Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

O Uso do Cubo Mágico Para o Ensino da Geometria Plana e Espacial no Ensino Médio.

Huérllen Vicente Lemos e Silva

Teresina - 2017

Huérllen Vicente Lemos e Silva

Dissertação de Mestrado:

O Uso do Cubo Mágico Para o Ensino da Geometria Plana e Espacial no Ensino Médio.

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus.

Teresina - 2017

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

S586u Silva, Huérllen Vicente Lemos e.
O uso do cubo mágico para o ensino da geometria plana e espacial no ensino médio / Huérllen Vicente Lemos e Silva – Teresina, 2017.
40f.: il. color

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2017.
Orientador: Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus.

1. Geometria. 2. Matematica – Estudo e Ensino. 3. Metodologia – Ensino Médio. I. Título

CDD 516.22

PROFMAT

SBM

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada: O uso do cubo mágico para o ensino da geometria plana e espacial do ensino médio, defendida por Huénllem Vicente Lemos e Silva em 20 / 02 / 2017 e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Isaías Pereira de Jesus

Presidente da Banca Examinadora

Examinador

Afonso Norberto da Silva

Examinador Externo

À minha mãe Maria de Fátima Lemos e Sousa e ao meu pai Huélio Vicente da Silva.

Agradecimentos

A Deus, por ser tudo em minha vida.

À minha família, em especial minha mãe Maria de Fátima que sempre lutou para que eu e minhas irmãs pudéssemos ter uma educação de qualidade.

Ao meu pai Huélio Vicente pelo exemplo de superação.

Às minhas irmãs Fathyhellen, Tathyhellen, Kathyhellen que sempre me apoiaram e incentivaram nos estudos.

À minha esposa Inara Fernanda por me transmitir conhecimento, paciência, amor e compreensão durante todo meu mestrado.

Ao corpo docente do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Piauí.

À banca examinadora, em especial ao professor Isaías Pereira de Jesus que se mostrou sempre solícito nos momentos difíceis.

Aos meus amigos que conheci ao longo desses estudos, entre eles tive a oportunidade de estudar novamente com meu grande amigo e irmão Gilson Amorim.

Ao Instituto Federal do Maranhão - IFMA Campus Bacabal pela compreensão na disponibilidade de horários para meus estudos.

À Capes pelo apoio financeiro.

A todos aqueles que contribuíram de forma direta ou indiretamente, meus agradecimentos.

“Entrega o teu caminho ao Senhor; confia Nele, e Ele o fará.” (Salmos 27:5).

Resumo

O objetivo desse trabalho é apresentarmos a utilização de jogos enquanto instrumento pedagógico crítico e contextualizado, contribuindo para a formação integral do aluno. Além disso, apresentamos alguns conceitos matemáticos pertinentes à geometria plana e espacial no Ensino Médio dando ênfase ao jogo do cubo mágico, onde trabalhamos resoluções de questões abordadas em olimpíadas e vestibulares.

Palavras-chave: Lúdico, Ensino, Geometria, Cubo Mágico.

Abstract

The aim of this work is presenting the use of the games as critical pedagogical instrument and also contextualized, contributing to the integral learning of the student. Moreover, we present some mathematical concepts related to flat and space geometry in high school degree, emphasizing the game of magic cube in which we work through questions resolutions of olympics and vestibular exams..

Keywords: Playful, Teaching, Geometry, Magic Cube.

Lista de Figuras

1	Cubo 2x2x2	9
2	Cubo 3x3x3	9
3	Cubo 4x4x4	9
4	Mirror 2x2x2	9
5	Gem IV	9
6	Megaminx	9
7	Octaedro	9
8	Pyraminx	9
9	3x3x3 Cilíndrico	9
10	Pyramorphinx	9
11	3x3x3 Côncavo	9
12	2x2x3	9
13	Gem VI	9
14	Square - 2	9
15	Square - 1	9
16	Figura 16	11
17	Figura 17	11
18	Figura 18	11
19	Figura 19	11
20	Figura - Problema 5	13
21	Figura - Problema 6	14
22	Figura - Solução Problema 6	15
23	Figura - Problema 7	15
24	Figura - Problema 8	17
25	Figura - Solução Problema 8	17
26	Figura - Problema 9	17
27	Figura - Problema 10	18
28	Figura - Problema 11	19
29	Figura - Problema 12	20

30 Fotos - Projeto 1 23
31 Fotos - Projeto 2 24
32 Fotos - Projeto 3 25
33 Fotos - Projeto 4 26
34 Fotos - Projeto 5 27
35 Figura - Problema 13 29
36 Figura - Problema 14 30
37 Figura - Solução Problema 14 30
38 Figura - Problema 15 31
39 Figura - Solução Problema 15 31
40 Figura - Problema 16 32
41 Figura - Problema 17 32
42 Figura - Problema 18 33
43 Figura 1 - Solução Problema 18 33
44 Figura 2 - Solução Problema 18 34
45 Figura - Problema 19 34
46 Figura - Solução Problema 19 34
47 Figura - Exemplo 1 36
48 Figura - Exemplo 3 37

Sumário

Introdução **3**

1 Referencial Teórico para o Uso do Lúdico **5**

1.1 História do Cubo Mágico 6

2 Aplicações **10**

2.1 Elementos de uma Figura Plana e Espacial 10

2.2 Fórmula de Euler 12

2.3 Cálculo de Áreas de Figuras Espaciais 14

2.4 Raciocínio Lógico Geométrico 16

3 Metodologia do Ensino **21**

3.1 Dificuldades no Uso do Lúdico 21

3.1.1 Projetos Desenvolvidos no IFMA campus Bacabal 22

3.2 Etapas do Uso do Cubo Mágico 27

4 Resolução de Questões de Geometria com o Conhecimento do Cubo Mágico **29**

4.1 Olímpiadas e Vestibulares 29

4.2 Elaborando Questões 35

5 Considerações Finais **38**

Referências **40**

Introdução

Os jogos de raciocínio ajudam na memória, contagem, cálculos mentais, noção de espaço, estratégia e entre outros. Cada jogo possui características peculiares e seus componentes podem ser de grande ajuda para fixar o conteúdo a ser trabalhado de acordo com o assunto a ser lecionado. Os jogos, primeiramente, devem ser estudados e avaliados de modo a serem utilizados com maior eficácia dentro do assunto a ser trabalhado. Isso fará com que o jogo, além de lazer, comece a assumir uma tarefa de extrema importância, como por exemplo, ajudar no objeto de estudo. Assim sendo, uma difusão do conteúdo escolar com o mundo do aluno, propicia a ele uma forma natural para assimilar as aulas.

Os jogos estão presentes no cotidiano das pessoas em diferentes épocas. Por outro lado, eles tem finalidades diversas de acordo com a cultura dos povos. Kishimoto [9] diz que, no Renascimento, o jogo era visto como uma conduta livre, que favorece o desenvolvimento da inteligência e facilita o estudo.

Quando dizemos que os jogos estão presentes em diferentes épocas da vida das pessoas, estamos afirmando o quanto eles participam da construção das personalidades e influenciam nos próprios modos de aprendizagem humanos. Piaget [12] defendia o uso de jogos na educação e criticava a escola tradicional por ter como objetivos acomodar as crianças aos conhecimentos tradicionais, em oposição ao que ele defende que é suscitar indivíduos inventivos, críticos e criadores. Assim, o jogo é um instrumento facilitador da aprendizagem e pode ser visto como forma de despertar o interesse do aluno para o conhecimento. Dessa forma o jogo poderá vir no inicio do conteúdo com a intenção de despertar o interesse do aluno ou no final para reforçar o desenvolvimento de atividades e habilidades. Logo, os jogos serão para o professor uma ferramenta a auxiliar no processo de ensino e aprendizagem e na apropriação de vários conteúdos matemáticos, facilitando a compreensão e a utilização de fórmulas que poderão tornar-se cansativas e possibilitando uma maior participação dos alunos.

O jogo é uma atividade natural do desenvolvimento dos processos psicológicos básicos, pois desenvolvem o autoconhecimento e o conhecimento dos outros.

Em 1990, o filósofo Huizinga [6] em seu livro *Homo Ludens*, argumenta que o jogo é uma categoria absolutamente primária da vida, tão essencial quanto o raciocínio *Homo sapiens* e a fabricação de objetos *Homo faber*. Então, a denominação *Homo ludens*, quer dizer que o elemento lúdico está na base do surgimento e desenvolvimento da civilização. Huizinga define jogo como: "uma atividade voluntária exercida dentro de certos e determinados limites de tempo e espaço, segundo regras livremente consentidas, mas absolutamente obrigatórias, dotado de um fim em si mesmo, acompanhado de um sentimento de tensão e alegria e de uma consciência de ser diferente de vida cotidiana."

