Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Quadriláteros Cíclicos e a Fórmula de Brahmagupta

Antonio Uchoa de Oliveira

Teresina
2016

Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Quadriláteros Cíclicos e a Fórmula de Brahmagupta

Antonio Uchoa de Oliveira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática

Orientador
Prof. Me. Mário Gomes dos Santos

Teresina
2016

FICHA CATALOGRÁFICA

Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí

Biblioteca Setorial do CCN

O48q Oliveira, Antonio Uchoa

Quadriláteros Cíclicos e a Fórmula de Brahmagupta/ Antonio Uchoa de Oliveira. - Teresina, 2016.

49f. il.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Pós-Graduação em Matemática, UniversidadeFederal do Piauí,

Orientador: Prof. Me. Mário Gomes dos Santos

1. Fórmula de Heron. 2. Fórmula de Brahmagupta. 3. Quadriláteros Cíclico. I. Título

CDD 516.22

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Antonio e Maria, irmãos e irmãs, pelo apoio durante toda minha vida.

Aos meus filhos, Vinícius e Clara, pela alegria que me proporcionam e pelo sacrifício que tiveram durante esta minha fase de estudos.

À minha esposa, que não tem poupado em dedicação e companheirismo.

Aos meus colegas de curso, especialmente ao amigo Kelson, pelo encorajamento durante o mestrado.

Ao meu orientador, Me. Mário Gomes dos Santos, por todas as contribuições para esse trabalho.

Aos professores, coordenadores e pessoal de apoio.

À Universidade Federal do Piauí.

A Deus, pelas oportunidades que me foram dadas durante a vida.

À minha querida esposa Denise

Resumo

Este trabalho tem como objetivo mostrar e fazer algumas aplicações de uma importante fórmula, mas pouco utilizada, da geometria plana, que é a fórmula de Brahmagupta, usada para calcular a área de quadrilátero definido como cíclico. Apresentamos também a fórmula de Heron, mostrando que há entre essas duas fórmulas uma estreita relação. Estudos posteriores, atribuídos ao matemático alemão Carl Anton Bretschneider, generalizaram a fórmula de Brahmagupta, chegando-se a uma fórmula que se aplica ao cálculo da área de um quadrilátero convexo qualquer. Os dados históricos e biográficos de Heron e Brahmagupta também são mencionados neste trabalho, buscando compreender o contexto de sua época, de seus estudos e descobertas. Finalmente, apresentamos algumas aplicações da fórmula de Heron e da fórmula de Brahmagupta em algumas situações do cotidiano.

Palavras-chave: Fórmula de Heron, Fórmula de Brahmagupta, Quadriláteros Cíclicos, Quadriláteros convexos.

Abstract

This work aims to show and make some applications of an important formula, but little used, plane geometry, which is the Brahmagupta formula used to calculate the quadrilateral area defined as cyclical. We also present the formula of Heron, showing that there is between these two formulas a close relationship. Later studies, assigned to the German mathematician Carl Anton Bretschneider, generalized to Brahmagupta's formula, coming to a formula that applies to the calculation of the area of a convex quadrilateral any. The historical and biographical data Heron and Brahmagupta are also mentioned in this work, trying to understand the context of his time, his studies and discoveries. Finally, we present some applications of Heron's formula and Brahmagupta formula in some everyday situations.

Keywords: Theorem Heron, Brahmagupta Theorem, Cyclic Quads, Quads Convex.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

O estudo da matemática é um dos que mais têm despertado interesse na história do conhecimento. E uma das partes mais intrigantes é a geometria. Calcular áreas, por exemplo, tem uma aplicação muito recorrente em diversos segmentos, seja no campo de estudo como no campo de trabalho.

Segundo SOUZA (2010), o estudo da área de figuras planas está ligado aos conceitos relacionados à Geometria Euclidiana, que surgiu na Grécia antiga embasada no estudo do ponto, da reta e do plano. No mundo em que vivemos, existem inúmeras formas planas, que são construídas a partir dos elementos básicos citados anteriormente. Desde a antiguidade, o homem necessitou determinar a medida da superfície de áreas, com o objetivo voltado para a plantação e a construção de moradias. Dessa forma, ele observou uma melhor organização na ocupação do terreno.

Atualmente, o processo de expansão ocupacional utiliza os mesmos princípios criados nos séculos anteriores. A diferença é que hoje as medidas são padronizadas de acordo com o Sistema Internacional de Medidas.

Na Geometria Plana ou Euclidiana, as figuras mais conhecidas são: triângulo, quadrado, retângulo, paralelogramo, losango, trapézio e círculo. Todas essas figuras possuem fórmulas matemáticas para o cálculo da medida da área. Para o cálculo de área envolvendo as figuras mais complexas desenvolvemos cálculos matemáticos específicos entre outras técnicas. Áreas de triângulos e quadriláteros, por serem as mais elementares, são também as mais exploradas.

No entanto, ao elaborar uma aula de áreas de triângulo, por exemplo, é natural que deixemos por último a abordagem da fórmula de Heron. E esta atitude deixa transparecer a pouca importância que lhe é dada. Procuramos neste trabalho mostrar a importância que tem a fórmula de Heron, por propiciar o cálculo da área de um triângulo apenas em função de seus lados, não exigindo conhecimento dos ângulos nem da altura. Faremos sua demonstração e aplicaremos a mesma em um problema do cotidiano.

Neste trabalho, mostraremos que a fórmula de Heron é uma simplificação da fórmula de Brahmagupta, matemático e astrônomo hindu, que elaborou uma brilhante fórmula para calcular a área de um quadrilátero, conhecendo apenas as medidas dos seus lados, desde que este quadrilátero seja cíclico, ou seja, o quadrilátero onde seus quatro vértices são pontos de uma mesma circunferência.

Para OLIVEIRA (2015), é comum encontrar em livros didáticos, ainda que de forma tímida, considerações acerca da fórmula de Heron, porém é renegada a contribuição de Brahmagupta. Não se encontra em livros de Ensino Médio, muito menos de Ensino Fundamental, qualquer menção a este teórico. Ora, há de ser dada a devida importância à descoberta de Brahmagupta. Seu teorema consiste em aplicar de maneira didática uma fórmula para calcular a área de um quadrilátero cíclico, conhecendo apenas a medida de seus lados.

Ainda que a Fórmula de Brahmagupta não tenha sido aplicado para o cálculo da área de outros quadriláteros convexos, através de estudos atribuídos ao alemão Carl Anton Bretschneider, este teorema foi estendido, tornando-se uma ferramenta apta para o cálculo da área de um quadrilátero convexo qualquer, seja ele cíclico ou não.

Com o objetivo de tornar mais acessíveis a Fórmula de Heron, a Fórmula de Brahmagupta e a Fórmula Bretschneider, propomo-nos a discorrer sobre os referidos temas.

No Capítulo 1 deste trabalho, discorreremos sobre alguns tópicos da história envolvendo Heron e Brahmagupta. A Fórmula de Heron e sua demonstração serão apresentadas no capítulo 2.

A seguir, no capítulo 3, será apresentada a Fórmula de Brahmagupta. A demonstração desta Fórmula será feita de duas formas: uma por meio de conceitos geométricos, entre eles, semelhança de figuras, outra, por meio de trigonometria.

No Capítulo 4, mostraremos como Bretschneider estendeu a Fórmula de Brahmagupta, adaptando-a a um formato capaz de calcular a área de qualquer quadrilátero convexo.

Finalmente, no capítulo 5, faremos a aplicação destas fórmulas em situações práticas do dia a dia.

1 Tópicos da História: Heron e Brahmagupta

1.1 Heron

Heron de Alexandria nasceu e morreu no primeiro século da era cristã (10 d.C a 70 d. C). Além de matemático, foi também mecânico. Detentor de conhecimentos geométricos e de engenharia, Heron é especialmente conhecido pela fórmula que leva seu nome e se aplica ao cálculo da área do triângulo. Seu trabalho mais importante no campo da geometria, *Metrica*, permaneceu desaparecido até 1896. Versa sobre a medição de figuras simples de planos sólidos, com prova das fórmulas envolvidas no processo. Tratava da divisão das figuras planas e sólidas e contém a fórmula de Herão (embora esta talvez tenha sido descoberta por Arquimedes) para o cálculo da área de um triângulo e um método (já antecipado pelos babilônios) de aproximação a uma raiz quadrada de números não quadrados.

Sua preferência matemática, de forte influência babilônica, era pelos exemplos de mensuração. Trabalhou com um algoritmo para extração de raízes quadradas e cúbicas, já usado pelos babilônios a mais de 2000 anos antes dele, e desenvolveu fórmulas para o cálculo do volume de diversos sólidos, como cones, pirâmides, cilindros, paralelepípedos, prismas, troncos de cones e pirâmides, esferas e segmentos esféricos, anéis cilíndricos e alguns prismatóides. Escreveu sobre mecânica, onde são conhecidos 13 trabalhos, entre eles *Máquinas de guerra e Mecânica*, onde trata de diversas máquinas simples e do movimento circular. Em *Pneumatica* descreveu os princípios de funcionamento de sua máquina a vapor. Em *Catoptrica* escreveu sobre óptica, onde demonstrou os fundamentos da propagação retilínea da luz e a lei da reflexão. Em *Dioptra*, nome de um aparelho de utilidade análoga à dos modernos teodolitos, escreveu sobre astronomia e geodésia.

