



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Medida da Fase de Gouy e de Efeitos de Trajetórias Não-Clássicas Via Efeito Aharonov-Bohm

Francisca Crislane Vieira de Brito

Francisca Crislane Vieira de Brito

Medida da Fase de Gouy e de Efeitos de Trajetórias Não-Clássicas Via Efeito Aharonov-Bohm

Dissertação de Mestrado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Piauí como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Física. Área de concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Dr. Irismar Gonçalves da Paz

Teresina
Julho de 2017

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial de Ciências da Natureza - CCN

B862m Brito, Francisca Crislane Vieira de.
Medida da fase de Gouy e de efeitos de trajetórias não-clássicas via efeito Aharonov-Bohm / Francisca Crislane Vieira de Brito. – Teresina: 2017.
61 f.: il. color

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-graduação em Física, 2017.

Orientador: Prof. Dr. Irísmar Gonçalves da Paz.

1. Física. 2. Matéria Condensada. 3. Efeito Aharonov-Bohm. I. Título.

CDD 530.41

A Luiz (*in memoriam*)

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, professor Irismar Gonçalves da Paz, pela paciência, orientações, discussões e conhecimento transmitido. Agradeço aos meus colegas de grupo que sempre se dispuseram a me explicar e discutir assuntos sobre a pesquisa. Agradeço ao professor Eduardo Costa Girão por confeccionar, de tão boa vontade, as figuras 3.2 e 4.5. Agradeço à minha família pelo amor e suporte. Agradeço aos meus amigos pelo carinho, cuidado e descontração. Agradeço à UFPI pelo espaço físico e à CAPES pelo auxílio financeiro.

Resumo

Propomos medir a fase de Gouy e observar efeitos de trajetórias não-clássicas (exóticas) através do efeito de Aharonov-Bohm em um experimento de fenda-dupla com ondas de matéria. A partir de um conjunto de parâmetros adequado, podemos anular a diferença de fase que depende de x e analisar a intensidade relativa em função do fluxo magnético e de alguns parâmetros da fenda-dupla. Assim, propomos uma medida da fase de Gouy através da variação do fluxo de campo magnético. Mostramos que, variando a posição na tela de detecção e o fluxo de campo magnético é possível eliminar a interferência entre caminhos clássicos (não exóticos). Portanto, a contribuição para a intensidade relativa seria de caminhos exóticos, permitindo, assim, que a quantificação destas trajetórias seja mais simples de obter. Observando que a intensidade relativa possui alguns máximos, pode-se ajustar os parâmetros do experimento para tornar a medida de efeitos de caminhos exóticos mais acessível experimentalmente. Realizamos nossos cálculos para ondas de elétrons.

Palavras-chave: Efeito Aharonov-Bohm, Fase de Gouy, Caminhos Exóticos.

Abstract

We suggest measuring the Gouy phase and observing nonclassical effects through the Aharonov-Bohm effect in a double-slit experiment with matter waves. From a set of suitable parameters, we can cancel out the phase difference that depends on x and analyze the relative intensity at $x = 0$ as a function of the magnetic flux and of some parameters of the double-slit. Thus, we propose a measure of the Gouy phase through the variation of magnetic field flux. We have shown that by varying the position on the detection screen and magnetic field flux, it is possible to eliminate the interference between classical paths. Therefore, the contribution to the relative intensity would be due to exotic paths, allowing, therefore, the quantification of these trajectories to be simpler to obtain. Observing that the relative intensity has some maxima, one can adjust the experiment parameters to make the measurement of the effects of exotic paths more accessible experimentally. We perform our calculations for electron waves.

Keywords: Aharonov-Bohm Effect, Gouy Phase, Exotic Looped Trajectories.

Sumário

Sumário	vii
1 Introdução	1
2 Efeito Aharonov-Bohm	4
2.1 Breve Histórico sobre o Efeito Aharonov-Bohm	4
2.2 Efeito Aharonov-Bohm Elétrico	6
2.3 Efeito Aharonov-Bohm Magnético	8
2.4 Efeito Aharonov-Casher	12
2.5 Localidade	14
2.6 Efeito Aharonov-Bohm e Fase de Berry	15
3 Efeito Aharonov-Bohm e Fase de Gouy	19
3.1 Fase de Gouy e Ondas de Matéria	19
3.2 Experimento da Fenda-Dupla de Young	20
3.3 Medida da Fase de Gouy Através do Efeito Aharonov-Bohm	22
4 Efeito Aharonov-Bohm e de Trajetórias Não-Clássicas na Fenda-Dupla	30
4.1 Trajetórias Não-Clássicas	31
4.1.1 Análise Conceitual do Formalismo de Feynman	34
4.1.2 Trajetórias Não-Clássicas no Experimento de Fenda Dupla	36
4.2 Medidas de Efeitos de Trajetórias Não-Clássicas via Efeito Aharonov-Bohm	40
4.2.1 Parâmetro de Sorkin	42
4.2.2 Intensidade Relativa	44
5 Conclusões	49
Referências Bibliográficas	56

Capítulo 1

Introdução

Primeiramente proposta por Louis de Broglie, a natureza ondulatória da matéria é um ingrediente chave da física quântica e desafia nossa intuição clássica. Ao longo dos anos, o experimento de interferência da fenda-dupla de Young tem sido enfatizado como um bom exemplo de complementaridade [1]. Feynman, ao discutir o análogo para partículas deste experimento, afirmou que esse comportamento dual contém o “único mistério” da mecânica quântica [2]. O experimento da fenda-dupla é conceitualmente o método mais simples para demonstrar o princípio da superposição [3]. Como o princípio da superposição está no cerne da física quântica, muitas de suas características contra-intuitivas, como emaranhamento, não-localidade, dualidade onda-partícula podem ser demonstradas ou testadas usando um sistema de duas fendas [3, 1, 4, 5, 6]. O experimento de Young originalmente realizado com luz clássica, foi posteriormente realizado com fótons individuais (luz quântica) [4], elétrons [7], nêutrons [8], átomos [9], e grandes moléculas consistindo de dezenas de átomos [10].

Um fenômeno bastante conhecido em óptica é o deslocamento de fase de Gouy, deslocamento que uma onda de luz sofre ao ser focalizada. A fase de Gouy está presente nas soluções da equação paraxial de Helmholtz que representa uma correção à óptica geométrica em relação a óptica ondulatória. Posteriormente foi mostrado que há uma equivalência entre a equação paraxial de Helmholtz e a equação de Schrödinger para uma partícula livre. Portanto, ondas de matéria também apresentam uma fase de Gouy [11]. Este efeito foi observado por Gouy em 1890 [12, 13], onde verificou um deslocamento de fase de π para uma propagação de $-\infty$ a $+\infty$ passando por um foco. Hoje é sabido que este deslocamento é igual $\pi/2$ (π) para ondas cilíndricas (ondas esféricas) e a $\pi/4$ ($\pi/2$) para ondas difratadas em uma dimensão (duas dimensões) [11]. A fase de Gouy tem sido observada em ondas de água [14], acústica [15] e ondas de matéria [11]. Em ondas de matéria, esta fase tem várias aplicações, entre elas, a evolução de feixes de vórtices de elétrons [16]. Também tem aplicações em ondas de luz, por exemplo,

esta fase deve ser levada em conta quando se quer determinar a frequência de ressonância em cavidades laser [17].

Uma mudança de fase para ondas de de Broglie devido à ação de um potencial em uma região livre de campo é conhecido como efeito Aharonov-Bohm[18]. Quando um elétron passa por um campo magnético atrás das fendas, todo o padrão de difração é deslocado devido à força de Lorentz. Quando um elétron passa através de duas fendas com fluxo magnético confinado a um pequeno cilindro entre elas, o que gera o efeito Aharonov-Bohm, o padrão de difração de fenda-dupla desloca-se dentro do envelope de difração de fenda única. Este comportamento pode ser entendido com base em um efeito de interferência mecânica-quântica. O efeito Aharonov-Bohm no experimento de fenda dupla foi tratado por Kobe em [19]. Este efeito foi primeiramente testado experimentalmente por Chambers [20], e desde então o número de experimentos e a variedade de sistemas em que foi observado cresceu quase exponencialmente, indo de experimentos de microscopia eletrônica de Tonomura [21] a oscilações de magnetorresistência na física mesoscópica [22]. Estudos teóricos deste fenômeno têm levado à uma compreensão mais profunda da natureza e das teorias de calibre em geral [23, 24, 25, 26, 27].

No experimento de interferência da fenda-dupla, a função de onda na tela de detecção com ambas as fendas abertas não é exatamente igual a soma das funções de onda com as fendas abertas individualmente uma por vez [28]. Portanto, o princípio da superposição é, em geral, aplicado incorretamente. Yabuki foi o primeiro a estudar desvios do princípio da superposição, aplicando a abordagem das integrais de caminho Feynman. Nesta formulação, são esperadas contribuições de caminhos exóticos (também chamados de trajetórias não-clássicas), como trajetórias enlaçando as fendas [28]. No entanto, a probabilidade associada com essas trajetórias é muito menor que a probabilidade associada com trajetórias clássicas (usuais). Sorkin discutiu como acessar tais pequenos desvios experimentalmente, em um trabalho onde contribuições de ordem superior quando três ou mais caminhos são incorporados à prescrição da interferência fenda-dupla [29]. A existência de trajetórias exóticas foi observada recentemente com fótons por Boyd e colaboradores [3].

Como mostrado por I. G. da Paz em [30], a fase de Gouy desempenha um papel importante para a quantificação de efeitos de trajetórias não-clássicas, não podendo, assim, ser negligenciada quando se deseja analisar esse tipo de efeito. Diversas são as aplicações da fase de Gouy e tem-se observado o crescente interesse por esta fase. Sendo assim, realizamos um estudo teórico sobre como obter medidas da fase de Gouy por meio do efeito Aharonov-Bohm. No efeito Aharonov-Bohm, ondas quânticas que representam uma partícula carregada são espalhadas por uma linha de fluxo magnético que é inacessível para elas. Este fenômeno é interpretado como a interferência entre as duas ondas que viajam ao redor do fluxo, no entanto, isto é apenas

uma aproximação, pois a função de onda não possui um valor único. Berry, então, propôs que esta aproximação poderia ser corrigida incluindo ondas que realizam mais circuitos em torno da linha de fluxo[31]. Este é um exemplo bem conhecido do estudo de trajetórias enlaçando as fendas (*loops*) envolvendo o efeito Aharonov-Bohm. Utilizando esse efeito, estudamos como quantificar efeitos de trajetórias exóticas no experimento da fenda-dupla de Young com elétrons.

Esta dissertação está dividida da seguinte maneira: No capítulo 2, foi feita uma revisão sobre o efeito Aharonov-Bohm, as variações deste efeito e uma discussão sobre sua não-localidade. No capítulo 3, explanamos as trajetórias não-clássicas no experimento de fenda-dupla com elétrons. No capítulo 4, discutimos sobre a origem da fase de Gouy, aplicações e como medi-la através da variação do fluxo de campo magnético que produz o efeito Aharonov-Bohm. No capítulo 5, propomos medir desvios do princípio da superposição quantificando efeitos de trajetória não-clássicas, anulando a interferência entre caminhos clássicos por meio da variação da fase de Aharonov-Bohm magnético. No capítulo 6, apresentamos nossas conclusões e colocamos como perspectiva utilizar o efeito Aharonov-Casher para quantificar efeitos de caminhos exóticos, pois efeitos de trajetórias não-clássicas são maiores quando a partícula difratada é o nêutron .

Capítulo 2

Efeito Aharonov-Bohm

Em 1959, Aharonov e Bohm previram teoricamente que uma mudança de fase relativa pode ser produzida e observada como um deslocamento de franjas de interferência quando partículas carregadas passam por regiões livres de campos eletromagnéticos, o que ficou conhecido como efeito Aharonov-Bohm [18]. Propuseram dois tipos de experimentos de interferência com elétrons visando mostrar a significância dos potenciais eletromagnéticos na teoria quântica. O aspecto físico essencial dos experimentos é que os elétrons sofrem mudanças de fase ao passar por regiões de campos zero, mas potenciais diferentes de zero. Os efeitos são de dois tipos, o efeito Aharonov-Bohm elétrico (ou escalar) e o efeito Aharonov-Bohm magnético (ou vetorial). Investigando a interação entre uma partícula carregada e um momento magnético, Aharonov e Casher, em 1984, mostraram que partículas neutras, sob certas circunstâncias, exibem o efeito Aharonov-Bohm [32]. Verificando, assim, o surgimento de uma outra fase topológica quântica, a esse fenômeno deu-se o nome de efeito Aharonov-Casher [32]. Os efeitos topológicos em sistemas mecânicos quânticos são manifestados através da geração de fases relativas que se acumulam na função de onda de uma partícula que se desloca através de uma região multiplamente-conectada livre de forças[32]. Neste capítulo, discutimos os experimentos propostos em [18], efeito Aharonov-Bohm elétrico e magnético, e o efeito Aharonov-Casher. Tratamos, de forma sucinta, da não-localidade do efeito Aharonov-Bohm e da fase geométrica de Berry, da qual o efeito Aharonov-Bohm é um caso especial.

2.1 Breve Histórico sobre o Efeito Aharonov-Bohm

O efeito Aharonov-Bohm é um fenômeno mecânico-quântico em que a função de onda de partículas carregadas é influenciada por campos eletromagnéticos, na forma de deslocamento de fase, em regiões que a partícula não passa[23]. Como não há campo elétrico nem magnético

a força de Lorentz sobre a partícula é nula, entretanto, existem potenciais eletromagnéticos que em mecânica quântica não se pode eliminar os potenciais eletromagnéticos da equação de Schrödinger e, o que nos leva a crer, conseqüentemente, estes parecem possuir significado físico [33, 23].

O conceito de campo eletromagnético foi introduzido por Faraday e Maxwell para descrever a interação de partículas eletricamente carregadas. Apesar de Maxwell ter conferido uma significância física maior para o potencial vetor, a exigência de que observáveis físicos fossem invariantes de calibre impede que os potenciais eletromagnéticos sejam diretamente observáveis[34]. Assim, o potencial vetor e escalar foram adotados, inicialmente, como uma ferramenta matemática para calcular os campos[18, 35, 33].

Embora na física clássica o estado possa ser especificado pelas forças elétricas e magnéticas, observa-se que o conhecimento das forças de campos locais não é suficiente para a descrição consistente de certos processos eletromagnéticos que afetam o estado mecânico-quântico das partículas carregadas. Um desses processos é o espalhamento de elétrons em uma fenda-dupla na presença de um fluxo magnético confinado à região entre as fendas. Apesar do fato de que neste experimento a região do espaço acessível aos elétrons incidentes estar livre de forças, as fases das ondas componentes do estado incidente são deslocadas, o que produz deslocamentos de franjas observáveis no padrão de interferência[36, 18, 33].

O fato de os efeitos físicos de uma distribuição de campo magnético na interferência quântica de elétrons serem determinados pela quantidade fluxo magnético confinado entre as fendas e nulo na região entre os caminhos de interferência foi notado por Franz em 1939[37, 33]. Em 1949, Ehrenberg e Siday formularam matematicamente a óptica eletrônica em termos de um índice de refração representado por potenciais escalar e vetor, em que previram a existência do fenômeno de interferência clássica associado com fluxos magnéticos estacionários[38, 23]. Este trabalho, no entanto, parece não ter sido amplamente lido[34]. O significado completo do problema só se tornou aparente após a descrição detalhada dos efeitos quânticos dos fluxos elétrico e magnético por Aharonov e Bohm (1959), onde discutiram a significância dos potenciais eletromagnéticos no contexto quântico[18, 33].

A confirmação experimental do efeito Aharonov-Bohm não foi tão simples, devido a dificuldade de produzir um campo magnético sem vazamento na região onde as partículas se movimentam[20, 39, 40]. Contudo, o experimento que melhor satisfaz as condições necessárias, até então, para um teste do efeito Aharonov-Bohm, foi produzido em 1986 por Tonomura et al.[21]. No entanto, em 2016, Wang propôs um novo esquema experimental para testar se o efeito Aharonov-Bohm é devido ao potencial vetor ou à energia de interação entre os campos eletromagnéticos, pois afirma que o experimento de Tonomura[21] blinda apenas o fluxo de

campo e não o campo magnético[26].

O efeito Aharonov-Bohm tem sido extensivamente estudado teoricamente [23, 24, 25, 26, 27] e experimentalmente[20, 39, 40, 21]. Há algumas décadas este efeito vem sendo investigado amplamente através de diversos artifícios e também recebe muitas aplicações. Schönenberger e colaboradores em [41] relatam medidas de magnetoresistência em nanotubos de carbono que exibem oscilações de resistência em função do fluxo magnético. Utilizando um interferômetro tipo Anel-Aharonov-Bohm, Umansky *et al.* confirmaram que o comportamento de onda é preservado, a menos que a informação de caminho seja adquirida fora do processo de detecção[22]. Em 2017, Pozzi e colaboradores trataram da geração de feixes de vórtices de elétrons usando linhas de cargas através do efeito Aharonov-Bohm eletrostático em [42].

2.2 Efeito Aharonov-Bohm Elétrico

O efeito Aharonov-Bohm elétrico, ou escalar, para partículas carregadas está relacionado a um deslocamento de fase causado por um potencial escalar na equação de Schrödinger. Considere uma partícula carregada dentro de uma “gaiola de Faraday”, isto é, interior livre de campo, conectada a um gerador externo que gera um potencial $V(t) = -e\varphi(t)$ na gaiola em tempos alternados[18]. No limite não-relativístico tem-se, para uma região dentro da gaiola, $H = H_0 + V(t)$, em que H_0 é o Hamiltoniano quando o gerador não está funcionando[18]. A equação de Schrödinger dependente do tempo será desta forma

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi = [H_0 - e\varphi(t)]\Psi. \quad (2.1)$$

Assim, para um potencial escalar espacialmente uniforme (região dentro da gaiola) mas dependente do tempo, se $\Psi_0(x, t)$ é uma solução do Hamiltoniano H_0 , a solução para H será [18],

$$\Psi = \Psi_0 e^{iS}, \quad S = \frac{e}{\hbar} \int \varphi(t) dt. \quad (2.2)$$

Embora a escolha da escala do potencial seja arbitrária, diferenças potenciais possuem significância física, não-trivial, de maneira notável[36]. Uma outra proposta experimental é discutida por Aharonov e Bohm em [18] para assegurar que o elétron está em um potencial que varia no tempo sem nunca estar em um campo. Um único feixe eletrônico coerente é dividido em duas partes, cada um dos quais entram em um tubo metálico, como o arranjo mostrado na figura 2.1. Uma partícula no feixe pode ser visualizada como um pacote de onda cuja dimensão é muito menor que a dimensão da caixa[18, 36].

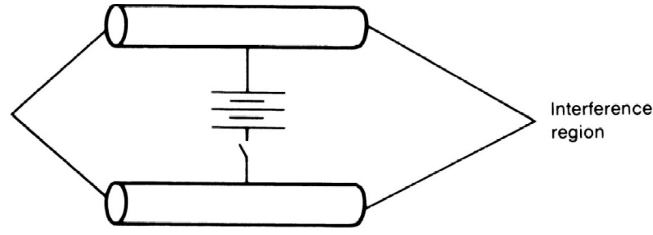


Fig. 2.1: Experimento esquemático para demonstrar interferência com potencial escalar dependente do tempo. Figura retirada de [36]

Suponha que é aplicada uma diferença de potencial entre os dois tubos após os pacotes de onda entrarem nestes e é desligada logo antes de os pacotes de onda deixarem os tubos. Nenhuma força é exercida sobre o elétron no tubo, pois o potencial é espacialmente uniforme dentro deste, assim, não há campo elétrico presente. Os feixes se recombinam na região de interferência (ver figura 2.1), cada componente do feixe sofre uma mudança de fase.

