Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Hipersuperfícies Compactas: O Teorema de Alexandrov para Curvatura Média de Ordem Superior

Pedro Jorge Sousa dos Santos

Teresina - 2010

Pedro Jorge Sousa dos Santos

Dissertação de Mestrado:

Hipersuperfícies Compactas: O Teorema de Alexandrov para Curvatura Média de Ordem Superior

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa

Teresina - 2010

FICHA CATALOGRÁFICA

Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí

Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco

S237h Santos, Pedro Jorge Sousa dos.

Hipersuperfícies Compactas [manuscrito]: O Teorema de Alexandrov para Curvatura Média de Ordem Superior/Pedro Jorge Sousa dos Santos. – 2010.

51 f.

Impresso por computador (printout).

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2010.

"Orientador: Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa."

1. Geometria. 2. Geometria Diferencial.

CDD 516

Aos meus amados pais, Paulo Jorge e Eunice;

Aos meus queridos irmãos, Paulo Jorge e Pauline;

À Pollyana, meu amor;

Aos casais considerados grandiosos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me ter concedido a realização de mais um sonho. Por ter me permitido nascer de bons pais, ter me presenteado com irmãos maravilhosos e ter posto em meu caminho pessoas de moral elevada que me servem de exemplo.

Aos meus pais, Paulo Jorge e Eunice, por me darem amor incondicional e suporte na busca desse sonho, pela confiança que depositaram em mim durante essa jornada. (amo vocês!).

Aos meus irmãos, Paulo Jorge e Pauline, por me proporcionarem boa parte dos melhores momentos de minha vida. Por sempre acreditarem em mim, mais que eu mesmo. (sentirei saudades).

À Pollyana por estar sempre ao meu lado, me confortando nos momentos difíceis e, sorrindo comigo nos momentos felizes! Por ter tido força (e coragem) de me esperar por todo esse tempo. Por se empenhar em me fazer uma pessoa melhor. Por me ensinar tantas coisas...

Aos professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Piauí pela matemática que aqui aprendi, tanto na graduação quanto no mestrado.

Aos professores Gilvan Lima e Paulo Sérgio pelas ótimas conversas que tínhamos nas manhãs de sábado, pela matemática agradável que aprendi com eles e por muitos outros ensinamentos. Agradeço ao professor João Benício por ter dado força para terminar a graduação. Ao professor João Xavier pelo trabalho incansável e incentivo ao meu crescimento. Aos professores Juscelino Silva, Marcondes Clark e Alexandro Marinho pela ajuda fundamental nestes últimos tempos.

Dedico meus sinceros agradecimentos ao professor Paulo Alexandre pela sua exemplar orientação, pela tão boa escolha do tema a ser trabalhado e por me ter feito decidir, através de seu exemplo, prosseguir meus estudos em geometria.

Aos professores Barnabé Lima e Abdênago Barros por terem aceitado o convite de participar da minha banca de defesa.

Aos meus amigos, de estudo e lazer, José Arimatéa e João Carlos. Aos meus colegas da matemática: Cleyton Natanael, Daniel, Domingos Ponciano, Gilberto, Ítalo Dowell, João Santos, José Venâncio e Renan.

Aos grandes amigos, de longa data, Lucas Lopes e Marco Aurélio.

Aos amigos da Paulicéia pela maneira simples e verdadeira que sempre demonstraram consideração por mim. Pelas noites de paz e conversa agradável, sobre a luz do luar, que tanta saudade deixou.

Gostaria de agradecer a tantas pessoas que cruzaram o meu caminho, me dando força, coragem para seguir em frente, me proporcionando momentos inesquecíveis, mas, diante da impossibilidade de fazê-lo, peço desculpas àqueles cujos nomes não aparecem nesta pequena página de agradecimentos...

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Mais uma vez agradeço à minha família pelo incentivo e apoio em todos os momentos de minha vida.

Pedro Jorge.

"*...tudo o que é verdadeiro, tudo o que é respeitável, tudo o que é justo, tudo o que é puro, tudo o que é amável, tudo o que é de boa fama, se alguma virtude há e se algum louvor existe, seja isso o que ocupe o vosso pensamento*".

Filipenses 4:8.

Resumo

Nesse trabalho iremos provar uma generalização do Teorema de Alexandrov, obtido por Antonio Ros e Sebastián Montiel [14], para curvatura de ordem superior. Mais precisamente, provaremos o seguinte resultado:

> "*Uma hipersuperfície compacta* n*-dimensional mergulhada ou no espaço Euclidiano ou no espaço hiperbólico ou num hemisfério aberto da esfera unitária com* r*-ésima curvatura média constante, para algum* $r = 1, \ldots, n$*, deve ser uma hiperesfera geodésica.*"

Abstract

In this work we prove a generalization of Alexandrov's theorem, obtained by Sebastián Montiel and Antonio Ros, for higher-order curvature. More precisely, we prove the following result:

> "*A compact* n*-dimensional hypersurface embedded into the Euclidean space or into the hyperbolic space or onto the open half-sphere with constant* r*-th mean curvature, for some* $r = 1, \ldots, n$*, must be a geodesic hypersphere.*"

Sumário

Resumo **v**

Abstract **vi**

1 Noções Preliminares **4**

1.1 Gradiente, Divergente e Laplaciano 4

1.2 Imersões Isométricas 6

1.2.1 A segunda forma fundamental 6

1.2.2 O r-ésimo Tensor de Newton 9

1.2.3 Curvaturas médias de ordem superior 12

2 O Teorema de Alexandrov em $\mathbb{R}^{n+1}$ **19**

3 O Teorema de Alexandrov em $\mathbb{H}^{n+1}$ **25**

4 O Teorema de Alexandrov em $\mathbb{S}^{n+1}$ **32**

4.1 Toro de Clifford 37

Apêndice **40**

Referências Bibliográficas **42**

Introdução

O estudo das superfícies no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ com curvatura Gaussiana (ou média) constante é um tema clássico da Geometria Diferencial. Em meados do século XVIII Jellett [10] mostrou que uma superfície estrelada $S \subset \mathbb{R}^3$ com curvatura média constante é uma esfera. Mais tarde, Hopf [7] provou uma generalização desse teorema mostrando que uma superfície S imersa no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante homeomorfa a uma esfera deve ser uma esfera. Em 1899, Liebmann [12] mostrou que as esferas são as únicas superfícies compactas em $\mathbb{R}^3$ com curvatura Gaussiana constante. Ele também mostrou que as esferas são as únicas superfícies ovais (i.e., superfícies compactas em $\mathbb{R}^3$ com curvatura estritamente positiva) com curvatura média H constante. Por outro lado, para hipersuperfícies podemos considerar a r-ésima função simétrica das curvaturas principais, como segue abaixo.

Considere M^n uma variedade Riemanniana de dimensão n, compacta, orientável e seja $\psi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica sobre a variedade Riemanniana $(n+1)$-dimensional $\overline{M}^{n+1}$. Sendo M orientável, podemos escolher um campo normal unitário global N. Denotaremos por ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões Riemannianas de M^n e $\overline{M}^{n+1}$, respectivamente. Associado à segunda forma fundamental da imersão temos o operador autoadjunto A, definido por

$$\overline{\nabla}_X N = -A(X).$$

Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os autovalores de A num ponto $p \in M$. Definimos a r-ésima curvatura média H_r da imersão ψ no ponto p da seguinte maneira:

$$H_r = \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_r}.$$

No sentido de unificar a notação definimos $H_0 = 1$ e $H_r = 0$ para todo $r > n$. Note que para $r = 1$, $H_1 = H$ é a curvatura média da imersão e no caso $r = n$, H_n é a curvatura de Gauss-Kronecker.

Em 1952, Süss [17] provou que uma hipersuperfície compacta e convexa no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ com algum H_r constante deve ser uma esfera. A condição de convexidade foi melhorada por Hsiung [9], que mostrou que uma hipersuperfície $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, cuja função suporte clássica tem um sinal bem definido, possuindo algum H_r constante deve ser uma esfera. Uma descoberta fundamental no sentido de estender os resultados de Liebmann foi feita em 1956 por Alexandrov [1]. Ele foi capaz de provar que a esfera é a única hipersuperfície compacta mergulhada no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura média constante. Recentemente, Ros [15] estendeu este resultado para qualquer r-ésima curvatura média. Mais precisamente, ele provou que

> "*Uma hipersuperfície compacta mergulhada no espaço Euclidiano* $\mathbb{R}^{n+1}$ *com* H_r *constante para algum* $r = 1, \ldots, n$ *deve ser uma esfera.*"

Vale observar que na década de oitenta do século passado Hsiang, Teng e Yu [8] construíram exemplos de hipersuperfícies compactas imersas em $\mathbb{R}^{2n}$ com curvatura média constante que não são esferas.

Feitas essas considerações iniciais podemos enunciar o objetivo principal dessa dissertação, que é provar o resultado acima e estendê-lo para hipersuperfícies mergulhadas no espaço hiperbólico ou num hemisfério aberto da esfera. Assim, provaremos o seguinte teorema obtido por A. Ros e S. Montiel [14]

Teorema 0.1. *Considere* M^n *uma hipersuperfície compacta mergulhada ou no espaço Euclidiano* $\mathbb{R}^{n+1}$, *ou no espaço hiperbólico* $\mathbb{H}^{n+1}$, *ou num hemisfério aberto da esfera* $\mathbb{S}^{n+1}$. *Se* H_r *é constante para algum* $r = 1, \ldots, n$, *então* M^n *é uma hiperesfera geodésica.*

É importante salientar que os produtos de esferas produzem hipersuperfícies na esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ com H_r constante para qualquer $r = 1, \ldots, n$. Portanto, para hipersuperfícies contidas na esfera $\mathbb{S}^{n+1}$, temos uma série de exemplos com H_r constante, que não são esferas (veja Seção 4.1). No entanto, recuando até às idéias de Jellett, A. Barros e P. Sousa [3] provaram um resultado semelhante ao de Jellett [10] para hipersuperfícies estreladas na esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura média constante, sem assumir que estejam contidas em um hemisfério aberto. Mais precisamente, eles provaram que

> "*Uma hipersuperfície estrelada* M^n *contida na esfera unitária* $\mathbb{S}^{n+1}$ *com curvatura média constante deve ser uma hiperesfera geodésica.*"

A presente dissertação se inicia estabelecendo no Capítulo 1 pré-requisitos básicos acerca de uma variedade Riemanniana M^n. Faremos uma breve exposição sobre funções simétricas e definiremos o r-ésimo tensor de Newton associado à segunda forma fundamental de uma imersão $\psi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$. Provaremos ainda alguns resultados fundamentais para os capítulos subsequentes. No Capítulo 2 provaremos o caso Euclidiano do Teorema 0.1. Os Capítulos 3 e 4 destinam-se a provar o Teorema 0.1 no espaço hiperbólico e na esfera, respectivamente. Na tentativa de deixar o texto um pouco menos dependente incluimos um apêndice.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo iremos estabelecer a notação a ser usada e lembrar de alguns conceitos e fatos básicos, necessários ao desenvolvimento dos capítulos seguintes. Sendo assim a prova de alguns resultados não será feita, mas em todo o texto ficará clara a referência para obter tais justificativas. Para este trabalho iremos considerar M^n uma variedade Riemanniana de dimensão n e classe C^∞, $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M, $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M, ∇ e $\langle\, ,\, \rangle$ representará sua conexão e métrica Riemanniana, respectivamente. Se $p \in M$, então T_pM denotará o espaço tangente a M em p e TM o fibrado tangente a M.

1.1 Gradiente, Divergente e Laplaciano

Definição 1.1. *Seja $f \in \mathcal{D}(M)$. O gradiente de f é o campo de vetores em M, definido pela seguinte condição:*

$$\langle \mathit{grad}\, f, X\rangle = X(f),\ \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Decorre da definição que se f, $g \in \mathcal{D}(M)$ então:

1. $\mathit{grad}\,(f+g) = \mathit{grad}\, f + \mathit{grad}\, g$;
2. $\mathit{grad}\,(f \cdot g) = f \cdot \mathit{grad}\, g + g \cdot \mathit{grad}\, f$.

Definição 1.2. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. A divergência de X é a função $\mathit{div} X : M \to \mathbb{R}$, definida por*

$$\mathit{div} X(p) = \mathrm{tr}[Y(p) \mapsto (\nabla_Y X)(p)],$$

onde tr *significa o traço da aplicação* $\nabla_\bullet X : T_pM \to T_pM$.

As propriedades abaixo decorrem diretamente da definição.

1. $\mathit{div}(X+Y) = \mathit{div}X + \mathit{div}Y$;

2. $\mathit{div}(f \cdot X) = f \cdot \mathit{div}X + \langle \mathit{grad} f, X\rangle$,

para quaisquer X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ e qualquer $f \in \mathcal{D}(M)$.

Definição 1.3. *Seja* $f \in \mathcal{D}(M)$. *O Laplaciano de* f *é o operador* $\Delta : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$ *definido por*

$$\Delta f = \mathit{div}(\mathit{grad} f).$$

Usando as propriedades do gradiente e divergente, prova-se facilmente que:

1. $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$;

2. $\Delta(f \cdot g) = f \cdot \Delta g + g \cdot \Delta f + 2\langle \mathit{grad} f, \mathit{grad} g\rangle$,

para quaisquer f, $g \in \mathcal{D}(M)$.