Os problemas matemáticos visam desenvolver várias habilidades tais como fazer com que o aluno aprenda os conceitos, as técnicas, a linguagem matemática e a comunicar ideias abstratas. Espera-se que ao aprender a resolver problemas matemáticos, geralmente mais simples, o aluno esteja também aprendendo um método de resolver problemas em outras áreas. Além disso, a resolução de problemas ajuda-o a se sentir seguro e apto a enfrentar situações novas.

Em resumo, nosso trabalho está dividido da seguinte forma:

No capítulo 1 apresentamos um referencial teórico para o uso do lúdico, observando a história do cubo mágico.

No capítulo 2 é apresentada as aplicações referentes ao uso do cubo mágico.

No capítulo 3 a metodologia do uso do cubo mágico é feita.

No capítulo 4 apresentamos resoluções de questões de geometria com o conhecimento do uso do cubo mágico.

Finalmente, no capítulo 5 apresentamos as conclusões.

Capítulo 1

Referencial Teórico para o Uso do Lúdico

Neste capítulo apresentamos um breve estudo do referencial teórico para o uso do Lúdico.

Segundo Grando [4], o jogo propicia o desenvolvimento de estratégias para resolução de problemas na medida em que possibilita a investigação, ou seja, a exploração do conceito através da estrutura matemática subjacente ao jogo e que pode ser vivenciada, pelo aluno, quando ele joga, elaborando estratégias e testando-as a fim de vencer o jogo.

> *"Outro motivo para a introdução de jogos nas aulas de matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos de nossos alunos que temem a Matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la. Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo em que estes alunos falam Matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente a seus processos de aprendizagem." (Borin [1], 1996, p. 9.)*

Rêgo e Rêgo [13] destacam que é importante a introdução de novas tecnologias de ensino, onde o aluno seja o sujeito de aprendizagem, respeitando-se o seu contexto e levando em consideração os aspectos recreativos e lúdicos próprios de sua idade, sua imensa curiosidade e desejo de realizar atividades em grupo. Dentro desta situação, a introdução de jogos como estratégia de ensino aprendizagem é um recurso pedagógico que apresenta excelentes resultados, pois criam situações que permitem o aluno desenvolver métodos de resolução de problemas, estimulam sua criatividade no ambiente desafiador e gerador de motivação. Com isso o aluno, já encantado pelo jogo, pode se transportar para o novo ambiente de ensino e aprendizagem com mais prazer a participar dos desenvolvimentos e soluções dos desafios propostos pelas questões-problemas.

Entre os problemas encontrados para ensino e aprendizagem de geometria identifica-se a forma como esta é pouco abordada nos currículos escolares, nos livros didáticos e na sala de aula pelos professores do Ensino Fundamental, o que dificulta o desempenho dos alunos nas aulas de Ensino Médio.

Desta forma chama atenção a possibilidade de tornar a geometria mais significativa e motivadora para o aluno utilizando recursos que sejam eficazes e renovem o ensino. Conforme destaca Conte [2], a visão tradicional da geometria está relacionada com a aprendizagem de regras para a manipulação de símbolos, simplificação de expressões geométricas e resolução de equações. Assim, a Geometria tem servido para ensinar um conjunto de procedimentos que, na visão dos alunos, não têm relação com outros conhecimentos matemáticos e nem com o seu mundo cotidiano.

Além disso, para Pavanello [11], a geometria tem se dedicado a capacitar os estudantes para produzir um conjunto de definições, nomes, propriedades e fórmulas, deixando de lado os conceitos e aplicações de natureza histórica e lógica. As aplicações utilizadas são muitas vezes artificiais, e os alunos não têm a oportunidade de refletir sobre as suas próprias experiências, nem de articular os seus conhecimentos, memorizam procedimentos que são assumidos como operações sobre sequências de símbolos e que resolvem problemas, mas que para eles não tem significado.

Segundo Moura [10], assim como outros pesquisadores nesse trabalho, Piaget e Vygotsky justificam a utilização do jogo como fator de aprendizagem. São recomendados jogos como lúdico por estimularem as relações cognitivas, afetivas, verbais, psicomotoras e sociais.

1.1 História do Cubo Mágico

É a partir desse modo de pensar que o jogo Cubo Mágico pode ser inserido no desenvolvimento humano. Vejamos sua apresentação:

O Cubo de Rubik, ou popularmente conhecido como Cubo Mágico, possibilita estimular a percepção individual dos conceitos matemáticos relacionados à geometria e o raciocínio lógico. Pequeno objeto formado por nove quadrados coloridos em cada face, foi criado pelo húngaro Ernö Rubik para facilitar as aulas de arquitetura geométrica, na metade da década de 70. Em 1980, Ernö Rubik, apresentou a uma empresa de brinquedos o objeto que o transformou em brinquedo onde foi chamado originalmente de Cubo de Rubik, que nos anos seguintes foi importado pelos Estados Unidos e ganhou repercussão no mundo inteiro. O desafio proposto pelo jogo é colocar todos os quadrados de cor igual na mesma face do cubo apenas girando suas peças. Quando mostramos o cubo na aula de matemática, sentiremos a emoção instantânea dos alunos começando a aprender, com a ajuda de um brinquedo, que eles já conhecem e muito provavelmente já brincaram. Há uma conexão automática dos alunos com o cubo mágico, mesmo que seja seu primeiro contato.

Observamos que o cubo apresenta as seguintes características:

- É formado por 27 cubinhos, um que está no centro do cubo é imaginário.
- Cada cubinho tem 6 facetas, mas só são visíveis as que apontam para fora do cubo.
- Há três tipos de cubinhos: centrais, de meio e de cantos.
- Existem mais de 40 quatrilhões de combinações possíveis para se embaralhar um cubo mágico (são exatamente 43.252.003.274.856.000 combinações).

É neste momento de definição e apresentação do cubo que o conceito deste projeto será executado. Os conteúdos de geometria como poliedros, unidades de medidas, noções de área e volume, simetria, escala, semelhança, por exemplo, serão apresentados de forma lúdica para os alunos.

Libâneo [8] traz a consolidação do conhecimento de três formas: reprodutiva, de generalização e criativa. A reprodutiva tem caráter de exercitação, ou seja, quando a matéria é exposta e compreendida pelos alunos, a discussão faz com que estes apliquem o conhecimento em uma situação conhecida. No entanto, na consolidação generalizadora o conhecimento é aplicado a uma situação nova "implica a integração de conhecimentos de forma que os alunos estabeleçam relações entre conceitos, analisem fatos e fenômenos sob vários pontos de vista, façam a ligação dos conhecimentos com novas situações e fatos da prática social." Ou seja, gerando embaralhamentos aleatórios, o aluno está sempre diante de situações novas em que terá que tomar decisões da melhor maneira possível de resolvê-las para que o cubo mágico seja solucionado corretamente.

Além disso, o jogo em si permite que o professor, através da observação dos alunos jogando, conheça não só como cada um está lidando com o conteúdo educacional objeto do jogo, mas também perceba os aspectos comportamentais de liderança, cooperação, concentração, aumento do poder de memorização, ética entre outras habilidades que podem ser observadas não só em alunos da disciplina, mas também a quem pratica o cubo mágico como esporte e se dedica ao seu conhecimento. Fialho [3] destaca que com o Lúdico o professor consegue fazer com que o aluno elabore conceitos próprios; contextualize e fixe conteúdos; além de desenvolver habilidades extras acima citadas.

Vários objetivos cognitivos podem ser alcançados pelo uso de jogos. Grando [5] destaca que nos jogos os procedimentos de raciocínio, as regras, as tomadas de decisões e a elaboração de estratégias são equivalentes aos elementos necessários aos pensamentos matemáticos.

O cubo mágico permite abordar três modalidades de aprendizagem: auditiva, através da instrução do professor e interação entre duplas; visual, vendo seus movimentos, seus elementos geométricos, e desfrutando de suas atraentes faces coloridas e, o mais importante, cinestésica, por meio do próprio ato de segurá-lo, sentindo suas faces, arestas, vértices, área de superfície, figuras compostas com vários cubinhos em cada face e, finalmente, através de giros e resolvendo-o. Todos os professores de matemática dizem que os alunos mais difíceis de provocar interesses são os alunos cinestésicos, e o cubo mágico é uma famosa ferramenta de fácil manipulação com a qual se vai atrair a atenção do público cinestésico de maneira que ele nunca vai esquecer. Em poucas palavras, veremos os alunos lendo e decifrando as instruções, pensando e trabalhando duro com os algoritmos, comunicando-se e ajudando uns aos outros, às vezes frustrados, às vezes vitoriosos. É essa dedicação de resolução de problemas e pensamentos críticos que qualquer professor almeja ver em suas melhores classes.