No caso de potencial zero ($\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = 0$), a função de onda total pode ser representada como a superposição das funções de onda para os dois pacotes não perturbados, tal que

$$\Psi = \Psi_1^0(x, t) + \Psi_2^0(x, t), \quad (2.3)$$

$\Psi_1^0(x, t)$ e $\Psi_2^0(x, t)$ representam as partes que passam através dos tubos 1 e 2, respectivamente. Quando a diferença de potencial é aplicada aos cilindros, o problema para cada tubo é essencialmente o mesmo que o da “gaiola de Faraday”[18]. A função de onda, então, torna-se

$$\Psi = \Psi_1^0 e^{iS_1} + \Psi_2^0 e^{iS_2}, \quad (2.4)$$

em que,

$$S_1 = \frac{ie}{\hbar} \int \varphi_1 dt \quad e \quad S_2 = \frac{ie}{\hbar} \int \varphi_2 dt. \quad (2.5)$$

Há um termo de interferência na intensidade do feixe na região em que os feixes se recombinam, que depende da diferença de fase entre eles

$$S_1 - S_2 = \frac{e}{\hbar} \int dt [\varphi_1 - \varphi_2]. \quad (2.6)$$

Assim, há um efeito devido aos potenciais, embora não haja força agindo efetivamente no elétron[18]. O efeito é puramente quântico, no limite $\hbar \rightarrow 0$ o efeito de interferência desaparece devido a oscilação do cosseno tornar-se infinitamente rápida entre valores maiores e menores, desta forma a contribuição total seria zero. Conseqüentemente a periodicidade espacial do padrão de franja se torna infinitesimalmente pequena e o ponto de difração central, então, não

é defletido[36].

2.3 Efeito Aharonov-Bohm Magnético

No contexto da Teoria da Relatividade, o potencial vetor \vec{A} e o potencial escalar φ são componentes de um quadrivetor [43]. A integral $\int \varphi_i(t)dt$ pode ser interpretada como uma componente do produto covariante de dois quadrivetores, potenciais A_μ e o diferencial espaço-temporal dx^μ . A partir de considerações relativísticas, observa-se que a covariância das conclusões da seção anterior exige que deve haver resultados similares envolvendo o potencial vetor [18]. Esta generalização leva à dedução de que um efeito Aharonov-Bohm magnético também deve existir [23]. Expressando a diferença de fase [equação (2.6)] como a integral $\frac{e}{\hbar} \oint \varphi dt$ em torno de um circuito fechado no espaço-tempo, a generalização relativística da diferença de fase é[18]

$$\frac{e}{\hbar} \oint \left(\varphi dt - \frac{\vec{A}}{c} \cdot d\vec{x} \right). \quad (2.7)$$

Como um outro caso especial, consideremos um caminho no espaço apenas, ou seja, $t =$ constante. Assim, o deslocamento de fase da função de onda do elétron deve ser

$$\Delta S = -\frac{e}{c\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{x}, \quad (2.8)$$

sabendo que,

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{x} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi, \quad (2.9)$$

em que, Φ é o fluxo magnético total dentro do circuito [18]. Isto corresponde a uma outra situação experimental.

Isto corresponde a uma outra situação experimental. Um tipo de configuração de corrente que idealmente dá origem a um campo magnético nulo numa região onde o potencial vetor não desaparece é o de uma bobina axial ou solenóide infinitamente longo[34]. Há linhas de indução magnética dentro do solenóide, mas fora não. Portanto, desde que o solenóide seja longo e fino o suficiente, os elétrons sempre se moverão em uma região livre de campo[43].

Para demonstrar os efeitos do fluxo total, iniciamos com um feixe eletrônico colimado que é feito incidir em uma tela com fenda-dupla e, então, difratado. Atrás da tela, entre as fendas, há um solenóide que faz com que as franjas de interferência sejam deslocadas. Temos a equação de Schrödinger

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (2.10)$$

onde o Hamiltoniano H é construído a partir do Hamiltoniano livre de campo H_0 substituindo o momento linear canônico \vec{p} por $\vec{p} + e/c\vec{A}$ e adicionando a energia potencial $(-e\varphi)$, assim,[18, 34]

$$H = \frac{1}{2m} [\vec{p} + (e/c)\vec{A}]^2 - e\varphi. \quad (2.11)$$

Se Ψ_0 é a solução da equação quântica de movimento (por exemplo, a equação de Schrödinger ou Dirac) na ausência de interações eletromagnéticas, então a função de onda correspondente a uma partícula carregada na presença de um campo de potencial vetor independente do tempo e um campo de potencial escalar espacialmente uniforme é da forma [34]

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_0(\vec{r}, t)e^{iS(\vec{r}, t)}, \quad S(\vec{r}, t) = \frac{e}{\hbar} \oint \left(\varphi dt - \frac{\vec{A}}{c} \cdot d\vec{x} \right). \quad (2.12)$$

Para a situação descrita acima (feixe eletrônico difratado através de uma fenda-dupla), em que a região onde os elétrons passam é livre de campos, o potencial escalar é uma constante, aqui escolhido pra ser igual a zero. O potencial vetor \vec{A} não pode ser zero em todo lugar fora do solenóide, pois o fluxo total através de todo o circuito contendo a origem é igual a uma constante

$$\Phi_0 = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_C \vec{A} \cdot d\vec{x}. \quad (2.13)$$

Desta forma, o Hamiltoniano para este caso é

$$H = \frac{1}{2m} [\vec{p} + (e/c)\vec{A}]^2. \quad (2.14)$$

O fluxo magnético Φ dentro de uma bobina infinitamente longa de raio R é simplesmente o produto da intensidade do campo e a área da seção transversal πR^2 . Fora do solenóide, o campo é idealmente nulo. O potencial vetor, entretanto, forma superfícies equipotenciais cilíndricas (ver figura 2.2) em ambas as regiões do espaço com circulação. No calibre de Coulomb, isto é, o calibre para o qual $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, a componente tangencial (e única) de \vec{A} é uma função da coordenada radial r dada por[34]

$$A(r) = \begin{cases} \Phi/2\pi r & r \geq R, \\ \Phi r/2\pi R^2 & r \leq R. \end{cases} \quad (2.15)$$

Para qualquer solenóide real, há um campo de retorno na região exterior, mas a magnitude deste campo diminui conforme o raio aumenta. Além do solenóide idealmente infinito, uma configuração de corrente toroidal formada pela união de duas extremidades de um solenóide finito realiza a mesma tarefa de produzir um campo magnético confinado (embora as expressões

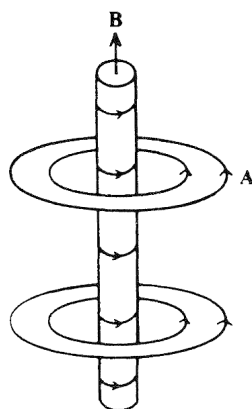


Fig. 2.2: Formas de \vec{A} e \vec{B} em um solenóide. Figura retirada de [43].

para o campo do potencial vetor resultante não sejam tão simples). Tonomura, no experimento que é tido como o que melhor satisfaz as condições para demonstrar a existência do efeito Aharonov-Bohm, utilizou em seus experimentos toróides magnéticos cobertos inteiramente com uma camada de um material supercondutor[34].

Um experimento esquemático da difração dos elétrons pela fenda-dupla pode ser observado na figura 2.3. Há dois tipos de caminhos classicamente indistinguíveis pelos quais uma partícula pode se propagar a partir de uma fonte (S) até o detector (D): Indo no sentido horário acima do solenóide ($S1$) ou no sentido anti-horário abaixo do solenóide ($S2$). Supõe-se que as partículas não penetram o solenóide.

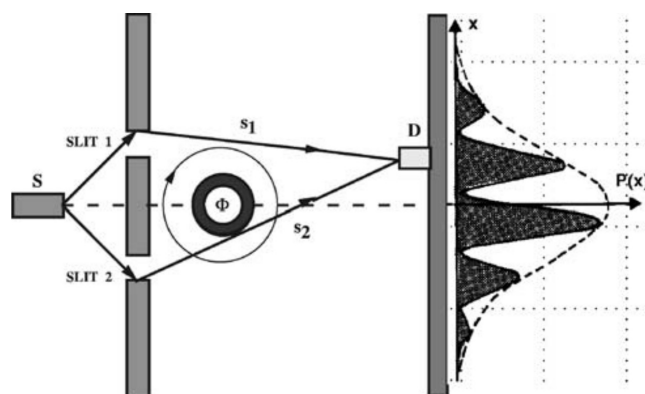


Fig. 2.3: Experimento esquemático para demonstrar interferência com potencial vetor independente do tempo. Figura retirada de [34].

Em uma região unicamente conectada, onde $B = \nabla \times \vec{A} = 0$, podemos obter a solução $\Psi = \Psi_0 e^{iS}$ para a equação (2.14), onde Ψ_0 é a solução quando $\vec{A} = 0$ e onde $\nabla S = (e/\hbar c)\vec{A}$. Entretanto, no experimento discutido acima, em que a região fora do solenóide é multiplamente

conectada, $\Psi_0 e^{iS}$ não é uma função com único valor e portanto, em geral, não é uma solução possível para a equação de Schrödinger[18].

Um espaço simplesmente conectado é aquele em que todas as curvas fechadas podem ser encolhidas continuamente até um ponto. Observando a figura 2.4, nota-se que a curva c_1 pode ser encolhida até um ponto, enquanto a c_2 não pode[43]. O espaço relevante nesta situação é o espaço do vácuo, isto é, o espaço fora do solenóide, que é multiplamente conectado.

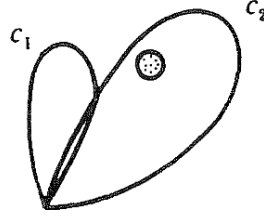


Fig. 2.4: O espaço livre de campo no efeito Aharonov-Bohm não é simplesmente conectado. Figura retirada de [43]

No entanto, neste problema é possível utilizar tais soluções devido a função de onda ser dividida em duas partes $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$, em que Ψ_1 representa o feixe que percorreu o caminho $S1$ e Ψ_2 o feixe que percorreu o caminho $S2$ (figura 2.3). Cada um destes está em uma região simplesmente conectada. Portanto, podemos escrever

$$\Psi_1 = \Psi_1^0 e^{iS_1}, \quad \Psi_2 = \Psi_2^0 e^{iS_2}, \quad (2.16)$$

em que $S1$ e $S2$ são iguais a $(e/\hbar c) \int \vec{A} \cdot d\vec{x}$ ao longo dos caminhos do primeiro e segundo feixe, respectivamente[18].

A probabilidade para encontrar a partícula na região de interferência depende do quadrado do módulo da amplitude de probabilidade de transição e, portanto, da diferença de fase entre a contribuição dos caminhos $S1$ e $S2$. A diferença de fase devido a presença de B confinado é

$$\left[\frac{e}{\hbar c} \int_c \vec{A} \cdot d\vec{x} \right]_{S1} - \left[\frac{e}{\hbar c} \int_c \vec{A} \cdot d\vec{x} \right]_{S2} = \frac{e}{\hbar c} \oint_c \vec{A} \cdot d\vec{x} = \frac{e}{\hbar c} \Phi_0. \quad (2.17)$$

em que Φ_0 é o fluxo do campo magnético dentro do cilindro impenetrável. Isso significa que há uma componente cossenoidal na probabilidade de observar a partícula na região de interferência com período dado por uma unidade de fluxo magnético, a saber[36]

$$\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar c}{|e|} = 4.135 \times 10^{-7} Gauss \cdot cm^2. \quad (2.18)$$

Este efeito existirá, embora não exista forças magnéticas agindo onde o feixe de elétron passa. Classicamente, o movimento da partícula carregada é determinado somente pela segunda lei de

Newton complementada pela lei de força de Lorentz. Enfatizamos que o efeito de interferência é puramente quântico. A partícula pode nunca entrar na região em que o campo magnético é finito; a força de Lorentz é identicamente zero em todas as regiões onde a função de onda da partícula é finita. Ainda há um padrão de interferência notável que depende da presença ou ausência do campo magnético dentro do cilindro impenetrável. Isto leva algumas pessoas a concluir que em mecânica quântica o potencial vetor \vec{A} e não o campo magnético \vec{B} é fundamental. No entanto, deve ser notado que os efeitos observados em ambos os exemplos dependem apenas do fluxo de campo magnético (Φ) que é diretamente expressível em termos de \vec{B} [36].

Note que considerando o produto covariante $A_\mu dx^\mu$ dos quadrivetores os efeitos, elétrico e magnético, não são dois fenômenos diferentes. Por exemplo, o efeito Aharonov-bohm magnético pode ser observado como o efeito elétrico em um sistema de coordenadas onde o elétron incidente está em repouso. A quantidade invariante para uma transformação de Lorentz pode ser dada por

$$\oint A_\mu dx^\mu = \oint (\vec{A} \cdot d\vec{s} - \varphi dt), \quad (2.19)$$

que é um fluxo magnético[23].

2.4 Efeito Aharonov-Casher

Em 1984, Aharonov e Casher [32] obtiveram a lagrangiana que descreve a interação entre uma partícula carregada e um momento magnético no limite não-relativístico. Mostraram que partículas neutras com um momento magnético podem exibir o efeito Aharonov-Bohm.

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + e\vec{A}(\vec{r} - \vec{R}) \cdot (\vec{v} - \vec{V}), \quad (2.20)$$

em que, m , \vec{r} e \vec{v} são a massa, a posição e a velocidade da partícula carregada e M , \vec{R} e \vec{V} são as quantidades correspondentes ao dipolo magnético. O primeiro e segundo termos da equação (2.20) são a energia cinética para a partícula carregada e para a partícula neutra, nessa ordem. Há um termo de interação $e\vec{A}(\vec{r} - \vec{R}) \cdot \vec{V}$ para o dipolo, embora ele seja eletricamente neutro, esta é uma correção para que a força exercida sobre a partícula carregada seja um invariante de calibre que desapareça com o campo magnético [32].

Considere a lagrangiana para um momento de dipolo magnético μ

$$L = \frac{1}{2}MV^2 - \vec{E}(\vec{R} - \vec{r}) \times \vec{\mu} \cdot \vec{V}. \quad (2.21)$$

Sabendo que a fonte do potencial vetor \vec{A} no ponto \vec{r} é o momento magnético de dipolo $\vec{\mu}$ em \vec{R} , temos

$$\vec{E}(\vec{R} - \vec{r}) \times \vec{\mu} = \frac{-e}{4\pi} \frac{(\vec{R} - \vec{r}) \times \vec{\mu}}{|\vec{R} - \vec{r}|^3} = e\vec{A}(\vec{r} - \vec{R}), \quad (2.22)$$

se \vec{E} é o campo elétrico coulombiano de uma partícula carregada. Desta forma, a lagrangiana para um momento de dipolo magnético μ se movendo em um campo elétrico externo estático ($\vec{v} = 0$) é

$$L = \frac{MV^2}{2} + e\vec{A}(\vec{r} - \vec{R}) \cdot (-V), \quad (2.23)$$

que através de uma transformada de Legendre obtém-se o Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{P} - \vec{E} \times \vec{\mu})^2 = \frac{1}{2m}(\vec{P} + e\vec{A})^2, \quad (2.24)$$

onde \vec{P} é o momento canônico do dipolo magnético. Devido a dependência de $A(\vec{r} - \vec{R})$, o sistema possui um tipo de dualidade quando os papéis de r e R são invertidos, essa dualidade significa que o efeito Aharonov-Casher pode ser obtido a partir do efeito Aharonov-Bohm magnético invertendo os papéis da partícula carregada e e do momento de dipolo μ , $e\Phi \leftrightarrow \mu\lambda$ [ver equações (2.17) e (2.25)] [32]. Este efeito pode ser intuitivamente compreendido se mudarmos para o sistema de coordenadas de repouso para o nêutron [35].

O arranjo experimental para o efeito Aharonov-Casher é exatamente o inverso do efeito Aharonov-Bohm magnético, neste último, uma carga difrata ao redor de um tubo eletricamente neutro de fluxo magnético [ver figura 2.5(a)], isto é, um solenóide que transporta corrente ou, de forma equivalente, uma linha de dipolos [ver figura 2.5(b)]. No efeito Aharonov-Casher, um dipolo difrata em torno de uma linha de carga elétrica [ver figura 2.5(c)]. Um ponto de vista alternativo é que o efeito Aharonov-Casher é uma consequência do termo $\vec{\mu} \times \vec{E}$ no momento canônico, $\vec{P} = (m\vec{v} + \vec{\mu} \times \vec{E})$, de uma partícula de momento magnético $\vec{\mu}$ em um campo elétrico \vec{E} , assim, a fase Aharonov-Casher, a princípio, poderia ser medida localmente (ver [35] e referências para mais detalhes).

Em particular, para um momento de dipolo magnético se movendo no campo de uma linha de carga, este momento não sente força e sofre um tipo de efeito Aharonov-bohm, o potencial vetor para a partícula neutra é $\vec{A} = -\vec{E} \times \vec{\mu}$, onde fizemos ($\hbar = c = 1$) [32]. A fase Aharonov-Casher é

$$\Delta S = \oint \vec{\mu} \times \vec{E} \cdot d\vec{R} = - \oint e\vec{A}(\vec{r} - \vec{R}) \cdot d\vec{R} = \mu\lambda, \quad (2.25)$$

em que λ é a carga por unidade de comprimento cercada pela partícula e μ é a projeção do

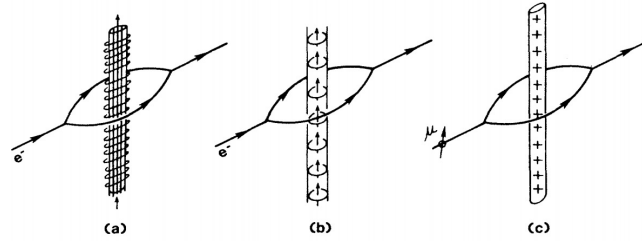


Fig. 2.5: (a) Experimento Aharonov-Bohm magnético, (b) equivalente ao experimento Aharonov-Bohm, (c) dualidade entre o efeito Aharonov-Bohm e o efeito Aharonov-Casher. Figura retirada de [35].

momento magnético ao longo da linha carregada [32]. Observe que o deslocamento de fase depende da densidade de carga linear (ao longo do eixo perpendicular ao plano do interferômetro) encerrada pelos caminhos percorridos pelos feixes da partícula neutra [35], assim como a fase adquirida no efeito Aharonov-Bohm magnético depende do fluxo no interior do solenóide.

2.5 Localidade

Sobre o fato de o efeito Aharonov-Bohm ser resultado de uma interação livre de força em um campo de potencial vetor local ou um campo magnético não-local, a questão de uma interação local versus não-local é realmente enganosa, pois os dois pontos de vista são equivalentes em representar o efeito Aharonov-Bohm como um fenômeno físico intrinsecamente não-local. Embora as partículas carregadas interajam diretamente com o campo do potencial vetorial em suas posições instantâneas, essa interação local em si não é suficiente para produzir o efeito AB [34].

Entretanto, pode-se recorrer à análise de Yang *et al.* [25], em que mostraram como dar uma descrição independente de calibre do eletromagnetismo, que ainda poderia explicar o efeito Aharonov-Bohm. Após suas análises, tornou-se comum considerar o eletromagnetismo não sendo completamente e nem redundantemente descrito pelo campo eletromagnético, nem pelo seu potencial gerador, mas sim pelo chamado fator de fase de Dirac. Aplicado ao efeito Aharonov-Bohm, o campo magnético constante no solenóide é acompanhado por uma associação de um fator de fase com todas as curvas fechadas C no espaço [44]. O fator de fase é definido por

$$\exp\left(-\frac{ie}{\hbar}\oint_C \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}\right). \quad (2.26)$$

Esta abordagem tem a vantagem de que, uma vez que o fator de fase é invariante de calibre, este pode ser facilmente considerado uma quantidade fisicamente real. Além disso, os efeitos

do eletromagnetismo fora do solenóide podem ser atribuídos ao fato de que o fator de fase não desaparece para aquelas curvas fechadas C , que envolvem o solenóide sempre que uma corrente passa por ele. Ao contrário do campo magnético e seu potencial, o fator de fase não é definido em cada ponto do espaço em cada momento do tempo. Portanto, não fornece uma representação local do eletromagnetismo no efeito Aharonov-Bohm [44].