Observação 1.1 (Referencial geodésico)**.** *Seja* M^n *uma variedade Riemanniana de dimensão* n *e* $p \in M$. *Então existe uma vizinhança* $U \subset M$ *de* p *e* n *campos de vetores* $e_1, \ldots, e_n \in \mathfrak{X}(U)$, *ortonormais em cada ponto de* U, *tais que* $\nabla_{e_i} e_j(p) = 0$. *Uma tal família* e_i, $i = 1, \ldots, n$, *de campos de vetores é chamada um referencial (local) geodésico em* p.

Proposição 1.1. *Se* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *é um referencial geodésico local em* M, *então*

$$\mathit{grad} f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i.$$

Demonstração. Escrevendo

$$\mathit{grad} f = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i,$$

temos que

$$e_j(f) = \langle \mathit{grad} f, e_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, e_j\rangle = a_j.$$

Logo,

$$\mathit{grad} f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i.$$

□

De fato, na proposição acima, é suficiente que o referencial seja ortonormal.

Proposição 1.2. *Se* $X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, *onde* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *é um referencial geodésico local em* $p \in M$, *então*

$$\mathit{div}X(p) = \sum_{i=1}^{n} e_i(x_i)(p).$$

Demonstração. Inicialmente temos que

$$\begin{aligned} \mathit{div}X &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} (\sum_{j=1}^{n} x_j e_j), e_i \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\langle e_i(x_j) e_j, e_i \rangle + \langle x_j \nabla_{e_i} e_j, e_i \rangle \right). \end{aligned}$$

Como $0 = e_i \langle e_i, e_j \rangle = \langle \nabla_{e_i} e_i, e_j \rangle + \langle e_i, \nabla_{e_i} e_j \rangle$ temos $\langle \nabla_{e_i} e_j, e_i \rangle = -\langle \nabla_{e_i} e_i, e_j \rangle$. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathit{div}X &= \sum_{i=1}^{n} e_i(x_i) - \sum_{i,j=1}^{n} x_j \langle \nabla_{e_i} e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} e_i(x_i) - \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(e_i(x_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle \right). \end{aligned}$$

Em particular, como $\nabla_{e_1} e_i(p) = 0$ temos $\mathit{div}X(p) = \sum_{i=1}^{n} e_i(x_i)(p)$. □

Definição 1.4. *Seja* $f \in \mathcal{D}(M)$. *Definimos o Hessiano de* f *em* $p \in M$ *como o operador linear* $\mathit{Hess}\, f : T_pM \to T_pM$, *dado por*

$$\mathit{Hess}\, f(Y) = \nabla_Y \mathit{grad} f, \ \forall\, Y \in T_pM.$$

Podemos considerar $\mathit{Hess}\, f$ como um tensor tal que para cada par de campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\mathit{Hess}\, f(X, Y) = \langle \mathit{Hess}\, f(X), Y \rangle.$$

1.2 Imersões Isométricas

1.2.1 A segunda forma fundamental

Seja $(\overline{M}^{n+m=k}, \langle\, ,\, \rangle, \overline{\nabla})$ uma variedade Riemanniana com métrica $\langle\, ,\, \rangle$ e conexão Riemanniana $\overline{\nabla}$. Seja M^n uma variedade diferenciável n-dimensional e $\psi : M \to \overline{M}$ uma imersão, isto é, a derivada $d\psi_p : T_pM \to T_p\overline{M}$ é injetiva para todo $p \in M$. Nestas condições, a métrica Riemanniana de $\overline{M}$ induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em M através da definição

$$\langle u, v\rangle_p = \langle d\psi_p(u), d\psi_p(v)\rangle_{\psi(p)}, \ p \in M, \ u, v \in T_pM.$$

Dizemos então que a aplicação ψ é uma imersão isométrica.

Dado $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $\psi(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. Portanto existem uma vizinhança $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $\psi(p)$ e um difeomorfismo $\Lambda : \overline{U} \to V \subset \mathbb{R}^k$ em um aberto V do $\mathbb{R}^k$, tais que Λ aplica difeomorficamente $\psi(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$.

Identificaremos então U com $\psi(U)$ e cada vetor $v \in T_qM$, $q \in U$, com o vetor $d\psi_q(v) \in T_{\psi(q)}\overline{M}$. Além disso, usando o difeomorfismo Λ podemos estender localmente campos de vetores X, Y de M definidos em $\psi(U) \cap \overline{U}$, a campos de vetores $\overline{X}$, $\overline{Y}$ definidos em $\overline{U}$.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Se $v \in T_p\overline{M}$, $p \in M$, podemos escrever

$$v = v^{\top} + v^{\perp}, \ v^{\top} \in T_pM, \ v^{\perp} \in (T_pM)^{\perp}.$$

Se X e Y são campos locais de vetores em M e $\overline{X}$, $\overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\top}.$$

Verifica-se que ∇ é a conexão Riemanniana relativa à métrica induzida de M por ψ. Dessa forma, se X e Y são campos locais em M,

$$\sigma(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é um campo local em $\overline{M}$ normal a M.

Observação 1.2. *Não é difícil verificar que* $\sigma(X, Y)$ *não depende das extensões* $\overline{X}$, $\overline{Y}$.

Indicaremos por $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$ os campos diferenciáveis em U de vetores normais a U. Pelas propriedades das conexões Riemannianas ∇ e $\overline{\nabla}$ obtemos a seguinte

Proposição 1.3. *Se* X, $Y \in \mathfrak{X}(U)$, *a aplicação* $\sigma : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)^{\perp}$ *dada por*

$$\sigma(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Definição 1.5. *Seja* $p \in M$ *e* $\eta \in (T_pM)^{\perp}$*. A forma quadrática* II_η *definida em* T_pM *por*

$$\mathrm{II}_\eta(X) = \langle \sigma(X, X), \eta \rangle$$

é chamada a segunda forma fundamental da imersão ψ *em* p *segundo o vetor normal* η.

Associada à aplicação σ temos a aplicação linear auto-adjunta $A_\eta : T_pM \to T_pM$ tal que

$$\langle A_\eta(X), Y \rangle = \langle \sigma(X, Y), \eta \rangle,$$

onde X, $Y \in T_pM$.

Proposição 1.4. *Seja* $p \in M$, $X \in T_pM$ *e* $\eta \in (T_pM)^{\perp}$*. Seja* N *uma extensão local de* η *normal a* M*. Então*

$$A_\eta(X) = -(\overline{\nabla}_X N)^{\top}.$$

Demonstração. Seja $Y \in T_pM$ e $\overline{X}$, $\overline{Y}$ extensões locais de X, Y, respectivamente, e tangentes a M. Então $\langle N, \overline{Y} \rangle = 0$, e, portanto

$$\begin{aligned} \langle A_\eta(X), Y \rangle &= \langle \sigma(X, Y)(p), N \rangle = \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_{\overline{X}}\overline{Y}, N \rangle(p) \\ &= \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, N \rangle(p) = -\langle \overline{Y}, \overline{\nabla}_{\overline{X}}N \rangle(p) = \langle -\overline{\nabla}_{\overline{X}}N, Y \rangle, \end{aligned}$$

para todo $Y \in T_pM$. □

No caso particular em que a codimensão da imersão é 1, ou seja, $\psi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$; $\psi(M) \subset \overline{M}$ é então denominada uma hipersuperfície.

Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$, $|\eta|^2 = 1$. Como $A_\eta : T_pM \to T_pM$ é auto-adjunta, existe uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de T_pM formada por autovetores com autovalores associados $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, isto é, $A_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Supondo que M e $\overline{M}$ são orientáveis e estão orientadas então o vetor η fica completamente determinado se exigirmos que sendo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base na orientação de M, $\{e_1, \ldots, e_n, \eta\}$ seja uma base na orientação de $\overline{M}$. Nesse caso, denominamos os e_i *direções principais* e os λ_i *curvaturas principais* da imersão ψ. A aplicação $A = A_\eta$ é chamada o *operador de Weingarten* associado à segunda forma fundamental. Nesse caso, vale a igualdade $A(X) = -(\overline{\nabla}_X N)^{\top} = -\overline{\nabla}_X N$.

1.2.2 O r-ésimo Tensor de Newton

Definição 1.6. *Uma função* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é simétrica, se* f *é invariante por permutação de suas variáveis independentes, isto é,*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(\rho(x_1, \ldots, x_n)),$$

onde ρ *é uma permutação qualquer de* $(x_1, \ldots, x_n)$.

Exemplo 1.1. *As funções* f, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *dadas por*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i, \;\; g(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} x_i x_j x_k$$

são exemplos de funções simétricas.

Definição 1.7. *Um polinômio* s, *com coeficientes em um corpo ou em um anel associativo e comutativo* $\mathbb{K}$ *com unidade, é simétrico, se* s *for uma função simétrica.*

Definição 1.8. *O* k*-ésimo polinômio simétrico elementar* $s_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é definido como*

$$s_k(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & , \textit{se} \;\; k = 0 \\ \displaystyle\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} \ldots x_{i_k} & , \textit{se} \;\; k \in \{1, \ldots, n\} \\ 0 & , \textit{se} \;\; k > n. \end{cases}$$

Proposição 1.5. *Seja* $s_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *o* k*-ésimo polinômio simétrico elementar, então*

1. $\dfrac{\partial}{\partial x_j} s_k(x_1, \ldots, x_n) = s_{k-1}(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_n)$;
2. $s_k(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n) - s_k(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_n) = (x_j - x_i) s_{k-1}(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n)$;
3. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} s_k(x_1, \ldots, x_n) = k \cdot s_k(x_1, \ldots, x_n)$,

onde $\widehat{x_j}$ *indica que o elemento* x_j *foi omitido.*

Demonstração. Os itens (1.) e (2.) decorrem diretamente da definição. A demonstração do item (3.) pode ser encontrada em [2]. □

Definição 1.9. *Seja* $\psi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ *uma imersão isométrica entre duas variedades Riemannianas e seja* $A : T_pM \to T_pM$ *o operador linear autoadjunto associado à segunda* *forma fundamental da imersão* ψ *em cada ponto* $p \in M$. *Associado a* A, *tem-se os* n *invariantes* $S_r(A)$, $1 \leqslant r \leqslant n$, *dados pela igualdade*

$$\det(tI - A) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k(A) t^{n-k},$$

onde $S_0(A) = 1$ *por definição.*

Quando $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base de T_pM formada por autovetores de A_p, com autovalores respectivamente $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, vê-se que

$$S_r(A) = s_r(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

onde s_r é o r-ésimo polinômio simétrico elementar.

Agora introduziremos o r-ésimo Tensor de Newton $P_r(A) : T_pM \to T_pM$, para cada $r \in \{0, \dots, n-1\}$, como sendo

$$\begin{aligned} P_0(A) &= I \\ P_1(A) &= S_1(A)I - A \\ &\vdots \\ P_r(A) &= S_r(A)I - AP_{r-1}(A), \end{aligned}$$

onde I é a identidade. Mais geralmente,

$$P_r(A) \doteq \begin{cases} I & , \text{se} \quad r = 0 \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{r} (-1)^j S_{r-j}(A) A^j & , \text{se} \quad r \in \{1, \dots, n-1\} \\ 0 & , \text{se} \quad r \geqslant n, \end{cases}$$

onde 0 denota a transformação linear identicamente nula.

Observação 1.3. *Por simplicidade, de agora em diante, escreveremos apenas* P_r *e* S_r *ao invés de* $P_r(A)$ *e* $S_r(A)$, *respectivamente.*

Note que sendo P_r um polinômio em A para todo r, ele é também auto-adjunto e comuta com A. Então toda base que diagonaliza A em $p \in M$ também diagonaliza todos os P_r em $p \in M$. Sendo $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma tal base, com $A(e_i) = \lambda_i e_i$, e denotando por A_i a restrição de A a $\langle e_i \rangle^{\perp} \subset T_pM$, definimos

$$S_r(A_i) = \sum_{\substack{1 \leqslant j_1 < \dots < j_r \leqslant n \\ j_1, \dots, j_r \neq i}} \lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_r} = s_r(\lambda_1, \dots, \widehat{\lambda_i}, \dots, \lambda_n)$$

Proposição 1.6. *Seja* $\psi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ *uma imersão isométrica entre duas variedades Riemannianas e seja* A *o operador linear associado à sua segunda forma fundamental. O* r*-ésimo Tensor de Newton associado a* A *satisfaz:*

1. $\mathrm{tr}[P_r] = (n-r)S_r$;

2. $\mathrm{tr}[AP_r] = (r+1)S_{r+1}$.

Demonstração. Mostraremos inicialmente que

$$P_r(e_i) = S_r(A_i)e_i, \tag{1.1}$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base que diagonaliza A.

A prova é feita por indução sobre r. Para $r = 1$, temos: $P_1 = S_1 I - A$. Portanto,

$$P_1(e_i) = S_1 e_i - A(e_i) = (S_1 - \lambda_i)e_i = S_1(A_i)e_i.$$

Suponhamos verdadeiro para $r-1$. Então

$$P_r(e_i) = S_r e_i - AP_{r-1}(e_i) = S_r e_i - A(S_{r-1}(A_i)e_i) = (S_r - S_{r-1}(A_i)\lambda_i)e_i = S_r(A_i)e_i.$$

Assim pela Proposição 1.5 e pelo que vimos acima, segue que

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}[P_r] &= \sum_{i=1}^{n} \langle P_r(e_i), e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle S_r(A_i)e_i, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} S_r(A_i) = \sum_{i=1}^{n} (S_r - \lambda_i S_{r-1}(A_i)) \\
&= nS_r - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_{r-1}(A_i) = (n-r)S_r,
\end{aligned}$$

o que prova o item (1.).