Hoje em dia o termo *Cubo Mágico* já é usado como metonímia para muitos tipos *puzzles*[1] que tem o mesmo intuito de resolução. Chama-se de Cubo Mágico brinquedos que depois de embaralhado tem por definição "resolver"pondo todas as peças nos seus lugares iniciais, sejam esses lugares referenciados por fotos, cores, tamanhos entre outros,

[1]puzzle vem do inglês e significa enigma ou mesmo quebra cabeça

perdendo assim até mesmo a forma cúbica e atingindo outros *puzzles*.

2x2x2

Figura 1

3x3x3

Figura 2

4x4x4

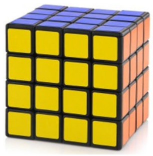


Figura 3

Exemplo de metonímia de Cubo Mágico:

Mirror 2x2x2

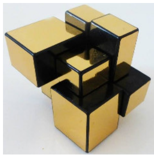


Figura 4

Gem IV

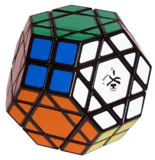


Figura 5

Megaminx

Figura 6

Octaedro

Figura 7

Pyraminx

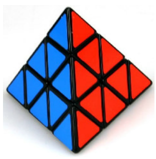


Figura 8

3x3x3 Cilíndrico

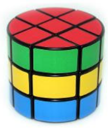


Figura 9

Pyramorphinx

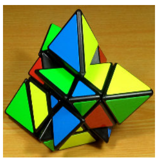


Figura 10

3x3x3 Côncavo

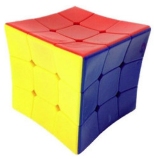


Figura 11

2x2x3

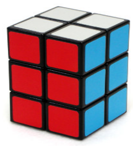


Figura 12

Gem VI

Figura 13

Square - 2

Figura 14

Square - 1

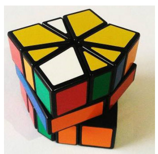


Figura 15

Com essas riquezas de variações é que podemos trabalhar facilmente o lado cinestésico no lúdico da geometria plana e espacial.

Capítulo 2

Aplicações

Nesse capítulo apresentaremos as aplicações do cubo mágico a geometria plana e espacial no Ensino Médio.

2.1 Elementos de uma Figura Plana e Espacial

A Geometria Euclidiana é baseada em axiomas, que são verdades incontestáveis, e postulados, que são consequências dos axiomas e que se provados são chamados de teoremas. Destacam-se alguns axiomas facilmente encontrado no cubo mágico, como:

- Ponto é o que não tem partes nem grandeza alguma.
- Linha é o que tem comprimento e não tem largura.
- As extremidades da linha são pontos.
- Linha reta é aquela que está posta igualmente entre as suas extremidades.
- Superfície é o que tem comprimento e largura.
- As extremidades da superfície são linhas.

Identificamos facilmente todos esses elementos em um cubo desenhado tridimensionalmente em uma folha de papel:

Ponto A, B, C, D, E, F, G e H

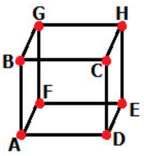


Figura 16

Linha $\overline{\mathsf{GH}}$

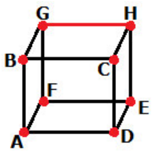


Figura 17

Superfície π_{BCHG}

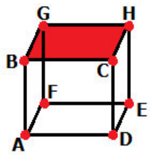


Figura 18

Manuseando o cubo podemos entender melhor as figuras em três dimensões desenhadas em um quadro ou folha de papel com duas dimensões, e já irmos inserindo ao conhecimento do aluno definições como Vértices, Arestas e Faces.

Figura 19

1. Ponto (Vértice): A extremidade que se uni as três cores;
2. Reta (Aresta): O encontro de duas cores;
3. Plano (Face): uma cor Inteira

Relacionamos alguns postulados euclidianos abaixo e que podem ser motivo de interrogação para o aluno já com o cubo em mãos:

- Dados dois pontos distintos, há um único segmento de reta que os une;
- Um segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente para construir uma reta;
- Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer, pode-se construir uma circunferência de centro naquele ponto e com raio igual à distância dada;
- Todos os ângulos retos são congruentes (semelhantes);
- Se duas linhas intersectam uma terceira linha de tal forma que a soma dos ângulos internos em um lado é menor que dois ângulos retos, então as duas linhas devem se intersectar neste lado se forem estendidas indefinidamente. (Postulado de Euclides ou Postulado das Paralelas)

2.2 Fórmula de Euler

$$\mathsf{F} + \mathsf{V} = 2 + \mathsf{A}$$

Na fórmula desenvolvida por Leonhard Euler acima apresentada para o estudo de poliedros, temos a relação direta de Faces (F), Vértices (V) e Arestas (A) e que podemos identificar concretizada em alguns *puzzles* já criados. O aluno inicialmente provocado a responder questões como:

Problema 1. *Quantas arestas têm uma figura espacial composta por 6 quadrados regulares e 8 vértices?*

Solução.

Sejam $\mathsf{F} = 6, \mathsf{V} = 8$. Por Euler, temos:

$$\mathsf{F} + \mathsf{V} = 2 + \mathsf{A} \Rightarrow 6 + 8 = 2 + \mathsf{A} \Rightarrow 14 = 2 + \mathsf{A} \Rightarrow 12 = \mathsf{A}.$$

Portanto, teremos um total de doze arestas.

É o saber matemático, onde trata a solução de questões pelo contexto da vivência do aluno no meio estudado. O aluno chegaria a uma solução do problema acima citado se tivesse envolvido no meio e sem a presença de fórmulas ou mesmo auxílio do professor. Somente da questão bem elaborada para um meio onde ele se sinta a vontade, e poderia explicar sua solução apresentando o objeto de seu raciocínio. O professor deve conhecer o objeto que servirá como base para a resolução da questão, assim ele pode descrever com detalhes e o aluno terá um desenho mental do que se procura. Uma outra forma de escrever a questão acima seria:

Problema 2. *Seria possível construir um poliedro com apenas 6 quadrados de mesmo tamanho onde promovêssemos 8 pontos de encontro entre 3 quadrados? Se possível, quantos encontros entre 2 quadrados ocorreria?*

Observação 1. *Os demais exemplos seguem essa linha de raciocínio para serem adaptados.*

Problema 3. *Quantos vértices tem um poliedro formado por 6 quadrados e 8 hexágonos regulares?*

Solução.

Sejam $\mathsf{F} = 6 + 8 = 14$ faces, $\mathsf{A} = \dfrac{6 \cdot 4 + 8 \cdot 6}{2} = 36$. Por Euler, temos:

$$\mathsf{F} + \mathsf{V} = 2 + \mathsf{A} \Rightarrow 14 + \mathsf{V} = 2 + 36 \Rightarrow 14 + \mathsf{V} = 38 \Rightarrow \mathsf{V} = 24.$$

Portanto, temos vinte e quatro Vértices. (Veja o cubo da Figura 5 para adaptar a questão).

Problema 4. *Quantas faces, arestas e vértices tem um poliedro formado por 6 octaedros e 24 pentágonos regulares?*

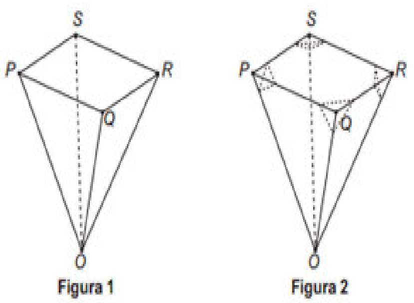
Solução.

Sejam $\mathsf{F} = 6 + 24 = 30$ faces. $\mathsf{A} = \dfrac{6 \cdot 8 + 24 \cdot 5}{2} = 84$. Por Euler, temos:

$$\mathsf{F} + \mathsf{V} = 2 + \mathsf{A} \Rightarrow 30 + \mathsf{V} = 2 + 84 \Rightarrow 30 + \mathsf{V} = 86 \Rightarrow \mathsf{V} = 56.$$

Portanto, temos: 30 Faces, 84 Arestas e 56 Vértices. (Veja o cubo da Figura 13 para adaptar a questão).

