



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DOUTORADO EM MATEMÁTICA

**Convergência Forte do Método das Projeções
Alternadas**

JOSÉ MÁRCIO MACHADO DE BRITO

Teresina - 2022

JOSÉ MÁRCIO MACHADO DE BRITO

Tese de Doutorado:

Convergência Forte do Método das Projeções Alternadas

Tese submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. João Xavier da Cruz Neto

Co-Orientador:

Prof. Dr. Ítalo Dowell Lira Melo

Teresina - 2022

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas da UFPI – SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

B849c Brito, José Márcio Machado de.
Convergência forte do método das projeções alternadas /
José Márcio Machado de Brito. – 2022.
69 f. : il.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Piauí,
Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em
Matemática, Teresina, 2022.

“Orientador: Prof. Dr. João Xavier da Cruz Neto”.

Coorientador: Prof. Dr. Ítalo Dowell Lira Melo.

1.Espaços de Hadamard. 2. Projeções Alternadas. 3.
Espaços Uniformemente Convexos. I. Cruz Neto, João
Xavier da. II.Título.

CDD 515.733

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes. CRB/3-1461



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Convergência forte do método das projeções alternadas

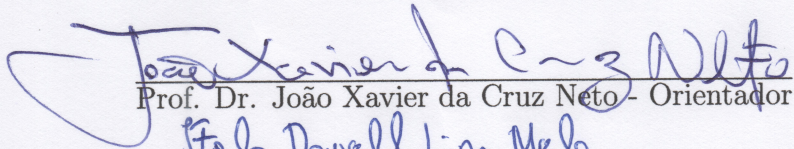
José Márcio Machado de Brito

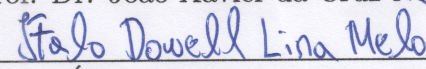
Esta Tese foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Doutor em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

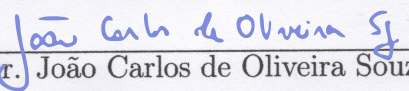
A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

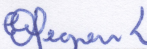
Tese aprovada em 21 de setembro de 2022.

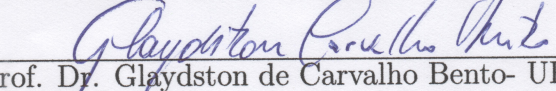
Banca Examinadora:


Prof. Dr. João Xavier da Cruz Neto - Orientador


Prof. Dr. Ítalo Dowell Lira Melo - Co-orientação UFPI


Prof. Dr. João Carlos de Oliveira Souza - UFPI


Profa. Dra. Elizabeth Wegner Karas - UFPR


Prof. Dr. Glaydston de Carvalho Bento - UFG

Dedico este trabalho a minha mãe Maria Auzair, a minha esposa Raynara Brito e aos meus irmãos Tiago Brito, Ana Márcia e João Marcos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela dádiva da vida e por colocar em meu caminho pessoas tão especiais.

Agradeço a todos os meus familiares, em especial a minha mãe Maria Auzair, que em meio a tantas dificuldades sempre me apoiou e fez de tudo pela minha formação, aos meus irmãos Tiago Brito, João Marcos, Ana Márcia, à minha cunhada Raylla e à minha sogra Rita, pela amizade, companherismo e solidariedade.

Agradeço a minha esposa Raynara Brito, por ter acompanhado de perto toda minha jornada acadêmica, sempre me apoiando e dando forças para continuar, principalmente nas horas mais difíceis e por me proporcionar tantos momentos de alegria.

Agradeço a todos os meus amigos pelo incentivo, força e companheirismo, em especial, José Edilson, Erisvaldo Vieira, João Vinícius, Dário Severo, Renato Santos, Dieme Pereira, Thiago Mayson, Pedro Paulo, Pedro Rodrigues, Chistorpher, Silas Augusto, Yl-denilson, Ruan Diego, João Santos, Alexandre Bezerra, Bruno Vasconcelos, Edimilson Lopes, Jefferson de Brito, Atécio Alves e a todos os amigos que fiz na UESPI e UFPI nos últimos anos.