1.2 Brahmagupta

A formação da população hindu é influenciada por uma série de invasões de outros povos, como os arianos, os persas e macedônicos. Essas influências contribuíram em vários campos, entre eles o cultural e o científico.

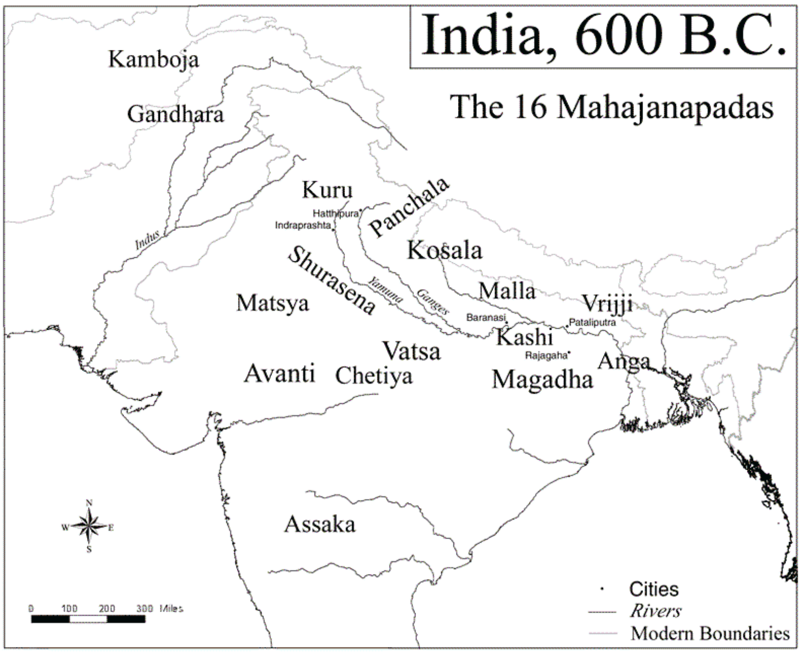


Figura 1.1: Índia, por volta do Séc VI

Dentro deste cenário histórico, no ano de 598, nasceu Brahmagupta. Foi matemático e astrônomo da Índia Central e demonstrou a solução geral para as equações de segundo grau em números inteiros, aplicando na astronomia métodos algébricos que ele próprio desenvolveu.

Figura 1.2: Brahmagupta

Em um de seus livros sobre astronomia, dedicou dois capítulos, em versos, sobre a matemática. Um tratava de progressão aritmética, mostrando a soma da série dos números naturais. O outro, de equações do 2º grau e Geometria, com o qual encontrou as áreas de triângulos, quadriláteros e círculos. Neste livro, Brahmagupta chegou a negar o movimento de rotação da Terra.

Ao lado de outros notáveis hindus, como Aryabhata e Bhaskara, Brahmagupta compõe a lista dos matemáticos mais importantes de seu tempo. Sob a dinastia Gupta, viveu até 665. Morava e trabalhava em Ujjain, onde mais tarde viveu também Bhaskara

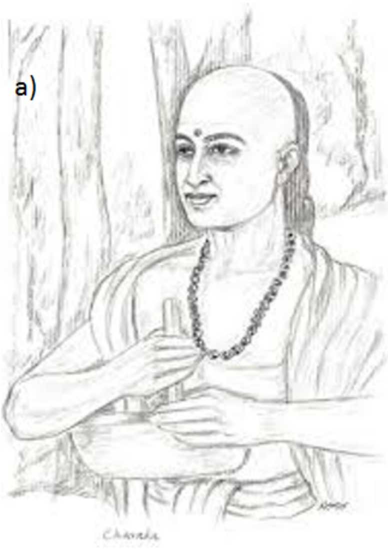


Figura 1.3: a) Arybhata. b) Bhaskara

Os símbolos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, os algarismos, foram inventados pelos hindus por volta do século V d.C. O uso do zero pelos hindus é registrado no século VII, na obra *Brahmasphutasidanta* (A abertura do Universo), do matemático Brahmagupta.

Entre suas descobertas está a generalização da formula de Heron para os quadriláteros cíclicos, que de tão importante, é considerada a mais importante descoberta da geometria Hindu, atribuída a Brahmagupta, embora o mesmo não tenha citado que tais fórmulas só eram válidas para quadriláteros cíclicos.

2 Fórmula de Heron

2.1 Resultados Preliminares

Inicialmente, como resultados preliminares necessários na demonstração da fórmula de Heron, trataremos do Teorema de Pitágoras, Fatoração e da área de triângulo dados um lado e sua altura.

2.1.1 Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é um dos mais belos e importantes teoremas da Matemática de todos os tempos e ocupa uma posição especial na história de nosso conhecimento matemático. Desde o século 5 a. C. até o século 20 d. C. inúmeras demonstrações do Teorema de Pitágoras apareceram. Em 1940, o matemático americano E. S. Loomis publicou 370 demonstrações, mas ainda há mais (LIMA, 2005). Mostremos uma das mais simples demonstrações seguida de uma aplicação.

O Teorema de Pitágoras pode ser enunciado da seguinte forma: em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos.

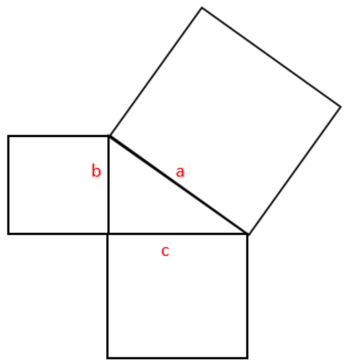


Figura 2.1: Teorema de Pitágoras

Se a é a medida da hipotenusa e se b e c são as medidas dos catetos, o enunciado do Teorema de Pitágoras equivale a firmar que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Agora, apresentamos uma demonstração do Teorema de Pitágoras. Observe a figura:

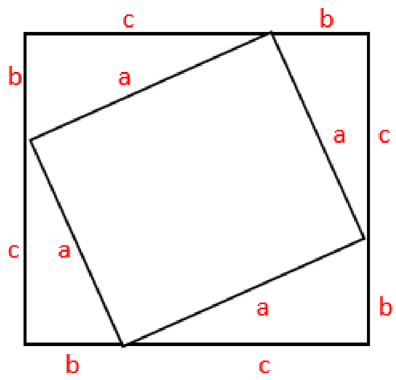


Figura 2.2: Demonstração: Teorema de Pitágoras

Na figura acima temos dois quadrados sobrepostos. O lado do menor tem medida a e o lado do maior tem medida $b + c$. Note que a área do quadrado maior é a soma da área do quadrado menor com à área dos quatro triângulos retângulos de catetos b e c. Daí podemos estabelecer que

$$a^2 + 4 \cdot \frac{bc}{2} = (b + c)^2$$

Desenvolvendo o segundo membro da equação, temos que

$$a^2 + 4 \cdot \frac{bc}{2} = b^2 + 2bc + c^2$$

E finalmente cancelando os termos semelhantes, obtemos o resultado esperado

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Exemplo 1: (LIMA, 2005) Determine o raio R da circunferência circunscrita a um triângulo isósceles de base 8 e altura 10.

Solução: Observe a figura a seguir, onde $BC = 8$ e $AM = 10$.

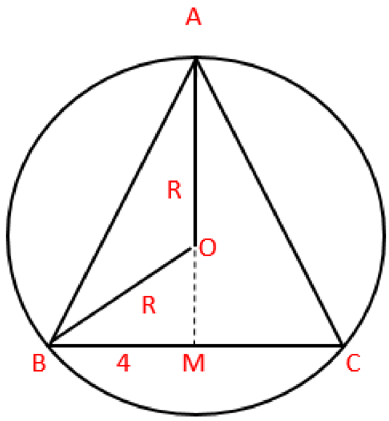


Figura 2.3: Representação do exemplo 1

Seja O o centro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Como devemos ter $OB = OC$, o ponto O está na mediatriz de BC, ou seja, a altura AM. Como também devemos ter $AO = OB = R$, o triângulo retângulo MOB resolve o nosso problema.

$$
\begin{aligned}
& R^2 = 4^2 + (10 - R)^2 \\
\Leftrightarrow\ & R^2 = 4^2 + 100 - 20R - R^2 \\
\Leftrightarrow\ & 20R = 116 \\
\Leftrightarrow\ & R = 5,8
\end{aligned}
$$

2.1.2 Fatoração

As referências bibliográficas usadas neste item são BIANCHINE e SILVEIRA. Sabemos que um número natural pode ser decomposto em um produto de dois ou mais fatores. Esse procedimento é chamado de fatoração. Existem várias maneiras de fatorar um número natural. Observe algumas maneiras de fatorar o número 72, por exemplo.

$$72 = 8 \cdot 9 \qquad 72 = 6 \cdot 12 \qquad 72 = 2 \cdot 2 \cdot 18 \qquad 72 = 2^3 \cdot 3^2$$

Assim como é possível fatorar um número natural, alguns polinômios também podem ser fatorados.