Problema 5. *(ENEM-2016 - prova amarela - segunda aplicação) Questão 152: Um lapidador recebeu de um joalheiro a encomenda para trabalhar em uma pedra preciosa cujo formato é o de uma pirâmide, conforme ilustra a Figura 1. Para tanto, o lapidador fará quatro cortes de formatos iguais nos cantos da base. Os cantos retirados correspondem a pequenas pirâmides, nos vértices P, Q, R e S, ao longo dos segmentos tracejados, ilustrados na Figura 2.*



Depois de efetuados os cortes, o lapidador obteve, a partir da pedra maior, uma joia poliédrica cujos números de faces, arestas e vértices são, respectivamente, iguais a:

(a) 9, 20 e 13

(b) 9, 24 e 13

(c) 7, 15 e 12

(d) 10, 16 e 5

(e) 11, 16 e 5

Solução.

(i) Note que, 5 faces já existem. Para cada corte, cria-se uma nova face, ou seja, mais 4 faces. Total de faces $\mathsf{F} = 5 + 4$ total de $\mathsf{F} = 9$ faces.

(ii) Cada corte gera um triângulo. Que possui 3 vértices. Como já existia um vértice que não foi tocado temos, $\mathsf{V} = 4 \cdot 3 + 1$ total de $\mathsf{V} = 13$ vértices.

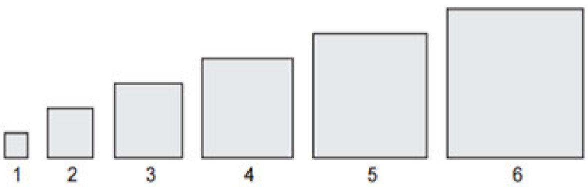
(iii) O número de arestas segue o mesmo raciocínio. Existiam 8 arestas. Cada corte permitiu a construção de mais três arestas. Então, $\mathsf{A} = 8 + 4 \cdot 3$ total de $\mathsf{A} = 20$ arestas.

Resposta: letra a.

2.3 Cálculo de Áreas de Figuras Espaciais

Com as variações do cubo, temos um grande suporte cinestésico para nos auxiliar nas resoluções de questões. Como exemplo de resolução, podemos observar algumas abordagens feitas pelo ENEM e OBMEP.

Problema 6. *(ENEM-2016 - prova amarela - segunda aplicação) Questão 167: Em um trabalho escolar, João foi convidado a calcular as áreas de vários quadrados diferentes, dispostos em sequência, da esquerda pra direita, como mostra a figura.*



O primeiro quadrado da sequência tem lado medindo 1 cm, o segundo quadrado tem lado medindo 2 cm, o terceiro quadrado tem lado medindo 3 cm e assim por diante. O objetivo do trabalho é identificar em quanto a área de cada quadrado da sequência excede a área do quadrado anterior. A área do quadrado que ocupa a posição n, na sequência, foi representada por A_n. Para $\mathsf{n} \geqslant 2$, o valor da diferença $\mathsf{A}_\mathsf{n} - \mathsf{A}_{\mathsf{n}-1}$, em cm quadrado, é igual:

(a) $2n - 1$.

(b) $2n + 1$.

(c) $-2n + 1$.

(d) $(n - 1)^2$.

(e) $n^2 - 1$.

Solução.

(i) O aluno identifica que as dimensões são distintas, mas que continuam sendo quadrados. O mesmo imagina faces de cubos de diferentes tamanhos. Assim como acontecem nas figuras 1, 2 e 3.

(ii) Lembrara-se da fórmula que aplicou nesses cubos em sala de aula.

$$A = b \cdot h$$

e aplicaria no cubo de lado n e logo em seguida no cubo de lado $n - 1$.

(iii) Depois do passo 2 concluído, o aluno efetuaria a subtração sugerida pela questão:

$$n^2 - (n - 1)^2 = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = n^2 - n^2 + 2n - 1 = 2n - 1.$$

Resposta: letra a.

Problema 7. *O octaedro é um poliedro de 8 (oito) faces, tem 6 (seis) vértices e 12 (doze) arestas. Pode também ser chamado bipirâmide quadrada. O octaedro regular é um dos cincos sólidos platônicos. Sabendo que cada aresta deste poliedro mede 8cm, calcule a área total do octaedro regular abaixo:*

Solução.

As faces laterais são triângulos equiláteros, a área de cada triângulo é:

$$A_t = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{8^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{64 \cdot \sqrt{3}}{4} = 16 \cdot \sqrt{3}.$$

Pela Própria definição, temos 8 faces, logo:

$$A_T = 8 \cdot A_t = 8 \cdot 16 \cdot \sqrt{3} = 128 \cdot \sqrt{3}\ cm^2.$$

Onde:

- A_t é a área do triângulo (uma face);
- A_T é a área total do octaedro.

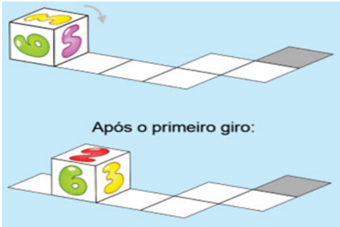
2.4 Raciocínio Lógico Geométrico

A muito tempo deixou-se de avaliar o aluno pela seleção da fórmula correta e desenvolvimento da mesma. Nos vestibulares e seletivos mais conhecidos como o Exame Nacional do Ensino Médio-ENEM e a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas-OBMEP já se ver questões que avaliam a noção espacial do aluno.

> *Orientação espacial é a capacidade espacial do saber se posicionar, em relação ao ambiente a sua volta e ao seu próprio corpo. É a noção do que esta à sua direita ou à sua esquerda; à frente ou atrás; acima ou abaixo de si ou a relação entre objetos. É poder identificar algo longe, perto, alto, baixo, longo ou curto. (José [7], 1997, p.13.)*

Como José et al [7] ressalta, a noção espacial é algo do convívio do ser humano e de importância para a localização do mesmo em um meio. Como veremos em algumas questões recentes abaixo:

Problema 8. *(OBMEP-2016 - Nível 3) Questão 1: A soma dos números das faces opostas de um dado é sempre 7. O dado da figura é girado sucessivamente sobre o caminho indicado até parar na última posição, destacada em cinza. Nessa posição, qual é o número que está na face superior do dado?*



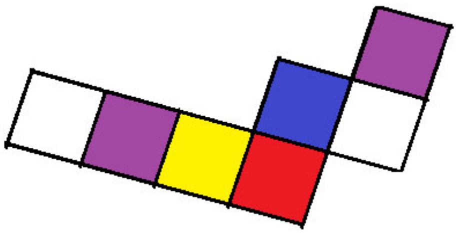
(a) 1 *(b) 2* *(c) 3* *(d) 4* *(e) 5*

Solução.

O cubo da questão pode facilmente sofrer referência ao cubo mágico. A figura está com números coloridos e o aluno pode completar as cores mentalmente por já está familiarizado com cores e não com números. Tomemos a seguinte relação:

- Verde (6) e seu oposto Azul (1)
- Roxo (5) e seu oposto Vermelho (2)
- Amarelo (3) e seu oposto Branco (4)

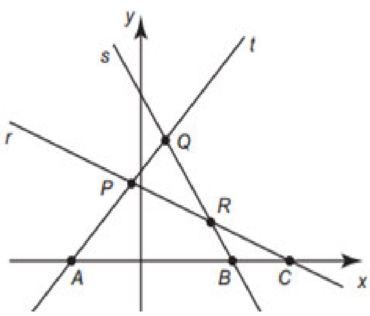
Assim:



o oposto do roxo é o vermelho (2).

Resposta: letra b.

Problema 9. *(ENEM-2016 - prova azul - segunda aplicação) Questão 137: Na figura estão representadas três retas no plano cartesiano, sendo P, Q e R os pontos de intersecções entre as retas, e A, B e C os pontos de intersecções dessas retas com o eixo x.*



(a) Essa figura é a representação de um sistema linear de três equações e duas incógnitas que: Possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos P, Q e R, pois eles indicam onde as retas se intersectam.

(b) Possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos A, B e C, pois eles indicam onde as retas intersectam o eixo das abscissas.

(c) Possui infinitas soluções reais, pois as retas se intersectam em mais de um ponto.

(d) Não possui solução real, pois não há ponto que pertença simultaneamente às três retas.

(e) Possui uma única solução real, pois as retas possuem pontos em que se intersectam.

Solução.

O aluno não precisa de cálculo. Apenas de duas observações.

(i) Definição de solução de sistema: valor das incógnitas que satisfaz as equações envolvidas simultaneamente, ou seja, existe um ponto comum as equações envolvidas.

(ii) Observar que no gráfico citado não existe um ponto (x, y) que faça parte das três retas ao mesmo tempo.

Resposta: letra d.

