólica de raio r, i.e,

$$
\begin{aligned}
\beta(r) &= \int_{B(x,r)} (\exp_x)^* d\mathbb{H}^m \\
&= \int_0^r \int_{\mathbb{S}^m} \mathrm{senh}(t)^{m-1} d\sigma dt \\
&= \omega_m \int_0^r \mathrm{senh}(t)^{m-1} dt,
\end{aligned}
$$

onde $B(x,r)$ é a bola de centro x e raio r em $T_x\mathbb{H}^m$ e ω_m é o volume $(m-1)$-dimensional da esfera unitária $\mathbb{S}^{m-1} \subset T_x\mathbb{H}^m$. Agora seja $\sigma(r) = (d/dr)\beta(r) = \omega_n(\sinh r)^{m-1}$, o $(m-1)$-volume da correspondente esfera de raio r em $\mathbb{H}^m$. Em [6], Buser mostrou que

$$j(r) := \frac{\sigma(r/4)\beta(r/2)}{4\beta(2r)\beta(r)} \geqslant \frac{1}{r}c_1^{1+r}, \qquad (3.54)$$

onde $c_1 < 1$ é uma constante que depende da dimensão de M. Ainda por [6] podemos tomar r suficientemente pequeno de modo que

$$\mathcal{H}\frac{\beta(4r)}{\beta(r)j(r)} \leqslant \frac{1}{8}, \tag{3.55}$$

onde, para $B(x,r)$ a bola de centro x e raio r em M, os conjuntos

$$\widetilde{A} = \left\{x \in M; \mathrm{Vol}(A \cap B(x,r)) > \frac{1}{2}\mathrm{Vol}(B(x,r))\right\}$$

e

$$\widetilde{B} = \left\{x \in M; \mathrm{Vol}(B \cap B(x,r)) > \frac{1}{2}\mathrm{Vol}(B(x,r))\right\}$$

são não vazios. Pela continuidade da aplicação $x \mapsto \mathrm{Vol}\big(A \cap B(x,r)\big) - \mathrm{Vol}\big(B \cap B(x,r)\big)$ vê-se, tomando a imagem inversa do $\{0\}$ por esta aplicação, que $\widetilde{A}$ e $\widetilde{B}$ são separados pelo subconjunto fechado $\widetilde{X} = \big\{x \in M; \mathrm{Vol}\big(A \cap B(x,r)\big) = \mathrm{Vol}\big(B \cap B(x,r)\big)\big\}$. Seja $\widetilde{X}^t = \big\{x \in M; \mathrm{dist}(x,X) \leqslant t\big\}$ e veja que $\lambda_{1,p}(M) \leqslant \max\{\mu_{1,p}(\widetilde{A}), \mu_{1,p}(\widetilde{B})\}$. Suponha $\lambda_{1,p}(M) \leqslant \mu_{1,p}(\widetilde{A})$. Agora, defina a função $f : \widetilde{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{dist}(x,\widetilde{X})}{2r}, & \text{se } x \in \widetilde{X}^{2r} \cap \widetilde{A}; \\ 1, & \text{se } x \in \widetilde{A}\backslash\widetilde{X}^{2r}. \end{cases} \tag{3.56}$$

Então $\|\nabla f\| \leqslant 1/2r$ em $\widetilde{X}^{2r} \cap \widetilde{A}$ e $\|\nabla f\| = 0$ em $\widetilde{X}^{2r}$. Usando a equação (3.55) na estimativa abaixo, obtida por Buser [6],

$$\mathrm{Vol}(\widetilde{X}^{2r}) \leqslant \mathcal{H}\frac{2\beta(4r)}{\beta(r)j(r)}\mathrm{Vol}(A) \quad \text{e} \quad \mathrm{Vol}(\widetilde{A}\backslash\widetilde{X}^{2r}) \geqslant \left(1 - \frac{4\mathcal{H}\beta(4r)}{\beta(r)j(r)}\right)\mathrm{Vol}(A),$$

obtemos

$$\mathrm{Vol}(\widetilde{X}^{2r}) \leqslant \mathcal{H}\frac{2\beta(4r)}{\beta(r)j(r)}\mathrm{Vol}(A) \quad \text{e} \quad \mathrm{Vol}(\widetilde{A}\backslash\widetilde{X}^{2r}) \geqslant \frac{1}{2}\mathrm{Vol}(A). \tag{3.57}$$