Fatorando um polinômio colocando em evidência os fatores comuns

Dado o polinômio $25ab^2 - 15a^3b$, podemos reescrever cada termo da seguinte forma

$$25ab^2 = 5 \cdot 5 \cdot a \cdot b \cdot b$$
$$15a^3b = 3 \cdot 5 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b$$

O fator comum é $5ab$, portanto, colocando este fator em evidência, temos que

$$25ab^2 - 15a^3b = 5ab(5b - 3a^2)$$

Fatorando por agrupamento

Consideremos a seguinte expressão: $ax + ay + bx + by$. Vamos escrever este polinômio na forma fatorada. Observe que não há fatores comuns a todos os termos desse polinômio, mas é possível agrupá-los de modo que cada grupo tenha um fator comum. Nesse caso, o polinômio é fatorado por agrupamento. Agrupamos convenientemente os termos:

$$(ax + ay) + (bx + by)$$

Colocamos em evidência o fator comum de cada grupo

$$a(x + y) + b(x + y) \tag{2.1}$$

colocamos, finalmente, em evidência o fator comum $(x + y)$

$$(x + y) \cdot (a + b) \tag{2.2}$$

Diferença de Dois Quadrados: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Estes próximos quatro tipos de fatoração que veremos estão relacionados aos produtos notáveis. Sabe-se que o produto da soma pela diferença de dois termos nos leva à diferença de dois quadrados, então podemos utilizar de forma inversa este conhecimento na fatoração da diferença de dois quadrados. Vejamos este exemplo na sequência:

$$25y^2 - 9z^2$$

Visto que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, podemos realizar a fatoração como a seguir:

$$25^2 - 9z^2 = (5y)^2 - (3z)^2 = (5y + 3z)(5y - 3z)$$

Tal fatoração foi realizada se encontrando o valor de a e b, que são respectivamente a raiz quadrada do primeiro e do segundo termo e então os substituindo em $(a + b)(a - b)$.

Exemplos:

$$
\begin{aligned}
169a^2 - 196b^2 &= (13a + 14b)(13a - 14b) \\
49w^2 - 36y^2 &= (7w + 6y)(7w - 6y) \\
256a^4 - 729b^6 &= (16a^2 + 27b^3)(16a^2 - 27b^3)
\end{aligned}
$$

Trinômio Quadrado Perfeito - Soma: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

Quando desenvolvemos o quadrado da soma de dois termos chegamos a um trinômio quadrado perfeito, que é o que demonstra a sentença acima, só que temos os membros em ordem inversa. Então o quadrado da soma de dois termos é a forma fatorada de um trinômio quadrado perfeito. Como fatorar o trinômio abaixo?

$$x^2 + 14x + 49$$

Se o pudermos escrever como $a^2 + 2ab + b^2$ estaremos diante de um trinômio quadrado perfeito, que fatorado é igual a $(a + b)^2$.

Obtemos o valor de a extraindo a raiz quadrada de x^2 no primeiro termo e o valor de b extraindo a raiz quadrada de 49 no terceiro termo, portanto $a = x$ e $b = 7$.

Ao substituirmos a por x e b por 7 nos termos do trinômio $a^2 + 2ab + b^2$ devemos chegar a uma variação do trinômio original:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 7 + 7^2$$

Realizando a substituição de a e b, vamos então analisar $a^2 + 2ab + b^2$ termo a termo para verificar se o polinômio obtido é igual ao polinômio original.

Quando substituímos a por x em a^2 chegamos ao x^2 original.

Ao substituirmos a por x e b por 7 em $2ab$ obtivemos $2 \cdot x \cdot 7$, equivalente ao $14x$ original.

E finalmente substituindo b por 7 em b^2 chegamos a 7^2, equivalente ao 49 do terceiro termo do polinômio original.

Como foi possível escrever $x^2 + 14x + 49$ na forma $a^2 + 2ab + b^2$, então estamos mesmo diante de um trinômio quadrado perfeito que pode ser fatorado assim:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 7 + 7^2 = (x+7)^2$$

Se o polinômio em questão não fosse um trinômio quadrado perfeito, não poderíamos realizar a fatoração desta forma, visto que a conversão de $x^2+14x+49$ em $a^2+2ab+b^2$ levaria a um polinômio diferente do original. Por exemplo, se o trinômio fosse $x^2+15x+49$, o segundo termo $15x$ iria diferir do segundo termo obtido via substituição de a e b que é $14x$, portanto não teríamos um trinômio quadrado perfeito.

Exemplos:

$$\begin{aligned} 121 + 22a + a^2 &= 11^2 + 2 \cdot 11 \cdot a + a^2 = (11+a)^2 \\ 4x^2 + 12xy + 9y^2 &= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = (2x+3y)^2 \\ 25z^4 + 100z^2 + 100 &= (5z^2)^2 + 2 \cdot 5z^2 \cdot 10 + 10^2 = (5z^2+10)^2 \end{aligned}$$

Trinômio Quadrado Perfeito - Diferença: $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

Assim como o caso da soma visto acima, de forma análoga temos o caso da diferença. Vejamos este outro trinômio:

$$4x^2 - 20x + 25$$

Como $2x$ é a raiz quadrada de $4x^2$, do primeiro termo, e 5 é a raiz quadrada de 25 do terceiro termo, podemos reescrevê-lo como a seguir, substituindo a por $2x$ e b por 5 temos:

$$(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2$$

Como os respectivos termos do polinômio original e do polinômio acima são iguais, temos um trinômio quadrado perfeito que pode ser escrito na forma $a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$:

$$(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = (2x-5)^2$$

Logo

$$4x^2 - 20x + 25 = (2x-5)^2$$

Exemplos:

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 4y + (4y)^2 = (3x - 4y)^2$$
$$49a^2 - 84ab + 36b^2 = (7a)^2 - 2 \cdot 7a \cdot 6b + (6b)^2 = (7a - 6b)^2$$
$$9m^4 - 12m^2 + 4 = (3m^2)^2 - 2 \cdot 3m^2 \cdot 2 + 2^2 = (3m^2 - 2)^2$$

Área de triângulo dados um lado e sua altura relativa

Para MORGADO (2002), dentre os estudos da Geometria, o triângulo incide na figura plana mais simples. Além de ser a mais simples, é a mais admirável de todas, pois possui várias aplicações diante as ocasiões ligadas ao dia-a-dia. Os engenheiros usam frequentemente formas triangulares nas suas construções, para torná-las mais protegidas.

A forma triangular é bastante usada em várias situações do nosso cotidiano. Mas, e como faremos para calcular a área do triângulo? Para isso vamos considerar o triângulo de base b e altura h, ou seja, construiremos o triângulo ABC com base BC e altura h, como está representado na figura:

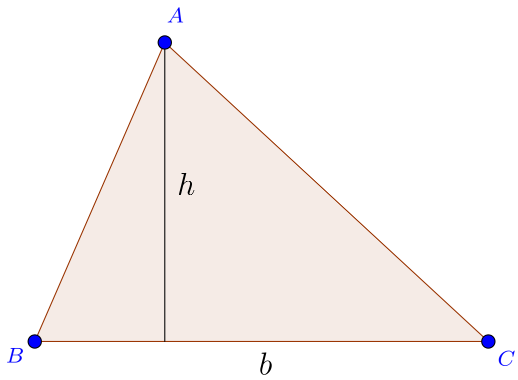


Figura 2.4: Triângulo de base de medida b e altura de medida h

Pelo vértice oposto à base b que consideramos, traçamos uma reta paralela, dessa forma obtemos a seguinte figura:

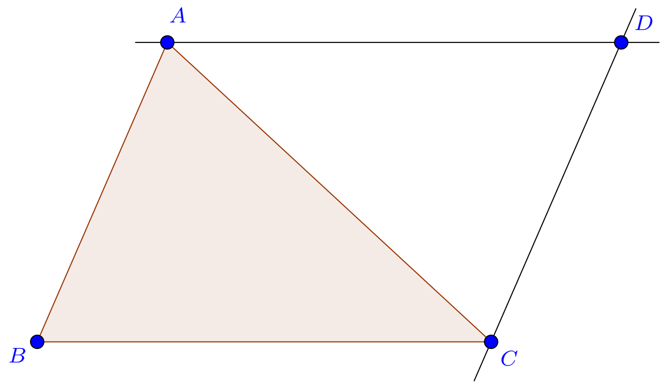


Figura 2.5: Construção 1 no Triângulo

Traçamos por C uma reta paralela a AB, obtendo assim o paralelogramo $ABCD$:

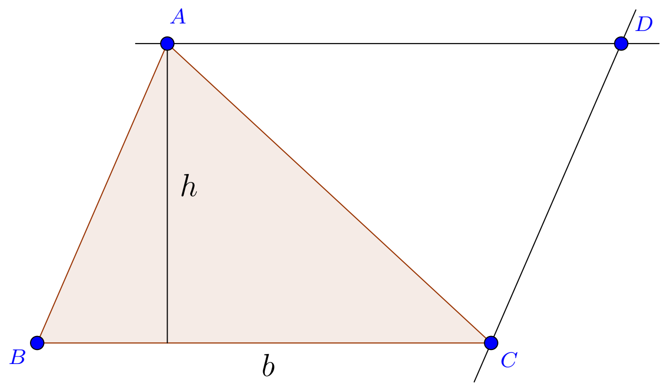


Figura 2.6: Construção 2 no Triângulo

Assim, a área do triângulo é a metade de área do paralelogramo, isto é, a área de um triângulo é a metade do produto da medida da base pela medida da altura, ou seja, $A = \dfrac{bh}{2}$.

Temos então que a área de um triângulo pode ser determinada encontrando as medidas de um de seus lados (tomado por base) e a altura correspondente a esse lado. A altura é a distância do vértice até a linha que dá a base da figura. Nessas condições um dos lados e a altura correspondente a área do triângulo pode ser determinada pegando a metade do produto entre a base e a altura. Como mostra a fórmula acima.