Para o item (2.), devemos observar que a seguinte igualdade $P_{r+1} = S_{r+1}I - AP_r$ implica

$$AP_r = S_{r+1}I - P_{r+1}.$$

Daí,

$$\mathrm{tr}[AP_r] = \mathrm{tr}[S_{r+1}I] - \mathrm{tr}[P_{r+1}] = nS_{r+1} - (n-r-1)S_{r+1} = (r+1)S_{r+1}.$$

□

Associado a cada P_r temos o operador diferencial linear de segunda ordem $L_r : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$ que aparece naturalmente no estudo da estabilidade de hipersuperfícies com S_{r+1} constante. Tal operador é elíptico, se P_r for positivo definido. Passemos então ao conceito de L_r.

Definição 1.10. *Dada uma função diferenciável* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *e* $r \in \mathbb{N}$, *com* $0 \leqslant r \leqslant n-1$, *definimos o operador diferencial de segunda ordem* L_r *em* M^n *por:*

$$L_r(f)(p) = tr[(P_r \mathit{Hess}\, f)(p)].$$

Observe que para $r = 0$, $L_0(f) = tr[\mathit{Hess}\, f] = \Delta f$ é o Laplaciano, o qual é sempre um operador elíptico. Quando $\overline{M}^{n+1}$ é uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante, foi provado por H. Rosenberg em [16] que L_r pode ser escrito na forma divergente, mais precisamente

$$L_r(f) = \mathit{div}_M(P_r \mathit{grad}(f)),$$

onde div_M denota o divergente de um campo vetorial sobre M^n. Segue do teorema abaixo que, se M é compacta então $\int_M L_r(f)dM = 0$.

Teorema 1.1 (Teorema da Divergência)**.** *Seja* M *uma variedade Riemanniana compacta com bordo e* $X \in \mathfrak{X}(M)$. *Então*

$$\int_M \mathit{div} X \, dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle \, dS,$$

onde ν *é o campo unitário normal a* ∂M *apontando para fora de* M.

Observação 1.4. *No caso em que* M *é uma variedade Riemanniana compacta (sem bordo) segue que*

$$\int_M \mathit{div} X \, dM = 0.$$

1.2.3 Curvaturas médias de ordem superior

Seja $\psi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica entre duas variedades Riemannianas. Ao invés de trabalhar com os invariantes S_r é por vezes mais conveniente trabalhar com as **curvaturas médias de ordem superior** H_r de ψ, definidas para $0 \leqslant r \leqslant n$ por

$$H_r = \frac{S_r}{\binom{n}{r}} = \frac{s_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}{\binom{n}{r}}.$$

Provaremos agora uma proposição que se encontra na tese de A. Caminha [4], onde estaremos estabelecendo algumas desigualdades algébricas sobre as curvaturas médias de ordem superior H_r, que são denominadas Desigualdades de Newton.

Lema 1.1. *Se um polinômio $f \in \mathbb{R}[X]$ possui $k \geqslant 1$ raízes reais, então sua derivada f' possui ao menos $k-1$ raízes reais. Em particular, se todas as raízes de f forem reais então todas as raízes de f' também serão reais.*

Demonstração. Podemos supor $k > 1$. Sejam $x_1 < \cdots < x_l$ raízes reais de f, com multiplicidades respectivamente $m_1, \ldots, m_l$ tais que $m_1 + \cdots + m_l = k$. Então cada x_i é raiz de f' com multiplicidade $m_i - 1$, se $m_i \geqslant 2$. Por outro lado, entre x_i e x_{i+1} há, pelo teorema de Rôlle, ao menos uma outra raiz de f', de modo que contabilizamos ao menos

$$(m_1 - 1) + \cdots + (m_l - 1) + (l - 1) = k - 1$$

raízes reais para f'. O resto é imediato. □

Proposição 1.7. *Sejam $n > 1$ inteiro, e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ números reais. Defina, para $0 \leqslant r \leqslant n$, $S_r = s_r(\lambda_i)$ e $H_r = H_r(\lambda_i) = \binom{n}{r}^{-1} s_r(\lambda_i)$.*

1. *Para $1 \leqslant r < n$, tem-se $H_r^2 \geqslant H_{r-1} \cdot H_{r+1}$. Além disso, se a igualdade ocorrer para $r = 1$ ou para algum $1 < r < n$, com $H_{r+1} \neq 0$ neste último caso, então $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$.*

2. *Se $H_1, H_2, \ldots, H_{r-1}$ são não negativas e H_r é positivo para algum $1 < r \leqslant n$, então $H_1 \geqslant H_2^{\frac{1}{2}} \geqslant H_3^{\frac{1}{3}} \geqslant \cdots \geqslant H_r^{\frac{1}{r}}$. Além disso, se a igualdade ocorrer para algum $1 \leqslant j < r$, então $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$.*

Demonstração. Para provarmos o item (1) usaremos indução sobre a quantidade de números reais. Para $n = 2$, $H_1^2 \geqslant H_2$ é equivalente a $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \geqslant 0$, com a igualdade se e só se $\lambda_1 = \lambda_2$.

Suponha as desigualdades válidas para quaisquer $n-1$ números reais, com a igualdade ocorrendo para $H_{r+1} \neq 0$ se e só se os $n-1$ números forem todos iguais. Dados $n \geqslant 3$ números reais $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, seja

$$f(x) = (x + \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x + \lambda_n) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} H_r(\lambda_i) x^{n-r}.$$

Então
$$f'(x) = \sum_{r=0}^{n-1} (n-r)\binom{n}{r} H_r(\lambda_i) x^{n-r-1}.$$
Por outro lado, pelo lema anterior, existem reais $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ tais que
$$\begin{aligned} f'(x) &= n(x+\gamma_1)\cdot \ldots \cdot (x+\gamma_{n-1}) = n\sum_{r=0}^{n-1} S_r(\gamma_i)x^{n-1-r} \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} n\binom{n-1}{r} H_r(\gamma_i)x^{n-1-r}. \end{aligned}$$

Desde que $(n-r)\binom{n}{r} = n\binom{n-1}{r}$, comparando coeficientes obtemos $H_r(\lambda_i) = H_r(\gamma_i)$ para $0 \leqslant r \leqslant n-1$. Portanto, segue da hipótese de indução que, para $1 \leqslant r \leqslant n-2$,
$$H_r^2(\lambda_i) = H_r^2(\gamma_i) \geqslant H_{r-1}(\gamma_i)\cdot H_{r+1}(\gamma_i) = H_{r-1}(\lambda_i)\cdot H_{r+1}(\lambda_i).$$

Além disso, se tivermos igualdade para os λ_i, com $H_{r+1}(\lambda_i) \neq 0$, então também teremos igualdade para os γ_i, com $H_{r+1}(\gamma_i) \neq 0$. Novamente pela hipótese de indução, segue que $\gamma_1 = \cdots = \gamma_{n-1}$, e daí $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$. Para terminar, é suficiente provarmos que $H_{n-1}^2(\lambda_i) \geqslant H_{n-2}(\lambda_i)\cdot H_n(\lambda_i)$, com igualdade para $H_n \neq 0$ se e só se todos os λ_i forem iguais. Se algum $\lambda_i = 0$ a igualdade é óbvia. Senão, $H_n \neq 0$ e
$$\begin{aligned} H_{n-1}^2 \geqslant H_{n-2}\cdot H_n \quad &\Leftrightarrow \quad \left[\binom{n}{n-1}^{-1}\sum_i \frac{H_n}{\lambda_i}\right]^2 \geqslant \left[\binom{n}{n-2}^{-1}\sum_{i<j}\frac{H_n}{\lambda_i\lambda_j}\right] H_n. \\ &\Leftrightarrow \quad (n-1)\left(\sum_i \frac{1}{\lambda_i}\right)^2 \geqslant 2n\sum_{i<j}\frac{1}{\lambda_i\lambda_j}. \end{aligned}$$

Denotando $\alpha_i = \frac{1}{\lambda_i}$, temos a última desigualdade acima equivalente a
$$(n-1)\left(\sum_i \alpha_i\right)^2 \geqslant 2n\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j.$$

Fazendo $T(\alpha_i) = (n-1)\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^2 - 2n\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j$, obtemos
$$\begin{aligned} T(\alpha_i) &= n\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^2 - 2n\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j \\ &= n\left[\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^2 - 2\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j\right] - \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^2 \\ &= n\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^2 \geqslant 0, \end{aligned}$$

pela desigualdade de Cauchy-Schwarz. Vê-se ainda que, nesse caso, a igualdade ocorre se e só se todos os α_i (e portanto os λ_i) forem iguais.

Note que o argumento acima também prova que $H_1^2 = H_2$ se e só se todos os λ_i forem iguais, posto que $T(\lambda_i) = n^2(n-1)[H_1^2(\lambda_i) - H_2(\lambda_i)]$.

Para o item (2), observe que $H_1 \geqslant H_2^{\frac{1}{2}}$ segue do item (1). Suponha então válida para algum $2 \leqslant k < r$. Então assumindo que $H_1, H_2, \ldots, H_k \geqslant 0$ e $H_{k+1} > 0$ segue, pelo item (1.), que $H_k > 0$. De fato, $H_k = 0 \Rightarrow 0 \geqslant H_{k-1} \cdot H_{k+1} \Rightarrow H_{k-1} = 0 \Rightarrow H_k^2 = 0 = 0 \cdot H_{k+1} = H_{k-1} \cdot H_{k+1}$, isto é, $H_k^2 = H_{k-1} \cdot H_{k+1}$ com $H_{k+1} \neq 0$ logo, pelo item (1.), $\lambda = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n$ daí $\lambda^k = H_k = 0$ donde $\lambda = 0$ e, portanto, $H_{k+1} = 0$ o que é uma contradição. Assim $H_1 \geqslant H_2^{\frac{1}{2}} \geqslant \cdots \geqslant H_k^{\frac{1}{k}}$, e então

$$H_k^2 \geqslant H_{k-1} \cdot H_{k+1} \geqslant H_k^{\frac{k-1}{k}} \cdot H_{k+1},$$

ou ainda $H_k^{\frac{1}{k}} \geqslant H_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}$. Segue agora imediatamente das desigualdades acima que, caso $H_k^{\frac{1}{k}} = H_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}$ para algum $1 \leqslant k < n$, então $H_k^2 = H_{k-1} \cdot H_{k+1}$. Logo, o item (1) garante que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$. □

Teorema 1.2. *Seja $\psi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica entre duas variedades Riemannianas (M^n conexa). Suponha que exista um ponto de M^n onde todas as curvaturas principais $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são positivas. Então, se H_r é sempre maior que zero em M^n, temos que o mesmo vale para H_k, $k = 1, \ldots, r-1$. Além disso,*

$$H_k^{\frac{k-1}{k}} \leqslant H_{k-1} \quad e \quad H_k^{\frac{1}{k}} \leqslant H, \; k = 1, \ldots, r.$$

Se $k \geqslant 2$, a igualdade nas desigualdades acima ocorre somente nos pontos umbílicos.

Demonstração. Devemos mostrar que H_k é sempre positivo em M qualquer que seja $k = 1, \ldots, r-1$. O resto é consequência direta da Proposição 1.7.

Seja $p \in M$ o ponto onde as curvaturas principais são todas positivas. Então, por verificação direta, em $p \in M$, $H_k > 0$. Por continuidade existe uma bola aberta $B(p) \subset M$ com centro em $p \in M$ tal que as funções H_k são positivas em $B(p)$.

Para qualquer $q \in M$, sendo M conexo, existe um caminho $\gamma : [0,1] \to M$ ligando p e q com $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Defina $J = \{t \in [0,1] \setminus H_k > 0 \text{ em } \gamma|_{[0,t]}, k = 1, \ldots, r-1\}$. Seja $t_0 = \operatorname{Sup} J$. Note que $H_k > 0$ em $B(p)$ implica $t_0 > 0$. Por continuidade, em t_0, $H_k \geqslant 0$ assim, pela Proposição 1.7 $H_1 \geqslant H_2^{\frac{1}{2}} \geqslant \cdots \geqslant H_{r-1}^{\frac{1}{r-1}} \geqslant H_r^{\frac{1}{r}} > 0$ em t_0 e, portanto, $t_0 \in J$. Agora se fosse $t_0 < 1$, por continuidade, existiria uma bola $B(\gamma(t_0)) \subset M$ com centro em $\gamma(t_0)$ tal que $H_k > 0$ em $B(\gamma(t_0)) \subset M$, o que contradiz a nossa escolha de $t_0 = \operatorname{Sup} J$. Daí, $t_0 = 1$.

Assim, obtemos que $H_k > 0$ em $q \in M$ para todo $k = 1, \ldots, r-1$ e, como $q \in M$ é arbitrário, o resultado está demonstrado. $\square$

Mostraremos a seguir que toda imersão isométrica $\psi : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ de uma hipersuperfície compacta possui um ponto onde todas as curvaturas principais são positivas, onde $\overline{M}_c^{n+1}$ representa $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{H}^{n+1}$ ou um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1}$. Para isto, introduziremos algumas notações e relembraremos alguns fatos.