Problema 10. *(ENEM-2016 - prova amarela - segunda aplicação) Questão 157: Um grupo de escoteiros mirins, numa atividade no parque da cidade onde moram, montou uma barraca conforme a foto da Figura 1. A Figura 2 mostra o esquema da estrutura dessa barraca, em forma de um prisma reto, em que foram usadas hastes metálicas.*


Figura 1

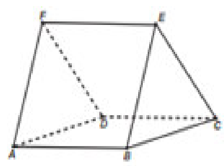
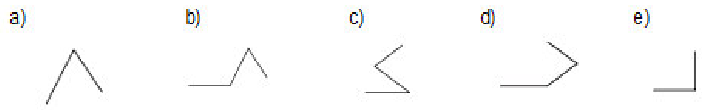


Figura 2

Após a armação das hastes, um dos escoteiros observou um inseto deslocar-se sobre elas, partindo do vértice A em direção ao vértice B, deste em direção ao vértice E e, finalmente, fez o trajeto do vértice E ao C. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os pontos. A projeção do deslocamento do inseto no plano que contém a base ABCD é dada por:



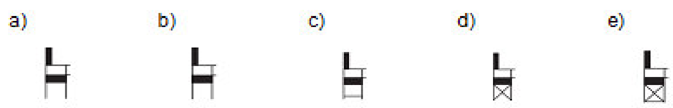
Solução.

Aqui podemos identificar mais ainda a presença da noção espacial. Notamos a importância do posicionamento diante de uma figura em 2 dimensões olhando com uma perspectiva tridimensional.

Resposta: letra b.

Problema 11. *(ENEM-2016 - prova cinza - primeira aplicação) Questão 136: Os alunos de uma escola utilizaram cadeiras iguais às da figura para uma aula ao ar livre. A professora ao final da aula, solicitou que os alunos fechassem as cadeiras para guardá-las. Depois de guardadas, os alunos fizeram um esboço da vista lateral da cadeira fechada.*

Qual é o esboço obtido pelos alunos?

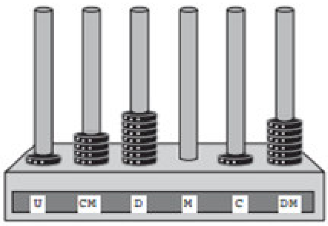


Solução.

Aqui, assim como na questão anterior, podemos identificar a presença da noção espacial. Notamos a importância do posicionamento diante de uma figura bidimensional e tendo que ter o olhar tridimensional. Notemos a diferença entre as duas, pois esta tem um elemento a mais que é a perspectiva lateral da cadeira. Há um giro no objeto envolvido. O que ajuda em marcar a alternativa correta é notar que a cadeira não possui as pernas cruzadas na lateral. Somente na frente. E que na parte de baixo possui uma única linha unindo as pernas traseiras às dianteiras.

Resposta: letra c.

Problema 12. *(ENEM-2016 - prova cinza - primeira aplicação) Questão 173: O ábaco é um antigo instrumento de cálculo que usa notação posicional de base dez para representar números naturais. Ele pode ser apresentado em vários modelos, um deles é formado por hastes apoiadas em uma base. Cada haste corresponde a uma posição no sistema decimal e nelas são colocadas argolas; a quantidade de argolas na haste representa o algarismo daquela posição. Em geral, colocam-se adesivos abaixo das hastes com os símbolos U, D, C, M, DM e CM que correspondem, respectivamente, a unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar, dezenas de milhar e centenas de milhar, sempre começando com a unidade na haste da direita e as demais ordens do número no sistema decimal nas hastes subsequentes (da direita para esquerda), até a haste que se encontra mais à esquerda. Entretanto, no ábaco da figura, os adesivos não seguiram a disposição usual.*



Nessa disposição, o número que está representado na figura é:

(a) 46171 *(b) 147016* *(c) 171064* *(d) 460171* *(e) 610741*

Solução.

(i) Deve-se organizar as unidades corretamente como relata o texto da questão: Unidade, Dezena, Centena, Milhar, Dezena de Milhar e Centena de milhar.

(ii) Agora apenas contar quantas argolas tem em cada uma. Chegando ao número 460171.

Resposta: letra d.

Capítulo 3

Metodologia do Ensino

Nesse capítulo apresentaremos a metodologia do ensino como separar as dificuldades do uso do lúdico e aprender as etapas de como usar o cubo mágico nas aulas.

3.1 Dificuldades no Uso do Lúdico

O primeiro contato é sempre muito fácil, mas convencer uma turma inteira a persistir no desafio de montar o cubo é desafiador. Uma solução para isso foi separar alguns minutos ao fim de cada aula para falar um pouco dos benefícios de concentração, memorização e motivação a cada desafio conquistado com a solução do brinquedo. O cubo foi usado não com o propósito de montar ou mesmo de ensino matemático e sim como demonstração de motivação, gratificação e superação, apresentando para o aluno que o desafio também nos presenteia com doses de satisfação a cada construção, isso foi o fator determinante para envolver os alunos no jogo.

O preço do cubo mágico profissional é outra dificuldade relevante. Encontramos pelas feiras ou mercadinhos o Cubo Mágico mais comum de R$ 1,99, mas esses são de uma qualidade muito ruim fazendo o seu giro travar e muitas vezes adesivos e peças se desprenderem facilmente. Este fato por muitas vezes faz o aluno quebrar seu raciocínio de resolução provocando muitas desistências. Os cubos profissionais com o melhor custo benefício estão custando por volta de R$ 45,00 e muitas vezes encontrados somente em lojas virtuais, encarecendo ainda mais com o pagamento de frete. Uma solução encontrada foi o pedido em quantidade. Os alunos economizavam durante um tempo e pedíamos cubos para a turma inteira de uma só vez, assim barateando um pouco os preços e fretes do fornecedor. Em média um cubo chegaria a um valor de R$ 40,00 com fretes inclusos.

Outra dificuldade é o tempo de sala de aula. Com uma carga horaria elevada, a disciplina de matemática está sobrecarregada de conteúdos obrigatórios o que torna difícil para o professor trazer o lúdico, pois, como vimos, trabalhar com o lúdico demanda tempo. O aluno quer aprender com aulas menos tradicionais. Mesmo não sendo possível o uso do lúdico em todas as aulas, uma aplicação matemática com algo que seja do cotidiano do aluno deixa a aula mais atrativa. Algumas soluções encontradas foram: apresentação de palestras, desenvolvimento de projetos de pesquisa e extensão, produção de vídeo-aula, criação de grupo em redes sociais, além disso, aulas em turno oposto com a maioria dos alunos os mesmos repassavam a solução do cubo para os demais. Com isso se aperfeiçoo as aulas com o lúdico, pois o cubo mágico já era um objeto inserido no cotidiano de todos.

3.1.1 Projetos Desenvolvidos no IFMA campus Bacabal

Os projetos relatados nesse tópico foram desenvolvidos para que os jogos, em específico o cubo mágico, fosse inserido no cotidiano dos alunos para que fosse futuramente utilizado como lúdico em sala de aula. Os projetos envolvem desde pesquisa bibliográfica passando por palestras e campeonatos com o tema cubo mágico na escola.

Projeto 1:

O projeto foi desenvolvido no Instituto Federal do Maranhão-IFMA campus Bacabal no Programa Institucional de Bolsas de Inovação Cientifica para Ensino Médio PIBIC/EM como forma de pesquisa bibliográfica para fundamentar futuras aplicações em projetos de extensão. O mesmo foi executado no ano de 2013.2 e apresentado no IX Congresso Norte Nordeste de Pesquisa e Inovação CONNEPI / Seminário de Pesquisa, Pós-graduação e Inovação - SEPPI de São Luís em abril 2014.

Nome do projeto: A aplicação dos jogos de raciocínio lógico no processo de ensino e aprendizagem.

Objetivo: Investigar como o uso de jogos no processo ensino aprendizagem, enquanto instrumento pedagógico crítico e contextualizado, pode contribuir para a formação social e acadêmica do aluno.

Fotos

Apresentação do relatório final.

Discentes assistindo apresentação.

Aluno pesquisador Mateus da S. dos Santos.

Prof. Orientador e o aluno pesquisador.

Projeto 2:

O projeto foi desenvolvido no ano de 2014 como projeto de extensão com resoluções de questões de geometria com intuito de despertar o prazer no conteúdo de geometria no ensino médico para a turma de 1º ano do campus. O livro Fundamentos de Matemática Elementar volume 9, de geometria plana, foi respondido por completo, pelo alunos, e logo em seguida apresentado as resoluções de algumas questões em forma de aulas de reforço para a comunidade da cidade de Bacabal nas instalações do campus IFMA.