Uma análise da experiência de Aharonov-Bohm indica que, de fato, apenas o fator de fase [equação (2.27)] e não a fase,

$$\exp\left(\frac{e}{\hbar} \oint_C \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}\right), \quad (2.27)$$

é fisicamente significativo. Em outras palavras, a fase [equação (2.26)] contém mais informação do que o fator de fase [equação (2.27)], porém as informações adicionais não são mensuráveis [25].

O fato de a natureza ser não-local já é bem conhecido devido as violações das desigualdades de Bell. Isto é, a física quântica permite correlações entre partículas distantes que são mais fortes do que o permitido classicamente (para os sistemas clássicos mostrarem tais correlações, precisariam se comunicar mais rapidamente do que a luz) [45]. A não-localidade descoberta no efeito Aharonov-Bohm, no entanto, é completamente diferente.

As violações das desigualdades de Bell derivam da estrutura espacial de Hilbert da mecânica quântica. Por outro lado, o tipo Aharonov-Bohm de não-localidade é dinâmico, é a não-localidade das equações quânticas do movimento. A equação de Schrödinger é puramente local, contém apenas quantidades que são locais no espaço (\vec{r}) e no tempo (t), a saber, o potencial, $V(r)$, a função de onda $\Psi(r, t)$ e um número finito de suas derivadas. No entanto, a equação de Schrödinger refere-se à função de onda, que não é diretamente observável. O ponto é olhar para as variáveis físicas observáveis, tais como posição e momento e para suas equações de movimento (tecnicamente a equação de Heisenberg). Popescu faz uma discussão sobre dinâmica não-local em [45], em que trata do operador deslocamento para obter informações sobre interferência.

2.6 Efeito Aharonov-Bohm e Fase de Berry

O efeito Aharonov-Bohm, segundo Berry, pode ser interpretado como um fator de fase geométrica [46], um caso especial da fase de Berry. A fase geométrica de Berry foi encontrada em seus estudos de teorema adiabático quântico, sendo assim, discorreremos a seguir sobre o teorema adiabático e a fase de Berry.

Considere um pêndulo ideal, livre de forças dissipativas, que se movimenta em um plano vertical. Se o suporte deste pêndulo é movimentado suavemente e de forma constante, o mo-

vimento do suporte será muito mais lento comparado com o período do pêndulo. Assim, o pêndulo continuará a se movimentar com mesma amplitude e no mesmo plano (ou em um plano paralelo). Essa mudança gradual de condições externas define um processo adiabático [47].

Um exemplo do teorema adiabático em mecânica quântica é discutido a seguir. O estado de um spin em um campo magnético independente do tempo sofre uma mudança no fator de fase (para um Hamiltoniano independente do tempo).

$$\Psi_n \rightarrow e^{-iE_n t/\hbar} \Psi_n, \quad (2.28)$$

esse é um estado estacionário. Varia-se muito lentamente a direção do campo magnético, logo, a direção do spin também muda. No entanto, mantém-se a componente deste na direção do campo magnético constante no tempo. Assim, o número quântico inicial n não se altera com a mudança de campo magnético [36].

Na mecânica quântica, o conteúdo essencial da aproximação adiabática pode ser expresso em forma de teorema. O teorema adiabático afirma que deveria haver invariantes mecânicos sob pequenas variações empregadas externamente no sistema mecânico. A entropia em sistemas termodinâmicos e a integral da ação em sistemas de mecânica clássica são, como números quânticos em sistemas de mecânica quântica, exemplos de invariantes adiabáticos [36].

A aproximação adiabática aplicada a fenômenos cujos Hamiltonianos evoluem lentamente com o tempo consiste em aproximar as soluções da equação de Schrödinger para qualquer tempo por estados estacionários do Hamiltoniano instantâneo. Dessa forma, a função de onda em um dado tempo é contínua e suavemente convertida em um autoestado do Hamiltoniano correspondente em um tempo posterior [36].

Em particular, se o Hamiltoniano retorna à forma original, o sistema retornará ao estado inicial, a menos de um fator de fase. Esse fator de fase é composto por uma componente dependente do circuito em adição a componente familiar que acompanha a evolução de qualquer estado estacionário.

$$\Psi_n(t) = e^{i\gamma_n(t)} e^{i\theta_n(t)} \psi_n(t), \quad (2.29)$$

a primeira exponencial na equação (2.2) é a fase geométrica que tem origem na evolução adiabática e a segunda, a fase dinâmica, tem origem na equação de Schrödinger dependente do tempo [47, 46].

Se o Hamiltoniano retorna à sua forma inicial após um tempo T , a mudança de fase geométrica será

$$\gamma_n(T) = i \oint \psi_n | \vec{\nabla}_R \psi \cdot d\vec{R}, \quad (2.30)$$

R identifica os parâmetros que estão variando no Hamiltoniano. A equação (2.3) é uma integral de linha em torno de um circuito fechado no parâmetro do espaço e, em geral, não é zero. Obtida em 1984 por Berry [46], $\gamma_n(T)$ é chamada de fase de Berry e aqui surge a partir da mudança adiabática do parâmetro externo. A fase de Berry depende somente do trajeto escolhido, e não do quão rapidamente esse trajeto é feito (contanto que aconteça lentamente o suficiente para validar a hipótese adiabática) [47]. Enquanto, a fase acumulada dinâmica,

$$\theta_n(T) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T E_n(t') dt', \quad (2.31)$$

depende de forma decisiva do tempo decorrido [47].

Quantidades físicas envolvem o $|\Psi|^2$, assim, o fator de fase se cancela devido a fase da função de onda ser arbitrária. Consequentemente, a fase geométrica não teria significado físico, entretanto, Berry [46] mostrou que se um Hamiltoniano fosse conduzido em um circuito fechado, levando à sua forma original, a fase relativa não seria arbitrária e poderia ser medida [47].

Supondo que um feixe de partículas é dividido em dois, de forma que um feixe passe através de um potencial adiabaticamente alterado e o outro não. A função de onda terá a forma

$$\Psi = \frac{1}{2} \Psi_0 + \frac{1}{2} \Psi_0 e^{i\Gamma}, \quad (2.32)$$

em que Ψ_0 é a função de onda do feixe “direto” e Γ será a fase extra, esta em parte geométrica em parte dinâmica [47]. Nesse caso,

$$|\Psi|^2 = |\Psi_0|^2 \cos^2(\Gamma/2). \quad (2.33)$$

Assim, pode-se medir Γ através de pontos de interferência construtiva e destrutiva. A fase de Berry aparece em contextos mais gerais do que as circunstâncias em que foi descoberta por Berry, isto é, para uma evolução adiabática, cíclica e unitária. Samuel e Bhandari trataram desta generalização em [48].

Em [49], Aharonov e Anandan mostraram a existência de uma fase associada com a evolução cíclica, no sentido de que é a mesma para um número infinito de movimentos possíveis ao longo das curvas no espaço de Hilbert e os possíveis Hamiltonianos que propagam o estado ao longo destas curvas. Esta fase tende à fase de Berry no limite adiabático. Para um sistema eletricamente carregado, formula-se esta fase invariante sob transformação de calibre, com isso a fase de Aharonov-Bohm devida ao campo eletromagnético pode ser considerada como um

caso especial. Isso generaliza o resultado não invariante de calibre de Berry, que a fase de Aharonov-Bohm devido a um campo magnético estático é um caso especial de sua fase.

Capítulo 3

Efeito Aharonov-Bohm e Fase de Gouy

Neste capítulo, observamos as consequências deste efeito no padrão de interferência e como realizar medidas da diferença de fase de Gouy, através do efeito Aharonov-Bohm, variando o fluxo de campo magnético. Estudamos a interferência no experimento de fenda-dupla com aberturas de larguras diferentes para que a fase de Gouy não fosse cancelada no módulo quadrado. Consideramos a existência de um fluxo de campo magnético confinado entre as fendas, produzindo, assim, o efeito Aharonov-Bohm. Variando este fluxo, pudemos obter medidas da fase de Gouy.

3.1 Fase de Gouy e Ondas de Matéria

O deslocamento de fase de Gouy aparece em qualquer tipo de onda que é submetida a algum tipo de confinamento espacial transversal, seja por focalização ou por difração através de pequenas aberturas. Em 1890, Gouy estudou teoricamente e verificou experimentalmente o comportamento anômalo da fase de uma onda esférica difratada convergindo à medida que passa através de um foco [12, 13].

A mudança de fase sofrida por uma onda quando esta passa através de seu foco em propagação de $-\infty$ a $+\infty$ é igual a $\pi/2$ para ondas cilíndricas e π para ondas esféricas [50]. O deslocamento de fase de Gouy adquirido na propagação através de uma fenda depende dos tempos de propagação antes e depois da fenda e a fase total acumulada é $\pi/4$ ($\pi/2$) em uma dimensão (duas dimensões) [51].

A origem da anomalia de fase continua sendo um assunto de debate, com diferentes autores atribuindo-lhe causas diferentes. Por exemplo, tem sido associada com a relação de incerteza de Heisenberg [50], com a fase geométrica de Berry [52] e com propriedades geométricas de feixes Gaussianos [53].

Desde o trabalho original de Gouy, muitas observações de tal anomalia de fase foram relatadas. A fase de Gouy tem sido observada em diferentes tipos de ondas tais como: ondas de luz [17], água [14], acústica[15] e ondas de matéria [16]. Sendo que no contexto não-relativístico de ondas de matéria, a fase de Gouy foi primeiramente estudada por da I. G. da Paz e colaboradores [54], seguido por realizações experimentais [16]. Mais recentemente, a fase de Gouy foi investigada, também, no contexto relativístico por I. G. da Paz e Robert Ducharme [55] e como sua diferença influi na quantificação de trajetórias não-clássicas [30].

Schrödinger concebeu sua equação de onda tendo em mente a famosa relação de de Broglie, a partir da qual aprendemos a atribuir o comportamento complementar (onda ou partícula) aos objetos quânticos dependendo da situação experimental em questão. A fase de Gouy, presente nas soluções da equação paraxial de Helmholtz, que representa uma correção à óptica geométrica em relação à óptica ondulatória, também está presente nas soluções da equação de Schrödinger para uma partícula livre. Esta fase em ondas de matéria confirma o caráter ondulatório da entidade quântica descrita pela equação de Schrödinger [11].

O conhecimento, medição e, enfim, a exploração da fase de Gouy em uma variedade de contextos experimentais é crucial para o desenvolvimento de sistemas ópticos. Por exemplo, a fase de Gouy deve ser levada em conta para determinar as frequências de cavidades laser [17]. Conforme explicado, ondas de matéria são intuitivamente e matematicamente similares a sistemas de ondas de luz, portanto, esta fase também possui aplicações e implicações em muitos sistemas de onda de matéria. A fase de Gouy desempenha um papel importante na evolução de feixes de elétrons, dado que estes adquirem uma fase de Gouy adicional[16], por exemplo. Neste capítulo tratamos da medida da fase de Gouy através do efeito Aharonov-Bohm utilizando ondas eletrônicas.

3.2 Experimento da Fenda-Dupla de Young

O princípio da complementaridade de Bohr é um tópico fundamental em mecânica quântica e ainda é uma questão de debate [2], a princípio, acreditou-se que sob diferentes condições experimentais um objeto quântico exibiria apenas característica de onda ou partícula [56]. O experimento da fenda-dupla de Young é um arranjo prático para observar experimentalmente a dualidade onda-partícula em mecânica quântica. A experiência de Young, originalmente realizada com luz clássica, foi posteriormente realizado com fótons individuais (luz quântica) [4], elétrons [7], nêutrons [8], átomos[9], e grandes moléculas constituídas por dezenas de átomos [10]. O mesmo experimento realizado com um feixe eletrônico indica que elétrons possuem propriedades de onda de acordo com previsões da mecânica quântica [28].

Tal experiência é conceitualmente o método mais simples para demonstrar o princípio de superposição, já que o aparecimento de franjas de interferência a campo distante é inexplicável, a menos que se entenda que a partícula atravessa aparentemente ambas as fendas simultaneamente[3]. Como o princípio da superposição está no cerne da física quântica, muitas de suas características contra-intuitivas, como emaranhamento, não-localidade, dualidade onda-partícula podem ser demonstradas ou testadas usando um sistema de duas fendas [3, 1, 4, 5, 6].

No experimento de fenda-dupla, a amplitude na tela de detecção com ambas fendas abertas é geralmente obtida pela adição das amplitudes correspondentes às fendas livres uma por vez. Logo, a função de onda total, Ψ será dada pela superposição das funções de onda que descrevem a partícula atravessando a fenda 1, Ψ_1 , e a função de onda para uma partícula emergindo a partir da fenda 2, Ψ_2 .

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2. \quad (3.1)$$

Apresentada como um exemplo de princípio da superposição na mecânica quântica, a equação (3.1), entretanto, não está rigorosamente correta. As funções de onda Ψ , Ψ_1 e Ψ_2 são soluções da equação de Schrödinger para três diferentes condições de contorno (ou diferentes Hamiltonianos) [28].

A interpretação de Born da função de onda para um estado mecânico quântico estipula que a densidade de probabilidade de encontrar a partícula em uma posição \vec{r} e em um tempo t é dado por [57]

$$P(\vec{r}, t) = \Psi^*(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2. \quad (3.2)$$

No experimento da fenda-dupla de Young, a probabilidade de detecção é dada pela regra de Born

$$P_{12} = |\Psi_{12}|^2 = I = P_1 + P_2 + (\Psi_1^*\Psi_2 + \Psi_1\Psi_2^*), \quad (3.3)$$

em que, $P_1 = |\Psi_1|^2$ e $P_2 = |\Psi_2|^2$. A intensidade I é o módulo ao quadrado da amplitude de probabilidade. Conseqüentemente, a intensidade das ondas que chegam na tela de detecção na posição x é interpretada como a probabilidade a qual a partícula chegaria em x [58]. Observe que o resultado da experiência de duas fendas é dado pela soma dos resultados de cada fenda sozinha, mais um termo de interferência. $P_1 + P_2$ não reproduz a curva de intensidade gerada na tela de detecção devido ao lançamento de elétrons por uma fonte através de um aparato fenda-dupla quando ambas as fendas estão abertas (ver figura 3.1), o padrão é obtido com a inclusão do termo de interferência.

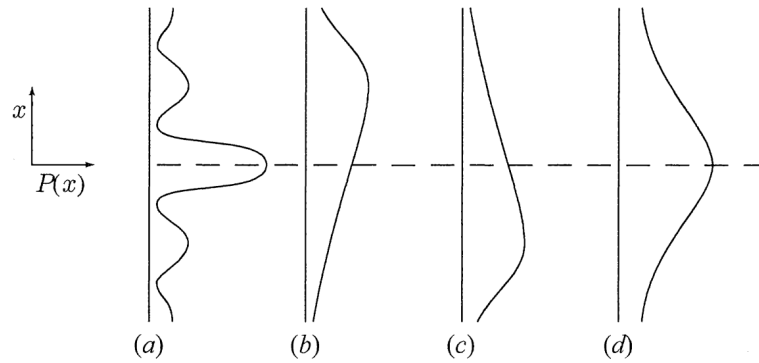


Fig. 3.1: (a) Curva que representa a intensidade obtida em um experimento de difração quando ambas as fendas estão abertas. (b) Probabilidade dos elétrons passando apenas pela fenda 1 chegar em uma posição x no detector. (c) Probabilidade quando apenas a fenda 2 está aberta. Se cada elétron, agora, pode passar através de um ou de outra fenda espera-se a curva (d)= $(b)+(c)$, entretanto, a curva obtida (d) é consideravelmente diferente de (a). Figura retirada de [58].

3.3 Medida da Fase de Gouy Através do Efeito Aharonov-Bohm

Como discutido no capítulo 2, o efeito Aharonov-Bohm produz um deslocamento nas franjas de interferência. Considere um experimento fenda-dupla onde inicialmente não há campo magnético. Em seguida, um fluxo de campo magnético Φ é inserido adiabaticamente em um cilindro impenetrável situado entre as fendas (ver figura 3.2). Os elétrons que são lançados pela fonte através da fenda-dupla não entram em contato com o campo magnético, no entanto, o potencial vetor \vec{A} é diferente de zero nesta região. Nesta seção, mostramos resultados analíticos para as funções de onda na experiência de fenda-dupla com aberturas de larguras Gaussianas diferentes, incorporando o efeito Aharonov-Bohm e o efeito da fase de Gouy, e propomos medir da fase de Gouy via efeito Aharonov-Bohm.

Utilizando um procedimento similar ao apresentado por I. G. da Paz e colaboradores, em [56], realizamos um tratamento em que empregamos propagadores não-relativísticos para um pacote de onda Gaussiano de uma partícula-livre. O propagador não-relativístico, que satisfaz a equação de Schrödinger com precisão, descreve a interferometria de onda de matéria neste regime experimental [8], e as aberturas gaussianas permitem a integração analítica direta.

Supomos um modelo unidimensional em que efeitos quânticos são manifestados apenas na direção x (ver figura 3.2). A fim de analisar o padrão de interferência analiticamente, consideramos que um pacote de onda Gaussiano coerente de largura transversal inicial σ_0 é produzido na fonte S e se propaga durante um tempo t antes de alcançar a fenda-dupla, que

possui abertura Gaussiana, com larguras diferentes β_1 e β_2 . Após atravessar a grade, os pacotes de onda se propagam durante um tempo τ antes que atinjam a tela de detecção dando origem ao padrão de interferência como uma função da coordenada transversal x . Quando os feixes são recombinados, possuem fases diferentes, $\pm \frac{e\Phi}{2\hbar c}$, o sinal positivo se aplica aos elétrons que se movem na direção do potencial vetor, ou seja, na mesma direção da corrente do solenóide (ver figura 3.2) [47]. Os feixes chegam ao anteparo fora de fase pela quantidade $\frac{e\Phi}{\hbar c}$ [ver equação (2.23)] [18].

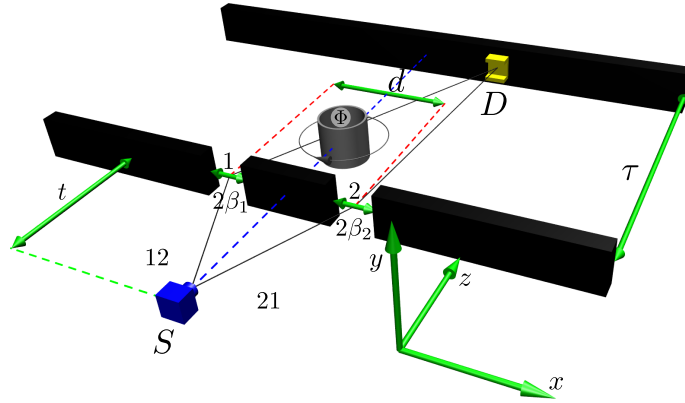


Fig. 3.2: Configuração esquemática do experimento fenda-dupla com um fluxo de campo Φ confinado atrás das fendas. Um pacote de onda Gaussiano de largura transversal σ_0 produzido em uma fonte S se propagando em um tempo t antes de atingir a grade e um tempo τ a partir da fenda-dupla até a tela de detecção. As aberturas das fendas são consideradas Gaussianas de larguras β_1 e β_2 separadas por uma distância d . Os caminhos 1 e 2 são caminhos clássicos (linha cinza).

Consideramos que a energia associada com o momento das partículas na direção z é muito alta, tal que a componente p_z seja bem definida, isto é, $\Delta P_z \ll p_z$. Desta forma, o movimento é clássico nessa direção com velocidade v_z e como a propagação é livre, as dimensões x , y , z desacoplam em uma dada localização longitudinal, e assim, $z = v_z t$. Podemos negligenciar flutuações estatísticas no tempo de propagação $\Delta t \ll t$. Esta aproximação deixa a equação de Schrödinger equivalente à equação paraxial de Helmholtz da óptica.