Seja $S_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$S_c(t) = \begin{cases} \sinh(t), & \text{se} \quad c = -1; \\ t, & \text{se} \quad c = 0; \\ \sin(t), & \text{se} \quad c = 1. \end{cases}$$

e $d : \overline{M}_c^{n+1} \to \mathbb{R}$ a função distância para um ponto fixo $p_0 \in \overline{M}_c^{n+1}$, isto é, $d(p) = d(p, p_0)$. É sabido que d é suave em $\overline{M}_c^{n+1} \setminus \{p_0\}$ e $\|\mathit{grad}\, d\| = 1$.

Agora considere uma hiperesfera de centro p_0 e raio r, de $\overline{M}_c^{n+1}$, a saber:

$$\mathbb{S}^n(r) = \{p \in \overline{M}_c^{n+1} \ : \ d(p) = r\}.$$

Então o campo unitário normal (interior) a $\mathbb{S}^n(r)$ é $N = -\mathit{grad}\, d$. Por Jorge-Koutroufiotis [11], temos que

$$\langle \overline{\nabla}_v \mathit{grad}\, d, w\rangle = \frac{S_c'(d)}{S_c(d)} \left(\langle v, w\rangle - \langle \mathit{grad}\, d, v\rangle \langle \mathit{grad}\, d, w\rangle\right) \ \ \forall v,\, w \in T\overline{M}_c^{n+1}.$$

Tomando $v,\, w \in T\mathbb{S}^n(r)$ obtemos

$$\langle A(v), w\rangle = \langle -\overline{\nabla}_v N, w\rangle = \langle \overline{\nabla}_v \mathit{grad}\, d, w\rangle = \frac{S_c'(d)}{S_c(d)} \langle v, w\rangle.$$

Isto diz que todas as curvaturas principais de $\mathbb{S}^n(r)$ são constantes iguais a $\frac{S_c'(r)}{S_c(r)}$.

Proposição 1.8. *Seja $\psi : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$, onde $\overline{M}_c^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{S}_0^{n+1}$ (hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1}$), imersão isométrica de uma hipersuperfície compacta, então M^n possui um ponto onde todas as curvaturas principais são positivas. Se $\overline{M}_c^{n+1} = \mathbb{H}^{n+1}$, então existe um ponto onde as curvaturas principais são maiores que 1.*

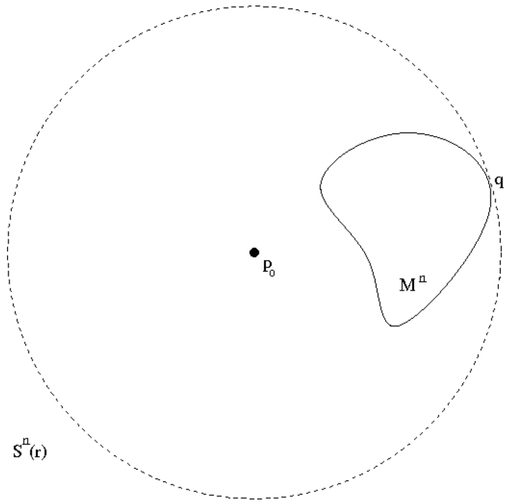

Figura 1.1:

Demonstração. Representaremos por p_0 a origem de $\mathbb{R}^{n+1}$ ou o centro do hemisfério aberto $\mathbb{S}_0^{n+1}$. Seja $q \in M^n$ o ponto onde a função $d(p) = d(p, p_0)$ atinge o máximo. No ponto q, a hipersuperfície M^n é mais curvada que a esfera $\mathbb{S}^n(r)$, então $\lambda_i \geqslant \frac{S_c'(r)}{S_c(r)} > 0$. Para o caso hiperbólico basta observar que $\frac{S_{-1}'(r)}{S_{-1}(r)} > 1$. (Veja Figura 1.1)

□

Finalizaremos esta subseção apresentando mais alguns resultados envolvendo a função $\frac{S_c'(t)}{S_c(t)}$. Um cálculo simples nos mostra que $\frac{d}{dt}\left(\frac{S_c'(t)}{S_c(t)}\right) < 0$, então $\frac{S_c'(t)}{S_c(t)}$ é decrescente. Usaremos esta informação para obtermos uma desigualdade que será utilizada posteriormente na prova de alguns fatos.

Seja $\psi : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ um mergulho de uma hipersuperfície compacta, então existe um domínio compacto $\Omega \subset \overline{M}_c^{n+1}$ tal que $\partial\Omega = M$. Seja $c : M^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$c(p) = max\{t \geqslant 0 \ : \ d(M, \exp_p(tN(p))) = t\},$$

onde $N(p)$ é o normal a T_pM interior a Ω e $\exp_p(tN(p)) = S_c'(t) \cdot p + S_c(t) \cdot N(p)$ é a aplicação exponencial de $\overline{M}_c^{n+1}$ no ponto p aplicada em $tN(p) \in T_p\overline{M}_c^{n+1}$.

Como $d(M, \exp_p(c(p)N(p))) = c(p)$ temos que $d(x, \exp_p(c(p)N(p))) \geqslant c(p)$, $\forall x \in M$. Portanto, $\mathbb{S}^n(\exp_p(c(p)N(p)), c(p)) \subseteq \Omega$. Como $p \in M \cap \mathbb{S}^n(\exp_p(c(p)N(p)), c(p))$, segue que as curvaturas principais de M (no ponto p) são menores ou iguais a $\frac{S_c'(c(p))}{S_c(c(p))}$ (Veja Figura 1.2). Denotando por $H(p)$ a curvatura média de M no ponto p, temos

$$H(p) \leqslant \lambda_{max} \leqslant \frac{S_c'(c(p))}{S_c(c(p))} \leqslant \frac{S_c'(t)}{S_c(t)}, \ \forall t \in [0, c(p)),$$

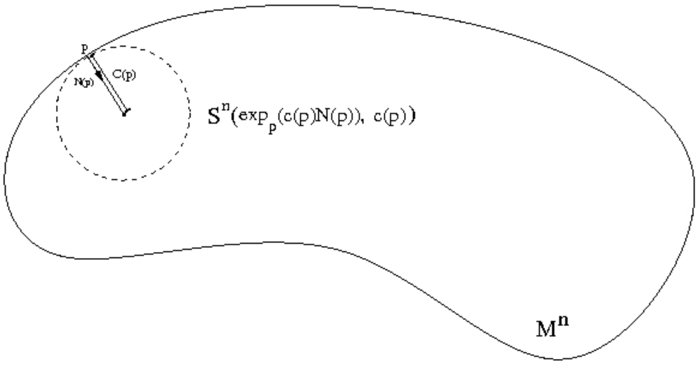

Figura 1.2:

onde λ_{max} é a maior curvatura principal positiva de M no ponto p. Provamos o seguinte lema

Lema 1.2. *Seja $\psi : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$, onde $\overline{M}_c^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{S}_0^{n+1}$ ou $\mathbb{H}^{n+1}$, mergulho de uma hipersuperfície compacta M^n. Então, dado $p \in M^n$ vale*

$$c(p) \leqslant T^{-1}(\lambda_{max}) \leqslant T^{-1}(H(p)),$$

onde $T(t) = \frac{S_c'(t)}{S_c(t)}$.

Como consequência do lema acima ganhamos o

Corolário 1.1. *Seja $\psi : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$, onde $\overline{M}_c^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{S}_0^{n+1}$ ou $\mathbb{H}^{n+1}$, mergulho de uma hipersuperfície compacta M^n. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são as curvaturas principais de M^n no ponto p, vale*

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(S_c'(t) - \lambda_i S_c(t))} \leqslant S_c'(t) - HS_c(t).$$

para todo $t \in [0, c(p))$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$ (i.e., p é um ponto umbílico).

Demonstração. O Lema 1.2 implica que $S_c'(t) - \lambda_i S_c(t)) \geqslant 0$, para todo $t \in [0, c(p))$ e todo $1 \leqslant i \leqslant n$. Pela Desigualdade das Médias, temos

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(S_c'(t) - \lambda_i S_c(t))} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(S_c'(t) - \lambda_i S_c(t)) = S_c'(t) - HS_c(t).$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$. $\square$

Capítulo 2

O Teorema de Alexandrov em $\mathbb{R}^{n+1}$

Em todo o capítulo denotaremos por $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana de $\mathbb{R}^{n+1}$ e por ∇ a conexão Riemanniana de qualquer hipersuperfície M^n de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Teorema 2.1. *Seja $\psi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável imersa no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ e N um campo normal unitário de vetores sobre M^n. Então, para $r = 0, \ldots, n-1$, temos*

$$L_r(|\psi|^2) = 2[(n-r)S_r + (r+1)S_{r+1}\langle \psi, N\rangle].$$

Demonstração. Dado $p \in M^n$, seja $\{e_1(p), \ldots, e_n(p)\} \subset T_pM$ uma base ortonormal que diagonaliza o operador A em p. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os autovalores de A associados a $e_1(p), \ldots, e_n(p)$, respectivamente. Denote por $\{e_1, \ldots, e_n\}$ o referencial geodésico que estende a base acima a uma vizinhança de p em M^n.

Como $\nabla_{e_i} e_i(p) = 0$, $\forall\, i = 1, \ldots, n$, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\overline{\nabla}_{e_i} e_i = a_i N$. Por outro lado, como $\langle e_i, N\rangle = 0$ temos $\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_i, N\rangle = -\langle e_i, \overline{\nabla}_{e_i} N\rangle = \langle e_i, -\overline{\nabla}_{e_i} N\rangle = \lambda_i$. Portanto,

$$\overline{\nabla}_{e_i} e_i = \lambda_i N.$$

Para todo $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ temos

$$X|\psi|^2 = 2\langle X, \psi\rangle,$$

consequentemente

$$XX|\psi|^2 = 2|X|^2 + 2\langle \psi, \overline{\nabla}_X X\rangle. \tag{2.1}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
L_r(|\psi|^2) &= tr[P_r \cdot Hess|\psi|^2] = \sum_{i=1}^{n}\langle (P_r \cdot Hess|\psi|^2)e_i, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle P_r(\nabla_{e_i} grad|\psi|^2), e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i} grad|\psi|^2, P_r(e_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^r\langle \nabla_{e_i} grad|\psi|^2, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^r\langle \nabla_{e_i}[\sum_{j=1}^{n} e_j(|\psi|^2)e_j], e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^r e_i e_i|\psi|^2,
\end{aligned}$$

onde λ_i^r é o autovalor de P_r associado a $e_i(p)$. Assim,

$$L_r(|\psi|^2)(p) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^r e_i e_i|\psi|^2(p). \tag{2.2}$$

Substituindo a Igualdade 2.1 na Igualdade 2.2 obtemos

$$\begin{aligned}
L_r(|\psi|^2) &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^r e_i e_i|\psi|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^r(2|e_i|^2 + 2\langle \psi, \overline{\nabla}_{e_i} e_i)\rangle \\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^r + 2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^r\langle \psi, \lambda_i N\rangle \\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^r + 2\langle \psi, N\rangle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda_i^r \\
&= 2tr[P_r] + 2tr[AP_r]\langle \psi, N\rangle \\
&= 2(n-r)S_r + 2(r+1)S_{r+1}\langle \psi, N\rangle,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$L_r(|\psi|^2) = 2[(n-r)S_r + (r+1)S_{r+1}\langle \psi, N\rangle]. \tag{2.3}$$

□

Como consequência temos o seguinte

Corolário 2.1 (Fórmula de Minkowski). *Seja $\psi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão de uma hipersuperfície compacta orientável M^n no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ e N um campo de vetores normal unitário sobre M^n. Então, para $r = 0, \ldots, n-1$, vale*

$$\int_M (H_r + H_{r+1}\langle \psi, N\rangle))dA = 0.$$

Demonstração. Multiplicando ambos os membros da Igualdade 2.3 por $\frac{r!(n-r-1)!}{n!}$, onde $r = 0, \dots, n-1$, encontramos

$$\frac{r!(n-r-1)!}{n!} L_r(|\psi|^2) = 2[H_r + H_{r+1}\langle \psi, N\rangle].$$

Integrando sobre M^n e utilizando o Teorema da Divergência, obtemos

$$\begin{aligned} \int_M (H_r + H_{r+1}\langle \psi, N\rangle) dA &= \frac{r!(n-r-1)!}{2(n!)} \int_M L_r(|\psi|^2) dA \\ &= \frac{r!(n-r-1)!}{2(n!)} \int_M \mathrm{Div}_M[P_r(\mathrm{grad}|\psi|^2)] dA \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_M (H_r + H_{r+1}\langle \psi, N\rangle)) dA = 0, \ \forall\, r = 0, \dots, n-1.$$

□

Iremos provar, no teorema abaixo, uma desigualdade integral para hipersuperfícies compactas mergulhadas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ onde a igualdade caracteriza as esferas. Vejamos,

Teorema 2.2. *Seja $\psi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta mergulhada no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$. Se a curvatura média H de ψ com relação ao normal interior N é sempre positiva sobre M^n, então a seguinte desigualdade é válida*

$$\int_M \frac{1}{H} dA \geqslant (n+1) \cdot V(\Omega),$$

onde $V(\Omega)$ é a medida de Lebesgue do domínio compacto Ω determinado por M^n com $\partial\Omega = M^n$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, M^n é uma esfera.