Nome do projeto: Geometria Plana, Uma Abordagem Cotidiana E Simplificada

Objetivo: Desenvolver no aluno a habito de estudar e ensinar. Explorar o conteúdo de geometria plana e readaptar sua linguagem para os jovens que irão fazer o seletivo do IFMA campus Bacabal. Estimular a desenvoltura do monitor com o contato com o público. Desenvolver técnicas de planejamento e organização de uma aula bem ministrada e cronometrada para que o aluno seja capaz de aplicar o mesmo conhecimento em benefício de seus estudos e/ou profissão futura.

Fotos

Coordenador e alunos pesquisadores.

Cartaz de divulgação.

Aluno Ministrando Aula para a comunidade.

Apresentação do projeto.

Projeto 3:

Primeiro campeonato amador de cubo mágico IFMA/Bacabal que foi realizado no ano de 2015. O projeto veio para sanar a necessidade de interação dos alunos com toda a comunidade simpatizante do cubo mágico que já se falavam pelas redes sociais e no próprio campus.

Nome do projeto: I Campeonato amador de cubo mágico IFMA/Bacabal

Objetivo: Promover o encontro e o laser dos alunos do campus com toda comunidade praticante do cubo mágico que ao longo dos outros projetos foram se unindo ao mesmo eixo de pesquisa.

Fotos

Coordenador e alunos pesquisadores.

Competição. Tomada de tempos.

Cobertura TV Lago Verde Maranhão.

Medalhas e certificados de participação.

Projeto 4:

O projeto consiste em ampliar as fronteiras do uso do lúdico no ano de 2016. Foi-se inserido um novo jogo para abraçar maior quantidade de alunos. A sugestão do jogo yu-gi-oh em card game foi desenvolvido por alunos do projeto de cubo mágico que também simpatizavam pelo jogo com cartas.

Nome do projeto: Uso do Card Game Yu-gi-oh para Ensinar Operações Básicas da Matemática.

Objetivo: O projeto consiste em utilizar o jogo de cartas colecionáveis Yu-Gi-Oh! Para ajudar a desenvolver o raciocínio lógico e estratégia e ajudar no aprendizado de matemática.

Fotos

Palestra de inserção do novo jogo.

Mesa de competição

Alunos em competição.

Parceria Professor Maxmiano de Freitas IFPI

Projeto 5:

O primeiro campeonato Oficial de cubo mágico em Bacabal-MA foi desenvolvido no ano de 2016 e contou com a participação os alunos do campus como também de cidades vizinhas e de todo o país. Com a presença do delegado oficial da federação de cubo mágico mundial Rafael Werneck Cinoto (Santarém-PA), do maior colecionador de cubos do Brasil, Fábio Bini Graciose (São Paulo-SP), o empresário Denis Coutinho parceiro da empresa Supera entre outros. O campeonato teve impacto mundial e colocou toda equipe no eixo de organizadores de campeonatos oficial nacionalmente. Com uma mesa redonda ao final do evento, os alunos puderam partilhar experiências e adquirir novos ensinamentos para projetos futuros. O evento teve alta divulgação nas redes sociais, canais de tv local e regional, quando passou na TV Mirante para todo Estado do Maranhão.

Nome do projeto: I CUBIFMA-Bacabal (I campeonato Oficial de Cubo Mágico IFMA Bacabal).

Objetivo: Proporcionar aos alunos da instituição, e a toda comunidade envolvida, momentos de interação e descontração. Construir um ambiente para troca de experiências da disciplina e do jogo bem como uma aprendizagem de cidadania com o estudo das regras necessárias para pratica do Cubo Mágico.

Fotos

Mesas Oficiais de Competição.

Equipe Organizadora e Parceiros

Parceiros e Visitantes.

Mesa redonda.

3.2 Etapas do Uso do Cubo Mágico

É impossível fazer todas as aulas com o lúdico, mas uma vez no mês essas aulas já irão trazer grandes benefícios ao processo interpretação e construção de resolução de questões.

O planejamento de uma aula lúdica exige mais atenção, para que a mesma não venha a perder o propósito do professor. O aluno não precisa saber que naquele momento ele está estudando matemática. Deixe-o descobrir isso sozinho! Apresente o Cubo em sala de aula, procure interagir perguntando quem conhece e quem sabe montar. Não monte de imediato! Desafiá-lo a montar faz parte do processo de construção. Deixe-o um tempo tentando. Antes de montar, desmistifique a ideia de brinquedo impossível. Monte para todos verem que é possível e que eles podem fazer. Pergunte quem quer aprender e então apresente sua aula bem planejada: apostilas de como montar o cubo pelo método básico, apresentação de slides e vídeos dos passos. Forneça esse material ao seu aluno. Uma aula de 50 minutos bem ministrada pode ser o suficiente para o aluno se interessar pela pesquisa do jogo e trazer novas descobertas e desafios no próximo encontro. Pronto! Deste momento em diante, a referência ao cubo será mais facilmente absorvida pelo aprendiz.

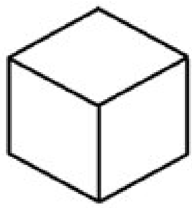
Capítulo 4

Resolução de Questões de Geometria com o Conhecimento do Cubo Mágico

O objetivo desse capítulo é apresentarmos resoluções de questões de geometria com o conhecimento do cubo mágico.

4.1 Olímpiadas e Vestibulares

Problema 13. *(UFSCar-SP - 2008) A soma das medidas de todas as arestas de um cubo é* $60\mathrm{cm}$*, então o volume desse cubo, em centímetros cúbicos, é:*



(a) $125\mathrm{cm}^3$ *(b)* $100\mathrm{cm}^3$ *(c)* $75\mathrm{cm}^3$ *(d)* $60\mathrm{cm}^3$ *(e)* $25\mathrm{cm}^3$

Solução.

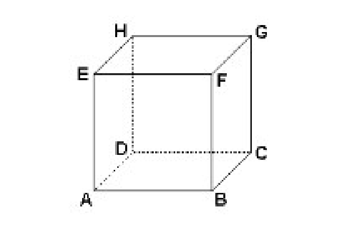
Com o cubo mágico da Figura 2 em mãos, o aluno poderá observar que o objeto tem um total de 12 arestas. Onde a soma destas tem um total de 60 cm, ou seja,

$$12 \cdot a = 60 \Rightarrow a = \frac{60}{12} \Rightarrow a = 5 \ \mathrm{cm}.$$

Com a medida de cada aresta podemos calcular o volume do cubo que é dado por:

$$V = a^3 \Rightarrow V = 5^3 \Rightarrow V = 125 \ cm^3.$$

Problema 14. *(Ufpr) Considerando o cubo representado na figura abaixo, de vértices A, B, C, D, E, F, G e H, e designando como* α *o plano que contém os pontos C, D, E e F, é correto afirmar:*



(01) O plano α *divide o cubo em duas pirâmides.*

(02) O plano α *é perpendicular à face EADH.*

(04) O plano α *é paralelo à aresta* $\overline{AB}$.

(08) A pirâmide cujos vértices são A, B, C e F tem volume igual a um oitavo do volume do cubo.

(16) O volume do cilindro circunscrito ao cubo é maior do que uma vez e meia o volume do cubo.

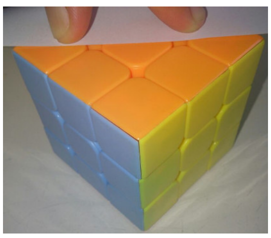
(32) A esfera inscrita no cubo tem raio igual à aresta do cubo.

Soma ( )

Solução.

Com o Cubo da Figura 2 em mãos, o aluno resolveria a questão observando que:

(01) Falso. O que o plano α gera são dois prismas de base triangulares. Fácil de ser identificado cobrindo o cubo com um papel como mostra a figura abaixo.



(02) Verdadeiro. Podemos considerar dois planos perpendiculares se, e somente se, um deles possuir uma reta perpendicular ao outro. Então, observe a reta $\overline{EF}$ que é perpendicular ao plano que contém os pontos EADH.

(04) Verdadeiro. A distância entre o ponto A até o plano α e o ponto B até o plano α são iguais.

(08) Falso. Para calcular o volume de uma pirâmide precisamos calcular a área da base vezes a altura da pirâmide e dividir por três. Observamos que a diferença que a pirâmide formada pelos pontos A, B, C e F tem a base sendo a metade da base do cubo que queremos comparar, ou seja, $V_{cubo} = a^3$ e $V_{piramide} = \dfrac{\frac{a^2}{2} \cdot a}{3} \Rightarrow V_{piramide} = \dfrac{a^3}{6}$, o volume é um sexto do volume do cubo.

