



Kleuton Antunes Lopes Lima

***Razão entre as Amplitudes da Susceptibilidade para
uma Teoria com Simetria $O(N)$ e Violação de Lorentz***

Teresina

17 de Fevereiro de 2017

Razão entre as Amplitudes da Susceptibilidade para uma teoria
com Simetria $O(N)$ e Violação de Lorentz

Kleuton Antunes Lopes Lima

Orientador: **Prof. Dr. Paulo Renato Silva de Carvalho**

Dissertação apresentada ao Universidade Federal do Piauí – UFPI, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física – Programa de Pós-Graduação em Física.

UFPI – Teresina
de 2017

FICHA CATALOGRÁFICA

Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial de Ciências da Natureza - CCN

L733r Lima, Kleuton Antunes Lopes.

Razão entre as ampliadas da susceptibilidade para uma teoria com simetria $O(N)$ e Violação de Lorentz / Kleuton Antunes Lopes Lima. – Teresina: 2017.

221 f.: il. color

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-graduação em Física, 2017.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Renato Silva de Carvalho.

1. Teoria Quântica do Campo. 2. Grupo de Renormalização. 3. Violação de Lorentz. I. Título.

CDD 530.143

*“Razão entre as Amplitudes da Susceptibilidade para uma teoria
com Simetria $O(N)$ e Violação de Lorentz”*

Kleuton Antunes Lopes Lima

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Natureza-CCN/UFPI.

Comissão Julgadora:



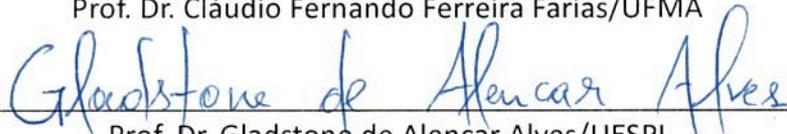
Prof. Dr. Paulo Renato Silva de Carvalho(Orientador)



Prof. Dr. Antônio de Macedo Filho/UESPI



Prof. Dr. Cláudio Fernando Ferreira Farias/UFMA



Prof. Dr. Gladstone de Alencar Alves/UESPI

Aprovada em 17/02/2017

Á minha namorada Mirian Lima dos Santos.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Prof. Paulo Renato S. de Carvalho, pela ajuda, orientação, paciência e compreensão durante o decorrer deste trabalho.

Aos demais professores do Departamento de Física da Universidade Federal do Piauí, pelo conhecimento que adquiri durante esses anos de graduação e pós-graduação.

Aos meus pais, Jose Calixto Lopes Neto e Isabel Maria Lima Lopes.

Aos meus amigos da pós-graduação, Paloma Vieira, Maykon Vinicius, Oziel Ribeiro, Fabrício Moraes, Dayvison Maia, Marcelo, Valber, por todos os bons momentos juntos.

Aos meus amigos de minha cidade de São Joao dos patos, que sempre me apoiaram a chegar onde estou.

À minha namorada Mirian Lima e sua família, pelo carinho e apoio.

*“As invenções são, sobretudo,
o resultado de um trabalho de teimoso.”
(Santos Dumont)*

RESUMO

Neste trabalho, aplicaremos técnicas de teoria quântica de campos escalares com interação do tipo $\lambda\phi^4$ e grupo de renormalização para calcularmos a razão entre as amplitudes de susceptibilidade para uma teoria que apresente simetria $O(N)$ e violação de Lorentz. A quebra de simetria é introduzida na parte cinética da lagrangiana do sistema. O valor obtido é o mesmo encontrado em uma teoria invariante de Lorentz, o que, como veremos, está de acordo com a importante hipótese de universalidade.

Palavras-chave: Teoria ϕ^4 , Grupo de Renormalização, Susceptibilidade, Razão entre Amplitudes, Violação de Lorentz.x.

ABSTRACT

In this work we will apply scalar-field quantum theory techniques with type $\lambda\phi^4$ interaction and renormalization group to calculate the ratio between the susceptibility amplitudes for a theory that presents O(N) and Lorentz. The symmetry break is introduced into the kinetic part of the Lagrangian system. The value obtained is the same as that found in an invariant Lorentz theory, which, as we shall see, is in agreement with the important hypothesis of universality.

Key-words: ϕ^4 Theory, Renormalization Group, Specific Heat, Amplitude Ratios, Lorentz violation..

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Diagrama de fase de um fluido como a água.	11
Figura 2 – Representação esquemática dos spins. Em (a) fase paramagnética, em (b) fase ferromagnética	11

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
	Sumário	16
2	RENORMALIZAÇÃO DA TEORIA ϕ^4	17
2.1	Teoria ϕ^4	17
2.2	Divergências na Teoria ϕ^4	24
2.3	Condição de Normalização	25
3	CÁLCULO DA RAZÃO DAS AMPLITUDES DA SUSCEPTIBILIDADE	28
4	CONCLUSÕES	32
A	CÁLCULO DAS INTEGRAIS DE FEYNMAN D-DIMENSIONAIS	33
A.1	Regularização Dimensional	33
A.2	Propriedades da função Γ	34
B	CÁLCULO DA INTEGRAIS QUE VIOLAM A SIMETRIA LORENTZ	36
B.1	Cálculo de I	36
B.2	Cálculo de I_{SP}	37
B.2.1	Cálculo de I'_1	38
B.2.2	Cálculo de I'_2 e I'_3	38
	REFERÊNCIAS	40

INTRODUÇÃO

O estudo de transições de fase e fenômenos críticos tem um papel muito importância na descrição de vários sistemas físicos, e é extremamente importante na física da matéria condensada, que por sua vez encontra importância tanto nos conceitos que fundamentam teorias da física, como na tecnologia, pois com o conhecimento destas transições, por exemplo, podemos construir novos materiais eletrônicos facilitando ainda mais a vida humana. Um exemplo disto e que sistemas com grande número de partículas exibe grande variedade de transição de fase.

As transições de fase podem ser classificadas em dois tipos, transição contínua ou transição descontínua. Uma transição é dita descontínua quando suas descontinuidades ocorrem nas primeiras derivadas de algumas funções termodinâmicas, em outras palavras, sofre uma descontinuidade na primeira derivada da energia livre em uma certa temperatura, a exemplo dessa primeira derivada temos a energia interna. Tal transição é acompanhada por uma absorção ou liberação de calor latente. Um exemplo importante é a evaporação da água. Uma transição contínua acontece quando a primeira derivada da energia livre é contínua mas a segunda derivada (calor específico, compressibilidade ou susceptibilidade) sofre uma divergência em uma certa temperatura T_c , que é conhecida como temperatura crítica. São ditas de segunda ordem quando a descontinuidade dos sistemas ocorrem nas segundas derivadas das referidas funções, mantendo a simetria, assim sendo dita contínua. Na nomenclatura antiga, devido a Ehrenfest, as transições de fase eram classificadas como sendo de ordem N caso a N-ésima derivada da energia livre apresentasse uma descontinuidade. Entretanto, essas últimas, na verdade, apresentam uma divergência nas derivadas segundas e não uma descontinuidade. Por isso, a nomenclatura de Ehrenfest não é a mais adequada, embora até hoje se use o termo “transição de fase de primeira ordem” para se referir às transições descontínuas e “transição de fase de segunda ordem” para se referir às transições contínuas.[1]

Exemplo de transição de fase contínua é a que acontece com a água quando aquecida a uma temperatura de cerca de 647K e mantida a uma pressão de 218 atm, nessa condição temos

uma coexistência de fases (líquido e gás) sem que mude a densidade ou ainda sem perda ou absorção de calor latente. Veja Figura (1).

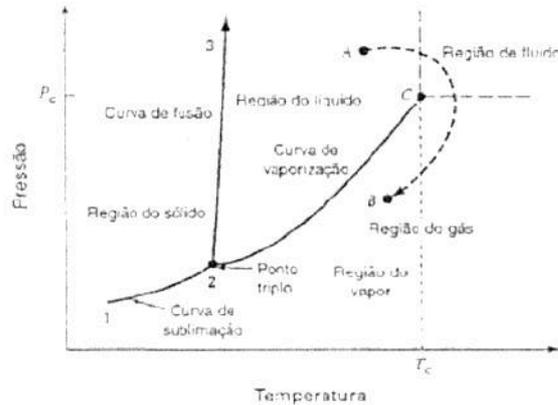


Figura 1 – Diagrama de fase de um fluido como a água.

Outro exemplo importante é o de sistemas magnéticos, abaixo da temperatura crítica T_c que para esse caso em particular é chamada de temperatura de Curie, o sistema encontra-se magnetizado. À medida que aumentamos a temperatura, percebe-se que a magnetização diminui continuamente até anular-se em T_c . Ao mesmo tempo observa-se uma divergência na susceptibilidade magnética (mudança na magnetização induzida por um pequeno campo aplicada) do sistema. As formações de domínios magnéticos (fase ferromagnética) e fase paramagnética ocorrem em todas as escalas de distâncias, conforme aumentamos ou diminuimos a temperatura em torno da temperatura crítica. Na fase ferromagnética, a interação entre os spins é mais forte que os efeitos térmicos e os deixam alinhados com uma ordenação uniforme dentro de um domínio. Ao passo que na fase paramagnética, os efeitos térmicos vencem a interação entre os spins e os desalinham desordenadamente, como mostra a Figura 1.2.



Figura 2 – Representação esquemática dos spins. Em (a) fase paramagnética, em (b) fase ferromagnética

Vários estudos que envolvem comportamentos críticos foram desenvolvidos com finalidade de compreender o que ocorre em um determinado sistema físico no seu ponto crítico ou na região próxima a este. Entre estes estudos, podemos colocar as transição de fase contínuas em bases mais sólidas através da teoria de Landau, cuja energia que descreve o parâmetro de

ordem do sistema é invariante sob algum grupo de transformação linear, dependendo apenas da simetria do sistema [2]. Esta energia pode ser deduzida no caso de teorias de campo médio específicas como teria de Weiss, Van Der Waals, ou BCS da supercondutividade. Outros modelos de comportamento crítico são o modelo clássico de Ising [3] para sistemas magnéticos, de Heisenberg [4] para sistemas ferromagnéticos e o modelo de Nambu [5] e Goldstone [6] que é obtido a partir de quebra espontânea de simetria contínua, entre outros modelos.

Modelos que envolvem quebra espontânea de simetria são oriundos de sistemas que envolvem transições de fase contínuas. Elas são caracterizadas pelo estado de vácuo de um determinado campo escalar, obtido pelo valor da minimização do seu potencial, quando observado diferente de zero. Uma importante consequência está no fato de que existe infinitas escolhas entre diferentes direções do campo escalar ϕ . O campo escalar ϕ está contido em um grupo ortogonal com N componentes, caracterizado como grupo de simetria $O(N)$. As N componentes deste campos são idênticas. Este grupo de simetria em geral representa uma invariância com relação a uma rotação espacial de suas N componentes. Assim, para um campo que varia lentamente de ponto a ponto no espaço-tempo, é observada uma degenerescência no estado de vácuo de $O(N)$. Num dado sistema físico que evolui quebra espontânea de simetria, resulta no aparecimento de campos escalares massivos e sem massa (bósons de Goldstone). Tal modelo é bem utilizado em estudo de ferromagnetismo, cristais líquidos, supercondutividade e etc.