Meus sinceros agradecimentos ao meu orientador e amigo João Xavier, que acompanha minha trajetória desde o ensino fundamental, quando eu participava das olimpíadas de matemática e me orientou durante toda a graduação, mestrado e doutorado. Sempre que precisei estava pronto para ajudar, não se limitando apenas a assuntos relacionados ao doutorado, mas também à vida.

Agradeço ao meu co-orientador Ítalo Dowell, por ter participado ativamente durante todo o doutorado, e principalmente no período correspondente à elaboração deste trabalho.

Agradeço aos professores e amigos Antônio Amaral (Amaral) e Raimundo Brito (Raimundim) por terem me apresentado as olimpíadas de matemática, por todos os anos de

preparações olímpicas, que certamente foi uma grande contribuição para seguir a carreira acadêmica em matemática.

Agradeço aos Professores do departamento de matemática da UFPI, em especial, aos professores Jurandir Oliveira, Vitaliano Amaral, Sandoel Vieira, João Carlos, Rondinelle Marcolino, Halyson Baltazar, Paulo Alexandre, Barnabé Pessoa Lima, Marcos Travaglia e José Francisco pelo apoio, amizade, ensinamentos e por terem me acolhido nesta instituição. Também agradeço aos professores da UESPI, principalmente à José Arimatéa e Pedro Soares, pela amizade e apoio durante toda a graduação em matemática.

Agradeço aos membros da banca, Elizabeth Karas, Glaydston de Carvalho e João Carlos, por seus comentários e sugestões que ajudaram a melhorar a redação do texto final.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

“Educar verdadeiramente não é ensinar fatos novos ou enumerar fórmulas prontas, mas sim preparar a mente para pensar”.

Albert Einstein.

Resumo

Neste trabalho, estudamos condições necessárias e suficientes para a convergência forte do método de projeções alternadas em espaços de Hadamard. Este resultado é novo mesmo no contexto de espaços de Hilbert. Em particular, encontramos condições em que a sequência gerada pela iteração de um ponto por projeções converge fortemente e respondemos parcialmente à questão principal que motivou o artigo de Bruck (veja *J Math Anal Appl* 88:319-322, 1982). Aplicamos essa condição para generalizar o teorema de Prager para variedades de Hadamard e generalizar o teorema de Sakai para uma grande classe de sequências que possui medida total com respeito à medida de Bernoulli. Em particular, respondemos a um problema que estava em aberto há muito tempo, relacionado à convergência forte do método de projeções sucessivas em espaços de Hilbert (veja *J. Convex Anal.* **16**, 633–640, 2009). Além disso, estudamos o método de projeções alternadas para uma sequência decrescente de conjuntos convexos e fechados encaixados em variedades de Hadamard e obtemos uma prova alternativa para a convergência do método do ponto proximal. Em espaços p -uniformemente convexos estudamos uma versão generalizada do clássico método das projeções alternadas para operadores firmemente não-expansivos e encontramos condições suficientes para a convergência forte desse método.

Palavras-Chave: Espaços de Hadamard. Problema de Viabilidade Convexa. Projeções Alternadas. Operadores Firmemente Não-Expansivos. Espaços Uniformemente Convexos.

Abstract

In this work, we provide a necessary and sufficient condition under which the method of alternating projections on Hadamard spaces converges strongly. This result is new even in the context of Hilbert spaces. In particular, we find the circumstance under which the sequence generated by iteration of a point by projections converges strongly and we answer partially the main question that motivated Bruck's paper (see *J. Math Anal Appl* 88:319-322, 1982). We apply this condition to generalize Prager's theorem for Hadamard manifolds, and generalize Sakai's theorem for a larger class of the sequences with full measure with respect to the Bernoulli measure. In particular, we answer to a long-standing open problem concerning to the convergence of the successive projection method (see *J. Convex Anal.* **16**, 633–640, 2009). Furthermore, we study the method of alternating projections for a nested decreasing sequence of convex and closed sets on Hadamard manifolds and we obtain an alternative proof of the convergence of the proximal point method. In p -uniformly convex spaces we study a generalized version of the classical method of alternating projections for firmly nonexpansive mappings and find sufficient conditions for the strong convergence of this method.

