Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Solução Fraca para um Sistema Não-Linear via Integral Hilbertiana

por

Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha

Teresina, Julho de 2010

Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha

Dissertação de Mestrado:

Solução Fraca para um Sistema Não-Linear via Integral Hilbertiana

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark

Teresina, Julho de 2010

C 972s Cunha, Cleyton Natanael Lopes de Carvalho.

Solução fraca para um Sistema Não Linear via Integral Hilbertiana/ Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha – Teresina: 2010.

114 fls

Dissertação (Mestrado em Matemática)

UFPI

Orientador: Prof. Dr Marcondes Rodrigues Clark

1. Matemática-Análise. 2. Equações Diferenciais Parciais. I. Titulo.

C.D.D - 515

Dedico este trabalho a meu pai Antônio Erisvaldo, minha mãe Maria Arlete, minha irmã Carla Noara, meus irmãos Cássio Nairon e Carlos Emanoel, a minha namorada Antônia Carla, minhas avós Albetiza Lopes de Carvalho e Gonçala Rosa Teixeira e a meus avôs Francisco Pereira de Carvalho e Pedro José da Cunha (In memoriam).

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelas oportunidades que tive e por está presente em todos os momentos de minha vida.

Agradeço em especial à minha mãe Maria Arlete pelos valores que me ensinou, dedicação e amor.

Agradeço aos meus pais Antônio Erisvaldo e Maria Arlete pela educação que me proporcionaram e por me incentivar a completar mais esta etapa em minha vida.

Agradeço aos meus irmãos, ao Iran Júnior, a Gleidiane e ao Christino pela convivência divertida, incentivo e auxílio quando necessitei.

Agradeço aos meus tios, tias, primos e a minha madrinha pelo incentivo e paciência, em especial a minhas avós: Albetiza e Gonçala e meus avôs: Francisco e Pedro Cunha (In Memoriam) pela simplicidade e exemplo de vida.

Agradeço à minha namorada Antônia Carla pela compreensão, dedicação, carinho e por está sempre ao meu lado. Agradeço ainda à família da minha namorada por sempre me receber de braços abertos.

Agradeço ao Professor e grande amigo Marcondes Rodrigues Clark pelas ótimas conversas, excelente orientação científica e por acreditar em mim.

Agradeço aos professores que tive na UFPI tanto na graduação como no mestrado, em especial os Professores Newton Luis Santos, Roger Peres de Moura e novamente ao Professor Marcondes Rodrigues Clark.

Agradeço aos Professores Alexandro Oliveira Marinho (UFPI) e Osmundo Alves de Lima (UEPB) por terem aceito participar da banca que avaliará este trabalho, pelo apoio e pelas valiosas sugestões. Agradeço ainda ao Professor Manuel Milla Miranda da UFRJ o qual se propôs a ajudar-me na construção deste trabalho.

Agradeço aos amigos que fiz na graduação e no mestrado: Yuri, Raimundinho, Renan, Diego, Maurício, Pitágoras, João Santos, Domingos, Ítallo, Gilberto, Daniel, Venâncio, Pedro Jorge e Arimatéa . Agradeço em especial ao Yuri, Renan, Diego e Raimundinho pelas boas conversas sobre matemática e convivência agradável.

Agradeço a FAPEPI e a CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estuda-se a existência e unicidade local de solução do problema misto associado ao sistema não-linear abstrato

$$\left| \begin{array}{l} u'' + Au + M(\cdot, \| A^{1/2}u \|^2)Au + \theta = f, \\ \theta' + A\theta + u' = g, \end{array} \right. \tag{1}$$

onde A é um operador auto-adjunto e positivo num espaço de Hilbert separável H e M uma função real.

Palavras-Chave: Solução Fraca Local, Integral Hilbertiana, Sistema Não Linear.

Abstract

In this work study the local existence and uniqueness of solution for the mixed problem associaded to the nonlinear abstract system

$$\left|\begin{array}{l} u'' + Au + M(\cdot, \| A^{1/2}u \|^2)Au + \theta = f, \\ \theta' + A\theta + u' = g, \end{array}\right.$$

where A **is a positive self-adjoint operator in a separable Hilbert space** H **and** M **is a real function.**

Key-Works: Local Weak Solution, Integral Hilbertiana, Non Linear System.

Sumário

Introdução

Nesta dissertação estudamos o sistema (1) supondo A um operador positivo, auto-adjunto definido num espaço de Hilbert separável H e, fixado um número real $T > 0$, $M \in C^1([0,T]\times[0,+\infty))$ uma função satisfazendo hipóteses adequadas. A primeira equação do sistema (1) no caso concreto quando $A = -\Delta$, $M = M\big(\int_\Omega \parallel \nabla u(x,\cdot) \parallel^2 dx\big)$ e $\theta = 0$, é o modelo não-linear das vibrações transversais da corda elástica presa nos extremos, isto é, a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u - M\Big(\int_\Omega \parallel \nabla u(x,\cdot) \parallel^2 dx\Big)\Delta u = f, \tag{2}$$

onde denotamos por Δ o operador de Laplace, ∇ é o operador gradiente e M é uma função real definida em $[0,+\infty)$.

A equação (2) no caso onde $M \in C^1([0,+\infty);\mathbb{R})$ com $M(\xi) \geqslant 0$ foi estudada por Matos [31] em um domínio aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado ou não. Em tal trabalho o autor fez uso do Teorema de Diagonalização, cf. Capítulo 2. Em Clark and Lima [8], o qual é o artigo base desta dissertação, os autores generalizam o trabalho de Matos [31] ultilizando as mesmas tecnicas.

Problemas relacionados com a equação (2), mais precisamente a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(P_0 + P\int \|\nabla u(x,\cdot)\|^2 dx\right)\Delta u = 0, \tag{3}$$

foram estudados por diversos autores os quais, entre outros, citamos: Arosio and Spagnolo [1], Dickey [10], Lions [21], Medeiros and Milla Miranda [29], Matos [30], Menzala [33], Nishihara [37]. Todos os autores citados acima trabalharam no caso em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado ou no modelo abstrato

$$u'' + M_0\big(|A^{1/2}u|^2\big)Au = f, \tag{4}$$

supondo que o operador A tem espectro discreto e usando métodos de compacidade, exceto em Matos [30] e Dickey [10] . Segundo Matos [30], a fim de tratar do caso abstrato quando não temos compacidade o Professor J. L. Lions propôs estudar o modelo (4) fazendo uso do Teorema de Diagonalização para operadores auto-adjuntos e coercivos.

Neste trabalho estudamos o sistema (1) independente de compacidade, seguindo as idéias do Professor J. L. Lions.

O plano de apresentação desta dissertação é o seguinte:

No Capítulo 1 listamos alguns resultados clássicos, os quais serão enunciados sem demonstração e com indicações das referências para possíveis consultas, e fixamos notações que serão utilizados no decorrer deste trabalho.

No Capítulo 2 apresentamos de maneira clara os conceitos e resultados utilizados em todo os capítulos seguintes. Definimos os campos de espaços de Hilbert e a Integral Hilbertiana relativa a tais campos. Estudamos ainda os espaços $\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, bem como algumas de suas propriedades. Enunciamos e demonstramos o Teorema de Diagonalização, o qual desempenha um papel fundamental em toda esta dissertação.

No Capítulo 3 provamos o principal resultado desta dissertação: o Teorema de Existência de Solução para o sistema (1). A idéia da prova pode ser resumida como segue. Em primeiro lugar consideramos para cada $\epsilon > 0$ o sistema perturbado

$$\left| \begin{array}{l} u_\epsilon'' + A_\epsilon u_\epsilon + M(\cdot, \| A_\epsilon^{1/2} u_\epsilon \|^2) A_\epsilon u_\epsilon + \theta_\epsilon = f, \\ \theta_\epsilon' + A_\epsilon \theta_\epsilon + u_\epsilon' = g, \end{array} \right. \tag{5}$$

onde $A_\epsilon = A + \epsilon I$ é um operador auto-adjunto e coercivo, isto é $A_\epsilon \geqslant \epsilon I$. Assim A_ϵ está nas condições do Teorema de Diagonalização e formalmente aplicamos o operador de diagonalização $\mathcal{U}_\epsilon$ ao sistema (5) obtendo

$$\left| \begin{array}{l} v_\epsilon'' + \lambda v_\epsilon + M(\cdot, \| v_\epsilon(\cdot) \|_{1/2}^2) \lambda v_\epsilon + \phi_\epsilon = f_\epsilon = \mathcal{U}_\epsilon(f), \\ \phi_\epsilon' + \lambda \phi_\epsilon + v_\epsilon' = g_\epsilon = \mathcal{U}_\epsilon(g), \end{array} \right. \tag{6}$$

onde $\nu_\epsilon = \mathcal{U}(u_\epsilon)$ e $\phi_\epsilon = \mathcal{U}(\theta_\epsilon)$. Notemos que a solução de (5) será dada por $\big(u_\epsilon, \theta_\epsilon\big) = \big(\mathcal{U}_\epsilon^{-1}(\nu_\epsilon), \mathcal{U}_\epsilon^{-1}(\phi_\epsilon)\big)$, sendo o par $\big(\nu_\epsilon, \phi_\epsilon\big)$ uma solução de (6). Na Seção 3.1 estudamos o Problema Truncado associado a (6), ou seja, para cada $k \in \mathbb{N}$ buscamos uma solução $\big(\nu_{\epsilon k}(t,\lambda), \phi_{\epsilon k}(t,\lambda)\big)$ de (6) tal que $\nu_{\epsilon k}(t,\lambda) = \phi_{\epsilon k}(t,\lambda) = 0$ para quase todo $\lambda \in [k, +\infty)$. Na Seção 3.2 obtemos estimativas, válidas para $t \in [0, T_0]$, independentes de k e ϵ e, obtemos uma solução local de (6) como limite das soluções truncadas $\big(\nu_{\epsilon k}(t,\lambda), \phi_{\epsilon k}(t,\lambda)\big)$ quando $k \to +\infty$. Na Seção 3.3 obtemos via Teorema de Áscoli-Arzelá uma solução local de (1) como limite de (5), numa topologia apropriada, quando $\epsilon \to 0^+$. Na Seção 3.4 demonstramos um resultado de unicidade.

No Capítulo 4 aplicamos os resultados obtidos no Capítulo 3 considerando $A = -\Delta$.

Encerramos com um Apêndice, apresentando alguns elementos da Teoria Espectral que achamos necessários para um melhor entendimento desta dissertação.

Capítulo 1

Notação e Resultados Preliminares

Neste capítulo fixaremos as notações e apresentaremos alguns resultados importantes para o cerne deste trabalho. Alguns resultados não serão demonstrados, no entanto daremos referências onde as mesmas poderão ser encontradas.

1.1 Resultados Auxiliares

Teorema 1.1. *(Beppo Levi) Seja* (f_n) *uma sequência crescente e não-negativa de funções mensuráveis tais que* $f = \lim f_n$*. Então*

$$\int f = \lim \int f_n.$$

Demonstração. Ver [40]. □

Corolário 1. *Sejam* (f_n) *uma sequência não-negativa de funções mensuráveis e* $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$*. Então*

$$\int f = \sum_{n=1}^{+\infty} \int f_n.$$

Demonstração. Ver [40]. □

Teorema 1.2. *(Convergência Dominada) Seja* $g : E \to \mathbb{R}$ *uma função integrável sobre um um espaço mensurável* E *da reta e seja* $\{f_n\}$ *uma sequência de funções reais integráveis definidas em* E *tais que*

$$| f_n(x) | \leqslant g(x), \text{ q.s. em } E, \ \forall\, n.$$

Se $\{f_n\}$ *converge quase sempre em* E *para uma função mensurável* $f : E \to \mathbb{R}$*, então* f *é integrável sobre* E *e*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f.$$

Demonstração. Ver [40]. □

Teorema 1.3. *(Radon - Nikodym) Sejam* μ *e* ν *duas medidas positivas,* σ*-finitas definidas numa* σ*-Álgebra* $\mathfrak{M}$ *e suponhamos que* ν *é absolutamente contínua com relação a* μ*, isto é, se* $E \in \mathfrak{M}$ *e* $\mu(E) = 0$*, tem-se* $\nu(E) = 0$*. Nestas condições existe uma função não negativa* $g \in L^1(\mu)$ *tal que*

$$\nu(E) = \int_E g d\mu, \ \forall\ E \in \mathfrak{M}. \tag{1.1}$$

Demonstração. Ver [40]. □

Teorema 1.4. *(Limitação Uniforme) Sejam* E *um espaço de Banach e* F *um espaço normado. Seja* $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *uma família de transformações lineares contínuas de* E *em* F *tal que para cada* $x \in E$*,*

$$\sup_{\alpha\in A} \| T_\alpha x \|_F < \infty.$$

Então,

$$\sup_{\alpha\in A} \| T_\alpha \|_{\mathfrak{L}(E,F)} < \infty.$$

Demonstração. Ver [2], [15] ou [39]. □

Teorema 1.5. *(Banach-Alaoglu-Bourbaki) Seja* E *um espaço normado. O conjunto* $B_{\leqslant 1}(0, X) = \{x \in E; \| x \|_E \leqslant 1\}$ *é compacto na topologia fraca-*.*

Demonstração. Ver [2], [15] ou [39]. □

Corolário 2. *Sejam* E *um espaço normado separável e* (f_n) *uma sequência fortemente limitada em* E'*. Então* (f_n) *possui uma subsequência que converge fraca-*.*

Demonstração. Ver [15]. □

Teorema 1.6. *(Representação de Riesz-Fréchet) Sejam* $(H; (,)_H)$ *um espaço de Hilbert e* H' *seu dual topológico. Dada* $\varphi \in H'$*, existe um único elemento* $f \in H$ *tal que*

$$< \varphi, \nu >= (f, \nu)_H, \ \forall\ \nu \in H.$$

Além disso

$$\| f \|_H = \| \varphi \|_{H'} .$$

Demonstração. Ver [2], [15] ou [39]. □

Teorema 1.7. *(Lema de Riesz - Lorch) Sejam* $(\mathsf{H},\ (\cdot,\cdot))$ *um espaço de Hilbert e* $(\mathsf{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de subespaços de* H*, dois a dois ortogonais gerando* H*, isto é,* $\sum \mathsf{H}_n = \mathsf{H}$*. Se* $u \in \mathsf{H}$ *representaremos por* u_n *sua projeção sobre* H_n*. Seja* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de operadores lineares com domínio e imagem em* H *tais que, para cada* $n \in \mathbb{N}$*,* A_n *reduz-se em* H_n *a um operador limitado e auto-adjunto de* H_n *em* H_n*. Então, existe um e somente um operador linear auto-adjunto* A *com domínio e imagem em* H*, em geral não limitado, cuja restrição a* H_n *é igual a* A_n*. Seu domínio* $D(A)$ *é constituído pela coleção de vetores* $u \in \mathsf{H}$ *tais que a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \| A_n u_n \|^2$ *é convergente. Para todo* $u \in D(A)$ *tem-se* $Au = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} A_n u_n$*.*

Demonstração. Ver [25]. □

Teorema 1.8. *(Ponto Fixo de Banach) Se* M *é um espaço métrico completo, toda contração* $f : M \to M$ *possui um único ponto fixo em* M*. Mais precisamente, se escolhermos um ponto* $x_0 \in M$ *e pusermos* $x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1),\ ...,\ x_{n+1} = f(x_n),\ ...$ *a sequência* (x_n) *converge em* M *e* $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *é o único ponto fixo de* f*.*

Demonstração. Ver [24]. □

Teorema 1.9. *(Áscoli-Arzelá) Seja* $E \subset C(K,N) = \{f : K \to N; f \text{ é contínua}\}$ *, onde* K *e* N *são espaços métricos sendo,* K *compacto. A fim de que* E *seja relativamente compacto em* $C(K,N)$*, é necessário e suficiente que:*

1°)E *seja equicontínuo;*

2°)Para cada $x \in K$*, o conjunto* $E(x) = \{f(x);\ f \in E\}$ *seja relativamente compacto em* N*, isto é, toda sequência de* E *limitada admite uma subsequência que converge forte em* $C(K,N)$.

Demonstração. Ver [24]. □

Seja D **um subconjunto aberto de** $\mathbb{R}^{n+1}$ **cujos os elementos serão denotados com** (t,x) **onde** $t \in \mathbb{R}$ **e** $x \in \mathbb{R}^n$ **e seja** $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ **uma função não necessariamente contínua.**

Definição 1.1. *Diz-se que* f *satisfaz as condições de Carathéodory sobre* D *se:*

1)$f(t, x)$ *é mensurável em* t *para cada* x *fixo,*

2)$f(t, x)$ *é contínua em* x *para cada* t *fixo,*

3)*para cada compacto* $U \subset D$ *existe uma função real integrável* $m_U(t)$ *tal que* $|f(t, x)| \leqslant m_U(t), \ \forall \ (t, x) \in U$.

Consideremos o retângulo $R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}; |t - t_0| \leqslant a, \ ||x - x_0|| \leqslant b\}$, $a, b > 0$.

Teorema 1.10. *Seja* $f : R \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *satisfazendo as condições de Carathéodory sobre* R. *Então existe uma solução do PVI:*

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

sobre algum intervalo $|t - t_0| \leqslant \beta, \ \beta > 0$.

Demonstração. Ver [9]. □

Corolário 3. *Seja* $D = [0, T] \times B$, *onde* $T > 0$ *é finito e* $B = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x|| \leqslant b\}$, *e* f *satisfazendo as duas primeiras condições de Carathéodory sobre* D *e existe uma função integrável* $m(t)$ *tal que* $|f(t, x)| \leqslant m(t)$, $\forall \ (t, x) \in D$. *Seja* $\phi(t)$ *uma solução de*

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = x_0, \ ||x_0|| \leqslant b. \end{cases}$$

Suponha que em qualquer intervalo I *onde* ϕ *está definida se tenha* $||\phi(t)|| \leqslant M$, $\forall \ t \in I$, M *independente de* I *e* $M < b$. *Então* ϕ *pode ser prolongada até* $[0, T]$.

Demonstração. Ver [9]. □

1.1.1 Desigualdades

A seguir listamos duas importantes desigualdades que serão usadas neste trabalho.

- **Desigualdade de Gronwall**

Seja C uma constante não-negativa e sejam $u \geqslant 0$ q.s. em (s,T) uma função integrável em (s,T) e $\varphi : (s,T) \to \mathbb{R}$ uma função contínua e não-negativa, tal que

$$\varphi(t) \leqslant C + \int_s^t u(\xi)\varphi(\xi)d\xi, \ \forall \ t \in [s,T].$$

Então

$$\varphi(t) \leqslant Ce^{\int_s^t u(\xi)d\xi}, \ \forall \ t \in [s,T].$$

Demonstração. Ver [6]. □

- **Desigualdade de Gronwall Generalizada**

Sejam $v, f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis, não-negativas, e $a : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, não-negativa, tais que

$$v(t) \leqslant v_0 + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t a(s)v(s)ds,$$

onde v_0 é uma constante não-negativa. Então,

$$v(t) \leqslant \left(v_0 + \int_0^t f(s)ds\right)e^{\int_0^t a(s)ds}.$$

Demonstração. Ver [6]. □

- **Desigualdade de Young**

Sejam p e q índices conjugados, isto é, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \ \forall \ a, b \geqslant 0.$$

Demonstração. Ver [5]. □

- **Desigualdade de Hölder**

Sejam p e q índices conjugados $p, \ q \in [1,\infty]$. Se $u \in L^p(a,b)$ e $v \in L^q(a,b)$, então $uv \in L^1(a,b)$ e

$$\int_a^b \mid uv \mid \leqslant \parallel u \parallel_p \parallel v \parallel_q \ . \tag{1.2}$$

Demonstração. Ver [40]. □

1.2 Distribuições

Seja u uma função real mensurável definida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e seja $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ a família constituída por todos os subconjuntos abertos $\mathcal{O}_i \subset \Omega$ tais que $u|_{\mathcal{O}_i} \equiv 0$ q.s.. Considera-se o subconjunto (aberto) $\mathcal{O} = \cup_{i\in I}\mathcal{O}_i$. Então, $u = 0$ q.s. em $\mathcal{O}$, donde define-se o suporte de u, $supp(u)$, como sendo o subconjunto

$$supp(u) = \Omega \setminus \mathcal{O}.$$

Note que $supp(u)$ é sempre um subconjunto fechado de Ω. Quando u é contínua tem-se

$$supp(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}},$$

fecho este tomado em Ω.

Sejam u e v funções numéricas, mensuráveis em Ω e $\beta \in \mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Mostra-se que

$$supp(u + v) \subset supp(u) \cup supp(v)$$

$$supp(uv) \subset supp(u) \cap supp(v)$$

$$supp(\beta u) = \beta \ supp(u), \ se \ \beta \neq 0.$$

Sejam X um espaço de Banach e fixemos sobre $(0, T)$ à medida de Lebesgue. Uma função u definida em $(0, T)$ com valores em X é mensurável quando existir uma sequência de funções simples (φ_n) tal que

$$\varphi_n(t) \longrightarrow u(t), \ \text{em } X, \ \text{quase sempre em } (0, T).$$

Definição 1.2. *Uma função $u : (0, T) \longrightarrow X$ é integrável no sentido de Bochner ou Bochner integrável, quando for mensurável e a função $t \in (0, T) \longmapsto \| u(t) \|_X$ é integrável à Lebesgue.*

Neste caso, a integral de Bochner de u é o vetor de X denotado por $\int_0^T u(t)dt$ e caracterizado por

$$\left\langle f, \int_0^T u(t)dt \right\rangle_{X',X} = \int_0^T \langle f, u(t)\rangle_{X',X} dt, \ \forall \ f \in X'$$

e

$$\left\| \int_0^T u(t)dt \right\|_X \leqslant \int_0^T \| u(t) \|_X \ dt,$$

sendo X' o dual de X. Em [32] prova-se que a integral de Bochner satisfaz as mesmas propriedades da integral de Lebesgue no que diz respeito a linearidade bem como alguns teoremas importantes como o da convergência dominada e o lema de Fatou.

Dados um espaço de Banach X e um número real $T > 0$, denotamos por $L^p(0,T;X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, o espaço das (classes de) funções a valores vetoriais $u : (0,T) \to X$ que são mensuráveis a Lebesgue e tais que a aplicação $t \mapsto \| u(t) \|_X$, definida quase sempre em $(0,T)$, está em $L^p(0,T)$.

Em $L^p(0,T;X)$, $1 \leqslant p < \infty$, a função

$$| \cdot |_{p,X} \colon L^p(0,T;X) \to \mathbb{R}$$

dada por

$$| u |_{p,X} = \Big(\int_0^T \| u(t) \|_X^p \, dt \Big)^{\frac{1}{p}},$$

é uma norma em $L^p(0,T;X)$, o qual é Banach com a mesma.

No caso $p = \infty$, a norma em $L^\infty(0,T;X)$ é dada por

$$| u |_{\infty,X} = \sup_{t \in (0,T)} ess \, \| u(t) \|_X,$$

e $L^\infty(0,T;X)$ com esta norma é um espaço de Banach.

Observação 1.1. *No caso $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, então $L^2(0,T;X)$ possui uma estrutura hilbertiana definida pelo produto interno*

$$(u,v) = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt, \ \forall \, u, v \in L^2(0,T;X).$$

Temos que o espaço de Banach $L^p(0,T;X)$, $1 < p < \infty$, é reflexivo se X o for. Se X é separável então o dual topológico de $L^p(0,T;X)$, $1 \leqslant p < \infty$, é separável e identifica-se com o espaço de Banach $L^q(0,T;X')$, onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Neste caso temos também que $L^p(0,T;X)$, $1 \leqslant p < \infty$, também é separável. Para um estudo detalhado deste assunto ver [12], [14] ou [38].

Um outro espaço funcional que será considerado nesta dissertação é o espaço $C^0([0,T];X)$ das funções vetoriais $u : [0,T] \longrightarrow X$ que são contínuas. Este espaço vetorial equipado com a norma

$$|u|_{C^0([0,T];X)} = \max_{t \in [0,T]} \{ \| u(t) \|_X \}$$

é um espaço de Banach.

Por $\mathcal{D}'(0,T;X)$ estamos representando o espaço das distribuições vetoriais sobre $(0,T)$ com valores em X, isto é, o espaço vetorial das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X, onde $\mathcal{D}(0,T)$ representa o espaço vetorial $C_0^\infty(0,T)$ das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em $(0,T)$, munido da seguinte noção de convergência: Uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $C_0^\infty(0,T)$ converge para zero em $\mathcal{D}(0,T)$ quando existir um suconjunto compacto K de $(0,T)$ tal que $supp(u_j)\subset K,\ j=1,\ 2,\ ....$, e, para cada $j\in\mathbb{N}$ a sequência $(\dfrac{d^n u_j}{dt^n})$ converge uniformemente em K. Quando $X=\mathbb{R}$ o espaço $\mathcal{D}'(0,T;X)$ será denotado por $\mathcal{D}'(0,T)$ e denominado espaço das distribuições escalares sobre $(0,T)$.

Exemplo 1.2.1. *Fixado $u\in L^p(0,T;X)$,$1\leqslant p\leqslant\infty$, defina a aplicação*

$$T_u:\mathcal{D}(0,T)\to X$$

pondo

$$T_u(\phi)=\int_0^T u(s)\phi(s)ds,\ \forall\ \phi\in\mathcal{D}(0,T).$$

Prova-se a seguir que T_u é uma distribuição vetorial sobre $(0,T)$. Com efeito, em primeiro lugar note que o cálculo de $\int_0^T u(s)\phi(s)ds$, representa um vetor em X, em outras palavras temos que a integral na expressão de T_u é uma integral de Bochner. Daí segue a linearidade de T_u. Quanto a continuidade, seja (ϕ_n) uma sequência em $\mathcal{D}(0,T)$, convergindo a zero em $\mathcal{D}(0,T)$.Provemos que

$$T_u(\phi_n)\to 0 \text{ em } X.$$

Ora, pela desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned}\| T_u(\phi_n)\|_X &= \| \int_0^T u(s)\phi_n(s)ds\|_X\leqslant \int_0^T \| u(s)\|_X |\phi_n(s)|\, ds\\ &\leqslant \left(\int_0^T \| u(s)\|_X^p\, ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^T |\phi_n(s)|^q\, ds\right)^{\frac{1}{q}},\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\end{aligned}$$

ou seja

$$\| T_u(\phi_n)\|_X\leqslant| u|_{p,X}\| \phi_n\|_{L^q(0,T)}.$$

Como $\phi_n\to 0$ uniformemente em $\mathcal{D}(0,T)$, segue que $\|\phi_n\|_{L^q(0,T)}\to 0$ quando $n\to\infty$, provando a continuidadede T_u em X.

Demonstra-se usando o lema de De Bois Raymond (Ver [5] ou [26]) que a distribuição T_u é univocamente determinada por u, de modo que podemos identificar u com T_u e neste sentido temos $L^p(0,T;X) \subset \mathcal{D}'(0,T;X)$.

Definição 1.3. *Dada uma distribuição vetorial* $u \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ *definimos a derivada de ordem* n *de* u *no sentido das distribuições vetoriais como sendo a distribuição vetorial sobre* $(0,T)$, $\dfrac{d^n u}{dt^n}$, *dada por*

$$\langle \frac{d^n u}{dt^n}, \phi \rangle = (-1)^n \langle u, \frac{d^n \phi}{dt^n}(s) \rangle, \ \forall \ \phi \in \mathcal{D}(0,T),$$

Segue da definição acima que toda distribuição vetorial é derivável e sua derivada é ainda uma distribuição vetorial. Note que para $u \in L^p(0,T;X)$ tem-se, em vista da identificação de u com T_u, que

$$\langle \frac{d^n u}{dt^n}, \phi \rangle = (-1)^n \int_0^T u(s) \frac{d^n \phi}{dt^n}(s) ds, \ \forall \ \phi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Os próximos conceitos e notações são muito frequentes e ultilizados: sejam X, Y dois espaços de Banach e suponha $X \subset Y$. Diz-se que X está imerso continuamente em Y se a aplicação inclusão

$$i : X \to Y, \ i(x) = x, \ \forall \ x \in X,$$

é contínua.
Observe que isto equivale a dizer que existe $C > 0$ tal que:

$$\| x \|_Y \leqslant C \| x \|_X, \ \forall \ x \in X,$$

onde C é a constante de imersão. Este fato é simbolizado por $X \hookrightarrow Y$. Se $X \hookrightarrow Y$ e X é denso em Y, diz-se que X está imerso, contínua e densamente em Y com a topologia de Y. Se ocorrer da aplicação inclusão ser contínua e compacta (isto é, toda sequência limitada em X admite subsequência convergente em Y), diz-se que X é imerso compactamente em Y e denota-se $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$.

A seguir temos alguns importantes teoremas de imersão.

Teorema 1.11. *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach e suponha* $X \hookrightarrow Y$. *Se* $1 \leqslant s \leqslant r \leqslant \infty$, *então*

$$L^r(0,T;X) \hookrightarrow L^s(0,T;Y).$$

Demonstração. Seja C a constante de imersão de X em Y. Dada $u \in L^r(0,T;X)$ temos que u é mensurável e, como $s \geqslant 1$,

$$\| u(t) \|_Y^s \leqslant C^s \| u(t) \|_X^s, \ \forall\, t \in (0,T). \tag{1.3}$$

Ora, a função numérica $t \mapsto \| u(t) \|_X^s$ está em $L^{\frac{r}{s}}(0,T)$ e a função $v(t) \equiv 1$ pertence a $L^q(0,T)$, onde q é o conjugado de r/s. Da desigualdade de Hölder, temos que $t \mapsto \| u(t) \|_X^s$ está em $L^1(0,T)$, logo por (1.3) a função $t \mapsto \| u(t) \|_Y$ pertence a $L^s(0,T)$, donde $u \in L^s(0,T;Y)$. Portanto, $L^r(0,T;X) \subset L^s(0,T;Y)$. Quanto a continuidade da imersão, temos de (1.3) que :

$$\begin{aligned}
\| u \|_{s,Y}^s = \int_0^T \| u(t) \|_Y^s \, dt &\leqslant \int_0^T C^s \| u(t) \|_X^s \, dt \\
&\leqslant \left(\int_0^T C^r \| u(t) \|_X^r \, dt \right)^{\frac{s}{r}} \left(\int_0^T dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= C^s T^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_0^T \| u(t) \|_X^r \, dt \right)^{\frac{1}{r}} \right]^s = C^s T^{\frac{1}{q}} \| u \|_{r,X}^s .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\| u \|_{s,Y} \leqslant C T^{\frac{1}{sq}} \| u \|_{r,X} .$$

Assim, provamos que $L^r(0,T;X) \hookrightarrow L^s(0,T;Y)$. $\square$

Proposição 1.1. *Se p e q são índices conjugados, $u \in L^p(0,T;X)$ e $v \in L^q(0,T;X')$, então a função numérica $t \longmapsto \langle v(t), u(t) \rangle_{X',X}$ está em $L^1(0,T)$.*

Demonstração. A mensurabilidade da função númérica $t \longmapsto \langle v(t), u(t) \rangle_{X',X}$ é consequência da mensurabilidade de u e de v. Agora sendo $v(t)$ um funcional linear contínuo temos

$$|\langle v(t), u(t) \rangle_{X',X}| \leqslant \| v(t) \|_{X'} \| u(t) \|_X,$$

e o resultado segue da desigualdade de Hölder. $\square$

Teorema 1.12. *Sejam X e Y espaços de Banach e suponha $X \hookrightarrow Y$. Então $Y' \hookrightarrow X'$.*

Demonstração. Note inicialmente que $Y' \subset X'$, pois toda forma linear e contínua em Y é, em particular, linear e contínua em X já que $X \subset Y$. Seja C a constante da imersão de X em Y e considere a aplicaçao inclusão $i : Y' \longrightarrow X'$. Então i é linear e contínua. De fato, a linearidade segue da linearidade de y'. Quanto a continuidade, temos

$$| i(y')(x) | = | y'(x) | \leqslant \| x \|_Y \| y' \|_{Y'} \leqslant C \| x \|_X \| y' \|_{Y'},$$

donde

$$\| y' \|_{X'} = \| i(y') \|_{X'} = \sup_{\|x\|_X=1} | i(y')(x) | \leqslant C \| y' \|_{Y'} .$$

Segue que $Y' \hookrightarrow X'$. □

Segue do Teorema da Representação de Riesz-Fréchet que se Y é um espaço de Hilbert, vale

$$X \hookrightarrow Y \equiv Y' \hookrightarrow X'. \tag{1.4}$$

Teorema 1.13. *Sejam X e Y espaços de Hilbert tais que $X \hookrightarrow Y$. Se $u \in L^p(0,T;X)$ e $\dfrac{du}{dt} \in L^p(0,T;Y)$, então $u \in C^0([0,T];X)$.*

Demonstração. Ver [26]. □

1.3 Cálculo Espectral

Nesta seção apresentaremos alguns resultados da Teoria Espectral. Para mais detalhes ver Apêndice A.

Seja H um espaço de Hilbert separável com produto interno $(\cdot,\cdot)$ e norma correspondente $\| \cdot \|$. Em H fixemos um operador auto-adjunto não limitado A. De acordo com o Teorema Espectral, existe uma única família $\{E_\lambda; \lambda \in \mathbb{R}\}$ de projeções tal que

$$D(A) = \left\{ u \in H; \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d(E_\lambda u, u) < \infty \right\},$$

$$\| Au \|^2 = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d(E_\lambda u, u); \ \forall \ u \in D(A),$$

$$(Au, v) = \int_{\mathbb{R}} \lambda d(E_\lambda u, v), \ \forall \ u \in D(A), \ v \in H,$$

onde as integrais acima são integrais de Riemann-Stieltjes.

Com o objetivo de definir as potências do operador A, revisaremos um pouco do cálculo funcional para operadores auto-adjuntos. Inicialmente consideraremos as funções reais limitadas.

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e integrável em $\mathbb{R}$ no sentido de Lebesgue - Stieltjes, em relação a função de variação limitada $\rho(\lambda) = (E_\lambda u, v)$ para $u, v \in H$.

Observação 1.2. *Pela fórmula de polarização:*

$$(E_\lambda u, v) = \frac{1}{4}\{\| E_\lambda(u+v) \|^2 + \| E_\lambda(u-v) \|^2 + i[\| E_\lambda(u+iv) \|^2 - \| E_\lambda(u-iv) \|^2]\}$$

resulta que é suficiente supormos f *integrável relativamente à função real não-decrescente* $\sigma(\lambda) = (E_\lambda u, u) = \| E_\lambda u \|^2,\ u \in H$.

Fixado $u \in H$ **considere a função** $g_u : H \longrightarrow \mathbb{R}$ **dada por**

$$g_u(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d(E_\lambda u, v), \tag{1.5}$$

a qual é conjugada de um funcional linear a ser definido. Segue das propriedades da integral de Lebesgue - Stieltjes que g_u **é linear.**

Vejamos que g_u **é limitada. Com efeito, sendo** f **limitada seja** $M = \sup\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} | f(\lambda) |$**. Então,**

$$| g_u(v) | = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d(E_\lambda u, v) \leqslant M V_{-\infty}^{+\infty}(E_\lambda u, v),$$

onde $V_{-\infty}^{+\infty}(E_\lambda u, v)$ **é a variação total de** $(E_\lambda u, v)$**. Ora, considerando uma partição qualquer de** $\mathbb{R}$ **em um número finito de intervalos de extremos**

$$-\infty = \lambda_0 < \lambda_1 < ..... < \lambda_n = +\infty,$$

e pondo $P_k = E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}$**, para** $k = 1, 2, ..., n$**, temos que** $\{P_k\}_{k=1}^n$ **é uma família de projeções duas a duas ortogonais, tal que** $\sum\limits_k P_k = I$ **e**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n | (E_{\lambda_k} u, v) - (E_{\lambda_{k-1}} u, v) | &= \sum_{k=1}^n | (P_k u, v) | = \sum_{k=1}^n | (P_k u, P_k v) | \\
&\leqslant \sum_{k=1}^n \| P_k u \| \| P_k v \| \\
&\leqslant \left(\sum_{k=1}^n \| P_k u \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n \| P_k v \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^n (P_k u, u) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n (P_k v, v) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= (u, u)^{\frac{1}{2}} (v, v)^{\frac{1}{2}} = \| u \| \| v \|,
\end{aligned}$$

donde

$$V_{-\infty}^{+\infty}(E_\lambda u, v) = \sup_P \sum_{k=1}^n | (E_{\lambda_k} u, v) - (E_{\lambda_{k-1}} u, v) | \leqslant \| u \| \| v \|,$$

isto é, $| g_u(v) | \leqslant M \| u \| \| v \|, \ \forall \ v \in H$. Logo, para cada $u \in H$ fixo temos que g_u é um funcional linear limitado de H, sendo $\| g_u \| \leqslant M \| u \|$. Segue do Teorema da Representação de Riesz - Fréchet que existe $u^* \in H$ tal que

$$g_u(v) = (u^*, v) = \overline{(v, u^*)}, \tag{1.6}$$

$$\| g_u \| = \| u^* \|_H \, . \tag{1.7}$$

Assim, define-se o operador $f(A)$ em H pondo $f(A)u = u^*$. Resulta de (1.6) que

$$(f(A)u, v) = (u^*, v) = g_u(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d(E_\lambda u, v),$$

isto é,

$$(f(A)u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d(E_\lambda u, v). \tag{1.8}$$

Da unicidade de u^* temos que $f(A)$ é linear e, além disso, por (1.7) temos:

$$\| f(A)u \| = \| u^* \| = \| g_u \| \leqslant M \| u \|,$$

isto é,

$$\| f(A)u \| \leqslant M \| u \| \, .$$

Logo, $f(A)$ é limitado com $\| f(A) \| \leqslant M$.

Em [25] e [35] prova-se que:

(i) $f(A)$ é simétrico, ou seja, auto-adjunto;

(ii) $f(A) \geqslant 0$ se $f(\lambda) \geqslant 0$;

(iii) Todas as funções limitadas de A são permutáveis;

(iv) Se $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as mesmas propriedades da função f, então

$$(f(A)g(A)u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) g(\lambda) d(E_\lambda u, v), \forall \ u, v \in H.$$

Em particular temos

$$\| f(A)u \|^2 = (f(A)u, f(A)u) = (f(A)^2 u, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(\lambda)]^2 d(E_\lambda u, u),$$

portanto,

$$\| f(A)u \|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(\lambda)]^2 d(E_\lambda u, u), \ \forall \ u \in H. \tag{1.9}$$

Estenderemos a seguir a correspondência acima ao caso de funções não-limitadas. Consideremos as funções mensuráveis, finitas, definidas quase sempre em relação à $\sigma(\lambda) = (E_\lambda u, u)$. **Seja** $f = f(\lambda)$ **uma função desta classe, a qual suporemos real. Tomemos os conjuntos**

$$M_k = \{\lambda \in \mathbb{R}; k - 1 < f(\lambda) < k\},$$

para $k \in \mathbb{Z}$, **e seja** $e_k(\lambda)$ **a função característica de** M_k. **Segue-se que para cada** k **as funções** $e_k(\lambda)$ **e** $f_k(\lambda) = f(\lambda)e_k(\lambda)$ **são limitadas e mensuráveis, logo integráveis em relação à** $\sigma(\lambda) = (E_\lambda u, u)$. **Portanto , estão bem definidas os operadores lineares (limitados e auto-adjuntos)** $e_k(A)$ **e** $f_k(A)$, **pelo caso anterior. Sendo** $[e_k(\lambda)]^2 = e_k(\lambda)$, $e_k(\lambda)e_l(\lambda) = 0$ **para** $k \neq l$ **e** $\sum_{k=1}^{+\infty} e_k(\lambda) = 1$, **resulta que** $\{e_k(A)\}$ **é uma família de projeções duas a duas ortogonais tais que** $\sum_{k=1}^{+\infty} e_k(A) = I$. **Seja** $N_k = e_k(A)(H)$, **o qual é um subespaço de** H. **Como** $f_k(A)$ **permuta com** $e_k(A)$, **segue-se que** $f_k(A)|_{N_k}$ **é linear, limitada e simétrica. Assim,** $\{N_k\}$ **e** $\{f_k(A)\}$ **estão nas condições do lema de Riesz - Lorch, cf. Teorema 1.7. Portanto, existe um único operador linear** $f(A)$, **em geral não limitado, com domínio e imagem em** H, **tal que** $f(A)|_{N_k} = f_k(A)$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$. **Além disso,** $D(f(A)) = \{u \in H; \sum_{-\infty}^{+\infty} \| f_k(A)u_k \|^2 < \infty\}$. **Ora,** $u_k \in N_k$, **donde** $u_k = e_k(A)u$ **com** $u \in H$. **Daí e do caso limitado, mais precisamente de (1.9) temos** $\| f_k(A)u \|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [f_k(\lambda)]^2 d(E_\lambda u, v)$. **Portanto,**

$$u \in D(f(A)) \Longleftrightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} \| f_k(A)u_k \|^2 < \infty \Longleftrightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [f_k(\lambda)]^2 d(E_\lambda u, v) < \infty$$

$$\Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} [f_k(\lambda)]^2 d(E_\lambda u, v) < \infty,$$

onde na última equivalência usamos o Teorema de Beppo Levi. Da definição de f_k **temos**

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} [f_k(\lambda)]^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} [f(\lambda)]^2 [e_k(\lambda)]^2 = [f(\lambda)]^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} [e_k(\lambda)]^2$$

$$= [f(\lambda)]^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} [e_k(\lambda)] = [f(\lambda)]^2 \cdot 1 = [f(\lambda)]^2.$$

Assim,

$$u \in D(f(A)) \Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} [f(\lambda)]^2 d(E_\lambda u, v) < \infty.$$

Portanto,

$$D(f(A)) = \{u \in H; \int_{-\infty}^{+\infty} [f(\lambda)]^2 d(E_\lambda u, v) < \infty\}.$$

Além disso, para cada $u \in D(f(A))$ **temos**

$$f(A)u = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_k(A)u_k = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_k(A)e_k(A)u = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(A)e_k(A)^2 u = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_k(A)u,$$

ou seja,

$$f(A)u = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_k(A)u.$$

Donde,

$$(f(A)u, v) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (f_k(A)u, v) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(\lambda) d(E_\lambda u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d(E_\lambda u, v),$$

ou seja,

$$(f(A)u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d(E_\lambda u, v), \ \forall \ u \in D(f(A)) \ e \ \forall \ v \in H. \tag{1.10}$$

Em [11] prova-se que

$$f(A)^* = \bar{f}(A),$$

onde $\bar{f}$ **é a função conjugada de** f. **Como estamos considerando** f **uma função real segue que** $f(A)$ **é um operador auto-adjunto, em geral não limitado de** H **e de (1.10) obtemos**

$$\| f(A)u \|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(\lambda)]^2 d(E_\lambda u, u), \ \forall u \in D(f(A)).$$

Agora podemos definir as potências do operador auto-adjunto A. **Notemos que se** A **é coercivo, isto é, existe** $\beta > 0$ **tal que** $(Au, u) \geqslant \beta \| u \|^2$, **para todo** $u \in D(A)$, **então** $E_\lambda = 0$ **para** $\lambda < \beta$, **e as potências** A^α, $\alpha > 0$, **do operador** A **podem ser definidas por meio das funções contínuas** $f_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, **em geral não limitadas:**

$$f_\alpha(\lambda) = \begin{cases} \lambda^\alpha, & se\ \lambda > \beta, \\ 0, & se\ \lambda < \beta. \end{cases}$$

Neste caso, teremos

$$D(A^\alpha) = \{u \in H; \int_{\beta}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u, u)\},$$

$$(A^{\alpha}u, v) = \int_{\beta}^{+\infty} \lambda^{\alpha} d(E_{\lambda}u, v), \ \forall\ u \in D(A^{\alpha}) \ e \ v \in H.$$

$$\| A^{\alpha}u \|^2 = \int_{\beta}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(E_{\lambda}u, u), \ \forall u \in D(A^{\alpha}).$$

Observação 1.3. *Com as hipóteses acima sobre o operador* A *obtemos da demonstração do Teorema Espectral (Ver [35]), cujo enunciado consta no apêndice deste trabalho, que* E_{λ} *é a "soma" definida pelo Lema de Riesz-Lorch, segundo n, de operadores limitados* $E_{\lambda,n}$ *tais que* $E_{\lambda,n} = 0$ *para* $\lambda < \beta, \ \forall\ n \in \mathbb{N}$. *Daí segue que* $E_{\lambda} = 0$ *para* $\lambda < \beta$.