O modelo mais simplificado criado para o estudo de transições de fase em sistemas magnéticos é o modelo Ising ($N = 1$). Que teve uma solução exata, em sua versão unidimensional, obtida pela primeira vez por E. Ising. A versão bidimensional do modelo Ising foi resolvida exatamente, sem campo magnético externo por L. Onsager [7]. Na presença de um campo externo a versão bidimensional não tem solução exata, assim como o caso tridimensional.

Um parâmetro importante no estudo de transições de fase é o chamado parâmetro de ordem que tem como característica ter um valor não nulo abaixo da temperatura crítica e que se anula continuamente em T_c . Este parâmetro foi inicialmente introduzido por L. D. Landau. Em sistemas magnéticos, temos que o momento magnético por unidade de volume define a magnetização espontânea M que é o parâmetro de ordem do sistema, pois ela nos dá a informação de quando o sistema estar ordenado ($M \neq 0$) ou desordenado ($M = 0$).

Resultados experimentais e teóricos indicam que o comportamento das propriedades do sistema podem, em geral, ser descritas por leis de potência simples. Através da introdução do parâmetro denominado temperatura reduzida t , onde

$$t = \frac{T - T_c}{T_c}, \quad (1.1)$$

que mede a distância em relação ao ponto crítico e nos dá a informação sobre em qual lado da transição estamos, podemos expressar o comportamento assintótico das funções termodinâmicas, temos que

$$C \sim |t|^{-\alpha}, \quad (1.2)$$

onde α é o expoente crítico associado ao calor específico C note que C tende ao infinito quando α vai a zero, o que caracteriza uma transição contínua;

$$M \sim |t|^\beta, \quad (1.3)$$

onde β é o expoente crítico relacionado com o parâmetro de ordem da teoria (magnetização para sistemas magnéticos, e diferença de densidade no caso de um fluido), veja que $M \rightarrow 0$, para $t \rightarrow 0$;

$$\chi \sim |t|^{-\gamma}, \quad (1.4)$$

γ é o expoente associado susceptibilidade χ , que assim como o calor específico diverge para $t \rightarrow 0$;

$$M \sim H^{1/\delta}, \quad (1.5)$$

Esta relação é uma equação de estado, que define o expoente crítico δ , e nos da a relação entre o parâmetro de ordem e o campo externo (ou pressão no caso de fluidos).

No total existe seis expoentes críticos, são eles ν que estar associado à divergência do comprimento de correlação ξ , este por sua vez estar relacionado com as funções de correlações. O comprimento de correlação mede o alcance das correlações entre as flutuações, e ele diverge para $t \rightarrow 0$ por isso temos

$$\xi \sim |t|^{-\nu}. \quad (1.6)$$

O outro expoente é chamado de dimensão anômala η , que também estar relacionado com as funções de correlações,

$$G(x) = \frac{1}{|x|^{D-2+\eta}}, \quad (1.7)$$

onde D é o número de dimensões do sistema, ele (dimensão anômala) recebe esse nome porque aparentemente há uma violação na análise dimensional quando comparado com o resultado fornecido pela teoria de Landau. A explicação desse paradoxo está em que outra escala de comprimento deve necessariamente estar envolvida. [1].

Estes expoentes críticos não são independentes entre si. Foi mostrado pela primeira vez por Rushbrooke [8], Griffiths [9, 10], Josephson [11, 12] e Fisher [13], usando apenas termodinâmica básica e algumas suposições razoáveis, que estes expoentes deviam satisfazer a quatro inequações. Posteriormente, experimentos indicaram que essas desigualdades deveriam ser, na verdade, igualdades.

Antes do desenvolvimento da teoria do grupo de renormalização, alguns pesquisadores perceberam que na região crítica as quantidades físicas tinham um comportamento mais simples como função dos parâmetros externos, como temperatura e campo magnético. Um dos primeiros a notar essa simplificação foi B. Widom [14]. Essa simplificação leva o nome de Teoria de Escala ("scaling theory"). Uma das consequências mais importantes da teoria de escala é mostrar que os expoentes críticos não são independentes, mas satisfazem algumas relações que formam as

leis de escala. Através da hipótese de escala de Widom [14], ele supôs que a energia livre de Helmholtz $F(T, H)$ poderia ser escrita como

$$F(T, H) = |t|^{2-\alpha} \Psi \left(\frac{|t|}{M^{1/\beta}} \right), \quad (1.8)$$

que leva a quadro relações entre os seis expoentes são elas

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta &= 2 - \gamma \\ \gamma &= \beta(\delta - 1) \\ \gamma &= \nu(2 - \eta) \\ D\nu &= 2 - \alpha \end{aligned} \quad (1.9)$$

Uma vez que há quadro equações e seis variáveis em (1.9), existe apenas dois expoentes independentes (encontrando dois deles podemos encontrar os outros seis usando). Para ver como podemos chegar em (1.9) veja [15]

Utilizando a teoria do grupo de renormalização, pode-se obter essas relações de escalas por primeiros princípios e não meramente através de hipóteses apresentada acima. A ideia pioneira foi devida a Kadanoff [16], com sua técnica de dizimação ou grupo de renormalização no espaço real.

Esta ideia foi adaptada ao espaço dos momentos levando a resultados extraordinários, as transformações de dizimação sobre blocos de spin ganhavam agora um significado mais preciso em termos matemáticos, permitindo pela primeira vez obter resultados analíticos muito além da teoria de campo médio para as grandezas de interesse. Estas transformações de grupo de renormalização no espaço dos momentos correspondem a resolver o problema não-trivial da interação entre todas as escalas de comprimento envolvidas. De acordo com Wilson [17, 18], para examinarmos o problema no regime IR (para grandes escalas, que caracteriza a região infravermelho) tudo o que temos que fazer é integrar os modos com pequenos comprimentos de onda (dizimação) sucessivamente. Quando as grandezas desejadas não mudam mais depois de um número de interações de grupo de renormalização, dizemos que o sistema físico está em um ponto fixo, que nos leva aos pontos críticos do sistema, e são caracterizados pela invariância de escala. Estes conceitos juntamente com a expansão perturbativa em um parâmetro pequeno ($\epsilon = 4 - D$), fornece a chave para obter os resultados analíticos mais interessantes.

Esta técnica foi reformulada posteriormente adicionando elementos de teoria de campos para o cálculo de expoentes críticos para uma teoria sem massa renormalizada em momentos externos arbitrários, e foi estendida para cálculo de expoentes críticos usando uma teoria de campo massiva e momentos externos nulos, conhecida como a equação de Callan-Symanzik [19, 20].

Os expoentes críticos apresentam uma característica bastante crucial que é a universalidade, ou seja, dois ou mais sistemas físicos diferentes podem apresentar os mesmos expoentes

críticos. Os expoentes críticos não dependem dos detalhes microscópicos do sistema, mas apenas de suas simetrias, da dimensão espacial D do sistema, e do número de componentes do parâmetro de ordem N . A classe de universalidade $O(N)$ generaliza os modelos específicos de interação de curto alcance como o Ising ($N = 1$), XY ($N = 2$), Heisenberg ($N = 3$), caminhante aleatório ($N = 0$), esférico ($N \rightarrow \infty$), etc [21]. Estes modelos são generalizados em termos de integração funcional, repassados para a representação de um campo escalar ϕ com interação do tipo $\lambda \phi^4$.

Neste trabalho estudaremos o método de teoria quântica de campos, usando uma teoria de campos escalar, com simetria $O(N)$ conhecida como teoria ϕ^4 , mais precisamente descrita pela sua lagrangiana (ou energia), conhecida como a funcional de Landau-Ginzburg. O objetivo aqui é usar as técnicas do grupo de renormalização em teoria de campos e a expansão ϵ , para encontrar a razão entre a susceptibilidade no ponto crítico em uma teoria que viola a simetria de Lorentz.

A quebra de simetria de Lorentz é inserida, adicionando ao termo cinético da lagrangiana um termo constante $K_{\mu\nu}$ que viola a simetria de Lorentz de modo que $\partial_\mu \phi \partial^\nu \phi \rightarrow \partial_\mu \partial_\nu \phi + K_{\mu\nu} (\partial^\mu \phi \partial^\nu \phi)$, onde os coeficientes constantes $K_{\mu\nu}$ não são invariantes sob transformação de Lorentz, isto é, $K'_{\mu\nu} \neq \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma K_{\rho\sigma}$ [22]. Faremos a expansão até a segunda ordem em relação a $K_{\mu\nu}$, considerando $|K_{\mu\nu}| \ll 1$. Estes coeficientes são simétricos ($K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}$) e iguais para todas as N componentes do campo e preserva a simetria $O(N)$.

Ao inserirmos a violação de Lorentz, a lagrangiana do sistema para uma teoria sem massa passa a ser dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) + \frac{1}{2} K_{\mu\nu} (\partial^\mu \phi) (\partial^\nu \phi) + \frac{t^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4, \quad (1.10)$$

onde t é a fonte do operador composto $\phi^2 \equiv \phi(y)\phi(y)$.

No cenário de física de altas energias, a importância de uma teoria do campo escalar com violação de Lorentz resulta na possibilidade de ser um candidato a descrever o setor de Higgs do assim chamado modelo padrão estendido [23, 24, 25].

O objetivo deste trabalho é investigar as consequências da quebra de simetria de Lorentz no cálculo da razão entre as amplitudes da susceptibilidade a fim de comparar com os calculados nos diferentes métodos de renormalização para testarmos a hipótese de universalidade. Com relação aos expoentes críticos já foi mostrado que a classe de universalidade não é alterada quando a simetria de Lorentz é violada [26, 27, 28]

No capítulo 2 iremos definir a teoria ϕ^4 , através de métodos funcionais. Passaremos a discutir as divergências da teoria, e mostraremos que sua dimensão crítica acontece para $D = 4$. Descreveremos a renormalização dos parâmetros físicos ϕ , λ e t , através das condições de normalização, encontrando por fim o potencial efetivo renormalizado.

No capítulo 3, calcularemos a razão crítica entre a susceptibilidade, utilizando para isso o potencial efetivo renormalizado dado no capítulo 2. Os cálculos foram feitos para $n = 1$ (modelo

de Ising) devido ao modelo ser proposto para o estudo de fenômenos magnéticos em materiais.