2.2 Fórmula de Heron

Conhecendo as medidas a, b, c dos lados de um triângulo qualquer, podemos calcular sua área S de forma bastante didática, graças aos estudos realizados por Heron de Alexandria.

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

onde p é o semiperímetro.

2.3 Demonstração da fórmula de Heron

Conforme OLIVEIRA (2015), seja um triângulo qualquer ABC, tal que $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$. Traçamos a altura relativa a um dos lados, como na figura 2.7:

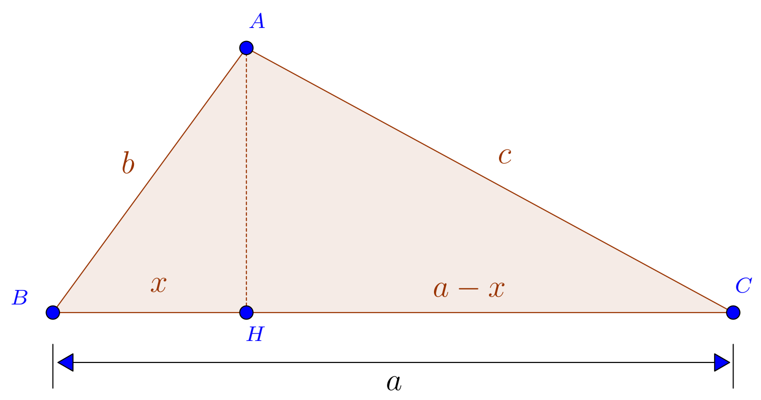


Figura 2.7: Demonstração utilizando o teorema de Pitágoras
Fonte: Elaborada pelo Autor

O lado BC foi dividido de tal forma que $\overline{BH} = x$ e $\overline{HC} = a - x$. Aplicando-se o Teorema de Pitágoras nos triângulos ABH e ACH, obtemos:

$$\begin{cases} c^2 = h^2 + x^2 \\ b^2 = h^2 + (a-x)^2 \end{cases}$$

Como $x > 0$, isolando x em $c^2 = h^2 + x^2$, temos $x = \sqrt{c^2 - h^2}$. Substituindo este valor de x na outra igualdade encontrada, podemos escrever:

$$\begin{aligned} b^2 &= h^2 + \left(a - \sqrt{c^2 - h^2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow b^2 &= h^2 + a^2 - 2a\sqrt{c^2 - h^2} + \left(\sqrt{c^2 - h^2}\right)^2, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$b^2 = h^2 + a^2 - 2a\sqrt{c^2 - h^2} + c^2 - h^2,$$

de onde segue:

$$\begin{aligned}
\sqrt{c^2 - h^2} &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \\
\Rightarrow c^2 - h^2 &= \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2 \\
\Rightarrow h^2 &= c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2.
\end{aligned}$$

Agora, fatoramos, transformando a diferença de quadrados em produto da soma pela diferença:

$$h^2 = \left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)\left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right),$$

ou ainda, na forma:

$$h^2 = \left(\frac{2ac - (a^2 + c^2 - b^2)}{2a}\right)\left(\frac{2ac + (a^2 + c^2 - b^2)}{2a}\right).$$

Notamos o trinômio quadrado perfeito em cada fator:

$$h^2 = \frac{\left[b^2 - (a-c)^2\right]\left[(a+c)^2 - b^2\right]}{4a^2},$$

de onde podemos escrever

$$h^2 = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4a^2}.$$

Sendo p o semiperímetro do triângulo. Então:

$$p = \frac{a+b+c}{2} \Leftrightarrow 2p = a+b+c.$$

Podemos expressar cada fator em função do semiperímetro p:

- $a + b + c = 2p$

- $b + c - a = 2p - 2a = 2(p - a)$

- $a + c - b = 2p - 2b = 2(p - b)$

- $a + b - c = 2p - 2c = 2(p - c)$

Substituindo estas expressões, obtemos:

$$h^2 = \frac{2^4 p(p-a)(p-b)(p-c)}{4a^2}$$

Extraímos a raiz quadrada dos dois lados da igualdade:

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Seja S a área do triângulo ABC em função do lado a e de sua altura relativa h:

$$S = \frac{a}{2} \cdot h \Leftrightarrow S = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

de onde segue que:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

que é a fórmula de Heron.

3 Fórmula de Brahmagupta

3.1 Resultados Preliminares

Como resultados preliminares necessários na demonstração da fórmula de Brahmagupta, trataremos da Razão, Proporção, Semelhança de Triângulos e Razão entre áreas de figuras semelhantes.

3.1.1 Razão e Proporção

Razão é uma técnica matemática usada para fazer comparações entre duas quantidades, entre duas medidas ou entre duas grandezas diversas. Isto é feito examinando-se o quociente entre duas medidas ou duas grandezas. Por exemplo, se quisermos examinar a concentração de alunos numa escola, calculamos o quociente entre o número de alunos e a área da escola. O termo razão significa divisão, isto é, a razão de certo número a por certo número b é o quociente $a : b$, que se lê a está para b, também indicado em forma de fração $\frac{a}{b}$, só que neste caso não se lê como fração, mas como a parte a representando tantas vezes parte b ou o contrário , a parte b representando tantas vezes a parte a, isto é , o inverso da razão $\frac{b}{a}$.

Exemplo: a razão 1 para 2 é o quociente $\frac{1}{2}$. A razão de 6 para 7 é o quociente $\frac{6}{7}$. Como fração se lê meio para a primeira situação e seis sétimos para o segundo caso, como razão se lê 1 está para 2, ou seja, para cada duas unidades temos uma, para a segunda situação lemos, 6 está para 7, ou seja, para cada 7 unidades temos 6 unidades. A fração está expressando divisão em partes iguais e a razão está expressando uma comparação.

Exemplo: numa partida de basquete um jogador faz 18 arremessos e acerta 4, a razão entre o número de acertos e de arremessos é:

$$\frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

O que significa que em cada nove arremessos ele acerta dois, isto é uma comparação entre o número de arremessos e o número de acertos. Lendo este quociente simplesmente como uma fração significa que de todos os arremessos ele acertou dois nonos.

Já a proporção é entendida da seguinte forma. Dados, por exemplo, os números 1, 5, 2, 10, dizemos, neste caso, que eles são proporcionais, pois as razões entre eles são iguais. Ou seja

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$$

Então, dizemos que os números a, b, c, d são proporcionais se as razões entre eles são iguais. Assim:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k,$$

onde k é a constante de proporcionalidade.

Podemos ainda representar esta proporção assim, $a : b = c : d$, onde os termos a e d são chamados de extremos e os termos b e c são chamados de meios. Daí, uma das propriedades mais conhecidas da proporção: o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. De fato é fácil perceber que no exemplo numérico acima, o produto $5 \cdot 2$ é igual ao produto $1 \cdot 10$.

3.1.2 Semelhança de triângulos

Dois triângulos serão semelhantes se satisfizerem duas condições simultaneamente: se seus lados correspondentes possuírem medidas proporcionais e se os ângulos correspondentes forem iguais (congruentes).

Vejamos um desenho para que possamos compreender melhor:

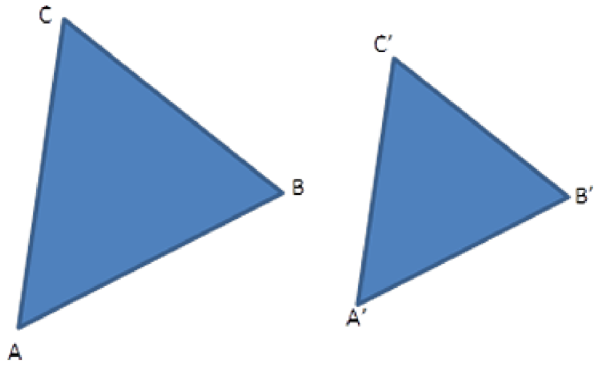


Figura 3.1: Triângulos Semelhantes

Antes, temos que determinar a correspondência dos vértices de cada triângulo, pois assim determinaremos a correspondência dos lados e dos ângulos entre estes dois triângulos.

Os vértices A, B, C correspondem, respectivamente, aos vértices A', B', C'. Sendo assim, montaremos as razões de proporcionalidade entre os lados correspondentes.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = k$$

Uma das condições é que todos os lados correspondentes possuam uma proporcionalidade, que chamaremos neste caso de k. Ressaltando que essa razão foi construída pela divisão de cada lado correspondente: veja que o lado $A'B'$ do segundo triângulo corresponde ao lado AB do primeiro triângulo. Por este fato, a divisão foi feita entre eles, e de mesmo modo com os outros lados.

Entretanto, apenas a condição de proporcionalidade dos lados não é suficiente para afirmarmos a semelhança entre os dois triângulos. Necessitamos que seus ângulos correspondentes sejam iguais, isto é,

$$m(\angle BAC) = m(\angle B'A'C'), m(\angle ABC) = m(\angle A'B'C'), m(\angle ACB) = m(\angle ACB)$$

Sendo assim,indicaremos a semelhança destes triângulos desta forma:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{A'C'}{AC} = k \\ \\ m(\angle BAC) = m(\angle B'A'C'), m(\angle ABC) = m(\angle A'B'C'), m(\angle ACB) = m(\angle ACB) \end{cases}$$

Exemplo: Verifique se os triângulos a seguir são proporcionais.