Keywords: Hadamard Space. Convex feasibility Problem. Alternating Projections. Firmly Nonexpansive Mappings. Uniformly Convex Space.

Sumário

Resumo	v
Abstract	vi
1 Noções Preliminares	6
1.1 Teoria da medida	6
1.2 Teoria ergódica	10
1.3 Variedades Riemannianas	11
1.4 Variedades de Hadamard	14
1.5 Espaços $CAT(0)$	16
1.6 Espaços $CAT(\kappa)$	20
1.7 Projeções sobre conjuntos convexos em espaços de Hadamard	21
1.8 Projeção sobre subespaços em espaços de Hilbert	23
1.9 Funções convexas em variedades de Hadamard	24
1.10 Espaços uniformemente convexos	26
1.11 Sequências Fejér e quase-Fejér convergente	27
2 Convergência do Método das Projeções Alternadas	29
2.1 Método das projeções alternadas	29
2.2 Generalização do Teorema de Sakai	33
2.3 Método do ponto proximal	44
3 Convergência Forte do Método Alternado Generalizado	48
3.1 Operadores firmemente não-expansivos	48
3.2 Método alternado generalizado	50
3.3 Análise de convergência	51

Sumário	viii
3.4 Regularidade de conjuntos	55
3.5 Taxa de convergência	60
Considerações Finais	63

Introdução

O método das projeções alternadas foi introduzido por von Neumann [64] em 1933 para resolver o problema de viabilidade convexa, ou seja, encontrar um ponto na interseção de conjuntos convexos. O problema de viabilidade convexa é muito importante em diversas áreas científicas, como matemática e ciências físicas, veja por exemplo [12, 28, 30, 68].

Seja $N \geq 2$ um inteiro e suponha que C_1, \dots, C_N são conjuntos convexos e fechados de um espaço de Hadamard \mathcal{H} cuja interseção é não vazia. Denotaremos por P_j a projeção sobre C_j . Agora considere uma sequência (j_n) tomando valores em $I_N = \{1, 2, \dots, N\}$, escolha um ponto $x_0 \in \mathcal{H}$ e defina a sequência (x_n) por

$$x_n = P_{j_n}(x_{n-1}), \quad (1)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Esse processo é conhecido como o método das projeções alternadas. Uma questão importante é encontrar condições suficientes sob as quais a sequência (x_n) converge. Os principais exemplos de espaços de Hadamard são os espaços de Hilbert, variedades de Hadamard e \mathbb{R} -trees. No cenário em que \mathcal{H} é um espaço de Hilbert e cada conjunto convexo e fechado C_i é um subespaço linear, von Neumann em [64] provou que se $N = 2$, então a sequência (x_n) converge para a projeção de x sobre $C_1 \cap C_2$. Este resultado foi generalizado por Halperin em [38], para $N \geq 2$ subespaços considerando uma sequência periódica (j_n) . Prager em [52], provou que se X é um espaço de Hilbert de dimensão finita então a sequência (x_n) definida por (1) converge para qualquer sequência (j_n) , não necessariamente periódica. Este resultado foi estendido por Amemiya e Ando em [2] para espaços de Hilbert com dimensão infinita, mas a sequência (x_n) converge apenas fracamente. Sakai, em [55], generalizou os resultados de Halperin para o caso em que as sequências (j_n) são quase-periódicas. Em particular, obteve a convergência forte do resultado de Amemiya e Ando em [2] quando a sequência é quase-periódica. A convergência em norma não ocorre para quaisquer $N \geq 3$ subespaços lineares fechados e qualquer sequência (j_n) . Kopecká e Paszkiewicz provaram em [42] que para qualquer espaço de