E no capítulo 4 discutiremos os resultados obtidos, nas conclusões e abordaremos algumas perspectivas.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
	Sumário	16
2	RENORMALIZAÇÃO DA TEORIA ϕ^4	17
2.1	Teoria ϕ^4	17
2.2	Divergências na Teoria ϕ^4	24
2.3	Condição de Normalização	25
3	CÁLCULO DA RAZÃO DAS AMPLITUDES DA SUSCEPTIBILIDADE	28
4	CONCLUSÕES	32
A	CÁLCULO DAS INTEGRAIS DE FEYNMAN D-DIMENSIONAIS	33
A.1	Regularização Dimensional	33
A.2	Propriedades da função Γ	34
B	CÁLCULO DA INTEGRAIS QUE VIOLAM A SIMETRIA LORENTZ	36
B.1	Cálculo de I	36
B.2	Cálculo de I_{SP}	37
B.2.1	Cálculo de I'_1	38
B.2.2	Cálculo de I'_2 e I'_3	38
	REFERÊNCIAS	40

RENORMALIZAÇÃO DA TEORIA ϕ^4

Uma teoria de campos de flutuações térmicas é definida por meios de uma representação em integral funcional da função de partição, em que os campos são linearmente acoplados à fontes externas. Isto constitui um funcional gerador, de que todas as quantidades termodinâmicas e funções de correlações do sistema podem ser obtidas por diferenciação funcional¹ [29].

Neste capítulo descreveremos a Teoria ϕ^4 , passando a tratar suas divergências, assim iniciamos uma exposição do processo de regularização dos diagramas de Feynman envolvidos na série perturbativa das funções de correlações, e da renormalização da teoria. Em uma teoria sem massa, podemos utilizar das condições de normalização das funções de vértices para redefinir os parâmetros da teoria (o que constitui o processo de renormalização). O leitor interessado, pode consultar a referência [29] para um estudo detalhado da teoria abordado neste capítulo.

2.1 Teoria ϕ^4

Todos os objetos de estudo abordados nesse capítulo, são descritos em termos de N componentes do campo flutuante $\phi = (\phi_1(\mathbf{x}), \dots, \phi_N(\mathbf{x}))$ em um espaço euclidiano de D dimensões. As componentes dos campos interagem entre si, via um termo de quarta ordem nos campos, $\lambda T_{\alpha\beta\gamma\delta} \phi_\alpha \phi_\beta \phi_\gamma \phi_\delta$, ($\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \dots, N$), onde o parâmetro $\lambda > 0$ caracteriza força de interação e é chamada de constante de acoplamento. A quantidade $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$ é o tensor de acoplamento.

O campo $\phi(\mathbf{x})$ realiza flutuações térmicas. Podemos investigar as propriedades do sistema principalmente na fase normal onde o valor esperado do campo ϕ é zero, que acontece no regime de temperatura em que a simetria do sistema é quebrada. Essas flutuações acontecem em torno de zero. Seu tamanho é controlado por uma energia funcional local, constituída por dois termos:

$$E[\phi] = E_0[\phi] + E_{int}[\phi]. \quad (2.1)$$

¹ Veja capítulo 2 da referência citada

O primeiro termo é

$$E_0[\phi] = \int d^D x \frac{1}{2} \{ [\partial_x \phi(\mathbf{x})]^2 + m^2 \phi^2(\mathbf{x}) \} \quad (2.2)$$

é quadrático no campo, e é chamado de energia do campo livre. O segundo termo

$$E_{int}[\phi] = \int d^D x \frac{\lambda}{4!} \phi^4(\mathbf{x}) \quad (2.3)$$

é de quarta ordem no campo e é chamado de energia de interação do campo com λ sendo uma constante de interação e m um parâmetro de massa, ou seja, a massa do campo. Este nome é devido ao fato de que podemos sair de um teoria de campos de flutuações térmicas para uma teoria quântica de campos, para isso basta utilizarmos um “truque” chamado de rotação de Wick que consiste em fazer $x_D \rightarrow -it$, o que nos permite sair de um espaço euclidiano (mecânica estatística) para um espaço de Minkowski (mecânica quântica relativística) e vice-versa. Quando estamos no espaço de Minkowski a nomenclatura massa do campo faz sentido já que o campo quântico pode ser descrito por um operador $\hat{\phi}(x)$ que é capaz de criar e aniquilar partículas de massa m .

Todas as propriedades termodinâmicas do sistema são descritas pela função de partição do campo flutuante o qual é dado pela integral funcional

$$Z^{phys} = \int \mathcal{D}\phi(\mathbf{x}) \exp^{-E[\phi]/k_B T} \quad (2.4)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann e T a temperatura. A medida da integral funcional é definida pelo produto das integrais em cada ponto do espaço \mathbf{x} , multiplicada por um fator de normalização irrelevante \mathcal{N}

$$\int \mathcal{D}\phi(\mathbf{x}) \equiv \mathcal{N} \prod_{\mathbf{x}} \int d\phi(\mathbf{x}) \quad (2.5)$$

devemos abreviar a notação renormalizando o campo, a massa e a constante de acoplamento de tal modo que $k_B T = 1$, o que nos permite escrever a função de partição, como

$$Z^{phys} = \int \mathcal{D}\phi(\mathbf{x}) \exp^{-E[\phi]} \quad (2.6)$$

A integral funcional é agora uma Gaussiana, e pode ser calculada exatamente. Enquanto a função de partição (2.4) nos dá todas as propriedades termodinâmicas do sistema, ela não nos dá nenhuma informação das propriedades locais do sistema que são observadas por exemplo em experimentos de espalhamento. Estas informações são dadas pelas funções de correlação do campo $\phi(\mathbf{x})$ que é dada por

$$\begin{aligned} G^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) &\equiv \langle \phi(\mathbf{x}_1) \dots \phi(\mathbf{x}_n) \rangle \\ &= Z^{-1} \int \mathcal{D}\phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}_1) \dots \phi(\mathbf{x}_n) e^{-E[\phi]}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Elas também são chamadas de funções de n-pontos ou funções de Green.

Introduzindo um campo externo auxiliar $j(\mathbf{x})$ chamado de fonte (source), e adicionando à energia funcional (2.1) uma energia de interação linear desta fonte com o campo

$$E_{source}[\phi, j] = - \int d^D x \phi(\mathbf{x}) j(\mathbf{x}), \quad (2.8)$$

temos que a energia total fica

$$E[\phi, j] = \int d^D x \frac{1}{2} \{ [\partial_x \phi(\mathbf{x})]^2 + m^2 \phi^2(\mathbf{x}) \} + \int d^D x \frac{\lambda}{4!} \phi^4(\mathbf{x}) - \int d^D x \phi(\mathbf{x}) j(\mathbf{x}) \quad (2.9)$$

A função de partição formada com essa energia

$$Z[j] = (Z_0^{phys})^{-1} \int \mathcal{D}\phi(\mathbf{x}) e^{-E[\phi, j]} \quad (2.10)$$

é um funcional de $j(\mathbf{x})$. A derivada funcional ² de $Z[j]$ com respeito a $j(\mathbf{x})$ calculada em $j \equiv 0$ nos dá a função de correlação do sistema

$$G^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = Z^{-1} \left[\frac{\delta}{\delta j(\mathbf{x}_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta j(\mathbf{x}_n)} Z[j] \right]_{j \equiv 0}. \quad (2.11)$$

Por esse motivo, $Z[j]$ é chamado de funcional gerador da teoria.

A energia do campo livre pode ser escrita como

$$\begin{aligned} E_0[\phi] &= \frac{1}{2} \int d^D x \phi(\mathbf{x}) (-\partial_x^2 + m^2) \phi(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2} \int d^D x_1 d^D x_2 \phi(\mathbf{x}_1) D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \phi(\mathbf{x}_2). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Onde D é uma matriz funcional simétrica ($D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = D(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$) e tem sua forma explícita dada por

$$D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \delta^{(D)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) (-\partial_{\mathbf{x}_2}^2 + m^2). \quad (2.13)$$

Como a energia do campo livre é quadrática no campo o seu funcional gerador pode ser calculado, ele toma a forma

$$Z_0[j] = e^{\frac{1}{2} \int d^D x d^D x' j(\mathbf{x}) D^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') j(\mathbf{x}')}. \quad (2.14)$$

Assim, obtemos as funções de correlações do campo livre

$$G_0^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \frac{1}{2^{n/2} (n/2)!} \left\{ \frac{\delta}{\delta j(\mathbf{x}_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta j(\mathbf{x}_n)} \left[\int d^D x d^D x' j(\mathbf{x}) D^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') j(\mathbf{x}') \right]^{n/2} \right\}_{j \equiv 0}. \quad (2.15)$$

Mostra-se também que para $n = 2$ temos

$$G_0^{(2)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_2) = D^{-1}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_2). \quad (2.16)$$

Onde $G_0^{(2)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_2)$ é chamada de função livre de dois pontos, que também é simétrica em seus argumentos.

Podemos daí escrever as funções de correlações para qualquer n em termos da função livre de dois pontos, temos que

$$G_0^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \sum_{i=1}^{(n-1)!!} \prod_{j=1}^{n/2} G_0^{(2)}(\mathbf{x}_{\pi_i(2j-1)}, \mathbf{x}_{\pi_i(2j)}). \quad (2.17)$$

² veja a definição de derivada funcional e um pouco mais sobre o que é um funcional no final do capítulo 5 da referência [22]

Onde os pares $\pi_i(2j-1)$, $\pi_i(2j)$ indicam o número total de índices a partir do qual os pares foram selecionados. O lado direito de (2.17) é chamada de expansão de Wick.

Fazendo uma expansão perturbativa no funcional gerador $Z[j]$ em série de potência em termos da constante de acoplamento λ temos

$$Z[j] = Z_0[j] + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{\lambda}{4!} \right)^p \int \mathcal{D}'\phi(\mathbf{x}) \int d^D z_1 \dots d^D z_p \phi^4(\mathbf{z}_1) \dots \phi^4(\mathbf{z}_p) e^{-\{E_0[\phi] + E_{source}[\phi, j]\}}. \quad (2.18)$$

Por diferenciação funcional calculamos as funções de correlações que podemos escrever-las como

$$G^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = Z^{-1} \left[G_0^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) + \sum_{p=1}^{\infty} G_p^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \right], \quad (2.19)$$

onde

$$G_p^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{\lambda}{4!} \right)^p \int d^D z_1 \dots d^D z_p \int \mathcal{D}'\phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}_1) \dots \phi(\mathbf{x}_n) \times \phi^4(\mathbf{z}_1) \dots \phi^4(\mathbf{z}_p) e^{-\{E_0[\phi] + E_{source}[\phi, j]\}} \quad (2.20)$$

Temos que a expansão de Wick (a exemplo do que foi feito na (2.17)) de $G_p^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ é dada por

$$\begin{aligned} G_p^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) &\equiv \frac{1}{p!} \left(\frac{\lambda}{4!} \right)^p \int d^D z_1 \dots d^D z_p \int d^D y_1 \dots d^D y_{4p+n} \prod_{l=1}^n [\delta^D(\mathbf{y}_{4p+l} - \mathbf{x}_l)] \\ &\times \prod_{k=1}^p [\delta^D(\mathbf{y}_{4k-3} - \mathbf{z}_k) \delta^D(\mathbf{y}_{4k-1} - \mathbf{z}_k) \delta^D(\mathbf{y}_{4k} - \mathbf{z}_k)] \\ &\times \sum_{i=1}^{(4p+n-1)!!} \prod_{j=1}^{\frac{4p+n}{2}} G_0 \left(\mathbf{y}_{\pi_{(2j-1)}^{(4p+n)}}, \mathbf{y}_{\pi_{(2j)}^{(4p+n)}} \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

A soma inclui todas as possíveis permutações das variáveis \mathbf{y}_i , exceto para aquelas que correspondem apenas a uma troca dos argumentos espaciais num propagador, ou para uma troca de propagadores idênticos no conjunto. Cada termo do produto total da soma (2.21) é chamado de diagrama de Feynman ou grafo de Feynman [30].