Observação 1.4. *Prova-se em [30], que para todo* $u \in D(A^{\alpha})$ *e todo* $v \in D(A^{\gamma})$*, com* $\gamma \in \mathbb{R}$*, vale:*

$$(A^{\alpha}u, A^{\gamma}v) = \int_{\beta}^{+\infty} \lambda^{\alpha+\gamma} d(E_{\lambda}u, v),$$

onde A^0 *é o operador identidade de* H.

Para mais detalhes sobre Calculo Funcional ver [25] ou [35].

A seguir tem-se algumas aplicações do que foi visto acima, aplicações estas que serão utilizadas em todo o capítulo 3.

Dado $\epsilon > 0$, **consideremos as funções contínuas:**

$$g_{\alpha\epsilon}(\lambda) = \begin{cases} (\lambda + \epsilon)^{\alpha}, & se\ \lambda \geqslant \epsilon, \\ 0, & se\ \lambda \leqslant \epsilon. \end{cases}$$

Então o operador $A_{\epsilon}^{\alpha} = (A + \epsilon I)^{\alpha}$, **onde** I **é o operador identidade de** H, **coincide com** $g_{\alpha\epsilon}(A)$ **e teremos**

$$D(A_{\epsilon}^{\alpha}) = D(A^{\alpha}), \ \forall\ \alpha \geqslant 0, \ \forall\ \epsilon > 0;$$

$$A_{\epsilon}^{\alpha} \geqslant \epsilon^{\alpha} I, \textbf{ou seja}, (A_{\epsilon}^{\alpha}u, u) \geqslant \epsilon^{\alpha} \| u \|, \ \forall\ u \in D(A^{\alpha});$$

$$(A_{\epsilon}^{\alpha}u, A_{\epsilon}^{\xi}v) = \int_{-\epsilon}^{+\infty} (\lambda + \epsilon)^{\alpha+\xi} d(E_{\lambda}u, v), \ \forall\ u \in D(A^{\alpha}) \ e \ v \in D(A^{\xi}), \ \xi \geqslant 0. \tag{1.11}$$

Usando o fato que $\int_{-\epsilon}^{0} (\lambda + \epsilon)^{\alpha+\xi} d(E_{\lambda}u, v) \leqslant \epsilon^{\alpha+\xi} \int_{-\epsilon}^{0} d(E_{\lambda}u, v)$, **obtemos de (1.11) que**

$$(A_{\epsilon}^{\alpha}u, A_{\epsilon}^{\xi}v) \leqslant \epsilon^{\alpha+\xi} \int_{-\epsilon}^{0} d(E_{\lambda}u, v) + \int_{0}^{+\infty} (\lambda + \epsilon)^{\alpha+\xi} d(E_{\lambda}u, v), \tag{1.12}$$

$\forall\ u \in D(A^{\alpha}) \cap D(A^{\xi}), \ \forall\ \alpha, \xi \geqslant 0.$

Capítulo 2

Integral Hilbertiana & Teorema de Diagonalização

Nesta seção enunciaremos e demonstraremos o Teorema de Diagonalização e estudaremos os espaços $\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, que serão fundamentais para o desenrolar de todo o capítulo seguinte o qual é o objetivo maior dessa dissertação.

Um campo de espaços de Hilbert é uma aplicação que associa a cada $\lambda \in \mathbb{R}$ um espaço de Hilbert real $\mathcal{H}(\lambda)$. Dado um campo de espaços Hilbertianos $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \mathcal{H}(\lambda)$, temos que um campo de vetores sobre $\mathbb{R}$ é uma aplicação $\lambda \mapsto u(\lambda)$, definida em $\mathbb{R}$ tal que $u(\lambda) \in \mathcal{H}(\lambda)$.

Denotamos por $\mathcal{F}$ a coleção dos campos de vetores sobre $\mathbb{R}$, o qual é um espaço vetorial real com as operações definidas a seguir: Dados u, $w \in \mathcal{F}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ definimos os campos de vetores sobre $\mathbb{R}$, $u + w$ e βu, pondo

$$(u + w)(\lambda) = u(\lambda) + w(\lambda)$$

$$(\beta \cdot u)(\lambda) = \beta \cdot u(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R},$$

onde as operações no segundo membro são as operações de $\mathcal{H}(\lambda)$. Como $\mathcal{H}(\lambda)$ é um espaço vetorial tem-se que as operações definidas acima estão bem definidas.

Fixemos uma medida positiva ν sobre $\mathbb{R}$.

Definição 2.1. *Um campo de espaços Hilbertianos $\lambda \mapsto \mathcal{H}(\lambda)$ é dito ν-mensurável quando existir um subespaço $\mathcal{N}$ de $\mathcal{F}$ satisfazendo as seguintes condições:*

(i) A aplicação $\lambda \mapsto \| u(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}$ *é* ν*-mensurável,* $\forall\, u \in \mathcal{N}$*;*

(ii) se $u \in \mathcal{F}$ *e a aplicação* $\lambda \mapsto (u(\lambda), v(\lambda))_{\mathcal{H}(\lambda)}$ *é* ν*-mensurável para todo* $v \in \mathcal{N}$*, então* $u \in \mathcal{N}$*;*

(iii) existe uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathcal{N}$ *tal que para cada* $\lambda \in \mathbb{R}$ *a sequência* $(u_n(\lambda))$ *é total (ou completa) em* $\mathcal{H}(\lambda)$*.*

Os elementos de $\mathcal{N}$ são denominados campos de vetores ν-mensurá veis.

Observação 2.1. *Um exemplo de campo de espaços Hilbertianos* ν*-mensurável será dado posteriormente na demonstração do Teorema de Diagonalização.*

Observação 2.2. *Uma família* $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$*, onde* A *é um conjunto de índices, em um espaço de Hilbert* H *é dita total ou completa quando dado* $u \in H$ *tal que* $(u, u_\alpha)_H = 0$*,* $\forall \alpha \in A$*, tem-se* $u = 0$*. Para mais detalhes ver [17].*

No que segue a aplicação $\lambda \mapsto \mathcal{H}(\lambda)$ denota um campo de espaços Hilbertianos ν-mensurável e todos os campos de vetores sobre $\mathbb{R}$ aqui considerados serão ν-mensuráveis.

Definição 2.2. *Um campo de vetores sobre* $\mathbb{R}$*,* u*, é dito de quadrado integrável, com relação a medida* ν*, quando*

$$\int_{\mathbb{R}} \| u(\lambda) \|^2_{\mathcal{H}(\lambda)}\, d\nu(\lambda) < \infty.$$

Seja $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{F}$ a coleção dos campos de vetores de quadrado integrável com relação a medida ν. Dados $u,\ v \in \mathcal{H}_0$ e $\beta \in \mathbb{R}$, temos $(u + \beta v)(\lambda) = u(\lambda) + \beta v(\lambda)$, donde

$$\begin{aligned}\| (u + \beta v)(\lambda) \|^2_{\mathcal{H}(\lambda)} &\leqslant \Big(\| u(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)} + | \beta | \| v(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)} \Big)^2 \\ &= \| u(\lambda) \|^2_{\mathcal{H}(\lambda)} + 2 | \beta | \| u(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)} \| v(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)} \\ &+ \beta^2 \| v(\lambda) \|^2_{\mathcal{H}(\lambda)},\end{aligned}$$

daí,

$$\int_{\mathbb{R}} \| (u + \beta v)(\lambda) \|^2_{\mathcal{H}(\lambda)}\, d\nu(\lambda) \leqslant \int_{\mathbb{R}} \| u(\lambda) \|^2_{\mathcal{H}(\lambda)}\, d\nu(\lambda)$$
$$+ 2 | \beta | \int_{\mathbb{R}} \| u(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)} \| v(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}\, d\nu(\lambda) + \beta^2 \int_{\mathbb{R}} \| v(\lambda) \|^2_{\mathcal{H}(\lambda)}\, d\nu(\lambda).$$

Como $u,\ v \in \mathcal{H}_0$ **temos que** $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \| u(\lambda) \|^2_{\mathcal{H}(\lambda)}\ d\nu(\lambda)$ **e** $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \| v(\lambda) \|^2_{\mathcal{H}(\lambda)}\ d\nu(\lambda)$ **são finitas. Além disso, pela desigualdade de Hölder,** $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \| u(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)} \| v(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}$ $d\nu(\lambda)$ **é finita. Logo** $u+\beta v \in \mathcal{H}_0$. **Assim, identificando-se dois campos de vetores que s ão iguais quase sempre, em** $\mathcal{H}_0$**, relativamente a medida** ν**,** $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{F}$ **denota o subespaço vetorial das classes de campos de vetores de quadrado integrável com relação a medida** ν**.**

Em $\mathcal{H}_0$ **definimos a seguinte produto interno :**

$$(u, v)_0 = \int_{\mathbb{R}} (u(\lambda), v(\lambda))_{\mathcal{H}(\lambda)} d\nu(\lambda),\ \ u, v \in \mathcal{H}(\lambda),$$

o qual induz a norma:

$$\| u \|_0 = \left(\int_{\mathbb{R}} \| u(\lambda) \|^2_{\mathcal{H}(\lambda)}\ d\nu(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposição 2.1. *O espaço* $\big(\mathcal{H}_0,\ (\cdot,\cdot)_0\big)$ *é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{H}_0$. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geqslant n_0$ tem-se $\| u_n - u_m \|_0 < \varepsilon$. Ou seja, $n, m \geqslant n_0$ implica em $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \| u_n(\lambda) - u_m(\lambda) \|^2_{\mathcal{H}(\lambda)}\ d\nu(\lambda) < \varepsilon^2$, donde segue que $\| u_n(\lambda) - u_m(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)} < \varepsilon\ \nu-$q.s., isso com $n, m \geqslant n_0$. Assim, a sequência $(u_n(\lambda))$ é de Cauchy, $\nu -$ q.s., em $\mathcal{H}(\lambda)$. Como $\mathcal{H}(\lambda)$ é Hilbert, existe $u(\lambda) \in \mathcal{H}(\lambda)$ tal que $\| u_n(\lambda) - u(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)} \to 0$ quando $n \to \infty$.

Afirmação: O campo $\lambda \mapsto u(\lambda) \in \mathcal{H}(\lambda)$ pertence a $\mathcal{H}_0$!

De fato, sendo $(u_n(\lambda))$ de Cauchy, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geqslant n_1$ implica em $\| u_n(\lambda) - u_m(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)} < \varepsilon \| u_{m_0}(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}$, com $m_0 \in \mathbb{N}$ fixo. Então,

$$\begin{aligned}
&\| u_n(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)} - \| u_m(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)} \leqslant \| u_n(\lambda) - u_m(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)} < \varepsilon \| u_{m_0}(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)} \\
&\Rightarrow \| u_n(\lambda) \|^2_{\mathcal{H}(\lambda)} < \Big(\varepsilon \| u_{m_0}(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)} + \| u_m(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)} \Big)^2 \\
&\qquad = \varepsilon^2 \| u_{m_0}(\lambda) \|^2_{\mathcal{H}(\lambda)} + 2\varepsilon \| u_{m_0}(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)} \| u_m(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)} \\
&\qquad + \| u_m(\lambda) \|^2_{\mathcal{H}(\lambda)}.
\end{aligned}$$

Em particular, fixando-se $m_1 \geqslant n_1$ e fazendo $n \to \infty$, temos

$$\begin{aligned}
&\| u(\lambda) \|^2_{\mathcal{H}(\lambda)} < \varepsilon^2 \| u_{m_0}(\lambda) \|^2_{\mathcal{H}(\lambda)} + 2\varepsilon \| u_{m_o}(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)} \| u_{m_1}(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)} + \| u_{m_1}(\lambda) \|^2_{\mathcal{H}(\lambda)} \\
&\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \| u(\lambda) \|^2_{\mathcal{H}(\lambda)}\ d\nu(\lambda) < \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}} \| u_{m_0}(\lambda) \|^2_{\mathcal{H}(\lambda)}\ d\nu(\lambda) \\
&+ 2\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \| u_{m_o}(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)} \| u_{m_1}(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}\ d\nu(\lambda) + \int_{\mathbb{R}} \| u_{m_1}(\lambda) \|^2_{\mathcal{H}(\lambda)}\ d\nu(\lambda).
\end{aligned}$$

Como $u_{m_0},\ u_{m_1} \in \mathcal{H}_0$ temos que a primeira e a terceira integral acima são finitas. Ora, as funções $f_0(\lambda) = \| u_{m_0}(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}$ e $f_1(\lambda) = \| u_{m_1}(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}$ estão em $L^2(\mathbb{R})$. Logo, pela desigualdade de Hölder, a segunda integral é finita, donde $u \in \mathcal{H}_0$. Além disso, ainda pelo fato da sequência $(u_n(\lambda))$ ser de Cauchy tem-se $\| u_n(\lambda) - u(\lambda) \|^2 < \varepsilon^2 \| u_{m_0}(\lambda) \|^2$, com a aplicação $\lambda \mapsto \varepsilon^2 \| u_{m_0}(\lambda) \|^2$ integrável. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada temos que

$$\| u_n - u \|_0^2 = \int_{\mathbb{R}} \| u_n(\lambda) - u(\lambda) \|^2 \, d\nu(\lambda) \longrightarrow 0, \ \text{quando } n \to \infty.$$

Daí, $u_n \longrightarrow u$ em $\mathcal{H}_0$. Portanto, $\mathcal{H}_0$ é um espaço de Hilbert. □

O espaço de Hilbert $\mathcal{H}_0$ é denominado Integral Hilbertiana **do campo $\lambda \mapsto \mathcal{H}(\lambda)$ e denotado por $\int^{\oplus} \mathcal{H}(\lambda) d\nu(\lambda)$.**

Suponha que a medida ν tem suporte em $(\lambda_0, +\infty)$, para algum $\lambda_0 > 0$. Neste caso podemos considerar os campos de vetores definidos apenas em $(\lambda_0, +\infty)$. Daí, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos o espaço vetorial $\mathcal{H}_\alpha$ do seguinte modo:

$$u \in \mathcal{H}_\alpha \Longleftrightarrow \lambda \longmapsto \lambda^\alpha u \in \mathcal{H}_0.$$

Define-se em $\mathcal{H}_\alpha$ o seguinte produto interno :

$$(u, v)_\alpha = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} (u(\lambda), v(\lambda))_{\mathcal{H}(\lambda)} d\nu(\lambda), \ u, v \in \mathcal{H}(\lambda),$$

o qual induz a norma:

$$\| u \|_\alpha = \left(\int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} \| u(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 \, d\nu(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}} = \| \lambda^\alpha u \|_0 .$$

Proposição 2.2. *O espaço* $\left(\mathcal{H}_\alpha, \ (\cdot, \cdot)_\alpha\right)$ *é um espaço de Hilbert e* $(\mathcal{H}_\alpha)' \equiv \mathcal{H}_{-\alpha}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{H}_\alpha$. Então, a sequência $(\lambda^\alpha u_n)$ é de Cauchy em $\mathcal{H}_0$. Sendo este um espaço de Hilbert tem-se que existe $u \in \mathcal{H}_0$ tal que $\| \lambda^\alpha u_n - u \|_0 \longrightarrow 0$ quando $n \to \infty$. Ora, $u = \lambda^\alpha (\lambda^{-\alpha} u) \in \mathcal{H}_0$, donde $\lambda^{-\alpha} u \in \mathcal{H}_\alpha$.

Afirmação:$\| u_n - \lambda^{-\alpha} u \|_\alpha \longrightarrow 0$ quando $n \to \infty$.

De fato, $\| u_n - \lambda^{-\alpha} u \|_\alpha = \| \lambda^\alpha u_n - u \|_0 \longrightarrow 0$ quando $n \to \infty$. Logo, $u_n \longrightarrow \lambda^{-\alpha} u$ quando $n \to \infty$ em $\mathcal{H}_\alpha$. Segue que $\mathcal{H}_\alpha$ é Hilbert.

Para provar que $(\mathcal{H}_\alpha)' \equiv \mathcal{H}_{-\alpha}$, considere o seguinte operador $\sigma : (\mathcal{H}_\alpha)' \longrightarrow \mathcal{H}_{-\alpha}$ definido por $\sigma(f) = \lambda^{2\alpha} u_f$, onde u_f é o único campo de $\mathcal{H}_\alpha$ tal que

$$\langle f, u \rangle = (u_f, u)_\alpha$$

$$\| f \|_{\mathcal{H}'_\alpha} = \| u_f \|_\alpha,$$

onde $\langle , \rangle$ denota a dualidade entre $\mathcal{H}_\alpha$ e $\mathcal{H}'_\alpha$. Note que sendo $\mathcal{H}_\alpha$ um espaço de Hilbert, a existência e a unicidade de um tal u_f segue do teorema da Representação de Riesz-Fréchet. Prova-se a seguir que σ é um isomorfismo isométrico. Com efeito, dados $f, g \in \mathcal{H}'_\alpha$ e $\beta \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
(u_{f+\beta g}, u)_\alpha &= \langle f + \beta g, u \rangle = \langle f, u \rangle + \beta \langle g, u \rangle \\
&= (u_f, u)_\alpha + \beta (u_g, u)_\alpha \\
&= (u_f + \beta u_g, u)_\alpha,
\end{aligned}$$

donde

$$(u_{f+\beta g}, u)_\alpha = (u_f + \beta u_g, u)_\alpha, \ \forall u \in \mathcal{H}_\alpha.$$

Logo, $u_{f+\beta g} = u_f + \beta u_g$. Assim, $\sigma(f+\beta g) = \lambda^{2\alpha} u_{f+\beta g} = \lambda^{2\alpha}(u_f + \beta u_g) = \sigma(f) + \beta\sigma(g)$. Portanto, σ é linear.

Além disso, dada $f \in \mathcal{H}'_\alpha$ temos,

$$\| \sigma(f) \|^2_{-\alpha} = \| \lambda^{2\alpha} u_f \|^2_{-\alpha} = \| \lambda^\alpha u_f \|^2_0 = \| u_f \|^2_\alpha = \| f \|^2_{\mathcal{H}'_\alpha} .$$

Portanto,

$$\| \sigma(f) \|_{-\alpha} = \| f \|_{\mathcal{H}'_\alpha} .$$

Em particular σ é injetiva. Vejamos a sobrejetividade: dado $w \in \mathcal{H}_{-\alpha}$ note que $u = \lambda^{-2\alpha} w \in \mathcal{H}_\alpha$, pois $\lambda^\alpha u = \lambda^{-\alpha} u \in \mathcal{H}_0$, visto que $w \in \mathcal{H}_{-\alpha}$. Além disso, o funcional $f : \mathcal{H}_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $\langle f, v \rangle = (u, v)_\alpha$ está em $\mathcal{H}'_\alpha$. De fato, a linearidade é obvia, e além do mais, pela desigualdade de Höllder com $p = 2$, tem-se

$$| \langle f, v \rangle | = | (u, v)_\alpha | \leqslant \| u \|_\alpha \| v \|_\alpha .$$

Como $\| u \|_\alpha < +\infty$, segue que $f \in \mathcal{H}'_\alpha$. Mais ainda, pelo teorema de Riesz-Fréchet, mais precisamente a unicidade de u_f, temos $u_f = u$. Logo,

$$\sigma(f) = \lambda^{2\alpha} u_f = \lambda^{2\alpha} u = \lambda^{2\alpha} \lambda^{-2\alpha} w,$$

donde

$$\sigma(f) = w.$$

Portanto, σ é sobrejetiva, donde um isomorfismo isométrico. $\square$

No que segue estaremos sempre supondo que a medida ν tem suporte em $(\lambda_0, +\infty)$, com $\lambda_0 > 0$.

Para cada $k > \lambda_0$, $k \in \mathbb{N}$, representaremos por $\mathcal{H}_{0,k}$ o subespaço vetorial de $\mathcal{H}_0$ constituído pelos campos $u \in \mathcal{H}_0$ tais que $u(\lambda) = 0, \nu -$ q.s. em $[k, +\infty)$. Ou seja,

$$\mathcal{H}_{0,k} = \{u \in \mathcal{H}_0 \ ; u(\lambda) = 0, \ \nu - \text{q.s. em } [k, +\infty)\}.$$

Proposição 2.3. *Para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos:*

i) $\mathcal{H}_{0,k}$ é um subespaço fechado de $\mathcal{H}_0$ e, portanto, um espaço de Hilbert com a norma induzida por $\mathcal{H}_0$.

ii) Se $v_k \in \mathcal{H}_{0,k}$, então $\lambda^\alpha v_k \in \mathcal{H}_{0,k}$. Em particular, $\mathcal{H}_{0,k} \subset \mathcal{H}_\alpha$.

iii) Em $\mathcal{H}_{0,k}$ as normas $\mathcal{H}_\alpha$ e $\mathcal{H}_\beta$ são equivalentes e para $v_k \in \mathcal{H}_{0,k}$ temos

$$\| v_k \|_\alpha^2 \leqslant k^{2(\alpha-\beta)} \| v_k \|_\beta^2, \ \alpha \geqslant \beta,$$

$$\| v_k \|_\beta^2 \leqslant \lambda_0^{2(\alpha-\beta)} \| v_k \|_\alpha^2, \ \alpha \geqslant \beta.$$

Demonstração. i) Seja (u_n) uma sequência em $\mathcal{H}_{0,k}$ tal que $u_n \longrightarrow u$ em $\mathcal{H}_0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ temos

$$\int_k^{+\infty} \| u(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 \, d\nu(\lambda) = \int_k^{+\infty} \| u(\lambda) - u_n(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 \, d\nu(\lambda),$$

pois $u_n \in \mathcal{H}_{0,k}$, $\forall \ n \in \mathbb{N}$. Daí,

$$0 \leqslant \int_k^{+\infty} \| u(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 \, d\nu(\lambda) \leqslant \int_{\lambda_0}^{+\infty} \| u(\lambda) - u_n(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 \, d\nu(\lambda)$$
$$= \| u - u_n \|_0^2 \longrightarrow 0, \text{quando } n \to +\infty.$$

Logo,

$$\int_k^{+\infty} \| u(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 \, d\nu(\lambda) = 0,$$

donde $u(\lambda) = 0$ $\nu - q.s$ em $[k, +\infty)$. Assim, $u \in \mathcal{H}_{0,k}$ e, portanto $\mathcal{H}_{0,k}$ é um subespaço fechado de $\mathcal{H}_0$.

(ii) Considere inicialmente $\alpha \geqslant 0$. Então, como $v_k \in \mathcal{H}_{0,k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}\int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} \parallel v_k(\lambda) \parallel^2_{\mathcal{H}(\lambda)} d\nu(\lambda) &= \int_{\lambda_0}^{k} \lambda^{2\alpha} \parallel v_k(\lambda) \parallel^2_{\mathcal{H}(\lambda)} d\nu(\lambda) \\ &\leqslant \int_{\lambda_0}^{k} k^{2\alpha} \parallel v_k(\lambda) \parallel^2_{\mathcal{H}(\lambda)} d\nu(\lambda),\end{aligned}$$

pois $\lambda \in [\lambda_0, k]$. Logo,

$$\begin{aligned}\int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} \parallel v_k(\lambda) \parallel^2_{\mathcal{H}(\lambda)} d\nu(\lambda) &\leqslant k^{2\alpha} \int_{\lambda_0}^{k} \parallel v_k(\lambda) \parallel^2_{\mathcal{H}(\lambda)} d\nu(\lambda) \\ &= k^{2\alpha} \parallel v_k \parallel_0^2 < +\infty.\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} \parallel v_k(\lambda) \parallel^2_{\mathcal{H}(\lambda)} d\nu(\lambda) \leqslant k^{2\alpha} \parallel v_k \parallel_0^2 .$$

Segue que $\lambda^\alpha v_k \in \mathcal{H}_0$ e, como $\lambda^\alpha v_k(\lambda) = 0$ $\nu - q.s.$ em $[k, +\infty)$, temos $\lambda^\alpha v_k \in \mathcal{H}_{0,k}$. Para o caso $\alpha \leqslant 0$, note que $\beta = -\alpha \geqslant 0$, donde pelo que foi provado acima, $\lambda^\beta v_k \in \mathcal{H}_{0,k}$. Como, $\mathcal{H}_{0,k}$ é um subespaço de $\mathcal{H}_0$ e $\lambda \in (\lambda_0, +\infty)$, com $\lambda_0 > 0$, temos $\lambda^\alpha v_k = \lambda^{-2\beta}\lambda^\beta v_k \in \mathcal{H}_{0,k}$, isto é, $\lambda^\alpha v_k \in \mathcal{H}_{0,k}$. Em particular, dado $v_k \in \mathcal{H}_{0,k}$ temos $\lambda^\alpha v_k \in \mathcal{H}_{0,k} \subset \mathcal{H}_0$, isto é, $\lambda^\alpha v_k \in \mathcal{H}_0$. Daí, $v_k \in \mathcal{H}_\alpha$, donde tem-se $\mathcal{H}_{0,k} \subset \mathcal{H}_\alpha$.

iii) No item (ii) provamos que para $\alpha \geqslant 0$ e $v_k \in \mathcal{H}_{0,k}$ vale

$$\parallel v_k \parallel_\alpha^2 \leqslant k^{2\alpha} \parallel v_k \parallel_0^2 . \tag{2.1}$$

Para $\alpha \leqslant 0$, como $\lambda_0 \leqslant k$, temos $k^{2\alpha} = \dfrac{1}{k^{-2\alpha}} \leqslant \dfrac{1}{\lambda_0^{-2\alpha}} = \lambda_0^{2\alpha}$, donde

$$\parallel v_k \parallel_\alpha^2 \leqslant \lambda_0^{2\alpha} \parallel v_k \parallel_0^2 . \tag{2.2}$$

Assim, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha \geqslant \beta$ temos

$$\parallel v_k \parallel_\beta^2 = \parallel \lambda^\beta v_k \parallel_0^2 = \lambda^{2\beta} \parallel v_k \parallel_0^2 \geqslant \lambda^{2\beta} k^{2(\beta-\alpha)} \parallel v_k \parallel_{\alpha-\beta}^2,$$

pois sendo $\alpha - \beta \geqslant 0$ temos de (2.1) que $\parallel v_k \parallel_{\alpha-\beta}^2 \leqslant k^{2(\alpha-\beta)} \parallel v_k \parallel_0^2$. Portanto, temos

$$\parallel v_k \parallel_{\alpha-\beta}^2 \leqslant \lambda^{-2\beta} k^{2(\alpha-\beta)} \parallel v_k \parallel_0^2 .$$

Ora,

$$\begin{aligned}
\| v_k \|_{\alpha-\beta}^2 &= \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha-2\beta} \| v_k(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 \, d\nu(\lambda) \\
&= \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} \| \lambda^{-\beta} v_k(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 \, d\nu(\lambda) \\
&= \| \lambda^{-\beta} v_k \|_{\alpha} \\
&= \lambda^{-2\beta} \| v_k \|_{\alpha}^2 .
\end{aligned}$$

Nota: Pelo item (ii) temos $v_k \in \mathcal{H}_{0,k}$ implicando em $\lambda^{-\beta} v_k \in \mathcal{H}_{0,k} \subset \mathcal{H}_\alpha$, donde $\lambda^{-\beta} v_k \in \mathcal{H}_\alpha$. Assim faz sentido considerar a norma em $\mathcal{H}_\alpha$ do campo $\lambda^{-\beta} v_k$.

Segue que

$$\lambda^{-2\beta} \| v_k \|_{\alpha}^2 = \| v_k \|_{\alpha-\beta}^2 \leqslant k^{2(\alpha-\beta)} \lambda^{-2\beta} \| v_k \|_{\beta}^2,$$

donde

$$\| v_k \|_{\alpha}^2 \leqslant k^{2(\alpha-\beta)} \| v_k \|_{\beta}^2 .$$

De modo análogo, agora usando (2.2), obtemos

$$\| v_k \|_{\beta}^2 \leqslant \lambda_0^{2(\alpha-\beta)} \| v_k \|_{\alpha}^2 .$$

Daí, temos a equivalência das normas de $\mathcal{H}_\alpha$ e $\mathcal{H}_\beta$ em $\mathcal{H}_{0,k}$. □

O espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{0,k}$ é denominado espaço dos campos truncados. Note que $\mathcal{H}_{0,k}$ é um subespaço fechado de $\mathcal{H}_\alpha$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$. De fato, dada uma sequência (u_n) em $\mathcal{H}_{0,k}$ tal que $u_n \longrightarrow u$ em $\mathcal{H}_\alpha$ quando $n \to +\infty$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{k}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} \| u(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 \, d\nu(\lambda) &= \int_{k}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} \| u(\lambda) - u_n(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 \, d\nu(\lambda) \\
&\leqslant \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} \| u(\lambda) - u_n(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 \, d\nu(\lambda) \\
&= \| u - u_n \|_{\alpha}^2 .
\end{aligned}$$

Como $\| u - u_n \|_\alpha \longrightarrow 0$ quando $n \to +\infty$, temos

$$\int_{k}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} \| u(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 \, d\nu(\lambda) = 0,$$

donde $\lambda^{2\alpha} \| u(\lambda) \|^2 = 0$ $\nu -$ q.s. em $[k, +\infty)$. Ora, $\lambda \in [k, +\infty) \Rightarrow 0 < k \leqslant \lambda$, isto é, $\lambda^{2\alpha} > 0$. Logo, $u(\lambda) = 0$ $\nu -$ q.s. em $[k, +\infty)$. Portanto $u \in \mathcal{H}_{0,k}$. Assim $\mathcal{H}_{0,k}$ é fechado em $\mathcal{H}_\alpha$.

Definição 2.3. *Dado um campo de vetores $\nu \in \mathcal{H}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, denominamos de k-ésimo campo truncado associado à ν ao campo $\nu_k \in \mathcal{H}_{0,k}$ definido por*

$$\nu_k(\lambda) = \begin{cases} \nu(\lambda) \ \nu - \text{q.s. em } (\lambda_0, k), \\ 0 \ \ \nu - \text{q.s. em } [k, +\infty). \end{cases}$$

Proposição 2.4. *Seja $\nu \in \mathcal{H}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Então a sequência (ν_k) de campos truncados converge para ν em $\mathcal{H}_\alpha$ forte.*

Demonstração. Notemos inicialmente que:

i) $(\lambda_0, +\infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Lambda_k$, onde $\Lambda_k = (\lambda_0, k)$ e $\Lambda_k \subset \Lambda_{k+1}$.

ii) $\nu_k = \nu\chi_{\Lambda_k}$ $\nu -$ q.s. em $(\lambda_0, +\infty)$.

Assim, temos $| \nu_k(\lambda) - \nu(\lambda) |=| \nu(\lambda) \| \chi_{\Lambda_k}(\lambda) - 1 |$, $\nu -$ q.s. em $(\lambda_0, +\infty)$. Ora, $\lambda \in (\lambda_0, +\infty)$, donde por (i) existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda \in \Lambda_{k_0}$. Como $\Lambda_k \subset \Lambda_{k+1}$ temos que para $k \geqslant k_0$ vale $\lambda \in \Lambda_k$, isto é, $k \geqslant k_0$ implica em $\chi_{\Lambda_k}(\lambda) = 1$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ tomando $k \geqslant k_0$ tem-se $| \chi_{\Lambda_k}(\lambda) - 1 |= 0 < \varepsilon$, ou seja, $\chi_{\Lambda_k}(\lambda) \longrightarrow 1$ quando $k \to \infty$ em $(\lambda_0, +\infty)$. Daí, para cada $\lambda \in (\lambda_0, +\infty)$ temos $| \nu_k(\lambda) - \nu(\lambda) |=| \nu(\lambda) \| \chi_{\Lambda_k}(\lambda) - 1 |\longrightarrow 0$ quando $k \to \infty$. Portanto, $\nu_k \longrightarrow \nu$ pontualmente em $(\lambda_0, +\infty)$. Da definição de ν_k temos que $\lambda^{2\alpha} \| \nu_k(\lambda) - \nu(\lambda) \|^2 \leqslant \lambda^{2\alpha} \| \nu(\lambda) \|^2$ $\nu -$ q.s. em $(\lambda_0, +\infty)$. Como $\nu \in \mathcal{H}_\alpha$, temos que a aplicação $\lambda \mapsto \lambda^{2\alpha} \| \nu(\lambda) \|^2$ é ν-integrável em $(\lambda_0, +\infty)$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \| \nu_k - \nu \|_\alpha^2 &= \lim_{k\to\infty} \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} \| \nu_k(\lambda) - \nu(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 \, d\nu(\lambda) \\ &= \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} \lim_{k\to\infty} \| \nu_k(\lambda) - \nu(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 \, d\nu(\lambda) \\ &= \int_{\lambda_0}^{+\infty} 0 d\nu(\lambda) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\nu_k \longrightarrow \nu$ em $\mathcal{H}_\alpha$ forte. □

Observação 2.3. *Dado um campo $g \in L^p(0, T; \mathcal{H}_\alpha)$, com $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, de modo análogo definimos o campo truncado g_k pondo para quase todo $t \in (0, T)$ por*

$$g_k(t)(\lambda) = \begin{cases} g(t)(\lambda) \ \nu - \text{q.s. em } (\lambda_0, k), \\ 0 \ \ \nu - \text{q.s. em } [k, +\infty). \end{cases}$$

Neste caso, $g_k \in L^p(0, T; \mathcal{H}_{0,k})$ e $g_k \longrightarrow g$ em $L^p(0, T; \mathcal{H}_\alpha)$ forte.

Proposição 2.5. *Se* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *com* $\alpha \geqslant \beta$, *então*

$$\mathcal{H}_\alpha \hookrightarrow \mathcal{H}_\beta \quad e \quad \| v \|_\beta \leqslant \lambda_0^{\beta-\alpha} \| v \|_\alpha, v \in \mathcal{H}_\alpha,$$

sendo a imersão acima densa.

Demonstração. Seja $v \in \mathcal{H}_\alpha$. Então,

$$\begin{aligned}\int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\beta} \| v(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 \, dv(\lambda) &= \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\beta-2\alpha} \| \lambda^\alpha v(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 \, dv(\lambda) \\ &\leqslant \lambda_0^{2(\beta-\alpha)} \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} \| v(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 \, dv(\lambda) \\ &= \lambda_0^{2(\beta-\alpha)} \| v \|_\alpha^2 < \infty.\end{aligned}$$

Logo, $\lambda^\beta v \in \mathcal{H}_0$, donde $v \in \mathcal{H}_\beta$. Daí, $\mathcal{H}_\alpha \subset \mathcal{H}_\beta$ se $\alpha \geqslant \beta$. Além disso,

$$\| v \|_\beta \leqslant \lambda_0^{\beta-\alpha} \| v \|_\alpha,$$

donde $\mathcal{H}_\alpha \hookrightarrow \mathcal{H}_\beta$. Quanto a densidade, basta notar que para $v \in \mathcal{H}_\beta$ a sequência de campos truncados (v_k) está em $\mathcal{H}_\alpha \cap \mathcal{H}_\beta$ e pela proposição (2.4), $v_k \longrightarrow v$ em $\mathcal{H}_\beta$ forte. □

A seguir enunciaremos o Teorema de Diagonalização o qual, intuitivamente, estabelece que todo operador auto-adjunto e coercivo é unitariamente equivalente a um operador de multiplicação.

Seja H um espaço de Hilbert separável com produto interno $(\cdot, \cdot)$ e norma correspondente $\| \cdot \|$. Em H consideremos um operador A auto-adjunto e coercivo, isto é, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$(Au, u) \geqslant c \| u \|^2, \ \forall \ u \in D(A).$$

Nestas condições temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1. *(Teorema de Diagonalização) Existe uma medida positiva limitada* v *sobre* $\mathbb{R}$, *com suporte em* $(\lambda_0, +\infty)$, $0 < \lambda_0 < c$, *uma Integral Hilbertiana* $\mathcal{H}_0 = \int^\oplus \mathcal{H}(\lambda) dv(\lambda)$ *e um operador unitário* $\mathcal{U}$ *de* H *sobre* $\mathcal{H}_0$ *satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $\mathcal{U}(A^\alpha u) = \lambda^\alpha \mathcal{U}(u), \ \forall \ u \in D(A^\alpha), \ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1;$

(ii) $\mathcal{U}$ *é um isomorfismo de* $D(A^\alpha)$ *sobre* $\mathcal{H}_\alpha, \ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$

Demonstração. Faremos a demonstração em etapas : Na primeira construiremos um espaço de Hilbert L e um operador unitário $\mathbf{U}$ de H em L de modo que a imagem de A^α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, por $\mathbf{U}$ é o operador de multiplicação por λ^α sobre L, isto é, $\mathbf{U}A^\alpha\mathbf{U}^{-1} = \mathcal{S}_\alpha$, onde $\mathcal{S}_\alpha$ é o operador de L definido por

$$D(\mathcal{S}_\alpha) = \{v \in L;\ \lambda^\alpha v \in L\} \text{ e } \mathcal{S}_\alpha(v) = \lambda^\alpha v.$$

Além disso, $\mathbf{U}$ é um isomorfismo de $D(A^\alpha)$ sobre $D(\mathcal{S}_\alpha)$.

Observação 2.4. *Note que* $\mathbf{U}A^\alpha\mathbf{U}^{-1} = \mathcal{S}_\alpha$ *equivale à* $\mathbf{U}A^\alpha = \mathcal{S}_\alpha\mathbf{U}$*, donde dado* $u \in D(A^\alpha)$ *temos*

$$(\mathbf{U}A^\alpha)(u) = (\mathcal{S}_\alpha\mathbf{U})(u) \Longleftrightarrow \mathbf{U}(A^\alpha u) = \mathcal{S}_\alpha(\mathbf{U}(u)) = \lambda^\alpha\mathbf{U}(u),$$

isto é, $\mathbf{U}(A^\alpha u) = \lambda^\alpha\mathbf{U}(u)$.

Na segunda construiremos via Teorema de Radon-Nikodyn um espaço de Hilbert K e um operador unitário $\mathcal{V}$ de L sobre K, com propriedades análogas àquelas do operador $\mathbf{U}$. Finalmente na terceira construiremos uma Integral Hilbertiana $\mathcal{H}_0 = \int^{\oplus} \mathcal{H}(\lambda)d\nu(\lambda)$ e um operador unitário $\mathcal{W}$ de K em $\mathcal{H}_0$, o qual também possui propriedades análogas àquelas do operador $\mathbf{U}$. O operador $\mathcal{U}$ que desejamos construir será definido por $\mathcal{U} = \mathcal{W} \circ \mathcal{V} \circ \mathbf{U}$. Esquematicamente temos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\mathbf{U}"] & L \arrow[r, "\mathcal{V}"] & K \arrow[r, "\mathcal{W}"] & \mathcal{H}_0 \\
D(A^\alpha) \arrow[u] \arrow[r, "\mathbf{U}"] & D(\mathcal{S}_\alpha) \arrow[u] \arrow[r, "\mathcal{V}"] & D(\mathcal{Q}_\alpha) \arrow[u] \arrow[r, "\mathcal{W}"] & D(\mathcal{M}_\alpha) = \mathcal{H}_\alpha \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

onde cada sub-diagrama é comutativo, isto é,

$$\begin{cases} \mathbf{U}A^\alpha\mathbf{U}^{-1} = \mathcal{S}_\alpha, \\ \mathcal{V}\mathcal{S}_\alpha\mathcal{V}^{-1} = \mathcal{Q}_\alpha, \\ \mathcal{W}\mathcal{Q}_\alpha\mathcal{W}^{-1} = \mathcal{M}_\alpha. \end{cases}$$

1ª Etapa : Construção do Operador U.