Então, pela definição de f e pelas estimativas (3.54), (3.55) e (3.57), acima

$$\begin{aligned} \lambda_{1,p}(M) \leqslant \mu_{1,p}(\widetilde{A}) &\leqslant \frac{\int_{\widetilde{A}} \|\nabla f\|^p d\nu_g}{\int_{\widetilde{A}} f^p d\nu_g} = \frac{\int_{\widetilde{X}^{2r}\cap\widetilde{A}} \|\nabla f\|^p d\nu_g}{\int_{\widetilde{A}} f^p d\nu_g} \\ &\leqslant \frac{1}{(2r)^p}\frac{\int_{\widetilde{X}^{2r}\cap\widetilde{A}} d\nu_g}{\int_{\widetilde{A}} f^p d\nu_g} \leqslant \frac{1}{(2r)^p}\frac{\int_{\widetilde{X}^{2r}\cap\widetilde{A}} d\nu_g}{\int_{\widetilde{A}\backslash\widetilde{X}^{2r}} f^p d\nu_g} \\ &= \frac{1}{(2r)^p}\frac{\int_{\widetilde{X}^{2r}\cap\widetilde{A}} d\nu_g}{\int_{\widetilde{A}\backslash\widetilde{X}^{2r}} d\nu_g} = \frac{1}{(2r)^p}\frac{\mathrm{Vol}(\widetilde{X}^{2r}\cap\widetilde{A})}{\mathrm{Vol}(\widetilde{A}\backslash\widetilde{X}^{2r})} \\ &\leqslant \mathcal{H}\frac{4}{(2r)^p}\frac{\beta(4r)}{\beta(r)j(r)} \leqslant \mathcal{H}\frac{4}{(2r)^p}\frac{\beta(4r)}{\beta(r)}\frac{r}{c_1^{1+r}} \\ &= \mathcal{H}\frac{4}{(2r)^p} r c_2^{1+r}, \end{aligned}$$

onde $c_2^{1+r} = \frac{\beta(4r)}{\beta(r)} c_1^{1+r}$. Veja que $c_2 > 1$. Com efeito, sendo $\beta(r)$ é o m-volume da bola hiperbólica de raio $r > 0$, vemos que β é uma função crescente, logo $\frac{\beta(4r)}{\beta(r)} > 1$. Por outro lado, $c_1 > 1$. Com isso, $c_2^{1+r} = \frac{\beta(4r)}{\beta(r)} c_1^{1+r} > 1$, donde $c_2 > 1$. Agora tome

$$r = \begin{cases} 1/8, & \text{se } \mathcal{H} \leqslant 1/c_2^2, \\ 1/(8\mathcal{H}c_2^2), & \text{se } \mathcal{H} \geqslant 1/c_2^2. \end{cases} \tag{3.58}$$

Observe que r varia continuamente, pois quando $\mathcal{H} = 1/c_2^2$ obtemos, em ambos os casos da definição 3.58 acima, $r = 1/8$. Ademais, sempre temos $r \leqslant 1/8 < 1$. Daí, como $p > 1$ vemos

(i) $\mathcal{H} \leqslant 1/c_2^2$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,p}(M) &\leqslant \mathcal{H}\frac{4}{(2r)^p} r c_2^{1+r} \\ &= \mathcal{H}\frac{2^2}{(2\cdot 2^{-3})^p} 2^{-3} c_2^{1+\frac{1}{8}} \\ &= \mathcal{H}\frac{2^{-1}}{2^{-2p}} c_2^{1+\frac{1}{8}} \\ &= \mathcal{H}2^{2p-1} c_2^{1+\frac{1}{8}} \\ &\leqslant \mathcal{H}2^{2p-1} c_2^2 \\ &\leqslant \mathcal{H}2^{2p-1} c_2^{2p}. \end{aligned} \tag{3.59}$$

(ii) $\mathcal{H} \geqslant 1/c_2^2$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,p}(M) &\leqslant \mathcal{H}\frac{4}{(2r)^p} r c_2^{1+r} \\ &= \mathcal{H}\frac{2^2}{(2\cdot 2^{-3}\mathcal{H}^{-1}c_2^{-2})^p} 2^{-3}\mathcal{H}^{-1}c_2^{-2}c_2^{1+r} \\ &= \frac{2^{-1}}{2^{-2p}\mathcal{H}^{-p}c_2^{-p}} c_2^{r-1} \\ &= \mathcal{H}^p 2^{2p-1} c_2^p \frac{1}{c_2^{1-r}} \\ &\leqslant \mathcal{H}^p 2^{2p-1} c_2^p \end{aligned} \tag{3.60}$$

Assim, como $\lambda_{1,p}(M) > 0$, ganhamos, somando as estimativas (3.59) e (3.60), que

$$\lambda_{1,p}(M) \leqslant 2^{2p-1} c_2^p (\mathcal{H} + \mathcal{H}^p). \tag{3.61}$$

Como X é uma hipersuperfície que divide M em dois domínios disjuntos A e B, obtemos que X pertence as fronteiras de A e de B. Suponha, sem perda de generalidade, $\mathrm{Vol}(A) =$

$\inf\{\mathrm{Vol}(A), \mathrm{Vol}(B)\}$. Daí, obtemos que

$$\mathcal{H} = \frac{\mathrm{Vol}(X)}{\inf\{\mathrm{Vol}(A), \mathrm{Vol}(B)\}} = \frac{\mathrm{Vol}(X)}{\mathrm{Vol}(A)} \leqslant \frac{\mathrm{Vol}(\partial A)}{\mathrm{Vol}(A)}.$$

Sendo A qualquer, concluimos, pela definição 2.1,

$$\mathcal{H} \leqslant h_M. \tag{3.62}$$

Pelas desigualdades (3.62) e (3.61) concluimos a demonstração.