Portanto, baseando-se em [56], obtivemos as funções de onda correspondentes aos caminhos 1 e 2 ($\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots dx_n \equiv \int_{x_1 \cdots x_n}$)

$$\psi_{1,2}(x, t, \tau, \Phi) = \int_{x_i, x_0} K_{\tau}(x, t + \tau; x_j, t) F(x_j \mp d/2) K_t(x_j, t; x_0, 0) \psi_0(x_0), \quad (3.4)$$

com

$$K(x_j, t_j; x_0, t_0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t_j - t_0)}} \exp \left[\frac{im(x_j - x_0)}{2\hbar (t_j - t_0)} \right], \quad (3.5)$$

$$F(x_j) = \exp \left[-\frac{(x_j)^2}{2\beta_1^2} \right], \quad (3.6)$$

e

$$\psi_0(x_0) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_0}\sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{x_0^2}{2\sigma_0^2} \right). \quad (3.7)$$

Os propagadores $K_t(x_j, t; x_0, 0)$ e $K_\tau(x, t+\tau; x_j, t)$ são os propagadores livres para a partícula, e a função $F(x_j)$ descreve as funções transmissão das fendas, as quais são consideradas Gaussianas de largura β_1 (β_2) separadas por uma distância d ; σ_0 é a largura efetiva do pacote de onda emitido por uma fonte, m é a massa da partícula, e t (τ) é o tempo de propagação da fonte (fenda-dupla) até a fenda dupla (anteparo).

Após algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\psi_1(x, t, \tau, \Phi) = \frac{1}{\sqrt{\beta_1}\sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{(x - D_1/2)^2}{2B_1^2} \right] \exp \left(\frac{imx^2}{2\hbar R_1} - i\Delta_1 x + i\theta_1 + i\mu_1 + i\frac{e\Phi}{2\hbar c} \right), \quad (3.8)$$

em que,

$$B_1^2(t, \tau) = \frac{\left(\frac{1}{\beta_1^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 + \frac{m^2}{\hbar^2} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{r} \right)^2}{\left(\frac{m}{\hbar\tau} \right) \left(\frac{1}{\beta_1^2} + \frac{1}{b^2} \right)}, \quad (3.9)$$

$$R_1(t, \tau) = \tau \frac{\left(\frac{1}{\beta_1^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 + \frac{m^2}{\hbar^2} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{r} \right)^2}{\left(\frac{1}{\beta_1^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \left(\frac{t}{\sigma_0 b^2} \right) \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{r} \right)}, \quad (3.10)$$

$$D_1(t, \tau) = \frac{\left(1 + \frac{\tau}{r} \right)}{\left(1 + \frac{\beta_1^2}{b^2} \right)} d, \quad (3.11)$$

$$\Delta_1(t, \tau) = \frac{\tau \sigma_0^2 d}{2\tau_0 \beta_1^2 B_1^2}, \quad (3.12)$$

$$\theta_1(t, \tau) = \frac{md^2 \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{r} \right)}{8\hbar\beta_1^4 \left[\left(\frac{1}{\beta_1^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 + \frac{m^2}{\hbar^2} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{r} \right)^2 \right]}, \quad (3.13)$$

$$\mu_1(t, \tau) = -\frac{1}{2} \arctan \left[\frac{t + \tau \left(1 + \frac{\sigma_0^2}{\beta_1^2} \right)}{\tau_0 \left(1 - \frac{t\tau\sigma_0^2}{\tau_0^2 \beta_1^2} \right)} \right], \quad (3.14)$$

$$b^2(t) = \sigma_0^2 \left[1 + \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^2 \right], \quad (3.15)$$

e

$$r(t) = t \left[1 + \left(\frac{\tau_0}{t} \right)^2 \right]. \quad (3.16)$$

Para obter as expressões para a função de onda que passa através da fenda 2, substituímos os parâmetros d por $-d$, β_1 por β_2 e $+i\frac{e\Phi}{2\hbar c}$ por $-i\frac{e\Phi}{2\hbar c}$ nas expressões correspondendo a onda que passou através da fenda 1. Aqui, o parâmetro o parâmetro $B_1^2(t, \tau)$ é a largura do feixe para a propagação através de uma fenda única, $R_1(t, \tau)$ é o raio de curvatura das frentes de onda para a propagação através de um fenda única, $D_{1,(2)}(t, \tau)$ é o deslocamento do pacote de onda 1 (2, com $d \rightarrow -d$) com respeito a $x = 0$, separação entre os pacotes de onda produzida na fenda-dupla, $\Delta_1(t, \tau)$ desempenha o papel do número de onda, é a fase que varia linearmente com a coordenada transversa, $\theta_1(t, \tau)$ é uma fase que não depende da posição transversa x , esta fase aparece quando deslocamos a fenda de uma determinada distância da origem, $\mu_1(t, \tau)$ é a fase de Gouy para a propagação através de uma fenda única, não depende da posição transversa, $b^2(t)$ é a largura do feixe para a propagação livre. $r(t)$ é o raio de curvatura das frentes de onda para a propagação livre. $\tau_0 = \frac{m\sigma_0^2}{\hbar}$ é visto como um tempo característico para o “envelhecimento” do estado inicial.

A intensidade na tela de detecção é dada pela regra de Born [equação 3.2)]

$$\begin{aligned} I &= |\Psi_1 + \Psi_2|^2 \\ &= |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + 2|\Psi_1||\Psi_2| \cos \phi_{1,2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Para a configuração tratada aqui, a diferença de fase $\phi_{1,2}$ é dependente da largura das fendas, do fluxo de campo magnético Φ e inclui uma diferença de fase de Gouy. Esta diferença de fase é dada por

$$\phi_{1,2} = (\phi_1 - \phi_2) + (\mu_1 - \mu_2), \quad (3.18)$$

sendo que,

$$(\phi_1 - \phi_2) = \left(\frac{mx^2}{2\hbar R_1} - \frac{mx^2}{2\hbar R_2} \right) x^2 + (\Delta_1 - \Delta_2)x + (\theta_1 - \theta_2) + \frac{e\Phi}{\hbar c}. \quad (3.19)$$

Os termos com índice 1 (2) são relativos à propagação pela fenda 1 (fenda 2), com largura β_1 (β_2)

Se o fluxo encerrado pelo solenóide é um múltiplo inteiro da unidade de fluxo [equação

(2.18)], $\Phi_0 = \frac{hc}{e}$, não há mudança no padrão de interferência [ver figura 3.3 (a)]. No entanto, se o valor do fluxo é um semi-inteiro de Φ_0 , as posições das franjas claras e escuras são trocadas, a franja central torna-se escura [ver figura 3.3 (a) e (c)] [33]. As intensidades normalizadas para os casos descritos estão representadas na figura 3.3, onde observa-se que o envelope permanece imutável de acordo com [33]. Na figura 3.3, consideramos uma onda eletrônica e adotamos os seguintes parâmetros: $m = 9,11 \times 10^{-31}$ kg, $\sigma = 62,0$ μm , $d = 650$ μm , $\beta_1 = \beta_2 = 62,0$ μm , $t = 18,0$ μs e $\tau = 15,0$ μs .

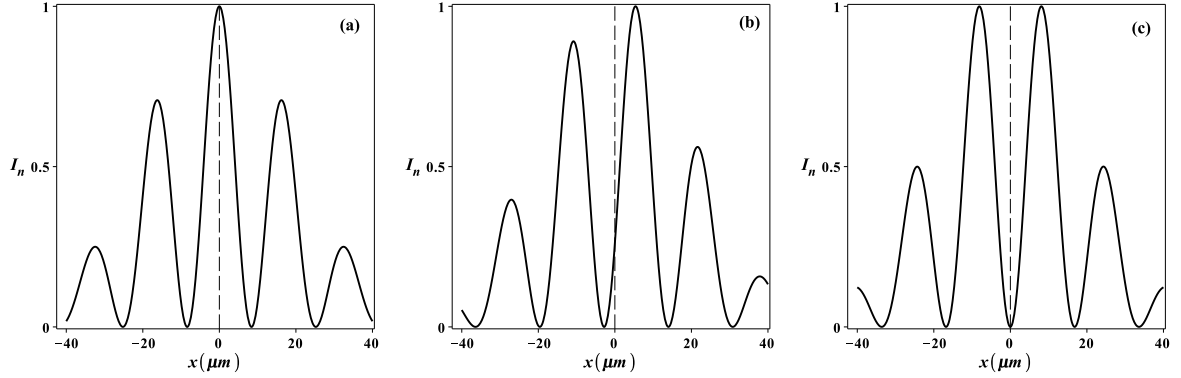


Fig. 3.3: (a) Intensidade sem perturbação, o fluxo de campo magnético utilizado foi um múltiplo inteiro de Φ_0 ($\Phi = \Phi_0$). (b) Deslocamento das franjas devido ao efeito Aharonov-Bohm, $\Phi = \Phi_0/4$ (múltiplo semi-inteiro de Φ_0), este valor de fluxo provocou um deslocamento de fase de $\pi/2$. (c) Deslocamento das franjas devido a um fluxo múltiplo semi-inteiro de Φ_0 ($\Phi = \Phi_0/2$), o deslocamento de fase foi de π .

Para medir a fase de Gouy através do efeito Aharonov-Bohm, nos baseamos na expressão (1.3) de [59] para calcular a intensidade relativa $I_r = I(x, t, \tau, \Phi)/F(x, t, \tau)$,

$$I_r(x, t, \tau, \Phi) = [1 + \nu(x, t, \tau) \cos \phi_{1,2}(x, \beta_1, \beta_2, \Phi)], \quad (3.20)$$

em que, $F(x) = |\Psi_1(x, t, \tau)|^2 + |\Psi_2(x, t, \tau)|^2$. Fixamos a posição em $x = 0$, isto é, ao longo do eixo de simetria da fenda-dupla, e o conjunto de parâmetros t, τ, β_1 . Variamos Φ , conseqüentemente, β_2 também é variado, de forma que a equação (3.19) se torne $(\phi_1 - \phi_2) = (\theta_1 - \theta_2) + \frac{e\Phi}{hc} = n\pi$ ($n = 2, 4, 6, \dots$). Assim, é possível calcular a diferença de fase de Gouy, pois esta diferença de fase, $(\phi_1 - \phi_2)$, não contribuirá para a franja de visibilidade e para estes parâmetros podemos observar apenas o efeito da fase de Gouy. Assim,

$$I_r(0, \beta_2, \Phi) = [1 + \nu(0, \beta_2, \Phi) \cos(\mu_1 - \mu_2)], \quad (3.21)$$

o que nos permite obter

$$(\mu_1 - \mu_2) = \arccos \left[\frac{I_r(0, \beta_2, \Phi) - 1}{\nu(0, \beta_2)} \right], \quad (3.22)$$

em que, de maneira similar à [59], podemos identificar $\nu(0, \beta_2) = \frac{2|\Psi_1(0)||\Psi_2(0, \beta_2)|}{|\Psi_1(0)|^2 + |\Psi_2(0, \beta_2)|^2}$ como a visibilidade. A partir da equação (3.22), pode-se obter experimentalmente a diferença da fase de Gouy, pois a intensidade relativa I_r e a visibilidade das franjas $\nu(x, t, \tau) = (I_{max} - I_{min}) / (I_{max} + I_{min})$ podem ser experimentalmente obtidas.

Um conjunto de valores de parâmetros que podem ser usados no experimento fenda-dupla para observar a fase de Gouy é apresentado na tabela 3.1. Fixamos os valores de $\beta_1 = 62,0$ nm, $t = 18,0$ μs , $\tau = 15,0$ μs e variamos o fluxo de campo magnético Φ . Mudando o fluxo de campo Φ , é possível obter $(\phi_1 - \phi_2) = n\pi$ ($n = 2, 4, 6, \dots$) se variarmos também a largura β_2 . Desta forma, fixamos a diferença de fase e escolhemos um dado Φ , associada a este deve existir uma determinada largura β_2 que mantenha $(\phi_1 - \phi_2) = n\pi$ ($n = 2, 4, 6, \dots$), os valores obtidos estão na tabela 3.1. A curva da diferença de fase de Gouy como função de Φ está representada na figura 3.4 (curva pontilhada), para os dados da tabela 3.1.

Tab. 3.1: Diferença de fase de Gouy como uma função do fluxo de campo magnético.

$\Phi(\mu\text{Wb})$	$(\theta_1 - \theta_2)(rad)$	$\beta_2(\mu\text{m})$	$(\mu_2 - \mu_1)(rad)$
1,2405	0,000392	0,281	0,0396
1,2400	0,00292	0,471	0,113
1,2390	0,00799	0,622	0,192
1,2380	0,0130	0,723	0,250
1,2350	0,0282	0,980	0,394
1,2330	0,0384	1,19	0,487
1,2320	0,0434	1,33	0,539
1,2305	0,0510	1,77	0,636
1,2300	0,0536	2,17	0,684

Os pontos foram obtidos numericamente através da equação (3.22). Ajustamos os pontos da figura 3.4 por um arco-tangente (curva contínua), para obtê-lo pensamos da seguinte forma: para a equação (3.22) ser dada por uma expressão tal como a equação (3.14), deve-se fazer $\arccos(\chi) = \arctan(\Upsilon)$, logo, $\Upsilon = \frac{\sqrt{1-\chi}}{\chi}$. Portanto, o ajuste é dado por

$$a \arctan \left[\frac{\sqrt{1-\chi^2}}{\chi} \right], \quad (3.23)$$

onde $a = \frac{1}{2}$ e $\chi = [-3.272 \cdot 10^{-9} \cdot b + \cos(-0.375 \cdot c^2 + 5.065 \cdot 10^6 \cdot d \cdot \Phi)]$. Utilizamos o software maple para que este nos fornecesse parâmetros que, auxiliados pelos valores obtidos pela equação (3.22) para $\beta_2 = 1$ μm e Φ dado em μWb , nos fornecessem um ajuste próximo a

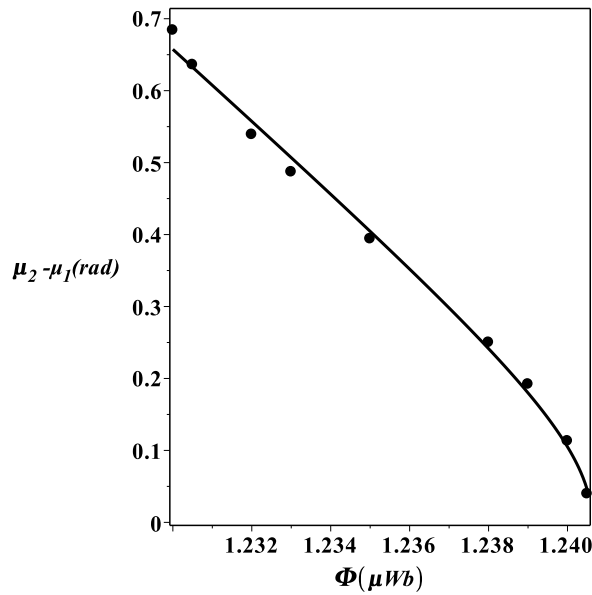


Fig. 3.4: Diferença de fase de Gouy com uma função do fluxo de campo magnético Φ para os dados da tabela 3.1. Os pontos foram obtidos numericamente calculando a intensidade e a visibilidade para cada Φ de forma que se obtenha $(\phi_1 - \phi_2) = n\pi$ ($n = 2, 4, 6, \dots$). A curva contínua é o ajuste (3.23).

curva real (curva pontilhada na figura 3.4). Desta forma, os parâmetros são $a = -9.543 \cdot 10^6$, $b = 19.381$ e $c = 20.346$. A curva pontilhada da figura 3.4 foi obtida através da variação de duas quantidades, Φ e β_2 (ver tabela 3.1). Desta forma, a curva de ajuste como função do fluxo Φ necessita da adição de alguns parâmetros para contrabalançar o fato de termos fixado β_2 .

Os resultados obtidos mostram que a fase de Gouy em ondas de matéria pode ser medida experimentalmente através do efeito Aharonov-Bohm e da geometria do experimento de fenda-dupla. Como podemos ver, a partir dos dados da tabela 3.1, há uma relação inversamente proporcional entre a diferença de fase de Gouy e o fluxo de campo magnético. Diminuindo o fluxo de campo magnético e aumentando a largura da fenda, aumentamos a precisão na medida da fase de Gouy e o contrário também é verdade.

Os pontos foram computados calculando-se numericamente a intensidade relativa e a visibilidade para cada valor de fluxo de campo magnético (Φ) e estes podem ser acessados experimentalmente no experimento de fenda-dupla. Portanto, este resultado pode ter uma importante aplicação na calibração do campo magnético e da largura da fenda no experimento fenda-dupla para produzir um padrão de interferência com simetria perfeita.

Através dos valores da diferença de fase de Gouy, pode-se verificar se o campo magnético é realmente blindado em um experimento de fenda-dupla, confirmando, assim, o efeito Aharonov-Bohm. Pode-se realizar medidas da fase de Gouy através da relação desta com a visibilidade,

como proposto em [56], sem a inclusão do fluxo confinado no experimento de fenda-dupla e comparar com as medidas desta diferença de fase quando um fluxo de campo magnético é incluído. Se as medidas forem diferentes, a fase $\phi_1 - \phi_2 = (\theta_1 - \theta_2) + \frac{e\Phi}{hc} \neq n\pi$ ($n = 2, 4, 6, \dots$) e, assim, $\phi_1 - \phi_2$ está contribuindo para as franjas de visibilidade. Como pode-se ter controle sobre a fase θ , pois depende apenas da geometria do experimento, o que deve estar contribuindo para as franjas de visibilidade é uma fase devido ao campo, que deve ser diferente da prevista para o caso ideal do fluxo blindado. Portanto, poderia se afirmar que há “fuga” de campo magnético. Se isto não acontece, o fenômeno não é produzido por efeitos clássicos como a força de Lorentz, confirmando, desta forma, que o efeito Aharonov-Bohm é um fenômeno puramente quântico. De outra maneira, pode-se comparar a diferença de fase de Gouy obtida em um experimento de fenda-dupla, com um campo confinado, com os valores teóricos obtidos na tabela 3.1.

Concluimos que a possibilidade de medir a fase de Gouy via efeito Aharonov-Bohm é uma maneira de evidenciar a natureza quântica desse efeito pois é conhecido que a fase de Gouy reflete o comportamento ondulatório da matéria. Mesmo que haja “vazamento” de campo, o que produzirá um deslocamento clássico das franjas de interferência via força de Lorentz, a existência da fase de Gouy relacionada com o fluxo magnético implicará em um deslocamento quântico das franjas via inclusão de uma fase na função de onda.

Capítulo 4

Efeito Aharonov-Bohm e de Trajetórias Não-Clássicas na Fenda-Dupla

No regime de campos distantes (regime de Fraunhofer), o princípio de superposição é uma aproximação relativamente boa[60]. No entanto, por exemplo, no experimento de interferência em uma fenda-dupla, a função de onda na tela com as duas fendas abertas não é exatamente igual à soma das funções de onda com as fendas abertas individualmente uma de cada vez. Os três casos correspondem a três condições de contorno diferentes [28], desta forma, o princípio da superposição é, no máximo, uma aproximação [61].

Recorrendo ao formalismo das integrais de Feynman, que envolve uma integração sobre todos os caminhos possíveis, Yabuki, em [28], realizou um estudo para detectar desvios do princípio da superposição. Yabuki esperava contribuições a partir de caminhos não-clássicos (trajetórias que não vão da fonte direto para o detector através de fenda), também chamadas de trajetórias exóticas [formam um laço (*loop*) através das fendas], tal como mostrado na figura 4.1.

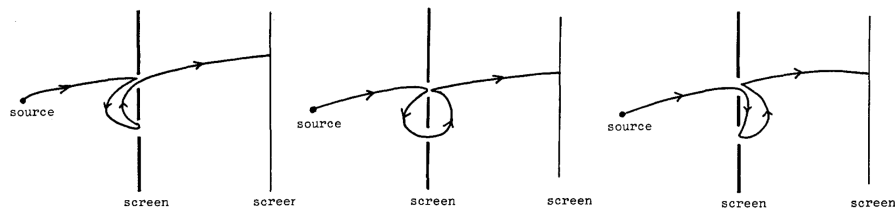


Fig. 4.1: Exemplos de caminhos não-clássicos. Figura retirada de [28].

As probabilidades associadas com trajetórias não-clássicas são muito menores que as associadas com trajetórias, ditas, clássicas (clássicas no sentido de tradicionais). Tais pequenos desvios foram discutidos por Sorkin [29], em que considerava termos de interferência de ordem

superior o que posteriormente confirmaria a violação da regra de Born [62].