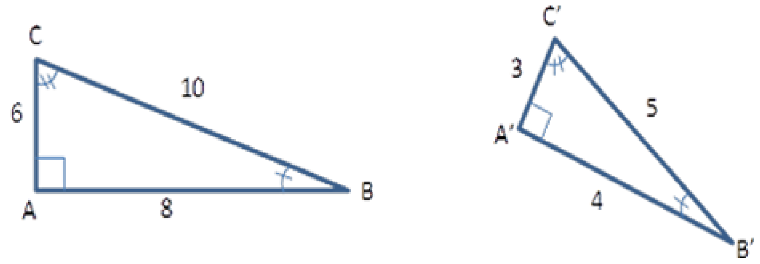


Figura 3.2: Exemplo: Triângulos Semelhantes

Verificarmos a congruência entre os ângulos: $\angle BAC$ e $\angle B'A'C'$, $\angle ABC$ e $\angle A'B'C'$, $\angle ACB$ e $\angle ACB$.

Verificamos também a proporcionalidade entre os lados:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Note que todos os lados possuem a mesma razão de proporcionalidade $\frac{1}{2}$. Sendo assim, podemos afirmar que:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

3.1.3 Razão entre áreas de figuras semelhantes

A razão entre as áreas de duas superfícies semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Exemplo: Se os triângulos ABC e MNP da figura forem semelhantes e tiverem áreas S_1 e S_2, respectivamente, então

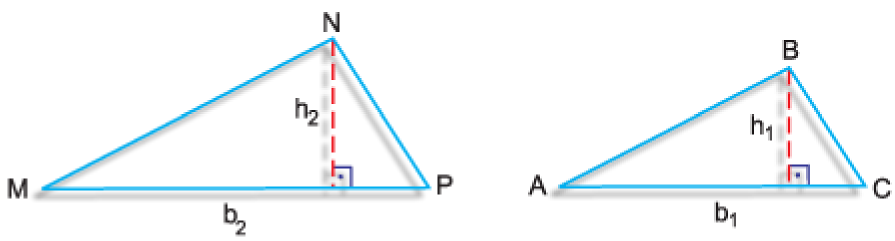


Figura 3.3: Razão entre as áreas de triângulos semelhantes

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{h_1}{h_2} = k \quad \text{e} \quad \frac{S_1}{S_2} = k^2$$

Demonstração. Da semelhança dos triângulos ABC e MNP, tem-se

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{h_1}{h_2} = k$$

Por outro lado,

$$S_1 = \frac{b_1 \cdot h_1}{2} \quad \text{e} \quad S_2 = \frac{b_2 \cdot h_2}{2} \tag{3.1}$$

Assim,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{b_1 \cdot h_1}{2}}{\frac{b_2 \cdot h_2}{2}} \Leftrightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{b_1 \cdot h_1}{b_2 \cdot h_2} \Leftrightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{h_1}{h_2} \Leftrightarrow \frac{S_1}{S_2} = k \cdot k \Leftrightarrow \frac{S_1}{S_2} = k^2$$

□

3.2 Fórmula de Brahmagupta

Calcular a área de um quadrilátero inscritível (ou cíclico) usando apenas as medidas de seus lados nem sempre foi tarefa simples. Pelo menos até se conhecer a fórmula de Brahmagupta.

Dado um quadrilátero cíclico qualquer em que os lados sejam a, b, c, e d, pode-se calcular sua área S pela fórmula $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, onde p é seu semiperímetro.

Duas demonstrações da fórmula de Brahmagupta serão apresentadas no decorrer deste capítulo. Como referência para estas demonstrações utilizamos OLIVEIRA (2015) e ROCHA (2016). Discorreremos também um pouco sobre a história deste matemático e veremos que quando um dos lados do quadrilátero for nulo a fórmula de Brahmagupta será interpretada como um caso particular e se transforma na fórmula de Heron para o cálculo da área de um triângulo qualquer.

3.3 Primeira Demonstração

Nesta primeira demonstração, aplicaremos pré requisitos básicos da matemática. Pressupõe-se o entendimento de que sejam semelhança de triângulo, razão entre áreas e figuras semelhantes, Fórmula de Heron para a área de triângulos, fatoração, razão e proporção. Consiste em prolongar dois lados do quadrilátero e comparar as áreas dos triângulos encontrados, semelhantes entre si.

3.3.1 Demonstração

De acordo com OLIVEIRA (2015), dado o quadrilátero inscritível $ABCD$ tal que $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$ e $\overline{AD} = d$, (Fig. 3.4). Se o quadrilátero é inscritível, então seus ângulos opostos são suplementares. Assim, se $m(\angle BAD) = \alpha$, então $m(\angle BCD) = 180° - \alpha$, e, analogamente, se $m(\angle ADC) = \beta$ então $m(\angle ABC) = 180° - \beta$.

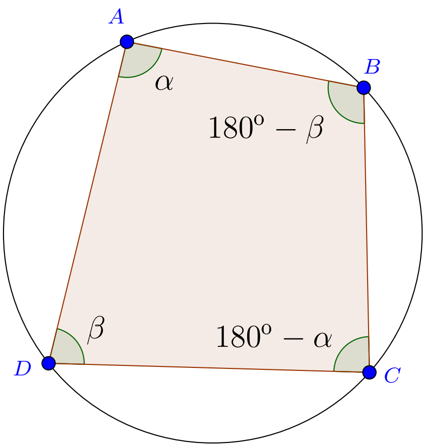


Figura 3.4: Ângulos opostos no quadrilátero inscritível
Fonte: Elaborada pelo Autor

Agora prolonguemos os lados $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ até que se interceptem (não vale para paralelogramo) no ponto E, como na figura 3.5. Admitamos que $\overline{AE} = x$ e $\overline{DE} = y$, então temos que $\overline{BE} = x - a$ e $\overline{CE} = y - c$.

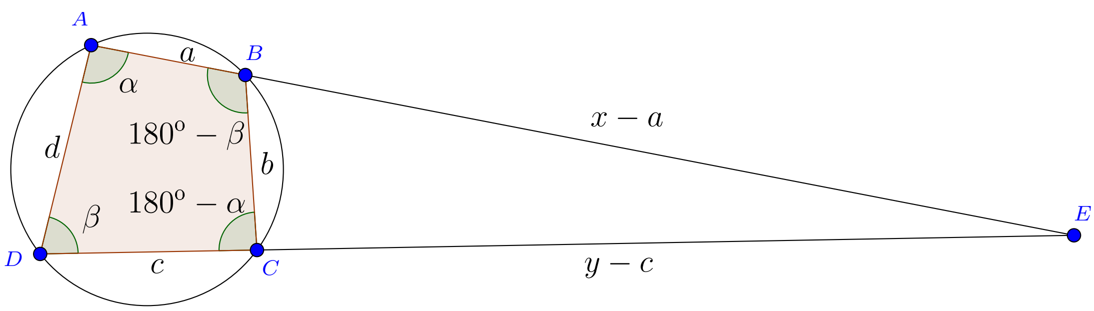


Figura 3.5: Lados AB e CD prolongados
Fonte: Elaborada pelo Autor

Notemos que o caso AA de semelhança de triângulos nos diz que $\triangle ADE \sim \triangle BCE$. Como a área do quadrilátero é a diferença entre as áreas desses triângulos, segue pela Fórmula de Heron a área do triângulo ADE, onde $x+y+d$ seu perímetro,

$$S_{ADE} = \sqrt{\left(\frac{x+y+d}{2}\right)\left(\frac{x+y+d}{2} - x\right)\left(\frac{x+y+d}{2} - y\right)\left(\frac{x+y+d}{2} - z\right)}$$

ou ainda, na forma:

$$S_{ADE} = \frac{1}{4}\sqrt{(x+y+d)(-x+y+d)(x-y+d)(x+y-d)}$$

Devido à semelhança de triângulos, encontramos a seguinte proporção:

$$\frac{d}{b} = \frac{x}{y-c} = \frac{y}{x-a}$$

Ao desenvolver esta dupla igualdade, é possível encontrar as seguintes relações entre x e y:

$$x+y = \frac{d(a+c)}{d-b} \quad \text{e} \quad x-y = \frac{d(a-c)}{d+b} \tag{3.2}$$

Relacionando a medida d as igualdades 3.2, temos:

$$\begin{aligned}
x+y+d &= \frac{d(a+c)}{d-b} + d = d\left(\frac{a+c}{d-b} + 1\right) = \frac{d(a+c+d-b)}{d-b};\\
-x+y+d &= \frac{-d(a-c)}{d+b} + d = d\left(\frac{a-c}{d+b} + 1\right) = \frac{d(c-a+d+b)}{d+b};\\
x-y+d &= \frac{d(a-c)}{d+b} + d = d\left(\frac{a-c}{d+b} + 1\right) = \frac{d(a-c+d+b)}{d+b};\\
x+y-d &= \frac{d(a+c)}{d-b} - d = d\left(\frac{a+c}{d-b} - 1\right) = \frac{d(a+c+b-d)}{d-b}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Substituindo as expressões 3.3 no cálculo da área do triângulo ADE, obtemos:

$$S_{ADE} = \frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{d(a+c+d-b)}{d-b}\right)\left(\frac{d(c-a+d+b)}{d+b}\right)\left(\frac{d(a-c+d+b)}{d+b}\right)\left(\frac{d(a+c+b-d)}{d-b}\right)},$$

que, ao ser simplificada, resulta:

$$S_{ADE} = \frac{1}{4} \cdot \frac{d^2}{d^2 - b^2} \sqrt{(a+c+d-b)(c-a+d+b)(a-c+d+b)(a+c+b-d)} \quad (3.4)$$