Ao fazermos a expansão perturbativa em potências de λ , obtemos diagramas que são desconectados e diagramas que são conectados. Os diagramas desconectados são diagramas que podem ser escritos como um produto disjunto de dois diagramas. Já os Diagramas conectados não podem ser escritos como o produto disjunto de dois diagramas. Assim, qualquer termo da expansão perturbativa pode, em geral, ser escrito como uma soma de diagramas conectados e desconectados.

Iremos considerar apenas diagramas conectados, para uma dada ordem em λ , com o sentido de trabalharmos com um número menor de diagramas. De fato, tal expansão pode ser obtida, considerando o funcional gerador

$$Z[j] = e^{W[j]}, \quad (2.22)$$

onde as funções de correlações conectadas no espaço das coordenadas ($G_c^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$) são dadas pelas derivadas funcionais de (2.22)

$$G_c^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = Z^{-1} \left[\frac{\delta}{\delta j(\mathbf{x}_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta j(\mathbf{x}_n)} W[j] \right]_j \equiv 0. \quad (2.23)$$

É conveniente trabalhar em uma representação das funções de Green de n -pontos no espaço dos momentos (por exemplo para problemas que apresentem simetria translacional). Aplicando uma transformada de Fourier em todos os argumentos das funções de correlações $G^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$, obtemos as funções de n -pontos no espaço dos momentos

$$G^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = \int d^D x_1 \dots d^D x_n e^{-i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x}_n)} G^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n), \quad (2.24)$$

daí obtemos

$$G^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = Z^{-1} \left[\frac{\delta^n Z[j]}{\delta j(-\mathbf{k}_1) \dots \delta j(-\mathbf{k}_n)} \right] \quad (2.25)$$

Uma vez que as funções de correlação estão associadas com os diagramas de Feynman desconectados, que podem ser fatorados das partes conectadas, esta associação é também estendida para as suas transformadas de Fourier. Portanto é suficiente a criação de regras de Feynman para os diagramas conectados no espaço dos momentos. Assim, é suficiente a criação de regras de Feynman para os diagramas conectados no espaço dos momentos. Denotaremos os pontos externos e internos por $\mathbf{x}_k (k = 1, \dots, n)$ e $\mathbf{z}_i (i = 1, \dots, p)$. Cada momento pode ser representado por uma linha. Dependendo dos pontos finais, pode-se distinguir as linhas externas ($k = 1, \dots, n$) e linhas internas $\mathbf{p}_i (i = 1, \dots, n)$. O número de linhas obviamente é n . O número de linhas internos I é determinado por n e o número de vértices p através de ³

$$I = (4p - n)/2. \quad (2.26)$$

Omitindo por um momento o fator de acoplamento $(-\lambda)$ e o fator de peso W_G^a , temos que as funções de correlações conectadas de $G_p^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ podem ser dadas por

$$G_c^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \int d^D z_1 \dots d^D z_n \prod_{i=1}^n G_0(\mathbf{x}_i - \mathbf{z}_i) \times \prod_{i=1}^I G_0(\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_i). \quad (2.27)$$

As transformações de Fourier de $G_c^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ é definida como em (2.24), temos então que

$$G_c^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = \int d^D x_1 \dots d^D x_n e^{-i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x}_n)} G_c^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n), \quad (2.28)$$

Podemos ver que $G_c^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ contem n fatores $e^{-i\mathbf{k}_k \cdot \mathbf{x}_k}$, cujos momentos k_k são representados por linhas externas. Cada ponto externo \mathbf{x}_k que aparece na função de Green, é representado pela transformada de Fourier

$$G_0^{(n)}(\mathbf{x}_k, \dots, \mathbf{z}_i) = \int \frac{d^D k_k}{(2\pi)^D} e^{i\mathbf{k}_k \cdot (\mathbf{x}_k - \mathbf{z}_i)} G_0(\mathbf{k}_k). \quad (2.29)$$

³ Veja capítulo 4 de [29]

que contribui para a integral (2.27) com um fator exponencial $e^{i\mathbf{k}_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{z}_i)}$. Cada par de pontos internos \mathbf{z}_i que aparece na função de Green

$$G_0^{(n)}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_j) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)} G_0(\mathbf{p}), \quad (2.30)$$

contribui com uma fator exponencial $e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)}$. Como cada um dos pontos externos \mathbf{x}_i aparece duas vezes nos fatores de fase, as integrais sobre \mathbf{x}_i produzem um fator $(2\pi)^D \delta^{(D)}(\mathbf{k} - \mathbf{p})$ para cada linhas externa. As subsequentes n integrações sobre o correspondente momento \mathbf{p} podem todos serem feitos, levando as $(4p - n)/2$ integrais de momentos não triviais, uma para cada linha interna.

Cada vértice aparece em 4 fatores exponenciais $e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$. As integrais sobre os vértices internos de posição \mathbf{z}_i produzem p δ -distribuição que expressa a conservação do momento em cada vértice. Um desses podem ser escolhidos para conter a soma sobre todos os momentos externos. Isso garante totalmente a conservação do momento. As demais integrais, podem simplesmente serem feitas, por meio da remoção de $p - 1$ integrações. Assim, é possível acabar com

$$L = I - p + 1 \quad (2.31)$$

integrais não triviais sobre as variáveis de momento l_i , que é o *loop do momento*, que estar associado com *loops* independentes nos diagramas. A transformada de Fourier de $G_c^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)$ tem portanto a forma

$$G_c^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = G_0(\mathbf{k}_1) \dots G_0(\mathbf{k}_n) (2\pi)^D \delta^{(D)} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i \right) \\ \times \int \frac{d^D l_1}{(2\pi)^D} \dots \frac{d^D l_L}{(2\pi)^D} G_0(\mathbf{p}_1(\mathbf{l}, \mathbf{k})) \dots G_0(\mathbf{p}_L(\mathbf{l}, \mathbf{k})). \quad (2.32)$$

Cada linhas de momento é expressada por uma combinação do loop do momento $\mathbf{l}_i (i = 1, \dots, L)$ e momento externo $\mathbf{k}_i (i = 1, \dots, n)$, abreviado por (\mathbf{l}, \mathbf{k}) .

Reintroduzindo os fatores omitidos anteriormente, vemos que os diagramas de Feynman no espaço dos momentos contém:

1. Um fator $G_0(\mathbf{k}_i)$ para cada linha externa;
2. Um fator $G_0(\mathbf{p}_j)$ com $j = 1, \dots, I$ para cada linha interna, onde cada momento interno p_j tem uma orientação e é expresso por uma combinação de $L = I - p + 1$ loops de momento e n momentos externos;
3. Uma integração sobre cada loop de momento independente;
4. Um fator $(2\pi)^D \delta^{(D)}(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n)$ para garantir totalmente a conservação do momento.
5. Um fator $-\lambda/4!$ para cada vértice; e
6. Um fator de peso W_G do diagrama.

Um exemplo é a função de livre de 2 pontos no espaço dos momentos, ela é expressão então por

$$G_0(k) = \frac{1}{k^2 + m^2}. \quad (2.33)$$

onde sua representação diagramática é dada por

$$G_0(k) = \text{---}^{-1} \quad (2.34)$$

Após estabelecido tais regras dos diagramas de Feynman no espaço dos momentos, temos que é conveniente trabalhar com uma expansão perturbativa ainda mais simplificada onde temos apenas diagramas cujos propagadores associados às pernas externas são omitidos, pois estes propagadores das pernas externas entram como fatores multiplicativos que não envolvem integrais. Desses diagramas, os que não podem ser separados em dois cortando-se apenas uma linha são chamados de *1PI* (irredutíveis a uma partícula). Eles representam o menor diagrama de Feynman não trivial que forma blocos de construção básica para todos os diagramas.

Podemos obter as partes de vértice *1PI*, formalmente, das funções de Green conectadas através de uma transformação de Legendre

$$\Gamma[\bar{\phi}] + W[j] = \sum_i \bar{\phi}_i j_i \quad (2.35)$$

onde

$$\bar{\phi}_i = \langle \phi_i \rangle = \langle \phi(k_i) \rangle = \frac{\delta W[j]}{\delta j_i} \quad (2.36)$$

e

$$\frac{\delta \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}_i} = j_i \quad (2.37)$$

onde obtemos uma função análoga às funções de n pontos conectadas, diferenciando $\Gamma[\bar{\phi}]$ com respeito a $\bar{\phi}$, ou seja

$$\Gamma^{(n)}(1, \dots, n) \equiv \frac{\delta^n \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}_1 \dots \delta \bar{\phi}_n} \quad (2.38)$$

que são as funções de vértices de n pontos não renormalizada.

Podemos notar que as funções de Green de n pontos podem ser expressas em termos das funções de vértices *1PI*, tornando-se importantes na construção da teoria de perturbação.

Quando violamos Lorentz em uma teoria sem massa, inserindo um termo a mais na lagrangiana da teoria ϕ^4 , de modo que obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) + \frac{1}{2}K_{\mu\nu}(\partial^\mu \phi)(\partial^\nu \phi) + \frac{t^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4. \quad (2.39)$$

Assim, devemos modificar a ação do campo ϕ sob a seguinte transformação

$$\square \longrightarrow \square + K_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu. \quad (2.40)$$

Fazendo o mesmo processo para encontrar as funções de n pontos, podemos notar que agora elas dependerão deste novo termo inserido na Lagrangiana. Porém, podemos representá-las diagramaticamente pelos mesmos grafos. Fazendo novamente a transformada de Fourier, temos as mesmas representações gráficas para as funções de Green no espaço dos momentos, agora sendo da seguinte forma como no diagrama do campo livre

$$G(k) = \text{---}^{-1} \longrightarrow \frac{1}{k^2 + K_{\mu\nu}k^\mu k^\nu}. \quad (2.41)$$

De forma similar é feita para o outros diagramas, bastando fazer $k^2 \rightarrow k^2 + K_{\mu\nu}$.