Um exemplo bem conhecido de demonstração experimental direta de tais caminhos não clássicos envolve a medida da fase de Aharonov-Bohm [61, 31]. Este efeito é interpretado como a interferência entre as duas ondas que viajam ao redor do fluxo, no entanto, isto é apenas uma aproximação, pois a função de onda não possui um valor único. Berry, então, propôs que esta aproximação poderia ser corrigida incluindo ondas que realizam mais circuitos em torno da linha de fluxo [31]. A representação de “muitos-giros” de Berry [12] fornece uma explicação simples do efeito Aharonov-Bohm em termos de uma interferência entre as ondas-girantes que circulam o tubo de fluxo.

Neste capítulo, faremos um breve histórico sobre trajetórias não-clássicas, falaremos, a partir do ponto de vista conceitual, sucintamente sobre o formalismo de Feynman, visando a inclusão de outras trajetórias além das clássicas. Verificaremos os efeitos de trajetórias não-clássicas através do parâmetro de Sorkin, sem incluir o efeito Aharonov-Bohm. Finalmente, analisamos, teoricamente, e propomos medidas de efeitos de caminhos exóticos via efeito Aharonov-Bohm no experimento da fenda-dupla de Young com elétrons.

4.1 Trajetórias Não-Clássicas

A validade do princípio da superposição e da regra de Born [equação 3.2]) é bem aceita em mecânica quântica, no entanto, foi previsto que o padrão de intensidade formado numa experiência de tripla-fenda está aparentemente em contradição com a forma mais convencional do princípio de superposição [57, 60, 61, 63, 3]. Quem primeiro apontou, teoricamente, a existência de trajetórias não-clássicas foi Yabuki, no domínio não-relativístico em um experimento de fenda-dupla, avaliando desvios do princípio da superposição. No entanto, fez aproximações não físicas para calcular a contribuição devido a caminhos não-clássicos. Por conseguinte, os resultados e métodos não podem ser usados em uma situação experimental [28, 61].

O tratamento teórico sobre caminhos não-clássicos, estes são trajetórias como mostrado na figura 4.2, feito por Yabuki [28], estima o valor do termo de interferência não-linear no experimento de fenda-dupla de Young, empregando a abordagem de integrais de Feynman (contabilizando, assim, trajetórias além das que extremizam a ação). Ainda aplicando este método, calculou a quantidade $\Psi - \Psi_1 - \Psi_2$, termo utilizado para testar desvios provenientes do princípio de superposição.

Uma versão generalizada da mecânica quântica poderia permitir multi-caminhos, isto é, interferências de ordem superior levando, assim, a um desvio da teoria [57]. Acesso experimental para tais desvios não-lineares (termo de interferência de terceira ordem para a fenda-tripla, por

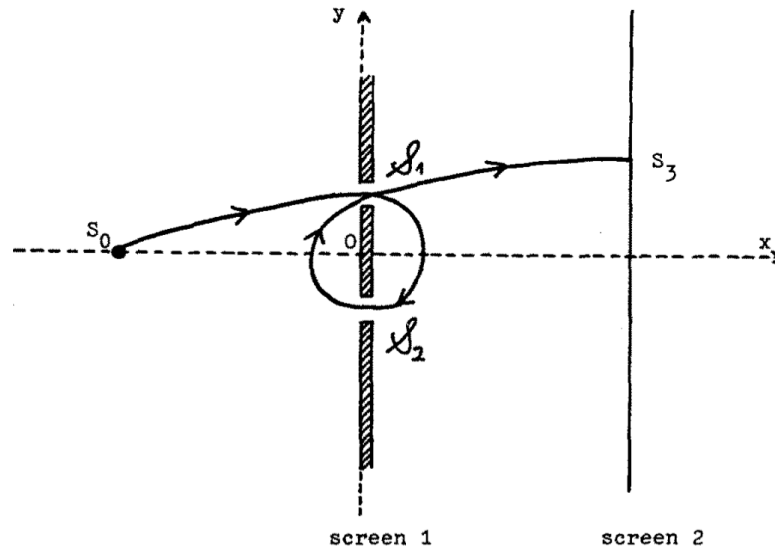


Fig. 4.2: Um trajeto típico que faz um laço (*loop*) através das duas fendas. Figura retirada de [28].

exemplo) foi discutido por Sorkin [29], em que propõem a fenda-tripla como um protótipo para mostrar que se uma forma de dinâmica mais geral que a mecânica quântica estiver em ação na natureza, esta deve se mostrar numa falha da regra de Born [equação 3.2)].

Posteriormente, corroborando a asserção feita por Sorkin, afirmou-se [61, 60] que a necessidade de correções devido a caminhos não-clássicos não se deve a falhas na regra de Born, mas à aproximação feita pelo princípio da superposição, quando inclui apenas funções de onda relativas a caminhos clássicos. No entanto, inspeções teóricas [64] e experimentais [62] envolvendo interferência quântica multi-ordem para testar a validade da regra de Born continuaram sendo realizadas. Recentemente, Fangzhou *et al.* [62] testaram experimentalmente a regra de Born e confirmaram a violação desta investigando o termo de interferência de terceira-ordem. Diferentes padrões de interferência são obtidos quando se inclui caminhos de ordem-superior ou exóticos. Logo, ambos os tipos de desvios são possíveis, tantos os provindo de trajetórias não-clássicas, quanto os da violação da regra de Born[64].

A regra de Born sempre limita a complexidade de qualquer efeito envolvendo superposições de um número arbitrário de funções de onda a uma soma de termos que denotam a interferência entre pares de funções de onda. Possíveis contribuições resultantes de trajetórias não-clássicas e de termos de interferência de ordem superior, isto é, contribuições provindas de caminhos envolvendo as três fendas, podem ser quantificadas pelo então chamado parâmetro de Sorkin [29, 3].

$$\Xi = P_{123} - P_{12} - P_{23} - P_{13} - P_1 - P_2 - P_3. \quad (4.1)$$

Note que a expressão não inclui um termo de probabilidade que envolve as três fendas, mas é inteiramente descrita por probabilidades envolvendo, apenas, uma e duas fendas.

Sinha *et al.* realizaram um experimento fenda-tripla com fótons em que mostraram que o fator de Sorkin ϵ pode ser avaliado experimentalmente [57]. Uma medida diferente de zero de Ξ sugere uma violação da regra de Born. Raedt, através de um tratamento numérico das equações de Maxwell, para modelos realistas de dispositivos de três fendas, demonstra que o termo de interferência da fenda-tripla é diferente de zero, mas mesmo com $X_i \neq 0$ não se pode concluir que a regra de Born não é estritamente válida [60].

A hipótese de Sinha e seus colaboradores, no trabalho da referência [57], de que a interferência de três fendas é aproximadamente zero é falsa, pois requer a perda da correspondência um-para-um entre os símbolos na teoria matemática e as diferentes configurações experimentais. *Grosso modo*, requer que a intensidade registrada quando as três fendas estão abertas seja igual a intensidade para cada fenda sozinha menos a intensidade quando estas estão abertas duas a duas por vez. Abrindo, assim, caminho para conclusões que não podem ser derivadas da teoria propriamente dita [60].

Em um trabalho posterior [61], Sinha *et al.* afirmaram que $\Xi \neq 0$, ao invés do termo de interferência tripla, é uma consequência da presença de trajetórias não-clássicas. Através do formalismo de integrais de caminho quantificaram as contribuições de caminhos não-clássicos em experiências de interferência que fornece um desvio mensurável da aplicação do princípio da superposição. Concluíram que a contribuição correspondente a caminhos não-clássicos para a intensidade na tela de detecção é pequena, contudo, é finita. Isto confirmou-se, em [63], com a solução numérica exata da equação de onda.

A primeira observação experimental de trajetórias exóticas como caminhos adicionais para a luz foi realizada por Boyd *et al.* [3], onde fizeram medidas diretas das contribuições destes caminhos para a formação de franjas de interferência óptica. Eles realizaram este feito aumentando os campos-próximos (regime Fresnel) eletromagnéticos na vizinhança das fendas. Este processo aumenta a probabilidade de ocorrência dessas trajetórias exóticas, demonstrando que elas estão relacionadas a componente de campo-próximo da função de onda do fóton.

Estes trabalhos [57, 61, 63, 30, 3] utilizam o parâmetro de Sorkin para quantificar a contribuição de trajetórias em forma de *loop*. I. G. da Paz e colaboradores [30] sugerem que devido a conexão entre a fase de Gouy e o parâmetro de Sorkin, deve ser mais útil detectar efeitos de caminhos não-clássicos via medida da fase de Gouy. Mais recentemente, Quach também apresentou uma outra forma de quantificar contribuições de caminhos não-clássicos ou de ordem-superior, ele propõe um parâmetro alternativo que seria uma medida exata da violação da regra de Born em um experimento fenda-dupla [64]. Devido a relação de caminhos enlaçando

a fenda e o efeito Aharonov-Bohm [31], propomos quantificar efeitos de trajetórias não-clássicas através do efeito Aharonov-Bohm.

4.1.1 Análise Conceitual do Formalismo de Feynman

Em mecânica clássica uma trajetória definida no plano xt é associada com o movimento da partícula; em contraste, em mecânica quântica todas as trajetórias possíveis devem desempenhar um papel, incluindo aqueles que não têm qualquer semelhança com trajetórias clássicas [36].

Uma forma de expressar a condição que determina um caminho particular dentre todos os outros possíveis caminhos a ser seguido por uma partícula é o princípio de mínima ação. Existe uma certa quantidade S que pode ser computada para cada caminho. O caminho clássico é assim denominado se S é um extremo, isto é, $\delta S = 0$. Em geral, ocorre a condição de mínimo. A ação S é dada por

$$S = \int L(\dot{x}, x, t) dt, \quad (4.2)$$

em que L é a lagrangiana para o sistema. Por conseguinte, caminhos que não extremizam a ação são chamados de caminhos não-clássicos [58].

De acordo com o formalismo de integrais de caminho, a amplitude de probabilidade para viajar de um ponto a a b deve levar em conta todos os caminhos possíveis, com a ponderação adequada, e não apenas os que extremizam a ação. Cada caminho contribui com igual magnitude para amplitude total, porém com fases diferentes. A fase da contribuição para um determinado caminho é a ação para esse caminho em unidades do quantum de ação \hbar . Desta forma, a probabilidade de ir de um ponto x_a em um tempo t_a para um ponto x_b em um tempo t_b é o quadrado do módulo de uma amplitude $K(b, a)$ para ir de a a b [58]

$$P(b, a) = |K(b, a)|^2. \quad (4.3)$$

Esta amplitude é a soma das contribuições $\phi[x(t)]$ para cada caminho

$$K(b, a) = \sum_{\text{todo os caminhos}} \phi[x(t)], \quad (4.4)$$

a contribuição de um caminho possui uma fase proporcional à ação S

$$\phi[x(t)] = \text{const} e^{(i\hbar)S[x(t)]}. \quad (4.5)$$

Como $\hbar \rightarrow 0$, a exponencial $e^{is/\hbar}$ oscila muito rapidamente, então a tendência é cancelar as

contribuições de caminhos vizinhos. Isto ocorre porque $e^{is/\hbar}$ para algum caminho definido e $e^{is/\hbar}$ para um caminho levemente diferente têm fases que são muito diferentes, devido a pequenez de \hbar . Assim quando $\hbar \rightarrow 0$ não são muito os caminhos que contribuem [36]. Em um nível atômico S pode ser comparado com \hbar , logo, deve-se levar em conta todas as trajetórias. Nenhuma trajetória particular é de esmagadora importância [58].

No entanto, há uma exceção importante, considere um caminho que minimiza a ação; se tentarmos deformar um pouco um caminho a partir do caminho clássico, a ação resultante ainda será igual à ação mínima para deformações de primeira ordem. Isso significa que a fase $e^{iS/\hbar}$ não varia muito, uma vez que o caminho foi desviado ligeiramente do clássico (mesmo se \hbar é pequeno). Como resultado, enquanto permanece-se próximo do caminho clássico, a interferência construtiva entre vizinhos é possível. No limite clássico, $\hbar \rightarrow 0$, as principais contribuições devem, então, resultar de uma tira muito estreita contendo o caminho clássico [36].

O *kernel* $K(x_b, t_b, x_a, t_a) = \Psi(x_b, t_b)$, conhecido como propagador, é na realidade uma função de onda. A notação $K(x_b, t_b, x_a, t_a)$ nos dá mais informação, em particular, que esta é a amplitude para um caso especial em que a partícula veio de (x_a, t_a) . Assim,

$$\Psi(x_b, t_b) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x_b, t_b, x_c, t_c) \Psi(x_c, t_c) dx_c, \quad (4.6)$$

a amplitude total para chegar em (x_b, t_b) [que é, $\Psi(x_b, t_b)$], é a soma, ou a integral, sobre todos os possíveis valores de x_c da amplitude total para chegar no ponto (x_c, t_c) [que é, $\Psi(x_c, t_c)$] multiplicado pela amplitude de ir de c para b [que é, $K(x_b, t_b, x_c, t_c)$] [58].

Contudo, o problema de somar sobre todos os caminhos possíveis é pouco manejável e ainda precisa ser resolvido com precisão. Sinha e colaboradores, em [61], argumentam que uma boa aproximação pode ser alcançada considerando dois tipos de caminhos: caminhos com segmentos de trajetória direta da fonte à fenda e então para a tela de detecção; E caminhos que compõem o segmento direto de trajetória da fonte para a fenda e então para outra fenda, antes de bater na tela de detecção [61]. Em nossas investigações sobre efeitos de trajetórias não-clássicas consideramos os dois tipos de caminhos.

A formulação espaço-temporal de Feynman baseada em integrais de caminho não é conveniente para tratar problemas em mecânica quântica não-relativística. Todavia, esta abordagem, é extremamente interessante do ponto de vista conceitual. Impondo um conjunto de requisitos sensíveis à uma teoria física, somos inevitavelmente levados à formulação usual da mecânica quântica [36].

4.1.2 Trajetórias Não-Clássicas no Experimento de Fenda Dupla

Nesta subseção, mostramos resultados analíticos para as funções de onda de caminhos clássicos e não-clássicos na experiência de fenda-dupla, enquanto mantivemos o controle das fases para avaliar seu papel no padrão de interferência. Utilizando um procedimento similar ao apresentado por I. G. da Paz e colaboradores [30] para o aparato fenda-tripla incluindo trajetórias não-clássicas, apresentamos, como na seção 3.3, um tratamento em que empregamos propagadores não-relativísticos para um pacote de onda Gaussiano de uma partícula-livre. Sendo estes propagadores adaptados para interferência por fenda dupla incluindo caminhos não-clássicos. Estimamos desvios produzidos por trajetórias exóticas através do parâmetro de Sorkin.

A soma sobre todos os caminhos possíveis permitem caminhos exóticos, como os ilustrados na figura 4.3. Quanto mais sinuosos os caminhos ao redor da fenda forem, maior será a ordem de deformação em relação a trajetória clássica. Dado que a exceção para que a exponencial $e^{is/\hbar}$ não oscile muito rapidamente cancelando, assim, as contribuições dos caminhos mais exóticos é que a deformação seja de primeira ordem. Conseqüentemente, tais caminhos contribuem menos para o padrão de interferência. Calculamos as funções de onda correspondentes para estes caminhos a fim de analisar seu efeito no padrão de interferência.

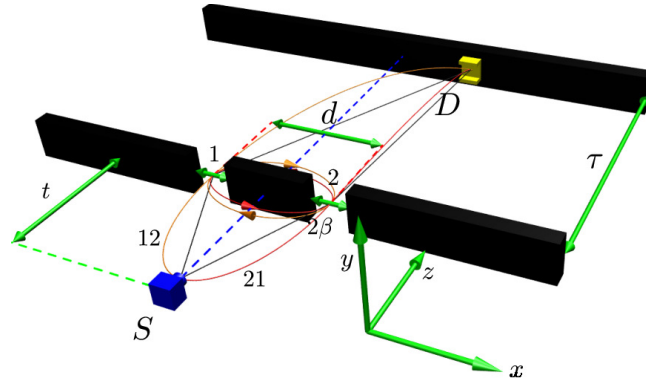


Fig. 4.3: Configuração esquemática do experimento fenda-dupla. Um pacote de onda Gaussiano de largura transversa σ_0 produzido em uma fonte S se propagando em um tempo t antes de atingir a grade e um tempo τ a partir da fenda-dupla até a tela de detecção. As aberturas das fendas são consideradas Gaussianas de largura β separadas por uma distância d . Os caminhos 1 e 2 são caminhos clássicos (linha cinza) e as trajetórias 12 (linha laranja ou *loop* horário) e 21 (linha vermelho ou *loop* anti-horário) são os caminhos não-clássicos.

Realizando um tratamento semelhante ao utilizado em [30], obtivemos as funções de onda correspondentes aos caminhos clássicos 1 e 2 ($\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots dx_n \equiv \int_{x_1 \cdots x_n}$) [ver equações (3.4-3.7)]

$$\psi_{1,2}(x, t, \tau) = \int_{x_i, x_0} K_\tau(x, t + \tau; x_j, t) F(x_j \mp d/2) K_t(x_j, t; x_0, 0) \psi_0(x_0),$$

com

$$K(x_j, t_j; x_0, t_0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t_j - t_0)}} \exp \left[\frac{im(x_j - x_0)}{2\hbar(t_j - t_0)} \right],$$

$$F(x_j) = \exp \left[-\frac{(x_j)^2}{2\beta_1^2} \right],$$

e

$$\psi_0(x_0) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_0} \sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{x_0^2}{2\sigma_0^2} \right).$$

As funções de onda associadas com as trajetórias não-clássicas (caminhos 12 e 21) são dadas por

$$\begin{aligned} \psi_{nc}(x, t, \tau) = & \int_{x_0, x_1, x_3, x_4} K_\tau(x, \tau + t; x_3, t) F(x_3 \mp d/2) F(x_2 \pm d/2) \\ & \times K(1 \rightarrow 2; 2 \rightarrow 1) F(x_1 \mp d/2) K_t(x_1, t; x_0, 0) \psi_0(x_0), \end{aligned} \quad (4.7)$$

em que,

$$K(1 \rightarrow 2; 2 \rightarrow 1) = \sqrt{\frac{m}{4\pi i \hbar \epsilon}} \exp \left\{ \frac{im}{4\hbar \epsilon} \left[(x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 \right] \right\}, \quad (4.8)$$

é o propagador livre que propaga da fenda 1 até a 2 e da 2 até a 1 novamente. ϵ é o tempo gasto de uma até a próxima fenda e é determinado pela incerteza do momento na direção x , isto é, $\epsilon = \frac{d}{\Delta v_x}$ ($\Delta v_x = \frac{\Delta p_x}{m}$), em que $\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2}$, p_x é operador momento na direção x . Esta estimativa é compatível com a propagação que constrói a trajetória não-clássica. Portanto, utilizamos neste trabalho a flutuação no tempo ϵ dada pela flutuação na velocidade ao longo da direção quântica x para calcular contribuições de trajetórias exóticas, ao invés de adotar o formalismo das integrais de caminho de Feynman. Um argumento similar foi usado por Dahlsten em [65] onde, dinâmicas não-clássicas baseadas no princípio da incerteza são consideradas na interferometria. A partir das funções de onda clássicas calcula-se a incerteza no momento e obtém-se para ϵ o seguinte resultado:

$$\epsilon = \frac{\hbar^2}{2\beta^2} \left(\frac{m^2 \beta^4 + 2m^2 \beta^2 \sigma_0^2 + m^2 \sigma_0^4 + \hbar^2 t^2}{m^2 \beta^2 \sigma_0^2 + m^2 \sigma_0^4 + \hbar^2 t^2} \right) \quad (4.9)$$

Após algumas longas manipulações algébricas, obtemos

$$\Psi_1(x, t, \tau) = A \exp(C_1 x^2 + C_2 x + C_3) \exp(i\alpha x^2 + i\gamma x + i\theta + i\mu), \quad (4.10)$$

$$\Psi_2(x, t, \tau) = A \exp(C_1 x^2 - C_2 x + C_3) \exp(i\alpha x^2 - i\gamma x + i\theta + i\mu), \quad (4.11)$$

e

$$\Psi_{12}(x, t, \tau) = A_{nc} \exp(C_{1nc} x^2 + C_{2nc} x + C_{3nc}) \exp(i\alpha_{nc} x^2 + i\gamma_{nc} x + i\theta_{nc} + i\mu_{nc}), \quad (4.12)$$

$$\Psi_{21}(x, t, \tau) = A_{nc} \exp(C_{1nc} x^2 - C_{2nc} x + C_{3nc}) \exp(i\alpha_{nc} x^2 - i\gamma_{nc} x + i\theta_{nc} + i\mu_{nc}). \quad (4.13)$$

Todos os coeficientes apresentados nas equações (4.10)-(4.13) estão escritos no apêndice A. Para identificar quantidades relacionadas às trajetórias não-clássicas utilizamos o índice (nc), não utilizamos subscrito para quantidades relacionadas às trajetórias clássicas. As fases $\mu_{nc}(t, \tau)$ e $\theta_{nc}(t, \tau)$ não dependem da posição transversa x , isto é, são fases axiais. A fase $\theta_{nc}(t, \tau)$ surge quando deslocamos a fenda de uma dada distância da origem, diferente da fase de Gouy μ , que surge devido ao confinamento transversal que uma onda sofre.