Como os triângulos ADE e CBE são semelhantes, temos:

$$\frac{S_{CBE}}{S_{ADE}} = \frac{b^2}{d^2} \Leftrightarrow \frac{S_{ADE} - S_{ABCD}}{S_{ADE}} = \frac{d^2 - b^2}{d^2} \quad (3.5)$$

Substituindo 3.5 em 3.4, encontramos uma primeira expressão para a área do quadrilátero desejado:

$$S_{ADE} = \frac{1}{4} \cdot \frac{S_{ADE}}{S_{ABCD}} \sqrt{(a+c+d-b)(c-a+d+b)(a-c+d+b)(a+c+b-d)},$$

ou ainda, na seguinte forma:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{4} \sqrt{(a+c+d-b)(c-a+d+b)(a-c+d+b)(a+c+b-d)} \quad (3.6)$$

Definindo-se p o semiperímetro do quadrilátero, ou seja, $p = \frac{a+b+c+d}{2}$, podemos manipular a expressão 3.6 para a área do quadrilátero e obtemos:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{4} \sqrt{(2p-2b)(2p-2a)(2p-2c)(2p-2d)},$$

ou ainda, na forma:

$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

conhecida como a Fórmula de Brahmagupta.

3.4 Segunda Demonstração

Tomemos como base para esta demonstração a trigonometria. Por ser um assunto recorrente no Ensino Médio, a trigonometria torna esta demonstração uma das mais simples. É, portanto, do nosso ponto de vista, a mais adequada para o professor trabalhar em sala de aula.

3.4.1 Demonstração

Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível de lados a, b, c, d,então a fórmula que fornece a sua área S é dada por:

$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

onde $2p = a + b + c + d$.

Conforme ROCHA (2016), seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível tal que $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ e $DA = d$.

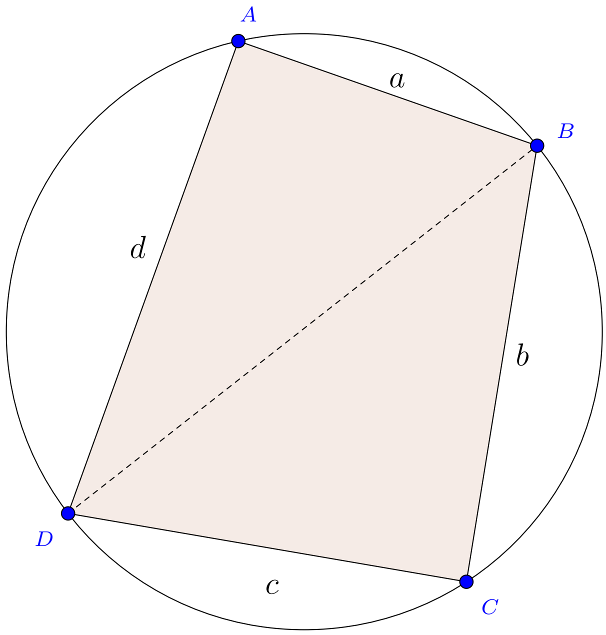


Figura 3.6: Quadrilátero inscrito dividido em dois triângulos
Fonte: Elaborada pelo Autor

Pondo $\alpha = \angle ABC$, temos $180^{o} - \alpha = \angle ADC$. Aplicando a Lei dos cossenos ao triângulo ABC, obtemos:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2abc\cos\alpha$$

Por outro lado, usando o fato de que $\cos(180^{o} - \alpha) = -\cos\alpha$ e aplicando a lei dos cossenos ao triângulo ACD, obtemos:

$$AC^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos(180^{o} - \alpha) \Leftrightarrow AC^2 = c^2 + d + 2cd\cos\alpha \tag{3.7}$$

Assim:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$

Pela relação fundamental da trigonometria, temos $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Assim:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\alpha &= \sqrt{1 - \left[\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}\right]^2} \\
&= \frac{\sqrt{[(a+b)^2 - (c-d)^2]\cdot[(c+d)^2 - (a-b)^2]}}{2(ab + cd)} \\
&= \frac{\sqrt{(2p - 2d)\cdot(2p - 2c)\cdot(2p - 2b)\cdot(2p - 2a)}}{2(ab + cd)} \\
&= \frac{2}{ab + cd}\cdot\sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)} \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Note que os triângulos ABC e ACD particionam o quadrilátero $ABCD$. Daí $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$. Portanto, aplicando a fórmula do seno para a área dos triângulos ABC e ACD e sabendo-se que $\operatorname{sen}(180^{\circ} - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$, obtemos:

$$\begin{aligned}
S_{ABCD} &= S_{ABC} + S_{ACD} \\
&= \frac{ab\operatorname{sen}\alpha}{2} + \frac{cd\operatorname{sen}(180^{\circ} - \alpha)}{2} = \frac{ab + cd}{2}\cdot\operatorname{sen}\alpha \\
&= \frac{ab + cd}{2}\cdot\frac{2}{ab + cd}\cdot\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \\
&= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}
\end{aligned}$$

4 Área de Quadriláteros Convexos Quaisquer

Ao pesquisar sobre a fórmula do Brahmagupta é comum encontrarmos uma generalização para quadriláteros convexos quaisquer. Essa generalização está relacionada com estudos feitos pelo matemático alemão Carl Anton Bretschneider. Num quadrilátero de lados a, b, c, d, com dois ângulos internos opostos entre si α e β, sua área S pode ser calculada pela fórmula a seguir, onde p é o semiperímetro.

$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

No entanto é raro encontrar sua demonstração, o que faremos a seguir.

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{AD} = d$, $\angle ABC = \alpha$, $\angle CDA = \beta$ e sua diagonal $\overline{AC} = x$, conforme a figura

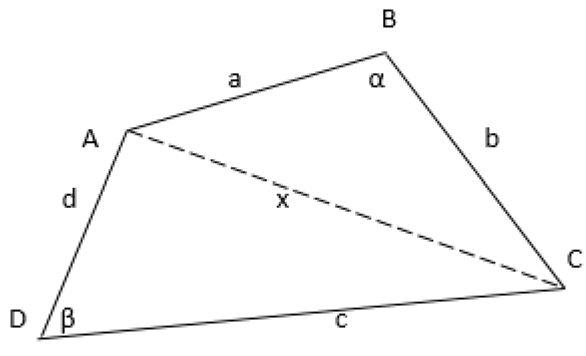


Figura 4.1: Quadrilátero qualquer e sua diagonal AC
Fonte: Elaborada pelo Autor

Para o cálculo da área, focaremos nos triângulos formados pela diagonal AC:

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} \Leftrightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} \alpha + \frac{1}{2}cd \operatorname{sen} \beta$$

Elevando ao quadrado os dois lados dessa igualdade, podemos escrever:

$$4\left(S_{ABCD}\right)^2 = \left(ab \operatorname{sen} \alpha\right)^2 + \left(cd \operatorname{sen} \beta\right)^2 + 2abcd \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

Aplicamos a lei dos cossenos nos triângulos citados:

$$\begin{cases} x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \\ x^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta \end{cases}$$

Igualando-as, encontramos

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta \Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos\alpha - 2cd\cos\beta$$

Elevamos ao quadrado os dois lados desta igualdade para depois comparar com a expressão para a área que já obtivemos anteriormente:

$$\frac{\left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2}{4} = \left(ab\cos\alpha\right)^2 - 2abcd\cos\alpha\cos\beta + \left(cd\cos\beta\right)^2$$

Somamos, já fatorando o que é possível, esta última igualdade com a expressão encontrada até então envolvendo a área do quadrilátero $ABCD$. Ao fatorar, encontramos $(\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2$ e $(\operatorname{sen}\beta)^2 + (cos\beta)^2$, o que pela relação fundamental da trigonometria podemos substituir por 1. Assim, temos:

$$4\left(S_{ABCD}\right)^2 + \frac{\left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2}{4} = (ab)^2 + (cd)^2 - 2abcd(\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta)$$

Neste passo utilizamos a fórmula para o cosseno da soma:

$$4\left(S_{ABCD}\right)^2 + \frac{\left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2}{4} = (ab)^2 + (cd)^2 - 2abcd\cos(\alpha + \beta)$$

Para fatorarmos a soma $(ab)^2 + (cd)^2$ adicionamos $2abcd$ a fim de completarmos um trinômio quadrado perfeito e simultaneamente subtraímos a mesma expressão. Obtemos então:

$$4\left(S_{ABCD}\right)^2 + \frac{\left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2}{4} = (ab + cd)^2 - 2abcd\left[1 + \cos(\alpha + \beta)\right]$$

Da forma do cosseno do arco duplo, temos que $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$, e utilizando a relação fundamental da trigonometria é equivalente a $\cos(2\theta) + 1 = 2\cos^2\theta$.