Hilbert de dimensão infinita existem três subespaços fechados de modo que para qualquer $x_0 \in \mathcal{H}$ diferente de zero, existe uma sequência (j_n) para o qual (x_n) não converge fortemente. Em particular, as iterações randômicas nem sempre convergem fortemente. Uma pergunta natural surge, “quais são as sequências (j_n) tais que a sequência (x_n) converge fortemente independente do ponto de partida e dos subespaços fechados?”. Por outro lado, até onde sabemos, o resultado mais geral relacionado a esta questão encontra-se em [55], onde a convergência forte é estabelecida para sequências quase-periódicas. O espaço de sequências cujos termos pertencem ao conjunto $\{1, 2, \dots, N\}$ tem uma medida natural conhecida como medida de Bernoulli. Do ponto de vista da medida, surge uma questão natural “Qual é o tamanho do conjunto de sequências (j_n) que responde à questão acima?”. Nesse sentido, usaremos técnicas de teoria ergódica para provar que independentemente do ponto de partida e dos subespaços fechados, o conjunto das sequências (j_n) tal que a sequência (x_n) converge fortemente tem medida de Bernoulli total, isto é, a sequência (x_n) converge para quase toda sequência (j_n) . Além disso, provaremos que o conjunto das sequências quase-periódicas tem medida de Bernoulli nula.

No cenário em que \mathcal{H} é um espaço de Hilbert e cada conjunto convexo e fechado C não é necessariamente um subespaço, Bregman em [19] estudou o mesmo problema de von Neumann, mas considerou um caso mais geral com dois subconjuntos fechados e convexos. Ele provou que a sequência (x_n) converge fracamente para a projeção de x sobre $C_1 \cap C_2$. Este resultado não pode ser estendido para convergência em norma sem condições extras. Para mais detalhes veja [15, 39, 41, 46].

Bruck e Reich em 1977, veja [23], provaram a convergência forte da sequência (x_n) quando existe algum j tal que C_j é compacto e P_j é usado infinitas vezes nas iterações.

Um avanço interessante no método das projeções alternadas é estudá-lo em espaços de Hadamard, em particular em variedades de Hadamard. Esses espaços possuem uma estrutura adequada para desenvolver métodos de otimização, inclusive, alguns dos métodos clássicos de otimização já foram estendidos para estes espaços, enquanto que outros ainda são temas de recentes pesquisas, veja por exemplo [4, 6, 11, 59]. Nessa direção, Băcák, Searston e Sims em [8] generalizaram o resultado de Bregman para esses espaços. Eles consideraram uma noção de convergência fraca em espaços de Hadamard que foi introduzida por Jost em [40]. Esta noção de convergência fraca coincide com a convergência fraca usual em espaços de Hilbert. É importante enfatizar que esta é uma grande contribuição

visto que a estrutura linear se tornou dispensável. Eles também provaram que se C_1 e C_2 são limitadamente regular, então a sequência (x_n) converge fortemente. Em variedades de Hadamard, Cruz Neto et al. em [31], mostraram a convergência do método das projeções alternadas para qualquer sequência (j_n) , desde que os conjuntos convexos C_1, C_2, \dots, C_N satisfaçam a condição de Slater, isto é, $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_N$ tem interior não vazio. Em espaços de Hilbert esta condição é equivalente a de limitadamente regular, como mostrado em [17], mas no contexto de variedades de Hadamard ainda é uma questão em aberto. Em [47], mostramos que a condição de Slater não é necessária, isto é, dados conjuntos convexos C_1, C_2, \dots, C_N com interseção não vazia em uma variedade de Hadamard e uma sequência (j_n) qualquer, o método das projeções alternadas converge para um ponto da interseção.