A intensidade total em uma posição x no detector incluindo trajetórias não-clássicas é dada pela regra de Born

$$\begin{aligned} I_{nc} &= |\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_{12} + \Psi_{21}|^2 \\ &= |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + |\Psi_{12}|^2 + |\Psi_{21}|^2 + 2|\Psi_1||\Psi_2| \cos \phi_{1,2} \\ &\quad + 2|\Psi_1||\Psi_{12}| \cos \phi_{1,12} + 2|\Psi_1||\Psi_{21}| \cos \phi_{1,21} \\ &\quad + 2|\Psi_2||\Psi_{12}| \cos \phi_{2,12} + 2|\Psi_2||\Psi_{21}| \cos \phi_{2,21} \\ &\quad + 2|\Psi_{12}||\Psi_{21}| \cos \phi_{12,21}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

em que,

$$\phi_{1,2} = 2\gamma x, \quad (4.15)$$

$$\phi_{1,12} = (\alpha - \alpha_{nc})x^2 + (\gamma - \gamma_{nc})x + (\theta - \theta_{nc}) + (\mu - \mu_{nc}), \quad (4.16)$$

$$\phi_{1,21} = (\alpha - \alpha_{nc})x^2 + (\gamma + \gamma_{nc})x + (\theta - \theta_{nc}) + (\mu - \mu_{nc}), \quad (4.17)$$

$$\phi_{2,12} = (\alpha - \alpha_{nc})x^2 + (-\gamma - \gamma_{nc})x + (\theta - \theta_{nc}) + (\mu - \mu_{nc}), \quad (4.18)$$

$$\phi_{2,21} = (\alpha - \alpha_{nc})x^2 + (-\gamma + \gamma_{nc})x + (\theta - \theta_{nc}) + (\mu - \mu_{nc}) \quad (4.19)$$

e

$$\phi_{12,21} = 2\gamma_{nc}x \quad (4.20)$$

são fases relativas de Ψ_1 e Ψ_2 , Ψ_1 e Ψ_{12} , Ψ_1 e Ψ_{21} , Ψ_2 e Ψ_{12} , Ψ_2 e Ψ_{21} e Ψ_{12} e Ψ_{21} , respectivamente.

Para quantificar os desvios na intensidade produzidos pela existência de caminhos não-clássicos, utilizamos o parâmetro de Sorkin normalizado[61, 63]

$$\begin{aligned} \kappa I_0 &= I_{nc} - I_c \\ &= |\psi_{12}|^2 + |\psi_{21}|^2 + 2|\psi_1||\psi_{12}| \cos \phi_{1,12} + 2|\psi_1||\psi_{21}| \cos \phi_{1,21} \\ &\quad + 2|\psi_2||\psi_{12}| \cos \phi_{2,12} + 2|\psi_2||\psi_{21}| \cos \phi_{2,21}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

I_0 é a intensidade no máximo central e I_c é a intensidade quando apenas caminhos clássicos são considerados.

Para construir o gráfico da intensidade normalizada e do parâmetro de Sorkin (ver figura 4.4), consideramos uma onda eletrônica de comprimento de onda $\lambda \approx 50$ pm e adotamos os seguintes parâmetros: $m = 9,11 \times 10^{-31}$ kg, $\sigma = 62,0$ nm, $d = 650$ nm, $\beta = 62,0$ nm, $t = 18,0$ ns, $\tau = 15,0$ ns e $\epsilon = 0,492$ ns. Para este valor de comprimento de onda, a velocidade de propagação na direção z é $v_z \approx 1,46 \times 10^7$ m/s, que corresponde a distâncias de propagação muito maiores que o comprimento de onda, ou seja, $z_t \approx 26,3$ cm e $z_t \approx 21,9$ cm, respectivamente, antes e após a fenda-dupla.

A intensidade I_n e o parâmetro de Sorkin κ normalizados para um feixe de elétrons estão representados na figura 4.4, como funções de x . A forma da intensidade para campo distante ou regime de Fraunhofer obtida está de acordo com os resultados obtidos para ondas de matéria [7, 8, 9, 10]. Observamos que se levarmos em conta apenas um caminho não-clássico (trajetória não-clássica horária), o parâmetro de Sorkin tem um aspecto assimétrico (curva pontilhada). Quando incluímos as duas trajetórias exóticas da figura 4.3, recuperamos a simetria do parâmetro de Sorkin e verificamos um ligeiro aumento deste (curva contínua). Utilizando uma abordagem simplificada, obtivemos o parâmetro de Sorkin da ordem de 10^{-8} , que concorda com

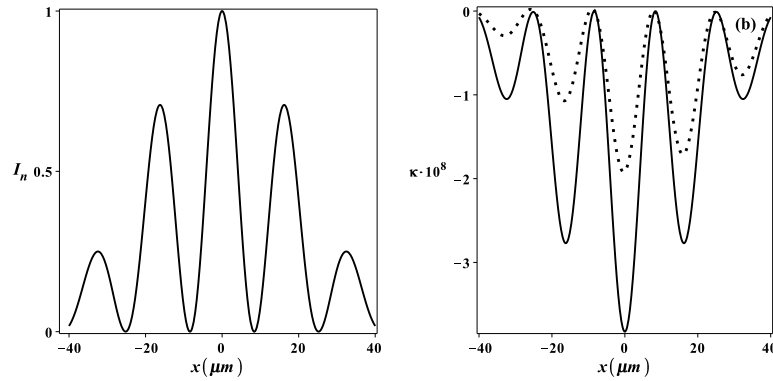


Fig. 4.4: (a) Intensidade normalizada, e (b) parâmetro de Sorkin como uma função de x para uma onda eletrônica. Para a linha pontilhada consideramos apenas a trajetória não-clássica no sentido horário.

os valores obtidos em [61].

4.2 Medidas de Efeitos de Trajetórias Não-Clássicas via Efeito Aharonov-Bohm

Berry propôs a representação de “ondas-girantes” para explicar o efeito Aharonov-Bohm[18], em termos da interferência entre as ondas passando de cada lado do fluxo[31], no intuito de obter funções de onda com valores únicos. Neste caso, a relação entre caminhos exóticos e o efeito Aharonov-Bohm surge devido a presença do cilindro impenetrável, que torna o espaço multiplamente conectado (ver subseção 2.3). De modo que caminhos que circundam a origem diferentes vezes não podem ser deformados um no outro e dão origem a deslocamentos de fase que levam em conta os diferentes circuitos. Nesta seção, quantificamos os efeitos das trajetórias exóticas por meio do efeito Aharonov-Bohm.

Incluimos caminhos exóticos, como os caminhos 12 (linha laranja) e 21 (linha vermelha), além das trajetórias clássicas (linha cinza) representadas na figura 4.5 e inserimos um fluxo de campo magnético Φ , idealmente confinado, atrás da fenda provocando o efeito Aharonov-Bohm. No entanto, ao invés de utilizar o parâmetro de Sorkin[29] para observar efeitos de trajetórias não-clássicas, utilizamos o efeito Aharonov-Bohm no experimento fenda-dupla. O tratamento para obter as funções de onda analiticamente é semelhante ao empregado na subseção 4.1.2, acrescentando a fase de Aharonov-Bohm às funções de onda referente a cada caminho.

A intensidade no detector, incluindo trajetórias não-clássicas e o efeito Aharonov-Bohm, é

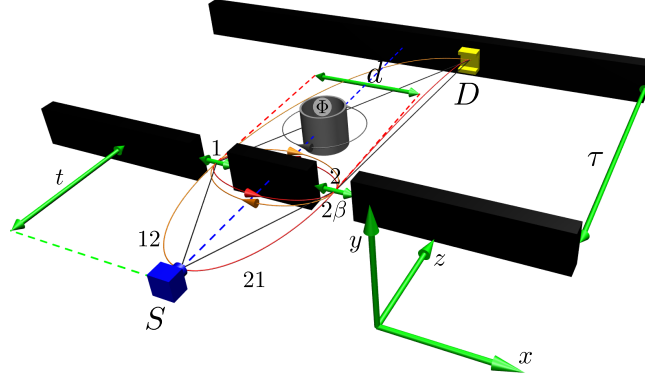


Fig. 4.5: Configuração esquemática do experimento fenda-dupla com um fluxo de campo Φ confinado atrás das fendas. Um pacote de onda Gaussiano de largura transversa σ_0 produzido em uma fonte S se propagando em um tempo t antes de atingir a grade e um tempo τ a partir da fenda-dupla até a tela de detecção. As aberturas das fendas são consideradas Gaussianas de largura β separadas por uma distância d . Os caminhos 1 e 2 são caminhos clássicos (linha cinza) e as trajetórias 12 (linha laranja ou *loop* horário) e 21 (linha vermelho ou *loop* anti-horário) são os caminhos não-clássicos.

dada pela equação (4.14)

$$\begin{aligned}
 I_{nc} &= |\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_{12} + \Psi_{21}|^2 \\
 &= |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + |\Psi_{12}|^2 + |\Psi_{21}|^2 + 2|\Psi_1||\Psi_2| \cos \phi_{1,2} \\
 &\quad + 2|\Psi_1||\Psi_{12}| \cos \phi_{1,12} + 2|\Psi_1||\Psi_{21}| \cos \phi_{1,21} \\
 &\quad + 2|\Psi_2||\Psi_{12}| \cos \phi_{2,12} + 2|\Psi_2||\Psi_{21}| \cos \phi_{2,21} \\
 &\quad + 2|\Psi_{12}||\Psi_{21}| \cos \phi_{12,21},
 \end{aligned}$$

entretanto, as diferenças de fase (4.15)-(4.20) têm o acréscimo da fase relativa ao efeito Aharonov-Bohm.

$$\phi_{1,2} = \left(2\gamma x + \frac{e\Phi}{\hbar c} \right), \quad (4.22)$$

$$\phi_{1,12} = (\alpha - \alpha_{nc})x^2 + (\gamma - \gamma_{nc})x + (\theta - \theta_{nc}) + (\mu - \mu_{nc}) - \frac{e\Phi}{\hbar c}, \quad (4.23)$$

$$\phi_{1,21} = (\alpha - \alpha_{nc})x^2 + (\gamma + \gamma_{nc})x + (\theta - \theta_{nc}) + (\mu - \mu_{nc}) + \frac{2e\Phi}{\hbar c}, \quad (4.24)$$

$$\phi_{2,12} = (\alpha - \alpha_{nc})x^2 + (-\gamma - \gamma_{nc})x + (\theta - \theta_{nc}) + (\mu - \mu_{nc}) - \frac{2e\Phi}{\hbar c}, \quad (4.25)$$

$$\phi_{2,21} = (\alpha - \alpha_{nc})x^2 + (-\gamma + \gamma_{nc})x + (\theta - \theta_{nc}) + (\mu - \mu_{nc}) + \frac{e\Phi}{\hbar c}, \quad (4.26)$$

e

$$\phi_{12,21} = \left(2\gamma_{nc}x + \frac{3e\Phi}{\hbar c} \right). \quad (4.27)$$

Quando o feixe é dividido pela fenda, a função de onda correspondente aos elétrons que se movem no sentido da corrente do solenóide (ver figura 4.5) adquire uma fase igual a $\frac{e\Phi}{2\hbar c}$. Para obter as diferenças de fase de Aharonov-Bohm que envolvem trajetórias exóticas, podemos pensar da seguinte forma: sempre que a trajetória atravessa uma fenda, a função de onda adquire uma fase $\frac{e\Phi}{2\hbar c}$ ($-\frac{e\Phi}{2\hbar c}$) se o sentido da trajetória for horário (se o sentido da trajetória for anti-horário, contrário à corrente do solenóide). Logo, o caminho 12 (21), por exemplo, que inicialmente passa pela fenda 1 (2), 2 (1) e por último 1 (2) novamente, fornece à função de onda uma fase $\frac{3}{2}\frac{e\Phi}{\hbar c}$ ($-\frac{3}{2}\frac{e\Phi}{\hbar c}$). Assim, a diferença de fase entre os caminhos 12 e 21, devido ao efeito Aharonov-bohm, será $\frac{3e\Phi}{\hbar c}$ [ver equação (4.27)].

4.2.1 Parâmetro de Sorkin

Antes de analisar efeitos de trajetórias não-clássicas através da intensidade relativa observamos como o parâmetro de Sorkin varia com o fluxo de campo magnético. Utilizamos a equação (4.21) com as diferenças de fase (4.22)-(4.27).

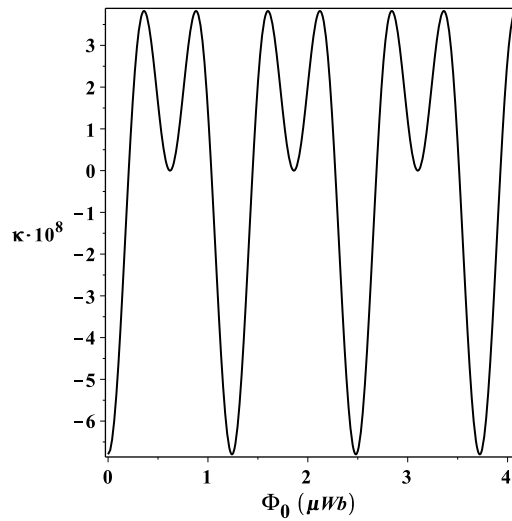


Fig. 4.6: Parâmetro de Sorkin como função do fluxo de campo magnético, em unidades de fluxo (Φ_0) [equação (2.18)], em $x = 0$.

Observe na figura 4.6 o parâmetro de Sorkin como função do fluxo de campo magnético em $x = 0$. Na figura 4.7 temos o parâmetro de Sorkin como função da posição e do fluxo de campo magnético, em unidades de fluxo (Φ_0) [equação (2.18)]. O efeito de caminhos exóticos,

4.2 Medidas de Efeitos de Trajetórias Não-Clássicas via Efeito Aharonov-Bohm⁴³

incluindo o efeito Aharonov-Bohm, verificados através do parâmetro de Sorkin é da ordem de 10^{-8} .

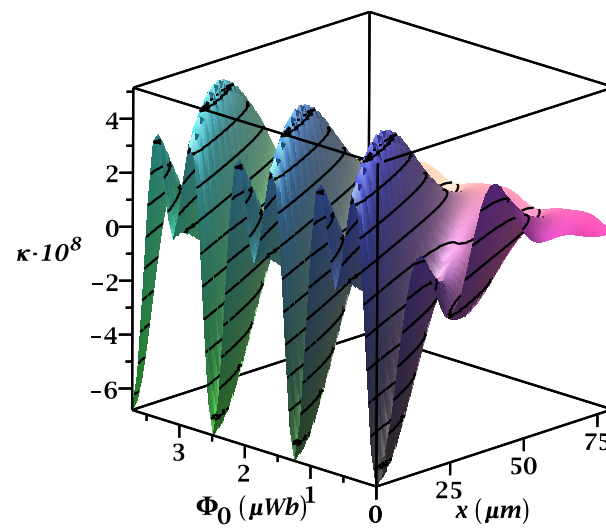


Fig. 4.7: Parâmetro de Sorkin como função da posição x e do fluxo de campo magnético Φ_0 [equação (2.18)].

4.2.2 Intensidade Relativa

A partir da intensidade total [equação (4.14), com as diferenças de fase (4.22)-(4.27)] calculamos a intensidade relativa baseados em [59], obtemos

$$I_r = \frac{I_{nc}}{|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_{nc1}|^2 + |\psi_{nc2}|^2}. \quad (4.28)$$

A metade da curva simétrica para a intensidade relativa I_r , como uma função da posição x fixando o fluxo de campo em $\Phi = \Phi_0$ [equação (2.18)] está representada na figura 4.8, obtida a partir da equação (4.28). Admitimos que as duas fendas possuem mesma largura $\beta = 62,0$ nm, através das quais um feixe eletrônico é dividido, este é representado por um pacote de onda Gaussiano de largura inicial $\sigma_0 = 62,0$ nm. A distância entre as fendas é $d = 650$ nm, a massa do elétron $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg, o tempo de propagação da fonte as fendas utilizado foi $t = 0,01$ ns, um tempo de propagação do pacote de onda a partir das fendas ao anteparo foi fixado em $\tau = 18$ ns e o tempo gasto para ir de uma fenda até outra $\epsilon = 0,352$ ns, este último obtido através da equação 4.9.

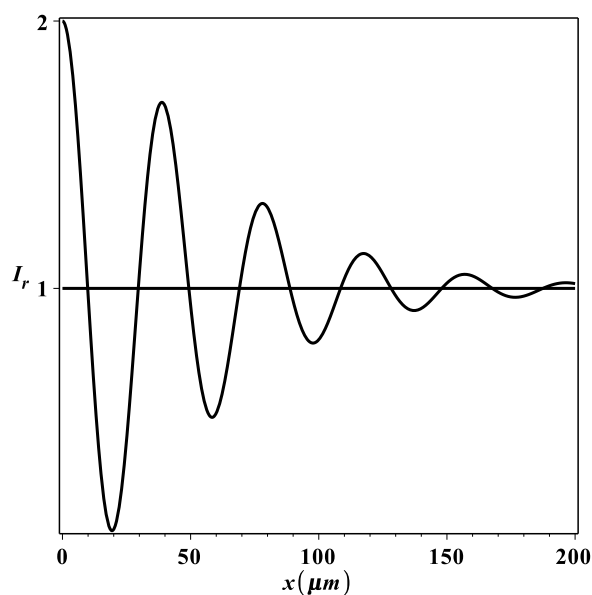


Fig. 4.8: Intensidade relativa total (com os termos de interferência entre todos os caminhos) como função da posição para um fluxo de campo constante $\Phi = \Phi_0$ [equação (2.18)].

Observe na figura 4.8 que, em $x = 0$, no eixo de simetria da fenda-dupla, a intensidade relativa apresenta um máximo $I_r = 2$ e oscila em torno do valor $I_r = 1$ (resultado quando não há interferência). A oscilação da intensidade relativa contém contribuições de caminhos clássicos e não-clássicos.

4.2 Medidas de Efeitos de Trajetórias Não-Clássicas via Efeito Aharonov-Bohm 45

Para verificar contribuições de interferências com caminhos exóticos tornamos o termo de interferência entre trajetórias clássicas nulo, fazendo $\phi_{1,2} = 2\gamma x + \frac{e\Phi}{\hbar c} = \pi/2$ [equação (4.22)]. Analisamos, então, a intensidade relativa com contribuições apenas da interferência entre caminhos exóticos (caminhos 12 e 21 na figura 4.5) e não-exóticos (caminhos 1 e 2 na figura 4.5), e dos caminhos exóticos entre si.