Seja $2\theta = \alpha + \beta \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Substituindo na fórmula mencionada, temos $\cos(\alpha + \beta) + 1 = 2\cos^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$. Assim, nossa expressão para a área do quadrilátero é:

$$4\left(S_{ABCD}\right)^2 + \frac{\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2}{4} = (ab+cd)^2 - 4abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Ou ainda na seguinte forma

$$16\left(S_{ABCD}\right)^2 + \left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2 = 4\left(ab+cd\right)^2 - 16abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Desenvolvemos esta expressão a fim de encontrar a fórmula:

$$16\left(S_{ABCD}\right)^2 = (2ab+2cd)^2 - \left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2 - 16abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Que pode ser escrita como

$$16\left(S_{ABCD}\right)^2 = \left[(a+b)^2-(c-d)^2\right]\left[(c+d)^2-(a-b)^2\right] - 16abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Fatorando mais uma vez, encontramos:

$$16\left(S_{ABCD}\right)^2 = (a+b+c-d)(a+b-c+d)(a+c+d-b)(b+c+d-a) - 16abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Definamos p o semiperímetro do quadrilátero, onde $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$. Substituindo na expressão anterior, obtemos:

$$16\left(S_{ABCD}\right)^2 = (2p-2d)(2p-2c)(2p-2b)(2p-2a) - 16abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Que pode ser escrita na forma

$$\left(S_{ABCD}\right)^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Como o valor da área é positivo, concluímos que

$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

que é a expressão desejada.

Enfim, no caso em que $\alpha + \beta = 180^{\text{o}}$ (quadrilátero inscritível), recuperamos a fórmula de Brahmagupta, pois $\cos 90^{\text{o}} = 0$.

5 Aplicação das Fórmulas

5.1 Aplicação da fórmula de Heron

5.1.1 Irrigação num terreno triangular de lados $48,5$; $64,7$ e $88,8$.

a) Para que o terreno seja totalmente irrigado qual deve ser o menor raio de ação de um irrigador automático?

b) Qual é o raio do maior canteiro circular que pode ser construído no terreno?

5.1.1.1 Solução do item a

Para a irrigação total do terreno, este deve ser posto em uma circunferência (triângulo inscrito). A intersecção das mediatrizes nos dará o centro da circunferência, onde deve ser colocado o irrigador.

Sabemos que:

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \operatorname{sen} \widehat{A} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \operatorname{sen} \widehat{B} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \widehat{C}$$

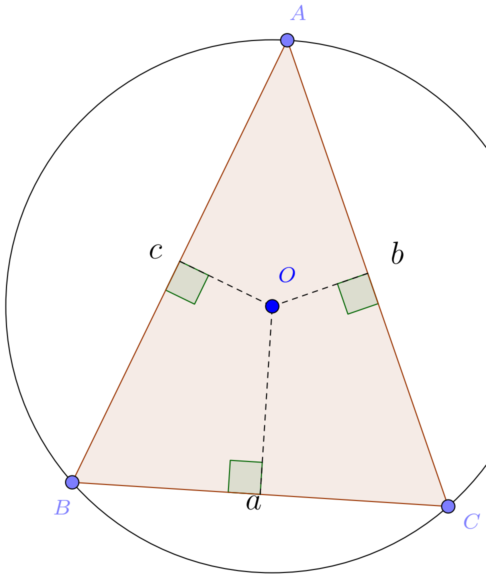


Figura 5.1: Triângulo inscrito numa circunferência
Fonte: Elaborada pelo Autor

Usando

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \widehat{C} \tag{5.1}$$

E pela lei dos senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = 2R$$

Sendo R o raio da circunferência circunscrita ao triângulo, temos:

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = 2R \Leftrightarrow \operatorname{sen} \widehat{C} = \frac{c}{2R} \tag{5.2}$$

Substituindo 5.2 na equação 5.1, temos:

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \frac{c}{2R}$$

Usando a fórmula de Heron, temos:

$$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)} = S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \frac{c}{2R}$$

Como

$$p = \frac{64,7 + 48,5 + 88,8}{2} = 101 \tag{5.3}$$

Temos que

$$\sqrt{(101-48,5)(101-88,8)(101-64,7)(101)} = \frac{1}{2} \cdot (48,5) \cdot (88,8) \cdot \frac{64,7}{2R}$$

Donde

$$R = 45,4595$$

que é o menor raio de ação que o irrigador deverá ter.

5.1.1.2 Solução do item b

O centro do canteiro circular é a intersecção das bissetrizes (incentro). Vemos que a área do triângulo pode ser dividida em três triângulos menores:

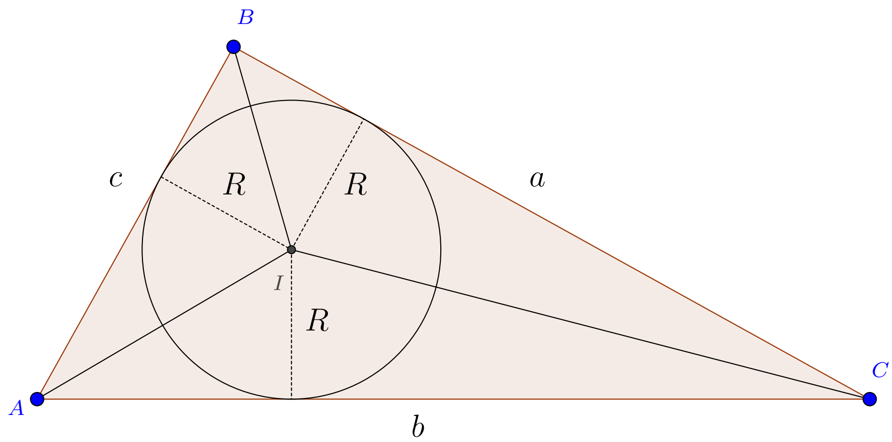


Figura 5.2: Triângulo circunscrito em uma circunferência
Fonte: Elaborada pelo Autor

Pela figura 5.2, temos:

$$\begin{aligned} S &= \frac{aR}{2} + \frac{bR}{2} + \frac{cR}{2} \\ &= \frac{48,5R}{2} + \frac{88,8R}{2} + \frac{64,7R}{2} \end{aligned}$$

Pela fórmula de Heron e conforme cálculo anterior, p = 101, temos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(101-48,5)(101-88,8)(101-64,7)} &= S = \frac{48,5R}{2} + \frac{88,8R}{2} + \frac{64,7R}{2} \\
\Leftrightarrow \sqrt{2348265,15} &= 24,25R + 44,4R + 32,35R \\
\Leftrightarrow 1532,4050 &= 101R \\
\Leftrightarrow R &= 15,1723
\end{aligned}$$

Portanto, o canteiro circular terá, aproximadamente, um raio R = 15,17.

5.2 Aplicação da Fórmula de Brahmagupta

1. Mostrar que a área de um quadrilátero inscritível e circunscritível, simultaneamente, é igual à raiz quadrada do produto de seus lados.

Solução

Seja um quadrilátero com lados de medidas a, b, c, d, nesta ordem. Como o quadrilátero é inscritível, podemos usar a fórmula de Brahmagupta para calcular sua área, ou seja, $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, em que p é seu semiperímetro.

No entanto o quadrilátero também é circunscritível, e a condição necessária e suficiente é que a soma da medida de dois lados opostos seja igual à soma dos outros dois lados, ou seja, $a + c = b + d$. Seu semiperímetro pode ser calculador por:

$$p = \frac{a+b+c+d}{2} = a + c = b + d$$

Substituindo na fórmula de Brahmagupta p por $a + c$ ou por $b + d$, conforme conveniência, temos:

$$\begin{aligned}
S &= \sqrt{(a+c-a)(b+d-b)(a+c-c)b+d-d)} \\
\Leftrightarrow S &= \sqrt{abcd},
\end{aligned}$$

que é a raiz quadrada do produto de seus lados, como queríamos mostrar.

2. Prove que, de todos os quadriláteros que podem ser formados com quatro segmentos dados a, b, c, d, ou seja, de perímetro fixo, o que tem maior área é o que está inscrito em uma circunferência.

Solução

De fato, para que a área $S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2(\delta)}$ de um quadrilátero qualquer seja a maior, devemos subtrair o menor valor possível. Portanto, $abcd\cos^2\delta = 0$, sendo que $\delta = \dfrac{A+C}{2}$.

Como a, b, c, d são diferentes de zero, então $\cos^2\delta = 0$, o que implica que $\delta = \dfrac{\pi}{2}$. Mas $\delta = \dfrac{A+C}{2}$, logo $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{A+C}{2}$, e $\pi = A + C = \pi$. Como vimos anteriormente, quando $A + C = \pi$ o quadrilátero é inscritível e é o de maior área.

3. Um quadrilátero é dito bicêntrico quando este é inscritível e circunscritível. Prove que a área máxima de um quadrilátero bicêntro com perímetro fixo ocorre quando as duas circunferências são concêntricas.