Seja $\{E_\lambda;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ a família espectral de A, cuja existência é garantida pelo Teorema Espectral (ver Apêndice). Sendo A coercivo, o operador A^α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, está bem definido e

$$D(A^{\alpha}) = \left\{ u \in H; \int_{\mathbb{R}} \lambda^{2\alpha} d(E_{\lambda}u, u) < \infty \right\}, \tag{2.3}$$

$$\| A^{\alpha}u \|^2 = \int_{\mathbb{R}} \lambda^{2\alpha} d(E_{\lambda}u, u); \ \forall\, u \in D(A^{\alpha}), \tag{2.4}$$

$$(A^{\alpha}u, v) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^{\alpha} d(E_{\lambda}u, v), \ \forall\, u \in D(A^{\alpha}), \ v \in H, \tag{2.5}$$

$$(A^{\alpha}u, u) \geqslant c^{\alpha} \| u \|^2, \ \forall\, u \in D(A^{\alpha}). \tag{2.6}$$

Considere a seguinte definição:

Definição 2.4. *Dado $v \in H$, o subespaço cíclico de H gerado por v, denotado por H_v, é o fecho em H do subespaço gerado pelo conjunto $\{E_{\lambda}v; \lambda \in \mathbb{R}\}$, isto é,*

$$H_v = \overline{Span\{E_{\lambda}v; \lambda \in \mathbb{R}\}}.$$

Observação 2.5. *(i) $v \in H_v$, pois H_v é fechado e, pelo Teorema Espectral, $v = Iv = \lim_{\lambda \to +\infty} E_{\lambda}v$.*
(ii) Se w é ortogonal a H_v, então H_w é ortogonal a H_v. De fato, dados $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, temos pela proposição (A.9) que $(E_{\lambda}v, E_{\mu}w) = (E_{\mu}E_{\lambda}v, w) = (E_{\gamma}v, w) = 0$, onde $\gamma = \min\{\lambda, \mu\}$. Resulta daí que $(E_{\lambda}v, u) = 0$, $\forall\, u \in Span\{E_{\mu}w; \mu \in \mathbb{R}\}$. Agora, dado $u \in H_w$, existe uma sequência (u_k) em $Span\{E_{\mu}w; \mu \in \mathbb{R}\}$ tal que $u_k \longrightarrow u$ em H. Logo, $(E_{\lambda}v, u) = \lim_{k \to +\infty} (E_{\lambda}v, u_k) = 0$. Portanto, $(E_{\lambda}v, u) = 0$, $\forall\, u \in H_w$. Daí, dado $z \in H_v$ temos $(z, u) = \lim_{k \to +\infty} (z_k, u) = \lim_{k \to +\infty} (\sum \alpha_i^{(k)} E_{\lambda_i}v, u) = 0$, isto é, $(z, u) = 0$, $\forall\, u \in H_w$ e $\forall\, z \in H_v$.

Proposição 2.6. *Existe uma sequência (H_n) de subespaços cíclicos de H, dois a dois ortogonais e tal que $H = \bigoplus_n H_n$.*

Demonstração. Seja (u_k) uma sequência densa em H (recorde que estamos supondo H separável !). Façamos $v_1 = u_1$ e tomemos $H_1 = H_{v_1}$. Suponhamos construídos H_1, H_2, ..., H_k subespaços cíclicos de H dois a dois ortogonais. Seja $u_{n_{k+1}}$ o primeiro elemento da sequência (u_k) que não pertence à $H_1 \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_k$ (Se não existir tal vetor, então $H = H_1 \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_k$ e tomamos $H_n = \{0\}$, $n > k$, e a demonstração acabou!). Se E_{k+1} denota o subespaço de H gerado por $H_1 \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_k$ e $\{u_{n_{k+1}}\}$, então existe em E_{k+1} um vetor v_{k+1} ortogonal à $H_1 \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_k$. Tomemos $H_{k+1} = H_{v_{k+1}}$. Obtemos assim uma sequência (H_n) de subespaços cíclicos, dois a dois ortogonais com $\{u_n\} \subset \bigcup_n H_n$. Portanto, $H = \bigoplus_n H_n = \bigoplus_n H_{v_n}$. □

Denotemos por P_n a projeção ortogonal de $H = \bigoplus_n H_n$ sobre H_n, então dado $u \in H$ temos

$$u = \sum_n P_n u \ \ e \ \ \| u \|^2 = \sum_n \| P_n u \|^2 .$$

Além disso, se $u = \sum u_n$, então $u_n = P_n u$. Por esta razão usaremos indistintamente as formas $u = (u_n)$ e $u = \sum u_n$, $u_n = P_n u$, para representar o vetor $u \in H = \bigoplus H_n$.

Com a notação acima temos a seguir algumas propriedades dos espaços H_n:

Proposição 2.7. *(i) Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, H_n é invariante por E_λ, e P_n comuta com E_λ.*
(ii) P_n comuta com A^α, isto é, se $u \in D(A^\alpha)$ então $u_n = P_n u \in D(A^\alpha)$ e $P_n A^\alpha u = A^\alpha P_n u$. Em particular, se $u \in H_n \cap D(A^\alpha)$, então $A^\alpha u \in H_n$.

Demonstração. (i) Seja $u \in H_n$ da forma $u = E_\mu v_n$. Então, $E_\lambda u = E_\lambda E_\mu v_n = E_\gamma v_n \in H_n$, onde $\gamma = \min\{\lambda, \mu\}$. Por linearidade obtemos $E_\lambda u \in H_n$, $\forall\, u \in H_n$. Agora, dado $u = \sum P_n u \in H$, então $P_k E_\lambda u = P_k \sum E_\lambda P_n u = P_k E_\lambda P_k u = E_\lambda P_k u$, pois $E_\lambda P_k u \in H_k$, $\forall\, k$.
(ii) Sejam $u \in D(A^\alpha)$, $u_n = P_n u$ e $0 < \lambda_0 < c$ tal que $E_\lambda = 0$, $\forall\, \lambda < \lambda_0$. Para cada $b > \lambda_0$, temos

$$\int_{\lambda_0}^{b} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u_n, u_n) = \int_{\lambda_0}^{b} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u_n, P_n u) = \int_{\lambda_0}^{b} \lambda^{2\alpha} d(P_n E_\lambda u_n, u) = \int_{\lambda_0}^{b} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u_n, u).$$

Mas, $\int_{\lambda_0}^{b} \lambda dE_\lambda$ define um operador T de H, limitado e auto-adjunto definido em todo H e

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0}^{b} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u_n, u) &= (T^{2\alpha} u_n, u) = (T^\alpha u_n, T^\alpha u) \\ &\leqslant \| T^\alpha u_n \| \| T^\alpha u \| \\ &= \left[\int_{\lambda_0}^{b} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u_n, u_n) \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\lambda_0}^{b} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u, u) \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\int_{\lambda_0}^{b} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u_n, u_n) \leqslant \left[\int_{\lambda_0}^{b} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u_n, u_n) \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\lambda_0}^{b} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u, u) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Longrightarrow \left[\int_{\lambda_0}^{b} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u_n, u_n)\right]^2 \leqslant \int_{\lambda_0}^{b} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u_n, u_n) \int_{\lambda_0}^{b} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u, u).$$

Logo,

$$\int_{\lambda_0}^{b} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u_n, u_n) \leqslant \int_{\lambda_0}^{b} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u, u).$$

Como $u \in D(A^\alpha)$ e $E_\lambda = 0,\ \forall\, \lambda < \lambda_0$, temos

$$\int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u, u) < \infty$$

e, portanto, fazendo $b \to +\infty$ temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u_n, u_n) = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u_n, u_n) \leqslant \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u, u) < \infty.$$

Resulta daí que $u_n \in D(A^\alpha)$. Finalmente, dado $u \in D(A^\alpha)$ e $v \in H$, temos

$$\begin{aligned}
(A^\alpha P_n u, v) &= \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda P_n u, v) \\
&= \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u, P_n v) \\
&= (A^\alpha u, P_n v) = (P_n A^\alpha u, v),\ \forall\, v \in H.
\end{aligned}$$

Logo, $A^\alpha P_n u = P_n A^\alpha u,\ \forall\, u \in D(A^\alpha)$. □

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja L^2_n o espaço de Hilbert constituído das (classes) funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis com relação a medida $p_n(\lambda) = (E_\lambda v_n, v_n)$ e tais que

$$\| f \|^2_{L^2_n} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\ f(\lambda)\ |^2\ d(E_\lambda v_n, v_n) < \infty.$$

Seja $L = \bigoplus L^2_n = \{u = (u_n);\ u_n \in L^2_n \ e\ \sum \| u_n \|^2_{L^2_n} < \infty\}$, equipado com o produto interno

$$(u, v)_L = \sum (u_n, v_n)_{L^2_n}. \tag{2.7}$$

O espaço L com o produto interno (2.7) é um espaço de Hilbert.

Proposição 2.8. *Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, seja Φ_λ a função característica de $(-\infty, \lambda)$. Então:*

(i) $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, tem-se $\Phi_\lambda \in L^2_n,\ n = 1, 2, \ldots$.

(ii) O conjunto $X_n = \{E_\lambda v_n\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ (resp. $Y_n = \{\Phi_\lambda\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$) é total em H_{v_n} (em resp. L^2_n).

(iii) Existe um único operador unitário $\mathbf{U}_n$ de H_{v_n} sobre L^2_n tal que $\mathbf{U}_n(E_\lambda v_n) = \Phi_\lambda$.

(iv) $\forall\, u \in H_{v_n}$, tem-se $\mathbf{U}_n(E_\lambda u) = \Phi_\lambda \mathbf{U}_n(u)$.

Demonstração. (i) Φ_λ é mensurável com relação a $p_n(\lambda)$ e

$$
\begin{aligned}
\| \Phi_\lambda \|^2_{L^2_n} &= \int_{-\infty}^{+\infty} | \Phi_\lambda(\mu) |^2 \, d(E_\mu v_n, v_n) \\
&= \lim_{\lambda_0 \to -\infty} \int_{\lambda_0}^{\lambda} d(E_\mu v_n, v_n) \\
&= \lim_{\lambda_0 \to -\infty} \Big\{ (E_\lambda v_n, v_n) - (E_{\lambda_0} v_n, v_n) \Big\} \\
&= (E_\lambda v_n, v_n) = | E_\lambda v_n |^2 < \infty,
\end{aligned}
$$

pois pelo teorema espectral temos $\lim\limits_{\lambda_0 \to -\infty} E_{\lambda_0} = 0$.

(ii) Claramente X_n é total em H_{v_n}. Provaremos que Y_n é total em L^2_n. De fato, se $u \in L^2_n$ existe uma sequência de funções simples (φ_k) tal que $\varphi_k \longrightarrow u$ em L^2_n. Como $(-\infty, \lambda_0)$ tem medida nula com relação à p_n, podemos supor que existem $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_{n(k)}$ com $\lambda_j \geqslant \lambda_0$, $\forall\ j = 1, 2, ..., n(k)$ e $\varphi_k = \sum\limits_{j=1}^{n(k)} C_j \Phi_{[\lambda_0, \lambda_j]}$. Seja $\Psi_k = \sum\limits_{j=1}^{n(k)} C_j \Phi_{\lambda_j} \in Span\{Y_n\}$. Então

$$
\begin{aligned}
\| \Psi_k - u \|^2_{L^2_n} &= \int_{-\infty}^{+\infty} | \Psi_k(\lambda) - u(\lambda) |^2 \, d(E_\lambda v_n, v_n) \\
&= \int_{\lambda_0}^{+\infty} | \varphi_k(\lambda) - u(\lambda) |^2 \, d(E_\lambda v_n, v_n) \\
&= \| \varphi_k - u \|^2_{L^2_n} \longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

Assim $\Psi_k \longrightarrow u$ em L^2_n. Portanto, $L^2_n = \overline{Span\{Y_n\}}$.

(iii) Seja $\mathbf{U}_n : X_n \longrightarrow Y_n$, $\mathbf{U}_n(E_\lambda v_n) = \Phi_\lambda$. Resulta que $\mathbf{U}_n$ preserva produto interno. De fato, se $\lambda \leqslant \mu$, temos $E_\lambda \leqslant E_\mu$ donde

$$
\begin{aligned}
(\Phi_\lambda, \Phi_\mu)_{L^2_n} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_\lambda(\eta) \Phi_\mu(\eta) d(E_\eta v_n, v_n) \\
&= \int_{-\infty}^{\lambda} d(E_\eta v_n, v_n) \\
&= (E_\lambda v_n, v_n) = (E_\mu E_\lambda v_n, v_n) = (E_\lambda v_n, E_\mu v_n).
\end{aligned}
$$

Extendendo $\mathbf{U}_n$ linearmente a um operador $\mathbf{U}_n : Span\{X_n\} \longrightarrow Span\{Y_n\}$, pomos $\mathbf{U}_n(\sum\limits_{j=1}^{k} C_j E_{\lambda_j} v_n) = \sum\limits_{j=1}^{k} C_j \Phi_{\lambda_j}$. Temos que $\mathbf{U}_n$ é unitário e por densidade podemos extendê-lo a um operador unitário $\mathbf{U}_n$ de $H_{v_n} = \overline{Span\{X_n\}}$ sobre $L^2_n = \overline{Span\{Y_n\}}$.

(iv) Suponhamos $u = E_\mu v_n$ e seja $\nu = \min\{\lambda, \mu\}$. Então,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{U}_n(E_\lambda u) &= \mathbf{U}_n(E_\lambda E_\mu v_n) = \mathbf{U}_n(E_\nu v_n) = \Phi_\nu \\
&= \Phi_\lambda \Phi_\mu = \Phi_\lambda \mathbf{U}_n(E_\mu v_n) = \Phi_\lambda \mathbf{U}_n(u).
\end{aligned}
$$

Usando linearidade e continuidade concluimos que $\mathbf{U}_n(E_\lambda u) = \Phi_\lambda \mathbf{U}_n((u), \ \forall\, u \in H_{v_n}$. □

Proposição 2.9. *Seja* $v \in H_{v_n}$. *Então* $v \in D(A^\alpha)$ *se, e somente se,* $\lambda^\alpha \mathbf{U}_n(v) \in L^2_n$. *Neste caso* $\mathbf{U}_n(A^\alpha v) = \lambda^\alpha \mathbf{U}_n(v)$.

Demonstração. Como $v \in H_{v_n}$, segue da proposição 2.7 item (a) que $E_\lambda v \in H_{v_n}$ e sendo $\mathbf{U}_n : H_{v_n} \longrightarrow L^2_n$ unitário segue que $(E_\lambda v, v) = (\mathbf{U}_n E_\lambda v, \mathbf{U}_n v)_{L^2_n}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda v, v) &= \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(\mathbf{U}_n E_\lambda v, \mathbf{U}_n v) \\
&= \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d \int_{-\infty}^{+\infty} |\ \mathbf{U}_n(v)(\mu)\ |^2\ d(E_\mu v_n, v_n) \\
&= \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d \int_{\lambda_0}^{\lambda} |\ \mathbf{U}_n(v)(\mu)\ |^2\ d(E_\mu v_n, v_n) \\
&= \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha}\ |\ \mathbf{U}_n(v)(\mu)\ |^2\ d(E_\mu v_n, v_n).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda v, v) < \infty \Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |\ \lambda^\alpha \mathbf{U}_n(v)(\lambda)\ |^2\ d(E_\lambda v_n, v_n) < \infty,$$

isto é,

$$v \in D(A^\alpha) \Longleftrightarrow \lambda^\alpha \mathbf{U}_n(v) \in L^2_n.$$

Mostremos agora que $\mathbf{U}_n(A^\alpha v) = \lambda^\alpha \mathbf{U}_n(v)$. De fato, para cada $w \in H_{v_n}$ temos

$$(A^\alpha v, w) = (\mathbf{U}_n(A^\alpha v), \mathbf{U}_n(w))_{L^2_n} \tag{2.8}$$

e

$$\begin{aligned}
(E_\lambda v, w) = (\mathbf{U}_n E_\lambda v, \mathbf{U}_n w)_{L^2_n} &= (\Phi_\lambda \mathbf{U}_n v, \mathbf{U}_n w)_{L^2_n} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_\lambda(\mu) \mathbf{U}_n(v)(\mu) \mathbf{U}_n(w)(\mu) d(E_\mu v_n, v_n) \\
&= \int_{\lambda_0}^{\lambda} \mathbf{U}_n(v)(\mu) \mathbf{U}_n(w)(\mu) d(E_\mu v_n, v_n),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$(E_\lambda v, w) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \mathbf{U}_n(v)(\mu) \mathbf{U}_n(w)(\mu) d(E_\mu v_n, v_n).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(A^\alpha v, w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^\alpha d(E_\lambda v, w) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^\alpha d \int_{\lambda_0}^{\lambda} \mathbf{U}_n(v)(\mu) \mathbf{U}_n(w)(\mu) d(E_\mu v_n, v_n) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^\alpha \mathbf{U}_n(v)(\lambda) \mathbf{U}_n(w)(\lambda) d(E_\lambda v_n, v_n) = (\lambda^\alpha \mathbf{U}_n(v), \mathbf{U}_n(w))_{L^2_n}.
\end{aligned}$$

Usando (2.8), obtemos

$$(\mathbf{U}_n(A^\alpha v), \mathbf{U}(w))_{L^2_n} = (\lambda^\alpha \mathbf{U}_n(v), \mathbf{U}_n(w))_{L^2_n}, \ \forall\, w \in H. \tag{2.9}$$

De (2.9) e do fato de $\mathbf{U}_n$ ser sobrejetiva concluímos que $\mathbf{U}_n(A^\alpha v) = \lambda^\alpha \mathbf{U}_n(v), \ \forall\, v \in D(A^\alpha) \cap H_{v_n}$. □

Lemma 2.0.1. *Seja* $u = \sum_n u_n \in H$. *Então* $u \in D(A^\alpha)$ *se, e somente se,* $u_n \in D(A^\alpha)$ *e* $\sum_n A^\alpha(u_n)$ *converge. Neste caso,*

$$A^\alpha u = \sum_n A^\alpha(u_n). \tag{2.10}$$

Demonstração. Suponhamos que $u_n \in D(A^\alpha)$ e $\sum_n A^\alpha(u_n)$ é convergente e seja $v_k = \sum_{n=1}^{k} u_n$. Então $v_k \in D(A^\alpha)$, $v_k \longrightarrow u$ em H e $A^\alpha v_k = \sum_{n=1}^{k} A^\alpha u_n \longrightarrow w$. Sendo A^α fechado, concluímos que $u \in D(A^\alpha)$ e $A^\alpha u = w$. Reciprocamente, se $u \in D(A^\alpha)$ vimos na Proposição 2.7(ii) que $u_n = P_n u \in D(A^\alpha)$. Além disso, $\sum_{n=1}^{k} A^\alpha u_n = \sum_{n=1}^{k} A^\alpha P_n u = \sum_{n=1}^{k} P_n A^\alpha u \longrightarrow A^\alpha u$. □

Lemma 2.0.2. *Seja* $\{\mathcal{L}_n : E_n \longrightarrow F_n; n \in \mathbb{N}\}$ *uma família de operadores unitários entre espaços de Hilbert. Então* $\mathcal{L} : E = \bigoplus E_n \longrightarrow F = \bigoplus F_n$ *dado por* $\mathcal{L}(w_n) = \mathcal{L}_n w_n$ *é um operador unitário.*

Demonstração. A linearidade de $\mathcal{L}$ é obvia. Dado $w = (w_n) \in E$, segue da hipotese que $\| \mathcal{L}w \|_F^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | \mathcal{L}_n w_n |_{F_n}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | w_n |_{E_n}^2 = \| u \|_E^2$. □

Usaremos a seguinte notação para os operadores "tipo" $\mathcal{L}$: $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_n)$.

Definição 2.5. *O operador de multiplicação por* λ^α *em* L *é o operador* $\mathcal{S}_\alpha$ *definido por*

$$D(\mathcal{S}_\alpha) = \{f = (f_n) \in L; \lambda^\alpha f_n \in L^2_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^\alpha f_n \text{ converge em } L\}, \tag{2.11}$$

$$\mathcal{S}_\alpha(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^\alpha f_n. \tag{2.12}$$

Teorema 2.2. *Dado* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ *existe um operador unitário* $\mathbf{U}$ *de* $\mathsf{H} = \bigoplus \mathsf{H}_{\nu_n}$ *sobre* $\mathsf{L} = \bigoplus \mathsf{L}^2_n$ *tal que a imagem de* A^α *por* $\mathbf{U}$ *é o operador* $\mathcal{S}_\alpha$ *da definição acima, isto é* $\mathbf{U}(\mathsf{D}(\mathsf{A}^\alpha)) = \mathsf{D}(\mathcal{S}_\alpha)$ *e* $\mathbf{U}\mathsf{A}^\alpha\mathbf{U}^{-1}(\mathsf{f}) = \mathcal{S}_\alpha(\mathsf{f}),\ \forall\ \mathsf{f} \in \mathsf{D}(\mathcal{S}_\alpha)$. *Além disso,* $\mathbf{U}$ *é um isomorfismo de* $(\mathsf{D}(\mathsf{A}^\alpha), \|\cdot\|_{\mathsf{D}(\mathsf{A}^\alpha)})$ *sobre* $(\mathsf{D}(\mathcal{S}_\alpha), \|\cdot\|_{\mathsf{D}(\mathcal{S}_\alpha)})$, *onde*

$$\| u \|^2_{\mathsf{D}(\mathsf{A}^\alpha)} = \| \mathsf{A}^\alpha u \|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(\mathsf{E}_\lambda u, u), \tag{2.13}$$

$$\| \mathsf{f} \|^2_{\mathsf{D}(\mathcal{S}_\alpha)} = \| \mathcal{S}_\alpha \mathsf{f} \|^2_{\mathsf{L}} = \sum_n \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} \mid \mathsf{f}_n(\lambda) \mid^2 d(\mathsf{E}_\lambda \nu_n, \nu_n),\ \ \mathsf{f} \in \mathsf{D}(\mathcal{S}_\alpha). \tag{2.14}$$

Demonstração. Seja $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_n)$, onde $\mathbf{U}_n$ é o operador da Proposição (2.8)(iii). Segue do Lema 2.0.2 que $\mathbf{U}$ é unitário de H sobre L. Mostraremos agora que $\mathbf{U}\mathsf{A}^\alpha\mathbf{U}^{-1} : \mathbf{U}(\mathsf{D}(\mathsf{A}^\alpha)) \longrightarrow \mathsf{L}$ coincide com o operador $\mathcal{S}_\alpha$

(i) $\mathbf{U}(\mathsf{D}(\mathsf{A}^\alpha)) = \mathsf{D}(\mathcal{S}_\alpha)$.

De fato, seja $\mathsf{f} = (\mathsf{f}_n) \in \mathsf{D}(\mathcal{S}_\alpha) \subset \mathsf{L}$ e seja $g = \mathbf{U}^{-1}(\mathsf{f}) \in \mathsf{H}$. Temos $g_n = \mathbf{U}_n^{-1}(\mathsf{f}_n) \in \mathsf{H}_{\nu_n}$ e $\lambda^\alpha \mathbf{U}_n(g_n) = \lambda^\alpha \mathsf{f}_n \in \mathsf{L}^2_n$. Resulta da Proposição 2.9 que $g_n \in \mathsf{D}(\mathsf{A}^\alpha)$. Além disso

$$\sum_n^{+\infty} \mathbf{U}_n(\mathsf{A}^\alpha g_n) = \sum_n^{+\infty} \lambda^\alpha \mathbf{U}_n(g_n) = \lambda^\alpha \mathsf{f}_n$$

que converge em L e portanto $\sum_n^{+\infty} \mathsf{A}^\alpha g_n$ converge em H. Resulta do Lema 2.0.1 que $g \in \mathsf{D}(\mathsf{A}^\alpha)$ e portanto $\mathsf{f} = \mathbf{U}(g) \in \mathbf{U}(\mathsf{D}(\mathsf{A}^\alpha))$. Reciprocamente, seja $g \in \mathsf{D}(\mathsf{A}^\alpha)$ e ponhamos $\mathsf{f} = \mathbf{U}(g)$. Do Lema 2.0.1 concluimos que $g_n \in \mathsf{D}(\mathsf{A}^\alpha)$ e $\sum_n^{+\infty} \mathsf{A}^\alpha g_n$ converge em H. Mas,

$$g_n \in \mathsf{D}(\mathsf{A}^\alpha) \Longleftrightarrow \lambda^\alpha \mathbf{U}_n(g_n) \in \mathsf{L}^2_n \text{ (Veja Proposição 2.9).}$$

Logo,

$$\lambda^\alpha \mathsf{f}_n = \lambda^\alpha \mathbf{U}_n(g_n) \in \mathsf{L}^2_n \tag{2.15}$$

e

$$\sum_n^{+\infty} \lambda^\alpha \mathsf{f}_n = \sum_n^{+\infty} \lambda^\alpha \mathbf{U}_n(g_n) = \sum_n^{+\infty} \mathbf{U}_n(\mathsf{A}^\alpha g_n), \tag{2.16}$$

sendo a convergência acima em L. Resulta de (2.15) e (2.16) que $\mathsf{f} = \mathbf{U}(g) \in \mathsf{D}(\mathcal{S}_\alpha)$.

(ii) $\mathbf{U}A^{\alpha}\mathbf{U}^{-1}(f) = \mathcal{S}_{\alpha}(f),\ \forall\ f \in D(\mathcal{S}_{\alpha})$**.**

De fato,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{U}A^{\alpha}\mathbf{U}^{-1}(f) &= \mathbf{U}A^{\alpha}\mathbf{U}^{-1}(\sum_{n}^{+\infty} f_n) = \mathbf{U}A^{\alpha}\Big(\sum_{n}^{+\infty} \mathbf{U}_n^{-1}(f_n)\Big) \\
&= \mathbf{U}\Big(\sum_{n}^{+\infty} A^{\alpha}\mathbf{U}_n^{-1}(f_n)\Big) \\
&= \sum_{n}^{+\infty} \mathbf{U}_n A^{\alpha}\mathbf{U}_n^{-1}(f_n) \\
&= \sum_{n}^{+\infty} \lambda^{\alpha} f_n = \mathcal{S}_{\alpha} f.
\end{aligned}
$$

Da (i) e (ii) concluímos que $\mathbf{U}A^{\alpha}\mathbf{U}^{-1} = \mathcal{S}_{\alpha}$. Para provarmos que $\mathbf{U}$ é um isomorfismo de $(D(A^{\alpha}), \|\cdot\|_{D(A^{\alpha})})$ sobre $(D(\mathcal{S}_{\alpha}), \|\cdot\|_{D(\mathcal{S}_{\alpha})})$, seja $u \in D(A^{\alpha})$ e $f = \mathbf{U}(u)$. Então

$$
\begin{aligned}
\| \mathbf{U}(u) \|^2_{D(\mathcal{S}_{\alpha})} &= \| f \|^2_{D(\mathcal{S}_{\alpha})} = \| \mathcal{S}_{\alpha}(f) \|_{L} \\
&= \| \mathbf{U}A^{\alpha}\mathbf{U}^{-1}(f) \|^2_{L} \\
&= \| \mathbf{U}A^{\alpha}(u) \|^2_{L} \\
&= \| A^{\alpha}(u) \|^2 = \| u \|^2_{D(A^{\alpha})},
\end{aligned}
$$

isto é,

$$\| \mathbf{U}(u) \|_{D(\mathcal{S}_{\alpha})} = \| u \|_{D(A^{\alpha})},\ \forall\ u \in D(A^{\alpha}).$$

□

Observação 2.6. *O Teorema 2.2 continua válido se equiparmos* $D(A^{\alpha})$ *com a norma do gráfico :*

$$\| u \|^2_{D(A^{\alpha})} = \| u \|^2 + \| A^{\alpha} u \|^2 .$$

Neste caso

$$
\begin{aligned}
\| \mathbf{U}(u) \|^2_{D(\mathcal{S}_{\alpha})} = \| A^{\alpha} u \|^2 &\leqslant \| u \|^2_{D(A^{\alpha})} \\
&\leqslant (1 + \frac{1}{c^{2\alpha}}) \| \mathbf{U}(u) \|^2_{D(\mathcal{S}_{\alpha})},\ \forall\ u \in D(A^{\alpha}).
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

O diagrama a seguir resume esta primeira etapa:

$$
\begin{tikzcd}
H = \bigoplus H_n \arrow[r, leftrightarrow, "\mathbf{U}"] & L = \bigoplus L^2_n \\
D(A^{\alpha}) \arrow[u, "A^{\alpha}"] \arrow[r, leftrightarrow, "\mathbf{U}"] & D(\mathcal{S}_{\alpha}). \arrow[u, "\mathcal{S}_{\alpha}"']
\end{tikzcd}
$$

Além disso, $\mathbf{U}A^{\alpha}\mathbf{U}^{-1} = \mathcal{S}_{\alpha}$.

2ª Etapa: Construção do Operador $\mathcal{V}$.

Dado $E \subset \mathbb{R}$ mensurável, seja $\mu_n(E) = \int_E d(E_\lambda v_n, v_n) \geqslant 0$. Temos que μ_n define uma medida positiva na σ-álgebra $\mathfrak{M}$ dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ mensuráveis com relação a medida $p_n(\lambda) = (E_\lambda v_n, v_n)$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que os subespaços cíclicos H_{v_n} da decomposição de H são gerados por vetores ortonormais v_n. Assim, por (2.4) com $\alpha = 0$, temos

$$\mu_n(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} d(E_\lambda v_n, v_n) = \| v_n \|^2 = 1. \tag{2.18}$$

Resulta de (2.18) que μ_n é uma medida finita, de modo que a medida μ definida por

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}\mu_n(E), \tag{2.19}$$

é positiva, finita e $\mu(E) = 0 \iff \mu_n(E) = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Observação 2.7. *Como* $E_\lambda = 0$ *para* $\lambda < \lambda_0$, *temos* $\int_E d(E_\lambda v_n, v_n) = 0$ *para todo* $\lambda < \lambda_0$, *donde* $\operatorname{supp}(\mu_n) \subset (\lambda_0, +\infty)$. *Além disso, como* $\operatorname{supp}(\mu) \subset \operatorname{supp}(\mu_n)$ *temos* $\operatorname{supp}(\mu) \subset (\lambda_0, +\infty)$.

Aplicando o Teorema de Radon - Nikodym, cf. Capítulo 1, com $\nu = \mu_n$, concluímos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma função não negativa $\phi_n \in L^1(\mu)$, onde μ é definida por (2.19), tal que

$$\mu_n(E) = \int_E \phi_n d\mu,\ \forall\ E \in \mathfrak{M},$$

isto é,

$$\int_E d(E_\lambda v_n, v_n) = \int_E \phi_n d\mu,\ \forall\ E \in \mathfrak{M}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja

$$A_n = \{t \in \mathbb{R}; \phi_n(t) > 0\},$$

e denotemos por $L^2(A_n, \mu)$ ao espaço vetorial das (classes de) funções μ-mensuráveis de quadrado integráveis em A_n.

Observação 2.8. *Temos que* $f \in L^2_n \iff \sqrt{\phi_n} f \in L^2(A_n, \mu)$, *pois* $\mathrm{supp}(\mu) \subset (\lambda_0, +\infty)$, *donde*

$$\int_{A_n} (\sqrt{\phi_n} f)^2 d\mu = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \phi_n f^2 d\mu = \int_{\lambda_0}^{+\infty} f^2 d(E_\lambda v_n, v_n).$$

Denotemos por K o espaço vetorial $\bigoplus\limits_n L^2(A_n, \mu)$ equipado com o produto interno

$$(f, g)_K = \sum_n (f_n, g_n)_{L^2(A_n,\mu)}, \ ; \ f = (f_n), g = (g_n) \in \bigoplus_n L^2(A_n, \mu).$$

Tem-se que K é um espaço de Hilbert e

$$\sum_n f_n \text{ converge em } L \iff \sum_n \sqrt{\phi_n} f_n \text{ converge em } K.$$

Definição 2.6. *O operador de multiplicação por* λ^α *sobre* K *é o operador* $\mathcal{Q}_\alpha$ *definido por*

$$D(\mathcal{Q}_\alpha) = \{g = (g_n) \in K; \lambda^\alpha g_n \in L^2(A_n, \mu) \text{ e } \sum_n^{+\infty} \lambda^\alpha g_n \text{ converge em } K\}, \tag{2.20}$$

$$\mathcal{Q}_\alpha(g) = \sum_n^{+\infty} \lambda^\alpha g_n. \tag{2.21}$$

Teorema 2.3. *Existe um operador unitário* $\mathcal{V}$ *de* L *sobre* K *tal que a imagem de* $\mathcal{S}_\alpha$ *por* $\mathcal{V}$ *é o operador* $\mathcal{Q}_\alpha$. *Além disso,* $\mathcal{V}$ *é um isomorfismo de* $(D(\mathcal{S}_\alpha), \| \cdot \|_{D(\mathcal{S}_\alpha)})$ *sobre* $(D(\mathcal{Q}_\alpha), \| \cdot \|_{D(\mathcal{Q}_\alpha)})$, *onde*

$$\| g \|_{D(\mathcal{Q}_\alpha)} = \| \mathcal{Q}_\alpha g \|_K . \tag{2.22}$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{V}_n : L^2_n \longrightarrow L^2(A_n, \mu)$ definido por $\mathcal{V}_n(f) = \sqrt{\phi_n} f$. Resulta da Observação 2.8 que $\mathcal{V}_n$ está bem definida. Além disso, $\mathcal{V}_n$ é um operador unitário de L^2_n sobre $L^2(A_n, \mu)$, pois

$$\begin{aligned}
(\mathcal{V}_n(f), \mathcal{V}_n(g))_{L^2(A_n,\mu)} &= \int_{A_n} \phi_n f g d\mu = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \phi_n f g d\mu \\
&= \int_{\lambda_0}^{+\infty} f g d(E_\lambda v_n, v_n) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f g d(E_\lambda v_n, v_n) = (f, g)_{L^2_n}.
\end{aligned}$$

Do Lema 2.0.2 concluímos que $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_n)$ é um operador unitário de $L = \bigoplus\limits_n L^2_n$ sobre $K = \bigoplus\limits_n L^2(A_n, \mu)$.

(i) $\mathcal{V}(D(\mathcal{S}_\alpha)) = D(\mathcal{Q}_\alpha)$**.**

Seja $f = (f_n) \in D(\mathcal{Q}_\alpha)$ e $g = \mathcal{V}^{-1}(f)$. Temos

$\mathsf{f} \in \mathsf{D}(\mathcal{Q}_\alpha) \Longleftrightarrow \lambda^\alpha \mathsf{f}_n \in \mathsf{L}^2(\mathsf{A}_n, \mu)$ e $\sum_n^{+\infty} \lambda^\alpha \mathsf{f}_n$ converge em $\mathsf{K} \Longleftrightarrow \lambda^\alpha g_n = \lambda^\alpha \phi_n^{-\frac{1}{2}} \mathsf{f}_n \in \mathsf{L}_n^2$ e $\sum_n^{+\infty} \lambda^\alpha g_n = \sum_n^{+\infty} \lambda^\alpha \phi_n^{-\frac{1}{2}} \mathsf{f}_n$ converge em L (Veja (2.20) e a Observação 2.8).

Isso prova (i).

(ii) $\mathcal{V}\mathcal{S}_\alpha \mathcal{V}^{-1}(\mathsf{f}) = \mathcal{Q}_\alpha(\mathsf{f}), \ \forall \ \mathsf{f} \in \mathsf{D}(\mathcal{Q}_\alpha)$.

Seja $\mathsf{f} = \sum_n^{+\infty} \mathsf{f}_n \in \mathsf{D}(\mathcal{Q}_\alpha)$. Então

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}\mathcal{S}_\alpha \mathcal{V}^{-1}(\mathsf{f}) = \mathcal{V}\mathcal{S}_\alpha\Big(\sum_n^{+\infty} \mathcal{V}_n^{-1}(\mathsf{f}_n)\Big) &= \mathcal{V}\Big(\sum_n^{+\infty} \lambda^\alpha \mathcal{V}_n^{-1}(\mathsf{f}_n)\Big) \\
&= \sum_n^{+\infty} \mathcal{V}_n(\lambda^\alpha \mathcal{V}_n^{-1}(\mathsf{f}_n)) \\
&= \sum_n^{+\infty} \sqrt{\phi_n} \lambda^\alpha \mathcal{V}_n^{-1}(\mathsf{f}_n) \\
&= \sum_n^{+\infty} \sqrt{\phi_n} \lambda^\alpha \phi_n^{-\frac{1}{2}} \mathsf{f}_n = \sum_n^{+\infty} \lambda^\alpha \mathsf{f}_n = \mathcal{Q}_\alpha(\mathsf{f}).
\end{aligned}
$$

Provemos agora que $\mathcal{V} : \mathsf{D}(\mathcal{S}_\alpha) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{Q}_\alpha)$ é uma bijeção linear. Dado $\mathsf{f} \in \mathsf{D}(\mathcal{S}_\alpha)$ temos

$$
\begin{aligned}
\| \mathcal{V}(\mathsf{f}) \|_{\mathsf{D}(\mathcal{Q}_\alpha)}^2 = \| \mathcal{Q}_\alpha(\mathcal{V}(\mathsf{f})) \|_{\mathsf{K}}^2 = \| \mathcal{Q}_\alpha\Big(\sum_n^{+\infty} \sqrt{\phi_n} \mathsf{f}_n\Big) \|_{\mathsf{K}}^2 & \\
= \| \sum_n^{+\infty} \lambda^\alpha \sqrt{\phi_n} \mathsf{f}_n \|_{\mathsf{K}}^2 & \\
= \sum_n^{+\infty} \| \lambda^\alpha \sqrt{\phi_n} \mathsf{f}_n \|_{\mathsf{L}^2(\mathsf{A}_n, \mu)}^2 & \\
= \sum_n^{+\infty} \| \lambda^\alpha \mathsf{f}_n \|_{\mathsf{L}_n^2}^2 = \| \mathsf{f} \|_{\mathsf{D}(\mathcal{S}_\alpha)}^2, &
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\| \mathcal{V}(\mathsf{f}) \|_{\mathsf{D}((\mathcal{Q}_\alpha)} = \| \mathsf{f} \|_{\mathsf{D}(\mathcal{S}_\alpha)}, \ \forall \ \mathsf{f} \in \mathsf{D}(\mathcal{S}_\alpha).
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\mathsf{L} = \bigoplus \mathsf{L}_n^2 & \overset{\mathcal{V}}{\longleftrightarrow} & \mathsf{K} = \bigoplus \mathsf{L}^2(\mathsf{A}_n, \mu) \\
{\scriptstyle \mathcal{S}_\alpha} \uparrow & & {\scriptstyle \mathcal{Q}_\alpha} \uparrow \\
\mathsf{D}(\mathcal{S}_\alpha) & \overset{\mathcal{V}}{\longleftrightarrow} & \mathsf{D}(\mathcal{Q}_\alpha).
\end{array}
$$

Além disso, $\mathcal{V}\mathcal{S}_\alpha \mathcal{V}^{-1} = \mathcal{Q}_\alpha$.

$\square$

3ª Etapa: Construção do Operador $\mathcal{U}$ & A Integral Hilbertiana $\mathcal{H}_0$.

Recordando a parte inicial deste capítulo observamos que para se definir uma integral hilbertiana necessitamos de uma medida ν positiva sobre $\mathbb{R}$ e um campo de espaços hilbertianos $\lambda \in \mathbb{R} \longmapsto H(\lambda)$ ν-mensurável. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ denotemos por $n(\lambda)$ o número de indices i para os quais $\lambda \in A_i = \{t \in \mathbb{R}; \phi_i(t) > 0\}$ e seja $B_m = \{\lambda \in \mathbb{R}; n(\lambda) = m\}$. Temos que $\lambda \longmapsto n(\lambda)$ e B_m são μ-mensuráveis, onde μ é a medida definida na etapa anterior, cf. (2.19).

Proposição 2.10. *Seja* F *um espaço de Hilbert com base ortonormal* $\{v_1, v_2, ...\}$ *e seja* $F_n = Span\{v_1, v_2, ..., v_n\}$. *O campo hilbertiano*

$$\lambda \longmapsto \mathcal{H}(\lambda) = \begin{cases} F_{n(\lambda)}, & se\ \lambda \notin B_0, \\ 0, & se\ \lambda \in B_0, \end{cases}$$

é μ*-mensurável.*

Demonstração. Seja

$$\mathcal{N} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow F; f \text{ é } \mu\text{-mensurável e } f(\lambda) \in \mathcal{H}(\lambda),\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Mostraremos que $\mathcal{N}$ satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) da Definição 2.1. De fato, se $f \in \mathcal{N}$ temos $\| f \|_{\mathcal{H}(\lambda)} = \| f \|_F$ e f μ-mensurável, donde $\lambda \longmapsto \| f \|_{\mathcal{H}(\lambda)}$ é μ-mensurável e, portanto, o item (i) é satisfeito. Para verificar (ii), seja $\lambda \longmapsto \phi(\lambda) \in \mathcal{H}(\lambda)$ um campo de vetores sobre R tal que

$$\lambda \longmapsto (f(\lambda), \phi(\lambda))_{\mathcal{H}(\lambda)} = (f(\lambda), \phi(\lambda))_F \tag{2.23}$$

é μ-mensurável, $\forall f \in \mathcal{N}$. Para provar que ϕ é μ-mensurável é suficiente provar que $\lambda \longmapsto (v, \phi(\lambda))_F$ é μ-mensurável, $\forall v \in F$. Seja então

$$v = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i v_i \in F$$

e

$$f_v(\lambda) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i v_i, & se\ \lambda \in B_n, \\ 0, & se\ \lambda \in B_0. \end{cases}$$

Temos que $f_v : \mathbb{R} \longmapsto F$ é μ-mensurável e se $\lambda \in B_n$ então $n(\lambda) = n$ e $\mathcal{H}(\lambda) = Span\{v_1, ..., v_n\}$, resultando $f_v(\lambda) \in \mathcal{H}(\lambda)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Logo, $f_v \in \mathcal{N}$ e para

$\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$(\nu, \phi(\lambda))_F = (f_\nu(\lambda), \phi(\lambda))_{\mathcal{H}(\lambda)},$$

donde por (2.23) resulta que $\lambda \longmapsto (\nu, \phi(\lambda))_F$ é μ-mensurável. Finalmente, consideremos a sequência $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida do seguinte modo: Se $\lambda \in B_0$, definimos $e_n(\lambda) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se $\lambda \notin B_0$, definimos $e_1(\lambda) = \nu_1$ e para $n \geqslant 2$

$$e_n(\lambda) = \begin{cases} 0, & se \;\; \lambda \in \cup_{j=1}^{n-1} B_j, \\ \nu_n, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Dado $\lambda \in \mathbb{R} - B_0$ temos $\lambda \in B_q$ para algum inteiro $q \geqslant 1$, e teremos

$$e_n(\lambda) = \nu_n,\ n \leqslant q, \text{ pois } \lambda \notin \cup_{j=1}^{n-1} B_j,\ n \leqslant q,$$

$$e_n(\lambda) = 0,\ n > q, \text{ pois } \lambda \in \cup_{j=1}^{n-1} B_j,\ n > q,$$

isto é, $(e_n(\lambda)) = (\nu_1,\ \nu_2,\ ...,\ \nu_q,\ 0,\ ....)$ é total em $\mathcal{H}(\lambda) = F_{n(\lambda)} = Span\{\nu_1,\ \nu_2,\ ...,\ \nu_q\}$. Isto mostra que vale o item (iii) e a proposição está demonstrada. □

A integral hilbertiana do campo $\lambda \longmapsto \mathcal{H}(\lambda)$ da proposição acima será denotada por $\mathcal{H}_0 = \int^{\oplus} \mathcal{H}(\lambda) d\mu(\lambda)$.