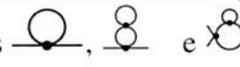
2.2 Divergências na Teoria ϕ^4

Ao fazermos a expansão diagramática das funções 1PI, encontramos o fato de que as integrais de Feynman decorrentes da expansão são divergentes. Estas divergências dependem da dimensão do espaço onde a teoria de campo está definida. Considerando a integral associado ao diagrama da função de 4-pontos de um loop dada por

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 + m^2)[(p+k)^2 + m^2]}, \quad (2.42)$$

podemos observar através de uma simples análise da dimensionalidade dessa função de vértice, que ela possui $D - 4$ potências de momento. Então, se $D = 4$, teremos uma divergência logarítmica, que é a divergência mais fraca que pode ocorrer, pois para $D < 4$ a integral será finita, e para $D > 4$ teríamos divergências linear, quadrática e assim por diante.

Nesta seção será discutido um método para eliminar estas divergências da teoria, afim de podermos trabalhar com essas integrais em termos de sua dimensão crítica. Para a teoria sem massa, há divergências para momentos pequenos ou grandes comprimento de onda, assim sendo chamados de divergência infravermelhas (IR-divergences).

Estas integrais, em geral, são dependentes da massa e de seus momentos externos \mathbf{k}_j . Deste modo, para a teoria sem massa, algumas integrais são nulas como as que correspondem aos seguintes diagramas , pois cada uma delas tem um integrando da seguinte forma

$$\int dk \frac{1}{k^2} = 0. \quad (2.43)$$

Suponhamos agora que cada integral de Feynman I seja proporcional a um fator α e que no limite para $\alpha \rightarrow 0$ as integrais comportem-se como

$$I \propto \alpha^\omega \quad (2.44)$$

onde ω é o grau superficial de divergência IR das integrais. As integrais possuem divergências IR quando $\omega \geq 0$.

Para compreendermos melhor as origens e a importância das divergências, consideramos uma teoria com interação $\lambda_j \phi^r$ em D dimensões. Analisando as dimensões do campo através do campo livre. Como estamos em um sistema onde as unidades onde $\hbar = 1$, $c = 1$ e $k_B = 1$, a única dimensão envolvida é a de comprimento. Para um campo escalar a dimensão do campo é dada por

$$[\phi] = L^{1-D/2} = \Lambda^{D/2-1}. \quad (2.45)$$

Isto decorre do fato de que a Lagrangiana tem dimensão do inverso do volume, ou seja,

$$[\mathcal{L}] = L^{-D} = \Lambda^D. \quad (2.46)$$

A partir da (2.45) e da (2.46) podemos encontrar a dimensão da interação, usando o fato de que

$$[\lambda_j \phi^r] = \Lambda^D \quad (2.47)$$

obtemos

$$\lambda_j = \Lambda^{D-rD/2+r} \equiv \Lambda^{\delta_r}. \quad (2.48)$$

Podemos fazer uma análise dimensional para encontrar a dimensão das funções de vértice, e obter as dimensões destas em termos da dimensão canônica.

Em uma dimensão especial, a interação torna-se adimensional. Nesta dimensão, a teoria torna-se renormalizável. Para que as divergências sejam independentes da ordem da teoria de perturbação, a constante de acoplamento deve ser adimensional, para isto, devemos ter

$$D = \frac{r}{r/2 - 1}. \quad (2.49)$$

Para uma teoria com interação $\frac{\lambda \phi^4}{4!}$, a divergência na teoria é dada nesta dimensão quando temos $D = 4$. A renormalização redefine as constantes de modo que as grandezas tornam-se convergentes. Para a renormalização, devemos tratar as integrais próximo de $D = 4$. Para o caso com violação de Lorentz, as integrais também são divergentes em $D = 4$.

2.3 Condição de Normalização

Agora passaremos a tratar suas divergências, renormalizando a teoria. Para isso, faremos uso das condições de normalização.

As funções de vértice de 2-pontos e 4-pontos podem se tornar finitas através de uma renormalização multiplicativa empregando as duas constantes de renormalização Z_ϕ e Z_{ϕ^2} que são as constantes de renormalização do campo e do operador composto respectivamente. Através da renormalização multiplicativa são estabelecidas as seguintes relações entre quantidades renormalizadas e não-renormalizadas

$$\Gamma_R^{k_i, p_i, g, \kappa} Z_\phi^{n/2} Z_{\phi^2}^l \Gamma_B^{(n, l)}(P_i, K_j, \lambda_0) \quad (2.50)$$

Existem vários esquemas de renormalização. Em particular, estamos interessados em renormalizar a teoria quando os momentos externos são fixos a um ponto arbitrário, fixado a escala de momento de valor κ (pontos de simetria SP). Os valores são tais que para um momento externo k_i temos $k_i \cdot k_j = (\kappa^2/4)(4\delta_{ij} - 1)$, que implica em $(k_1 + k_2 \equiv k^2 = \kappa^2)$ para $i \neq j$ em SP. Em \overline{SP} temos que $k^2 = \frac{3}{4}\kappa^2$ e $k_1 k_2 = -\frac{1}{4}\kappa^2$ o que nos dá $p^2 = (k_1 + k_2)^2 = \kappa^2$. Utilizamos condições de normalização e no nosso caso, condições de normalização para uma teoria sem massa. São elas

$$\begin{aligned}\Gamma_R^{(2)}(0; g) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma_R^{(2)}(k; g) \Big|_{k^2=\kappa^2} &= 1, \\ \Gamma_R^{(4)}(k_i; g) \Big|_{SP} &= g, \\ \Gamma_R^{(2,1)}(k_1, k_2, p; g) \Big|_{\overline{SP}} &= 1 \\ \Gamma_R^{(0,2)}(p; g) \Big|_{p^2=\kappa^2} &= 0\end{aligned}\tag{2.51}$$

onde g é a constante de acoplamento renormalizada.

Podemos obter as constantes de renormalização e a constante de acoplamento renormalizada em termos das funções de vértices não renormalizadas (1PI). Utilizando as equações (2.56) e as (2.57) obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma_R^{(2)}(k; g) &= Z_\phi \Gamma^{(2)}(k=0; \lambda) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma_R^{(2)}(k; g) \Big|_{k^2=\kappa^2} &= Z_\phi \frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma^{(2)}(k; \lambda) \Big|_{k^2=\kappa^2} = 1 \\ \Gamma_R^{(4)}(k_i; g) \Big|_{SP} &= Z_\phi^2 \Gamma^{(4)}(k_i; \lambda) \Big|_{SP} = g \\ \Gamma_R^{(2,1)}(k_1, k_2, p; g) \Big|_{\overline{SP}} &= Z_\phi Z_\phi^{1/2} \Gamma^{(2,1)}(k_1, k_2, p; \lambda) \Big|_{\overline{SP}} = 1,\end{aligned}\tag{2.52}$$

A expansão diagramática das partes de vértices que manifestam as divergências primitivas da teoria ϕ^4 podem ser representadas da seguinte forma

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)} &= \text{---}^{-1} + \text{---} \bigcirc \text{---} + O(2\text{-loops}) \\ &= k^2 + \lambda \frac{N+2}{6} D_1 + O(2\text{-loops})\end{aligned}\tag{2.53}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{(4)} &= \text{---} \times \text{---} + \text{---} \bigcirc \times \text{---} + O(2\text{-loops}) \\ &= \lambda + \lambda \frac{N+8}{6} I_{SP} + O(2\text{-loops})\end{aligned}\tag{2.54}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2,1)} &= \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + O(2\text{-loops}) \\ &= 1 + \lambda \frac{N+2}{3} I_{\overline{SP}}(\lambda) + O(2\text{-loops})\end{aligned}\tag{2.55}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2,1)} &= \text{diagrama} \\ &= -\frac{N}{2}I_{SP} + O(2\text{-loops})\end{aligned}\quad (2.56)$$

onde escrevemos

$$D_1 = \int d^d k \frac{1}{k^2 + m^2} \quad (2.57)$$

$$I_{SP}I_{\overline{SP}} = \int d^d k \frac{1}{(k^2 + m^2)[(k+K)^2 + m^2]} \Big|_{K^2=k^2} \quad (2.58)$$

Utilizando a equação (2.53) em (2.52), pode-se obter uma expressão perturbativa para a constante de acoplamento renormalizada λ , para o campo ϕ , e para o operador composto t [31], que são dadas respectivamente por

$$\lambda = g + g^2 \frac{N+8}{6} I_{SP} + O(2\text{-loops}). \quad (2.59)$$

$$\phi = M + O(2\text{-loops}) \quad (2.60)$$

$$t = t_R + g \frac{N+2}{6} t_R I_{SP} + O(2\text{-loops}) \quad (2.61)$$

Desses resultados encontramos o potencial efetivo renormalizado, que é dado por [31]

$$\begin{aligned}\Gamma_R(M, t_R) &= \frac{1}{2} t_R M^2 + \frac{1}{4!} g M^3 + \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left\{ \ln \left[1 + \frac{t + \frac{gM^2}{2}}{k^2} \right] + (N-1) \ln \left[1 + \frac{t + \frac{gM^2}{6}}{k^2} \right] - \frac{1}{k^2} \frac{N+2}{6} g M^2 \right\} + \frac{1}{4} I_{SP} \left[\frac{2(N+2)}{3} g M^2 t_R + \frac{N+8}{36} (g M^2)^2 \right] \\ &\quad + O(2\text{-loops}).\end{aligned}\quad (2.62)$$

Por conveniência, podemos reescrever o potencial efetivo renormalizado nas variáveis renormalizadas t e y , onde

$$y = u M^2 \quad (2.63)$$

Explicitando $\Gamma_R(y, t)$ temos

$$\begin{aligned}\Gamma_R(y, t) &= \frac{1}{2u} \left(t y + \frac{y^2}{12} \right) + \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left\{ \ln \left[1 + \frac{t + \frac{y}{2}}{k^2} \right] + (N-1) \ln \left[1 + \frac{t + \frac{y}{6}}{k^2} \right] - \frac{1}{k^2} \left[N \left(t + \frac{y}{6} \right) + \frac{y}{3} \right] \right\} + \frac{1}{4} I_{SP} \left[N \left(t + \frac{y}{6} \right)^2 + \frac{2}{3} y \left(t + \frac{y}{3} \right) \right] + O(2\text{-loops}).\end{aligned}\quad (2.64)$$

Por conveniência adicionamos na integral acima, o termo linear em $t - \frac{N}{2} t \frac{1}{k^2}$, que é irrelevante no potencial $\Gamma(y = u M^2, t)$ definido por um polinômio do segundo grau (ou, superior) na variável t para a descrição das transições de segunda ordem. Esta expressão confere com a encontrada nas referências [31, 32] e da qual obteremos os nossos resultados para a razão das amplitudes críticas.