Solução

Ora, pela fórmula de Brahmagupta, temos:

$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Mas, pela condição deste ser circunscritível,

$$a + c = b + d = p$$

Logo, a área do quadrilátero é

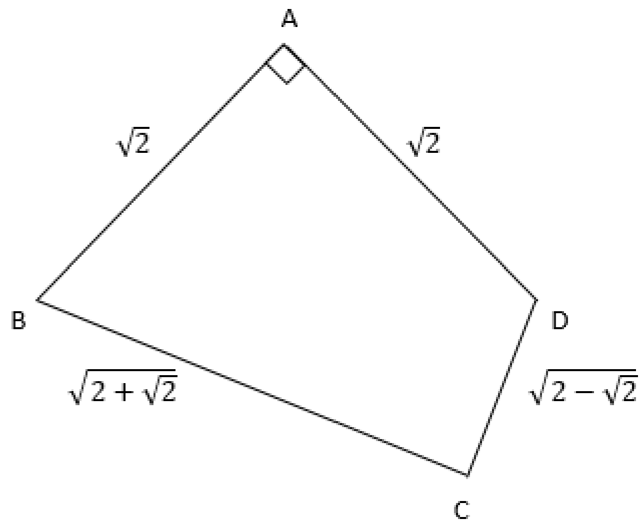
$$S_{ABCD} = \sqrt{abcd}$$

Logo, pela desigualdade entre as médias para quatro números reais positivos,

$$\begin{aligned}
\frac{a+b+c+d}{4} &\geq \sqrt[4]{abcd} \\
\frac{p}{2} &\geq \sqrt{S_{ABCD}} \\
p^2 &\geq 4S_{ABCD}
\end{aligned}$$

E a área máxima ocorre se, e somente se, $a = b = c = d$. Logo, o quadrilátero que queremos é um quadrado. Porém, um quadrado tem ambas circunferências, a circunferência inscrita e a circunscrita, com centro no encontro de suas diagonais, que completa o problema.

4. A respeito do quadrilátero $ABCD$, a seguir, onde se conhecem as medidas dos lados e $\angle BAD = 90^o$, responda:



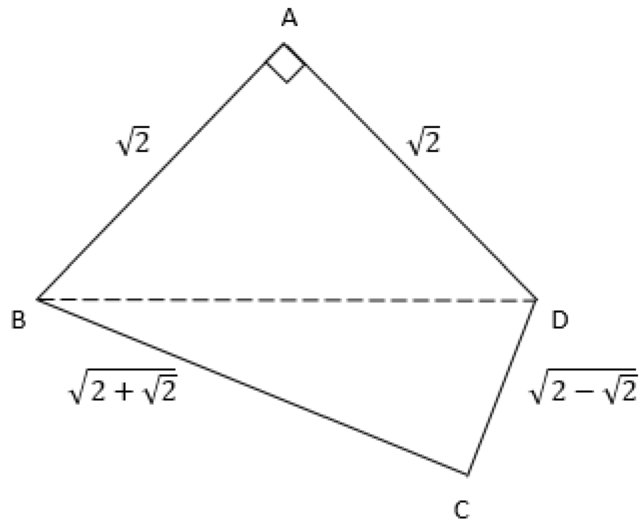
a) Esse quadrilátero é inscritível?
b) Qual sua área?

Solução

a) Para que o quadrilátero $ABCD$ seja inscritível, é necessário e suficiente que seus ângulos opostos sejam suplementares. Para isso, basta provarmos que $\angle BCD = 90^o$.

Inicialmente, calculemos a diagonal BD.

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 \\ BD^2 &= \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 \\ BD^2 &= 2 + 2 \\ BD^2 &= 4 \\ BD &= 2 \end{aligned}$$



Agora, suponhamos que o triângulo BCD também seja retângulo.

$$
\begin{aligned}
BD^2 &= BC^2 + CD^2 \\
BD^2 &= \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 \\
BD^2 &= 2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2} \\
BD^2 &= 4 \\
BD &= 2
\end{aligned}
$$

Portanto o quadrilátero é inscritível.

b) Para o cálculo da área S, usamos a fórmula de Brahmagupta.

$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, onde a, b, c, d são os lados e p é o semiperímetro.

Calculando o semiperímetro:

$$\begin{aligned}
p &= \frac{a+b+c+d}{2} \\
p &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\
p &= \frac{1,414+1,414+\sqrt{2+1,414}+\sqrt{2-1,414}}{2} \\
p &= \frac{1,414+1,414+\sqrt{3,414}+\sqrt{0,586}}{2} \\
p &= \frac{1,414+1,414+1,847+0,765}{2} \\
p &= \frac{5,44}{2} \\
p &= 2,72
\end{aligned}$$

Aplicando em

$$\begin{aligned}
S_{ABCD} &= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \\
S_{ABCD} &= \sqrt{(2,72-1,414)(2,72-1,414)(2,72-1,847)(2,72-0,765)} \\
S_{ABCD} &= \sqrt{(1,306)(1,306)(0,873)(1,955)} \\
S_{ABCD} &= \sqrt{2,911} \\
S_{ABCD} &= 1,706
\end{aligned}$$

5.3 Aplicação da fórmula de Bretschneider

a) Mostre que $\cos(\alpha+\beta)+1 = 2\cos^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

b) Mostre que, dados quatro segmentos quaisquer, o quadrilátero formado de maior área é o cíclico.

Soluções

a) Da fórmula do cosseno do arco duplo, temos $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$. Utilizando a relação fundamental da trigonometria, temos:

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \left(1-\cos^2\theta\right) \Leftrightarrow 2\cos^2\theta - 1$$

Seja $2\theta = \alpha + \beta \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Substituímos na fórmula mencionada e encontramos

$$\cos(\alpha+\beta) + 1 = 2\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Como queríamos mostrar.

b) Para o cálculo da área do quadrilátero de lados a, b, c, d, utilizamos a fórmula trabalhada nesta atividade:

$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

Para que seja a maior área possível, então $abcd\cos^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0$. Como $abcd \neq 0$, concluímos que $\cos^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0$, ou seja, $\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0$. Como $\dfrac{\alpha+\beta}{2} < 180^{\circ}$, então:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^{\circ} \Leftrightarrow \alpha + \beta = 180^{\circ}$$

Portanto, o quadrilátero é inscritível, já que seus ângulos opostos são suplementares.

6 Considerações Finais

Ao nos lançarmos a este trabalho, nossa intenção foi abordar um tema de geometria importante e levar os professores e alunos a perceberem o aspecto belo e prazeroso da aplicação dessas fórmulas em situações práticas do dia a dia.

Muitos estudantes costumam ver a Geometria como algo assustador, enigmático, árido e complicado. Está mais do que na hora de acabar com essa crença e mostrar que estudar geometria pode ser interessante e agradável, e não apenas uma obrigação.

Além disso, é necessário transformar as aulas e promover uma mudança no aprender e ensinar a matemática, pois, a sociedade moderna valoriza a criatividade e a iniciativa junto ao domínio do conteúdo. É imprescindível que as escolas despertem em seus alunos tais potenciais, ao propor atividades que visem aprofundar os conhecimentos e que instiguem o pensamento, a busca de alternativas para resoluções e a aplicação da teoria.

Procuramos mostrar, com a abordagem dessas fórmulas, especialmente a de Brahmagupta, que elas podem ser exploradas de maneira mais didática e mais próxima do aluno, numa linguagem clara e acessível, sem mistérios ou enigmas, fornecendo, assim, mais uma ferramenta capaz de lhe proporcionar uma melhor evolução no seu conhecimento.

Conforme OLIVEIRA (2015), para que haja mudanças, os professores devem fazer um movimento no pensamento e inquirir para si mesmo: o que quero ensinar/aprender; quais razões me levam a querer ensinar/aprender; como quero ensinar/aprender; para que quero ensinar/aprender; o que quero com o ensino e a aprendizagem matemática. Essas reflexões devem regar nosso pensar e nosso agir, para que atuemos com sabedoria e maestria nesta grande arte da vida que é o Ensino e a Aprendizagem.

Referências

[1] BIANCHINE, Edwaldo. Componente curricular 8º ano: matemática. 6ª edição. Moderna. São Paulo, 2006.

[2] DOLCE, Osvaldo, POMPEO, José Nicolau, Fundamentos de Matemática Elementar - vol. 9, 7ª edição, Atual Editora LTDA, São Paulo, 1993.

[3] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. Temas e Problemas Elementares. 2ª Edição. Sociedade Brasileira de Matemática. 2005.

[4] MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; JORGE, M. Geometria II. Rio de Janeiro: F. C. Araújo da Silva, 2002

[5] OLIVEIRA, Gabriela Vicentini de. Brahmagupta e quadriláteros cíclicos no ensino médio. Dissertação de Mestrado. Campinas, SP, 2015.

[6] ROCHA, Hélder Borges Vieira Laranjeira da. Problemas selecionados de geometria plana. Parnaíba. Sieart, 2016.

[7] ROQUE, Tatiana, CARVALHO, João Bosco P. de, Tópicos de História da Matemática (Coleção PROFMAT), 1ª edição, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2012.

[8] SILVEIRA, Ênio. Matemática: compreensão e prática. Ênio Silveira, Cláudio Marques - 1ª edição. São Paulo: Moderna, 2008.

[9] SOUZA, Joamir Roberto de. Novo Olhar Matemática. 1ª ed. FTD. São Paulo. 2010.

[10] The Story of Mathematics, Indian Mathematics - Brahmagupta. Disponível em: <http//www.storyofmathematics.com\indian_brahmagupta.html>. Acesso em: 16 de maio de 2016.

[11] WIKIPEDIA ? The Free Encyclopedia, Heron of Alexandria. Disponível em: <http//en.wikipedya.org.\wiki\Hero_of_Alexandria>. Acesso: em 10 de abril de 2016.

[12] http://mundoeducacao.bol.uol.com.br\matematica\semelhanca-triangulos.htm