Definição 2.7. *O operador de multiplicação por λ^α em $\mathcal{H}_0$ é o operador $\mathcal{M}_\alpha$ definido por*

$$D(\mathcal{M}_\alpha) = \{\nu \in \mathcal{H}_0; \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} \parallel \nu(\lambda) \parallel^2_{\mathcal{H}(\lambda)} d\mu(\lambda) < \infty\} \tag{2.24}$$

$$\mathcal{M}_\alpha \nu(\lambda) = \lambda^\alpha \nu(\lambda),\ \lambda \in (\lambda_0, +\infty),\ \nu \in D(\mathcal{M}_\alpha). \tag{2.25}$$

Observe que $D(\mathcal{M}_\alpha) = \mathcal{H}_\alpha$, onde os espaços (de Hilbert) $\mathcal{H}_\alpha$ sãos os espaços definidos no inicio deste capítulo, os quais são normados com norma

$$\parallel \nu \parallel^2_{\mathcal{H}_\alpha} = \int_{+\infty}^{\lambda_0} \lambda^{2\alpha} \parallel \nu(\lambda) \parallel^2_{\mathcal{H}(\lambda)} d\mu(\lambda),\ \nu \in D(\mathcal{M}_\alpha) = \mathcal{H}_\alpha.$$

Teorema 2.4. *Existe um operador unitário $\mathcal{W}$ de K sobre $\mathcal{H}_0$ tal que a imagem do operador $\mathcal{Q}_\alpha$ por $\mathcal{W}$ é o operador $\mathcal{M}_\alpha$ da definição 2.7. Além disso, $\mathcal{W}$ é um isomorfismo de $(D(\mathcal{Q}_\alpha), \parallel \cdot \parallel_{D(\mathcal{Q}_\alpha)})$ sobre $\mathcal{H}_\alpha$.*

Demonstração. Segue de modo análogo à prova dos Teoremas 2.2 e 2.3. □

Segue das três etapas acima a prova do Teorema de Diagonalização com $\nu = \mu$, onde μ é a medida definida em (2.19), $\mathcal{H}_0$ como na Proposição 2.10 e $\mathcal{U} = \mathcal{W} \circ \mathcal{V} \circ \mathcal{U}$. □

Observação 2.9. *Resulta do Teorema 2.1 que para todo* $u \in D(A)$ *tem-se*

$$\mathcal{U}(Au) = \lambda \mathcal{U}(u).$$

Observação 2.10. *Sendo* $\mathcal{U}$ *unitário segue que o mesmo é um operador limitado de* H.

Como uma primeira aplicação do Teorema 2.1 provaremos a seguinte cadeia de imersões densas:

$$D(A^\alpha) \hookrightarrow D(A^\beta) \hookrightarrow H \hookrightarrow D(A^\beta)' \hookrightarrow D(A^\alpha)', \tag{2.26}$$

onde $\alpha \geqslant \beta \geqslant 0$. **De fato, dado** $u \in D(A^\alpha)$ **e recordando que** $E_\lambda = 0$ **para** $\lambda < \lambda_0$ **temos**

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u, u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2\alpha - 2\beta} \lambda^{\beta} d(E_\lambda u, u) = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2(\alpha-\beta)} \lambda^{\beta} d(E_\lambda u, u) \\
&\leqslant \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda_0^{2(\alpha-\beta)} \lambda^{\beta} d(E_\lambda u, u) \\
&= \lambda_0^{2(\alpha-\beta)} \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\beta} d(E_\lambda u, u) \\
&= \lambda_0^{2(\alpha-\beta)} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2\beta} d(E_\lambda u, u),
\end{aligned}$$

donde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2\beta} d(E_\lambda u, u) \leqslant \lambda_0^{2(\beta-\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u, u) < \infty.$$

Logo, $u \in D(A^\beta)$, **donde** $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$. **Além disso,**

$$\begin{aligned}
\| u \|^2_{D(A^\beta)} = \| A^\beta u \|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2\beta} d(E_\lambda u, u) \\
&\leqslant \lambda_0^{2(\beta-\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u, u) \\
&= \lambda_0^{2(\beta-\alpha)} \| A^\alpha u \|^2 \\
&= \lambda_0^{2(\beta-\alpha)} \| u \|^2_{D(A^\alpha)},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\| u \|_{D(A^\beta)} \leqslant \lambda_0^{\beta-\alpha} \| u \|_{D(A^\alpha)}, \ \forall\, u \in D(A^\alpha). \tag{2.27}$$

Portanto, $D(A^\alpha) \hookrightarrow D(A^\beta)$, $\alpha \geqslant \beta$. **Quanto a densidade recorde que** $\mathcal{H}_\alpha \hookrightarrow \mathcal{H}_\beta$, **com imersão densa, se** $\alpha \geqslant \beta$. **Além disso, pelo Teorema 2.1** $D(A^\alpha)$ **e** $\mathcal{H}_\alpha$ **são isometricamente isomorfos, o mesmo valendo para** $D(A^\beta)$ **e** $\mathcal{H}_\beta$. **Assim, a densidade de** $\mathcal{H}_\alpha$ **em** $\mathcal{H}_\beta$ **acarreta a densidade** $D(A^\alpha)$ **em** $D(A^\beta)$. **Portanto**

$D(A^\alpha) \hookrightarrow D(A^\beta)$ com imersão densa. Ainda pelo Teorema 2.1 temos que $D(A^\alpha)$ e $D(A^\beta)$ são espaços de Hilbert, pois $\mathcal{H}_\alpha$ e $\mathcal{H}_\beta$ o são. Logo, por (1.4), temos $D(A^\beta)' \hookrightarrow D(A^\alpha)'$. Provemos agora que $D(A^\beta) \hookrightarrow H$, donde seguirá, identificando H com H', que $H \hookrightarrow D(A^\beta)'$. Já temos a inclusão e a densidade de $D(A^\beta)$ em H, pois A^β é auto-adjunto, cf. Apêndice. Considerando (1.3) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos para cada $u \in D(A^\beta)$ que

$$\| u \|^2 \leqslant \frac{1}{c^\beta}(A^\beta u, u) \leqslant \frac{1}{c^\beta} \| A^\beta u \| \| u \| = \frac{1}{c^\beta} \| u \|_{D(A^\beta)} \| u \|$$
$$\Longrightarrow \| u \| \leqslant \frac{1}{c^\beta} \| u \|_{D(A^\beta)} .$$

Portanto

$$\| u \| \leqslant \frac{1}{c^\beta} \| u \|_{D(A^\beta)}, \ \forall\, u \in D(A^\beta).$$

Logo para $\alpha \geqslant \beta \geqslant 0$ é válida a cadeia de imersões (2.26), onde cada imersão é densa. Além disso, sendo $\mathcal{U}$ um isomorfismo (isométrico) de $D(A^\beta)$ sobre $\mathcal{H}_\beta, \beta \geqslant 0$, temos $\mathcal{H}_\beta \hookrightarrow \mathcal{H}_0$ com imersão densa. Assim, em vista das Proposições 2.2 e 2.5, temos

$$\begin{tikzcd}
D(A^\alpha) \arrow[r, hook] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathcal{U}"'] & D(A^\beta) \arrow[r, hook] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathcal{U}"'] & H \arrow[r, hook] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathcal{U}"'] & D(A^\beta)' \arrow[r, hook] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathcal{U}"'] & D(A^\alpha)' \arrow[d, leftrightarrow, "\mathcal{U}"'] \\
\mathcal{H}_\alpha \arrow[r, hook] & \mathcal{H}_\beta \arrow[r, hook] & \mathcal{H}_0 \arrow[r, hook] & \mathcal{H}_{-\beta} \arrow[r, hook] & \mathcal{H}_{-\alpha}.
\end{tikzcd}$$

Observação 2.11. *Note que a cadeia de imersões contínuas e densas (2.26) foi obtida supondo que o espaço de Hilbert* $D(A^\alpha)$ *estava munido da norma definida em (2.13). No entanto, por (2.17) temos que tal cadeia ainda é válida se* $D(A^\alpha)$ *estiver equipado com a norma do gráfico.*

A dualidade entre $\mathcal{H}_{-\alpha}$ e $\mathcal{H}_\alpha$ será denotada simplesmente por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-\alpha,\alpha}$. Em [30] prova-se que se $v \in \mathcal{H}_\beta$ então $\lambda^{\alpha+\beta} v \in \mathcal{H}_{-\alpha}$ e vale a fórmula

$$\langle \lambda^{\alpha+\beta} v, u \rangle_{-\alpha,\alpha} = (\lambda^\beta v, \lambda^\alpha u)_0, \ \forall\, u \in \mathcal{H}_\alpha.$$

Daí segue o seguinte resultado:

Proposição 2.11. *Se* $w \in L^2(0,T;\mathcal{H}_{3/4})$ *e* $w' \in L^2(0,T;\mathcal{H}_{1/4})$ *então a aplicação* $t \longmapsto \| w(t) \|^2_{1/2}$ *é absolutamente contínua em* $[0,T]$ *e*

$$\frac{d}{dt} \| w(t) \|^2_{1/2} = 2\langle \lambda w(t), w'(t) \rangle_{-1/4,1/4} = 2(\lambda^{3/4} w(t), \lambda^{1/4} w'(t))_0.$$

Demonstração. Ver [30]. □

Capítulo 3

Existência e Unicidade de Solução Fraca

Neste capítulo estudamos a existência e unicidade de solução fraca local (em t) do seguinte problema:

$$
(\mathrm{P}.1) \qquad \left|\begin{array}{l}
u'' + Au + M(\cdot, \| A^{1/2}u \|^2)Au + \theta = f, \\
\theta' + A\theta + u' = g, \\
u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1, \\
\theta(0) = \theta_0,
\end{array}\right.
$$

onde A **é um operador auto-adjunto não-limitado de um espaço de Hilbert separável** H **tal que**

$$(Au, u) \geqslant 0, \ \forall \ u \in D(A), \tag{3.1}$$

M é uma função real definida em $[0, T] \times [0, +\infty)$**, com** $T > 0$ **fixo, de modo que**

$$M \in C^1([0, T] \times [0, +\infty)), \tag{3.2}$$

$$M(t, \lambda) \geqslant 0, \forall \ (t, \lambda) \in [0, T] \times [0, +\infty), \tag{3.3}$$

$$\left|\frac{\partial M}{\partial t}\right| \leqslant K(1 + M), \lambda \in [0, +\infty), \tag{3.4}$$

onde K **é uma constante positiva. Representa-se por** $A^{1/2}$ **a raiz quadrada do operador** A**, cf. Seção 1.3, e** $\| A^{1/2}u \|$ **está denotando a norma em** H **de** $A^{1/2}u$**.**

Enunciamos a seguir o principal resultado desta dissertação.

Teorema 3.1. *Nas condições acima e supondo*

$$\{u_0, u_1, \theta_0\} \in D(A^{3/4}) \times D(A^{1/4}) \times D(A^{1/2}), \tag{3.5}$$

$$\{f, g\} \in \left[L^2(0, T; D(A^{1/4}))\right]^2, \tag{3.6}$$

existem $0 < T_0 \leqslant T$ *e funções vetoriais* $u, \theta : [0, T_0] \longrightarrow H$ *satisfazendo:*

$$u \in L^\infty(0, T_0; D(A^{3/4})), \tag{3.7}$$

$$u' \in L^\infty(0, T_0; D(A^{1/4})), \tag{3.8}$$

$$\theta \in L^2(0, T_0; D(A^{1/2})), \tag{3.9}$$

$$\frac{d}{dt}(u'(t), z) + (A^{3/4}u(t), A^{1/4}z) + M(t, \| A^{1/2}u(t) \|^2)(A^{3/4}u(t), A^{1/4}z)$$
$$+ (\theta(t), z) = (f(t), z), \ \forall z \in D(A^{1/4}), \tag{3.10}$$

no sentido de $L^2(0, T_0)$,

$$\frac{d}{dt}(\theta(t), z) + (A^{1/2}\theta(t), A^{1/2}z) + (u'(t), z) = (g(t), z), \ \forall z \in D(A^{1/2}), \tag{3.11}$$

no sentido de $L^2(0, T_0)$,

$$u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1 \text{ e } \theta(0) = \theta_0. \tag{3.12}$$

O par de funções vetoriais $\{u, \theta\}$ do teorema acima é denominado solução fraca do problema (P.1).

Para demonstrar o teorema acima seguiremos o seguinte roteiro. Mantendo-se as hipóteses (3.1)-(3.4), consideramos para cada $\epsilon > 0$ o problema perturbado:

$$(P.2) \quad \left| \begin{array}{l} u''_\epsilon + A_\epsilon u_\epsilon + M(\cdot, \| A_\epsilon^{1/2} u_\epsilon \|^2) A_\epsilon u_\epsilon + \theta_\epsilon = f, \\ \theta'_\epsilon + A_\epsilon \theta_\epsilon + u'_\epsilon = g, \\ u_\epsilon(0) = u_0, \ u'_\epsilon(0) = u_1, \\ \theta_\epsilon(0) = \theta_0, \end{array} \right.$$

onde $A_\epsilon = A + \epsilon I$, com I sendo o operador identidade de H. Observamos na Seção 1.3 que A_ϵ está nas condições do Teorema de Diagonalização, cf. Capítulo 2. Assim, para cada $\epsilon > 0$, existe uma medida positiva μ_ϵ com

$\mathrm{supp}(\mu_\epsilon) \subset (\lambda_\epsilon, +\infty)$, $0 < \lambda_\epsilon < \epsilon$, **uma Integral Hilbertiana** $\mathcal{H}_{0,\epsilon} = \int^{\oplus} \mathcal{H}(\lambda) d\mu_\epsilon(\lambda)$ **e um operador unitário** $\mathcal{U}_\epsilon : H \longrightarrow \mathcal{H}_{0,\epsilon}$ **tal que:**

$$\mathcal{U}_\epsilon(A_\epsilon^\alpha w) = \lambda^\alpha \mathcal{U}_\epsilon(w), \ \forall w \in D(A_\epsilon^\alpha) = D(A^\alpha), \alpha \geqslant 0, \tag{3.13}$$

$$\mathcal{U}_\epsilon \text{ é um isomorfismo de } D(A_\epsilon^\alpha) \text{ sobre } \mathcal{H}_{\alpha,\epsilon}, \tag{3.14}$$

onde $D(A_\epsilon^\alpha)$ **e** $D(A^\alpha)$ **estão equipados com a norma do gráfico.**

Observação 3.1. *Por simplicidade o espaço* $\mathcal{H}_{\alpha,\epsilon}$, $\alpha \geqslant 0$, *será denotado por* $\mathcal{H}_\alpha$ *e sua norma por* $\| \cdot \|_\alpha$ *em vez de* $\| \cdot \|_{\alpha,\epsilon}$. *No entanto, lembramos que* $\| \cdot \|_\alpha$ *depende de* ϵ.

Garantida a existência do operador $\mathcal{U}_\epsilon$**, temos formalmente em vista de (3.13) e do fato de** $\mathcal{U}_\epsilon$ **ser limitado, que**

$$\mathcal{U}_\epsilon\big(u_\epsilon'' + A_\epsilon u_\epsilon + M(\cdot, \| A_\epsilon^{1/2} u_\epsilon \|^2) A_\epsilon u_\epsilon + \theta_\epsilon\big) = \mathcal{U}_\epsilon(f)$$

$$\Longleftrightarrow v_\epsilon'' + \lambda v_\epsilon + M(\cdot, \| v_\epsilon(\cdot) \|_{1/2}^2) \lambda v_\epsilon + \phi_\epsilon = \mathcal{U}_\epsilon(f)$$

e

$$\mathcal{U}_\epsilon\big(\theta_\epsilon' + A_\epsilon \theta_\epsilon + u_\epsilon'\big) = \mathcal{U}_\epsilon(g) \Longleftrightarrow \phi_\epsilon' + \lambda \phi_\epsilon + v_\epsilon' = \mathcal{U}_\epsilon(g),$$

sendo $v_\epsilon = \mathcal{U}_\epsilon(u_\epsilon)$ **e** $\phi_\epsilon = \mathcal{U}_\epsilon(\theta_\epsilon)$**. Assim pondo** $v_{0\epsilon} = \mathcal{U}_\epsilon(u_0)$, $v_{1\epsilon} = \mathcal{U}_\epsilon(u_1)$, $\phi_{0\epsilon} = \mathcal{U}_\epsilon(\theta_0)$, $f_\epsilon = \mathcal{U}_\epsilon(f)$ **e** $g_\epsilon = \mathcal{U}_\epsilon(g)$**, obtemos de (P.2) o seguinte problema**

$$(\mathrm{P.3}) \qquad \left| \begin{array}{l} v_\epsilon'' + \lambda v_\epsilon + M(\cdot, \| v_\epsilon(\cdot) \|_{1/2}^2) \lambda v_\epsilon + \phi_\epsilon = f_\epsilon, \\ \phi_\epsilon' + \lambda \phi_\epsilon + v_\epsilon' = g_\epsilon, \\ v_\epsilon(0) = v_{0\epsilon}, \ v_\epsilon'(0) = v_{1\epsilon}, \\ \phi_\epsilon(0) = \phi_{0\epsilon}, \end{array} \right.$$

Observação 3.2. *A necessidade de pertubar o problema (P.1) provém da hipótese de* A *ser positivo, pois com esta condição pode ocorrer do mesmo degenerar, isto é,* A *ser nulo, donde não poderíamos aplicar o Teorema de Diagonalização.*

O problema (P.3) será estudado no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{0,k}$ **dos campos truncados. Mostraremos via Teorema do Ponto Fixo de Banach que para cada** $k \in \mathbb{N}$ **o problema truncado associado a (P.3) possui solução,** $\{v_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k}\}$**, e mediante estimativas válidas para todo** $t \in [0, T_0]$**, independentes de** k **e** ϵ**, tomamos o limite com** $k \to +\infty$ **obtendo o seguinte teorema:**

Teorema 3.2. *Nas mesmas condições do Teorema 3.1 existem* $0 < T_0 \leqslant T$ *e funções vetoriais* $\nu_\epsilon, \phi_\epsilon : [0, T_0] \longrightarrow \mathcal{H}_0$ *tais que para cada* $t \in [0, T_0]$

$$\nu_\epsilon \in L^\infty(0, T_0; \mathcal{H}_{3/4}), \tag{3.15}$$

$$\nu_\epsilon^{'} \in L^\infty(0, T_0; \mathcal{H}_{1/4}), \tag{3.16}$$

$$\phi_\epsilon \in L^2(0, T_0; \mathcal{H}_{1/2}), \tag{3.17}$$

$$\frac{d}{dt}(\nu_\epsilon^{'}(t), \xi)_0 + (\lambda^{3/4}\nu_\epsilon(t), \lambda^{1/4}\xi)_0 + M(t, \| \nu_\epsilon(t) \|_{1/2}^2)(\lambda^{3/4}\nu_\epsilon(t), \lambda^{1/4}\xi)_0$$
$$+(\phi_\epsilon(t), \xi)_0 = (f_\epsilon(t), \xi)_0, \ \forall \xi \in \mathcal{H}_{1/4}, \tag{3.18}$$

no sentido de $\mathcal{D}^{'}(0, T_0)$,

$$\frac{d}{dt}(\phi_\epsilon(t), \xi)_0 + (\lambda^{1/2}\phi_\epsilon(t), \lambda^{1/2}\xi)_0 + (\nu_\epsilon^{'}(t), z)_0 = (g_\epsilon(t), \xi)_0, \ \forall \xi \in \mathcal{H}_{1/2}, \tag{3.19}$$

no sentido de $\mathcal{D}^{'}(0, T_0)$,

$$\nu_\epsilon(0) = \nu_{0\epsilon}, \ \nu_\epsilon^{'}(0) = \nu_{1\epsilon}, \phi_\epsilon(0) = \phi_{0\epsilon}. \tag{3.20}$$

Resolvido o problema (P.3) temos o seguinte Corolário do Teorema 3.2:

Corolário 4. *As funções vetoriais* $u_\epsilon, \theta_\epsilon : [0, T_0] \longrightarrow H$ *definidas por* $u_\epsilon = \mathcal{U}_\epsilon^{-1}(\nu_\epsilon)$ *e* $\theta_\epsilon = \mathcal{U}_\epsilon^{-1}(\phi_\epsilon)$ *satisfazem:*

$$u_\epsilon \in L^\infty(0, T_0; D(A^{3/4})), \tag{3.21}$$

$$u_\epsilon^{'} \in L^\infty(0, T_0; D(A^{1/4})), \tag{3.22}$$

$$\theta_\epsilon \in L^2(0, T_0; D(A^{1/2})), \tag{3.23}$$

$$\frac{d}{dt}(u_\epsilon^{'}(t), z) + (A_\epsilon^{3/4}u_\epsilon(t), A_\epsilon^{1/4}z) + M(t, \| A_\epsilon^{1/2}u_\epsilon(t) \|^2)(A_\epsilon^{3/4}u_\epsilon(t), A_\epsilon^{1/4}z)$$
$$+(\theta_\epsilon(t), z) = (f(t), z), \ \forall z \in D(A^{1/4}), \tag{3.24}$$

no sentido de $L^2(0, T_0)$,

$$\frac{d}{dt}(\theta_\epsilon(t), z) + (A_\epsilon^{1/2}\theta_\epsilon(t), A_\epsilon^{1/2}z) + (u_\epsilon^{'}(t), z) = (g(t), z), \ \forall z \in D(A^{1/2}), \tag{3.25}$$

no sentido de $L^2(0, T_0)$,

$$u_\epsilon(0) = u_0, \ u_\epsilon^{'}(0) = u_1, \theta_\epsilon(0) = \theta_0. \tag{3.26}$$

Ou seja, o par $\{u_\epsilon, \theta_\epsilon\}$ é uma solução fraca (local) do problema (P.2). Finalmente, por passagem ao limite em (P.2), numa topologia apropriada, com $\epsilon \to 0^+$ provamos o Teorema 3.1. A seguir provaremos o Corolário 4.

Demonstração. Inicialmente fixemos de uma vez por todas a norma do gráfico em $D(A^\alpha)$, $\alpha \geqslant 0$. Como $\mathcal{U}_\epsilon$ é um isomorfismo de $D(A_\epsilon^\alpha)$ sobre $\mathcal{H}_\alpha, \alpha \geqslant 0$, temos de (3.15) e de (3.17) que $u_\epsilon(t) \in D(A_\epsilon^{3/4}) = D(A^{3/4})$ e $\theta_\epsilon(t) \in D(A_\epsilon^{1/2}) = D(A^{1/2})$, $\forall\ t \in [0, T_0]$. Para provar que $\sup\limits_{t\in[0,T_0]} ess \parallel u_\epsilon(t) \parallel_{D(A^{3/4})} < \infty$ e $\sup\limits_{t\in[0,T_0]} ess \parallel \theta_\epsilon(t) \parallel_{D(A^{1/2})} < \infty$, note que dados $w, \tilde{w} \in D(A^\alpha)$ vale:

$$(\lambda^\alpha \mathcal{U}_\epsilon(w), \lambda^\alpha \mathcal{U}_\epsilon(\tilde{w}))_0 = (\mathcal{U}_\epsilon(A_\epsilon^\alpha w), \mathcal{U}_\epsilon(A_\epsilon^\alpha \tilde{w}))_0 = (A_\epsilon^\alpha w, A_\epsilon^\alpha \tilde{w}),$$

isto é,

$$(\lambda^\alpha \mathcal{U}_\epsilon(w), \lambda^\alpha \mathcal{U}_\epsilon(\tilde{w}))_0 = (A_\epsilon^\alpha w, A_\epsilon^\alpha \tilde{w}),\ \forall\ w, \tilde{w} \in D(A^\alpha), \alpha \geqslant 0. \tag{3.27}$$

Em particular,

$$\parallel \mathcal{U}_\epsilon(w) \parallel_\alpha^2 = \parallel A_\epsilon^\alpha w \parallel^2,\ \forall w \in D(A^\alpha). \tag{3.28}$$

Em (3.28) fazendo $\alpha = 0$ e $w = u_\epsilon(t)$, temos

$$\parallel u_\epsilon(t) \parallel^2 = \parallel v_\epsilon(t) \parallel_0^2 . \tag{3.29}$$

Por outro lado, fazendo $\alpha = 3/4$ e $w = u_\epsilon(t)$ em (3.28) obtemos

$$\parallel A_\epsilon^{3/4} u_\epsilon(t) \parallel^2 = \parallel v_\epsilon(t) \parallel_{3/4}^2 . \tag{3.30}$$

Logo de (3.29) e (3.30) temos

$$\begin{aligned}\parallel u_\epsilon(t) \parallel_{D(A^{3/4})} &= \parallel u_\epsilon(t) \parallel^2 + \parallel A_\epsilon^{3/4} u_\epsilon(t) \parallel^2 \\ &= \parallel v_\epsilon(t) \parallel_0^2 + \parallel v_\epsilon(t) \parallel_{3/4}^2 \\ &\leqslant K \parallel v_\epsilon(t) \parallel_{3/4}^2,\end{aligned}$$

pois $\mathcal{H}_{3/4} \hookrightarrow \mathcal{H}_0$. Portanto,

$$\parallel u_\epsilon(t) \parallel_{D(A^{3/4})} \leqslant K \parallel v_\epsilon(t) \parallel_{3/4}$$

$$\Longrightarrow \sup_{0\leqslant t\leqslant T} ess \parallel u_\epsilon(t) \parallel_{D(A^{3/4})} \leqslant K \sup_{0\leqslant t\leqslant T} ess \parallel v_\epsilon(t) \parallel_{3/4} < \infty.$$

Segue que $u_\epsilon \in L^\infty(0, T; D(A^{3/4}))$. Analogamente $\theta_\epsilon \in L^2(0, T_0; D(A^{1/2}))$, logo vale (3.21) e (3.23). Para provar (3.22) notemos que sendo $\mathcal{U}_\epsilon$ linear e limitado vale:

$$\left[\mathcal{U}_\epsilon(u_\epsilon(t))\right]' = \mathcal{U}_\epsilon(u_\epsilon'(t)),\ \forall\ t \in [0, T_0], \tag{3.31}$$

veja observação logo após esta demonstração. Daí, $v_\epsilon'(t) = \mathcal{U}_\epsilon(u_\epsilon(t))' = \mathcal{U}_\epsilon(u_\epsilon'(t))$, donde $u_\epsilon'(t) = \mathcal{U}_\epsilon^{-1}(v_\epsilon'(t))$, $\forall\ t \in [0, T_0]$. Logo, por (3.16) temos $u_\epsilon'(t) \in D(A^{1/4})$, $\forall\ t \in [0, T_0]$. Agora usando (3.28) e procedendo como acima temos (3.22). As relações em (3.26) seguem imediatamente de (3.20), (3.31) e da definição de u_ϵ e θ_ϵ. Provaremos a seguir apenas (3.24) sendo a verificação de (3.25) análoga. Sejam $\Phi \in \mathcal{D}'(0, T_0)$, $z \in D(A^{1/4})$ e $\xi = \mathcal{U}_\epsilon(z) \in \mathcal{H}_{1/4}$. De (3.18) e do fato de $\mathcal{U}_\epsilon$ ser unitário de H sobre $\mathcal{H}_0$ deduzimos

$$\begin{aligned}
\int_0^{T_0} (f(t), z)\Phi dt &= \int_0^{T_0} (\mathcal{U}_\epsilon(f(t)), \mathcal{U}_\epsilon(z))_0 \Phi dt \\
&= \int_0^{T_0} (f_\epsilon(t), \xi)_0 \Phi dt \\
&= \int_0^{T_0} \frac{d}{dt}(v_\epsilon'(t), \xi)_0 \Phi dt + \int_0^{T_0} (\lambda^{3/4} v_\epsilon(t), \lambda^{1/4}\xi)_0 \Phi dt \\
&+ \int_0^{T_0} M(t, \| v_\epsilon(t) \|_{1/2}^2)(\lambda^{3/4} v_\epsilon(t), \lambda^{1/4}\xi)_0 \Phi dt + \int_0^{T_0} (\phi_\epsilon(t), \xi)\Phi dt.
\end{aligned}$$

Analisaremos em separado as integrais no segundo membro da ultima igualdade.

1. $$\int_0^{T_0} \frac{d}{dt}(v_\epsilon'(t), \xi)_0 \Phi dt = \int_0^{T_0} \frac{d}{dt}(\mathcal{U}_\epsilon(u_\epsilon'(t)), \mathcal{U}_\epsilon(z))_0 \Phi dt = \int_0^{T_0} \frac{d}{dt}(u_\epsilon'(t), z)\Phi dt.$$

   Portanto

   $$\int_0^{T_0} \frac{d}{dt}(v_\epsilon'(t), \xi)_0 \Phi dt = \int_0^{T_0} \frac{d}{dt}(u_\epsilon'(t), z)\Phi dt,\ \forall\ \Phi \in \mathcal{D}'(0, T_0).$$

2. $$\begin{aligned}
\int_0^{T_0} (\lambda^{3/4} v_\epsilon(t), \lambda^{1/4}\xi)_0 \Phi dt &= \int_0^{T_0} (\lambda^{1/4}\lambda^{1/2} v_\epsilon(t), \lambda^{1/4}\xi)_0 \Phi dt \\
&= \int_0^{T_0} (\lambda^{1/4}\lambda^{1/2}\mathcal{U}_\epsilon(u_\epsilon(t)), \lambda^{1/4}\mathcal{U}_\epsilon(z))_0 \Phi dt \\
&= \int_0^{T_0} (\lambda^{1/4}\mathcal{U}_\epsilon(A_\epsilon^{1/2} u_\epsilon(t)), \lambda^{1/4}\mathcal{U}_\epsilon(z))_0 \Phi dt \\
&= \int_0^{T_0} (A_\epsilon^{1/4}(A_\epsilon^{1/2} u_\epsilon(t)), A_\epsilon^{1/4} z)\Phi dt \\
&= \int_0^{T_0} (A_\epsilon^{3/4} u_\epsilon(t), A_\epsilon^{1/4}(z))\Phi dt.
\end{aligned}$$

Observação 3.3. *Da cadeia de imersões em (2.26) segue que* $D(A^{3/4}) \hookrightarrow D(A^{1/2})$, *donde* $D(A^{3/4}) \subset D(A^{1/2})$. *Como* $u_\epsilon(t) \in D(A^{3/4})$ *temos que* $A_\epsilon^{1/2} u_\epsilon(t)$ *faz sentido. Além disso,* $\mathcal{U}_\epsilon(A_\epsilon^{1/2} u_\epsilon(t)) = \lambda^{1/2}\mathcal{U}_\epsilon(u_\epsilon(t)) \in \mathcal{H}_{1/4}$, *donde* $A_\epsilon^{1/2} u_\epsilon(t) \in D(A^{1/4})$. *Assim podemos de fato usar (3.27).*

3. De (3.28) com $w = u_\epsilon(t) = \mathcal{U}_\epsilon^{-1}(v_\epsilon(t)) \in D(A^{3/4})$, temos

$$\| v_\epsilon(t) \|_{1/2}^2 = \| A_\epsilon^{1/2} u_\epsilon(t) \|^2, \ \forall\ t \in [0, T_0]. \tag{3.32}$$

Logo, pelo item 2 temos

$$\int_0^{T_0} M(t, \| v_\epsilon(t) \|_{1/2}^2)(\lambda^{3/4} v_\epsilon(t), \lambda^{1/4}\xi)_0 \Phi dt$$
$$= \int_0^{T_0} M(t, \| A_\epsilon^{1/2} u_\epsilon(t) \|^2)(A_\epsilon^{3/4} u_\epsilon(t), A_\epsilon^{1/4} z)\Phi dt, \ \forall\ \Phi \in \mathcal{D}'(0, T_0).$$

4. Sendo $\mathcal{U}_\epsilon$ unitário temos

$$\int_0^{T_0} (\phi_\epsilon(t), \xi)_0 \Phi dt = \int_0^{T_0} (\theta_\epsilon(t), z)\Phi dt, \ \forall\ \Phi \in \mathcal{D}'(0, T_0).$$

Assim dos itens 1-4 temos

$$\int_0^{T_0} \left[\frac{d}{dt}(u_\epsilon'(t), z) + (A_\epsilon^{3/4} u_\epsilon(t), A_\epsilon^{1/4}(z)) \right. \tag{3.33}$$
$$\left. + M(t, \| A_\epsilon^{1/2} u_\epsilon(t) \|^2)(A_\epsilon^{3/4} u_\epsilon(t), A_\epsilon^{1/4} z) + (\theta_\epsilon(t), z) \right] \Phi dt =$$
$$= \int_0^{T_0} (f(t), z)\Phi dt, \ \forall\ \Phi \in \mathcal{D}'(0, T_0).$$

Como $L^2(0, T_0) \subset \mathcal{D}'(0, T_0)$, temos que (3.33) é válido para todo $\Phi \in L^2(0, T_0)$. Logo vale (3.24). □

Observação 3.4. *A seguir temos uma demonstração da igualdade (3.31). Com efeito, sendo* $\mathcal{U}_\epsilon(u_\epsilon(t)) = v_\epsilon(t) \in L^\infty(0, T_0; \mathcal{H}_{3/4}) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0, T_0; \mathcal{H}_{3/4})$, *temos para cada* $\varphi \in \mathcal{D}(0, T_0)$ *que:*

$$\begin{aligned}
\left[\mathcal{U}_\epsilon(u_\epsilon(t))\right]'(\varphi) &= -\int_0^{T_0} \mathcal{U}_\epsilon(u_\epsilon(t))(s)\varphi'(s) ds \\
&= -\int_0^{T_0} \mathcal{U}_\epsilon(u_\epsilon(t)(s)\varphi'(s)) ds \\
&= \mathcal{U}_\epsilon\left(-\int_0^{T_0} u_\epsilon(t)(s)\varphi'(s) ds \right) \\
&= \mathcal{U}_\epsilon(u_\epsilon'(t)(\varphi)) \\
&= \mathcal{U}_\epsilon(u_\epsilon'(t))(\varphi).
\end{aligned}$$

Logo $\left[\mathcal{U}_\epsilon(u_\epsilon(t))\right]'(\varphi) = \mathcal{U}_\epsilon(u_\epsilon'(t))(\varphi), \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(0, T_0)$. *Portanto vale (3.31).*

Na seção seguinte demonstraremos a existência de solução para o problema truncado associado a (P.3).

3.1 Problema Truncado

O problema truncado associado ao sistema (P.3) consiste em encontrar campos

$v_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k} : [0, \tau] \longrightarrow \mathcal{H}_{0,k}, 0 \leqslant \tau \leqslant T$, **tais que**

$$\{v_{\epsilon k},\ v'_{\epsilon k},\ \phi_{\epsilon k}\} \in \left(L^{\infty}(0, \tau; \mathcal{H}_{0,k})\right)^3, \tag{3.34}$$

$$\{v''_{\epsilon k},\ \phi'_{\epsilon k}\} \in \left(L^{2}(0, \tau; \mathcal{H}_{0,k})\right)^2, \tag{3.35}$$

$$v''_{\epsilon k} + \lambda v_{\epsilon k} + M(\cdot, \| v_{\epsilon k} \|^2_{1/2})\lambda v_{\epsilon k} + \phi_{\epsilon k} = f_{\epsilon k}, \tag{3.36}$$

$$\phi'_{\epsilon k} + \lambda \phi_{\epsilon k} + v'_{\epsilon k} = g_{\epsilon k}, \tag{3.37}$$

$$v_{\epsilon k}(0) = v_{0\epsilon k},\ v'_{\epsilon k}(0) = v_{1\epsilon k},\ \phi_{\epsilon k}(0) = \phi_{0\epsilon k}, \tag{3.38}$$

onde $v_{0\epsilon k},\ v_{1\epsilon k},\ \phi_{0\epsilon k},\ f_{\epsilon k}$ **e** $g_{\epsilon k}$ **são os campos truncados associados à** $v_{0\epsilon},\ v_{1\epsilon},\ \phi_{0\epsilon}$, f_{ϵ} **e** g_{ϵ}, **respectivamente, cf. Capítulo 2.**

Observação 3.5. *Em vista do Teorema 1.11, segue de (3.34) que* $v_{\epsilon k} \in C^0([0, \tau]; \mathcal{H}_{0,k})$. *Agora como pelo Teorema 1.11 temos* $L^{\infty}(0, \tau; \mathcal{H}_{0,k}) \hookrightarrow L^2(0, \tau; \mathcal{H}_{0,k})$, *segue de (3.34) e (3.35), via Teorema 1.11, que* $v'_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k} \in C^0([0, \tau]; \mathcal{H}_{0,k})$. *Assim podemos calcular* $v_{\epsilon k}(t),\ v'_{\epsilon k}(t)$ *e* $\phi_{\epsilon k}(t)$ *no ponto* $t = 0$ *e as relações em (3.38) fazem sentido.*

A solução do problema truncado (3.34)-(3.38) será obtida como um ponto fixo de um operador S_k **conveniente. Para definir tal operador faz-se necessário mais algumas notações.**

Representemos por X_k **o espaço** $L^{\infty}(0, \tau; \mathcal{H}_{0,k})$ **equipado com a norma**

$$|v_{\epsilon k}|_{X_k} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant \tau} \text{ess} \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2},$$

e por Y_k **o espaço** $L^{\infty}(0, \tau; \mathcal{H}_{0,k})$ **equipado com a norma**

$$|\phi_{\epsilon k}|_{Y_k} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant \tau} \text{ess} \| \phi_{\epsilon k}(t) \|_0 .$$

Consideremos o produto cartesiano $E = X_k \times Y_k$ **com a norma**

$$|[v_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k}]|_E = |v_{\epsilon k}|_{X_k} + |\phi_{\epsilon k}|_{Y_k}.$$

Observação 3.6. *Mais adiante determinaremos* τ *de modo conveniente.*

Para cada $w_{\epsilon k} \in X_k$ **consideremos os campos de vetores** $F_{\epsilon k}$ **e** $G_{\epsilon k}$ **dados por**

$$F_{\epsilon k}(t,\lambda) = f_{\epsilon k}(t,\lambda) - M(t, \| w_{\epsilon k} \|^2_{1/2})\lambda w_{\epsilon k}(t,\lambda),$$

$$G_{\epsilon k}(t,\lambda) = g_{\epsilon k}(t,\lambda).$$

Note que $F_{\epsilon k} \in X_k$ **e** $G_{\epsilon k} \in Y_k$. **De fato, é suficiente provar que o campo truncado** $f_{\epsilon k} \in X_k$ **e o campo truncado** $g_{\epsilon k} \in Y_k$. **Para tanto note que** $f_{\epsilon k} \in L^2(0,\tau;\mathcal{H}_{0,k}) \subset L^2(0,\tau;\mathcal{H}_{1/2})$. **Daí** $\int_0^\tau \| f_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2} \, dt < \infty$, **donde** $\| f_{\epsilon k}(t) \|_{1/2} < \infty$ **quase sempre em** $[0,\tau]$. **Logo** $|f_{\epsilon k}|_{X_k} = \sup_{t\in[0,\tau]} \text{ess} \| f_{\epsilon k}(t) \|_{1/2} < \infty$, **e portanto** $f_{\epsilon k} \in X_k$. **Analogamente,**

$$g_{\epsilon k} \in L^2(0,\tau;\mathcal{H}_{0,k}) \Longrightarrow \int_0^\tau \| g_{\epsilon k}(t) \|_0^2 \, dt < \infty \Longrightarrow \| g_{\epsilon k}(t) \|_0 < \infty$$

quase sempre em $[0,\tau]$, **donde** $|g_{\epsilon k}|_{Y_k} = \sup_{t\in[0,\tau]} \text{ess} \| g_{\epsilon k}(t) \|_0 < \infty$, **e portanto** $g_{\epsilon k} \in Y_k$. **Assim de fato temos** $F_{\epsilon k} \in X_k$ **e** $G_{\epsilon k} \in Y_k$.