Demonstração. Fazendo uso da Fórmula 4.7

$$\int_\Omega f \, dV = \int_M \int_0^{c(p)} f(\exp_p(tN(p))) F(p,t) dt dA$$

com $f \equiv 1$ e levando em conta que, neste caso,

$$dV(\exp_p(tN(p))) = (1-\lambda_1 t) \cdot \ldots \cdot (1-\lambda_n t) dt dA = F(p,t) dt dA$$

temos

$$V(\Omega) = \int_\Omega dV = \int_M \int_0^{c(p)} (1-\lambda_1 t) \cdot \ldots \cdot (1-\lambda_n t) dt dA.$$

Pelo Lema 1.2 temos $c(p) \leqslant \lambda_{max}^{-1} \leqslant H^{-1}(p)$. Além disso, se $t \in (0, c(p))$ concluímos pelo Corolário 1.1 que

$$(1-\lambda_1 t)\cdot \ldots \cdot (1-\lambda_n t) \leqslant (1-tH)^n,$$

ocorrendo a igualdade somente nos pontos umbílicos. Portanto,

$$\begin{aligned} V(\Omega) &\leqslant \int_M \int_0^{\frac{1}{H}} (1-tH)^n dt dA \\ &= \int_M \left[\frac{-(1-tH)^{n+1}}{H(n+1)} \right]_0^{\frac{1}{H}} dA \\ &= \frac{1}{n+1} \int_M \frac{1}{H} dA, \end{aligned}$$

isto é,

$$\int_M \frac{1}{H} dA \geqslant (n+1)\cdot V(\Omega)$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, ψ é umbílica. □

Estamos em condição de enunciar (e demonstrar) o teorema principal deste capítulo. Façamos.

Teorema 2.3. *Seja $\psi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta mergulhada no espaço euclidiano. Se H_r é constante para algum $1 \leqslant r \leqslant n$, então M^n é uma esfera.*

Demonstração. Sendo M^n compacta, existe um ponto onde todas as curvaturas principais, com relação ao normal interior, são positivas.

Portanto, H_r é uma constante positiva e pelo Teorema 1.2 $H_r^{\frac{1}{r}} \leqslant H$. Utilizando o teorema anterior, temos

$$\begin{aligned} (n+1)\cdot V(\Omega) &\leqslant \int_M \frac{1}{H} dA \leqslant \int_M \frac{1}{H_r^{\frac{1}{r}}} dA \\ &= \frac{1}{H_r^{\frac{1}{r}}} \int_M dA = \frac{A}{H_r^{\frac{1}{r}}}, \end{aligned}$$

isto é,

$$(n+1) H_r^{\frac{1}{r}} \cdot V(\Omega) \leqslant A, \tag{2.4}$$

onde A é a medida de Riemann de M^n e a igualdade ocorre se, e somente se, M^n é umbílica. Ainda pelo Teorema 1.2 temos

$$H_{r-1} \geqslant H_r^{\frac{r-1}{r}}.$$

Disto, juntamente com a Fórmula de Minkowski (Corolário 2.1), segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M (H_{r-1} + H_r\langle\psi, N\rangle)dA \\ &\geqslant \int_M (H_r^{\frac{r-1}{r}} + H_r\langle\psi, N\rangle)dA \\ &= H_r^{\frac{r-1}{r}} \int_M (1 + H_r^{\frac{1}{r}}\langle\psi, N\rangle)dA. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_M (1 + H_r^{\frac{1}{r}}\langle\psi, N\rangle)dA \leqslant 0. \tag{2.5}$$

Seja $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$ o domínio compacto determinado por M^n com $\partial\Omega = M^n$. Se x denota o vetor posição em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\overline{\Delta}$ representa o Laplaciano euclidiano, temos

$$\overline{\Delta}|x|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2|x|^2}{\partial x_i^2} = 2(n+1).$$

Assim, pelo Teorema da Divergência, obtemos

$$\begin{aligned} -\int_M \langle\psi, N\rangle dA &= \frac{1}{2}\int_M \langle 2\psi, -N\rangle)dA \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \mathit{div}\,(\mathit{grad}|x|^2)dV \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \overline{\Delta}|x|^2 dV \\ &= (n+1)\cdot V(\Omega), \end{aligned}$$

ou seja,

$$-\int_M \langle\psi, N\rangle dA = (n+1)\cdot V(\Omega), \tag{2.6}$$

onde N é escolhido sendo o campo normal interior em relação a Ω e $V(\Omega)$ é a medida de Lebesgue de Ω.

Multiplicando a Igualdade 2.6 por $H_r^{\frac{1}{r}}$, subtraindo A de ambos os membros e levando em conta que H_r é uma constante positiva, obtemos

$$\begin{aligned} A - H_r^{\frac{1}{r}}(n+1)\cdot V(\Omega) &= A + \int_M H_r^{\frac{1}{r}}\langle\psi, N\rangle)dA \\ &= \int_M (1 + H_r^{\frac{1}{r}}\langle\psi, N\rangle)dA. \end{aligned}$$

Portanto, pela Desigualdade 2.5, temos

$$A \leqslant H_r^{\frac{1}{r}}(n+1)\cdot V(\Omega).$$

Disto, juntamente com a Desigualdade 2.4, decorre que

$$A = (n+1)H_r^{\frac{1}{r}} \cdot V(\Omega)$$

o que prova o teorema. $\square$

Capítulo 3

O Teorema de Alexandrov em $\mathbb{H}^{n+1}$

Denotaremos as $(n+2)$ componentes de um ponto $x \in \mathbb{R}^{n+2}$ por $(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})$. Seja $\mathbb{R}_1^{n+2}$ o espaço vetorial $\mathbb{R}^{n+2}$ munido com a pseudométrica

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}_1^{n+2} \times \mathbb{R}_1^{n+2} \to \mathbb{R}$$

dada por

$$\langle x, y \rangle = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + \ldots + x_{n+1} y_{n+1}.$$

Esta métrica pseudorriemanniana é chamada **métrica de Lorentz**.

O espaço hiperbólico real de curvatura seccional constante -1 pode ser visto como a hipersuperfície tipoespaço de $\mathbb{R}_1^{n+2}$ definida por

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+2} \setminus |x|^2 = -1\ ,\ x_0 \geqslant 1\},$$

com a métrica positiva definida induzida pela métrica de Lorentz de $\mathbb{R}_1^{n+2}$.
Dado $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$, se x denota o vetor posição em $\mathbb{H}^{n+1}$, temos

$$0 = X|x|^2 = 2\langle X, x \rangle$$

o que implica $\langle X, x \rangle = 0$ qualquer que seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$. Portanto o campo normal unitário a $\mathbb{H}^{n+1}$ é o próprio vetor posição.

Seja $\psi : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ uma imersão de uma hiperfuperfície compacta orientável no espaço hiperbólico. Podemos ver ψ como uma aplicação $\psi : M^n \to \mathbb{R}_1^{n+2}$ com $|\psi|^2 = -1$ e $\psi_0 \geqslant 1$. Da mesma forma, um campo normal unitário correspondendo a ψ pode ser considerado como uma aplicação $N : M^n \to \mathbb{R}_1^{n+2}$ com $|N|^2 = 1$ e $\langle \psi, N \rangle = 0$.

Tome $a \in \mathbb{R}_1^{n+2}$, arbitrariamente, e defina as funções $F : \mathbb{H}^{n+1} \to \mathbb{R}$ e $f : M^n \to \mathbb{R}$ por

$$F = \langle x, a \rangle \ \ e \ \ f = \langle \psi, a \rangle. \tag{3.1}$$

Observe que sendo f a restição de F à hipersuperfície M^n vale

$$grad(f) = P_M(grad(F)),$$

onde $P_M(grad(F))$ representa a projeção do gradiente de F no plano tangente de M^n.

Em todo este capítulo denotaremos por ∇, $\overline{\nabla}$ e $\overline{\overline{\nabla}}$ as conexões Riemannianas de M^n, $\mathbb{H}^{n+1}$ e $\mathbb{R}^{n+2}_1$, respectivamente.

Teorema 3.1. *Seja $\psi : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável imersa no espaço hiperbólico. Para todo $0 \leqslant r \leqslant n-1$ e $a \in \mathbb{R}^{n+2}_1$ arbitrário, a seguinte fórmula é valida*

$$L_r(\langle \psi, a\rangle) = (n-r)S_r\langle \psi, a\rangle + (r+1)S_{r+1}\langle N, a\rangle.$$

Demonstração. Sejam F e f as funções definidas em (3.1). Se $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$, então $X(F) = \langle X, a\rangle$. Portanto $grad(F) = P_{\mathbb{H}^{n+1}}(a)$, onde $P_{\mathbb{H}^{n+1}}(a)$ representa a projeção de $a \in \mathbb{R}^{n+2}_1$ no plano tangente de $\mathbb{H}^{n+1}$. Como consequência, obtemos

$$grad(f) = P_M(P_{\mathbb{H}^{n+1}}(a)).$$

Dados $X,\ Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X grad(f), Y\rangle &= \langle \overline{\nabla}_X P_M(P_{\mathbb{H}^{n+1}}(a)), Y\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X [P_{\mathbb{H}^{n+1}}(a) - \langle P_{\mathbb{H}^{n+1}}(a), N\rangle N], Y\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X P_{\mathbb{H}^{n+1}}(a) + \overline{\nabla}_X[-\langle P_{\mathbb{H}^{n+1}}(a), N\rangle N], Y\rangle \\
&= \langle \overline{\overline{\nabla}}_X P_{\mathbb{H}^{n+1}}(a), Y\rangle + \langle P_{\mathbb{H}^{n+1}}(a), N\rangle\langle -\overline{\nabla}_X N, Y\rangle \\
&= \langle \overline{\overline{\nabla}}_X [a + \langle a, \psi\rangle \psi], Y\rangle + \langle a, N\rangle\langle A(X), Y\rangle \\
&= \langle a, \psi\rangle\langle \overline{\overline{\nabla}}_X \psi, Y\rangle + \langle a, N\rangle\langle A(X), Y\rangle \\
&= \langle a, \psi\rangle\langle X, Y\rangle + \langle a, N\rangle\langle A(X), Y\rangle,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\langle \nabla_X grad(f), Y\rangle = \langle \psi, a\rangle\langle X, Y\rangle + \langle N, a\rangle\langle A(X), Y\rangle.$$

Por outro lado, dada uma base ortonormal $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de M^n que diagonaliza o operador A, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}[P_r \mathit{Hess}\, f] &= \sum_{i=1}^{n} \langle P_r(\nabla_{e_i} \mathit{grad}(f)), e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \mathit{grad}(f), P_r(e_i) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r \langle \nabla_{e_i} \mathit{grad}(f), e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r [\langle \psi, a\rangle \langle e_i, e_i\rangle + \langle N, a\rangle \langle A(e_i), e_i\rangle] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r [\langle \psi, a\rangle + \lambda_i \langle N, a\rangle] \\
&= \langle \psi, a\rangle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r + \langle N, a\rangle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r \lambda_i,
\end{aligned}$$

onde λ_i^r e λ_i são os autovalores de P_r e A, respectivamente, associados ao autovetor e_i. Portanto,

$$\begin{aligned}
L_r(\langle \psi, a\rangle) &= \mathrm{tr}[P_r \mathit{Hess}\, \langle \psi, a\rangle] \\
&= \langle \psi, a\rangle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r + \langle N, a\rangle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r \lambda_i \\
&= \langle \psi, a\rangle \mathrm{tr}[P_r] + \langle N, a\rangle \mathrm{tr}[AP_r] \\
&= (n-r)S_r \langle \psi, a\rangle + (r+1)S_{r+1}\langle N, a\rangle,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$L_r(\langle \psi, a\rangle) = (n-r)S_r \langle \psi, a\rangle + (r+1)S_{r+1}\langle N, a\rangle.$$

□

Como consequência temos o seguinte

Corolário 3.1. *Seja $\psi : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta orientável imersa no espaço hiperbólico. Para todo $0 \leqslant r \leqslant n-1$ e $a \in \mathbb{R}_1^{n+2}$ arbitrário a seguinte igualdade é válida*

$$\int_M (H_r \langle \psi, a\rangle + H_{r+1}\langle N, a\rangle) dA = 0.$$

Demonstração. Pelo teorema anterior, vimos que para $0 \leqslant r \leqslant n-1$ vale

$$L_r(\langle \psi, a\rangle) = (n-r)S_r \langle \psi, a\rangle + (r+1)S_{r+1}\langle N, a\rangle.$$

Logo, multiplicando ambos os membros por $\frac{r!(n-r-1)!}{n!}$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{r!(n-r-1)!}{n!}L_r(\langle\psi,a\rangle) &= \frac{r!(n-r)!}{n!}S_r\langle\psi,a\rangle + \frac{(r+1)!(n-(r+1))!}{n!}S_{r+1}\langle N,a\rangle \\ &= H_r\langle\psi,a\rangle + H_{r+1}\langle N,a\rangle.\end{aligned}$$

Portanto, integrando a igualdade acima sobre o compacto M^n e utilizando o Teorema da Divergência, obtemos

$$\begin{aligned}\int_M (H_r\langle\psi,a\rangle + H_{r+1}\langle N,a\rangle)dA &= \frac{r!(n-r-1)!}{n!}\int_M L_r(\psi,a\rangle)dA \\ &= \frac{r!(n-r-1)!}{n!}\int_M \mathit{div}\,[P_r\,\mathit{grad}\,(\langle\psi,a\rangle)]dA \\ &= 0.\end{aligned}$$