CÁLCULO DA RAZÃO DAS AMPLITUDES DA SUSCEPTIBILIDADE

No capítulo anterior definimos a teoria ϕ^4 , e como podemos encontrar as funções de correlações atrás de uma teoria de perturbação, depois passamos a teoria para o espaço dos momentos, pois é mais conveniente trabalhar nesse espaço, depois vimos que podemos representar melhor as funções de Green em termos de uma série diagramática, onde cada diagrama é um integral de D-dimensões. Foi discutido sobre suas divergências, como elas podem aparecer em cada diagrama. Assim, como a renormalização da teoria pelas condições de normalização em uma teoria sem massa. Encontramos o potencial efetivo renormalizado $\Gamma_R(y, t)$ que será nosso ponto de partida para que possamos encontrar as amplitudes críticas do calor específico. Aplicando $N = 1$ na equação (2.62) temos

$$\begin{aligned} \Gamma_R(M, t_R) &= \frac{1}{2} t_R M^2 + \frac{1}{4!} g M^4 + \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left\{ \ln \left[1 + \frac{t + \frac{gM^2}{2}}{k^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} I_{SP} \left[2gM^2 t_R + \frac{1}{4} (gM^2)^2 \right] \right\} + O(2\text{-loops}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Começamos o calculo da razão substituindo o potencial efetivo renormalizado na expressão

$$H_R = \frac{\partial \Gamma_R(M, t_R)}{\partial M} \quad (3.2)$$

Obtemos então

$$H_R(M, t_R) = t_R M^2 + \frac{1}{6} g M^3 + \frac{1}{2} g M \left(t + \frac{1}{2} g M^2 \right) [I_{SP} - I] + O(2\text{-loops}). \quad (3.3)$$

As integral I_{SP} é computada no apêndice B e é expressa por

$$I_{SP} = \int dq \frac{1}{[q^2 + K_{\mu\nu}q^\mu q^\nu][(q+p)^2 + K_{\mu\nu}(q+p)^\mu(q+p)^\nu]} \Big|_{p^2=\kappa^2}, \quad (3.4)$$

onde a condição de normalização dada pelo ponto simétrico SP é: $p^2 = \kappa^2 = 1$.

A integral I também foi computada no apêndice B e é expressa por

$$I = \int dq \frac{1}{[q^2 + K_{\mu\nu}q^\mu q^\nu][K_{\mu\nu}q^\mu q^\nu + q^2 + (t + \frac{g^*M^2}{2})]} \quad (3.5)$$

As integrais I_{sp} e I foram inseridos o termo que viola a simetria de Lorentz $q^2 \rightarrow K_{\mu\nu}q^\mu q^\nu$, sendo elas resolvidas no apêndice B dando os seguintes valores respectivamente

$$I_{SP} = \frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \Pi + f^{(2)}, \quad (3.6)$$

onde

$$f^{(2)} = -\frac{1}{2}K_{\mu\nu}p^\mu p^\nu + \frac{1}{4}K_{\mu\nu}K_{\rho\sigma}(p^\mu p^\nu \delta^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma). \quad (3.7)$$

e

$$I = \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln\left(t + \frac{g^*M^2}{2}\right)\right)\right] \Pi \quad (3.8)$$

Fazendo a subtração $[I_{SP} - I]$ da equação (3.3) obtemos

$$I_{SP} - I = \frac{1}{2} \left[1 + \ln\left(t + \frac{g^*M^2}{2}\right)\right] \Pi + f^{(2)}. \quad (3.9)$$

Onde $f^{(2)}$ é uma constante.

Aplicando essa subtração na equação (3.3) do potencial efetivo obtemos

$$H_R(M, t_R) = t_R M^2 + \frac{1}{6}gM^3 + \frac{1}{2}gM \left(t + \frac{1}{2}gM^2\right) \left[\frac{1}{2} \left[1 + \ln\left(t + \frac{g^*M^2}{2}\right)\right] \Pi + f^{(2)}\right] + O(2\text{-loops}) \quad (3.10)$$

Atraves deste potencial podemos calcular a *Sucestibilidade* χ . Usando a seguinte função

$$\chi^{-1} = \Gamma_R^{(2)}(K=0) \quad (3.11)$$

A minimização da energia livre nos fornece os valores de M que descreve o vácuos com simetria $O(N)$ da fase desordenada ($M = 0$ e $T > T_c$) e o vácuo da fase ordenada ($M \neq 0$ e $T < T_c$) descrevendo a quebra espontânea da simetria $O(N)$. Podemos usar a variável $y = u^*M^2$ para minimizar o potencial temos

$$\frac{\partial \Gamma_R}{\partial M} = 2u^*M \frac{\Gamma_R}{\partial y} = 0 \quad \implies \quad M = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\Gamma_R}{\partial y} \Big|_{\bar{y}} = 0. \quad (3.12)$$

Assim temos duas soluções, o vácuo trivial $M = 0$ e o vácuo degenerado \bar{y} , que pode ser determinado por

$$\begin{aligned}
 0 = \frac{\Gamma_R}{\partial y} \Big|_{\bar{y}} &= \frac{1}{2u^*} \left(t + \frac{\bar{y}}{6} \right) + \frac{1}{2} \int dq \left\{ \frac{N-1}{6} \left[\frac{1}{\left(q^2 + K_{\mu\nu} q^\mu q^\nu + t + \frac{\bar{y}}{6} \right)} - \frac{1}{q^2 + K_{\mu\nu} q^\mu q^\nu} \right] \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\left(q^2 + K_{\mu\nu} q^\mu q^\nu + t + \frac{\bar{y}}{2} \right)} - \frac{1}{q^2 + K_{\mu\nu} q^\mu q^\nu} \right] \right\} \\
 &+ \frac{1}{4} I_{SP} \left[\frac{N-1}{3} \left(t + \frac{\bar{y}}{6} \right) + \left(t + \frac{\bar{y}}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2u^*} \left(t + \frac{\bar{y}}{6} \right) - \frac{N-1}{12} \left(t + \frac{\bar{y}}{6} \right) \left[\int dq \frac{1}{\left[q^2 + K_{\mu\nu} q^\mu q^\nu \right] \left[q^2 + K_{\mu\nu} q^\mu q^\nu + t + \bar{y}/6 \right]} \right. \\
 &- \left. I_{SP} \right] - \frac{1}{4} \left(t + \frac{\bar{y}}{2} \right) \left[\int dq \frac{1}{\left[q^2 + K_{\mu\nu} q^\mu q^\nu \right] \left[q^2 + K_{\mu\nu} q^\mu q^\nu + t + \bar{y}/2 \right]} - I_{SP} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2)
 \end{aligned}$$

Usando o parâmetro de Feynman dado por (B.10) e usando o resultado de (B.8) temos que

$$\int dq \frac{1}{\left[q^2 + K_{\mu\nu} q^\mu q^\nu \right] \left[q^2 + K_{\mu\nu} q^\mu q^\nu + s^2 \right]} - I_{SP} = -\frac{1}{2} (1 + \ln s^2) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (3.14)$$

Daí usando (3.14) em (3.13) obtemos

$$\left(t + \frac{\bar{y}}{6} \right) + \frac{u^*}{4} \left\{ \frac{N-1}{3} \left(t + \frac{\bar{y}}{6} \right) \left[1 + \ln \left(t + \frac{\bar{y}}{6} \right) \right] + \left(t + \frac{\bar{y}}{2} \right) \left[1 + \ln \left(t + \frac{\bar{y}}{2} \right) \right] \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0. \quad (3.15)$$

O primeiro termo do lado direito de (3.14) corresponde a contribuição da energia livre de Landau para um teoria invariante de Lorentz, os outros termos é a correção de 1-loops no parâmetro de ordem.

Obtemos a solução da equação acima perturbativamente, que pode ser escrita como

$$\bar{y} = u^* M^2(t) = -6t + 3t [1 + \ln(-2t)] u^* + \mathcal{O}(u^{*2}), \quad (3.16)$$

onde a contante de acoplamento no ponto fixo ate a ordem de um loop para uma teoria que viole Lorentz foi encontrada em [26][33] é dada por

$$u^* = \frac{2\varepsilon}{3\Pi} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (3.17)$$

onde o parâmetro $\varepsilon = 4 - D$.

De acordo com [33] podemos calcular a susceptibilidade acima e abaixo da temperatura crítica por meio de

$$\chi \sim C_{\pm} \tau^{-\gamma} \quad (3.18)$$

Para o calculo das amplitudes faremos $T > T_c$ de um estado de magnetização macroscopica nula, usaremos $M = 0$ e o valor do ponto fixo (3.17) em (3.10).Obtemos entao

$$\chi = t^{-(1+\frac{\epsilon}{6})} [1 - \frac{1}{6}(1 - \frac{2f^{(2)}}{\Pi})] \epsilon \quad (3.19)$$

Sendo $\gamma = 1 + \frac{\epsilon}{6}$ o expoente crítico para uma temperatura $T > T_c$, a amplitude sera

$$C_+ = 1 - \frac{1}{6}(1 + \frac{2f^{(2)}}{\Pi}) \epsilon \quad (3.20)$$

Para $T < T_L$ temos quebra de simetria. Como foi determinado a magnetização M como valor que extremiza. Usaremos , alem da solução $M = 0$, o valor de M^2 , obtido na expressão da equação perturbativamente como forma de solução, sendo seu valor $\bar{y} = u^* M^2(t) = -6t + 3t [1 + \ln(-2t)] u^* + O(u^{*2})$, ate a ordem de um loop. Aplicando o ponto fixo (3.17) e o valor de M^2 em (3.10), obtemos

$$\chi = (-t)^{-(1-\frac{\epsilon}{6})} \frac{1}{2} [1 - \frac{1}{6}(4 + \ln 2 + \frac{2f^{(2)}}{\Pi}) \epsilon] \quad (3.21)$$

Sendo a equação (3.21) a parte singular da Susceptibilidade abaixo de T_c .com expoente crítico γ e amplitude

$$C_- = \frac{1}{2} [1 - \frac{1}{6}(4 + \ln 2 + \frac{2f^{(2)}}{\Pi}) \epsilon] \quad (3.22)$$

A razão entre C_+ e C_- ate a ordem de um loop será

$$\frac{C_+}{C_-} = 2^{\gamma-1} \frac{(1 + \frac{\epsilon}{6})}{(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{6})} \quad (3.23)$$

Chegaremos no seguinte resultado

$$\frac{C_+}{C_-} = 2^{\gamma-1} \frac{\gamma}{\beta} \quad (3.24)$$

Com γ e β respectivamente $(1 + \frac{\epsilon}{6})$ e $(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{6})$.

CONCLUSÕES

Neste trabalho calculamos a susceptibilidade acima e abaixo da temperatura crítica, para depois computarmos a razão entre eles, para uma teoria com violação de Lorentz e simetria $O(N)$. Para isso utilizamos métodos de teoria de campos para campos escalares sem massa com interação do tipo $\lambda \phi^4$, usando técnicas de grupo de renormalização, para uma teoria que diverge em $D = 4$. Calculamos abaixo da dimensão crítica ϵ , e observamos que a teoria é finita no limite $\epsilon \rightarrow 0$, quando renormalizada. Nos concentramos no comportamento crítico de sistemas que são extensões do modelo Ising, com isto a magnetização, que é o parâmetro de ordem associado a tal modelo tem apenas uma componente. Restringimo-nos então ao caso particular $N = 1$.