A fim de eliminar a contribuição relativa à interferência entre caminhos clássicos, fizemos o fluxo magnético igual a $\Phi = \left[\left(\frac{\pi}{2} - 2\gamma x \right) \frac{\hbar c}{e} \right]$ nas diferenças de fase (4.22) - (4.27). Então, construímos a intensidade relativa como função do fluxo magnético (ver figura 4.9), $I_r = 1$ é o resultado quando temos apenas interferência entre trajetórias clássicas.

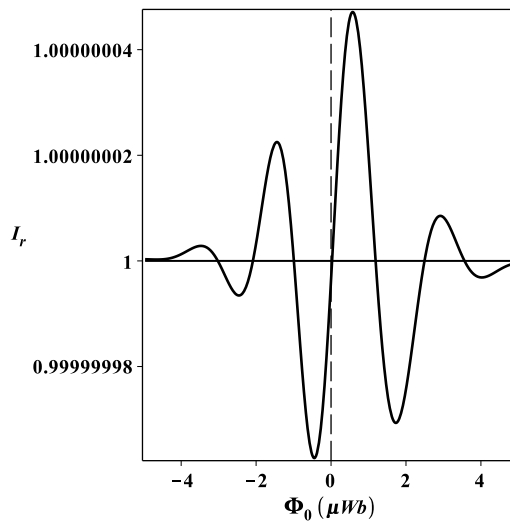


Fig. 4.9: Intensidade relativa como função do fluxo de campo magnético em unidades de $\Phi = \Phi_0$ [equação (2.18)].

Desta forma, a partir do efeito Aharonov-Bohm é possível eliminar a oscilação produzida pela interferência de caminhos clássicos, conseqüentemente, a contribuição para a oscilação na intensidade relativa é, exclusivamente, proveniente da interferência com caminhos não-clássicas e é da ordem de 10^{-8} (ver figura 4.9). Na subseção 4.2.1, quando utilizamos o parâmetro de Sorkin para quantificar a existência de caminhos exóticos, obtivemos a mesma ordem de grandeza.

Sendo assim, variamos, então, o fluxo de campo magnético Φ fixando $\phi_{1,2} = 2\gamma x + \frac{e\Phi}{\hbar c} = \pi/2$. Conseqüentemente, para cada valor de Φ , a posição x também foi modificada para manter o termo de interferência entre caminhos clássicos nulo. Os valores de fluxo de campo Φ , posição x e intensidade relativa I_r necessários para que não haja interferência clássica estão dispostos na tabela 4.1.

Na figura 4.10, mostramos a intensidade relativa como uma função da posição para os dados da tabela 4.1. A curva $I_r = 1$ representa o resultado clássico, quando não há interferência entre caminhos clássicos, notamos que há uma oscilação de I_r (curva pontilhada) em torno deste resultado. Os pontos foram obtidos numericamente por meio da equação (4.28) impondo que, variando a posição x e o fluxo Φ , $\phi_{1,2} = 2\gamma x + \frac{e\Phi}{\hbar c} = \pi/2$.

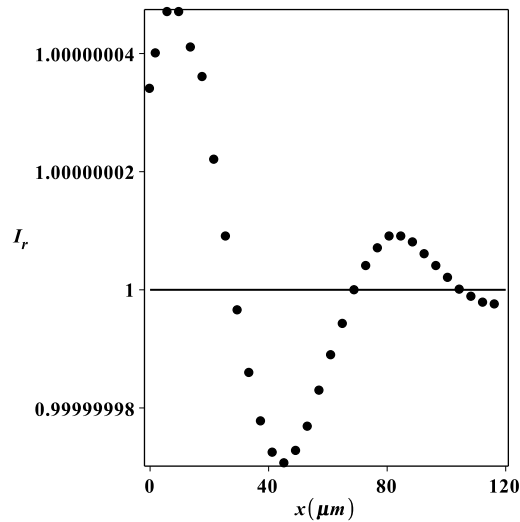


Fig. 4.10: Intensidade relativa como função da posição x para os dados da tabela 4.1. Os pontos foram obtidos numericamente, calculando-se a intensidade relativa [equação (4.28) com as diferenças de fase (4.22)-(4.27] variando o fluxo de campo de magnético Φ . Consequentemente, a posição deveria ser modificada também para satisfazer $\phi_{1,2} = 2\gamma x + \frac{e\Phi}{\hbar c} = \pi/2$ e, assim, não haver interferência entre caminhos clássicos.

A oscilação observada na figura 4.10 é proveniente da interferência apenas entre caminhos exóticos e entre exóticos e não-exóticos, ou seja, sem interferência entre trajetórias clássicas. Portanto, a contribuição para a oscilação é produzida por trajetórias não-clássicas e, assim, torna-se praticável medir efeitos de caminhos exóticos via efeito Aharonov-Bohm.

Assim sendo, propomos um aparato interferométrico tipo, fenda-dupla, em que haja um fluxo de campo magnético blindado situado entre as fendas, de forma que as partícula não tenham contato com este. Consequentemente, é possível utilizar valores de fluxo de campo magnético e da posição na tela de detecção, como os dados na tabela 4.1, para eliminar o termo de interferência clássica e, então, reproduzir estes resultados experimentalmente.

4.2 Medidas de Efeitos de Trajetórias Não-Clássicas via Efeito Aharonov-Bohm47

Tab. 4.1: Intensidade relativa para $\phi_{1,2} = \frac{\pi}{2}$.

$\Phi(\mu Wb)$	$x(\mu m)$	I_r
0,25 Φ_0	0	1,0000000340
0,30 Φ_0	1,972145100	1,0000000400
0,40 Φ_0	5,916435313	1,0000000470
0,50 Φ_0	9,860725514	1,0000000470
0,60 Φ_0	13,80501571	1,0000000410
0,70 Φ_0	17,74930593	1,0000000360
0,80 Φ_0	21,69359613	1,0000000220
0,90 Φ_0	25,63788634	1,0000000090
1,00 Φ_0	29,58217654	0,9999999965
1,10 Φ_0	33,52646674	0,9999999859
1,20 Φ_0	37,47075694	0,9999999777
1,30 Φ_0	41,41504717	0,9999999724
1,40 Φ_0	45,35933737	0,9999999706
1,50 Φ_0	49,30362757	0,9999999727
1,60 Φ_0	53,24791776	0,9999999768
1,70 Φ_0	57,19220796	0,9999999829
1,80 Φ_0	61,13649822	0,9999999889
1,90 Φ_0	65,08078840	0,9999999942
2,00 Φ_0	69,02507860	0,9999999999
2,10 Φ_0	72,96936881	1,0000000040
2,20 Φ_0	76,91365894	1,0000000070
2,30 Φ_0	80,85794914	1,0000000090
2,40 Φ_0	84,80223941	1,0000000090
2,50 Φ_0	88,74652961	1,0000000080
2,60 Φ_0	92,69081981	1,0000000060
2,70 Φ_0	96,63511001	1,0000000040
2,80 Φ_0	100,5794002	1,0000000020
2,90 Φ_0	104,5236904	1,0000000000
3,00 Φ_0	108,4679806	0,9999999988
3,10 Φ_0	112,4122708	0,9999999978
3,20 Φ_0	116,3565610	0,9999999975
3,30 Φ_0	120,3008513	0,9999999986

Para observar de forma mais precisa onde ocorre a variação da intensidade relativa, deve-se levar em conta uma certa precisão na posição, tal qual os valores de x na tabela 4.1. Caso contrário, teremos problemas de truncamento fornecendo, assim, valores ditorcidos de I_r .

4.2 Medidas de Efeitos de Trajetórias Não-Clássicas via Efeito Aharonov-Bohm 48

Produzimos a intensidade relativa como função do fluxo de campo magnético Φ e da posição x com todos os termos de interferência. O intervalo de posição x e de fluxo Φ escolhidos englobam os valores da tabela 4.1, assim, para determinados valores de fluxo e posição a curva da figura 4.10 está incluída na figura 4.11. Assim, propõem-se utilizar um conjunto de parâmetros (x, Φ) para eliminar a interferência entre os caminhos clássicos e obter valores de intensidade relativa devido a caminhos não-clássicas. Portanto, é possível utilizar o efeito Aharonov-Bohm para quantificar desvios da aplicação errônea do princípio da superposição em um experimento de difração através de fendas, aqui realizamos uma análise teórica do experimento de fenda-dupla com elétrons.

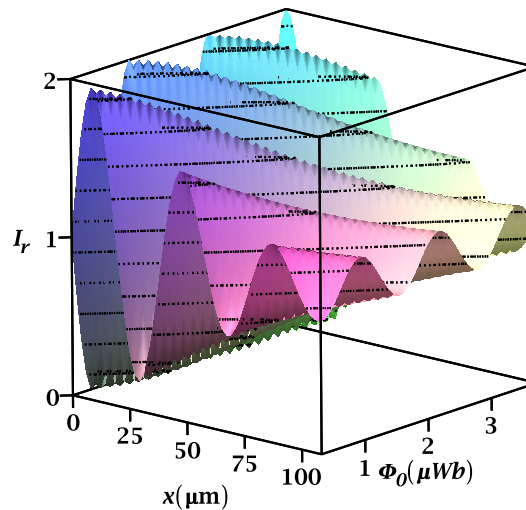


Fig. 4.11: Intensidade relativa total como uma função da posição x e do fluxo de campo magnético Φ (em unidades de Φ_0).

Concluimos este capítulo com a possibilidade de utilizar o efeito Aharonov-Bohm para observar efeitos de trajetórias exóticas no experimento de fenda-dupla. Para tal fim pode-se utilizar o parâmetro de Sorkin ou alternativamente a intensidade relativa.

Capítulo 5

Conclusões

Propomos um modelo teórico do experimento de interferência de um feixe de elétrons difratando através de uma fenda-dupla, com fendas de aberturas de larguras diferentes, para obter medida da fase de Gouy. Posteriormente, consideramos que entre as fendas é colocado um fluxo de campo magnético blindado para que as partículas que atravessam a grade não tenham contato com este. Nesta região, no entanto, o potencial vetor é diferente de zero. Essa configuração provoca um deslocamento no padrão de interferência devido à diferença de fase que os feixes sofrem ao serem divididos e passarem próximo ao fluxo magnético confinado (ver figura 3.3). Através deste fenômeno, conhecido como efeito Aharonov-Bohm, sugerimos a quantificação de efeitos de caminhos não-clássicos.

Fizemos um estudo teórico do efeito Aharonov-Bohm e da fase de Gouy no experimento fenda-dupla de Young com elétrons no capítulo 3. À medida que variamos o fluxo de campo magnético, modificamos, conseqüentemente, a largura da fenda. Desta forma, calculamos numericamente a fase de Gouy (tabela 3.1 e figura 3.4) medindo a intensidade relativa e a visibilidade (equação 3.20). Assim sendo, a precisão na medida da fase de Gouy pode ser usada para calibrar o fluxo e a largura da fenda. A possibilidade de medir a fase de Gouy via efeito Aharonov-Bohm é uma maneira de evidenciar a natureza quântica desse efeito, pois é conhecido que a fase de Gouy reflete o comportamento ondulatório da matéria. Com base nos resultados do capítulo 3, propomos, então, obter medidas experimentais da fase de Gouy para ondas de matéria, com o auxílio do efeito Aharonov-Bohm, medindo a intensidade relativa e a visibilidade.

No capítulo 4, utilizamos o efeito Aharonov-Bohm magnético para observar desvios da aplicação errônea do princípio da superposição quantificando, assim, efeitos de trajetórias exóticas. Observamos como o parâmetro de Sorkin varia como função do fluxo de campo magnético em $x = 0$ e como este parâmetro é modificado quando variamos a posição e o fluxo de campo simultaneamente. De forma alternativa, investigamos como quantificar efeito de caminhos exó-

ticos através da intensidade relativa. Observamos que a intensidade relativa com os termos de interferência entre todos os caminhos oscila em torno do resultado clássico $I_r = 1$ (sem interferência) e possui um máximo $I_r = 2$ (ver figura 4.8). Através do efeito Aharonov-Bohm é possível eliminar a interferência entre caminhos clássicos, primeiro fizemos com que o fluxo magnético fosse de tal forma que o termo de interferência (equação 4.22) entre estes caminhos fosse nulo. Assim, a oscilação observada em torno do resultado clássico como função do fluxo de campo (figura 4.9) se deve à interferência com trajetórias exóticas. Posteriormente, variamos o fluxo de campo magnético e para cada valor deste, obtivemos uma posição, tal que, a diferença de fase entre os caminhos clássicos fosse $\phi_{1,2} = 2\gamma x + \frac{e\Phi}{\hbar c} = \pi/2$. Devido à eliminação do termo de interferência entre caminhos clássicos, a oscilação da intensidade relativa observada na figura 4.10 em torno do valor de intensidade sem interferência é decorrente, puramente, da existência de trajetórias não-clássicas. Portanto, a partir dos resultados obtidos no capítulo 4, pode-se adotar um conjunto de parâmetros (ver tabela 4.1), fluxo de campo magnético e posição na tela de detecção, para tornar a obtenção de efeitos de caminhos exóticos mais acessível experimentalmente.

Futuramente, pretendemos calcular a fase geométrica e verificar se apresenta certa semelhança com a diferença de fase $(\theta_1 - \theta_2) + (\mu_1 - \mu_2) = \frac{e\Phi}{\hbar c}$ (ver equações 3.18 e 3.19 com $x = 0$). Se utilizarmos nêutrons para a difração por fendas a fim de quantificar o efeito de caminhos não-clássicos, elevamos o valor do parâmetro de Sorkin duas ordens de grandeza em relação ao experimento de fenda-dupla utilizando elétrons[66]. Desta forma, como perspectiva, podemos utilizar o efeito Aharonov-Casher para quantificar maiores efeitos de trajetórias exóticas.

Apêndice A - Parâmetros para Interferência com Trajetórias não-Clássicas

As funções de onda para os caminhos clássicos [equações (4.10) e (4.11)]

$$\Psi_1(x, t, \tau) = A \exp(C_1 x^2 + C_2 x + C_3) \exp(i\alpha x^2 + i\gamma x + i\theta + i\mu)$$

e

$$\Psi_2(x, t, \tau) = A \exp(C_1 x^2 - C_2 x + C_3) \exp(i\alpha x^2 - i\gamma x + i\theta + i\mu).$$

A seguir mostramos as expressões completas para os termos nas equações (4.10) e (4.11), relacionado aos caminhos clássicos.

$$A = m\beta \sqrt{\frac{\sigma_0 t}{\sqrt{\pi}}} |\zeta|^{-1/4}, \quad (1)$$

$$C_1 = -\frac{1}{2|\zeta|^2} \left[m^2 \beta^2 \hbar^2 t^4 + m^4 \beta^2 \sigma_0^4 t^2 + m^4 \beta^4 \sigma_0^2 t^2 \right], \quad (2)$$

$$C_2 = -\frac{1}{2|\zeta|^2} \left[m^4 \beta^2 \sigma_0^4 t^2 + m^2 \beta^2 \hbar^2 t^3 \tau + m^2 \beta^2 \hbar^2 t^4 \right] d, \quad (3)$$

$$C_3 = \frac{1}{8\beta^2 |\zeta|^2} \left(\hbar^4 t^4 \tau^2 + m^2 \sigma_0^2 \hbar^2 t^2 \tau^2 + m^2 \beta^2 \sigma_0^2 \hbar^2 t^2 \tau^2 \right) d^2 - \frac{d^2}{8\beta^2}, \quad (4)$$

$$\alpha = \frac{m}{2\hbar\tau} - \frac{1}{2|\zeta|^2} \left[\frac{m^5 \beta^4 \sigma_0^4 t^2}{\hbar\tau} + m^3 \beta^4 \hbar t^3 + \frac{m^3 \beta^4 \hbar t^4}{\tau} \right], \quad (5)$$

$$\gamma = -\frac{1}{2|\zeta|^2} \left[m\hbar^3 t^4 \tau + m^3 \sigma_0 \hbar t^2 \tau + m^3 \beta^2 \sigma_0^2 \hbar t^2 \tau \right] d \quad (6)$$

e

$$\theta = -\frac{1}{8|\zeta|^2} \left[m^3 \sigma_0^4 \hbar t^2 \tau + m \hbar^3 t^3 \tau^2 + m \hbar^3 t^4 \tau \right] d^2, \quad (7)$$

em que

$$\zeta = (m^2 \beta^2 \sigma_0^2 t) + i(m \sigma_0^2 \hbar t \tau + m \beta^2 \hbar t \tau + m \beta^2 \hbar t^2). \quad (8)$$

e a fase de Gouy, referente a caminhos clássicos (3.14), é

$$\mu(t, \tau) = -\frac{1}{2} \arctan \left[\frac{t + \tau \left(1 + \frac{\sigma_0^2}{\beta^2} \right)}{\tau_0 \left(1 - \frac{t \tau \sigma_0^2}{\tau_0^2 \beta^2} \right)} \right].$$

Para as funções de onda relacionadas aos caminhos-não clássicos [equações (4.12) e (4.13)],

$$\Psi_{12}(x, t, \tau) = A_{nc} \exp(C_{1nc} x^2 + C_{2nc} x + C_{3nc}) \exp(i \alpha_{nc} x^2 + i \gamma_{nc} x + i \theta_{nc} + i \mu_{nc}),$$

e

$$\Psi_{21}(x, t, \tau) = A_{nc} \exp(C_{1nc} x^2 - C_{2nc} x + C_{3nc}) \exp(i \alpha_{nc} x^2 - i \gamma_{nc} x + i \theta_{nc} + i \mu_{nc}),$$

mostramos as expressões para os termos contidos nestas equações, a seguir:

$$A_{nc} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{m^3 \sqrt{\pi}}{\sigma_0 \hbar^3 t \tau \epsilon \sqrt{z_I^2 + z_R^2}}}, \quad (9)$$

$$C_{1nc} = -\frac{m^2}{4 \hbar^2 \tau^2} \frac{z_{3R}}{z_{3R}^2 + z_{3I}^2}, \quad (10)$$

$$C_{2nc} = -\frac{m d}{4 \beta^2 \hbar \tau} \frac{z_{3I}}{z_{3R}^2 + z_{3I}^2} + \frac{m^3 d}{64 \beta^2 \hbar^3 \tau \epsilon^2} \frac{z_{6I}}{z_{6R}^2 + z_{6I}^2} + \frac{m^2 d}{16 \beta^2 \hbar^2 \tau \epsilon} \frac{z_{10R}}{z_{10R}^2 + z_{10I}^2}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
C_{3nc} = & \frac{d^2}{16\beta^4} \left(\frac{z_{1R}}{z_{1R}^2 + z_{1I}^2} \right) + \frac{d^2}{16\beta^4} \left(\frac{z_{2R}}{z_{2R}^2 + z_{2I}^2} \right) + \frac{d^2}{16\beta^4} \left(\frac{z_{3R}}{z_{3R}^2 + z_{3I}^2} \right) - \frac{m^2 d^2}{4^4 \beta^4 \hbar^2 \epsilon^2} \left(\frac{z_{4R}}{z_{4R}^2 + z_{4I}^2} \right) \\
& + \frac{m^4 d^2}{4^6 \beta^4 \hbar^4 \epsilon^4} \left(\frac{z_{5R}}{z_{5R}^2 + z_{5I}^2} \right) - \frac{m^2 d^2}{2^7 \beta^4 \hbar^2 \epsilon^2} \left(\frac{z_{6R}}{z_{6R}^2 + z_{6I}^2} \right) - \frac{m d^2}{32 \beta^4 \hbar \epsilon} \left(\frac{z_{7I}}{z_{7R}^2 + z_{7I}^2} \right) \\
& - \frac{m^2 d^2}{4^4 \beta^4 \hbar^2 \epsilon^2} \left(\frac{z_{8R}}{z_{8R}^2 + z_{8I}^2} \right) - \frac{m^3 d^2}{2^9 \beta^4 \hbar^3 \epsilon^3} \left(\frac{z_{9I}}{z_{9R}^2 + z_{9I}^2} \right) - \frac{m d^2}{32 \beta^4 \hbar \epsilon} \left(\frac{z_{10I}}{z_{10R}^2 + z_{10I}^2} \right) - \frac{3d^2}{8\beta^2},
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\alpha_{nc} = \frac{m}{2\hbar\tau} + \frac{m^2}{4\hbar^2\tau^2} \frac{z_{3I}}{z_{3R}^2 + z_{3I}^2}, \tag{13}$$