Consequentemente, para todo $0 \leqslant r \leqslant n-1$, vale que

$$\int_M (H_r\langle\psi,a\rangle + H_{r+1}\langle N,a\rangle)dA = 0.$$

□

No teorema seguinte provaremos uma desigualdade integral para hipersuperfícies mergulhadas no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$, cuja igualdade caracteriza as hiperesferas geodésicas. Para começar, denote por ρ a função positiva $\rho : (1,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\rho(u) = \int_0^{\mathit{arc\ cotgh}\,(u)} [\cosh(t) - u\cdot\sinh(t)]^n \cosh(t)dt.$$

Teorema 3.2. *Seja* $\psi : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ *um mergulho de uma hipersuperfície compacta* M^n *no espaço hiperbólico* $\mathbb{H}^{n+1}$. *Assuma que a r-ésima curvatura média* H_r, *para algum* $1 \leqslant r \leqslant n$, *com relação ao normal interior* N *satisfaz* $H_r > 1$ *em todos os pontos de* M^n. *Então, temos*

$$\int_M (\langle\psi,a\rangle + H_r^{\frac{1}{r}}\langle N,a\rangle)\rho(H_r^{\frac{1}{r}})dA \geqslant 0$$

para $a \in \mathbb{R}_1^{n+2}$ *com* $|a|^2 = -1$ *e* $a_0 \leqslant -1$. *Além disso, a igualdade vale se, e somente se,* M^n *é uma hiperesfera geodésica.*

Demonstração. Denote por Ω o domínio compacto em $\mathbb{H}^{n+1}$ com $\partial\Omega = M^n$. Se x é o vetor posição dos pontos de $\mathbb{H}^{n+1}$ em $\mathbb{R}^{n+2}_1$ e $a \in \mathbb{R}^{n+2}_1$, então

$$\begin{aligned}
\overline{\triangle}\langle x, a\rangle &= div_{\mathbb{H}^{n+1}}[grad(\langle x, a\rangle)] = \sum_{i=1}^{n+1}\langle \overline{\nabla}_{e_i} grad(\langle x, a\rangle), e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\langle \overline{\nabla}_{e_i} P_{\mathbb{H}^{n+1}}(a), e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n+1}\langle \overline{\nabla}_{e_i}[a + \langle x, a\rangle x], e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\langle\ \langle x, a\rangle \overline{\nabla}_{e_i} x, e_i\rangle = \langle x, a\rangle \sum_{i=1}^{n+1}\langle e_i, e_i\rangle \\
&= (n+1)\langle x, a\rangle,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\overline{\triangle}\langle x, a\rangle = (n+1)\langle x, a\rangle \tag{3.2}$$

onde $\overline{\triangle}$ é o Laplaciano em $\mathbb{H}^{n+1}$. Integrando a Igualdade 3.2 em Ω e utilizando o Teorema da Divergência, segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (n+1)\langle x, a\rangle dV &= \int_\Omega \overline{\triangle}\langle x, a\rangle dV \\
&= \int_\Omega div_{\mathbb{H}^{n+1}}[grad(\langle x, a\rangle)] dV \\
&= \int_\Omega div_{\mathbb{H}^{n+1}}[P_{\mathbb{H}^{n+1}}(a)] dV \\
&= \int_M \langle -N, P_{\mathbb{H}^{n+1}}(a)\rangle dA \\
&= -\int_M \langle N, a\rangle dA,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_\Omega (n+1)\langle x, a\rangle dV = -\int_M \langle N, a\rangle dA,$$

onde N é escolhido sendo o normal interior em relação a Ω.

Como $\exp_p(tN(p)) = \cosh(t)\cdot p + \sinh(t)\cdot N(p)$, obtemos da Igualdade 4.9 que

$$dV(\exp_p(tN(p))) = \prod_{i=1}^{n}(\cosh(t) - \lambda_i \sinh(t)) dt dA.$$

Fazendo uso da Fórmula 4.7 com $f = (n+1)\langle x, a\rangle$, obtemos

$$-\int_M \langle N, a\rangle dA =$$

$$\int_M \int_o^{c(p)} (n+1)\langle \cosh(t)\cdot p + \sinh(t)\cdot N(p), a\rangle \prod_{i=1}^{n}(\cosh(t) - \lambda_i \sinh(t)) dt dA.$$

No ponto de M^n, onde a função distância de $\mathbb{H}^{n+1}$ alcança o máximo, todas as curvaturas principais são positivas, na verdade, elas são maiores que 1 (veja Proposição 1.8). Isto combinado com a hipótese $H_r > 1$ e o Teorema 1.2 nos dá

$$1 < H_r^{\frac{1}{r}} \leqslant H.$$

Pelo Lema 1.2 temos,

$$c(p) \leqslant \mathit{arc\ cotgh}(\lambda_{max}) \leqslant \mathit{arc\ cotgh}(H(p)) \leqslant \mathit{arc\ cotgh}(H_r^{\frac{1}{r}}(p)),$$

Além disso, se $t \in (0, c(p))$ o Corolário 1.1 nos diz que

$$\begin{aligned}(\cosh(t) - \lambda_1 \sinh(t)) \cdot \ldots \cdot (\cosh(t) - \lambda_n \sinh(t)) &\leqslant (\cosh(t) - H \sinh(t))^n \\ &\leqslant (\cosh(t) - H_r^{\frac{1}{r}} \sinh(t))^n\end{aligned}$$

e a igualdade ocorre somente nos pontos umbílicos.

Observe que $\langle \psi, a \rangle \geqslant 1$ para todo $x \in \Omega$ pois $x,\ a \in \mathbb{R}_1^{n+2}$ com $|x|^2 = |a|^2 = -1$, $x_0 \geqslant 1$ e $a_0 \leqslant -1$. Portanto, obtemos

$$-\int_M \langle N, a \rangle dA \leqslant$$

$$\int_M \int_0^{\mathit{arc\ cotgh}(H_r^{\frac{1}{r}})} (n+1)\langle \cosh(t) \cdot p + \sinh(t) \cdot N(p), a \rangle (\cosh(t) - H_r^{\frac{1}{r}} \sinh(t))^n dt dA, \quad (3.3)$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, M^n é umbilica e portanto uma hiperesfera geodésica. Agora, veja que para todo p em M^n

$$\int_0^{\mathit{arc\ cotgh}(H_r^{\frac{1}{r}})} (n+1)(\cosh(t) - H_r^{\frac{1}{r}} \sinh(t))^n (\sinh(t) - H_r^{\frac{1}{r}} \cosh(t)) dt = -1. \quad (3.4)$$

Para ver isto, é suficiente fazer uma mudança de variável $\omega = \cosh(t) - H_r^{\frac{1}{r}} \sinh(t)$. Multiplicando a Igualdade 3.4 por $\langle N, a \rangle$ e integrando em M^n, obtemos

$$-\int_M \langle N, a \rangle dA =$$

$$\int_M \int_0^{\mathit{arc\ cotgh}(H_r^{\frac{1}{r}})} (n+1)(\cosh(t) - H_r^{\frac{1}{r}} \sinh(t))^n (\sinh(t) - H_r^{\frac{1}{r}} \cosh(t)) \langle N, a \rangle dt dA.$$

Substituindo esta expressão na Desigualdade 3.3 e dividindo por $(n+1)$, segue que

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_M \int_0^{\mathit{arc\ cotgh}(H_r^{\frac{1}{r}})} (\cosh(t) - H_r^{\frac{1}{r}} \sinh(t))^n \cosh(t)(\langle p, a \rangle + H_r^{\frac{1}{r}} \langle N, a \rangle) dt dA \\ &= \int_M (\langle p, a \rangle + H_r^{\frac{1}{r}} \langle N, a \rangle) \left(\int_0^{\mathit{arc\ cotgh}(H_r^{\frac{1}{r}})} (\cosh(t) - H_r^{\frac{1}{r}} \sinh(t))^n \cosh(t) dt \right) dA \\ &= \int_M (\langle p, a \rangle + H_r^{\frac{1}{r}} \langle N, a \rangle) \rho(H_r^{\frac{1}{r}}) dA. \end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração. □

Tal como no caso onde o espaço ambiente era o espaço Euclidiano, podemos deduzir a partir dos resultados vistos acima um teorema correspondendo a um tipo de Teorema de Alexandrov. Vejamos, então, o resultado principal deste capítulo.

Teorema 3.3. *Seja M^n uma hipersuperfície compacta mergulhada no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$. Se H_r é constante para algum $1 \leqslant r \leqslant n$, então M^n é uma hiperesfera geodésica.*

Demonstração. Como foi observado na Proposição 1.8, existe um ponto de M^n onde todas as curvaturas principais são maiores que 1. Portanto, a constante H_r é também maior que 1. Assim, do Teorema 3.2, temos

$$\int_M (\langle p, a\rangle + H_r^{\frac{1}{r}} \langle N, a\rangle) dA \geqslant 0 \tag{3.5}$$

para todo $a \in \mathbb{R}_1^{n+2}$ tal que $|a|^2 = -1$ e $a_0 \leqslant -1$, pois $\rho(H_r^{\frac{1}{r}})$ é uma constante positiva.

A igualdade (na Desigualdade 3.5) ocorre se, e somente se, M^n é umbílica. Por outro lado, o Teorema 1.2 nos dá $H_{r-1} \geqslant H_r^{\frac{r-1}{r}}$. Observe ainda que $\langle p, a\rangle \geqslant 1$ para todo $p \in M^n$. Portanto, o Corolário 3.1 implica

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M (H_{r-1}\langle p, a\rangle + H_r\langle N, a\rangle) dA \\ &\geqslant \int_M (H_r^{\frac{r-1}{r}} \langle p, a\rangle + H_r\langle N, a\rangle) dA \\ &= H_r^{\frac{r-1}{r}} \int_M (\langle p, a\rangle + H_r^{\frac{1}{r}} \langle N, a\rangle) dA. \end{aligned}$$

Porém H_r é uma constante positiva, então

$$\int_M (\langle p, a\rangle + H_r^{\frac{1}{r}} \langle N, a\rangle) dA \leqslant 0.$$

Desta desigualdade juntamente com a Desigualdade 3.5 encontramos

$$\int_M (\langle p, a\rangle + H_r^{\frac{1}{r}} \langle N, a\rangle) dA = 0,$$

o que demonstra o teorema. □

Capítulo 4

O Teorema de Alexandrov em $\mathbb{S}^{n+1}$

Seja $\mathbb{S}^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+2} \ : \ \langle x, x\rangle = 1\}$ a esfera unitária $(n+1)$ dimensional de $\mathbb{R}^{n+2}$ com a métrica induzida pela métrica usual de $\mathbb{R}^{n+2}$. Dado $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{n+1})$, se p denota o vetor posição em $\mathbb{S}^{n+1}$, temos

$$0 = X|p|^2 = \langle X, p\rangle.$$

Portanto o campo normal unitário a $\mathbb{S}^{n+1}$ é o próprio vetor posição.

Seja $\psi : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão de uma hipersuperfície compacta orientável na esfera unitária. Podemos ver ψ como uma aplicação $\psi : M^n \to \mathbb{R}^{n+2}$ com $|\psi|^2 = 1$. Desta maneira, um campo normal unitário correspondendo a ψ pode ser visto como uma aplicação $N : M^n \to \mathbb{R}^{n+2}$ com $|N|^2 = 1$ e $\langle \psi, N\rangle = 0$.
Tome $a \in \mathbb{R}^{n+2}$ arbitrário e defina as funções $F : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{R}$ e $f : M^n \to \mathbb{R}$ por

$$F = \langle x, a\rangle \ \text{ e } \ f = \langle \psi, a\rangle. \tag{4.1}$$

Observe que sendo f a restição de F à hipersuperfície M^n temos

$$grad(f) = P_M(grad(F)),$$

onde $P_M(grad(F))$ denota a projeção do gradiente de F no plano tangente de M^n.