(16) Verdadeiro. Um cilindro circunscrito no cubo tem raio igual a metade da diagonal da base do cubo, ou seja, $d = a\sqrt{2} \Rightarrow r = \dfrac{a \cdot \sqrt{2}}{2}$. Com isso podemos dizer que o volume do cilindro de altura igual ao cubo será:

$$V_{cilindro} = \pi \cdot (\frac{a \cdot \sqrt{2}}{2})^2 \cdot a \Rightarrow V_{cilindro} = a^3 \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Tomemos $\pi = 3,14$, temos $V_{cilindro} = a^3 \cdot \dfrac{3,14}{2} \Rightarrow V_{cilindro} = a^3 \cdot 1,57$.

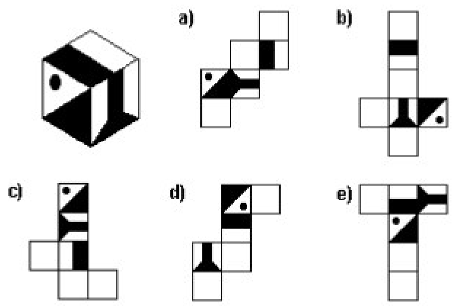
(32) Falso. Basta calcularmos a metade da diagonal do cubo que é:

$$D_{cubo} = a \cdot \sqrt{3} \Rightarrow R = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

O que nos retorna um valor diferente da aresta do cubo.

Total $02 + 04 + 16 = 22$.

Problema 15. *(Uel) Em qual das alternativas está a planificação do cubo representado à esquerda?*



Solução.

Face 1 Face 2

Observando apenas estas duas faces temos que a base da Face 2 fica em uma posição oposta ao ponto que temos na Face 1. O que elimina todas as alternativas menos a letra d.

Problema 16. *(Uerj-2015) A figura abaixo representa o brinquedo Pyraminx:*

Ele tem a forma de um tetraedro regular, com cada face dividida em 9 triângulos equiláteros congruentes. Se, a partir de cada vértice, for retirada uma pirâmide regular cuja aresta é 1/3 *da aresta do brinquedo, restará um novo sólido. A razão entre as superfícies totais desse sólido e do Pyraminx equivale a:*

(a) 4/9 *(b)* 5/9 *(c)* 1/9 *(d)* 7/9 *(e)* 8/9

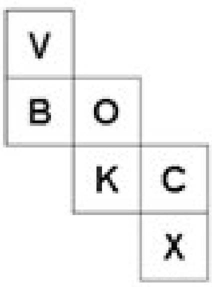
Solução.

A questão é simples e sem muito cálculo. Definindo que cada face tem nove triângulos, podemos calcular um total de 36 triângulos ao todo. Olhemos para as pirâmides retiradas com um total de três triângulos em cada face em quatro vértices totalizando 12 triângulos pequenos retirados. Observe que ao retirar as pequenas pirâmides o local onde elas se encontram forma um novo triângulo. Isso nos dá um acréscimo de quatro triângulos. Assim, temos que a nova figura tem $36 - 12 + 4 = 28$ triângulos, ou seja:

$$\mathsf{R} = \frac{28}{36} \Rightarrow \mathsf{R} = \frac{7}{9}.$$

Resposta: letra d.

Problema 17. *(FAP-Apucarana - 2011) Dobrando-se a planificação abaixo, reconstruímos o cubo que a originou.*



A letra que fica na parte oposta a que tem um X é:

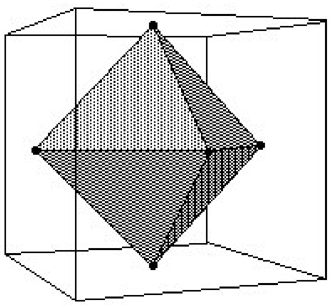
(a) B *(b) C* *(c) K* *(d) O* *(e) V*

Solução.

Nessa questão observamos uma grande noção de orientação espacial. Ao movimentar mentalmente o papel para fechar o cubo, criamos uma figura geométrica que só será possível com uma orientação espacial bem trabalhada. Observe que fixando o plano da letra **O** no papel e pondo o plano da letra **B** e o plano da letra **K** perpendicular a ela teremos o plano da letra **X** projetado na parte mais alta do objeto formado. Assim, funcionando como "topo" da figura que será formada. Ou seja, o topo será oposto a base **O**.

Resposta: letra d.

Problema 18. *(Ufrgs 2001) Um octaedro tem seus vértices localizados nos centros das faces de um cubo de aresta 2.*

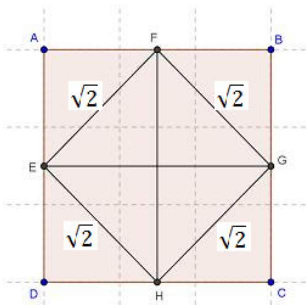


O volume do octaedro é:

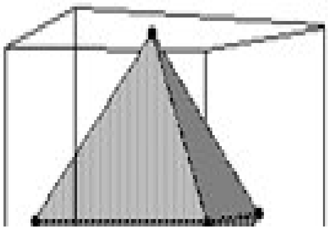
(a) 2/3 *(b)* 4/3 *(c)* 2 *(d)* 8/3 *(e)* 10/3

Solução.

Rotacionando a figura e observando pela face do topo teremos a seguinte visão:



Onde o quadrado inscrito representa a base da pirâmide que podemos obter separando o octaedro ao meio.



$$A_{base} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow A_{base} = 2.$$

Assim, calculamos o volume da figura multiplicando o volume da pirâmide acima por dois.

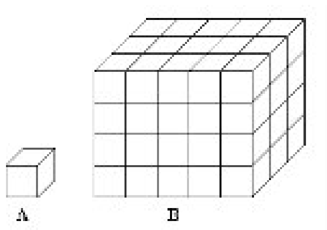
$$V_{octaedro} = 2 \cdot (A_{base} \cdot \frac{h}{3}),$$

onde h é a altura que vale metade da aresta do cubo e a $A_{base} = 2$, logo:

$$V_{octaedro} = 2 \cdot (2 \cdot \frac{1}{3}) \Rightarrow V_{octaedro} = \frac{4}{3}.$$

Resposta: letra b.

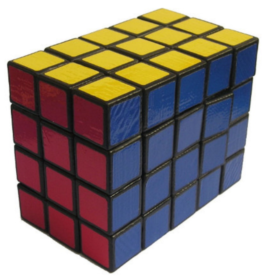
Problema 19. *(Unesp) Quantos cubos A precisa-se empilhar para formar o paralelepípedo B?*



(a) 60 *(b)* 47 *(c)* 94 *(d)* 39 *(e)* 48

Solução.

Este é um cubo conhecido com 3x4x5 como na figura abaixo:



Podemos imaginar que a face da base tem 5 cubos A em uma direção e 3 cubos A na outra direção, ou seja, teremos um total de 15 cubos por camada. Como temos 4 camadas para construir o cubo teremos um total de 60 cubos do tipo A.

Resposta: letra a.

4.2 Elaborando Questões

Neste momento podemos retornar a observação usada no item 2.2 na primeira explicação de como elaborar questões contextualizadas *"O professor deve conhecer o objeto que servirá como base para a resolução da questão, assim ele pode descrever com detalhes e o aluno terá um desenho mental do que se procura."*. Agora aproveitaremos as aulas lúdicas, pois este é o momento de apresentar para o aluno como ele pode aplicar todo o conhecimento adquirido com o cubo mágico em mãos.

A seguir, daremos algumas sugestões:

1. Conheça o cubo mágico. Aprofunde seu conhecimento no jogo;

2. Tenha ciência que nem todas as aulas serão com o lúdico em mãos, então aproveite ao máximo a empolgação do aluno com o cubo nas aulas lúdicas. Estas tem que ser sempre direcionadas pelo professor, caso contrário o jogo tornará apenas distração;

3. Trabalhe a aula lúdica com desafios como "quem monta uma face" ou "quem monta uma face correta" e em seguida "quem monta o cubo" e por fim "quem monta mais rápido o cubo";

4. Imponha desafios aos passos de como montar o cubo mágico pelo método por camadas. Para cada um dos 7 passos estabeleça grupos de ajuda. Selecione monitores para cada grupo.

   Os sete passos de como montar o cubo mágico, são:

   - Montar uma cruz na face que será sua base;
   - Por as peças de quinas corretamente para que complete a primeira face. Virando essa face para baixo teremos a base do cubo;
   - Por as 4 peças de meio assim completando a segunda camada;
   - Montar uma cruz na face oposta da base, chamada de topo do cubo;
   - Montar a face do topo independente da ordem das cores laterais das peças do topo;
   - Organizar as quinas nos seus devidos lugares;
   - Organizar as peças de meio do topo.