Observamos que as amplitudes da susceptibilidade sofrem variações quando inserimos a quebra de simetria de Lorentz, dependendo de $K_{\mu\nu}$. Porém, a razão entre elas não depende da violação de Lorentz, mostrando-se universal, mantendo-se numa mesma classe de universalidade. Isso ocorre porque a violação de Lorentz acontece no espaço onde o parâmetro de ordem é definido, e não no espaço do parâmetro de ordem em si.

Como extensão deste trabalho, pode-se pensar em calcular as outras razões críticas, para a mesma teoria com violação de Lorentz. E também pode-se usar outros métodos de renormalização como o de subtração mínima.

CÁLCULO DAS INTEGRAIS DE FEYNMAN D-DIMENSIONAIS

Nesse apêndice iremos mostrar algumas expressões para o cálculo das integrais de Feynman D-Dimensionais que serão feitas no Apêndice B.

A.1 Regularização Dimensional

A regularização dimensional se da por 't Hooft e Veltman afim de regularizar a teoria de gauge não abeliana [34]. A ideia básica desta regularização é tratar as integrais de Feynman com valores contínuos de dimensão D . Na teoria ϕ^4 , variamos continuamente as integrais de Feynman em torno de $D = 4$ (que é a dimensão crítica da teoria veja (2.49)). Deste modo, as singularidades dos diagramas de 1-loop são expressas em polos simplesmente da seguinte forma

$$D = 4 - \epsilon \quad (\text{A.1})$$

Para exemplificar o método de regularização dimensional, considere a integral de Feynman

$$I(D) = \int d^q \frac{1}{[q^2 + 2qp + m^2]^\alpha} \quad (\text{A.2})$$

onde o fator angular foi absorvido por meio de uma redefinição na constante de acoplamento, ou seja

$$dq = d^D q 2^{D-1} \pi^{D/2} \Gamma(D/2) \quad (\text{A.3})$$

Através da mudança de variável $y = q^2/m^2$ e usando a expressão da função Beta dada por

$$\beta(a, b) = \int_0^1 dx x^{a-1} (1-x)^{-a-b} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad (\text{A.4})$$

mostra-se que

$$I(D) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{D}{2}) \Gamma(\alpha - \frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)} (m^2 - p^2)^{\frac{D}{2} - \alpha}. \quad (\text{A.5})$$

Diferenciando agora os propagadores com relação ao momento p , ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu} \left[\frac{1}{(q^2 + 2pq + m^2)^\alpha} \right] = -\alpha \left[\frac{q^\mu}{(q^2 + 2pq + m^2)^{\alpha+1}} \right]. \quad (\text{A.6})$$

Derivada n vezes temos

$$\frac{\partial}{\partial p^{\mu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial p^{\mu_n}} \left[\frac{1}{(q^2 + 2pq + m^2)^\alpha} \right] = (-1)^n \alpha \dots (\alpha + n - 1) \left[\frac{q^{\mu_1} \dots q^{\mu_n}}{(q^2 + 2pq + m^2)^{\alpha+n}} \right]. \quad (\text{A.7})$$

Diferenciando até a quarta ordem, temos os seguintes valores para as integrais de Feynman

$$\int dq \frac{q^\mu}{(q^2 + 2pq + m^2)^\alpha} = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)} \Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2}\right) p^\mu (m^2 - p^2)^{\frac{D}{2} - \alpha}, \quad (\text{A.8})$$

$$\int dq \frac{q^\mu q^\nu}{(q^2 + 2pq + m^2)^\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)} \left[\Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2}\right) (m^2 - p^2)^{\frac{D}{2} - \alpha} p^\mu p^\nu + \Gamma\left(\alpha - 1 - \frac{D}{2}\right) (m^2 - p^2)^{\frac{D}{2} - \alpha + 1} \frac{\delta^{\mu\nu}}{2} \right], \quad (\text{A.9})$$

$$\int dq \frac{q^\mu q^\nu q^\rho}{(q^2 + 2pq + m^2)^\alpha} = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)} \left[\Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2}\right) (m^2 - p^2)^{\frac{D}{2} - \alpha} p^\mu p^\nu p^\rho + \frac{\Gamma\left(\alpha - 1 - \frac{D}{2}\right)}{2} (m^2 - p^2)^{\frac{D}{2} - \alpha + 1} (\delta^{\mu\nu} p^\rho + \delta^{\mu\rho} p^\nu + \delta^{\nu\rho} p^\mu) \right], \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \int dq \frac{q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma}{(q^2 + 2pq + m^2)^\alpha} &= -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)} \left[\Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2}\right) (m^2 - p^2)^{\frac{D}{2} - \alpha} p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma + \frac{\Gamma\left(\alpha - 1 - \frac{D}{2}\right)}{2} (m^2 - p^2)^{\frac{D}{2} - \alpha + 1} (\delta^{\mu\nu} p^\rho p^\sigma + \delta^{\mu\rho} p^\nu p^\sigma \right. \\ &+ \delta^{\nu\rho} p^\mu p^\sigma + \delta^{\mu\sigma} p^\nu p^\rho + \delta^{\rho\sigma} p^\mu p^\nu) + \frac{\Gamma\left(\alpha - 2 - \frac{D}{2}\right)}{4} \\ &\left. \times (m^2 - p^2)^{\frac{D}{2} - \alpha + 2} \delta^{\{\mu\nu} \delta^{\rho\sigma\}} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

onde $\delta^{\{\mu\nu} \delta^{\rho\sigma\}} \equiv \delta^{\mu\nu} \delta^{\rho\sigma} + \delta^{\mu\rho} \delta^{\nu\sigma} + \delta^{\mu\sigma} \delta^{\nu\rho}$.

A.2 Propriedades da função Γ

A função $\Gamma(z)$ pode ser definida por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t}. \quad (\text{A.12})$$

Essa integral diverge para $z = 0$ e para inteiros negativos. Executando uma integração por partes obtemos

$$\Gamma(z+1) = z \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t} = z\Gamma(z). \quad (\text{A.13})$$

O que mostra que a função Γ pode ser uma generalização de um fatorial de uma variável complexa z .

As funções Γ podem ser combinadas usando a seguinte relação

$$\frac{\prod_n \Gamma(1 + \alpha_n \varepsilon)}{\prod_m \Gamma(1 + \beta_m \varepsilon)} = 1 + O(\varepsilon^2). \quad (\text{A.14})$$

se

$$\prod_n \alpha_n - \prod_m \beta_m = 0. \quad (\text{A.15})$$

essa propriedades pode ser verificada expandido as funções Γ em ε .

CÁLCULO DA INTEGRAIS QUE VIOLAM A SIMETRIA LORENTZ

Aqui será feito o cálculo das duas integrais que aparecem na teoria sem massa com violação de Lorentz, são elas

$$I = \int dq \frac{1}{[q^2 + K_{\mu\nu}q^\mu q^\nu][K_{\mu\nu}q^\mu q^\nu + q^2 + (t + \frac{g^*M^2}{2})]} \quad (\text{B.1})$$

e

$$I_{SP} = \int dq \frac{1}{[q^2 + K_{\mu\nu}q^\mu q^\nu][(q+p)^2 + K_{\mu\nu}(q+p)^\mu (q+p)^\nu]} \Big|_{p^2=\kappa^2} \quad (\text{B.2})$$

B.1 Cálculo de I

Considerando

$$\frac{1}{(\alpha + \beta)^2} = \frac{1}{\alpha} - \frac{2\beta}{\alpha^3} + \frac{3\beta^2}{\alpha^4} + O(\beta^3) = \frac{1}{\alpha^2} \left[1 - 2\frac{\beta}{\alpha} + \frac{3\beta^2}{\alpha^2} \right] + O(\beta^3) \quad (\text{B.3})$$

E identificando $\alpha = q^2 + K_{\mu\nu}q^\mu q^\nu + (t + \frac{g^*M^2}{2})$ e $\beta = q^2 + K_{\mu\nu}q^\mu q^\nu$ e usando a expressão (x) que e a parametrização de Feynman dada por

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[ax + b(1-x)]^2}. \quad (\text{B.4})$$

Podemos calcular a integral I, usando os resultados do apêndice A e lembrando que $D = 4 - \varepsilon$ temos:

$$I = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{4-\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{4-\varepsilon}{2}\right) \left(x \left[t + \frac{g^*M^2}{2}\right]\right)^{\frac{4-\varepsilon}{2}-2} \left[1 - \frac{1}{4} K_{\mu\nu} \delta^{\mu\nu} \Gamma\left(2 - \frac{4-\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{4-\varepsilon}{2}\right) + \frac{1}{16} K_{\mu\nu} K_{\rho\sigma} \delta^{\mu\nu} \delta^{\rho\sigma} \Gamma\left(2 - \frac{4-\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{4-\varepsilon}{2}\right) \right] \quad (\text{B.5})$$

$$I = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{2-\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) (x[t + \frac{g^* M^2}{2}])^{-\frac{\varepsilon}{2}} \left[1 - \frac{1}{4} K_{\mu\nu} \delta^{\mu\nu} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2-\varepsilon}{2}\right) + \frac{1}{16} K_{\mu\nu} K_{\rho\sigma} \delta^{\mu\nu} \delta^{\rho\sigma} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right] \quad (\text{B.6})$$

$$I = \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln\left(t + \frac{g^* M^2}{2}\right) \right) + O(\varepsilon^2) \right] \int_0^1 x^{-\frac{\varepsilon}{2}} dx \Pi \quad (\text{B.7})$$

$$I = \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln\left(t + \frac{g^* M^2}{2}\right) \right) \right] \Pi \quad (\text{B.8})$$

onde

$$\Pi = 1 - \frac{K_{\mu\nu} \delta^{\mu\nu}}{2} + \frac{K_{\mu\nu} K_{\rho\sigma} \delta^{\{\mu\nu} \delta^{\rho\sigma\}}}{8} \quad (\text{B.9})$$

B.2 Cálculo de I_{SP}

Para realizar essa integral iremos usar a parametrização de Feynman que é dada por

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[ax + b(1-x)]^2}. \quad (\text{B.10})$$

Identificando $a = [(q+p)^2 + K_{\mu\nu}(q+p)^\mu(q+p)^\nu]$ e $b = [q^2 + K_{\mu\nu}q^\mu q^\nu]$ em (B.2) e utilizando (B.4) temos que I_{SP} fica

$$I_{SP} = \int_0^1 dx \int dq \frac{1}{\left\{ q^2 + 2qpx + p^2x + K_{\mu\nu} [q^\mu q^\nu (1-x) + (q+p)^\mu (q+p)^\nu x] \right\}^2} \Bigg|_{p^2=\kappa^2} \quad (\text{B.11})$$