Em todo este capítulo denotaremos por ∇, $\overline{\nabla}$ e $\overline{\overline{\nabla}}$ as conexões Riemannianas de M^n, $\mathbb{S}^{n+1}$ e $\mathbb{R}^{n+2}$, respectivamente.
Temos, de maneira análoga ao caso hiperbólico, os seguintes resultados:

Teorema 4.1. *Seja $\psi : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável imersa na esfera unitária. Para todo $0 \leqslant r \leqslant n-1$ e $a \in \mathbb{R}^{n+2}$ arbitrário, a seguinte fórmula é valida*

$$L_r(\langle \psi, a\rangle) = (r+1)S_{r+1}\langle N, a\rangle - (n-r)S_r\langle \psi, a\rangle.$$

Demonstração. Sejam F e f as funções definidas em (4.1). Se $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{n+1})$, então $X(F) = \langle X, a\rangle$. Assim $grad(F) = P_{\mathbb{S}^{n+1}}(a)$, onde $P_{\mathbb{S}^{n+1}}(a)$ denota a projeção de $a \in \mathbb{R}^{n+2}$ no plano tangente de $\mathbb{S}^{n+1}$. Portanto,

$$grad(f) = P_M(P_{\mathbb{S}^{n+1}}(a)).$$

Dados $X,\ Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X grad(f), Y\rangle &= \langle \overline{\nabla}_X[P_{\mathbb{S}^{n+1}}(a) - \langle P_{\mathbb{S}^{n+1}}(a), N\rangle N], Y\rangle \\
&= \langle \overline{\overline{\nabla}}_X[a - \langle a, \psi\rangle\psi] - \langle P_{\mathbb{S}^{n+1}}(a), N\rangle \nabla_X N, Y\rangle \\
&= -\langle a, \psi\rangle\langle X, Y\rangle + \langle a, N\rangle\langle A(X), Y\rangle,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\langle \nabla_X grad(f), Y\rangle = \langle N, a\rangle\langle A(X), Y\rangle - \langle a, \psi\rangle\langle X, Y\rangle.$$

Portanto, dada uma base ortonormal $\{e_1(p), \dots, e_n(p)\}$ de T_pM^n que diagonaliza o operador A_p, temos

$$\begin{aligned}
L_r(\langle \psi, a\rangle) &= tr[P_r Hess\langle \psi, a\rangle] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle P_r(\nabla_{e_i} grad(\langle \psi, a\rangle)), e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} grad(\langle \psi, a\rangle), P_r(e_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r[\langle N, a\rangle\langle A(e_i), e_i\rangle - \langle \psi, a\rangle\langle e_i, e_i\rangle] \\
&= \langle N, a\rangle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\lambda_i^r - \langle \psi, a\rangle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r \\
&= \langle N, a\rangle tr[AP_r] - \langle \psi, a\rangle tr[P_r] \\
&= (r+1)S_{r+1}\langle N, a\rangle - (n-r)S_r\langle \psi, a\rangle.
\end{aligned}$$

onde λ_i^r e λ_i são os autovalores de P_r e A, respectivamente, associados ao autovetor e_i. □

Como consequência direta temos o seguinte

Corolário 4.1. *Seja $\psi : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta orientável imersa na esfera unitária. Para todo $r = 0, \dots, n-1$ e $a \in \mathbb{R}^{n+2}$ arbitrário, temos*

$$\int_M (H_r\langle \psi, a\rangle - H_{r+1}\langle N, a\rangle)dA = 0.$$

Agora, considere $\psi : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta mergulhada na esfera unitária, e Ω um domínio compacto em $\mathbb{S}^{n+1}$ com $\partial\Omega = M^n$. Se x é o vetor posição dos pontos de $\mathbb{S}^{n+1}$ em $\mathbb{R}^{n+2}$ e $a \in \mathbb{R}^{n+2}$ arbitrário, então

$$\overline{\triangle}\langle x, a\rangle = -(n+1)\langle x, a\rangle, \tag{4.2}$$

onde $\overline{\triangle}$ é o Laplaciano em $\mathbb{S}^{n+1}$. De fato,

$$\begin{aligned}
\overline{\triangle}\langle x, a\rangle &= \sum_{i=1}^{n+1}\langle \overline{\nabla}_{e_i} grad(\langle x, a\rangle), e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\langle \overline{\nabla}_{e_i}[a - \langle a, x\rangle x], e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\langle -\langle a, x\rangle e_i, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} -\langle a, x\rangle \\
&= -(n+1)\langle a, x\rangle.
\end{aligned}$$

Integrando a Igualdade 4.2 em Ω e utilizando o Teorema da Divergência, segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (n+1)\langle x, a\rangle dV &= -\int_\Omega \overline{\triangle}\langle x, a\rangle dV \\
&= -\int_\Omega div_{\mathbb{S}^{n+1}}[grad(\langle x, a\rangle)]dV \\
&= -\int_\Omega div_{\mathbb{S}^{n+1}}[P_{\mathbb{S}^{n+1}}(a)]dV \\
&= -\int_M \langle -N, P_{\mathbb{S}^{n+1}}(a)\rangle dA \\
&= \int_M \langle N, a\rangle dA,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_\Omega (n+1)\langle x, a\rangle dV = \int_M \langle N, a\rangle dA,$$

onde N é escolhido sendo o normal interior em relação a Ω.

Como $\exp_p(tN(p)) = \cos(t)\cdot p + \sin(t)\cdot N(p)$, obtemos da Igualdade 4.9 que

$$dV(\exp_p(tN(p))) = \prod_{i=1}^{n}(\cos(t) - \lambda_i \sin(t))dtdA.$$

Utilizando a Fórmula 4.7 com $f = (n+1)\langle x, a\rangle$, obtemos

$$\int_M \langle N, a\rangle dA =$$

$$\int_M \int_0^{c(p)} (n+1)\langle \cos(t)\cdot p + \sin(t)\cdot N(p), a\rangle \prod_{i=1}^{n}(\cos(t) - \lambda_i \sin(t))dtdA. \tag{4.3}$$

No teorema seguinte provaremos uma desigualdade integral para hipersuperfícies mergulhadas na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$ com a igualdade caracterizando as hipersuperfícies umbílicas.

De início, denote por ρ a função positiva definida em $(0, +\infty)$ por

$$\rho(u) = \int_0^{\mathit{arc\ cotg}\,(u)} [\cos(t) - u \cdot \sin(t)]^n \cos(t)dt.$$

Teorema 4.2. *Seja $\psi : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta mergulhada na esfera unitária e contida no hemisfério aberto com centro $a \in \mathbb{S}^{n+1}$. Se a r-ésima curvatura média H_r, para algum $r = 1, \ldots, n$, é positiva em todos os pontos de M^n. Então*

$$\int_M (\langle \psi, a \rangle - H_r^{\frac{1}{r}} \langle N, a \rangle) \rho(H_r^{\frac{1}{r}}) dA \geqslant 0.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, M^n é umbílica.

Demonstração. No ponto de M^n, onde a função altura $\langle \psi, a \rangle$ alcança o máximo (este máximo existe devido à compacidade de M^n), todos as curvaturas principais são positivas pois M^n está no hemisfério aberto de centro $a \in \mathbb{S}^{n+1}$ (veja Proposição 1.8). Isto, combinado com a hipótese $H_r > 0$ e o Teorema 1.2 nos dá

$$0 < H_r^{\frac{1}{r}} \leqslant H.$$

Pelo Lema 1.2, temos

$$c(p) \leqslant \mathit{arc\ cotg}\,(\lambda_{max}) \leqslant \mathit{arc\ cotg}\,(H(p)) \leqslant \mathit{arc\ cotg}\,(H_r^{\frac{1}{r}}(p)).$$

Além disso, se $t \in (0, c(p))$ o Corolário 1.1 nos diz que

$$\begin{aligned} (\cos(t) - \lambda_1 \sin(t)) \cdot \ldots \cdot (\cos(t) - \lambda_n \sin(t)) &\leqslant (\cos(t) - H \sin(t))^n \\ &\leqslant (\cos(t) - H_r^{\frac{1}{r}} \sin(t))^n \end{aligned}$$

e a igualdade ocorre somente nos pontos umbílicos.

Como M^n é mergulhada existem Ω_1, $\Omega_2 \subset \mathbb{S}^{n+1}$ domínios compactos tais que $\partial\Omega_1 = \partial\Omega_2 = M^n$ e $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \mathbb{S}^{n+1}$. Seja Ω_1 o domínio contido no hemisfério de centro a e N o normal interior a Ω_1, então

$$\langle \cos(t) \cdot p + \sin(t) \cdot N(p), a \rangle \geqslant 0$$

Portanto, da Igualdade 4.3 obtemos

$$\int_M \langle N, a \rangle dA \leqslant$$

$$\int_M \int_0^{arc\ cotg\,(H_r^{\frac{1}{r}})} (n+1)\langle \cos(t)\cdot p + \sin(t)\cdot N(p), a\rangle (\cos(t) - H_r^{\frac{1}{r}}\sin(t))^n dtdA, \tag{4.4}$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, M^n é umbílica. Agora, note que para todo ponto p em M^n

$$\int_0^{arc\ cotg\,(H_r^{\frac{1}{r}})} (n+1)(\cos(t) - H_r^{\frac{1}{r}}\sin(t))^n(\sin(t) + H_r^{\frac{1}{r}}\cos(t))dt = 1. \tag{4.5}$$

De fato, é suficiente fazer a mudança de variável $\omega = \cos(t) - H_r^{\frac{1}{r}}\sin(t)$. Multiplicando a Igualdade 4.5 por $\langle N, a\rangle$ e integrando em M^n obtemos

$$\int_M \langle N, a\rangle dA = \int_M \int_0^{arc\ cotg\,(H_r^{\frac{1}{r}})} (n+1)(\cos(t) - H_r^{\frac{1}{r}}\sin(t))^n(\sin(t) + H_r^{\frac{1}{r}}\cos(t))\langle N, a\rangle dtdA.$$

Substituindo esta expressão na Desigualdade 4.4 e dividindo por $(n+1)$, segue que

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_M \int_0^{arc\ cotg\,(H_r^{\frac{1}{r}})} (\cos(t) - H_r^{\frac{1}{r}}\sin(t))^n \cos(t)(\langle p, a\rangle - H_r^{\frac{1}{r}}\langle N, a\rangle)dtdA \\ &= \int_M (\langle p, a\rangle - H_r^{\frac{1}{r}}\langle N, a\rangle)\left(\int_0^{arc\ cotg\,(H_r^{\frac{1}{r}})} (\cos(t) - H_r^{\frac{1}{r}}\sin(t))^n\cos(t)dt\right) dA \\ &= \int_M (\langle p, a\rangle - H_r^{\frac{1}{r}}\langle N, a\rangle)\rho(H_r^{\frac{1}{r}})dA. \end{aligned}$$

o que encerra a demonstração. □

De forma análoga ao caso hiperbólico obtemos o teorema principal deste capítulo. Vejamos,

Teorema 4.3. *Seja M^n uma hipersuperfície compacta mergulhada num hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1}$. Se H_r é constante para algum $r = 1, \dots, n$, então M^n é uma hiperesfera geodésica.*

Demonstração. Como foi destacado na Proposição 1.8, existe um ponto de M^n onde todas as curvaturas principais são positivas. Portanto a constante H_r é, também, positiva. Ainda pelo Teorema 4.2, temos

$$\int_M (\langle p, a\rangle - H_r^{\frac{1}{r}}\langle N, a\rangle)dA \geqslant 0, \tag{4.6}$$

onde $a \in \mathbb{S}^{n+1}$ é o centro do hemisfério aberto que contém M^n, pois $\rho(H_r^{\frac{1}{r}})$ é uma constante positiva. A igualdade na Desigualdade 4.6 ocorre se, e somente se, M^n é umbílica.

Por outro lado, o Teorema 1.2 nos diz que $H_r^{\frac{r-1}{r}} \leqslant H_{r-1}$. Note ainda que $\langle p, a\rangle > 0$ para todo $p \in M^n$. Assim, o Corolário 4.1 acarreta

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M (H_{r-1}\langle p, a\rangle - H_r\langle N, a\rangle)dA \\ &\geqslant \int_M (H_r^{\frac{r-1}{r}}\langle p, a\rangle - H_r\langle N, a\rangle)dA \\ &= H_r^{\frac{r-1}{r}} \int_M (\langle p, a\rangle - H_r^{\frac{1}{r}}\langle N, a\rangle)dA. \end{aligned}$$

Como H_r é uma constante positiva, a desigualdade acima implica

$$\int_M (\langle p, a\rangle - H_r^{\frac{1}{r}}\langle N, a\rangle)dA \leqslant 0$$

e esta desigualdade juntamente com a Desigualdade 4.6 nos dá

$$\int_M (\langle p, a\rangle - H_r^{\frac{1}{r}}\langle N, a\rangle)dA = 0$$

o que conclui a demonstração do teorema. □

4.1 Toro de Clifford

O objetivo desta seção é mostrar que, no Teorema 4.3, a hipótese da hipersuperfície M^n estar mergulhada num hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1}$ é indispensável para a obtenção do resultado. Faremos isto através de um exemplo. Apresentaremos uma hipersuperfície (Toro de Clifford) mergulhada em $\mathbb{S}^{n+1}$ com H_r constante para algum $r = 1, \ldots, n$.

Antes, porém, precisamos relembrar alguns fatos e definições.

Definição 4.1. *Sejam M_1 e M_2 variedades Riemannianas e considere a variedade produto $M_1 \times M_2$. Sejam $\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$ e $\pi_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$ as projeções naturais. Introduzimos em $M_1 \times M_2$ uma métrica Riemanniana, denominada* **métrica produto**, *pondo:*

$$\langle u, v\rangle_{(p_1,p_2)} = \langle d\pi_1(u), d\pi_1(v)\rangle^1_{p_1} + \langle d\pi_2(u), d\pi_2(v)\rangle^2_{p_2}$$

para todo $(p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$, u, $v \in T_{(p_1,p_2)}M_1 \times M_2$. Onde $\langle\ ,\ \rangle^1$ e $\langle\ ,\ \rangle^2$ representam as métricas Riemannianas de M_1 e M_2, respectivamente.