5. Procure dar atenção a todos e cobrar a disciplina na sequência dos passos acima citados. Assim, mantendo sempre o domínio da turma;

6. Sempre que possível passe a usar descrições do cubo até que algum aluno perceba que o que se fala pode ser encaixado claramente no cubo mágico. Elogio-o e continue a sua definição com o cubo em mãos justificando a interpretação que o aluno teve ao descobrir que se falava do cubo mágico;

7. Elabore listas de exercício e ponha sempre uma ou duas questões na avaliação mensal contextualizada com essa mesma linha de raciocínio.

Etapas de como elaborar:

1. Nas primeiras questões, procure descrever o objeto com o máximo de detalhes, pois se o aluno não estiver com o objeto em mãos ele conseguirá projetar a imagem descrita e resolverá o problema. Para a melhor execução dessa etapa é aconselhável ter o *puzzle* em mãos.

2. Coloque a figura do objeto descrito, assim o aluno passará a assimilar as definições com as figuras.

3. Se o objetivo da questão é descobrir um elemento que precisaria de vários passos para chegar até ele, peça anteriormente os elementos necessários que serão utilizados para obter o resultado desejado. Nesse momento é importante ir direcionando o aluno para o calculo final. Por exemplo, pedimos para definir a diagonal do cubo, mas antes pedimos a diagonal de uma das faces.

Exemplo 1. *Um cubo mágico é um prisma reto de base quadrada com todas as arestas medindo 56 mm:*

Figura A

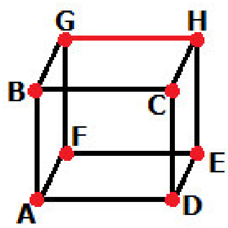


Figura B

Nas figuras A e B podemos notar que todas as faces são quadradas. Chamamos de diagonal da face a distância dos pontos $\overline{AC}$, *por exemplo, sabendo disso, calcule o valor da diagonal* *da face branca? Chamamos de diagonal do cubo a distância calculada entre os pontos* $\overline{\mathrm{AH}}$, *calcule a diagonal do cubo mágico.*

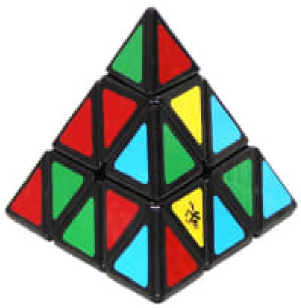
Para construirmos questões com um grau maior de dificuldade é necessário enriquecer a 1ª etapa acima e excluir uma, ou as duas, etapas seguintes.

Exemplo 2. *Calcule a diagonal do prisma reto de base quadrada com aresta da face igual a 56 mm.*

Observemos que em posse da resolução também poderíamos escrever a questão acima com um grau a mais de dificuldade. Não fornecendo o valor das arestas, mas sim o valor da diagonal de uma das faces, $56 \cdot \sqrt{2}$ mm.

Abaixo teremos a mesma questão sendo pedida de 4 maneiras diferentes.

Exemplo 3. *O pyraminx é um puzzle em forma de pirâmide. Ele possui quatro faces formadas por triângulos equiláteros. O Puzzle abaixo possui aresta lateral medindo 90 mm. Cada face é formada por 9 pequenos triângulos equiláteros de mesma medida.*



a) Calcule a distância de um dos vértices até o centro de uma das faces.

b) Calcule a altura do pyraminx.

Exemplo 4. *O pyraminx é um puzzle em forma de pirâmide. Ele possui quatro faces formadas por triângulos equiláteros de aresta lateral medindo 90 mm. Calcule a altura do pyraminx.*

Exemplo 5. *O pyraminx é um puzzle com formato de um tetraedro regular com quatro faces de triângulos equiláteros de aresta lateral medindo 90 mm. Cada face é formada por 9 pequenos triângulos equiláteros de mesma medida. Calcule a altura do pyraminx.*

Exemplo 6. *Calcule a altura de um tetraedro regular de apótema da base igual a* $\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}$.

Capítulo 5

Considerações Finais

Esse trabalho foi dedicado ao estudo do uso do cubo mágico como lúdico facilitador das aulas de geometria plana e espacial. Para tanto foi apresentado pensamentos teóricos voltados para o ensino do lúdico e, logo em seguida, ligado nos benefícios do uso do cubo mágico. Foi-se discutido o crescimento na abordagem de questões de geometria plana e espacial nos seletivos pelo Brasil, entre eles OBMEP e ENEM, as mesmas sendo facilmente resolvidas por conhecimento do manuseio do cubo mágico nas aulas práticas. O método de utilização por parte do professor consiste basicamente em 7 passos:

(i): Apresentar o Cubo Mágico como brinquedo desafiador;

(ii): Inserir o desafio do jogo cubo mágico para o aluno buscar solução. Despertando a curiosidade em desvendar o jogo;

(iii): Apresentar um método básico de solução para que ele possa construir adaptações próprias;

(iv): Inserir no conteúdo, através de aulas bem trabalhadas, a utilização do cubo mágico como material lúdico ativando o potencial cinestésico do aluno;

(v): Apresentar questões de geometria nos seletivos ENEM e OBMEP, livros e outros vestibulares do Brasil, que com o conhecimento espacial adquirido pela utilização do cubo nas aulas e no dia a dia, trazem segurança nas suas soluções;

(vi): Elaborar lista de exercícios que estimulem a solução pelo conhecimento desenvolvido no item 2º;

(vii): Avaliar o aluno com provas ou dinâmicas que valorizem a aprendizagem lúdica com o cubo mágico.

Para tanto, foi apresentado resoluções com a linha de raciocínio a ser ensinado ao aluno, para que não fosse retirado dele a linha do processo de criação da resolução de uma questão. No primeiro momento o método consiste em fazer o aluno interagir com o Cubo Mágico como um brinquedo e se sinta motivado a resolver o desafio, logo na sequência apresentar os benefícios da brincadeira e somente nos últimos passos mostrar resoluções de questões utilizando a habilidade adquirida com o mesmo.

Por fim, foram apresentados alguns problemas de matemática elaborados e resolvidos de maneira contextualizada com o cubo mágico tradicional 3x3x3 e de suas variações.

Referências Bibliográficas

[1] BORIN, J. *Jogos e resolução de problemas:* uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: IME-USP, 1996.

[2] CONTE, KATILENE GRILO. *Um Olhar Sobre o Ensino e Aprendizagem da Geometria.* Porto Alegre-RS, UFRS. 2012.

[3] FIALHO, N. *Os Jogos Pedagógicos como Ferramentas de Ensino.* In: VIII Anais do Congresso Nacional de Educação (EDUCERE) e III Congresso Ibero-Americano de Violência nas Escolas (CIAVE). Curitiba-Paraná, 2008.

[4] GRANDO, R. C. *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.* Campinas: FE/UNICAMP. Tese de Doutorado, 2000.

[5] GRANDO, R. C. *O Jogo e suas Possibilidades Metodológicas no Processo Ensino-Aprendizagem da Matemática.* Dissertação de mestrado, Faculdade de Educação da UNICAMP, Campinas, 1995.

[6] HUIZINGA, J. *Homo ludens:*o jogo como elemento da cultura. Tradução de João Paulo Monteiro. 2ª ed. São Paulo: Perspectiva, 1990.

[7] JOSÉ, ELISABETE ASSUNÇÃO; COELHO, MARIA TERESA. *Problemas de Aprendizagem.*, São Paulo: Ática, 1997.

[8] LIBÂNEO, J. C. *Didática.* Coleção magistério. 2º grau. Série formação do professor. São Paulo, Cortez, 1994.

[9] KISHIMOTO, T. M. *Jogo, Brinquedo, Brincadeira e a Educação.* São Paulo: Cortez, 2007.

[10] MOURA, M. *A Construção do Signo Numérico em Situação de Ensino.* Tese de doutorado. São Paulo: USP, 1992.

[11] PAVANELLO, Regina Maria. *O Abandono do Ensino da Geometria:* Uma Visão Histórica. Disponível em: <http://zip.net/bnn6Jf>. Último acesso em 14 jan. de 2016.

[12] PIAGET, J. *Play, Dreams and Imitation in Childhood.* New York: W. W. Norton, 1962.

[13] RÊGO, R. G.; RÊGO, R. M. *Matemática ativa.* João Pessoa: Universitária/UFPB, INEP, Comped: 2000.