$$\gamma_{nc} = -\frac{md}{4\beta^2\hbar\tau} \frac{z_{3I}}{z_{3R}^2 + z_{3I}^2} + \frac{m^3 d}{64\beta^2\hbar^3\tau\epsilon^2} \frac{z_{6R}}{z_{6R}^2 + z_{6I}^2} - \frac{m^2 d}{16\beta^2\hbar^2\tau\epsilon} \frac{z_{10I}}{z_{10R}^2 + z_{10I}^2}, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{nc} = & -\frac{d^2}{16\beta^4} \left(\frac{z_{1I}}{z_{1R}^2 + z_{1I}^2} \right) - \frac{d^2}{16\beta^4} \left(\frac{z_{2I}}{z_{2R}^2 + z_{2I}^2} \right) - \frac{d^2}{16\beta^4} \left(\frac{z_{3I}}{z_{3R}^2 + z_{3I}^2} \right) + \frac{m^2 d^2}{4^4 \beta^4 \hbar^2 \epsilon^2} \left(\frac{z_{4I}}{z_{4R}^2 + z_{4I}^2} \right) \\
& - \frac{m^4 d^2}{4^6 \beta^4 \hbar^4 \epsilon^4} \left(\frac{z_{5I}}{z_{5R}^2 + z_{5I}^2} \right) + \frac{m^2 d^2}{2^7 \beta^4 \hbar^2 \epsilon^2} \left(\frac{z_{6I}}{z_{6R}^2 + z_{6I}^2} \right) + \frac{m d^2}{32 \beta^4 \hbar \epsilon} \left(\frac{z_{7R}}{z_{7R}^2 + z_{7I}^2} \right) \\
& + \frac{m^2 d^2}{4^4 \beta^4 \hbar^2 \epsilon^2} \left(\frac{z_{8I}}{z_{8R}^2 + z_{8I}^2} \right) - \frac{m^3 d^2}{2^9 \beta^4 \hbar^3 \epsilon^3} \left(\frac{z_{9R}}{z_{9R}^2 + z_{9I}^2} \right) + \frac{m d^2}{32 \beta^4 \hbar \epsilon} \left(\frac{z_{10R}}{z_{10R}^2 + z_{10I}^2} \right),
\end{aligned} \tag{15}$$

a fase de Gouy, relativa a caminhos não-clássicos, é dada por

$$\mu_{nc}(t, \tau) = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{z_I}{z_R} \right), \tag{16}$$

em que

$$z_R = (z_{0R}z_{1R} - z_{0I}z_{1I})(z_{2R}z_{3I} + z_{2I}z_{3R}) + (z_{0R}z_{1I} + z_{0I}z_{1R})(z_{2R}z_{3R} - z_{2I}z_{3I}) \tag{17}$$

e

$$z_I = (z_{0R}z_{1I} - z_{0I}z_{1I})(z_{2R}z_{3R} - z_{2I}z_{3I}) + (z_{0R}z_{1I} + z_{0I}z_{1R})(z_{2R}z_{3I} + z_{2I}z_{3R}). \tag{18}$$

Para as expressões acima, temos

$$z_{0R} = \frac{1}{2\sigma_0^2}, \quad (19)$$

$$z_{0I} = -\frac{m}{2\hbar t}, \quad (20)$$

$$z_{1R} = \frac{1}{2\beta^2} + \frac{m^2 z_{0r}}{4\hbar^2 t^2 (z_{0R}^2 + z_{0I}^2)}, \quad (21)$$

$$z_{1I} = -\left[\frac{m^2 z_{0I}}{4\hbar^2 t^2 (z_{0r}^2 + z_{0I}^2)} + \frac{m}{4\hbar\epsilon} + \frac{m}{2\hbar t} \right], \quad (22)$$

$$z_{2R} = \frac{1}{2\beta^2} + \frac{m^2 z_{1R}}{16\hbar^2 \epsilon^2 (z_{1R}^2 + z_{1R^2})}, \quad (23)$$

$$z_{2I} = -\left[\frac{m^2 z_{1I}}{16\hbar^2 \epsilon^2 (z_{1R}^2 + z_{1I}^2)} + \frac{m}{2\hbar\epsilon} \right], \quad (24)$$

$$z_{3r} = \frac{1}{2\beta^2} + \frac{m^2 z_{2i}}{16\hbar^2 \epsilon^2 (z_{2r}^2 + z_{2i}^2)}, \quad (25)$$

$$z_{3I} = -\left[\frac{m^2 z_{2I}}{16\hbar^2 \epsilon^2 (z_{1R}^2 + z_{1I}^2)} + \frac{m}{4\hbar\epsilon} + \frac{m}{2\hbar\tau} \right], \quad (26)$$

$$z_{4R} = z_{1R}^2 z_{2R} - z_{1I}^2 z_{2R} - 2z_{1R} z_{1I} z_{2I}, \quad (27)$$

$$z_{4I} = z_{1R}^2 z_{2I} - z_{1I}^2 z_{2I} + 2z_{1R} z_{1I} z_{2R}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} z_{5R} = & z_{3R} (z_{1R}^2 z_{2R}^2 - z_{1R}^2 z_{2I}^2 - 4z_{1R} z_{1I} z_{2R} z_{2I} - z_{1I}^2 z_{2R}^2 + z_{1I}^2 z_{2I}^2) \\ & - z_{3I} (2z_{1R}^2 z_{2R} z_{2I} + 2z_{1R} z_{1I} z_{2R}^2 - 2z_{1R} z_{1I} z_{2I}^2 - 2z_{1I}^2 z_{2R} z_{2I}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{5I} = & z_{3I} (z_{1R}^2 z_{2R}^2 - z_{1R}^2 z_{2I}^2 - 4z_{1R} z_{1I} z_{2R} z_{2I} - z_{1I}^2 z_{2R}^2 + z_{1I}^2 z_{2I}^2) \\ & - z_{3R} (2z_{1R}^2 z_{2R} z_{2I} + 2z_{1R} z_{1I} z_{2R}^2 - 2z_{1R} z_{1I} z_{2I}^2 - 2z_{1I}^2 z_{2R} z_{2I}), \end{aligned}$$

$$z_{6R} = z_{1R} z_{2R} z_{3R} - z_{1I} z_{2I} z_{3R} - z_{1R} z_{2I} z_{3I} - z_{1I} z_{2R} z_{3I} \quad (29)$$

$$z_{6I} = z_{1R}z_{2I}z_{3R} - z_{1I}z_{2R}z_{3R} - z_{1R}z_{2R}z_{3I} - z_{1I}z_{2I}z_{3I} \quad (30)$$

$$z_{7R} = z_{1R}z_{2R} - z_{1I}z_{2I} \quad (31)$$

$$z_{7I} = z_{1I}z_{2R} + z_{1R}z_{2I} \quad (32)$$

$$z_{8R} = z_{2R}^2z_{3R} - z_{2I}^2z_{3R} - 2z_{2R}z_{2I}z_{3I} \quad (33)$$

$$z_{8I} = z_{2I}^2z_{3I} + z_{2R}^2z_{3I} + 2z_{2R}z_{2I}z_{3R} \quad (34)$$

$$z_{9R} = z_{3R}(z_{1R}z_{2R}^2 - z_{1R}z_{2I}^2 - 2z_{1I}z_{2R}z_{2I}) - z_{3I}(z_{1I}z_{2R}^2 - z_{1I}z_{2I}^2 + 2z_{1R}z_{2R}z_{2I}) \quad (35)$$

$$z_{9I} = z_{3I}(z_{1R}z_{2R}^2 - z_{1R}z_{2I}^2 - 2z_{1I}z_{2R}z_{2I}) + z_{3R}(z_{1I}z_{2R}^2 - z_{1I}z_{2I}^2 + 2z_{1R}z_{2R}z_{2I}) \quad (36)$$

$$z_{10R} = z_{2R}z_{3R} - z_{2I}z_{3I} \quad (37)$$

$$z_{10I} = z_{2R}z_{3I} + z_{2I}z_{3R} \quad (38)$$

Os índices R e I representam as a parte real e imaginária dos números complexos que aparecem nas soluções.

Referências Bibliográficas

- [1] Yoon-Ho Kim, Rong Yu, Sergei P Kulik, Yanhua Shih, and Marlan O Scully. Delayed “choice” quantum eraser. *Physical Review Letters*, 84(1):1, 2000.
- [2] Richard P Feynman, Robert B Leighton, and Matthew Sands. *The Feynman Lectures on Physics, Desktop Edition Volume I*, volume 1. Basic books, 2013.
- [3] Omar S Magana-Loaiza, Israel De Leon, Mohammad Mirhosseini, Robert Fickler, Akbar Safari, Uwe Mick, Brian McIntyre, Peter Banzer, Brandon Rodenburg, Gerd Leuchs, et al. Exotic looped trajectories of photons in three-slit interference. *Nature communications*, 7:13987, 2016.
- [4] Sacha Kocsis, Boris Braverman, Sylvain Ravets, Martin J Stevens, Richard P Mirin, L Kristopher Shalm, and Aephraim M Steinberg. Observing the average trajectories of single photons in a two-slit interferometer. *Science*, 332(6034):1170–1173, 2011.
- [5] Peter Shadbolt, Jonathan CF Matthews, Anthony Laing, and Jeremy L O’Brien. Testing foundations of quantum mechanics with photons. *arXiv preprint arXiv:1501.03713*, 2015.
- [6] Dylan H Mahler, Lee Rozema, Kent Fisher, Lydia Vermeyden, Kevin J Resch, Howard M Wiseman, and Aephraim Steinberg. Experimental nonlocal and surreal bohmian trajectories. *Science advances*, 2(2):e1501466, 2016.
- [7] Claus Jönsson. Electron diffraction at multiple slits. *American Journal of Physics*, 42(1):4–11, 1974.
- [8] Anton Zeilinger, Roland Gähler, CG Shull, Wolfgang Treimer, and Walter Mampe. Single- and double-slit diffraction of neutrons. *Reviews of modern physics*, 60(4):1067, 1988.
- [9] Olivier Carnal and Jürgen Mlynek. Young’s double-slit experiment with atoms: A simple atom interferometer. *Physical review letters*, 66(21):2689, 1991.

- [10] Olaf Nairz, Markus Arndt, and Anton Zeilinger. Quantum interference experiments with large molecules. *American Journal of Physics*, 71(4):319–325, 2003.
- [11] Irismar Gonçalves da Paz. Fase de gouy em ondas de matéria de estados gaussianos puros e mistos. 2011.
- [12] Léon Georges Gouy. *Sur une propriété nouvelle des ondes lumineuses*. Gauthier-Villars, 1890.
- [13] Louis Georges Gouy. Sur la propagation anormale des ondes. *Compt. Rendue Acad. Sci. Paris*, 111:33, 1890.
- [14] Dominique Chauvat, Olivier Emile, Marc Brunel, and Albert Le Floch. Huygens' principle and young's experiment in the propagation of light beams. *American Journal of Physics*, 71(11):1196–1198, 2003.
- [15] NCR Holme, BC Daly, MT Myaing, and TB Norris. Gouy phase shift of single-cycle picosecond acoustic pulses. *Applied physics letters*, 83(2):392–394, 2003.
- [16] Giulio Guzzinati, Peter Schattschneider, Konstantin Y Bliokh, Franco Nori, and Jo Verbeeck. Observation of the larmor and gouy rotations with electron vortex beams. *Physical review letters*, 110(9):093601, 2013.
- [17] AE Siegman Lasers. University science books. *Hermite-gaussian modes*, pages 643–647, 1986.
- [18] Yakir Aharonov and David Bohm. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Physical Review*, 115(3):485, 1959.
- [19] Donald H Kobe. Aharonov-bohm effect revisited. *Annals of physics*, 123(2):381–410, 1979.
- [20] RG Chambers. Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux. *Physical Review Letters*, 5(1):3, 1960.
- [21] Akira Tonomura, Nobuyuki Osakabe, Tsuyoshi Matsuda, Takeshi Kawasaki, Junji Endo, Shinichiro Yano, and Hiroji Yamada. Evidence for aharonov-bohm effect with magnetic field completely shielded from electron wave. *Physical Review Letters*, 56(8):792, 1986.
- [22] Dong-In Chang, Gyong Luck Khym, Kicheon Kang, Yunchul Chung, Hu-Jong Lee, Minky Seo, Moty Heiblum, Diana Mahalu, and Vladimir Umansky. Quantum mechanical complementarity probed in a closed-loop aharonov-bohm interferometer. *arXiv preprint arXiv:0806.2416*, 2008.

- [23] Akira Tonomura and Murray Peshkin. *The Aharonov-Bohm Effect (Lecture Notes in Physics)*, volume 1. Springer, 1989.
- [24] Herman Erlichson. Aharonov-bohm effect—quantum effects on charged particles in field-free regions. *American Journal of Physics*, 38(2):162–173, 1970.
- [25] Tai Tsun Wu and Chen Ning Yang. Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields. *Physical Review D*, 12(12):3845, 1975.
- [26] Rui-Feng Wang. An experimental proposal to test the physical effect of the vector potential. *Scientific reports*, 6, 2016.
- [27] Walter C Henneberger. Some aspects of the aharonov-bohm effect. *Physical Review A*, 22(4):1383, 1980.
- [28] H Yabuki. Feynman path integrals in the young double-slit experiment. *International journal of theoretical physics*, 25(2):159–174, 1986.
- [29] Rafael D Sorkin. Quantum mechanics as quantum measure theory. *Modern Physics Letters A*, 9(33):3119–3127, 1994.
- [30] IG da Paz, CHS Vieira, Robert Ducharme, LA Cabral, Helder Alexander, and MDR Sampaio. Gouy phase in nonclassical paths in a triple-slit interference experiment. *Physical Review A*, 93(3):033621, 2016.
- [31] MV Berry. Exact aharonov-bohm wavefunction obtained by applying dirac’s magnetic phase factor. *European Journal of Physics*, 1(4):240, 1980.
- [32] Yakir Aharonov and Aharon Casher. Topological quantum effects for neutral particles. *Physical Review Letters*, 53(4):319, 1984.
- [33] S Olariu and I Iovitzu Popescu. The quantum effects of electromagnetic fluxes. *Reviews of Modern Physics*, 57(2):339, 1985.
- [34] Mark P Silverman. *Quantum superposition: counterintuitive consequences of coherence, entanglement, and interference*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [35] BE Allman, A Cimmino, AG Klein, GI Opat, H Kaiser, and SA Werner. Observation of the scalar aharonov-bohm effect by neutron interferometry. *Physical Review A*, 48(3):1799, 1993.

- [36] Jun John Sakurai and Eugene D Commins. Modern quantum mechanics, revised edition, 1995.
- [37] W Franz. Elektroneninterferenzen im magnetfeld. *Verh. Dtsch. Phys. Ges*, 2:65, 1939.
- [38] W Ehrenberg and RE Siday. The refractive index in electron optics and the principles of dynamics. *Proceedings of the Physical Society. Section B*, 62(1):8, 1949.
- [39] P Bocchieri and A Loinger. Nonexistence of the aharonov-bohm effect. *Il Nuovo Cimento A (1971-1996)*, 47(4):475–482, 1978.
- [40] Werner Bayh. Messung der kontinuierlichen phasenschiebung von elektronenwellen im kraftfeldfreien raum durch das magnetische vektorpotential einer wolfram-wendel. *Zeitschrift für Physik*, 169(4):492–510, Dec 1962.
- [41] Adrian Bachtold, Christoph Strunk, Jean-Paul Salvetat, Jean-Marc Bonard, et al. Aharonov-bohm oscillations in carbon nanotubes. *Nature*, 397(6721):673, 1999.
- [42] Giulio Pozzi, Peng-Han Lu, Amir H Tavabi, Martial Duchamp, and Rafal E Dunin-Borkowski. Generation of electron vortex beams using line charges via the electrostatic aharonov-bohm effect. *Ultramicroscopy*, 2017.
- [43] Lewis H Ryder. *Quantum field theory*. Cambridge university press, 1996.
- [44] Tian Yu Cao. *Conceptual foundations of quantum field theory*. Cambridge University Press, 2004.
- [45] Sandu Popescu. Dynamical quantum non-locality. *Nature Physics*, 6(3):151–153, 2010.
- [46] Michael V Berry. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 392, pages 45–57. The Royal Society, 1984.
- [47] David J Griffiths and Edward G Harris. Introduction to quantum mechanics. *American Journal of Physics*, 63(8):767–768, 1995.
- [48] Joseph Samuel and Rajendra Bhandari. General setting for berry’s phase. *Physical Review Letters*, 60(23):2339, 1988.
- [49] Yakir Aharonov and J Anandan. Phase change during a cyclic quantum evolution. *Physical Review Letters*, 58(16):1593, 1987.

- [50] Simin Feng and Herbert G Winful. Physical origin of the gouy phase shift. *Optics letters*, 26(8):485–487, 2001.
- [51] CJS Ferreira, LS Marinho, TB Brazil, LA Cabral, JGG de Oliveira Jr, MDR Sampaio, and IG da Paz. Gouy phase and visibility in the double-slit experiment. *Annals of Physics*, 362:473–481, 2015.
- [52] R Simon and N Mukunda. Bargmann invariant and the geometry of the güoy effect. *Physical review letters*, 70(7):880, 1993.
- [53] Robert W Boyd. Intuitive explanation of the phase anomaly of focused light beams. *JOSA*, 70(7):877–880, 1980.
- [54] IG Da Paz, MC Nemes, S Pádua, CH Monken, and JG Peixoto de Faria. Indirect evidence for the gouy phase for matter waves. *Physics Letters A*, 374(15):1660–1662, 2010.
- [55] R Ducharme and Irismar Gonçalves da Paz. Gouy phase for relativistic quantum particles. *Physical Review A*, 92(2):023853, 2015.
- [56] CJS Ferreira, LS Marinho, TB Brazil, LA Cabral, JGG de Oliveira Jr, MDR Sampaio, and IG da Paz. Gouy phase and visibility in the double-slit experiment. *Annals of Physics*, 362:473–481, 2015.
- [57] Urbasi Sinha, Christophe Couteau, Thomas Jennewein, Raymond Laflamme, and Gregor Weihs. Ruling out multi-order interference in quantum mechanics. *Science*, 329(5990):418–421, 2010.
- [58] Richard P Feynman, Albert R Hibbs, and Daniel F Styer. *Quantum mechanics and path integrals*. Courier Corporation, 2010.
- [59] A Bramon, G Garbarino, and BC Hiesmayr. Quantitative complementarity in two-path interferometry. *Physical Review A*, 69(2):022112, 2004.
- [60] Hans De Raedt, Kristel Michielsen, and Karl Hess. Analysis of multipath interference in three-slit experiments. *Physical Review A*, 85(1):012101, 2012.
- [61] Rahul Sawant, Joseph Samuel, Aninda Sinha, Supurna Sinha, and Urbasi Sinha. Nonclassical paths in quantum interference experiments. *Physical review letters*, 113(12):120406, 2014.

-
- [62] Fangzhou Jin, Ying Liu, Jianpei Geng, Pu Huang, Wenchao Ma, Mingjun Shi, Chang-Kui Duan, Fazhan Shi, Xing Rong, and Jiangfeng Du. Experimental test of born's rule by inspecting third-order quantum interference on a single spin in solids. *Physical Review A*, 95(1):012107, 2017.
- [63] Aninda Sinha, Aravind H Vijay, and Urbasi Sinha. On the superposition principle in interference experiments. *Scientific reports*, 5, 2015.
- [64] James Q Quach. Which-way double-slit experiments and born-rule violation. *Physical Review A*, 95(4):042129, 2017.
- [65] Oscar CO Dahlsten, Andrew JP Garner, and Vlatko Vedral. How uncertainty enables non-classical dynamics. *arXiv preprint arXiv:1206.5702*, 2012.
- [66] Carlos Vieira, Helder Alexander, Gustavo de Souza, Marcos Sampaio, and Irismar da Paz. Exotic looped trajectories in double-slit experiments with matter waves. *arXiv preprint arXiv:1705.07156*, 2017.