Por outro lado $L^\infty(0,\tau;\mathcal{H}_{0,k}) \hookrightarrow L^2(0,\tau;\mathcal{H}_{0,k})$ **com as norma usuais, temos** $Y_k \hookrightarrow L^2(0,\tau;\mathcal{H}_{0,k})$. **Quanto à** X_k **note que dado** $w_k \in X_k$ **temos pela Proposição 2.3 item (iii), com** $\alpha = 1/2$ **e** $\beta = 0$:

$$\begin{aligned} |w_k|^2_{2,\mathcal{H}_{0,k}} &= \int_0^\tau \| w_k(t) \|_0^2 \, dt \\ &\leqslant \lambda_\epsilon \int_0^\tau \| w_k(t) \|^2_{1/2} \, dt \\ &\leqslant \lambda_\epsilon \tau (\sup_{0\leqslant t\leqslant \tau} \text{ess} \| w_k(t) \|_{1/2})^2 \\ &= \lambda_\epsilon \tau |w_k|^2_{X_k} < \infty, \end{aligned}$$

donde $X_k \hookrightarrow L^2(0,\tau;\mathcal{H}_{0,k})$. **Logo** $F_{\epsilon k}$ **e** $G_{\epsilon k} \in L^2(0,\tau;\mathcal{H}_{0,k})$. **Definimos o operador** $S_k : E \longrightarrow E$ **por** $S_k([w_{\epsilon k}, z_{\epsilon k}]) = [v_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k}]$, **sendo** $[v_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k}]$ **a única solução do sistema**

$$(P.4) \quad \left| \begin{array}{l} v''_{\epsilon k} + \lambda v_{\epsilon k} + \phi_{\epsilon k} = F_{\epsilon k}, \text{ em } L^2(0,\tau;\mathcal{H}_{0,k}) \\ \phi'_{\epsilon k} + \lambda \phi_{\epsilon k} + v'_{\epsilon k} = G_{\epsilon k}, \text{ em } L^2(0,\tau;\mathcal{H}_{0,k}) \\ v_{\epsilon k}(0) = v_{0\epsilon k}, \; v'_{\epsilon k}(0) = v_{1\epsilon k}, \phi_{\epsilon k}(0) = \phi_{0\epsilon k}, \end{array} \right.$$

na classe

$$\begin{aligned} \{v_{\epsilon k}, v'_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k}\} &\in \left[L^\infty(0,\tau;\mathcal{H}_{0,k})\right]^3 \\ \{v''_{\epsilon k}, \phi'_{\epsilon k}\} &\in \left[L^2(0,\tau;\mathcal{H}_{0,k})\right]^2. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Para ver que S_k **está bem definido é suficiente provar que de fato (P.4) possui solução e esta é única. A unicidade segue da seguinte forma: Dados** $[\nu_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k}]$ **e** $[\tilde{\nu}_{\epsilon k}, \tilde{\phi}_{\epsilon k}]$ **soluções de (P.4), temos que** $[\hat{\nu}_{\epsilon k}, \hat{\phi}_{\epsilon k}] = [\nu_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k}] - [\tilde{\nu}_{\epsilon k}, \tilde{\phi}_{\epsilon k}]$ **é solução do sistema**

$$(\mathrm{P}.5) \qquad \left| \begin{array}{l} \hat{\nu}''_{\epsilon k} + \lambda \hat{\nu}_{\epsilon k} + \hat{\phi}_{\epsilon k} = 0, \text{ em } L^2(0,\tau;\mathcal{H}_{0,k}) \\ \hat{\phi}'_{\epsilon k} + \lambda \hat{\phi}_{\epsilon k} + \hat{\nu}'_{\epsilon k} = 0, \text{ em } L^2(0,\tau;\mathcal{H}_{0,k}) \\ \hat{\nu}_{\epsilon k}(0) = \hat{\nu}'_{\epsilon k}(0) = \hat{\phi}_{\epsilon k}(0) = 0. \end{array} \right.$$

Tomando o produto interno em $\mathcal{H}_0$ **de ambos os lados de** $(\mathrm{P}.5)_1$ **e** $(\mathrm{P}.5)_2$ **por** $2\hat{\nu}'_{\epsilon k}$ **e** $2\hat{\phi}_{\epsilon k}$**, respectivamente, temos**

$$\frac{d}{dt} \| \hat{\nu}'_{\epsilon k}(t) \|_0^2 + 2(\lambda \hat{\nu}_{\epsilon k}(t), \hat{\nu}'_{\epsilon k}(t))_0 + 2(\hat{\phi}_{\epsilon k}(t), \hat{\nu}'_{\epsilon k}(t))_0 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{d}{dt} \| \hat{\nu}'_{\epsilon k}(t) \|_0^2 + 2(\lambda^{3/4} \hat{\nu}_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/4}\hat{\nu}'_{\epsilon k}(t))_0 + 2(\hat{\phi}_{\epsilon k}(t), \hat{\nu}'_{\epsilon k}(t))_0 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{d}{dt} \| \hat{\nu}'_{\epsilon k}(t) \|_0^2 + \frac{d}{dt} \| \hat{\nu}_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2 + 2(\hat{\nu}'_{\epsilon k}(t), \hat{\phi}_{\epsilon k}(t))_0 = 0. \tag{3.40}$$

e analogamente

$$\frac{d}{dt} \| \hat{\phi}_{\epsilon k}(t) \|_0^2 + 2 \| \hat{\phi}_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2 + 2(\hat{\nu}'_{\epsilon k}(t), \hat{\phi}_{\epsilon k}(t))_0 = 0. \tag{3.41}$$

Somando (3.40) e (3.41) obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \| \hat{\nu}'_{\epsilon k}(t) \|_0^2 + \frac{d}{dt} \| \hat{\phi}_{\epsilon k}(t) \|_0^2 + \frac{d}{dt} \| \hat{\nu}_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2 \\ &+2 \| \hat{\phi}_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2 + 4(\hat{\nu}'_{\epsilon k}(t), \hat{\phi}_{\epsilon k}(t))_0 = 0. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Integrando (3.42) de 0 **à** $t \leqslant \tau$**, obtemos**

$$\| \hat{\nu}'_{\epsilon k}(t) \|_0^2 - \| \hat{\nu}'_{\epsilon k}(0) \|_0^2 + \| \hat{\phi}_{\epsilon k}(t) \|_0^2 - \| \hat{\phi}_{\epsilon k}(0) \|_0^2 + \| \hat{\nu}_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2 - \| \hat{\nu}_{\epsilon k}(0) \|_{1/2}^2$$

$$+2\int_0^t \| \hat{\phi}_{\epsilon k}(s) \|_{1/2}^2 \, ds + 4\int_0^t (\hat{\nu}'_{\epsilon k}(s), \hat{\phi}_{\epsilon k}(s))_0 ds = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\| \hat{\nu}'_{\epsilon k}(t) \|_0^2 + \| \hat{\phi}_{\epsilon k}(t) \|_0^2 + \| \hat{\nu}_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2 = -2\int_0^t \| \hat{\phi}_{\epsilon k}(s) \|_{1/2}^2 \, ds - 4\int_0^t (\hat{\nu}'_{\epsilon k}(s), \hat{\phi}_{\epsilon k}(s))_0 ds$$

$$\leqslant 2\int_0^t \| \hat{\phi}_{\epsilon k}(s) \|_{1/2}^2 \, ds + 2\int_0^t \left\{ \| \hat{\nu}'_{\epsilon k}(s) \|_0^2 + \| \hat{\phi}_{\epsilon k}(s) \|_0^2 \right\} ds$$

$$\leqslant 2\int_0^t \left\{ \| \hat{\nu}'_{\epsilon k}(s) \|_0^2 + \| \hat{\phi}_{\epsilon k}(s) \|_0^2 + \| \hat{\nu}_{\epsilon k}(s) \|_{1/2}^2 \right\} ds + 2\int_0^t \| \hat{\phi}_{\epsilon k}(s) \|_{1/2}^2 \, ds.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
&\| \hat{v}'_{\epsilon k}(t) \|_0^2 + \| \hat{\phi}_{\epsilon k}(t) \|_0^2 + \| \hat{v}_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2 \\
\leqslant\ & 2\int_0^t \| \hat{\phi}_{\epsilon k}(s) \|_{1/2}^2 \, ds + 2\int_0^t \left\{ \| \hat{v}'_{\epsilon k}(s) \|_0^2 + \| \hat{\phi}_{\epsilon k}(s) \|_0^2 + \| \hat{v}_{\epsilon k}(s) \|_{1/2}^2 \right\} ds.
\end{aligned}
$$

Pela Desigualdade de Gonwall Generalizada, cf. Capítulo 1, segue-se que

$$
\begin{aligned}
&\| \hat{v}'_{\epsilon k}(t) \|_0^2 + \| \hat{\phi}_{\epsilon k}(t) \|_0^2 + \| \hat{v}_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2 \\
\leqslant\ & C \int_0^t \| \hat{\phi}_{\epsilon k}(s) \|_{1/2}^2 \, ds = \widetilde{C} \int_0^t \| \hat{\phi}_{\epsilon k}(s) \|_0^2 \, ds \\
\leqslant\ & \widetilde{C} \int_0^t \left\{ \| \hat{v}'_{\epsilon k}(s) \|_0^2 + \| \hat{\phi}_{\epsilon k}(s) \|_0^2 + \| \hat{v}_{\epsilon k}(s) \|_{1/2}^2 \right\} ds,
\end{aligned}
$$

donde pela Desigualdade de Gronwall, cf. Capítulo 1, segue que

$$
\| \hat{v}'_{\epsilon k}(t) \|_0^2 + \| \hat{\phi}_{\epsilon k}(t) \|_0^2 + \| \hat{v}_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2 = 0,
$$

e, portanto, $[v_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k}] = [\tilde{v}_{\epsilon k}, \tilde{\phi}_{\epsilon k}]$. **A existência é obtida via Método de Galerkin seguindo as mesmas idéias do Lema 2.1 pág. 22 de [30]. Portanto** S_k **está bem definida.**

É fácil ver que um ponto fixo de S_k **é uma solução do problema truncado (3.34)-(3.38). Para provar que** S_k **possui um ponto fixo usaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach na bola fechada de centro na origem e raio** a **em** E**, isto é,** $B_k[0, a] = \{[w_{\epsilon k}, z_{\epsilon k}] \in E; |[w_{\epsilon k}, z_{\epsilon k}]|_E \leqslant a\}$, **onde** a **será definido a posteriori.**

Observação 3.7. *Estamos considerando* E *com a topologia da norma, logo* $B_k[0, a]$ *é um conjunto fechado do espaço de Banach* E*. Portanto* $B_k[0, a]$ *é completo.*

Provamos a seguir que S_k **é uma contração. Com efeito, seja** $S_k([w_{\epsilon k}, z_{\epsilon k}]) = [v_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k}]$. **Tomando o produto interno em** $\mathcal{H}_0$ **de ambos os lados de** $(P.4)_1$ **e** $(P.4)_2$ **por** $2v'_{\epsilon k}$ **e** $2\phi_{\epsilon k}$**, respectivamente, obtemos:**

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \| v'_{\epsilon k}(t) \|_0^2 + \frac{d}{dt} \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2 + 2(\phi_{\epsilon k}(t), v'_{\epsilon k}(t))_0 = 2(F_{\epsilon k}(t), v'_{\epsilon k}(t))_0 \\
\leqslant\ & 2 \,|\, (F_{\epsilon k}(t), v'_{\epsilon k}(t))_0 \,| \leqslant 2 \| F_{\epsilon k}(t) \|_0 \| v'_{\epsilon k}(t) \|_0 \leqslant \| F_{\epsilon k}(t) \|_0^2 + \| v'_{\epsilon k}(t) \|_0^2,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \| v'_{\epsilon k}(t) \|_0^2 + \frac{d}{dt} \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2 + 2(\phi_{\epsilon k}(t), v'_{\epsilon k}(t))_0 \\
&\leqslant \| F_{\epsilon k}(t) \|_0^2 + \| v'_{\epsilon k}(t) \|_0^2 \,.
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

Analogamente obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \parallel \phi_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 +2 \parallel \phi_{\epsilon k}(t) \parallel_{1/2}^2 &+2(\phi_{\epsilon k}(t), v'_{\epsilon k}(t))_0 \\ &\leqslant \parallel G_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 + \parallel \phi_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 .\end{aligned} \tag{3.44}$$

Somando (3.43) e (3.44) e integrando de 0 **à** $t \leqslant \tau$**, obtemos**

$$\begin{aligned}
&\parallel v'_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 + \parallel v_{\epsilon k}(t) \parallel_{1/2}^2 + \parallel \phi_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 +2\int_0^t \parallel \phi_{\epsilon k}(s) \parallel_{1/2}^2 ds + 4\int_0^t (\phi_{\epsilon k}(s), v'_{\epsilon k}(s))_0 ds \\
&\leqslant \parallel v'_{\epsilon k}(0) \parallel_0^2 + \parallel v_{\epsilon k}(0) \parallel_{1/2}^2 + \parallel \phi_{\epsilon k}(0) \parallel_0^2 \\
&+ \int_0^t \parallel F_{\epsilon k}(s) \parallel_0^2 ds + \int_0^t \parallel G_{\epsilon k}(s) \parallel_0^2 ds + \int_0^t \left\{ \parallel v'_{\epsilon k}(s) \parallel_0^2 + \parallel \phi_{\epsilon k}(s) \parallel_0^2 \right\} ds \\
&= \parallel v_{1\epsilon k} \parallel_0^2 + \parallel v_{0\epsilon k} \parallel_{1/2}^2 + \parallel \phi_{0\epsilon k} \parallel_0^2 \\
&+ |F_{\epsilon k}|_{2,\mathcal{H}_{0,k}}^2 + |G_{\epsilon k}|_{2,\mathcal{H}_{0,k}}^2 + \int_0^t \left\{ \parallel v'_{\epsilon k}(s) \parallel_0^2 + \parallel \phi_{\epsilon k}(s) \parallel_0^2 \right\} ds \\
&\Longrightarrow \parallel v'_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 + \parallel v_{\epsilon k}(t) \parallel_{1/2}^2 + \parallel \phi_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 +2\int_0^t \parallel \phi_{\epsilon k}(s) \parallel_{1/2}^2 ds \\
&\leqslant \parallel v_{1\epsilon k} \parallel_0^2 + \parallel v_{0\epsilon k} \parallel_{1/2}^2 + \parallel \phi_{0\epsilon k} \parallel_0^2 \\
&+ |F_{\epsilon k}|_{2,\mathcal{H}_{0,k}}^2 + |G_{\epsilon k}|_{2,\mathcal{H}_{0,k}}^2 + 3\tau\left\{ |v'_{\epsilon k}|_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}}^2 + |\phi_{\epsilon k}|_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}}^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\parallel v'_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 + \parallel v_{\epsilon k}(t) \parallel_{1/2}^2 + \parallel \phi_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 +2\int_0^t \parallel \phi_{\epsilon k}(s) \parallel_{1/2}^2 ds \\
&\leqslant \parallel v_{1\epsilon k} \parallel_0^2 + \parallel v_{0\epsilon k} \parallel_{1/2}^2 + \parallel \phi_{0\epsilon k} \parallel_0^2 \\
&+ |F_{\epsilon k}|_{2,\mathcal{H}_{0,k}}^2 + |G_{\epsilon k}|_{2,\mathcal{H}_{0,k}}^2 + 3\tau\left\{ |v'_{\epsilon k}|_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}}^2 + |\phi_{\epsilon k}|_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}}^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Como $v_{0\epsilon k},\ v_{1\epsilon k}$ **e** $\phi_{0\epsilon k}$ **são campos truncados de** $v_{0\epsilon},\ v_{1\epsilon}$ **e** $\phi_{0\epsilon}$**, respectivamente, então** $\parallel v_{0\epsilon k} \parallel_{1/2}^2 \leqslant \parallel v_{0\epsilon} \parallel_{1/2}^2$, $\parallel v_{1\epsilon k} \parallel_0^2 \leqslant \parallel v_{1\epsilon} \parallel_0^2$ **e** $\parallel \phi_{0\epsilon k} \parallel_0^2 \leqslant \parallel \phi_{0\epsilon} \parallel_0^2$**, de modo que (3.45) implica em**

$$\begin{aligned}
&\parallel v'_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 + \parallel v_{\epsilon k}(t) \parallel_{1/2}^2 + \parallel \phi_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 +2\int_0^t \parallel \phi_{\epsilon k}(s) \parallel_{1/2}^2 ds \\
&\leqslant \parallel v_{1\epsilon} \parallel_0^2 + \parallel v_{0\epsilon} \parallel_{1/2}^2 + \parallel \phi_{0\epsilon} \parallel_0^2 \\
&+ |F_{\epsilon k}|_{2,\mathcal{H}_{0,k}}^2 + |G_{\epsilon k}|_{2,\mathcal{H}_{0,k}}^2 + 3\tau\left\{ |v'_{\epsilon k}|_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}}^2 + |\phi_{\epsilon k}|_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}}^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Note que sendo $\mathcal{U}_\epsilon$ **um operador unitário temos**

$$\parallel v_{1\epsilon} \parallel_0^2 = \parallel \mathcal{U}_\epsilon(u_1) \parallel_0^2 = \parallel u_1 \parallel_0^2 . \tag{3.47}$$

$$\parallel \phi_{0\epsilon} \parallel_0^2 = \parallel \mathcal{U}_\epsilon(\theta_0) \parallel_0^2 = \parallel \theta_0 \parallel_0^2 . \tag{3.48}$$

$$
\begin{aligned}
\| v_{0\epsilon} \|_{1/2}^2 =& \| \mathcal{U}_\epsilon(u_o) \|_{1/2}^2 = \| A_\epsilon^{1/2} u_0 \|^2 \\
&= \int_{-\epsilon}^{+\infty} (\lambda + \epsilon) d(E_\lambda u_0, u_0) \\
&\leqslant \| A^{1/2} u_0 \|^2 + \| u_0 \|^2 .
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

Vejamos agora uma estimativa para $|F_{\epsilon k}|^2_{2,\mathcal{H}_{0,k}}$. Observe que

$$
\begin{aligned}
\| F_{\epsilon k}(t,\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 &\leqslant \left[\| f_{\epsilon k}(t,\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)} + \left| M(t, \| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2) \right| \| \lambda w_{\epsilon k}(t,\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)} \right]^2 \\
&\leqslant 2 \| f_{\epsilon k}(t,\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 + 2 \left| M(t, \| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2) \right|^2 \| \lambda w_{\epsilon k}(t,\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 .
\end{aligned}
$$

Integrando esta última desigualdade de λ_ϵ até $+\infty$ temos

$$
\| F_{\epsilon k} \|_0^2 = \int_{\lambda_\epsilon}^{+\infty} \| F_{\epsilon k}(t,\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 \, d\mu_\epsilon(\lambda) \leqslant 2 \int_{\lambda_\epsilon}^{+\infty} \| f_{\epsilon k}(t,\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 \, d\mu_\epsilon(\lambda)
$$

$$
+2 \left| M(t, \| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2) \right|^2 \int_{\lambda_\epsilon}^{+\infty} \lambda^2 \| w_{\epsilon k}(t,\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 \, d\mu_\epsilon(\lambda)
$$

$$
= 2 \| f_{\epsilon k}(t) \|_0^2 + 2 \left| M(t, \| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2) \right|^2 \int_{\lambda_\epsilon}^{k} \lambda \cdot \lambda \| w_{\epsilon k}(t,\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 \, d\mu_\epsilon(\lambda)
$$

$$
\leqslant 2 \| f_\epsilon(t) \|_0^2 + 2k \left| M(t, \| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2) \right|^2 \int_{\lambda_\epsilon}^{k} \lambda^{2\cdot(1/2)} \| w_{\epsilon k}(t,\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 \, d\mu_\epsilon(\lambda)
$$

$$
= 2 \| f_\epsilon(t) \|_0^2 + 2k \left| M(t, \| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2) \right|^2 \| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2,
$$

ou seja,

$$
\| F_{\epsilon k}(t) \|_0^2 \leqslant 2 \| f_\epsilon(t) \|_0^2 + 2k \left| M(t, \| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2) \right|^2 \| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2 .
$$

Como $\| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2 \leqslant |w_{\epsilon k}|_{X_k}^2$ temos

$$
\| F_{\epsilon k}(t) \|_0^2 \leqslant 2 \| f_\epsilon(t) \|_0^2 + 2k \left| M(t, \| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2) \right|^2 |w_{\epsilon k}|_{X_k}^2. \tag{3.50}
$$

Denotando por $C_0 = \max\{|M(t,\eta)|^2 \,; (t,\eta) \in [0,\tau] \times [0,a^2]\}$, temos em (3.50)

$$
\| F_{\epsilon k}(t) \|_0^2 \leqslant 2 \| f_\epsilon(t) \|_0^2 + 2k C_0 |w_{\epsilon k}|_{X_k}^2,
$$

donde integrando-se de 0 até τ obtemos

$$
|F_{\epsilon k}|^2_{2,\mathcal{H}_{0,k}} \leqslant 2 |f_\epsilon|^2_{2,\mathcal{H}_{0,k}} + 2k\tau C_0 |w_{\epsilon k}|_{X_k}^2. \tag{3.51}
$$

Assim assumindo que $[w_{\epsilon k}, z_{\epsilon k}] \in B_k[0,a]$ obtemos

$$|F_{\epsilon k}|^2_{2,\mathcal{H}_{0,k}} \leqslant 2|f_\epsilon|^2_{2,\mathcal{H}_{0,k}} + 2k\tau C_0 a^2. \tag{3.52}$$

De modo análogo obtemos

$$|G_{\epsilon k}|^2_{2,\mathcal{H}_{0,k}} \leqslant |g_\epsilon|^2_{2,\mathcal{H}_{0,k}}. \tag{3.53}$$

Como $|f_\epsilon|^2_{2,\mathcal{H}_{0,k}} = \int_0^t \| f_\epsilon(s) \|^2_{\mathcal{H}_{0,k}} \, ds = \int_0^t \| \mathcal{U}_\epsilon(f(s)) \|^2_{\mathcal{H}_{0,k}} \, ds = \int_0^t \| f(s) \|^2_{\mathcal{H}_{0,k}} \, ds = |f|^2_{2,H}$,
isto é,

$$|f_\epsilon|^2_{2,\mathcal{H}_{0,k}} = |f|^2_{2,H}, \tag{3.54}$$

e analogamente

$$|g_\epsilon|^2_{2,\mathcal{H}_{0,k}} = |g|^2_{2,H}, \tag{3.55}$$

as desidualdades (3.52) e (3.53) podem ser reescritas como segue:

$$|F_{\epsilon k}|^2_{2,\mathcal{H}_{0,k}} \leqslant 2|f|^2_{2,H} + 2k\tau C_0 a^2, \tag{3.56}$$

$$|G_{\epsilon k}|^2_{2,\mathcal{H}_{0,k}} \leqslant |g|^2_{2,H}. \tag{3.57}$$

Substituindo (3.47)-(3.49), (3.56) e (3.57) em (3.46), resulta

$$\begin{aligned} &\| v'_{\epsilon k}(t) \|^2_0 + \| v_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2} + \| \phi_{\epsilon k}(t) \|^2_0 + 2\int_0^t \| \phi_{\epsilon k}(s) \|^2_{1/2} \, ds \\ &\leqslant E_0 + 2C_0 k a^2 \tau + 3\tau\{|v'_{\epsilon k}|^2_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}} + |\phi_{\epsilon k}|^2_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}}\}, \end{aligned} \tag{3.58}$$

onde

$$E_0 = \| u_1 \|^2_0 + \| \theta_0 \|^2_{1/2} + \| A^{1/2} u_0 \|^2 + \| u_0 \|^2 + 2|f|^2_{2,H} + |g|^2_{2,H}. \tag{3.59}$$

Em particular temos

$$\| v'_{\epsilon k}(t) \|^2_0 + \| \phi_{\epsilon k}(t) \|^2_0 \leqslant E_0 + 2C_0 k a^2 \tau + 3\tau\{|v'_{\epsilon k}|^2_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}} + |\phi_{\epsilon k}|^2_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}}\} \tag{3.60}$$

e

$$\| v_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2} + \| \phi_{\epsilon k}(t) \|^2_0 \leqslant E_0 + 2C_0 k a^2 \tau + 3\tau\{|v'_{\epsilon k}|^2_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}} + |\phi_{\epsilon k}|^2_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}}\} \tag{3.61}$$

De (3.60) temos

$$\begin{aligned} &\sup_{t \in [0,\tau]} ess \| v'_{\epsilon k}(t) \|^2_0 + \sup_{t \in [0,\tau]} ess \| \phi_{\epsilon k}(t) \|^2_0 \\ &\leqslant E_0 + 2C_0 k a^2 \tau + 3\tau\{|v'_{\epsilon k}|^2_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}} + |\phi_{\epsilon k}|^2_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}}\}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|\nu'_{\epsilon k}|^2_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}} + |\phi_{\epsilon k}|^2_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}} \leqslant E_0 + 2C_0 k a^2 \tau + 3\tau\{|\nu'_{\epsilon k}|^2_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}} + |\phi_{\epsilon k}|^2_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}}\}.$$

Daí escolhendo $\tau \geqslant 0$ tal que $3\tau \leqslant 1/2$ temos

$$|\nu'_{\epsilon k}|^2_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}} + |\phi_{\epsilon k}|^2_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}} \leqslant E_0 + 2C_0 k a^2 \tau + \frac{1}{2}\{|\nu'_{\epsilon k}|^2_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}} + |\phi_{\epsilon k}|^2_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}}\} \Longrightarrow$$

$$|\nu'_{\epsilon k}|^2_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}} + |\phi_{\epsilon k}|^2_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}} \leqslant 2E_0 + 4C_0 k a^2 \tau.$$

Portanto, para a escolha acima de τ obtemos

$$3\tau\{|\nu'_{\epsilon k}|^2_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}} + |\phi_{\epsilon k}|^2_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}}\} \leqslant \frac{1}{2}(2E_0 + 4C_0 k a^2 \tau) = E_0 + 2C_0 k a^2 \tau,$$

ou seja,

$$3\tau\{|\nu'_{\epsilon k}|^2_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}} + |\phi_{\epsilon k}|^2_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}}\} \leqslant E_0 + 2C_0 k a^2 \tau. \tag{3.62}$$

Substituindo (3.62) em (3.61) obtemos

$$\begin{gathered} \| \nu_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2} + \| \phi_{\epsilon k}(t) \|^2_0 \leqslant 2E_0 + 4C_0 k a^2 \tau \\ \Longrightarrow \sup_{t\in[0,\tau]} ess \| \nu_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2} + \sup_{t\in[0,\tau]} ess \| \phi_{\epsilon k}(t) \|^2_0 \leqslant 2E_0 + 4C_0 k a^2 \tau, \end{gathered} \tag{3.63}$$

isto é,

$$|\nu_{\epsilon k}|^2_{\infty,\mathcal{H}_{1/2}} + |\phi_{\epsilon k}|^2_{\mathcal{H}_{0,k}} \leqslant 2E_0 + 4C_0 k a^2 \tau.$$

Logo

$$|S_k([w_{\epsilon k}, z_{\epsilon k}])|_E \leqslant 2E_0 + 4C_0 k a^2 \tau. \tag{3.64}$$

Por outro lado, dados $[w_{\epsilon k}, \nu_{\epsilon k}]$, $[\hat{w}_{\epsilon k}, \hat{\nu}_{\epsilon k}] \in B_k[0, a]$, então $[z_{\epsilon k}, \hat{z}_{\epsilon k}] = S_k([w_{\epsilon k}, \nu_{\epsilon k}]) - S_k([\hat{w}_{\epsilon k}, \hat{\nu}_{\epsilon k}])$ satisfaz o sistema:

$$(P.6) \quad \left| \begin{array}{l} z''_{\epsilon k} + \lambda z_{\epsilon k} + \hat{z}_{\epsilon k} = \Phi_{\epsilon k}, \\ z'_{\epsilon k} + \lambda \hat{z}_{\epsilon k} + z'_{\epsilon k} = 0, \\ z_{\epsilon k}(0) = z'_{\epsilon k}(0) = \hat{z_{\epsilon k}}(0) = 0, \end{array} \right.$$

onde

$$\Phi_{\epsilon k}(t, \lambda) = M(t, \| \hat{w}_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2}) \lambda \hat{w}_{\epsilon k}(t, \lambda) - M(t, \| w_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2}) \lambda w_{\epsilon k}(t, \lambda).$$

Procedendo como anteriormente, tomamos o produto interno em $\mathcal{H}_0$ de $(P.6)_1$ e $(P.6)_2$ por $2z'_{\epsilon k}(t)$ e $2\hat{z}_{\epsilon k}(t)$, respectivamente, e somando as equações obtemos

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\left\{ \| z'_{\epsilon k}(t) \|^2_0 + \| z_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2} + \| \hat{z}_{\epsilon k}(t) \|^2_0 \right\} + 2 \| \hat{z}_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2} \\ = 2(\Phi_{\epsilon k}(t), z'_{\epsilon k})_0 - 4(\hat{z}_{\epsilon k}(t), z'_{\epsilon k}(t))_0. \end{gathered} \tag{3.65}$$

Note que

$$\begin{aligned}
2(\Phi_{\epsilon k}(t), z'_{\epsilon k})_0 - 4(\hat{z}_{\epsilon k}(t), z'_{\epsilon k}(t))_0 &\leqslant 2 \mid (\Phi_{\epsilon k}(t), z'_{\epsilon k})_0 \mid +4 \mid (\hat{z}_{\epsilon k}(t), z'_{\epsilon k}(t))_0 \mid \\
&\leqslant 2 \parallel \Phi_{\epsilon k}(t) \parallel_0 \parallel z'_{\epsilon k} \parallel_0 +4 \parallel \hat{z}_{\epsilon k}(t) \parallel_0 \parallel z'_{\epsilon k}(t) \parallel_0 \\
&\leqslant \parallel \Phi_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 + \parallel z'_{\epsilon k} V \parallel_0^2 +2 \parallel \hat{z}_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 +2 \parallel z'_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 \\
&= \parallel \Phi_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 +2 \parallel \hat{z}_{\epsilon k} \parallel_0^2 +3 \parallel z'_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2,
\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{ \parallel z'_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 + \parallel z_{\epsilon k}(t) \parallel_{1/2}^2 + \parallel \hat{z}_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 \right\} + 2 \parallel \hat{z}_{\epsilon k}(t) \parallel_{1/2}^2 \\
&\qquad \leqslant \parallel \Phi_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 +2 \parallel \hat{z}_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 +3 \parallel z'_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 .
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Integrando (3.66) de 0 **até** $t \leqslant \tau$ **e usando** $(P.6)_3$**, obtemos**

$$\begin{aligned}
&\parallel z'_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 + \parallel z_{\epsilon k}(t) \parallel_{1/2}^2 + \parallel \hat{z}_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 +2\int_0^t \parallel \hat{z}_{\epsilon k}(s) \parallel_{1/2}^2 ds \\
&\leqslant \int_0^t \parallel \Phi_{\epsilon k}(s) \parallel_0^2 ds + 2\int_0^t \parallel \hat{z}_{\epsilon k}(s) \parallel_0^2 ds + 3\int_0^t \parallel z'_{\epsilon k}(s) \parallel_0^2 ds \\
&= |\Phi_{\epsilon k}|^2_{2,\mathcal{H}_{0,k}} + 3\int_0^t \parallel z'_{\epsilon k}(s) \parallel_0^2 ds + 2\int_0^t \parallel \hat{z}_{\epsilon k}(s) \parallel_0^2 d \\
&\leqslant |\Phi_{\epsilon k}|^2_{2,\mathcal{H}_{0,k}} + 3\int_0^t \left\{ \parallel z'_{\epsilon k}(s) \parallel_0^2 + \parallel \hat{z}_{\epsilon k}(s) \parallel_0^2 \right\} ds \\
&\leqslant |\Phi_{\epsilon k}|^2_{2,\mathcal{H}_{0,k}} + 3\tau\left\{ |z'_{\epsilon k}|^2_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}} + |\hat{z}_{\epsilon k}|^2_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}} \right\} ds.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\parallel z'_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 + \parallel z_{\epsilon k}(t) \parallel_{1/2}^2 + \parallel \hat{z}_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 +2\int_0^t \parallel \hat{z}_{\epsilon k}(s) \parallel_{1/2}^2 ds \\
&\qquad \leqslant |\Phi_{\epsilon k}|^2_{2,\mathcal{H}_{0,k}} + 3\tau\left\{ |z'_{\epsilon k}|^2_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}} + |\hat{z}_{\epsilon k}|^2_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Como estamos supondo $3\tau \leqslant \dfrac{1}{2}$ **temos**

$$3\tau\left\{ |z'_{\epsilon k}|^2_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}} + |\hat{z}_{\epsilon k}|^2_{\infty,\mathcal{H}_{0,k}} \right\} \leqslant |\Phi_{\epsilon k}|^2_{2,\mathcal{H}_{0,k}},$$

segue-se

$$\parallel z'_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 + \parallel z_{\epsilon k}(t) \parallel_{1/2}^2 + \parallel \hat{z}_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 +2\int_0^t \parallel \hat{z}_{\epsilon k}(s) \parallel_{1/2}^2 ds \leqslant 2|\Phi_{\epsilon k}|^2_{2,\mathcal{H}_{0,k}}.$$

Em particular

$$\parallel z_{\epsilon k}(t) \parallel_{1/2}^2 + \parallel \hat{z}_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 \leqslant 2|\Phi_{\epsilon k}|^2_{2,\mathcal{H}_{0,k}}, \tag{3.68}$$

ou ainda

$$|[z_{\epsilon k},\hat{z}_{\epsilon k}]|_E^2 \leqslant 2|\Phi_{\epsilon k}|^2_{2,\mathcal{H}_{0,k}}.$$

Portanto,

$$|S_k([w_{\epsilon k},v_{\epsilon k}]) - S_k([\hat{w}_{\epsilon k},\hat{v}_{\epsilon k}])|_E^2 \leqslant 2|\Phi_{\epsilon k}|^2_{2,\mathcal{H}_{0,k}}. \tag{3.69}$$

Da definição de $\Phi_{\epsilon k}$ temos

$$\Phi_{\epsilon k}(t,\lambda) = M(t, \| \hat{w}_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2})\lambda\Big\{\hat{w}_{\epsilon k}(t,\lambda) - w_{\epsilon k}(t,\lambda)\Big\}$$

$$+\Big\{M(t,\| \hat{w}_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2}) - M(t,\| w_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2})\Big\}\lambda w_{\epsilon k}(t,\lambda),$$

donde

$$\| \Phi_{\epsilon k}(t,\lambda) \|^2_{\mathcal{H}(\lambda)} \leqslant \Bigg[\Big|M(t,\| \hat{w}_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2})\Big| \, \| \lambda\{\hat{w}_{\epsilon k}(t,\lambda) - w_{\epsilon k}(t,\lambda)\} \|_{\mathcal{H}(\lambda)}$$

$$+\Big|M(t,\| \hat{w}_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2}) - M(t,\| w_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2})\Big| \, \| \lambda w_{\epsilon k}(t,\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}\Bigg]^2$$

$$\leqslant 2\Big|M(t,\| \hat{w}_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2})\Big|^2 \, \| \lambda\{\hat{w}_{\epsilon k}(t,\lambda) - w_{\epsilon k}(t,\lambda)\} \|^2_{\mathcal{H}(\lambda)}$$

$$+2\Big|M(t,\| \hat{w}_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2}) - M(t,\| w_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2})\Big|^2 \, \| \lambda w_{\epsilon k}(t,\lambda) \|^2_{\mathcal{H}(\lambda)} .$$

Integrando a desigualdade acima com relação à $d\mu_\epsilon(\lambda)$ de λ_ϵ à $+\infty$, obtemos

$$\begin{aligned} \| \Phi_{\epsilon k}(t) \|^2_0 &\leqslant 2\Big|M(t,\| \hat{w}_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2})\Big|^2 \, \| \hat{w}_{\epsilon k}(t) - w_{\epsilon k}(t) \|^2_1 \\ &+2\Big|M(t,\| \hat{w}_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2}) - M(t,\| w_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2})\Big|^2 \, \| w_{\epsilon k}(t) \|^2_1 . \end{aligned} \tag{3.70}$$

Pela Proposição 2.3 item (iii), com $\alpha = 1$ e $\beta = 1/2$ temos:

$$\begin{aligned} \| \hat{w}_{\epsilon k}(t) - w_{\epsilon k}(t) \|^2_1 &\leqslant k \, \| \hat{w}_{\epsilon k}(t) - w_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2}, \\ \| \hat{w}_{\epsilon k}(t) \|^2_1 &\leqslant k \, \| \hat{w}_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2}, \end{aligned} \tag{3.71}$$

donde

$$\begin{aligned} \| \hat{w}_{\epsilon k}(t) - w_{\epsilon k}(t) \|^2_1 &\leqslant k|\hat{w}_{\epsilon k} - w_{\epsilon k}|^2_{X_k}, \\ \| \hat{w}_{\epsilon k}(t) \|^2_1 &\leqslant k|\hat{w}_{\epsilon k}|^2_{X_k} \leqslant k|[\hat{w}_{\epsilon k},\hat{v}_{\epsilon k}]|^2_E \leqslant ka^2. \end{aligned} \tag{3.72}$$

Por outro lado, temos pelo Teorema do Valor Médio que

$$\Big|M(t,\| \hat{w}_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2}) - M(t,\| w_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2})\Big|^2$$

$$\leqslant \left|\frac{\partial M}{\partial t}(t,\xi)\right|^2 \Big|\| \hat{w}_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2} - \| w_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2}\Big|^2$$

$$= \left|\frac{\partial M}{\partial t}(t,\xi)\right|^2 \left|\| \hat{w}_{\epsilon k} t) \|_{1/2} + \| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}\right|^2 \left|\| \hat{w}_{\epsilon k}(t) \|_{1/2} - \| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}\right|^2$$

$$\leqslant \left|\frac{\partial M}{\partial t}(t,\xi)\right|^2 \left|\| \hat{w}_{\epsilon k} t) \|_{1/2} + \| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}\right|^2 \| \hat{w}_{\epsilon k}(t) - w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2,$$

onde ξ **está no segmento de extremos** $\| \hat{w}_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2$ **e** $\| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2$**.**

Pondo $C_1 = \max\{\| \nabla M(t,\eta) \|^2; (t,\eta) \in [0,\tau] \times [0,a^2]\}$ **e usando as desigualdades**

$$\begin{aligned} \| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2} &\leqslant |[w_{\epsilon k}, v_{\epsilon k}|_E \leqslant a \\ \| \hat{w}_{\epsilon k}(t) \|_{1/2} &\leqslant |[\hat{w}_{\epsilon k}, \hat{v}_{\epsilon k}|_E \leqslant a, \end{aligned} \tag{3.73}$$

obtemos

$$\left| M(t, \| \hat{w}_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2) - M(t, \| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2) \right|^2 \leqslant 4a^2 C_1 |w_{\epsilon k} - \hat{w}_{\epsilon k}|_{X_k}^2. \tag{3.74}$$

Assim, substituindo (3.72) e (3.74) em (3.70) e lembrando que $|M(t,\xi)|^2 \leqslant C_0$, $\forall\ (t,\xi) \in [0,\tau] \times [0,a^2]$**, temos**

$$\begin{aligned} \| \Phi_{\epsilon k}(t) \|_0^2 &\leqslant 2C_0 k |w_{\epsilon k} - \hat{w}_{\epsilon k}|_{X_k}^2 + 8a^4 C_1 k |w_{\epsilon k} - \hat{w}_{\epsilon k}|_{X_k}^2 \\ &= (2C_0 k + 8a^4 C_1 k) |w_{\epsilon k} - \hat{w}_{\epsilon k}|_{X_k}^2. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Integrando (3.75) de 0 **até** τ**, obtemos**

$$\begin{aligned} |\Phi_{\epsilon k}(t)|_{2,\mathcal{H}_{0,k}}^2 &\leqslant (2C_0 k + 8a^4 C_1 k)\tau |w_{\epsilon k} - \hat{w}_{\epsilon k}|_{X_k}^2 \\ &\leqslant (2C_0 k + 8a^4 C_1 k)\tau |[w_{\epsilon k}, v_{\epsilon k]} - [\hat{w}_{\epsilon k}, \hat{v}_{\epsilon k}]|_E^2. \end{aligned} \tag{3.76}$$

Substituindo (3.76) em (3.69) temos

$$\left| S_k([w_{\epsilon k}, v_{\epsilon k}]) - S_k([\hat{w}_{\epsilon k}, \hat{v}_{\epsilon k}]) \right|_E^2 \leqslant (4C_0 k + 16a^4 C_1 k)\tau |[w_{\epsilon k}, v_{\epsilon k]} - [\hat{w}_{\epsilon k}, \hat{v}_{\epsilon k}]|_E^2, \tag{3.77}$$

$\forall\ [w_{\epsilon k}, v_{\epsilon k}], [\hat{w}_{\epsilon k}, \hat{v}_{\epsilon k}] \in B_k[0,a]$. **Escolhamos** $a > 0$ **e** $\tau > 0$ **tais que**

$$\begin{aligned} &a^2 \geqslant 4E_0,\ E_0 \text{ definido em } \mathbf{(3.59)}, \\ &\tau = \tau_k = \min\left\{\frac{1}{6},\ \frac{1}{16C_0 k + 64a^4 C_1 k}\right\}. \end{aligned} \tag{3.78}$$

Com estas escolhas temos de (3.64) que

$$\begin{aligned} \left| S_k([w_{\epsilon k}, z_{\epsilon k}]) \right|_E^2 \leqslant 2E_0 + 4C_0 k a^2 \tau &\leqslant 2E_0 + \frac{4C_0 k a^2}{16C_0 k + 64a^4 C_1 k} \\ &\leqslant \left(\frac{1}{2} + \frac{C_0 k}{4C_0 k + 16a^4 C_1 k}\right) a^2 \\ &\leqslant \frac{3a^2}{4} \leqslant a^2, \end{aligned}$$

ou seja, $|S_k([w_{\epsilon k}, z_{\epsilon k}])|_E \leqslant a$, $\forall$ $[w_{\epsilon k}, z_{\epsilon k} \in B_k[0,a]$. **Logo** S_k **aplica** $B_k[0,a]$ **em** $B_k[0,a]$. **Além disso, de (3.77) resulta que**

$$\begin{aligned}\left|S_k([w_{\epsilon k}, v_{\epsilon k}]) - S_k([\hat{w}_{\epsilon k}, \hat{v}_{\epsilon k}])\right|_E^2 &\leqslant (4C_0k + 16a^4C_1k)\tau\left|[w_{\epsilon k}, v_{\epsilon k}] - [\hat{w}_{\epsilon k}, \hat{v}_{\epsilon k}]\right|_E^2 \\ &\leqslant \frac{4}{16}\left[\frac{C_0k + 4a^4C_1k}{C_0k + 4a^4C_1k}\right]\left|[w_{\epsilon k}, v_{\epsilon k}] - [\hat{w}_{\epsilon k}, \hat{v}_{\epsilon k}]\right|_E^2 \\ &= \frac{1}{4}\left|[w_{\epsilon k}, v_{\epsilon k]} - [\hat{w}_{\epsilon k}, \hat{v}_{\epsilon k}]\right|_E^2,\end{aligned}$$

$\forall$ $[w_{\epsilon k}, v_{\epsilon k}], [\hat{w}_{\epsilon k}, \hat{v}_{\epsilon k}] \in B_k[0,a]$. **Logo** $S_k : B_k[0,a] \longrightarrow B_k[0,k]$ **é uma contração (estrita) e pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach deduzimos que o operador** S_k **tem um (único) ponto fixo** $[v_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k}] \in B_k[0,a]$, **o qual é uma solução fraca do problema truncado (3.34)-(3.38) em** $[0,\tau_k]$.