■

Referências Bibliográficas

[1] Berard, P., Meyer, D. - *Inégalités isopérimétriques et applications*, Annales scientifiques de l'É.N.S., série 4, vol. 15, no. 3 (1982), p. 513-541.

[2] Bhattacharya, T. - *A Proof of the Faber-Krahn Inequality for the First Eigenvalue of the p-Laplacian.*Annali di Matematica pura ed applicata (IV), vol. CLXXVII (1999), pp. 225-240.

[3] Bhattacharya, T. - *Radial symmetry of the first eigenfunction for the p-Laplacian in the ball.* American Mathematical Society, vol. 104, no. 1 (1988), p. 169-174.

[4] Brezis, H. - *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer Science+Business Media LLC, 2011.

[5] Bartle, R. G. - *The Elements of Integration and Lebesgue Measure.* John Wiley & Sons , Inc., 1995.

[6] Buser, P. - *A note on the isoperimetric constant.* Annales scientifiques de l'É.N.S., série 4, vol. 15, no. 2 (1982), p. 213-230.

[7] Berger, M., Gauduchon, P., Mazet, E. - *Le spectre d'une variété Riemanniene*, Lectures Notes in Mathematics, vol. 194, Springer, Berlin, 1971.

[8] Chavel, I., - *Eigenvalues in Riemannian geometry*, Academic Press, New York, 1984.

[9] Chavel, I., - *Riemannian geometry, A modern introduction*, Cambridge University Press, 1995.

[10] Cheeger, J., - *The relation between the laplacian and the diameter for manifolds of non-negative curvature.* Arch. Math. XIX (1968), p. 558-560.

[11] Cheng, S. W., - *Eigenvalue comparison theorems and its geometric application*, Math. Z. 143 (1975) 289-297.

[12] do Carmo, M. P. - *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides - IMPA, 2005.

[13] dos Santos, E. A. F. - *O Teorema de Comparação de Volume de Bishop-Gromov*. Maceió, 2009. Disponível em: <http://www.im.ufal.br/posgraduacao/posmat/download_files_files/dissertacao_2009_erikson.pdf>. Acesso em: 1 de abril de 2011.

[14] Ferreira, E. S. - *A Geometria dos conjuntos nodais*. Rio de Janeiro, 2009. Disponível em: <http://www.pg.im.ufrj.br/teses/Matematica/Mestrado/293.pdf>. Acesso em: 1 de abril de 2011.

[15] Gallot, S. - *A Sobolev inequality and some geometric application, in: Spectra of Riemannian Manifolds*, Kagai Publ., 1983, pp. 45-55.

[16] Garcia Azorero, J.P., Peral Alonso, I. - *Existence and nonuniqueness for* $\mathtt{p}$*-Laplacian eigenvalues*, Comm. Part. Diff. Equ. 12 (1987) 1389-1430.

[17] Hebey, E. - *Nonlinear Analysis on Manifolds: Sobolev Spaces and Inequalities*, American Mathematical Society, Courant Institute of Matematical Sciences, New York, 1999.

[18] Huang, Y.X. - *Existence of positive solutions for a class of the p-Laplace equations*, J. Austral. Math. Soc. Ser. B 36(1994).

[19] Ilias, S. - *Constantes explicites pour les inégalités de Sobolev sur les variétés riemanniennes compactes*. Annales de l'institut Fourier, vol. 33, no. 2 (1983), p. 151-165.

[20] Kawohl, B., Lindqvist, P. - *Positive eigenfunctions for the* $\mathtt{p}$*-Laplace operator revisited*. 2006. Disponível em: <http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/kawohl/lindkaw3a.pdf>. Acesso em: 1 de abril de 2011.

[21] Lê, A. - *Eigenvalue problems for the* $\mathtt{p}$*-Laplacian*. Nonlinear Analysis, no. 64 (2006), p. 1057-1099.

[22] Lee, J. M. - *Introduction to smooth manifolds*. Springer-Verlag, New York, 2002.

[23] Lindqvist, P. - *On The Equation* div $(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda |u|^{p-2}u = 0$. American Mathematical Society, vol. 109. no. I (1990), p. 157-164.

[24] Matei, A.-M. - *First eigenvalue for the p-Laplace operator.* Nonlinear Analysis, vol. 39 (2000), p. 1051-1068.

[25] Milnor, J. W.- *Morse Theory.* Princeton University Press, 1963.

[26] O'Neill, B. - *Semi-Riemannian geometry with applications to Relativity.* Academic Press, London (1983).

[27] Veron, L. - *Some existence and uniqueness results for solution of some quasilinear eliptic equations on compact Riemannian manifolds*, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, vol 62, P.D.E., Budapest (1991), pp. 317-352.