Agora considerando (B.3) e fazendo $\alpha = [q^2 + 2pqx + p^2x]$ e $\beta = K_{\mu\nu} [q^\mu q^\nu (1-x) + (q+p)^\mu (q+p)^\nu x]$, temos

$$\begin{aligned} I_{SP} &= \int_0^1 dx \int dq \frac{1}{[q^2 + 2qpx + p^2x]^2} \left\{ 1 - 2K_{\mu\nu} \frac{[q^\mu q^\nu (1-x) + (q+p)^\mu (q+p)^\nu x]}{q^2 + 2qpx + p^2x} \right. \\ &+ 3K_{\mu\nu} K_{\rho\sigma} \left[\frac{q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma (1-x)^2 + (q+p)^\mu (q+p)^\nu (q+p)^\rho (q+p)^\sigma x^2}{(q^2 + 2qpx + p^2x)^2} \right. \\ &+ \left. \left. \frac{[q^\mu q^\nu (q+p)^\rho (q+p)^\sigma + (q+p)^\mu (q+p)^\nu q^\rho q^\sigma] x(1-x)}{(q^2 + 2qpx + p^2x)^2} \right] \right\} \Bigg|_{p^2=\kappa^2} \\ &\equiv [I'_1 - 2K_{\mu\nu} I'_2 + 3K_{\mu\nu} K_{\rho\sigma} I'_3]_{p^2=\kappa^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

onde

$$I'_1 = \int_0^1 dx \int dq \frac{1}{[q^2 + 2qpx + p^2x]^2}, \quad (\text{B.13})$$

$$I'_2 = \int_0^1 dx \int dq \frac{q^\mu q^\nu (1-x) + (q+p)^\mu (q+p)^\nu x}{[q^2 + 2qpx + p^2x]^3} \quad (\text{B.14})$$

e

$$I'_3 = \int_0^1 dx \int dq \left[\frac{q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma (1-x)^2 + (q+p)^\mu (q+p)^\nu (q+p)^\rho (q+p)^\sigma x^2}{[q^2 + 2qpx + p^2x]^4} + \frac{[q^\mu q^\nu (q+p)^\rho (q+p)^\sigma + (q+p)^\mu (q+p)^\nu q^\rho q^\sigma] x(1-x)}{[q^2 + 2qpx + p^2x]^4} \right] \quad (\text{B.15})$$

B.2.1 Cálculo de I'_1

Fazendo $p \rightarrow px$ e $m^2 \rightarrow p^2x$ em (A.4) e usando (A.5) temos então que

$$I'_1 = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) [p^2x(1-x)]^{\frac{D}{2}-2}, \quad (\text{B.16})$$

lembrando que $D = 4 - \varepsilon$ temos

$$I'_1 = \frac{1}{2} \Gamma\left(2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \int_0^1 dx [p^2x(1-x)]^{-\frac{\varepsilon}{2}}, \quad (\text{B.17})$$

expandido em ε até primeira ordem e usando as propriedades da função Γ temos

$$I'_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - 1\right) \int_0^1 dx \left\{ 1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln [x(1-x)p^2] \right\} \quad (\text{B.18})$$

o que nos da

$$I'_1 = \frac{1}{\varepsilon} \left[1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} L(p) \right] + O(\varepsilon) \quad (\text{B.19})$$

onde fizemos

$$L(p) = \int_0^1 dx \ln [x(1-x)p^2] \quad (\text{B.20})$$

B.2.2 Cálculo de I'_2 e I'_3

Seguindo os passos feitos no cálculo de I_1 e utilizando as relações de (A.8) a (A.11) temos para I_2

$$\begin{aligned} I'_2 &= \int_0^1 dx \int dq \frac{q^\mu q^\nu (1-x) + (q+p)^\mu (q+p)^\nu x}{[q^2 + 2qpx + p^2x]^3} \\ &= \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \left\{ \frac{\delta^{\mu\nu}}{2} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \int_0^1 dx [x(1-x)p^2]^{\frac{D}{2}-2} \right. \\ &\quad \left. + \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) \int_0^1 dx x(1-x) [x(1-x)p^2]^{\frac{D}{2}-3} p^\mu p^\nu \right\} \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \left[1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} L(p) \right] \frac{\delta^{\mu\nu}}{2} + \frac{1}{4} \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{x(1-x)} \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Da mesma maneira temos para I'_3

$$\begin{aligned}
 I'_3 &= \int_0^1 dx \int dq \left[\frac{q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma (1-x)^2 + (q+p)^\mu (q+p)^\nu (q+p)^\rho (q+p)^\sigma x^2}{[q^2 + 2qpx + p^2x]^4} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{[q^\mu q^\nu (q+p)^\rho (q+p)^\sigma + (q+p)^\mu (q+p)^\nu q^\rho q^\sigma] x(1-x)}{[q^2 + 2qpx + p^2x]^4} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{3!} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \left\{ \frac{\delta^{\{\mu\nu} \delta^{\rho\sigma\}}}{4} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \int_0^1 dx [x(1-x)p^2]^{\frac{D}{2}-2} \right. \\
 &\quad + \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} p^\rho p^\sigma + \delta_{\rho\sigma} p^\mu p^\nu) \int_0^1 dx x(1-x) [x(1-x)p^2]^{\frac{D}{2}-3} \\
 &\quad \left. + \Gamma\left(4 - \frac{D}{2}\right) \int_0^1 dx x^2(1-x)^2 [x(1-x)p^2]^{\frac{D}{2}-3} \right\} \\
 &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{\delta^{\{\mu\nu} \delta^{\rho\sigma\}}}{8} \frac{1}{\varepsilon} \left[1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} L(p) \right] + \frac{\delta^{\mu\nu}}{4} \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{x(1-x)} \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} \int_0^1 dx \frac{x^2(2-x)^2}{x^2(2-x)^2} \frac{p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma}{p^4} \right\}, \tag{B.22}
 \end{aligned}$$

Desses resultados obtemos I_{SP} que é dado por

$$I_{SP} = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \left[1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} L(p) \right] \Pi - \frac{3}{2} K_{\mu\nu} L^{\mu\nu}(p) + \frac{\varepsilon}{4} K_{\mu\nu} K_{\rho\sigma} [L^{\mu\nu}(p) \delta^{\rho\sigma} + L^{\mu\nu\rho\sigma}(p)] \right\} \Big|_{p^2=\kappa^2} \tag{B.23}$$

onde

$$L^{\mu\nu}(p) \equiv \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{x(1-x)} \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}, \tag{B.24}$$

$$L^{\mu\nu\rho\sigma}(p) \equiv \int_0^1 dx \frac{[x(1-x)]^2}{[x(1-x)]^2} \frac{p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma}{p^4}. \tag{B.25}$$

Como o ponto de simetria (SP) é $p^2 = \kappa^2 = 1$, temos

$$\begin{aligned}
 L^{\mu\nu}(1) &= p^\mu p^\nu \\
 L^{\mu\nu\rho\sigma}(1) &= p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma.
 \end{aligned} \tag{B.26}$$

Assim obtemos

$$I_{SP} = \frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \Pi \right) + f^{(2)}, \tag{B.27}$$

onde

$$f^{(2)} = -\frac{1}{2} K_{\mu\nu} p^\mu p^\nu + \frac{1}{4} K_{\mu\nu} K_{\rho\sigma} (p^\mu p^\nu \delta^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma). \tag{B.28}$$

REFERÊNCIAS

- [1] E. Miranda. *Transições de Fase e o Grupo de Renormalização*. Notas de aula - Unicamp, Campinas, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 13.
- [2] L. D. Landau and E. Lifshitz. *Statistical Physics*. Pergamo, Oxford, 1968. Citado na página 12.
- [3] E. Z. Ising. *Phys.*, 31:253, 1925. Citado na página 12.
- [4] W. Heisenberg. *Phys.*, 49:619, 1928. Citado na página 12.
- [5] Y. Nambu. *Phys. Rev. Lett.*, 4:380, 1960. Citado na página 12.
- [6] J. Goldstone. *Nuovo Cimento*, 19:154, 1961. Citado na página 12.
- [7] L. Osager. *Phys.*, 65:117, 1944. Citado na página 12.
- [8] G. S. Rushbrooke. *The Journal of Chemical Physics*, 39:842, 1963. Citado na página 13.
- [9] R. B. Griffiths. *Phys. Rev. Lett.*, 14:623, 1965. Citado na página 13.
- [10] R. B. Griffiths. *The Journal of Chemical Physics*, 43:1958, 1965. Citado na página 13.
- [11] B. D. Josephson. *Proc. Phys. Soc.*, 92:269, 1967. Citado na página 13.
- [12] B. D. Josephson. *The Journal of Chemical Physics*, 92:276, 1967. Citado na página 13.
- [13] M. E. Fisher. *Phys. Rev.*, 180:594, 1969. Citado na página 13.
- [14] B. Widom. *The Journal of Chemical Physics*, 43:3892, 1965. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.
- [15] S. R. A. Salinas. *Introdução à Física Estatística*. Edusp, São Paulo, 2005. Citado na página 14.
- [16] L. P. Kadanoff. *Physics*, 2:263, 1966. Citado na página 14.
- [17] K. G. Wilson. *Phys. Rev. B*, 4:3174, 1971. Citado na página 14.
- [18] K. G. Wilson. *Phys. Rev. B*, 4:3184, 1971. Citado na página 14.
- [19] C. Callan. *Phys. Rev. D*, 8:1541, 1973. Citado na página 14.

- [20] K. Symanzik. *Comm. Math. Phys.*, 18:227, 1970. Citado na página 14.
- [21] A. Pelisseto and E. Vicari. *Phys. Rep.*, 368:549, 2002. Citado na página 15.
- [22] L. H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 19.
- [23] A. Ferrero and E. Altschul. *Phys. Rev. D*, 84:65030, 2011. Citado na página 15.
- [24] P. R. S. Carvalho. *Phys. Lett. B*, 324:850, 2013. Citado na página 15.
- [25] P. R. S. Carvalho. *Phys. Lett. B*, 730:320, 2013. Citado na página 15.
- [26] P. R. S. Carvalho and W. C. Vieira. *Europhysics Letters*, 108:21001, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 30.
- [27] P. R. S. Carvalho. *International Journal of Modern Physics B*, 30:1550259, 2015. Citado na página 15.
- [28] P. R. S. Carvalho and W. C. Vieira. *Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 13:1650049, 2016. Citado na página 15.
- [29] H. Kleinert and V. Schulte-Frohlinde. *Critical Properties of ϕ^4 -Theories*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Berlin, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 21.
- [30] D. J. Amit. *Field Theory, The Renormalization Group and Critical Phenomena*. McGraw-Hill, New York, 1978. Citado na página 20.
- [31] M. I. S. Júnior. Amplitudes do calor específico para sistemas competitivos. Master's thesis, Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, BR, 2010. Citado na página 27.
- [32] E. Brezin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin. *Field theoretical approach to critical phenomena, in Phase Transitions and Critical Phenomena, edited by C. Domb and M. S. Green*. Academia Press, volume 6, 1976. Citado na página 27.
- [33] C. F. F. Farias. Amplitudes de susceptibilidade para o ponto de lifshitz m-axial. Master's thesis, Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, BR, 2009. Citado na página 30.
- [34] G. 't Hooft and M. Veltman. *Nucl. Phys. B*, 44:189, 1972. Citado na página 33.