3.1.1 Estimativas I

Nosso propósito agora é obter estimativas para prolongarmos a solução $[v_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k}]$ **do problema truncado obtida na seção precedente ao intervalo** $[0,T]$. **Tomando o produto interno em** $\mathcal{H}_0$ **de (3.36) e (3.37) por** $2v'_{\epsilon k}(t)$ **e** $2\phi_{\epsilon k}(t)$, **respectivamente, obtemos**

$$\frac{d}{dt} \parallel v'_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 + \frac{d}{dt} \parallel v_{\epsilon k}(t) \parallel_{1/2}^2 + M(t, \parallel v_{\epsilon k}(t) \parallel_{1/2}^2)\frac{d}{dt} \parallel v_{\epsilon k}(t) \parallel_{1/2}^2$$

$$+2(\phi_{\epsilon k}(t), v'_{\epsilon k}(t))_0 = 2(f_{\epsilon k}(t), v'_{\epsilon k}(t))_0,$$

$$\frac{d}{dt} \parallel \phi_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 + 2 \parallel \phi_{\epsilon k}(t) \parallel_{1/2}^2 + 2(\phi_{\epsilon k}(t), v'_{\epsilon k}(t))_0 = 2(g_{\epsilon k}(t), \phi_{\epsilon k}(t))_0.$$

Considerando a função

$$\hat{M}(t,\eta) = \int_0^\eta M(t,\xi)d\xi,$$

observamos que

$$M(t, \parallel v_{\epsilon k}(t) \parallel_{1/2}^2)\frac{d}{dt} \parallel v_{\epsilon k}(t) \parallel_{1/2}^2 = \frac{d}{dt}\hat{M}(t, \parallel v_{\epsilon k}(t) \parallel_{1/2}^2) - \int_0^{\|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2} \frac{\partial}{\partial s}M(s,\xi)d\xi,$$

donde somando as equações obtidas acima , integrando de 0 **até** $t \leqslant \tau_k$ **e repetindo os argumentos anteriores, temos:**

$$\parallel v'_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 + \parallel v_{\epsilon k}(t) \parallel_{1/2}^2 + \parallel \phi_{\epsilon k}(t) \parallel_0^2 + \hat{M}(t, \parallel v_{\epsilon k}(t) \parallel_{1/2}^2)$$

$$+2\int_0^t \parallel \phi_{\epsilon k}(s) \parallel_{1/2}^2 ds \leqslant \parallel v'_{\epsilon k}(0) \parallel_0^2 + \parallel v_{\epsilon k}(0) \parallel_{1/2}^2 + \parallel \phi_{\epsilon k}(0) \parallel_0^2$$

$$+\hat{M}(0, \| v_{\epsilon k}(0) \|_{1/2}^2) + \int_0^t \| f_{\epsilon k}(s) \|_0^2 \, ds + \int_0^t \| g_{\epsilon k}(s) \|_0^2 \, ds$$

$$+3\int_0^t \left\{ \| v'_{\epsilon k}(s) \|_0^2 + \| \phi_{\epsilon k}(s) \|_0^2 \right\} ds + \int_0^t \int_0^{\| v_{\epsilon k}(s) \|_{1/2}^2} \left| \frac{\partial}{\partial t} M(s, \xi) \right| d\xi ds$$

$$= \| v_{1\epsilon k} \|_0^2 + \| v_{0\epsilon k} \|_{1/2}^2 + \| \phi_{0\epsilon k} \|_0^2 + \hat{M}(0, \| v_{0\epsilon k} \|_{1/2}^2) + \int_0^t \| f_{\epsilon k}(s) \|_0^2 \, ds$$

$$+ \int_0^t \| g_{\epsilon k}(s) \|_0^2 \, ds + 3\int_0^t \left\{ \| v'_{\epsilon k}(s) \|_0^2 + \| \phi_{\epsilon k}(s) \|_0^2 \right\} ds + \int_0^t \int_0^{\| v_{\epsilon k}(s) \|_{1/2}^2} \left| \frac{\partial}{\partial t} M(s, \xi) \right| d\xi ds,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} &\| v'_{\epsilon k}(t) \|_0^2 + \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2 + \| \phi_{\epsilon k}(t) \|_0^2 + \hat{M}(t, \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2) \\ &+2\int_0^t \| \phi_{\epsilon k}(s) \|_{1/2}^2 \, ds \leqslant \| v_{1\epsilon k} \|_0^2 + \| v_{0\epsilon k} \|_{1/2}^2 + \| \phi_{0\epsilon k} \|_0^2 \\ &+\hat{M}(0, \| v_{0\epsilon k} \|_{1/2}^2) + \int_0^t \| f_{\epsilon k}(s) \|_0^2 \, ds + \int_0^t \| g_{\epsilon k}(s) \|_0^2 \, ds \\ &+3\int_0^t \left\{ \| v'_{\epsilon k}(s) \|_0^2 + \| \phi_{\epsilon k}(s) \|_0^2 \right\} ds + \int_0^t \int_0^{\| v_{\epsilon k}(s) \|_{1/2}^2} \left| \frac{\partial}{\partial t} M(s, \xi) \right| d\xi ds. \end{aligned} \tag{3.79}$$

Usando a hipótese (3.4) obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^{\| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2} \left| \frac{\partial}{\partial t} M(s, \xi) \right| d\xi dt &\leqslant \int_0^t \int_0^{\| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2} K(1 + M(s, \xi)) d\xi ds \\ &= K \int_0^t \left\{ \| v_{\epsilon k}(s) \|_{1/2}^2 + \hat{M}(s, \| v_{\epsilon k}(s) \|_{1/2}^2) \right\} ds, \end{aligned}$$

e usando (3.47)-(3.49), (3.54) temos

$$\begin{aligned} &\| v'_{\epsilon k}(t) \|_0^2 + \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2 + \| \phi_{\epsilon k}(t) \|_0^2 + \hat{M}(t, \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2) + \\ &2\int_0^t \| \phi_{\epsilon k}(s) \|_{1/2}^2 \, ds \leqslant E_1 + 3\int_0^t \left\{ \| v'_{\epsilon k}(s) \|_0^2 + \| \phi_{\epsilon k}(s) \|_0^2 \right\} ds + \\ &K \int_0^t \left\{ \| v_{\epsilon k}(s) \|_{1/2}^2 + \hat{M}(s, \| v_{\epsilon k}(s) \|_{1/2}^2) \right\} ds, \end{aligned} \tag{3.80}$$

onde

$$\begin{aligned} E_1 = &\| u_1 \|_0^2 + \| \theta_0 \|_{1/2}^2 + \| A^{1/2} u_0 \|^2 + \| u_0 \|^2 \\ &+\hat{M}(0, \| A^{1/2} u_0 \|^2 + \| u_0 \|^2) + |f|_{2,H}^2 + |g|_{2,H}^2. \end{aligned} \tag{3.81}$$

De (3.80) e da Desigualdade de Gronwall obtemos

$$\begin{aligned} &\| v'_{\epsilon k}(t) \|_0^2 + \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2 + \| \phi_{\epsilon k}(t) \|_0^2 \\ &+\hat{M}(t, \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2) + 2\int_0^t \| \phi_{\epsilon k}(s) \|_{1/2}^2 \, ds \leqslant C_2, \end{aligned} \tag{3.82}$$

$\forall\ t \in [0, \tau_k]$, **onde** $C_2 > 0$ **é independente de** k **e de** ϵ**. Em particular, temos**

$$\begin{aligned} &\| v'_{\epsilon k}(t) \|_0^2 \leqslant C_2; \ \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2 \leqslant C_2, \\ &\| \phi_{\epsilon k}(t) \|_0^2 \leqslant C_2; \ \int_0^t \| \phi_{\epsilon k}(s) \|_{1/2}^2 \, ds \leqslant C_2, \end{aligned} \tag{3.83}$$

$\forall\ t \in [0, \tau_k]$. **Resulta de (3.83) e do Corolário do Teorema de Carathéodory, cf. Capítulo 1, que a solução** $\{\nu_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k}\}$ **pode ser estendida ao intervalo** $[0, T]$.

3.2 Prova do Teorema 3.2

Como descrito no início deste Capítulo a solução do problema (P.3) será obtida como limite, quando $k \to \infty$, **da solução do problema truncado. Note que as estimativas em (3.83) implicam em:**

$$\begin{aligned} &|\nu_{\epsilon k}|^2_{\infty, \mathcal{H}_{1/2}} \leqslant C_2;\ |\nu'_{\epsilon k}|^2_{\infty, \mathcal{H}_0} \leqslant C_2, \\ &|\phi_{\epsilon k}|^2_{\infty, \mathcal{H}_0} \leqslant C_2;\ |\phi_{\epsilon k}|^2_{2, \mathcal{H}_{1/2}} \leqslant C_2, \end{aligned} \tag{3.84}$$

$\forall\ t \in [0, T]$. **Ou seja a sequência** $(\nu_{\epsilon k})_k$ **é limitada em** $L^\infty(0, T; \mathcal{H}_{1/2})$, $(\nu'_{\epsilon k})_k$ **é limitada em** $L^\infty(0, T; \mathcal{H}_0)$ **e a sequência** $(\phi_{\epsilon k})_k$ **é limitada em** $L^2(0, T; \mathcal{H}_{1/2})$ **e em** $L^\infty(0, T; \mathcal{H}_0)$. **Pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbarki, mais precisamente seu Corolário, cf. Capítulo 1, temos que existem** $\nu_\epsilon \in L^\infty(0, T; \mathcal{H}_{1/2})$ **e** $\phi_\epsilon \in L^\infty(0, T; \mathcal{H}_0)$ **tais que, passando a uma subsequência se necessário vale**

$$\nu_{\epsilon k} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu_\epsilon \text{ em } L^\infty(0, T; \mathcal{H}_{1/2}), \tag{3.85}$$

$$\nu'_{\epsilon k} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu'_\epsilon \text{ em } L^\infty(0, T; \mathcal{H}_0), \tag{3.86}$$

$$\phi_{\epsilon k} \overset{*}{\rightharpoonup} \phi_\epsilon \text{ em } L^\infty(0, T; \mathcal{H}_0), \tag{3.87}$$

$$\phi_{\epsilon k} \rightharpoonup \phi_\epsilon \text{ em } L^2(0, T; \mathcal{H}_{1/2}). \tag{3.88}$$

Observação 3.8. *Sendo* $L^2(0, T; \mathcal{H}_{1/2})$ *um espaço de Hilbert temos que as topologias fraca e fraca-$*$ coincidem donde* $\phi_{\epsilon k} \overset{*}{\rightharpoonup} z_\epsilon$ *em* $L^2(0, T; \mathcal{H}_{1/2}) \Longleftrightarrow \phi_{\epsilon k} \rightharpoonup z_\epsilon$ *em* $L^2(0, T; \mathcal{H}_{1/2})$.

Observação 3.9. *Como* $L^\infty(0, T; \mathcal{H}_{1/2}) \hookrightarrow L^\infty(0, T; \mathcal{H}_0)$*, pois* $\mathcal{H}_{1/2} \hookrightarrow \mathcal{H}_0$*, temos que (3.85) é equivalente à*

$$\int_0^T (\nu_{\epsilon k}(t), w(t))_0 dt \longrightarrow \int_0^T (\nu_\epsilon(t), w(t))_0 dt,\ \forall\ w \in L^1(0, T; \mathcal{H}_0),$$

donde em particular obtemos

$$\int_0^T (\nu_{\epsilon k}(t), z)_0 \varphi(t) dt \longrightarrow \int_0^T (\nu_\epsilon(t), z)_0 \varphi(t) dt,\ \forall\ z \in \mathcal{H}_0,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Ou seja

$$(\nu_{\epsilon k}(t), z)_0 \longrightarrow (\nu_\epsilon(t), z)_0 \text{ em } \mathcal{D}'(0, T),\ \forall\ z \in \mathcal{H}_0. \tag{3.89}$$

Assim se $v'_{\epsilon k} \overset{*}{\rightharpoonup} w_\epsilon$ *em* $L^\infty(0,T;\mathcal{H}_0)$, *então procedendo de modo análogo obtemos*

$$(v'_{\epsilon k}(t), z)_0 \longrightarrow (w_\epsilon(t), z)_0 \text{ em } \mathcal{D}'(0,T), \ \forall\, z \in \mathcal{H}_0. \tag{3.90}$$

Logo pela unicidade do limite em $\mathcal{D}'(0,T)$ *obtemos de (3.89) e (3.90) que*

$$(w_\epsilon(t), z)_0 = (v'_\epsilon(t), z)_0, \ \forall\, z \in \mathcal{H}_0 \text{ e } t \in [0,T].$$

Daí, $w_\epsilon = v'_\epsilon$. *De modo análogo verifica-se (3.88).*

As estimativas obtidas até aqui não são suficientes para passar o limite no termo não linear.

3.2.1 Estimativas II

Nesta seção obteremos estimativas mais precisas para $v_{\epsilon k}$ **e** $v'_{\epsilon k}$ **bem como para** $v''_{\epsilon k}$ **e** $\phi'_{\epsilon k}$ **que nos permitam tomar o limite em (3.36) e (3.37), quando** $k \to \infty$**, a fim de obtermos o Teorema 3.2. Com efeito, tomando o produto interno em** $\mathcal{H}_0$ **de ambos os lados de (3.36) por** $2\lambda^{1/2}v'_{\epsilon k}$**, temos:**

$$\begin{gathered}2(v''_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/2}v'_{\epsilon k}(t))_0 + 2(\lambda v_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/2}v'_{\epsilon k}(t))_0 \\ +M(t, \| v_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2}) 2(\lambda v_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/2}v'_{\epsilon k}(t))_0 \\ +2(\phi_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/2}v'_{\epsilon k}(t))_0 = 2(f_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/2}v'_{\epsilon k}(t))_0,\end{gathered}$$

ou

$$\begin{gathered}2(\lambda^{1/4}v''_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/4}v'_{\epsilon k}(t))_0 + 2(\lambda^{3/4}v_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/4}v'_{\epsilon k}(t))_0 \\ +M(t, \| v_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2}) 2(\lambda^{3/4}v_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/4}v'_{\epsilon k}(t))_0 \\ +2(\lambda^{1/4}\phi_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/4}v'_{\epsilon k}(t))_0 = 2(\lambda^{1/4}f_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/4}v'_{\epsilon k}(t))_0\end{gathered}$$

ou

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt} \| \lambda^{1/4}v'_{\epsilon k}(t) \|^2_0 + \frac{d}{dt} \| \lambda^{3/4}v_{\epsilon k}(t) \|^2_0 + M(t, \| v_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2}) \frac{d}{dt} \| \lambda^{3/4}v_{\epsilon k}(t) \|^2_0 \\ +2(\lambda^{1/4}\phi_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/4}v'_{\epsilon k}(t))_0 = 2(\lambda^{1/4}f_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/4}v'_{\epsilon k}(t))_0,\end{gathered}$$

ou ainda

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt} \| v'_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/4} + \frac{d}{dt} \| v_{\epsilon k}(t) \|^2_{3/4} + M(t, \| v_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2}) \frac{d}{dt} \| v_{\epsilon k}(t) \|^2_{3/4} \\ +2(\lambda^{1/4}\phi_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/4}v'_{\epsilon k}(t))_0 = 2(\lambda^{1/4}f_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/4}v'_{\epsilon k}(t))_0.\end{gathered}$$

Daí procedendo como antes obtemos

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt} \| v'_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/4} + \frac{d}{dt} \| v_{\epsilon k}(t) \|^2_{3/4} + M(t, \| v_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2}) \frac{d}{dt} \| v_{\epsilon k}(t) \|^2_{3/4} \\ \leqslant \| \phi_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/4} + 2 \| v'_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/4} + \| f_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/4} .\end{gathered} \tag{3.91}$$

De modo análogo tomando o produto interno em $\mathcal{H}_0$ de ambos os lados de (3.37) por $2\lambda^{1/2}\phi_{\epsilon k}(t)$**, obtemos**

$$\frac{d}{dt}\| \phi_{\epsilon k}(t) \|_{1/4}^2 + 2 \| \phi_{\epsilon k}(t) \|_{3/4}^2 \leqslant 2 \| \phi_{\epsilon k}(t) \|_{1/4}^2 + \| v'_{\epsilon k}(t) \|_{1/4}^2 + \| g_{\epsilon k}(t) \|_{1/4}^2 . \tag{3.92}$$

Somando as desigualdades obtidas em (3.91) e (3.92), obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left\{ \| v'_{\epsilon k}(t) \|_{1/4}^2 + \| v_{\epsilon k}(t) \|_{3/4}^2 + \| \phi_{\epsilon k}(t) \|_{1/4}^2 \right\} \\ &+2 \| \phi_{\epsilon k}(t) \|_{3/4}^2 + M(t, \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2)\frac{d}{dt} \| v_{\epsilon k}(t) \|_{3/4}^2 \\ &\leqslant 3 \| v'_{\epsilon k}(t) \|_{1/4}^2 + 3 \| \phi_{\epsilon k}(t) \|_{1/4}^2 + \| f_{\epsilon k}(t) \|_{1/4}^2 + \| g_{\epsilon k}(t) \|_{1/4}^2 . \end{aligned} \tag{3.93}$$

Note que

$$\begin{aligned} M(t, \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2)\frac{d}{dt} \| v_{\epsilon k}(t) \|_{3/4}^2 &= \frac{d}{dt}\left\{ M(t, \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2) \| v_{\epsilon k}(t) \|_{3/4}^2 \right\} \\ &- \| v_{\epsilon k}(t) \|_{3/4}^2 M'(t, \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2)\frac{d}{dt} \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2 \end{aligned}$$

e

$$\frac{d}{dt} \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2 = 2(\lambda^{3/4}v_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/4}v'_{\epsilon k}(t))_0. \quad \textbf{(cf. Capítulo 2)}$$

Substituindo as equações acima em (3.93), integrando de 0 até $t \leqslant T$ **e usando (3.38), obtemos**

$$\begin{aligned} &\| v'_{\epsilon k}(t) \|_{1/4}^2 + \| v_{\epsilon k}(t) \|_{3/4}^2 + \| \phi_{\epsilon k}(t) \|_{1/4}^2 \\ &+2\int_0^t \| \phi_{\epsilon k}(s) \|_{3/4}^2 \, ds + M(t, \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2) \| v_{\epsilon k}(t) \|_{3/4}^2 \\ &\leqslant \| v_{1\epsilon k} \|_{1/4}^2 + \| v_{0\epsilon k} \|_{3/4}^2 + \| \phi_{0\epsilon k} \|_{1/4}^2 + M(t, \| v_{0\epsilon k} \|_{1/2}^2) \| v_{0\epsilon k} \|_{3/4}^2 \\ &+ \| f_{\epsilon k}(t) \|_{2,\mathcal{H}_{1/4}}^2 + \| g_{\epsilon k}(t) \|_{2,\mathcal{H}_{1/4}}^2 \\ &+C_4\int_0^t \left\{ \| v_{\epsilon k}(s) \|_{3/4}^3 \| v'_{\epsilon k}(s) \|_{1/4} + \| v'_{\epsilon k}(s) \|_{1/4}^2 + \| \phi_{\epsilon k}(s) \|_{1/4}^2 \right\} ds, \end{aligned} \tag{3.94}$$

onde $C_4 = \max\{3, 2C_3\}$ **e** $C_3 = \max\left\{ \left|\frac{\partial M}{\partial t}(\xi, \eta)\right|^2 ; (\xi, \eta) \in [0, T] \times [0, a^2]\right\}$**. Da definição de campo truncado segue que** $\| v_{1\epsilon k} \|_{1/4}^2 \leqslant \| v_{1\epsilon} \|_{1/4}^2$, $\| v_{0\epsilon k} \|_{3/4}^2 \leqslant \| v_{0\epsilon} \|_{3/4}^2$, $\| \phi_{0\epsilon k} \|_{1/4}^2 \leqslant \| \phi_{0\epsilon} \|_{1/4}^2$, $\| f_{\epsilon k} \|_{2,\mathcal{H}_{1/4}}^2 \leqslant \| f_\epsilon \|_{2,\mathcal{H}_{1/4}}^2$ **e** $\| g_{\epsilon k} \|_{2,\mathcal{H}_{1/4}}^2 \leqslant \| g_\epsilon \|_{2,\mathcal{H}_{1/4}}^2$**. Daí obtemos:**

$$\| v_{1\epsilon k} \|_{1/4}^2 \leqslant \| A^{1/4}u_1 \|^2 + \| u_1 \|^2, \tag{3.95}$$

$$\| v_{0\epsilon k} \|_{3/4}^2 \leqslant \frac{3}{2}\left[\| A^{3/4}u_0 \|^2 + \| u_0 \|^2 \right], \tag{3.96}$$

$$\| \phi_{0\epsilon k} \|_{1/4}^2 \leqslant \| A^{1/4}\theta_0 \|^2 + \| \theta_0 \|^2, \tag{3.97}$$

$$\| f_{\epsilon k}(t) \|_{2,\mathcal{H}_{1/4}}^2 = \| A_\epsilon^{1/4} f \|_{1/4}^2 \leqslant \| A^{1/4} f \|_{2,H}^2 + \| f \|_{2,H}^2, \tag{3.98}$$

$$\| g_{\epsilon k}(t) \|_{2,\mathcal{H}_{1/4}}^2 = \| A_\epsilon^{1/4} g \|_{1/4}^2 \leqslant \| A^{1/4} g \|_{2,H}^2 + \| g \|_{2,H}^2 . \tag{3.99}$$

Justificaremos apenas as desigualdades (3.96) e (3.98) pois as demais seguem análogamente. Para a desigualdade (3.96) note que para $\lambda, \epsilon \geqslant 0$ vale $(\lambda+\epsilon)^{3/2} \leqslant \frac{3}{2}(\lambda^{3/2}+\epsilon^{3/2})$, donde em vista de (1.12) com $\alpha = \xi = \frac{3}{4}$ temos

$$\begin{aligned}
\| v_{0\epsilon k} \|_{3/4}^2 \leqslant \| v_{0\epsilon} \|_{3/4}^2 = \| \mathcal{U}_\epsilon(u_0) \|_{3/4}^2 = \| A_\epsilon^{3/4} u_0 \|^2 \\
\leqslant \epsilon^{3/2} \int_{-\epsilon}^{0} d(E_\lambda u_0, u_0) + \int_0^{+\infty} (\lambda+\epsilon)^{3/2} d(E_\lambda u_0, u_0) \\
\leqslant \epsilon^{3/2} \int_{-\epsilon}^{0} d(E_\lambda u_0, u_0) + \frac{3}{2}\epsilon^{3/2} \int_0^{+\infty} d(E_\lambda u_0, u_0) + \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} \lambda^{3/2} d(E_\lambda u_0, u_0) \\
\leqslant \frac{3}{2}\epsilon^{3/2} \int_0^{+\infty} d(E_\lambda u_0, u_0) + \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} \lambda^{3/2} d(E_\lambda u_0, u_0) \\
\leqslant \frac{3}{2}\epsilon^{3/2} \| u_0 \|^2 + \frac{3}{2} \| A^{3/4} u_0 \|^2 \leqslant \frac{3}{2}\big[\| u_0 \|^2 + \| A^{3/4} u_0 \|^2 \big].
\end{aligned}$$

Logo vale (3.96). Quanto à (3.98) temos

$$\| f_{\epsilon k} \|_{2,\mathcal{H}_{1/4}}^2 = \int_0^T \| f_{\epsilon k}(t) \|_{1/4}^2 \, dt = \int_0^T \| A_\epsilon^{1/4} f \|^2 \, dt = \| A_\epsilon^{1/4} f \|_{2,H}^2 .$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\| f_{\epsilon k} \|_{2,\mathcal{H}_{1/4}}^2 = \| A_\epsilon^{1/4} f \|_{2,H}^2 = \int_0^T \int_{-\epsilon}^{+\infty} (\lambda+\epsilon)^{1/2} d(E_\lambda f, f) dt \\
\leqslant \int_0^T \int_{-\epsilon}^{+\infty} \lambda^{1/2} d(E_\lambda f, f) dt + \epsilon^{1/2} \int_0^T \int_{-\epsilon}^{+\infty} d(E_\lambda f, f) dt \\
\leqslant \int_0^T \Big\{ \| A^{1/4} f(t) \|^2 + \| f(t) \|^2 \Big\} = \| A^{1/4} f \|_{2,H}^2 + \| f \|_{2,H}^2 .
\end{aligned}$$

Logo vale (3.98).

Substituindo (3.95)-(3.99) em (3.94) obtemos

$$\begin{aligned}
\| v'_{\epsilon k}(t) \|_{1/4}^2 + \| v_{\epsilon k}(t) \|_{3/4}^2 + \| \phi_{\epsilon k}(t) \|_{1/4}^2 \\
+2\int_0^t \| \phi_{\epsilon k}(s) \|_{3/4}^2 \, ds + M(t, \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2) \| v_{\epsilon k}(t) \|_{3/4}^2 \\
\leqslant E_2 + C_4 \int_0^t \Big\{ \| v_{\epsilon k}(s) \|_{3/4}^3 \| v'_{\epsilon k}(s) \|_{1/4} + \| v'_{\epsilon k}(s) \|_{1/4}^2 + \| \phi_{\epsilon k}(s) \|_{1/4}^2 \Big\} ds,
\end{aligned} \tag{3.100}$$

onde

$$\begin{aligned}
E_2 = \| A^{1/4} u_1 \|^2 + \| u_1 \|^2 + \frac{3}{2}(C_0+1)\big[\| A^{3/4} u_0 \|^2 + \| u_0 \|^2 + \| A^{1/4} \theta_0 \|^2 \\
+ \| \theta_0 \|^2 + \| A^{1/4} f \|_{2,H}^2 + \| f \|_{2,H}^2 + \| A^{1/4} g \|_{2,H}^2 + \| g \|_{2,H}^2 .
\end{aligned}$$

Definindo $\gamma_{\epsilon k}(t) = \| v'_{\epsilon k}(t) \|_{1/4}^2 + \| v_{\epsilon k}(t) \|_{3/4}^2 + \| \phi_{\epsilon k}(t) \|_{1/4}^2$, $t \in [0,T]$, obtemos de (3.100) que

$$0 \leqslant \gamma_{\epsilon k}(t) \leqslant E_2 + C_4 \int_0^t \Big\{ \gamma_{\epsilon k}(s) + \big[\gamma_{\epsilon k}(s)\big]^2 \Big\} ds. \tag{3.101}$$

Lemma 3.2.1. *Se* $\gamma_{\epsilon k}(t)$ *satisfaz (3.101) em* $[0,T]$ *então existe* $0 \leqslant T_0 \leqslant T$ *tal que*

$$\gamma_{\epsilon k}(t) \leqslant e^{C_4 T_0\{1+E_2^{-1}-e^{C_4 T_0}\}^{-1}}, \ \forall\ t \in [0,T_0]. \tag{3.102}$$

Demonstração. Defina $\varphi(t) = \displaystyle\int_0^t \Big\{\gamma_{\epsilon k}(s) + \big[\gamma_{\epsilon k}(s)\big]^2\Big\} ds$. Então, $\varphi^{'}(t) = \gamma_{\epsilon k}(t) + \big[\gamma_{\epsilon k}(t)\big]^2$, pois $\varphi(0) = 0$. De (3.101) temos

$$\big[\gamma_{\epsilon k}(t)\big]^2 \leqslant (E_2 + C_4\varphi(t))^2 \Longrightarrow \varphi^{'}(t) = \gamma_{\epsilon k}(t) + \big[\gamma_{\epsilon k}(t)\big]^2$$

$$\leqslant \gamma_{\epsilon k}(t) + (E_2 + C_4\varphi(t))^2 = E_2 + C_4\varphi(t) + (E_2 + C_4\varphi(t))^2,$$

portanto

$$\varphi^{'}(t) \leqslant E_2 + C_4\varphi(t) + (E_2 + C_4\varphi(t))^2. \tag{3.103}$$

Fazendo $y = y(t) = E_2 + C_4\varphi(t)$ temos

$$y^{'} = C_4\varphi^{'}(t) \leqslant C_4 y + C_4 y^2. \tag{3.104}$$

Multiplicando (3.104) por $e^{C_4 t}$ temos

$$e^{-C_4 t} y^{'} \leqslant C_4 y e^{-C_4 t} + C_4 y^2 e^{-C_4 t}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}(e^{-C_4 t} y) = -C_4 y e^{-C_4 t} + y e^{-C_4 t} \leqslant C_4 y^2 e^{-C_4 t},$$

ou seja

$$\frac{d}{dt}(e^{-C_4 t} y) \leqslant C_4 y^2 e^{-C_4 t}. \tag{3.105}$$

Integrando (3.105) de 0 ate $t \leqslant T$ e observando que $y(0) = E_2$ obtemos

$$y \leqslant e^{C_4 t}\Big\{E_2 + C_4\int_0^t y^2 e^{-C_4 s} ds\Big\}. \tag{3.106}$$

Fazendo $z = z(t) = \displaystyle\int_0^t y^2 e^{-C_4 s} ds$ temos de (3.106) que

$$y \leqslant e^{C_4 t}(E_2 + C_4 z) \Longrightarrow y^2 \leqslant e^{2C_4 t}(E_2 + C_4 z)^2$$

$$\Longrightarrow e^{-C_4 t} y^2 \leqslant e^{C_4 t}(E_2 + C_4 z)^2. \tag{3.107}$$

Da definição de z temos $z^{'}(t) = e^{-C_4 t} y^2$, logo de (3.107) temos

$$z^{'}(t) \leqslant e^{C_4 t}(E_2 + C_4 z)^2 \Longleftrightarrow \frac{(E_2 + C_4 z)^{'}}{(E_2 + C_4 z)^2} \leqslant e^{C_4 t},$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{-1}{E_2 + C_4 z}\right) \leqslant e^{C_4 t}. \tag{3.108}$$

Integrando (3.108) de 0 ate $t \leqslant T$ obtemos

$$\frac{-1}{E_2 + C_4 z} \leqslant -\frac{1}{E_2} + e^{C_4 t} - 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{E_2 + C_4 z} \geqslant 1 + \frac{1}{E_2} - e^{C_4 t}. \tag{3.109}$$

Note que $1 + \frac{1}{E_2} - e^{C_4 t} > 0 \Longleftrightarrow e^{C_4 t} < 1 + \frac{1}{E_2} \Longleftrightarrow t < \frac{1}{C_4} \ln\big(1 + \frac{1}{E_2}\big) := T^*$. Assim tomando $T_0 < T^*$ obtemos de (3.109)

$$E_2 + C_4 z \leqslant \big(1 + E_2^{-1} - e^{C_4 t}\big)^{-1}, \ \forall \ t \in [0, T_0].$$

Daí como

$$e^{-C_4 t}\gamma_{\epsilon k}(t) \leqslant e^{-C_4 t} y \leqslant e^{-C_4 t} e^{C_4 t}\big(1 + E_2^{-1} - e^{C_4 t}\big)^{-1}$$

$$\Longrightarrow \gamma_{\epsilon k}(t) \leqslant e^{C_4 t}\big(1 + E_2^{-1} - e^{C_4 t}\big)^{-1} \leqslant e^{C_4 T_0}\big(1 + E_2^{-1} - e^{C_4 T_0}\big)^{-1},$$

ou seja

$$\gamma_{\epsilon k}(t) \leqslant e^{C_4 T_0}\big(1 + E_2^{-1} - e^{C_4 T_0}\big)^{-1}.$$

□

Do Lema 3.2.1 e de (3.101) obtemos a estimativa

$$\| v'_{\epsilon k}(t) \|_{1/4}^2 + \| v_{\epsilon k}(t) \|_{3/4}^2 + \| \phi_{\epsilon k}(t) \|_{1/4}^2 \leqslant E_3, \tag{3.110}$$

$\forall \ t \in [0, T_0], \ \forall \ \epsilon \in (0,1)$ **e** $\forall \ k \in \mathbb{N}$**, onde**

$$E_3 = e^{C_4 T_0}\big(1 + E_2^{-1} - e^{C_4 T_0}\big)^{-1}. \tag{3.111}$$

De (3.110) segue que

$$v_{\epsilon k} \overset{*}{\rightharpoonup} v_\epsilon \ \textbf{em} \ L^\infty(0, T_0; \mathcal{H}_{3/4}), \tag{3.112}$$

$$v'_{\epsilon k} \overset{*}{\rightharpoonup} v'_\epsilon \ \textbf{em} \ L^\infty(0, T_0; \mathcal{H}_{1/4}), \tag{3.113}$$

$$\phi_{\epsilon k} \overset{*}{\rightharpoonup} \phi_\epsilon \ \textbf{em} \ L^\infty(0, T_0; \mathcal{H}_{1/4}). \tag{3.114}$$

No que segue estaremos supondo $t \in [0, T_0]$**.**

Vejamos agora uma limitação para $v''_{\epsilon k}$ **e** $\phi'_{\epsilon k}$ **em** $L^\infty(0, T_0; \mathcal{H}_{-1/4})$ **e** $L^2(0, T_0; \mathcal{H}_{-1/2})$**, respectivamente. De fato, de (3.36) obtemos**

$$v''_{\epsilon k}(t) = f_{\epsilon k}(t) - \lambda v_{\epsilon k}(t) - M(t, \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2)\lambda v_{\epsilon k}(t) - \phi_{\epsilon k}(t).$$

Logo temos

$$\begin{aligned}
\| v''_{\epsilon k}(t) \|_{-1/4} &\leqslant \| f_{\epsilon k}(t) \|_{-1/4} + \| \lambda v_{\epsilon k}(t) \|_{-1/4} \\
&+ M(t, \| v_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2}) \| \lambda v_{\epsilon k}(t) \|_{-1/4} + \| \phi_{\epsilon k}(t) \|_{-1/4} \\
&\leqslant C_5 \| f_{\epsilon k}(t) \|_0 + \| v_{\epsilon k}(t) \|_{3/4} + \sqrt{C_0} \| v_{\epsilon k}(t) \|_{3/4} + C_5 \| \phi_{\epsilon k}(t) \|_0 \\
&\leqslant C_5 \| f_{\epsilon k}(t) \|_0 + C_7 \| v_{\epsilon k}(t) \|_{3/4} + C_8 \| \phi_{\epsilon k}(t) \|_{1/4},
\end{aligned}$$

onde C_5 **é a constante da imersão** $\mathcal{H}_0 \hookrightarrow \mathcal{H}_{-1/4}$, $C_7 = 1 + \sqrt{C_0}$ **e** $C_8 = C_5 C_6$ **com** C_6 **a constante da imersão** $\mathcal{H}_{1/4} \hookrightarrow \mathcal{H}_0$**. Usando (3.110) e o fato de** $\| f_{\epsilon k}(t) \|_0 \leqslant \| f_\epsilon(t) \|_0 \leqslant \| f(t) \|$ **, obtemos**

$$|v''_{\epsilon k}|_{\infty, \mathcal{H}_{-1/4}} \leqslant \sup_{t \in [0,T_0]} ess \| v''_{\epsilon k}(t) \|_{-1/4} \leqslant C_9. \tag{3.115}$$

Analogamente, de (3.37) temos

$$\phi'_{\epsilon k}(t) = g_{\epsilon k}(t) - \lambda \phi_{\epsilon k}(t) - v'_{\epsilon k}(t).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\| \phi'_{\epsilon k}(t) \|_{-1/2} &\leqslant \| g_{\epsilon k}(t) \|_{-1/2} + \| \lambda \phi_{\epsilon k}(t) \|_{-1/2} + \| \lambda v'_{\epsilon k}(t) \|_{-1/2} \\
&\leqslant C_{10} \| g_{\epsilon k}(t) \|_0 + \| \phi_{\epsilon k}(t) \|_{1/2} + C_{10} \| v'_{\epsilon k}(t) \|_0 \\
&\leqslant C_{10} \| g_{\epsilon k}(t) \|_0 + C_{11} \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/4} + C_{12} \| v'_{\epsilon k}(t) \|_{1/4},
\end{aligned}$$

onde C_{10} **é a constante da imersão** $\mathcal{H}_0 \hookrightarrow \mathcal{H}_{-1/2}$, C_{11} **a constante da imersão** $\mathcal{H}_{1/2} \hookrightarrow \mathcal{H}_{1/4}$ **e** $C_{12} = C_{10} C_6$**. Seque que**

$$|\phi_{\epsilon k}|_{2, \mathcal{H}_{-1/2}} \leqslant C_{13}. \tag{3.116}$$

Portanto $v''_{\epsilon k}$ **e** $\phi'_{\epsilon k}$ **são limitados em em** $L^\infty(0, T_0; \mathcal{H}_{-1/4})$ **e** $L^2(0, T_0; \mathcal{H}_{-1/2})$, **respectivamente, donde passando a uma subsequência se necessário, obtemos**

$$v''_{\epsilon k} \overset{*}{\rightharpoonup} v''_\epsilon \text{ em } L^\infty(0, T_0; \mathcal{H}_{-1/4}), \tag{3.117}$$

$$\phi'_{\epsilon k} \rightharpoonup \phi'_\epsilon \text{ em } L^2(0, T_0; \mathcal{H}_{-1/2}). \tag{3.118}$$

3.2.2 Análise do Termo Não Linear

Nesta seção obteremos via Teorema de Áscoli-Arzelá a convergência do termo não linear e por conseguinte a prova do Teorema 3.2. Para tanto consideremos a sequência $\psi_{\epsilon k}(t) = \| v_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2}$, **definida em** $[0, T_0]$**. Como** $v_{\epsilon k}, v'_{\epsilon k} \in$

$L^\infty(0,T_0;\mathcal{H}_{0,k})$ **temos em particular** $\nu_{\epsilon k} \in L^\infty(0,T_0;\mathcal{H}_{0,k})$ **e** $\nu'_{\epsilon k} \in L^\infty(0,T_0;\mathcal{H}_{1/2})$, **donde pelo Teorema 1.13 obtemos** $\nu_{\epsilon k} \in C^0([0,T_0];\mathcal{H}_{1/2})$. **Portanto** $(\psi_{\epsilon k})_{k\in\mathbb{N}}$ **é uma sequência de funções contínuas com valores reais. Mais ainda, da estimativa (3.83) obtemos**

$$|\psi_{\epsilon k}(t)| = \| \nu_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2} \leqslant C_2,\ \forall\ \epsilon \in (0,1), \forall\ k \in \mathbb{N}\ e\ \forall\ t \in [0,T_0]. \tag{3.119}$$

Por outro lado, dados $t,s \in [0,T_0]$ **temos:**

$$\begin{aligned}|\psi_{\epsilon k}(t) - \psi_{\epsilon k}(s)| &= \Big|\| \nu_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2} - \| \nu_{\epsilon k}(s) \|^2_{1/2}\Big| = \left|\int_s^t \frac{d}{dt} \| \nu_{\epsilon k}(\rho) \|^2_{1/2}\, d\rho\right| \\ &= 2\left|\int_s^t (\lambda^{3/4}\nu_{\epsilon k}(\rho), \lambda^{1/4}\nu'_{\epsilon k}(\rho))_0 d\rho\right| \leqslant 2\left|\int_s^t \| \nu_{\epsilon k}(\rho) \|_{3/4} \| \nu'_{\epsilon k}(\rho) \|_{1/4}\right| \\ &\leqslant \left|\int_s^t \left\{ \| \nu_{\epsilon k}(\rho) \|^2_{3/4} + \| \nu'_{\epsilon k}(\rho) \|^2_{1/4} \right\} d\rho\right| \leqslant E_3 \left|\int_s^t d\rho\right| = E_3|t-s|,\end{aligned}$$

onde E_3 **é definido em (3.111). Portanto,**

$$|\psi_{\epsilon k}(t) - \psi_{\epsilon k}(s)| \leqslant E_3|t-s|,\ \forall\ \epsilon \in (0,1), \forall\ k \in \mathbb{N}\ e\ \forall\ t \in [0,T_0]. \tag{3.120}$$

Em outras palavras, $(\psi_{\epsilon k})_{k\in\mathbb{N}}$ **é uniformemente limitada e equicontínua em** $[0,T_0]$. **Logo pelo Teorema de Áscoli-Arzelá existem uma subsequência de** $(\psi_{\epsilon k})$, **a qual ainda denotaremos por** $(\psi_{\epsilon k})$, **e** $\psi_\epsilon \in C^0([0,T_0];\mathbb{R})$ **tais que**

$$\psi_{\epsilon k} \longrightarrow \psi_\epsilon \text{ uniformemente em } [0,T_0]. \tag{3.121}$$

Como $M \in C^1([0,T_0] \times [0,+\infty))$ **obtemos de (3.121) que**

$$M(t,\psi_{\epsilon k}(t)) \longrightarrow M(t,\psi_\epsilon(t)) \text{ uniformemente em } [0,T_0]. \tag{3.122}$$

Das convergências (3.112) e (3.122) concluímos que

$$M(t,\psi_{\epsilon k}(t))\lambda^{3/4}\nu_{\epsilon k}(t) \overset{*}{\rightharpoonup} M(t,\psi_\epsilon(t))\lambda^{3/4}\nu_\epsilon(t) \text{ em } L^\infty(0,T_0;\mathcal{H}_0). \tag{3.123}$$

A seguir listamos as convergências obtidas até agora

$$\nu_{\epsilon k} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu_\epsilon \text{ em } L^\infty(0,T_0;\mathcal{H}_{3/4}), \tag{3.124}$$

$$\nu'_{\epsilon k} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu'_\epsilon \text{ em } L^\infty(0,T_0;\mathcal{H}_{1/4}), \tag{3.125}$$

$$\nu''_{\epsilon k} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu''_\epsilon \text{ em } L^\infty(0,T_0;\mathcal{H}_{-1/4}), \tag{3.126}$$

$$\phi_{\epsilon k} \rightharpoonup \phi_\epsilon \text{ em } L^2(0,T_0;\mathcal{H}_{1/2}), \tag{3.127}$$

$$\phi'_{\epsilon k} \rightharpoonup \phi'_\epsilon \text{ em } L^2(0,T_0;\mathcal{H}_{-1/2}), \tag{3.128}$$

$$M(t,\psi_{\epsilon k}(t))\lambda^{3/4}\nu_{\epsilon k}(t) \overset{*}{\rightharpoonup} M(t,\psi_\epsilon(t))\lambda^{3/4}\nu_\epsilon(t) \text{ em } L^\infty(0,T_0;\mathcal{H}_0). \tag{3.129}$$

Das convergências (3.124)-(3.129) e observando que

$$f_{\epsilon k} \longrightarrow f_\epsilon \text{ em } L^2(0,T_0;\mathcal{H}_{1/4}) \text{ forte}, \tag{3.130}$$

$$g_{\epsilon k} \longrightarrow g_\epsilon \text{ em } L^2(0,T_0;\mathcal{H}_{1/4}) \text{ forte}, \tag{3.131}$$

tomamos o limite em (3.36) e (3.37) com $k \to +\infty$ donde deduzimos que os campos ν_ϵ e ϕ_ϵ estão na classe (3.15)-(3.17) e satisfazem:

$$\nu_\epsilon'' + \lambda\nu_\epsilon + M(\cdot, \| \psi_\epsilon(\cdot) \|_{1/2}^2)\lambda\nu_\epsilon + \phi_\epsilon = f_\epsilon \text{ em } L^2(0,T_0;\mathcal{H}_{-1/4}), \tag{3.132}$$

$$\phi_\epsilon' + \lambda\phi_\epsilon + \nu_\epsilon' = g_\epsilon \text{ em } L^2(0,T_0;\mathcal{H}_{-1/2}), \tag{3.133}$$

$$\nu_\epsilon(0) = \nu_{0\epsilon},\ \nu_\epsilon'(0) = \nu_{1\epsilon}, \phi_\epsilon(0) = \phi_{0\epsilon}. \tag{3.134}$$

De fato, dado $\nu \in L^2(0,T_0;\mathcal{H}_{1/4})$ consideremos o campo truncado ν_k associado à ν e por (3.36) obtemos

$$\begin{aligned}&\int_0^{T_0}\int_{\lambda_\epsilon}^{k} (\nu_{\epsilon k}''(t,\lambda) + \lambda\nu_{\epsilon k}(t,\lambda) + M(t, \| \nu_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2)\lambda\nu_{\epsilon k}(t,\lambda)\\ &+\phi_{\epsilon k}(t,\lambda), \nu_k(t,\lambda))_{\mathcal{H}(\lambda)} d\mu_\epsilon(\lambda)dt = \int_0^{T_0}\int_{\lambda_\epsilon}^{k} (f_{\epsilon k}(t,\lambda), \nu_k(t,\lambda))_{\mathcal{H}(\lambda)} d\mu_\epsilon(\lambda)dt.\end{aligned} \tag{3.135}$$