Sejam $\mathbb{S}^{n_1}(r_1) = \{p_1 \in \mathbb{R}^{n_1+1} \setminus \langle p_1, p_1\rangle = r_1^2\}$, $\mathbb{S}^{n_2}(r_2) = \{p_2 \in \mathbb{R}^{n_2+1} \setminus \langle p_2, p_2\rangle = r_2^2\}$ e f, g as imersões isométricas de $\mathbb{S}^{n_1}(r_1) \subset \mathbb{R}^{n_1+1}$ e $\mathbb{S}^{n_2}(r_2) \subset \mathbb{R}^{n_2+1}$ dadas pelas inclusões canônicas. Ou seja

$$f : \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \to \mathbb{R}^{n_1+1}, \;\; f(p_1) = p_1,$$

$$g : \mathbb{S}^{n_2}(r_2) \to \mathbb{R}^{n_2+1}, \quad g(p_2) = p_2,$$

e considere o produto dessas imersões

$$\varphi = f \times g : \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2) \to \mathbb{R}^{n_1+n_2+2}, \quad \varphi(p_1, p_2) = (f(p_1), g(p_2)).$$

Observação 4.1. *Não é difícil verificar que φ é um mergulho.*

Sejam $n = n_1 + n_2$ e r_1, $r_2 \in \mathbb{R}$ tais que $r_1^2 + r_2^2 = 1$. Para todo $(p_1, p_2) \in \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$, temos $|(p_1, p_2)|^2 = |p_1|^2 + |p_2|^2 = r_1^2 + r_2^2 = 1$. Portanto, temos a imersão

$$\varphi : \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2) \to \mathbb{S}^{n+1}$$

chamada de **toro de Clifford**.

Proposição 4.1. *Se $\varphi : \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2) \to \mathbb{S}^{n+1}$ é um toro de Clifford, então um vetor normal e unitário em um ponto $(p_1, p_2) \in \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ é dado por*

$$N = (-\frac{r_2}{r_1}p_1, \frac{r_1}{r_2}p_2).$$

Demonstração. Ponha $M^n = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$. Assim, como $T_{(p_1,p_2)}M \approx T_{p_1}\mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times T_{p_2}\mathbb{S}^{n_2}(r_2)$, dado $v \in T_{(p_1,p_2)}M$ temos $v = (v_1, v_2)$ com $v_i \in T_{p_i}\mathbb{S}^{n_i}(r_i)$, $i = 1,\ 2$. Logo,

$$\begin{aligned}
\langle N, v\rangle &= \langle(-\frac{r_2}{r_1}p_1, \frac{r_1}{r_2}p_2), (v_1, v_2)\rangle \\
&= -\frac{r_2}{r_1}\langle p_1, v_1\rangle + \frac{r_1}{r_2}\langle p_2, v_2\rangle = 0
\end{aligned}$$

pois $\langle p_1, v_1\rangle = \langle p_2, v_2\rangle = 0$. Então N é normal a M^n em (p_1, p_2). Além disso,

$$\begin{aligned}
|N|^2 &= \langle(-\frac{r_2}{r_1}p_1, \frac{r_1}{r_2}p_2), (-\frac{r_2}{r_1}p_1, \frac{r_1}{r_2}p_2)\rangle \\
&= \frac{r_2^2}{r_1^2}\langle p_1, p_1\rangle \frac{r_1^2}{r_2^2}\langle p_2, p_2\rangle \\
&= \frac{r_2^2}{r_1^2}r_1^2 + \frac{r_1^2}{r_2^2}r_2^2 \\
&= r_2^2 + r_1^2 = 1.
\end{aligned}$$

o que prova que N é unitário. □

Considere $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M^n$ uma curva diferenciável com $\alpha(0) = p = (p_1, p_2)$ e $\alpha'(0) = v = (v_1, v_2)$. Então $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$, onde $\alpha_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{S}^{n_i}(r_i)$, $i = 1,\ 2$ e portanto

$$(N \circ \alpha)(t) = (-\frac{r_2}{r_1}\alpha_1(t), \frac{r_1}{r_2}\alpha_2(t)).$$

Logo,

$$\begin{aligned} dN_p(v) &= \frac{d}{dt}(N \circ \alpha)(t)|_{t=0} \\ &= (-\frac{r_2}{r_1}\alpha_1'(0), \frac{r_1}{r_2}\alpha_2'(0)) \\ &= (-\frac{r_2}{r_1}v_1, \frac{r_1}{r_2}v_2). \end{aligned}$$

Em particular, para $\omega = (\omega_1, 0)$, temos

$$dN_p(\omega) = (-\frac{r_2}{r_1}\omega_1, 0) = -\frac{r_2}{r_1}(\omega_1, 0) = -\frac{r_2}{r_1}\omega.$$

Da mesma maneira, para $\omega = (0, \omega_2)$, temos

$$dN_p(\omega) = \frac{r_1}{r_2}\omega.$$

Provando que os autovalores da segunda forma fundamental A da imersão φ são $\frac{r_2}{r_1}$ e $-\frac{r_1}{r_2}$ (note a troca dos sinais!), sendo os autoespaços a eles associados de dimensão n_1 e n_2, respectivamente. Portanto existe uma base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em T_pM na qual A tem a seguinte forma:

$$[A] = \begin{pmatrix} \frac{r_2}{r_1}I_{n_1} & 0 \\ 0 & -\frac{r_1}{r_2}I_{n_2} \end{pmatrix},$$

onde I_{n_1} e I_{n_2} denotam, respectivamente, as matrizes identidade de ordem n_1 e n_2.

Observação 4.2. *Note que a r-ésima curvatura média H_r do toro de Clifford é constante para todo $r = 1, \ldots, n$.*

Observação 4.3. *Para $n = 2k$, $n_1 = n_2 = k$ e $r_1 = r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ temos que a curvatura média do toro de Clifford é identicamente nula ($H \equiv 0$). Ou seja, $\mathbb{S}^k(\frac{\sqrt{2}}{2}) \times \mathbb{S}^k(\frac{\sqrt{2}}{2}) \subset \mathbb{S}^{2k+1}$ é uma hipersuperfície mínima.*

Observe também que o toro de Clifford não está contido em nenhum hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1}$, pois o mesmo contém pontos antípodas.

Apêndice

Sejam M^n uma variedade Riemanniana de dimensão n, $\overline{M}_c^{n+1}$ uma variedade Riemanniana completa, simplismente conexa de curvatura seccional constante igual a $c \in \{-1, 0, 1\}$ e $\psi : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ um mergulho compacto, então M^n é a fonteira de um domínio compacto $\Omega \subset \overline{M}_c^{n+1}$, isto é, $\partial\Omega = M^n$. Escolhendo N o campo unitário normal interior à M^n temos, para toda função integrável $f : \Omega \to \mathbb{R}$, a seguinte fórmula de integração

$$\int_\Omega f\, dV = \int_M \int_0^{c(p)} f(\exp_p(tN(p)))F(p,t)\, dt dA, \tag{4.7}$$

onde dV é a medida Riemanniana de $\overline{M}_c^{n+1}$, dA é a medida induzida sobre M^n, $c(p) = max\{t \geqslant 0 \ : \ d(M, \exp_p(tN(p)) = t\}$ e $F(p,t)$ é dada por

$$dV(\exp_p(tN(p))) = F(p,t)\, dt dA. \tag{4.8}$$

Agora consideremos a função $S_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$S_c(t) = \begin{cases} \sinh(t), & \text{se} \quad c = -1; \\ t, & \text{se} \quad c = 0; \\ \sin(t), & \text{se} \quad c = 1. \end{cases}$$

Neste caso, $\exp_p(tN(p)) = S_c'(t) \cdot p + S_c(t) \cdot N(p)$ é a aplicação exponencial de $\overline{M}_c^{n+1}$ no ponto p aplicada em $tN(p) \in T_p\overline{M}_c^{n+1}$. Quando $\psi : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ é um mergulho podemos parametrizar Ω com

$$\psi_t(p) = \exp_p(tN(p)) = S_c'(t) \cdot p + S_c(t) \cdot N(p),$$

onde $t \in [0, c(p))$ e $p \in M^n$.

Observe que

$$\langle \frac{d}{dt}\psi_t(p), \frac{d}{dt}\psi_t(p) \rangle = 1.$$

De fato, como $\langle \frac{d}{dt}\psi_t(p), \frac{d}{dt}\psi_t(p)\rangle = (S_c''(t))^2 \cdot \|p\|^2 + 2\,S_c''(t)\cdot S_c'(t)\,\langle p, N(p)\rangle + (S_c'(t))^2$ temos que, para $c = 0$, é imediato. Para $c = -1$, lembrando que $\langle p, N(p)\rangle = 0$ e $\|p\|^2 = -1$, temos

$$\langle \frac{d}{dt}\psi_t(p), \frac{d}{dt}\psi_t(p)\rangle = -(\sinh(t))^2 + (\cosh(t))^2 = 1;$$

Para $c = 1$, observando que $\langle p, N(p)\rangle = 0$ e $\|p\|^2 = 1$, temos

$$\langle \frac{d}{dt}\psi_t(p), \frac{d}{dt}\psi_t(p)\rangle = (-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 = 1.$$

Seja $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset T_pM$ uma base ortonormal que diagonaliza o operador A e seja $\alpha_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M^n$ uma curva suave tal que $\alpha_i(0) = p$ e $\alpha_i'(0) = e_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Assim,

$$\begin{aligned} d\psi_t(p)\, e_i &= \frac{d}{ds}\psi_t(\alpha_i(s))|_{s=0} = \frac{d}{ds}(S_c'(t)\cdot \alpha_i(s) + S_c(t)\cdot N(\alpha_i(s)))|_{s=0} \\ &= S_c'(t)\alpha_i'(0) + S_c(t)\frac{d}{ds}N(\alpha_i(s)))|_{s=0} = S_c'(t)\cdot e_i - S_c(t)\cdot A(e_i) \\ &= (S_c'(t) - \lambda_i S_c(t))e_i. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle d\psi_t(p)\, e_i, d\psi_t(p)\, e_j\rangle = \delta_{ij}(S_c'(t) - \lambda_i S_c(t))^2.$$

Observe ainda que

$$\langle \frac{d}{dt}\psi_t(p), d\psi_t(p)\, e_i\rangle = 0.$$

Donde concluímos que a matriz da métrica de Ω é

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (S_c'(t) - \lambda_1 S_c(t))^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (S_c'(t) - \lambda_n S_c(t))^2 \end{pmatrix}.$$

Consequentemente, o elemento de volume dV de Ω é dado por

$$dV = \sqrt{\det\sigma}\, dt dA = \prod_{i=1}^{n}(S_c'(t) - \lambda_i S_c(t))\, dt dA. \tag{4.9}$$

Concluímos que,

$$\int_\Omega f\, dV = \int_M \int_0^{c(p)} f(\exp_p(tN(p))) \prod_{i=1}^{n}(S_c'(t) - \lambda_i S_c(t))\, dt dA. \tag{4.10}$$

Referências Bibliográficas

[1] Alexandrov, A. D. - *Uniqueness Theorems for Surfaces in the Large I.* Vestnik Leningrad Univ., **11** (1956), 5-17.

[2] Aquino, C. P. - *Uma Caracterização de Hipersuperfícies na Esfera com Curvatura Escalar Constante.* Dissertação (Mestrado em Mátemática), Universidade Federal do Ceará, coordenação de aperfeiçoamento de pessoal de nível superior. Ano de obtenção: (2003)

[3] Barros, A. e Sousa, P. - *An Extension of Jellett's Theorem.* Bull. Sci. math. **133**, 190-197 (2009).

[4] Caminha, A. - *On Hypersurfaces in Space of Constant Sectional Curvature.* Tese (Doutorado em Matemática), Universidade Federal do Ceará, coordenação de aperfeiçoamento de pessoal de nível superior. Ano de obtenção: (2004).

[5] Cheng, X. e Rosenberg, H. - *Embedded positive constant* r*-mean curvature hypersurfaces in* $M^m \times \mathbb{R}$. Anais da Academia Brasileira de Ciências, n.77(2), pp.183-199, (2005).

[6] do Carmo, M. P. - *Geometria Riemanniana.* Coleção Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, (2008).

[7] Hopf, H. - *Differential Geometry in the Large*, LNM, vol. 1000, Springer-Verlag, 1983.

[8] Hsiang, W. Y. Teng, Z. H. Yu, W.C. - *New examples of constant mean curvature immersions of* $(2k-1)$*-spheres into Euclidean* $2k$*-spaces*, Ann. of Math. 117 (1983) 609 - 625.

[9] Hsiung, C.C. - *Some integral formulas for closed hypersurfaces*, Math. Scand. 2 (1954) 286-294.

[10] Jellett, J. - *La surface dont la courbure moyenne est constant*, J. Math. Pures Appl. XVIII (1853) 163-167.

[11] Jorge, L., Koutroufiotis, D. - *An Estimate for the Curvature of Bounded Submanifolds*, Amer. J. Math. 103, 711-725 (1981).

[12] Liebmann, H. - *Eine neue Eigenschaft der Kugel.* Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse, (1899), 45-55.

[13] O'Neill, B. - *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity.* Academic Press, London (1983).

[14] Ros, A. e Montiel, S. - *Compact Hypersurfaces: The Alexandrov Theorem for Higher Order Mean Curvatures.* in Differential Geometry. Essex: Longman (1991).

[15] Ros, A. - *Compact Hypersurfaces with Constant Higher Order Mean Curvatures.* Revista Matemática Iberoamericana, **3** (1987), 447-453.

[16] Rosenberg, H. - *Hypersurfaces of Constant Curvature in Space Forms.* Bull. Sc. Math. **117**, 217-239 (1993).

[17] Süss, W. - *Über kennzeichnungen der kugeln und affinsphären durch Herrn* K. P. Grotemeyer Arch. Math. 3 (1952) 311-313.