Da definição de campo truncado podemos reescrever (3.135) como segue

$$\begin{aligned}&\int_0^{T_0}\int_{\lambda_\epsilon}^{+\infty} (\nu_{\epsilon k}''(t,\lambda) + \lambda\nu_{\epsilon k}(t,\lambda) + M(t, \| \nu_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2)\lambda\nu_{\epsilon k}(t,\lambda)\\ &+\phi_{\epsilon k}(t,\lambda), \nu(t,\lambda))_{\mathcal{H}(\lambda)} d\mu_\epsilon(\lambda)dt = \int_0^{T_0}\int_{\lambda_\epsilon}^{+\infty} (f_{\epsilon k}(t,\lambda), \nu(t,\lambda))_{\mathcal{H}(\lambda)} d\mu_\epsilon(\lambda)dt,\end{aligned} \tag{3.136}$$

ou

$$\begin{aligned}&\int_0^{T_0} (\nu_{\epsilon k}''(t) + \lambda\nu_{\epsilon k}(t) + M(t, \| \nu_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2)\lambda\nu_{\epsilon k}(t) + \phi_{\epsilon k}(t), \nu(t))_0 dt\\ &= \int_0^{T_0} (f_{\epsilon k}(t), \nu(t))_0\, dt,\end{aligned} \tag{3.137}$$

ou ainda (cf. Capítulo 2)

$$\begin{aligned}&\int_0^{T_0} \left\langle \nu_{\epsilon k}''(t) + \lambda\nu_{\epsilon k}(t) + M(t, \| \nu_{\epsilon k}(\cdot) \|_{1/2}^2)\lambda\nu_{\epsilon k}(t) + \phi_{\epsilon k}(t), \nu(t) \right\rangle_{-1/4,1/4} dt\\ &= \int_0^{T_0} \langle f_{\epsilon k}(t), \nu(t)\rangle_{-1/4,1/4} dt,\ \forall\ \nu \in L^2(0,T_0;\mathcal{H}_{1/4}).\end{aligned} \tag{3.138}$$

Tomando o limite em (3.138) com $k \to +\infty$ e considerando as convergências (3.124)-(3.127), (3.129) e (3.130) obtemos (3.132). A verificação de (3.133) é inteiramente análoga à feita acima para (3.132). Vejamos agora os dados

iniciais. Consideremos $\varphi \in C^1([0,T_0],\mathbb{R})$ **tal que** $\varphi(0)=1$ **e** $\varphi(T_0)=0$. **Da convergência (3.125) temos em particular**

$$\int_0^{T_0}\left(v'_{\epsilon k}(t),\xi\right)_0\varphi(t)dt \longrightarrow \int_0^{T_0}\left(v'_{\epsilon}(t),\xi\right)_0\varphi(t)dt,\ \forall\ \xi\in\mathcal{H}_0. \tag{3.139}$$

Note que

$$\int_0^{T_0}\left(v'_{\epsilon k}(t),\xi\right)_0\varphi(t)dt = \int_0^{T_0}\left(v'_{\epsilon k}(t)\varphi(t),\xi\right)_0 dt = \left(\int_0^{T_0}v'_{\epsilon k}(t)\varphi(t)dt,\xi\right)_0$$

$$= \left(v_{\epsilon k}(t)\varphi(t)|_0^{T_0} - \int_0^{T_0}v_{\epsilon k}(t)\varphi'(t)dt,\xi\right)_0 = \left(-v_{\epsilon k}(0) - \int_0^{T_0}v_{\epsilon k}(t)\varphi'(t),\xi\right)_0$$

$$= -\left(v_{0\epsilon k},\xi\right)_0 - \int_0^{T_0}\left(v_{\epsilon k}(t),\xi\right)_0\varphi'(t)dt,$$

ou seja

$$\int_0^{T_0}\left(v'_{\epsilon k}(t),\xi\right)_0\varphi(t)dt = -\left(v_{0\epsilon k},\xi\right)_0 - \int_0^{T_0}\left(v_{\epsilon k}(t),\xi\right)_0\varphi'(t)dt.$$

Assim (3.139) é equivalente à

$$\begin{aligned}&-(v_{0\epsilon k},\xi)_0 - \int_0^{T_0}\left(v_{\epsilon k}(t),\xi\right)_0\varphi'(t)dt\\ &\longrightarrow -(v_\epsilon(0),\xi)_0 - \int_0^{T_0}\left(v_{\epsilon}(t),\xi\right)_0\varphi'(t)dt,\ \forall\ \xi\in\mathcal{H}_0.\end{aligned} \tag{3.140}$$

Da convergência (3.124) obtemos

$$\int_0^{T_0}\left(v_{\epsilon k}(t),\xi\right)_0\varphi'(t)dt \longrightarrow \int_0^{T_0}\left(v_{\epsilon}(t),\xi\right)_0\varphi'(t)dt,\ \forall\ \xi\in\mathcal{H}_0. \tag{3.141}$$

De (3.140) e (3.141) segue que

$$(v_{0\epsilon k},\xi)_0 \longrightarrow (v_\epsilon(0),\xi)_0,\ \forall\ \xi\in\mathcal{H}_0,\ \textbf{quando}\ k\to+\infty. \tag{3.142}$$

Ora, $v_{0\epsilon k}\longrightarrow v_{0\epsilon}$ **em** $\mathcal{H}_{3/4}$ **forte e** $\mathcal{H}_{3/4}\hookrightarrow\mathcal{H}_0$. **Daí** $v_{0\epsilon k}\longrightarrow v_{0\epsilon}$ **em** $\mathcal{H}_0$ **forte, em particular,** $v_{0\epsilon k}\rightharpoonup v_{0\epsilon}$ **em** $\mathcal{H}_0$. **Logo de (3.142) obtemos** $(v_{0\epsilon},\xi)_0=(v_\epsilon(0),\xi)_0,\ \forall\ \xi\in\mathcal{H}_0$. **Portanto** $v_\epsilon(0)=v_{0\epsilon}$. **Para provar que** $v'_\epsilon(0)=v_{1\epsilon}$ **e** $\phi_\epsilon(0)=\phi_{0\epsilon}$, **considere** φ **como acima e proceda analogamente com as convergências (3.125), (3.126) e (3.127), (3.128), respectivamente.**

Procedendo como na Observação 3.9, obtemos de (3.132)-(3.134) que

$$\frac{d}{dt}(v'_\epsilon(t),\xi)_0 + (\lambda^{3/4}v_\epsilon(t),\lambda^{1/4}\xi)_0 + M(t,\|\ v_\epsilon(t)\ \|^2_{1/2})(\lambda^{3/4}v_\epsilon(t),\lambda^{1/4}\xi)_0$$

$$+(\phi_\epsilon(t),\xi)_0 = (f_\epsilon(t),\xi)_0, \ \forall \xi \in \mathcal{H}_{1/4}, \forall \ \epsilon \in (0,1),$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0,T_0)$,

$$\frac{d}{dt}(\phi_\epsilon(t),\xi)_0 + (\lambda^{1/2}\phi_\epsilon(t),\lambda^{1/2}\xi)_0 + (v'_\epsilon(t),\xi)_0 = (g_\epsilon(t),\xi)_0, \ \forall \xi \in \mathcal{H}_{1/2}, \forall \ \epsilon \in (0,1),$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0,T_0)$,

$$v_\epsilon(0) = v_{0\epsilon}, \ v'_\epsilon(0) = v_{1\epsilon}, \phi_\epsilon(0) = \phi_{0\epsilon}.$$

Para concluírmos que os campos $\{v_\epsilon, \phi_\epsilon\}$ satisfazem o Teorema 3.2 é suficiente provar o seguinte resultado.

Lemma 3.2.2. *Se $\{v_\epsilon,\phi_\epsilon\}$ é o par de campos obtidos acima, então*

$$\psi_\epsilon(t) = \| v_\epsilon(t) \|^2_{1/2}, \ \forall \ t \in [0,T_0].$$

Demonstração. Sejam $w_{\epsilon k} = v_{\epsilon k} - v_\epsilon$ e $z_{\epsilon k} = \phi_{\epsilon k} - \phi_\epsilon$. Temos que o par de campos $\{w_{\epsilon k}, z_{\epsilon k}\}$ está na classe (3.15)-(3.17) e satisfazem as equações

$$\frac{d}{dt}(w'_{\epsilon k}(t),\xi)_0 + (\lambda^{3/4}w_{\epsilon k}(t),\lambda^{1/4}\xi)_0 + M(t,\| v_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2})(\lambda^{3/4}v_{\epsilon k}(t),\lambda^{1/4}\xi)_0$$

$$+\Big\{M(t,\| v_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2}) - M(t,\psi_\epsilon(t))\Big\}(\lambda^{3/4}v_{\epsilon k}(t),\lambda^{1/4}\xi)_0 + (z_{\epsilon k}(t),\xi)_0 = (f_{\epsilon k}(t) - f_\epsilon(t),\xi)_0, \tag{3.143}$$

$\forall \ \xi \in \mathcal{H}_{1/4}$, no sentido de $\mathcal{D}'(0,T_0)$,

$$\frac{d}{dt}(z_{\epsilon k}(t),\xi)_0 + (\lambda^{1/2}z_{\epsilon k}(t),\lambda^{1/2}\xi)_0 + (w'_{\epsilon k}(t),\xi)_0 = (g_{\epsilon k}(t) - g_\epsilon(t),\xi)_0, \tag{3.144}$$

$\forall \ \xi \in \mathcal{H}_{1/2}$, no sentido de $\mathcal{D}'(0,T_0)$ e

$$\begin{aligned} w_{\epsilon k}(0) &= v_{0\epsilon k} - v_{0\epsilon} \longrightarrow 0 \text{ em } \mathcal{H}_{3/4} \text{ forte}, \\ w'_{\epsilon k}(0) &= v_{1\epsilon k} - v_{1\epsilon} \longrightarrow 0 \text{ em } \mathcal{H}_{1/4} \text{ forte}, \\ z_{\epsilon k}(0) &= \phi_{0\epsilon k} - \phi_{0\epsilon} \longrightarrow 0 \text{ em } \mathcal{H}_{1/2} \text{ forte}. \end{aligned} \tag{3.145}$$

Fazendo $\xi = w'_{\epsilon k}$ em (3.143), $\xi = z_{\epsilon k}$ em (3.144) e somando as equações, obtemos:

$$\frac{d}{dt}\Big\{ \| w'_{\epsilon k}(t) \|^2_0 + \| w_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2} + \| z_{\epsilon k}(t) \|^2_0 + M(t,\| v_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2}) \| w_{\epsilon k}(t) \|^2_0 \Big\} + \| z_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2}$$
$$= -2(z_{\epsilon k}(t), w'_{\epsilon k}(t))_0 + \Big\{ M(t,\psi_\epsilon(t)) - M(t,\| v_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2}) \Big\}(\lambda^{3/4}v_{\epsilon k}(t),\lambda^{1/4}w'_{\epsilon k}(t))_0$$
$$+(f_{\epsilon k}(t) - f_\epsilon(t), w'_{\epsilon k}(t))_0 + (g_{\epsilon k}(t) - g_\epsilon(t), z_{\epsilon k}(t))_0 + \Big\{\frac{d}{dt}M(t,\| v_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2})\Big\} \| w_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2}.$$

Estimando como de costume o lado direito da equação acima, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{ \| w'_{\epsilon k}(t) \|_0^2 + \| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2 + \| z_{\epsilon k}(t) \|_0^2 + M(t, \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2) \| w_{\epsilon k}(t) \|_0^2 \right\} + \| z_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2 \\
&\leqslant \tfrac{1}{2} \| f_{\epsilon k}(t) - f_\epsilon(t) \|_0^2 + \tfrac{1}{2} \| g_{\epsilon k}(t) - g_\epsilon(t) \|_0^2 + C_{14} \| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2 + \tfrac{3}{2} \| w'_{\epsilon k}(t) \|_0^2 + \tfrac{3}{2} \| z_{\epsilon k}(t) \|_0^2 \\
&\qquad + \left| M(t, \psi_\epsilon(t)) - M(t, \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2) \right| \| v_{\epsilon k}(t) \|_{3/4}^2 \| w'_{\epsilon k}(t) \|_{1/4} .
\end{aligned}
\tag{3.146}
$$

Note que $\left| \dfrac{d}{dt} M(t, \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2) \right| \leqslant C_{14}, \ \forall\ \epsilon \in (0,1),\ k \in \mathbb{N}\ e\ t \in [0, T_0].$
De (3.110) obtemos

$$
\| v'_{\epsilon k}(t) \|_{1/4}^2 \leqslant E_3, \ \forall\ \epsilon \in (0,1),\ k \in \mathbb{N}\ e\ t \in [0, T_0]. \tag{3.147}
$$

Daí sendo $w_{\epsilon k} = v_{\epsilon k} - v_\epsilon$, obtemos

$$
\| w'_{\epsilon k}(t) \|_{1/4}^2 \leqslant 2 \left(\| v'_{\epsilon k}(t) \|_{1/4}^2 + \| v'_\epsilon(t) \|_{1/4}^2 \right) \leqslant E_4, \tag{3.148}
$$

onde $E_4 = 4E_3$. Integrando (3.146) e usando (3.147) e (3.148) resulta que

$$
\begin{aligned}
&\| w'_{\epsilon k}(t) \|_0^2 + \| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2 + \| z_{\epsilon k}(t) \|_0^2 \leqslant E_{0\epsilon k} \\
&+ C_{15} \int_0^t \left\{ \| w'_{\epsilon k}(s) \|_0^2 + \| w_{\epsilon k}(s) \|_{1/2}^2 + \| z_{\epsilon k}(s) \|_0^2 \right\} ds,
\end{aligned}
\tag{3.149}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
E_{0\epsilon k} &= \| v_{1\epsilon k} - v_{1\epsilon} \|_0^2 + \| v_{0\epsilon k} - v_{0\epsilon} \|_{1/2}^2 + \| \phi_{0\epsilon k} - \phi_{0\epsilon} \|_0^2 \\
&+ M(0, \| v_{0\epsilon k} \|_{1/2}^2) \| v_{0\epsilon k} - v_{0\epsilon} \|_0^2 + \tfrac{1}{2} |f_{\epsilon k}(t) - f_\epsilon(t)|_{\mathcal{H}_0}^2 + \tfrac{1}{2} |g_{\epsilon k}(t) - g_\epsilon(t)|_{\mathcal{H}_0}^2 \\
&+ C(T_0) \max_{0 \leqslant t \leqslant T_0} \left| M(t, \psi_\epsilon(t)) - M(t, \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2) \right|,
\end{aligned}
\tag{3.150}
$$

$C_{15} = \max\{\dfrac{3}{2}, C_{14}\}$ e $C(T_0) = \sqrt{E_4} |v_\epsilon|_{\infty, \mathcal{H}_{3/4}} T_0$. Da desigualdade de Gronwall e (3.149) implicam em

$$
\| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2 \leqslant E_{0\epsilon k} e^{C_{15} T_0}, \ \forall t \in [0, T_0]. \tag{3.151}
$$

Das convergências (3.129), (3.145) e do fato de

$$
f_{\epsilon k} \longrightarrow f_\epsilon \text{ em } L^2(0, T_0; \mathcal{H}_0) \text{ forte}, \tag{3.152}
$$

$$
g_{\epsilon k} \longrightarrow g_\epsilon \text{ em } L^2(0, T_0; \mathcal{H}_0) \text{ forte} \tag{3.153}
$$

(recorde que $L^2(0, T_0; \mathcal{H}_{1/4}) \hookrightarrow L^2(0, T_0; \mathcal{H}_0)$), resulta que

$$
E_{0\epsilon k} \longrightarrow 0, \tag{3.154}
$$

independente de $t \in [0, T_0]$. Logo de (3.151) obtemos

$$\| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2 \longrightarrow 0 \text{ em } C^0([0, T_0]), \text{ quando } k \to +\infty. \tag{3.155}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \left| \psi_\epsilon(t) - \| v_\epsilon(t) \|_{1/2}^2 \right| &\leqslant |\psi_\epsilon(t) - \psi_{\epsilon k}(t)| \\ &+ \left| \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2 - \| v_\epsilon(t) \|_{1/2}^2 \right| \\ \leqslant |\psi_\epsilon(t) - \psi_{\epsilon k}(t)| &+ \left\{ \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2} + \| v_\epsilon(t) \|_{1/2} \right\} \| v_{\epsilon k}(t) - v_\epsilon(t) \|_{1/2}, \end{aligned} \tag{3.156}$$

ou seja

$$\begin{aligned} \left| \psi_\epsilon(t) - \| v_\epsilon(t) \|_{1/2}^2 \right| &\leqslant |\psi_\epsilon(t) - \psi_{\epsilon k}(t)| \\ + \left\{ \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2} + \| v_\epsilon(t) \|_{1/2} \right\} &\| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2} . \end{aligned} \tag{3.157}$$

De (3.83) obtemos

$$\left\{ \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2} + \| v_\epsilon(t) \|_{1/2} \right\} \| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2} \leqslant C_{16} \| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}, \tag{3.158}$$

onde $C_{16} = 2\sqrt{C_2}$. Substituindo (3.158) em (3.157) obtemos

$$\left| \psi_\epsilon(t) - \| v_\epsilon(t) \|_{1/2}^2 \right| \leqslant |\psi_\epsilon(t) - \psi_{\epsilon k}(t)| + C_{16} \| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}, \ \forall\, t \in [0.T_0]. \tag{3.159}$$

Tomando o limite em (3.159) com $k \to +\infty$, usando (3.121) e (3.155) obtemos

$$\psi_\epsilon(t) = \| v_\epsilon(t) \|_{1/2}^2, \ \forall\, t \in [0, T_0].$$

□

Isto completa a prova do Lema 3.2.2 e portanto do Teorema 3.2.

3.3 Prova do Teorema 3.1

De acordo com o Corolário 4 do Teorema 3.2 o par de funções vetoriais $u_\epsilon = \mathcal{U}_\epsilon^{-1}(v_\epsilon)$ e $\theta_\epsilon = \mathcal{U}_\epsilon^{-1}(\phi_\epsilon)$ satisfazem (3.21)-(3.26). De (3.28), das estimativas (3.82) e (3.110), das convergências (3.124) e (3.125) e do Teorema da Limitação Uniforme, cf Capítulo 1, obtemos as seguintes estimativas:

$$\| u_\epsilon'(t) \|^2 = \| v_\epsilon'(t) \|_0^2 \leqslant \liminf_{k \to +\infty} \| v_{\epsilon k}'(t) \|_0^2 \leqslant C_{17} \tag{3.160}$$

$$\| A_\epsilon^{1/4} u'_\epsilon(t) \|^2 = \| v'_\epsilon(t) \|^2_{1/4} \leqslant \liminf_{k\to+\infty} \| v'_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/4} \leqslant C_{17} \tag{3.161}$$

$$\| A_\epsilon^{3/4} u_\epsilon(t) \|^2 = \| v_\epsilon(t) \|^2_{3/4} \leqslant \liminf_{k\to+\infty} \| v_{\epsilon k}(t) \|^2_{3/4} \leqslant C_{17} \tag{3.162}$$

$$\| \theta_\epsilon(t) \|^2 = \| \phi_\epsilon(t) \|^2_{1/2} \leqslant \liminf_{k\to+\infty} \| \phi_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2} \leqslant C_{17} \tag{3.163}$$

$$\| A_\epsilon^{1/2} u_\epsilon(t) \|^2 = \| v_\epsilon(t) \|^2_{1/2} \leqslant \liminf_{k\to+\infty} \| v_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2} \leqslant C_{17}, \tag{3.164}$$

onde C_{17} é uma constante positiva independente de ϵ e t.

A convergência do termo não linear será obtida como na Seção 3.2, isto é, fazendo uso do Teorema de Arzelá - Ascoli. De fato, para cada $\epsilon > 0$ consideremos a função real $\Psi_\epsilon(t) := \| A_\epsilon^{1/2} u_\epsilon(t) \|^2 = \| v_\epsilon(t) \|^2_{1/2}$. Em [30] o autor prova mediante os Espaços Intermediários, cuja definição é dada no Capítulo 4, que a função Ψ_ϵ está bem definida e é contínua em $[0, T_0]$. De (3.164) segue que

$$|\Psi_\epsilon(t)| \leqslant C_{17}, \ \forall \ t \in [0, T_0], \ \forall \ \epsilon \in (0,1). \tag{3.165}$$

Das estimativas (3.161) e (3.162) resulta que

$$|\Psi_\epsilon(t) - \Psi_\epsilon(s)| \leqslant 2 \left| \int_s^t \| A_\epsilon^{3/4} u_\epsilon(\rho) \| \| A_\epsilon^{1/4} u'_\epsilon(\rho) \| \, d\rho \right| \leqslant C_{18} \, |t - s| \, ,$$

ou seja

$$|\Psi_\epsilon(t) - \Psi_\epsilon(s)| \leqslant C_{18} \, |t - s| \ \ \forall \ t, s \in [0, T_0], \ \forall \ \epsilon \in (0,1). \tag{3.166}$$

De (3.165) , (3.166) e do Teorema de Arzelá-Ascoli segue a existência de uma função $\Psi \in C^0([0, T_0]; \mathbb{R})$ e de uma subfamília de $(\Psi_\epsilon)_{\epsilon\in(0,1)}$, a qual ainda denotaremos por $(\Psi_\epsilon)_{\epsilon\in(0,1)}$, tais que

$$\Psi_\epsilon \longrightarrow \Psi \text{ em } C^0([0, T_0]) \text{ quando } \epsilon \longrightarrow 0^+. \tag{3.167}$$

Como $M \in C^1([0, T_0] \times [0, +\infty); \mathbb{R})$ segue de (3.167) e da definição de Ψ_ϵ que

$$M(t, \| v_\epsilon(t) \|^2_{1/2}) \longrightarrow M(t, \Psi(t)) \text{ em } C^0([0, T_0]) \text{ quando } \epsilon \longrightarrow 0^+. \tag{3.168}$$

Agora de (3.160), notando que $u_\epsilon(0) = \mathcal{U}_\epsilon^{-1}(v_{0\epsilon}) = \mathcal{U}_\epsilon^{-1}\mathcal{U}_\epsilon(u_0) = u_0$, e do Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$\int_0^t \| u'_\epsilon(s) \| \, ds \leqslant C_{17} T_0 \Longrightarrow \| \int_0^t u'_\epsilon(s) ds \| \leqslant C_{17} T_0$$
$$\Longrightarrow \| u_\epsilon(t) - u_0 \| \leqslant C_{17} T_0 \Longrightarrow \| u_\epsilon(t) \| \leqslant C_{19}, \ \forall \ t \in [0, T_0].$$

Logo $(u_\epsilon)_{0<\epsilon<1}$ **é limitada em** $L^\infty(0,T_0;H)$. **Desta limitação, de** $\| A^\alpha u_\epsilon \|^2 \leqslant \| A_\epsilon^\alpha u_\epsilon \|^2$, $\forall\ 0<\epsilon<1,\ \forall\ \alpha \geqslant 0$, **e de (3.161)-(3.164) obtemos**

$$(u_\epsilon) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T_0;D(A^{3/4})), \tag{3.169}$$

$$(u_\epsilon^{'}) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T_0;D(A^{1/4})), \tag{3.170}$$

$$(\theta_\epsilon) \text{ é limitada em } L^2(0,T_0;D(A^{1/2})). \tag{3.171}$$

Considerando uma subfamília se necessário, deduzimos de (3.169)-(3.171) que existem $u \in L^\infty(0,T_0;D(A^{3/4}))$ **e** $\theta \in L^2(0,T_0;D(A^{1/2}))$ **tais que**

$$u_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,T_0;D(A^{3/4})), \tag{3.172}$$

$$u_\epsilon^{'} \overset{*}{\rightharpoonup} u^{'} \text{ em } L^\infty(0,T_0;D(A^{1/4})), \tag{3.173}$$

$$\theta_\epsilon \rightharpoonup \theta \text{ em } L^2(0,T_0;D(A^{1/2})). \tag{3.174}$$

Da imersão $L^\infty(0,T_0;D(A^{3/4})) \hookrightarrow L^2(0,T_0;H)$, **da convergência (3.172) e da estimativa (3.162) resulta que existe** $\chi \in L^2(0,T_0;H)$ **tal que**

$$u_\epsilon \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0,T_0;H), \tag{3.175}$$

$$A^{3/4}u_\epsilon \rightharpoonup \chi \text{ em } L^2(0,T_0;H), \text{ quando } \epsilon \to 0^+. \tag{3.176}$$

Sendo $A^{3/4}$ **um operador auto-adjunto, temos que** $A^{3/4}$ **é fechado (forte), cf. Apêndice, donde fracamente fechado. Daí** $A^{3/4}u = \chi$. **Além disso, se** $z \in D(A^{1/4})$ **então por (1.11) temos**

$$\begin{aligned}(A_\epsilon^{3/4}u_\epsilon(t), A_\epsilon^{1/4}z) &= \int_{-\epsilon}^{+\infty} (\lambda+\epsilon)d(E_\lambda u_\epsilon(t), z) = \int_{-\epsilon}^{+\infty} \lambda d(E_\lambda u_\epsilon(t), z) \\ &+\epsilon \int_{-\epsilon}^{+\infty} d(E_\lambda u_\epsilon(t), z) = (A^{3/4}u_\epsilon(t), A^{1/4}z) + \epsilon(u_\epsilon(t), z).\end{aligned}$$

Disto e de (3.176) resulta que

$$(A_\epsilon^{3/4}u_\epsilon(t), A_\epsilon^{1/4}z) \rightharpoonup (A^{3/4}u(t), A^{1/4}z), \text{ em } L^2(0,T_0),\ \forall\ z \in D(A^{1/4}). \tag{3.177}$$

Ultilizando a convergência (3.168) deduzimos que

$$M(t, \| v_\epsilon(t) \|_{1/2}^2)(A_\epsilon^{3/4}u_\epsilon(t), A_\epsilon^{1/4}z) \longrightarrow M(t, \Psi(t))(A^{3/4}u(t), A^{1/4}z), \tag{3.178}$$

em $L^2(0,T_0)$, $\forall\ z \in D(A^{1/4})$ **quando** $\epsilon \to 0^+$. **De modo análogo obtemos da imersão** $L^2(0,T_0;D(A^{1/2})) \hookrightarrow L^2(0,T_0;H)$, **da estimativa (3.163) e da convergência**

(3.174) que

$$\theta_\epsilon \rightharpoonup \theta \text{ em } L^2(0, T_0; H), \tag{3.179}$$

$$A^{1/2}\theta_\epsilon \rightharpoonup A^{1/2}\theta \text{ em } L^2(0, T_0; H), \text{ quando } \epsilon \to 0^+, \tag{3.180}$$

donde

$$(A_\epsilon^{1/2}\theta_\epsilon(t), A_\epsilon^{1/2}z) \rightharpoonup (A^{1/2}\theta(t), A^{1/2}z), \text{ em } L^2(0, T_0), \ \forall\, z \in D(A^{1/2}). \tag{3.181}$$

Tomando o limite em (3.24) e (3.25) com $\epsilon \to 0^+$ e levando em consideração as convergências (3.172)-(3.174), (3.177)-(3.179) e (3.181) obtemos

$$\left\{u, u', \theta\right\} \in L^\infty(0, T_0; D(A^{3/4})) \times L^\infty(0, T_0; D(A^{1/4})) \times L^2(0, T_0; D(A^{1/2})),$$

$$\frac{d}{dt}(u'(t), z) + (A^{3/4}u(t), A^{1/4}z) + M(t, \Psi(t))(A^{3/4}u(t), A^{1/4}z) +$$
$$+ (\theta(t), z) = (f(t), z), \ \forall z \in D(A^{1/4}),$$

no sentido de $L^2(0, T_0)$,

$$\frac{d}{dt}(\theta(t), z) + (A^{1/2}\theta(t), A^{1/2}z) + (u'(t), z) = (g(t), z), \ \forall z \in D(A^{1/2}),$$

no sentido de $L^2(0, T_0)$,

$$u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1 \text{ e } \theta(0) = \theta_0.$$

A verificação dos dados iniciais é feita de modo análogo à do problema perturbado.

Lemma 3.3.1. *Se $\{v_\epsilon, \phi_\epsilon\}$ é o par de campos obtidos acima, então*

$$\Psi(t) = \| A^{1/2}u(t) \|_{1/2}^2, \ \forall\, t \in [0, T_0].$$

A conclusão da prova do Teorema 3.1 segue do Lema acima cuja demonstração é inteiramente análoga à prova do Lema 3.2.2.

Observação 3.10. *O Lema 3.2.1 mostra o caráter local da solução fraca obtida acima, pois somente para $T_0 < T^*$ obtemos a estimativa (3.110). No entanto se pudermos impor condições sobre T^* de modo que $T < T^*$ então pode-se determinar uma solução fraca global para o problema (P.1), isto é, um par de funções vetoriais $u, \theta : [0, T] \longrightarrow H$ satisfazendo (3.7)-(3.12).*

3.4 Unicidade de Solução

Nesta seção provaremos a unicidade de solução para o problema (P.1). Inicialmente observamos que a regularidade imposta sobre os dados iniciais $\{u_0, u_1, \theta_0, f, g\}$ **na classe** $D(A^{3/4}) \times D(A^{1/4}) \times D(A^{1/2}) \times \left[L^2(0,T,D(A^{1/4}))\right]^2$ **"não é suficiente" para obtermos a unicidade de solução. De fato, se** $[u,\theta]$ **e** $[\hat{u},\hat{\theta}]$ **satisfazem o Teorema 3.1, então** $[\eta,\phi] = [u-\hat{u}, \theta-\hat{\theta}]$ **está na classe (3.7)-(3.9) e satisfaz**

$$\frac{d}{dt}(\eta', z) + (A^{3/4}\eta, A^{1/4}z) + M(\cdot, \| A^{1/2}u \|^2)(A^{3/4}u, A^{1/4}z) -$$

$$M(\cdot, \| A^{1/2}\hat{u} \|^2)(A^{3/4}\hat{u}, A^{1/4}z) + (\phi, z) = 0, \ \forall z \in D(A^{1/4}), \tag{3.182}$$

no sentido de $L^2(0,T_0)$**,**

$$\frac{d}{dt}(\phi, z) + (A^{1/2}\phi, A^{1/2}z) + (\eta', z) = 0, \ \forall z \in D(A^{1/2}), \tag{3.183}$$

no sentido de $L^2(0,T_0)$**,**

$$\eta(0) = \eta'(0) = \phi(0) = 0, \tag{3.184}$$

ou

$$\frac{d}{dt}(\eta', z) + (A^{3/4}\eta, A^{1/4}z) + M(\cdot, \| A^{1/2}u \|^2)(A^{3/4}\hat{u}, A^{1/4}z) + (\phi, z)$$

$$= \left\{ M(\cdot, \| A^{1/2}\hat{u} \|^2) - M(\cdot, \| A^{1/2}u \|^2) \right\}(A^{3/4}\hat{u}, A^{1/4}z), \tag{3.185}$$

$\forall z \in D(A^{1/4})$ **no sentido de** $L^2(0,T_0)$**,**

$$\frac{d}{dt}(\phi, z) + (A^{1/2}\phi, A^{1/2}z) + (\eta', z) = 0, \ \forall z \in D(A^{1/2}), \tag{3.186}$$

no sentido de $L^2(0,T_0)$**,**

$$\eta(0) = \eta'(0) = \phi(0) = 0. \tag{3.187}$$

Tomando $z = \eta'(t)$ **em (3.185) temos:**

$$\frac{d}{dt} \| \eta'(t) \|^2 + (A^{3/4}\eta(t), A^{1/4}\eta'(t)) + M(t, \| A^{1/2}u(t) \|^2)(A^{3/4}\eta(t), A^{1/4}\eta'(t))\eta'(t))$$

$$+(\phi(t), \eta'(t)) = \left\{ M(t, \| A^{1/2}\hat{u}(t) \|^2) - M(t, \| A^{1/2}u(t) \|^2) \right\}(A^{3/4}\hat{u}(t), A^{1/4}\eta'(t)), \text{ ou}$$

$$\frac{d}{dt}\parallel \eta'(t)\parallel^2 + (A\eta(t),\eta'(t)) + M(t,\parallel A^{1/2}u(t)\parallel^2)(A^{3/4}\eta(t),A^{1/4}\eta'(t))$$
$$= -(\phi(t),\eta'(t)) + \left\{M(t,\parallel A^{1/2}\hat{u}(t)\parallel^2) - M(t,\parallel A^{1/2}u(t)\parallel^2)\right\}(A^{3/4}\hat{u}(t),A^{1/4}\eta'^{(t)}),\ \textbf{ou}$$

$$\frac{d}{dt}\parallel\eta'(t)\parallel^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel A^{1/2}\eta(t)\parallel^2 + \frac{1}{2}M(t,\parallel A^{1/2}u(t)\parallel^2)\frac{d}{dt}\parallel A^{1/2}\eta(t)\parallel^2$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{M(t,\parallel A^{1/2}u(t)\parallel^2)\right\}\parallel A^{1/2}\eta(t)\parallel^2$$
$$= -(\phi(t),\eta'(t)) + \left\{M(t,\parallel A^{1/2}\hat{u}(t)\parallel^2) - M(t,\parallel A^{1/2}u(t)\parallel^2)\right\}(A^{3/4}\hat{u}(t),A^{1/4}\eta'^{(t)})$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{M(t,\parallel A^{1/2}u(t)\parallel^2)\right\}\parallel A^{1/2}\eta(t)\parallel^2,\ \textbf{ou ainda}$$

$$\frac{d}{dt}\parallel\eta'(t)\parallel^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel A^{1/2}\eta(t)\parallel^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{M(t,\parallel A^{1/2}u(t)\parallel^2)\parallel A^{1/2}\eta(t)\parallel^2\right\}$$
$$= -(\phi(t),\eta'(t)) + \left\{M(t,\parallel A^{1/2}\hat{u}(t)\parallel^2) - M(t,\parallel A^{1/2}u(t)\parallel^2)\right\}(A^{3/4}\hat{u}(t),A^{1/4}\eta'^{(t)})$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{M(t,\parallel A^{1/2}u(t)\parallel^2)\right\}\parallel A^{1/2}\eta(t)\parallel^2,\ \textbf{ou}$$

$$\frac{d}{dt}\left\{2\parallel\eta'(t)\parallel^2 + \parallel A^{1/2}\eta(t)\parallel^2 + M(t,\parallel A^{1/2}u(t)\parallel^2)\parallel A^{1/2}\eta(t)\parallel^2\right\}$$
$$= 2(-\phi(t),\eta'(t)) + 2\left\{M(t,\parallel A^{1/2}\hat{u}(t)\parallel^2) - M(t,\parallel A^{1/2}u(t)\parallel^2)\right\}(A^{3/4}\hat{u}(t),A^{1/4}\eta'^{(t)})$$
$$+\frac{d}{dt}\left\{M(t,\parallel A^{1/2}u(t)\parallel^2)\right\}\parallel A^{1/2}\eta(t)\parallel^2$$
$$\leqslant 2\left|(\phi(t),\eta'(t))\right| + 2\left|M(t,\parallel A^{1/2}\hat{u}(t)\parallel^2) - M(t,\parallel A^{1/2}u(t)\parallel^2)\right|\left|(A\hat{u}(t),\eta'(t))\right|$$
$$+\left|\frac{d}{dt}M(t,\parallel A^{1/2}u(t)\parallel^2)\right|\parallel A^{1/2}\eta(t)\parallel^2$$
$$\leqslant\parallel\phi(t)\parallel^2 + \parallel\eta'(t)\parallel^2 + 2\left|M(t,\parallel A^{1/2}\hat{u}(t)\parallel^2) - M(t,\parallel A^{1/2}u(t)\parallel^2)\right|\parallel A\hat{u}(t)\parallel\parallel\eta'(t)\parallel$$
$$+\left|\frac{d}{dt}M(t,\parallel A^{1/2}u(t)\parallel^2)\right|\parallel A^{1/2}\eta(t)\parallel^2.$$

Pondo $|||\eta(t)|||^2 = \parallel A^{1/2}\eta(t)\parallel^2$**, segue que**

$$\frac{d}{dt}\left\{2\parallel\eta'(t)\parallel^2 + |||\eta(t)|||^2 + M(t,\parallel A^{1/2}u(t)\parallel^2)\parallel A^{1/2}\eta(t)\parallel^2\right\}$$
$$\leqslant\parallel\phi(t)\parallel^2 + \parallel\eta'(t)\parallel^2 + 2\left|M(t,\parallel A^{1/2}\hat{u}(t)\parallel^2) - M(t,\parallel A^{1/2}u(t)\parallel^2)\right|\parallel A\hat{u}(t)\parallel\parallel\eta'(t)\parallel$$
$$+\left|\frac{d}{dt}M(t,\parallel A^{1/2}u(t)\parallel^2)\right|\parallel A^{1/2}\eta(t)\parallel^2. \tag{3.188}$$

De modo análogo, pondo $z = \phi(t)$ **em (3.186) obtemos**

$$\frac{d}{dt}\parallel\phi(t)\parallel^2 + |||\phi(t)|||^2 \leqslant\parallel\phi(t)\parallel^2 + \parallel\eta'(t)\parallel^2. \tag{3.189}$$

Usando o Teorema do Valor Médio e procedendo como anteriormente, obtemos

$$\begin{aligned}&\left|M(t, \| A^{1/2}\hat{u}(t) \|^2) - M(t, \| A^{1/2}u(t) \|^2)\right|\\ \leqslant &\left|\frac{\partial M}{\partial t}(t,\lambda)\right| \left|\| \hat{u}(t) \|_{D(A^{1/2})} + \| u(t) \|_{D(A^{1/2})}\right| \| A^{1/2}\eta(t) \|,\end{aligned} \tag{3.190}$$

onde ξ **pertence ao segmento de extremos** $\| A^{1/2}\hat{u}(t) \|^2$ **e** $\| A^{1/2}u(t) \|^2$**. Assim por (3.2) segue-se**

$$\begin{aligned}&\left|M(t, \| A^{1/2}\hat{u}(t) \|^2) - M(t, \| A^{1/2}u(t) \|^2)\right|\\ \leqslant\ & C_5 \left|\| \hat{u}(t) \|_{D(A^{1/2})} + \| u(t) \|_{D(A^{1/2})}\right| \| A^{1/2}\eta(t) \| .\end{aligned} \tag{3.191}$$

Sendo $M \in C^1\big([0,T] \times [0,+\infty)\big)$ **e** $\hat{u}, u \in L^\infty(0,T_0;D(A^{3/4})) \hookrightarrow L^\infty(0,T_0;D(A^{1/2}))$ **obtemos**

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{2 \| \eta'(t) \|^2 + |||\eta(t)|||^2 + M(t, \| A^{1/2}u(t) \|^2) \| A^{1/2}\eta(t) \|^2 \right\}\\ \leqslant &\| \phi(t) \|^2 + \| \eta'(t) \|^2 + 2C_5 \left| \| \hat{u}(t) \|_{D(A^{1/2})} + \| u(t) \|_{D(A^{1/2})} \right| \| A^{1/2}\eta(t) \| \| A\hat{u}(t) \| \| \eta'(t) \|\\ &+ C_6 \| A^{1/2}\eta(t) \|^2.\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{2 \| \eta'(t) \|^2 + |||\eta(t)|||^2 + M(t, \| A^{1/2}u(t) \|^2) \| A^{1/2}\eta(t) \|^2 \right\}\\ \leqslant &\| \phi(t) \|^2 + \| \eta'(t) \|^2 + C_6 \| A^{1/2}\eta(t) \|^2 + C_7 \| A^{1/2}\eta(t) \| \| A\hat{u}(t) \| \| \eta'(t) \|^2.\end{aligned} \tag{3.192}$$

Somando (3.189) e (3.192) obtemos:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{2 \| \eta'(t) \|^2 + |||\eta(t)|||^2 + \| \phi(t) \|^2 + M(t, \| A^{1/2}u(t) \|^2) \| A^{1/2}\eta(t) \|^2 \right\} + |||\phi(t)|||^2\\ \leqslant\ & 2 \| \phi(t) \|^2 + 2 \| \eta'(t) \|^2 + C_6 \| A^{1/2}\eta(t) \|^2 + C_7 \| A^{1/2}\eta(t) \| \| A\hat{u}(t) \| \| \eta'(t) \|^2.\end{aligned} \tag{3.193}$$

Integrando (3.193) de 0 **até** $t \leqslant T_0$ **e usando o fato de** $M(t,\lambda) \geqslant 0$ **concluimos que**

$$\begin{aligned}&\| \eta'(t) \|^2 + |||\eta(t)|||^2 + \| \phi(t) \|^2 + \int_0^t |||\phi(s)|||^2 ds\\ \leqslant &\int_0^t \Big\{ 2 \| \phi(s) \|^2 + 2 \| \eta'(s) \|^2 + C_6 \| A^{1/2}\eta(s) \|^2\\ &+ C_7 \| A^{1/2}\eta(s) \| \| A\hat{u}(s) \| \| \eta'(s) \| \Big\} ds.\end{aligned} \tag{3.194}$$

Como nós não temos uma limitação para $\| A\hat{u}(t) \|$**, não conseguimos usar a Desigualdade de Gronwall e por conseguinte não obtemos a unicidade de solução. No entanto com as hipóteses fixadas anteriormente sobre o operador** A **e a função** M**, se os dados iniciais** $\{u_0, u_1, \theta_0, f, g\}$ **têm mais regularidade,**

teremos unicidade de solução no Teorema 3.1. Mais precisamente temos o seguinte Teorema.

Teorema 3.3. *Sejam* $u_0 \in D(A)$, $u_1 \in D(A^{1/2})$, $\theta_0 \in D(A^{1/2})$ *e* $f, g \in L^2(0,T;D(A^{1/2}))$, $T > 0$. *Então existe* $0 < T_0 \leqslant T$ *e um único par de funções vetoriais* $u, \theta : [0,T_0] \longrightarrow H$ *satisfazendo:*

$$u \in L^\infty(0,T_0;D(A)), \tag{3.195}$$

$$u' \in L^\infty(0,T_0;D(A^{1/2})), \tag{3.196}$$

$$\theta \in L^2(0,T_0;D(A^{1/2})), \tag{3.197}$$

$$\frac{d}{dt}(u'(t),z) + (A^{1/2}u(t), A^{1/2}z) + M(t, \| A^{1/2}u(t) \|^2)(A^{1/2}u(t), A^{1/2}z)$$
$$+(\theta(t),z) = (f(t),z), \ \forall z \in D(A^{1/2}), \tag{3.198}$$

no sentido de $L^2(0,T_0)$,

$$\frac{d}{dt}(\theta(t),z) + (A^{1/2}\theta(t), A^{1/2}z) + (u'(t),z) = (g(t),z), \ \forall z \in D(A^{1/2}), \tag{3.199}$$

no sentido de $L^2(0,T_0)$,

$$u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1 \text{ e } \theta(0) = \theta_0. \tag{3.200}$$

Demonstração. A prova da existência de solução $\{u, \theta\}$ na classe (3.195)-(3.197) é análoga a do Teorema 3.1. Para a prova da unicidade, suponha que $[u, \theta]$ e $[\hat{u}, \hat{\theta}]$ satisfazem o Teorema 3.3 e seja $[\eta, \phi] = [u - \hat{u}, \theta - \hat{\theta}]$. Observemos que as estimativas (3.188)-(3.191) continuam valendo para a classe (3.195)-(3.197), donde também continua valendo (3.193). Como $u, \hat{u} \in L^\infty(0,T_0;D(A))$ segue que $\| A\hat{u}(t) \| \leqslant C_8$, donde

$$C_7 \| A^{1/2}\eta(s) \| \| A\hat{u}(s) \| \| \eta'(s) \|$$

$$\leqslant C_9 \| A^{1/2}\eta(s) \|^2 + C_{10} \| \eta'(s) \|^2$$

$$= C_{10} |||\eta(s)|||^2 + C_{10} \| \eta'(s) \|^2,$$

ou seja,

$$C_7 \| A^{1/2}\eta(s) \| \| A\hat{u}(s) \| \| \eta'(s) \| \leqslant C_9 |||\eta(s)|||^2 + C_9 \| \eta'(s) \|^2 . \tag{3.201}$$

Substituindo (3.201) em (3.194) temos

$$\| \eta'(t) \|^2 + |||\eta(t)|||^2 + \| \phi(t) \|^2$$

$$\leqslant \| \eta'(t) \|^2 + |||\eta(t)|||^2 + \| \phi(t) \|^2 + \int_0^t |||\phi(s)|||^2 ds$$

$$\leqslant \int_0^t \left\{ 2 \| \phi(s) \|^2 + 2 \| \eta'(s) \|^2 + C_{10} |||\eta(s)|||^2 + C_9 \| \eta'(s) \|^2 \, ds \right\}$$

$$\leqslant C_{11} \int_0^t \left\{ \| \phi(s) \|^2 + \| \eta'(s) \|^2 + |||\eta(s)|||^2 ds \right\},$$

donde pela Desigualdade de Gronwall segue que

$$\| \eta'(t) \|^2 + |||\eta(t)|||^2 + \| \phi(t) \|^2 = 0, \ \forall \ t \in [0, T_0].$$

Portanto, $\eta \equiv \phi \equiv 0$ em $[0, T_0]$ e fica provado a unicidade da solução. □

Capítulo 4

Aplicação

Neste capítulo objetivamos aplicar os resultados obtidos nos capítulos anteriores. Para tanto necessitamos de mais algumas notações.

Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Por $H^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{Z}_+$, estamos representando o espaço de Sobolev de ordem m, ou seja, o espaço vetorial das (classes de) funções de $L^2(\Omega)$ que possuem derivadas no sentido das distribuições até a ordem m pertencentes à $L^2(\Omega)$ equipado com o produto escalar

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2} dx, \ \ u, v \in H^m(\Omega).$$

O fecho em $H^m(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ será denotado por $H_0^m(\Omega)$ e o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ é denotado por $H^{-m}(\Omega)$. Mediante o Teorema da Representação de Riesz-Fréchet obtemos a seguinte cadeia de imersões contínuas e densas:

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow H_0^m(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-m}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

Sejam X e Y dois espaços de Hilbert separáveis com produto interno e norma denotados, respectivamente, por $((\cdot,\cdot))$, $\|\cdot\|$ e $(\cdot,\cdot)$, $|\cdot|$. Suponhamos que $X \hookrightarrow Y$, isto é, X é denso em Y e a imersão de X em Y é contínua. Seja S o operador de Y determinado pela terna $\{X, Y, ((\cdot,\cdot))\}$, isto é, S é o operador de Y tal que para cada $u \in D(S)$ existe um único $\bar{u} \in Y$ de modo que

$$((u, v)) = (\bar{u}, v), \ \ \forall \ u, v \in X.$$

Neste caso temos

$$Su = \bar{u}$$

e

$$D(S) = \{u \in X;\ \exists\ f \in Y \text{ que verifica } ((u,v)) = (f,v),\ \forall\ v \in X\}.$$

Além disso, o operador S é auto-adjunto, não limitado (se $X \neq Y$) e

$$(Su,u) = ((u,v)) = \| u \| \geqslant C|u|^2,\ \forall\ u \in D(S),$$

onde $C > 0$ é a constante da imersão $X \hookrightarrow Y$. Ou seja, S é auto-adjunto, não limitado (se $X \neq Y$) e coercivo. Nestas condições o operador $\Lambda = S^{1/2}$ está bem definido, é auto-adjunto, coercivo e $X = D(\Lambda)$, veja [35]. Assim, conforme a Seção 1.3, ficam bem definidas as potências do operador Λ.

Definição 4.1. *O Espaço Intermediário* $[X,Y]_\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, *é o domínio do operador* $\Lambda^{1-\theta}$ *equipado com a norma do gráfico*

$$\|u\|^2_{[X,Y]_\theta} = |u|^2 + |\Lambda^{1-\theta}u|^2,\ u \in D(\Lambda^{1-\theta}) = [X,Y]_\theta.$$

Segue da definição acima que $[X,Y]_\theta$ é um espaço de Hilbert, $[X,Y]_0 = X$ e $[X,Y]_1 = Y$.

Observação 4.1. *Mostra-se em [23] que se* X *e* Y *são equipados com novos produtos internos equivalentes à* $((\cdot,\cdot))$ *e* $(\cdot,\cdot)$*, respectivamente, e definindo* $Y_\theta = [X,Y]_\theta$ *com relação a estes novos produtos internos, então se* X_θ *denota o espaço intermediário* $[X,Y]_\theta$ *com os produtos internos* $((\cdot,\cdot))$ *e* $(\cdot,\cdot)$ *temos* $X_\theta = Y_\theta$ *e suas normas são equivalentes. Conclui-se que os espaços estão intrinsicamente definidos por* X *e* Y.

Consideremos Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$ (ou $\Omega = \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^n_-$) e números reais $s > 0$ e $m > s$. Definimos os espaços de Sobolev de ordem s por

$$H^s(\Omega) = [H^m(\Omega), L^2(\Omega)]_{1-\frac{s}{m}}.$$

Mostra-se em [23] que $H^s(\Omega)$ não depende dos inteiros $m > s$.

Com as notações acima podemos dar uma aplicação dos resultados obtidos no Capítulo 3. Seja $\Omega = \mathbb{R}^n$ e em $H = L^2(\mathbb{R}^n)$ consideremos o operador $A = -\Delta$ com domínio $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n)$. Então:

$$D(A^{1/4}) = [H^1(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n)]_{1/2} = H^{1/2}(\mathbb{R}^n),$$
$$D(A^{1/2}) = [H^1(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n)]_0 = H^1(\mathbb{R}^n),$$
$$D(A^{3/4}) = [H^1(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n)]_{1/4} = H^{3/4}(\mathbb{R}^n).$$

De acordo com o Teorema 3.1, dados $u_0 \in H^{3/4}(\mathbb{R}^n)$**,** $u_1 \in H^{1/2}(\mathbb{R}^n)$**,** $\theta_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ **e** $f, g \in L^2(0,T;H^{1/2}(\mathbb{R}^n))$ **existem** $0 < T_0 \leqslant T$ **e funções vetoriais** $u, \theta : [0, T_0] \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ **na classe (3.7)-(3.9) tal que**

$$(P.7) \qquad \left| \begin{array}{l} u'' - \Delta u - M(\cdot, \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla u(x,\cdot)\|^2 dx)\Delta u + \theta = f, \\ \theta' - \Delta\theta + u' = g, \\ u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1, \\ \theta(0) = \theta_0. \end{array} \right.$$

Tomando $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^n)$**,** $u_1, \theta_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ **e** $f, g \in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^n))$ **podemos aplicar o Teorema 3.3 e obtemos existência e unicidade de solução para o problema (P.7) na classe (3.195)-(3.197).**

Apêndice A

Elementos da Teoria Espectral

Aqui apresentaremos alguns conceitos relativos a Teoria Espectral em Espaços de Hilbert com ênfaze nos operadores lineares não limitados. Iniciamos com a definição mais geral de um operador linear em espaços de Hilbert. Seja $(H; (\cdot, \cdot))$ **um espaço de Hilbert, com norma correspondente** $\| \cdot \|$.

Definição A.1. *Denomina-se operador (ou transformação) linear* **de** H *a toda aplicação* $A : D(A) \longrightarrow H$ *definida num subespaço* $D(A)$ *de* H *tal que*

$$A(u + v) = Au + Av \text{ e } A(cu) = cAu, \ \forall \ u, v \in D(A) \text{ e } \forall \ c \in \mathbb{C}.$$

Dados $A : D(A) \longrightarrow H$ **e** $B : D(B) \longrightarrow H$ **dois operadores de** H**, os conceitos de adição, multiplicação por escalar, multiplicação e inversa define-se como para funções em geral, observando-se apenas que** $D(A + B) = D(A) \cap D(B)$ **e** $D(AB) = M$ **onde** $M \subset D(B)$ **é tal que** $B(M) = Img(B) \cap D(A)$**.**

Definição A.2. *Dados dois operadores lineares* A *e* B *de* H*, diz-se que os mesmos são iguais, denotando* $A = B$*, quando* $D(A) = D(B)$ *sendo* $A \equiv B$ *em* $D(A)$*. Quando* $D(A) \supset D(B)$ *e* $A \equiv B$ *em* $D(B)$ *diz-se que* A *é uma extensão de* B*, escrevendo-se* $B \subset A$*.*

Definição A.3. *Sejam* A *e* B *operadores lineares, com* B *limitado. Diz-se que* B *e* A *são permutáveis ou que* B *comuta com* A*, quando* AB *é uma extensão de* BA*, isto é,* $BA \subset AB$*.*

Definição A.4. *Diz-se que um operador linear A de H é limitado em* $D(A)$ *quando existe uma constante* $K > 0$ *tal que*

$$\| Ax \| \leqslant K \| x \|,$$

$\forall\ x \in D(A)$. *Em caso contrário diz-se que* A *é não limitado.*

Assim, um operador A de H é não limitado quando para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in D(A)$ tal que $\| Ax_n \| > n \| x_n \|$.

A seguir justifica-se o uso de $D(A)$ em vez de H na definição $(A.1)$. Inicialmente recorde que um operador A é limitado em $D(A)$ se, e somente se, A é contínuo em $D(A)$. Daí, tem-se a seguinte proposição.

Proposição A.1. *Se o operador* A *é limitado em* $D(A)$*, então* A *pode ser extendido por continuidade ao fecho* $\overline{D(A)}$ *de* $D(A)$*, sendo tal extensão linear, limitada e com a mesma norma de* A*.*

Demonstração. Seja $x \in \overline{D(A)}$. Então existe uma sequência (x_n) em $D(A)$ tal que $x_n \to x$ em H. Sendo A linear e limitado, temos

$$\| Ax_n - Ax_m \| \leqslant \| A \| \| x_n - x_m \|, \tag{A.1}$$

onde

$$\| A \| = \sup_{\|x\|=1} \| Ax \| . \tag{A.2}$$

Como (x_n) é convergente, tem-se que (x_n) é de Cauchy, donde por $(A.1)$ temos que (Ax_n) é de Cauchy em H. Sendo H completo, existe $y \in H$ tal que $Ax_n \to y$ em H. Defina $\widetilde{A} : \overline{D(A)} \longrightarrow H$ pondo $\widetilde{A}x = y$.

Afirmação: $\widetilde{A}$ está bem definido !

De fato, se (z_n) é outra sequência em $D(A)$ tal que $z_n \to x$ em H, então $(v_n) = (x_1, z_1, x_2, z_2, ...)$ é tal que $v_n \to x$ em H. Pela continuidade de A, temos que (Av_n) é convergente, logo, de Cauchy. È fácil ver que (Ax_n) e (Az_n) são subsequências de (Av_n) e, além disso, $Ax_n \to y$. Sendo (Av_n) de Cauchy, tem-se necessariamente que $Av_n \to y$, donde $Az_n \to y$. Portanto, $\widetilde{A}$ está bem definido. È fácil ver que $\widetilde{A}$ é linear e para cada $x \in D(A)$, considerando a sequência constante $(x_n) = (x, x, ...)$, temos $\widetilde{A}x = Ax$. Logo, temos que $D(\widetilde{A}) = \overline{D(A)} \supset D(A)$ e $\widetilde{A} \equiv A$ em $D(A)$. Assim, $\widetilde{A}$ é uma extensão de A. Para ver que $\widetilde{A}$ é limitada em $D(\widetilde{A})$, note que dado $x \in D(\widetilde{A})$ temos

$$\| \widetilde{A}x \| = \| \lim Ax_n \| = \lim \| Ax_n \| \leqslant \lim \| A \| \| x_n \| = \| A \| \| x \|,$$

portanto,

$$\| \widetilde{A}x \| \leqslant \| A \| \| x \|, \ \forall\, x \in D(\widetilde{A}).$$

Além disso, $\| \widetilde{A} \| \leqslant \| A \|$. Ora, para $x \in D(A) \subset D(\widetilde{A})$ com $\| x \| = 1$ temos $\widetilde{A}x = Ax \Longrightarrow \| Ax \| = \| \widetilde{A}x \| \leqslant \| \widetilde{A} \|$, donde por (A.2) temos $\| A \| \leqslant \| \widetilde{A} \|$. Logo, $\| A \| = \| \widetilde{A} \|$. □

Observação A.1. *O fecho $\overline{F}$ de um subespaço vetorial F de um espaço normado é ainda um subespaço vetorial do mesmo, confira em [36].*

Segue da proposição acima que se $D(A)$ é denso em H, isto é, $\overline{D(A)} = H$, a extensão obtida é limitada em H. Em caso contrário, considera-se a decomposição em soma direta $H = \overline{D(A)} \oplus \overline{D(A)}^{\perp}$, onde $\overline{D(A)}^{\perp} = \{v \in H \, ; \, (v, x) = 0, \ \forall\, x \in \overline{D(A)}\}$. Daí, todo $w \in H$ é univocamente representado por $w = x + y$, com $x \in \overline{D(A)}$ e $y \in \overline{D(A)}^{\perp}$. Assim, pondo $Ay = 0$ em $\overline{D(A)}^{\perp}$, define-se $\tilde{A}w = Ax + Ay$, obtendo-se uma extensão linear de A à H, a qual é limitada e possui a mesma norma que A. Logo, no caso limitado podemos sem perda de generalidade considerar A com domínio $D(A) = H$. Entretanto, no caso não limitado isso nem sempre é possível. Tal fato segue da contra-positiva do teorema a seguir.

Teorema A.1. *(Hellinger-Toeplitz) Se $D(A) = H$ com A linear e satisfazendo*

$$(Ax, y) = (x, Ay), \ \forall\, x, \ y \in H, \tag{A.3}$$

então A é limitado.

Demonstração. Suponha, por contradição, que A não é limitado. Então, existe uma sequência (v_n) em H tal que $\| v_n \| = 1$ e $\| Av_n \| \longrightarrow +\infty$. Consideremos a sequência (f_n) de funcionais lineares definidos em H (recorde que $D(A) = H!$), por $f_n(u) = (Au, v_n)$. Por (A.3) temos

$$| f_n(u) | = | (Au, v_n) | = | (u, Av_n) | \leqslant \| u \| \| Av_n \|,$$

donde (f_n) é limitada para cada $n \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$| f_n(u) |=| (Au, v_n) | \leqslant \| Au \| \| v_n \| = \| Au \|, \ \forall \ u \in H,$$

ou seja, $(f_n(u))$ é limitada em $\mathbb{R}$ para todo $u \in H$. Logo, pelo Teorema da Limitação Uniforme, existe $k > 0$ tal que $| f_n(u) | \leqslant k \| u \|$, $\forall \ n = 1, 2, ...$ e $\forall \ u \in H$. Em particular, para $u = Av_n$, obtém-se $\| Av_n \|^2 \leqslant k \| Av_n \|$, donde $\| Av_n \| \leqslant k$, $\forall \ n \in \mathbb{N}$, o que é uma contradição. Logo A é limitado. □

A seguir faremos uma rápida introdução sobre o operador Adjunto de um operador de H.

Recordando o caso limitado temos que o operador adjunto de um operador linear $A : H \longrightarrow H$ é o único operador linear $A^* : H \longrightarrow H$ tal que

$$(Au, v) = (u, A^*v), \ \forall \ u, v \in H.$$

Agora, no caso não limitado, temos que A é definido em $D(A) \subset H$ e não mais no espaço de Hilbert H. Assim, pode ocorrer do vetor $v^* = A^*v$ não ser mais único. No entanto com a hipótese adicional de densidade, recupera-se a unicidade de v^*. De fato, suponha $(Au, v) = (u, v^*) = (u, v_1^*), \ \forall \ u \in D(A)$. Logo, $(u, v^* - v_1^*) = 0, \ \forall \ u \in D(A)$, donde $v^* - v_1^* \in D(A)^\perp$. Como $D(A) \subset \overline{D(A)}$, segue que $\overline{D(A)}^\perp \subset D(A)^\perp$.

Afirmação: $v^* - v_1^* \in \overline{D(A)}^\perp$!

Com efeito, se $v^* - v_1^* \notin \overline{D(A)}^\perp$ então existe $v \in \overline{D(A)}$ tal que $(v, v^* - v_1^*) \neq 0$. Seja (v_n) uma sequência em $D(A)$ tal que $v_n \to v$ em H. Então, $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n, v^* - v_1^*) = (v, v^* - v_1^*) \neq 0$, donde existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant n_0$ vale $(v_n, v^* - v_1^*) \neq 0$, o que é um absurdo pois $v_n \in D(A), \ \forall \ n \in \mathbb{N}$. Logo, $v^* - v_1^* \in \overline{D(A)}^\perp$. Sendo $D(A)$ denso em H, temos que $\overline{D(A)}^\perp = \{0\}$, donde $v^* = v_1^*$.

Assim, com a hipótese de densidade fica bem definida a aplicação $A^* : D(A^*) \longrightarrow H$ dada por $A^*v = v^*$ e tal que

$$(Au, v) = (u, A^*v), \ \forall \ u \in D(A) \ e \ \forall \ v \in D(A^*).$$

Diz-se então que A^* é o operador adjunto ou a adjunta de A. Note que

$$D(A^*) = \{v \in H\ ; \exists!\ v^* \in H \text{ com } (Au, v) = (u, v^*),\ \forall\ u \in D(A)\}.$$

Proposição A.2. *O operador* A^* *é um operador linear de* H.

Demonstração. Devemos provar que $D(A^*)$ é um subespaço de H e que A^* é linear em $D(A^*)$. Ora, dados $u, v \in D(A^*)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos que para todo $w \in D(A)$ vale

$$(Aw, u + \lambda v) = (Aw, u) + \overline{\lambda}(Aw, v) = (w, u^*) + \overline{\lambda}(w, v^*) = (w, u^* + \lambda v^*).$$

Falta provar que $(u + \lambda v)^* = u^* + \lambda v^*$ é único. Se existe $w^* \in H$ tal que $(Aw, u + \lambda v) = (w, u^* + \lambda v^*) = (w, w^*),\ \forall\ w \in D(A)$, então $(w, u^* + \lambda v^* - w^*) = 0,\ \forall\ w \in D(A)$. Então, pela densidade de $D(A)$ em H, segue que $u^* + \lambda v^* = w^*$. Assim, $u + \lambda v \in D(A^*)$. Além disso, $A^*(u + \lambda v) = u^* + \lambda v^* = A^*u + \lambda A^*v$. Portanto, A^* é um operador linear de H. □

No que segue citaremos algumas propriedades da adjunta A^*.

Proposição A.3. *Seja* A *um operador linear de* H. *Se existem* A^{-1}, A^* e $(A^{-1})^*$ *então existe* $(A^*)^{-1}$ *e* $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Demonstração. Ver [25]. □

Proposição A.4. *Seja* A *um operador de* H *com* $D(A) = H$. *Então,* A^* *é limitado e* $D(A^*)$ *é fechado em* H.

Demonstração. Ver [25]. □

Definição A.5. *Seja* A *um operador de* H *com domínio* $D(A)$ *em* H. *Diz-se que* A *é fechado se seu gráfico* $G(A) = \{(u, Au) \in H \times H;\ u \in D(A)\}$ *é um conjunto fechado em* $H \times H$.

Proposição A.5. *Seja* A *um operador linear de* H *fechado com domínio* $D(A)$ *denso em* H. *Então, o domínio* $D(A^*)$ *da adjunta é denso em* H, *existe* $(A^*)^* = A^{**}$ *e é igual à* A.

Demonstração. Ver [25]. □

Proposição A.6. *O operador adjunto* A^* *é fechado.*

Demonstração. Seja (v_n) uma sequência em $D(A^*)$ tal que $v_n \longrightarrow v$ e $Av_n \longrightarrow w$. Devemos provar que $v \in D(A^*)$ e $w = A^*v$. Ora, para todo $u \in D(A)$, temos

$$(Au, v) = \lim(Au, v_n) = \lim(u, A^*v_n) = (u, w),$$

pois o produto interno é contínuo. Da definição de $D(A^*)$, resulta que $v \in D(A^*)$ e $w = A^*v$. $\square$

Proposição A.7. *(Teorema do Gráfico Fechado) Se A for fechado e $D(A) = H$, então A é limitado.*

Demonstração. Pela proposição A.4 temos que A^* é limitado e $D(A^*)$ é fechado. Sendo A fechado resulta da proposição A.5 que $D(A^*)$ é denso em H, donde $D(A^*) = H$. Além disso, existe $(A^*)^* = A^{**}$ e é igual à A. Aplicando novamente a proposição A.4 agora para A^*, conclui-se que A é limitado. $\square$

Vamos agora tratar de uma classe de operadores de H bem especial, a saber, a dos operadores auto-adjuntos.

Seja $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ um operador linear de H com domínio denso em H. Diz-se que A é auto-adjunto se $A = A^*$. Ou seja, se $D(A) = D(A^*)$ e $A^*v = Av$ para todo $v \in D(A)$.

Com o objetivo de caracterizar os operadores auto-adjuntos recordaremos novamente o caso limitado. Neste caso um operador auto-adjunto A é caracterizado pela relação

$$(Au, v) = (u, Av), \ \forall\ u, v \in H, \tag{A.4}$$

a qual define os chamados Operadores Simétricos. Motivados pela relação (A.4) poderiamos usar a mesma como definição de operador simétrico para o caso não limitado. Para isso seria necessário apenas manter os pares de elementos u, v no domínio $D(A)$ de A. Em vista do nosso objetivo, vamos supor também que $D(A)$ é denso em H, donde existe A^*. Assim, temos de (A.4) que

$$(Au, v) = (u, Av), \quad (\forall\ u, v \in H)$$

$$\iff v \in D(A^*),\ A^*v = v^* = Av \quad (\forall\, v \in D(A))$$

$$\iff A \subset A^*.$$

Logo, motivado pelo caso limitado define-se operador linear simétrico no caso geral do modo seguinte:

Definição A.6. *Seja* A *um operador linear de* H *com domínio* $D(A)$ *denso em* H. *Diz-se que* A *é simétrico se* $A \subset A^*$.

Ou seja, se A^* é uma extensão de A.

Observação A.2. *Sendo* A^* *fechada conclui-se que todo operador linear simétrico possui uma extensão fechada, que é sua adjunta.*

Note que todo operador auto-adjunto é simétrico, porém, diferentemente do caso limitado nem todo operador simétrico é auto-adjunto.

Contra-Exemplo A.0.1. *Considere o espaço de Hilbert* $L^2(0,1)$ *com o produto interno*

$$(u,v)_{L^2} = \int_0^1 u\bar{v},$$

e o subespaço do mesmo, denotado por $S^1(0,1)$, *das funções* $u : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ *absolutamente contínua. Defina* $S_0^1(0,1)$ *como sendo o conjunto das funções* $u \in S^1(0,1)$ *tais que* $\dfrac{du}{dt} \in L^2(0,1)$ *e* $u(0) = u(1) = 0$. *Então temos que* $S_0^1(0,1)$ *é denso em* $L^2(0,1)$. *Seja* $A : S_0^1(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)$ *dado por* $Au = i\dfrac{du}{dt}$. *Prova-se a seguir que* A *é simétrico e não é auto-adjunto. Com efeito, temos*

$$\begin{aligned}(Au,v)_{L^2} - (u,Av)_{L^2} &= \int_0^1 iu'\bar{v} + \int_0^1 iu\bar{v}' \\ &= i\int_0^1 (u'\bar{v} + u\bar{v}') \\ &= i\int_0^1 \frac{d(u\bar{v})}{dt} = i[u\bar{v}]_0^1 = 0,\end{aligned}$$

donde $(Au,v)_{L^2} = (u,Av)_{L^2},\ \forall\, u,v \in S_0^1(0,1)$. *Assim* A *é simétrico. Em [25] prova-se que* $D(A^*)$ *está contido na coleção de funções de* $S^1(0,1)$ *cuja derivada pertence a* $L^2(0,1)$, *porém sem condições nos extremos. Assim* $D(A)$ *está contido propriamente em* $D(A^*)$, *donde* $A \neq A^*$. *Portanto* A *não é auto-adjunto.*

No entanto temos o seguinte resultado.

Teorema A.2. *Se* A *é simétrica e sobrejetora, então* A *é auto-adjunta.*

Demonstração. Já temos $A \subset A^*$, isto é, $D(A) \subset D(A^*)$ e $A^*|_{D(A)} = A$. Logo, para provar que $A = A^*$ é suficiente mostrar que $D(A^*) \subset D(A)$. Assim sendo, seja $v \in D(A^*)$ e ponhamos $v^* = A^*v$. Sendo $A\big(D(A)\big) = H$, existe $w \in D(A)$ tal que $Aw = v^*$. Portanto para cada $u \in D(A)$, sendo A simétrico, obtém-se

$$(Au, v) = (u, A^*v) = (u, v^*) = (u, Aw) = (Au, w),$$

donde, $\forall\ z \in A\big(D(A)\big) = H$ vale

$$(z, v - w) = 0.$$

Daí segue que $v = w$ e $v \in D(A)$. Portanto $D(A^*) \subset D(A)$. □

Um outro conceito importante para um melhor entendimento desta dissertação é o de Projeção ortogonal. Antes de definirmos o que se entente por projeção ortogonal, considere o segunte teorema.

Teorema A.3. *Seja* M *um subespaço fechado do espaço de Hilbert* H. *Então,* $H = M \oplus M^{\perp}$.

Demonstração. Ver [2] ou [39]. □

Definição A.7. *Sejam* $P : H \longrightarrow H$ *um operador linear e* $W = P(H)$. *Diz-se que* P *é uma projeção de* H *sobre* W *se* $P^2 = P$, *isto é, se* $P|_W = I_W$ *=identidade em* W.

Em geral existem várias maneiras de "projetar"H sobre W como fica claro na definição acima. Uma destas maneiras em particular merece nossa atenção, a saber, a projeção ortogonal. Tal projeção é distinguida das demais pelo fato de seu núcleo ser o complemento ortogonal da sua imagem. Formalmente temos:

Definição A.8. *Seja* P *uma projeção de* H *sobre* $W = P(H)$. *Diz-se que* P *é uma projeção ortogonal de* H *sobre* W *se* W *é fechado e* $\mathrm{Ker}(P) = W^{\perp}$.

Note que sendo P uma projeção ortogonal sobre sua imagem W temos que $W = \{z \in H;\ Pz = z\}$. De fato, dado $z \in H$ temos $z \in W \Longleftrightarrow z = Px,\ x \in H$, donde $Pz = P^2x = Px = z$, ou seja, $z \in W \Longleftrightarrow Pz = z$. Além disso, como P é linear temos que W é um subespaço de H, o qual é fechado por definição. Assim

segue do Teorema A.3 que $H = W \oplus W^{\perp} = Im(P) \oplus Ker(P)$. **Daí, dado** $z \in H$ **temos** $\| Pz \| = \| Py + Px \| = \| Py \| = \| y \|$, $\forall\ x \in Ker(P)$ **e** $y \in Im(P) = W$. **Logo,** P **é limitado com** $\| P \| = 1$, **(portanto,** $P \neq 0$**!). Temos ainda que**

$$\begin{aligned}(Pz_1, z_2) = (P(y_1^{(1)} + y_2^{(1)}), y_1^{(2)} + y_2^{(2)}) &= (Py_1^{(1)}, y_1^{(2)} + y_2^{(2)}) \\ &= (y_1^{(1)}, y_1^{(2)}) \\ &= (y_1^{(1)} + y_2^{(1)}, Py_1^{(2)}) \\ &= (z_1, Pz_2),\end{aligned}$$

$\forall\ z_1 = y_1^{(1)} + y_2^{(1)}, z_2 = y_1^{(2)} + y_2^{(2)} \in H$. **Logo,** $P = P^*$. **Reciprocamente, se** P **é uma projeção limitada e auto-adjunta então** P **é uma projeção ortogonal sobre sua imagem. De fato, sejam** $W = P(H)$ **e** (y_n) **uma sequência em** W **tal que** $y_n \longrightarrow z \in H$. **Ora,** $y_n = Px_n$, **com** (x_n) **sendo uma sequência em** H, **donde** $Py_n = P^2x_n = Px_n = y_n$. **sendo** $P = P^*$ **e** P^* **um operador fechado, temos que** $y_n \longrightarrow z$ **e** $Py_n = y_n \longrightarrow z$ **implicam em** $z = Pz \in W$. **Logo,** W **é fechado. Para provar que** $Ker(P) = W^{\perp}$, **devemos provar que** $x \in Ker(P) \Longleftrightarrow (Pz, x) = 0.\ \forall\ z \in H \Longleftrightarrow (z, Px) = 0,\ \forall\ z \in H$, **pois** $P = P^*$. **Mas,** $(z, Px) = 0,\ \forall\ z \in H$ **ocore se, e somente se,** $Px = 0$. **Assim,** $Ker(P) = W^{\perp}$. **Portanto,** P **é uma projeção ortogonal sobre sua imagem. Provou-se acima a seguinte caracterização das projeções ortogonais:**

Proposição A.8. *Uma projeção* $P : H \longrightarrow H$ *é ortogonal se, e somente se,* P *é limitada e auto-adjunta.*

Observação A.3. *A proposição acima justifica o uso de* H *em vez de* $D(A)$ *na definição de projeção ortogonal.*

Como foi visto anteriormente, se $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ **é um operador linear auto-adjunto então** A **é simétrico. Daí,** $(Au, u) = (u, Au) = \overline{(Au, u)},\ \forall\ u \in D(A)$, **donde** $(Au, u) \in \mathbb{R},\ \forall\ u \in H$. **Assim podemos considerar a seguinte relação de ordem parcial:**

Definição A.9. *Dados* A *e* B *operadores de* H *auto-adjuntos, diz-se que* A *é maior que* B*, e denotamos por* $A \geqslant B$ *ou* $B \leqslant A$*, se*

$$(Au, u) \geqslant (Bu, u),$$

para todo $u \in D(A) \cap D(B)$.

Quando ocorrer de $(Au, u) \geqslant 0, \forall\ u \in D(A)$, diz-se que A é positivo e denotamos por $A \geqslant 0$. Além disso, se $(Au, u) = 0 \Longleftrightarrow u = 0$, diz-se que A é positivo definido e denotamos por $A > 0$.

Observação A.4. *Note que* $A \geqslant B \Longleftrightarrow A - B \geqslant 0$.

Proposição A.9. *Sejam* E_1 *e* E_2 *projeções ortogonais. Então as condições a seguir são equivalentes:*

(i) $E_1 \leqslant E_2$;

(ii) $\| E_1 x \| \leqslant \| E_2 x \|,\ \forall\ x \in H$;

(iii) $E_1 E_2 = E_1$;

(iv) $E_2 E_1 = E_1$.

Demonstração. Ver [2]. □

Observação A.5. *Na proposição acima, se no item* (i) *for* $E_2 \leqslant E_1$ *então teremos nos itens* (iii) *e* (iv) $E_1 E_2 = E_2$ *e* $E_2 E_1 = E_2$, *respectivamente.*

Proposição A.10. *Sejam* E_1 *e* E_2 *projeções ortogonais. Então* $E = E_1 - E_2$ *é uma projeção ortogonal se, e somente se,* $E_2 \leqslant E_1$.

Demonstração. Ver [2]. □

Enunciaremos, sem demonstração, o Teorema Espectral para um operador linear de H auto-adjunto e não limitado .

Teorema A.4. *Seja* $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ *um operador linear de* H *com domínio denso em* H. *Se* A *é auto-adjunto, existe uma família* $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ *de projeções ortogonais tal que:*

(i) $E_\lambda \leqslant E_\mu$ *para* $\lambda \leqslant \mu$;

(ii) E_λ *é contínua à direita em* λ, *isto é,* $E_{\lambda+\epsilon} \longrightarrow E_\lambda$ *quando* $\epsilon \to 0^+$;

(iii) $E_\lambda \to 0$ *quando* $\lambda \to -\infty$ *e* $E_\lambda \to I$ *quando* $\lambda \to +\infty$;

(iv) E_λ *comuta com* A, *e se* $T : H \longrightarrow H$ *é limitado e comuta com* A *então* T *comuta com* E_λ *e* E_λ *comuta com* T;

(v) Existe uma medida definida a partir das projeções E_λ *de modo que*

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda,$$

e

$$\mathsf{D}(A) = \left\{ u \in H; \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d \parallel E_\lambda u \parallel^2 < \infty \right\}.$$

(vi) Se $\{F_\lambda\}$ *é outra família de projeções ortogonais satisfazendo* $(i) - (iii)$ *e tal que*

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dF_\lambda,$$

então $E_\lambda = F_\lambda, \ \forall \ \lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Ver [2], [25] ou [35]. □

Observação A.6. *As integrais em* (iv) *e* (v) *são integrais improprias de Riemann-Stieltjes.*

A família de projeções ortogonais $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ **é chamada de família espectral de** A**.**

Principais Notações

1. X denota um espaço de Banach real.
2. H denota um espaço de Hilbert real.
3. C([0, T]; X) é o espaço de Banach das funções contínuas definidas em $[0, T]$ tomando valores em X.
4. $|\cdot|_{p,X}$ é a norma do espaço $L^p(0, T; X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.
5. $C_0^\infty(0, T)$ é o espaço das funcões de classe $C^\infty(0, T)$ com suporte compacto em (0, T).
6. $\mathcal{D}'(0, T)$ é o espaço das distribuições escalares sobre (0, T).
7. $\mathcal{D}'(0, T; X)$ é o espaço das distribuições vetoriais sobre (0, T) com valores em X.
8. $\lambda \longmapsto \mathcal{H}(\lambda)$ é o campo de espaços de Hilbert ν-mensurável.
9. $\mathcal{H}_0 = \int^{\oplus} \mathcal{H}(\lambda) d\nu(\lambda)$ é a integral hilbertiana associada ao campo $\lambda \longmapsto \mathcal{H}(\lambda)$.
10. $\mathcal{H}_\alpha$ é o espaço dos campos u tais que $\lambda^\alpha u \in \mathcal{H}_0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
11. $|\cdot|_\alpha$ é a norma do espaço $\mathcal{H}_\alpha$.
12. $(\cdot, \cdot)_\alpha$ é o produto escalar em $\mathcal{H}_\alpha$.
13. $|\cdot|_{p,\alpha}$ é a norma de $L^p(0, T; \mathcal{H}_\alpha)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.
14. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-\alpha,\alpha}$ denota a dualidade entre $\mathcal{H}_{-\alpha}$ e $\mathcal{H}_\alpha$.
15. $\mathcal{H}_{0,k}$ é o subespaço de $\mathcal{H}_0$ dos campos truncados, istoé, que se anulam ν-q.s. em $[k, +\infty)$.

16. X_k **é o espaço** $L^\infty(0, \tau_k; \mathcal{H}_{0,k}) \hookrightarrow L^\infty(0, \tau_k; \mathcal{H}_{1/2})$**.**

17. A **denota um operador auto-adjunto de** H**,** $A \geqslant 0$**.**

18. $A_\epsilon = A + \epsilon I$**, onde** I **é o operador identidade de** H**,** $\epsilon > 0$**.**

19. $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ **é a família espectral de** A**.**

20. A^α **denota as potências do operador** A**,** $\alpha \in \mathbb{R}$**.**

21. Ω **denota um subconjunto aberto bem regular do** $\mathbb{R}^n$**.**

22. $[X, Y]_\theta$ **denota os espaços intermediários entre** X **e** Y**,** $0 \leqslant \theta \leqslant 1$**.**

23. $H^s(\Omega)$ **é o espaço de Sobolev de ordem** $s>0$**.**

Referências Bibliográficas

[1] Arosio, A. and Spagnolo, S.: Global solution of the Cauchy problem for a nonlinear hyperbolic equation, Nonlinear Partial Differential Equation and their Aplications, Collège de France Seminar, vol. 6, London, 1984.

[2] Bachman, G. and Narici, L.: Functional Analysis, Dover, New York, 2000.

[3] Ball, J. M.: Initial-Boundary Value Problems for an Extensible Beam, J. of Math. Anal. and Appl. 42, 61-90, 1973.

[4] Bartle, R.: The Elements of Integration, J. Wiley, 1996.

[5] Brézis, H.: Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications, Dunod, Paris, 1999.

[6] Castro, N. N. de O.: Soluções Fraca para um Sistema Hiperbólico envolvendo o Operador p-Laplaciano, Notas de Aula, UFPB, João Pessoa, 2005.

[7] Clark, H. R.: Propriedades Assintóticas e Regularizantes de Equações de Vibrações com Não Linearidade Não Locais, Tese de Doutorado, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1992.

[8] Clark, M. R. and Lima, O. A. de: Mathematical Analysis of a Nonlinear System, Nonlinear Analysis 45, 343-361, 2001.

[9] Coddington, E. A. and Levinson, N.: Theory of Ordinary Differential Equations, Mcgraw-Hill Publishing Co. Ltd., New Delhi, 1972.

[10] Dickey, R. W.: The initial value problem for a nonlinear semi-infinite string, Univerity of Texas of Austin, Worhshop, March 1977.

[11] Dunford, N. and Schwartz, J. T.: Linear Opators, Parte II: Spectral Theory, Self Adjoint Operators in Hilbert Space, Wiley-Interscience, New York, 1963.

[12] Evans, L. C.: Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, 1997.

[13] Ebihara, Y., Medeiros, L. A. and Miranda, M. M.: Local Solutions for a Nonlinear Degenerate Hyperbolic Equations, Nonlinear Analysis, vol. 10, 27-40, 1986.

[14] Folland, G. B.: Real Analysis: Modern techniques and their Applications, 2nd ed., Wiley-Interscience, 1999.

[15] Friedman, A.: Foundations of Modern Analysis, Dover, New York, 1970.

[16] Gelfand, I. M. and Vilenkin, Y. N.: Generalized Functions, vol. 4, Translated by Amiel Feinstein, New York, Academic Press, 1964.

[17] Honing, C. S. : Análise Funcional e o problema de Sturm-Liouville, Edgard Blucher, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1978.

[18] Huet, D.: Décomposition Spectrale et Opérateurs, Press Universitaires de Frence, 1977.

[19] Lions, J.L.: Equations Differentielles Operationelles et Problèmes aux Limites, Springer-Verlag, 1961.

[20] Lions, J.L.: Problèmes aux Limites Dans les Équations aux Derivées Partielles, Presses de l'Université de Montreal, 1962.

[21] Lions, J.L.: On Some Questions in Boundary Value Problems of Mathematical Physics, Contemporary Devewlopment in Continuum Machanics and Partial Differential Equations, London, 1978.

[22] Lions, J.L. and Magenes, E.: Non Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, vol 1, Springer, 1972.

[23] Lions, J.L. and Magenes, E.: Problèms aux Limites Non Homogènes et Application, vol. 1, Dunod, Paris, 1968.

[24] Lima, E. L.: Espaços Métricos, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[25] Medeiros, L. A.: Teoria Espectral em Espaços de Hilbert, Textos de Métodos Matemáticos nº4, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1973.

[26] Medeiros, L. A.: Equações Diferenciais Parciais, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1981.

[27] Medeiros, L. A. e Rivera, P. H.: Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais, Textos de Métodos Matemáticos nº9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1975.

[28] Medeiros, L. A. e Miranda, M. M.: Introdução aos Espaços de Sobolev e as Equações Diferenciais Parciais, Textos de Métodos Matemáticos nº25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.

[29] Medeiros, L. A. and Miranda, M. M.: Solutions for the equations of nonlinear vibrations in Sobolev space of fractionary order, Math. Appl. Comput., vol. 6, 1987, 257-276.

[30] Matos, M. P.: Estudo de um Modelo Abstrato para a Equação da Corda Via Integral Hilbertiana, Tese de Doutorado, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1989.

[31] Matos, M. P.: Mathematical Analysis of the Nonlinear Model for the Vibrations of String, Nonlinear Analysis, vol 17, 1125-1137, 1991.

[32] Matos, M. P.: Integral de Bochner e Espaços $L^p(0,T;X)$, Notas de Aula, UFPB, João Pessoa, 1998.

[33] Menzala, G. P.: On Classical Solutions of a Quasilinear Hyperbolic Equation, Nonlinear Analysis, vol. 3, nº 5, 613-627, 1978.

[34] Menzala, G. P.: On Global Classical Solutions of a Nonlinear Wave Equation, J. Appl. Anal. 10, 179-195, 1980.

[35] Miranda, M. M.: Análise Espectral em Espaços de Hibert, Notas de Aula, IM-UFRJ, Rio de Janeiro.

[36] Nachibin, L.: Introdução a Análise Funcional: Espaços de Banach e Calculo Diferencial, Coleção de Monografias, Série de Matemática nº 17, 1976.

[37] Nishihara, K.: On global solution of some quailinear hyperbolic equations, Tokyo J. Math. 7, 1984, 437-459.

[38] Ribeiro, N. F. M.: Dual de Espaços L^p de Funções Vetoriais, Gazeta de Matemática, Paraná, 1981.

[39] Riesz, F. and Nagy, Sz. B.: Functional Analysis, Fredrick Ungar, New York, 1955.

[40] Royden, H. L.: Real Analysis (2nd ed.), Macmillan, New York, 1988.

[41] Yosida, K.: Functional Analysis (6th ed.), Springer-Verlag, New York, 1980.