Neste trabalho, apresentamos os principais resultados obtidos em [47], onde estudamos uma condição necessária e suficiente para a convergência forte da sequência (x_n) em espaços de Hadamard. Este resultado é novo mesmo em espaços lineares, pois nenhuma hipótese de periodicidade ou quasi-periodicidade é assumida na sequência (j_n) . Essa condição nos permite responder parcialmente à questão principal que motivou o artigo de Bruck em [22], e também generalizar o teorema de Prager para variedades de Hadamard, ou seja, iterações randômicas sempre convergem em variedades de Hadamard. Além disso, generalizamos o teorema de Sakai para uma grande classe de sequências (j_n) que contém as sequências quase-periódicas, estudamos o método de projeções alternadas para uma sequência decrescente de conjuntos convexos encaixados em variedades de Hadamard e obtemos uma prova alternativa para a convergência do método do ponto proximal. Mais informações sobre o método do ponto proximal em espaços de Hadamard podem ser encontradas em [9, 35].

Outra abordagem comum para resolver problemas de viabilidade convexa é através do método de subgradiente cíclico, inicialmente estudado em [27] por Censor e Lent em espaços Euclidianos e generalizado para variedades Riemannianas de curvatura seccional não negativa por Bento e Melo em [16]. Esta abordagem também foi estudada em [67] no contexto de variedades com curvatura seccional limitada inferiormente. Em particular, resolvendo o problema de viabilidade convexa para alguns modelos de variedades de Hadamard, Wang et al. em [66] provaram que este método converge linearmente para $C_1 \cap \dots \cap C_N$. Além disso, eles observam a influência da curvatura na taxa de con-

vergência. Por outro lado, o método de projeções alternadas não requer limitação inferior da curvatura seccional.

Também estudamos um método mais geral do que o método das projeções alternadas, que tem como objetivo resolver o problema de encontrar um ponto que pertença à interseção dos conjuntos formado pelos pontos fixos de uma quantidade finita de operadores definidos em um espaço geodésico. Essa situação ocorre em muitos problemas matemáticos, em particular, em um problema de viabilidade convexa [12]. Mais especificamente, considere as aplicações $T_1, T_2, \dots, T_N : X \rightarrow X$ definidas em um espaço métrico completo (X, d) e uma sequência (j_n) tomando valores em $I_n = \{1, 2, \dots, N\}$, escolha um ponto $x_0 \in X$ e defina a sequência (x_n) por

$$d(T_{j_n}(x_{n-1}), x_n) \leq \epsilon_n \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \quad (2)$$

onde $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \infty$.

Dado um subconjunto não vazio C de um espaço métrico (X, d) , dizemos que uma aplicação $T : X \rightarrow X$ satisfaz a propriedade (P) quando $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$ e existem $\lambda > 1$ e $\beta > 0$ tais que

$$d(Tx, u)^\lambda \leq d(x, u)^\lambda - \beta d(Tx, x)^\lambda,$$

para todo $x \in C$ e $u \in \text{Fix}(T)$.

Estamos interessados em considerar a sequência gerada por (2) no caso em que os operadores T_1, \dots, T_N satisfazem a propriedade (P), e em particular quando são aplicações firmemente não-expansivas definidos em espaços p -uniformemente convexos, veja [4]. Os operadores firmemente não-expansivos foram introduzidos primeiramente por Bruck em [21], para estudar retrações em espaços de Banach, que definiu uma aplicação firmemente não-expansiva $T : C \subset E \rightarrow E$, onde C é um subconjunto convexo e fechado de um espaço de Banach E , como sendo uma aplicação que satisfaz a seguinte desigualdade

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \|(1 - \lambda)(Tx - Ty) + \lambda(x - y)\|,$$

para todo $x, y \in C$ e $\lambda \in [0, 1[$. Esse conceito também foi explorado em [23, 53], ainda em espaços de Banach. Em cenários não lineares, os operadores firmemente não-expansivos foram estudados em espaços geodésicos, por exemplo, em [3, 4, 49, 54]. Nesses espaços, denotamos por $z = (1 - \lambda)x \oplus \lambda y$ um ponto que pertence ao segmento geodésico $[x, y]$. Dado um subconjunto convexo C de um espaço geodésico X , uma aplicação $T : C \subset X \rightarrow X$

é dita firmemente não-expansiva quando satisfaz

$$d(Tx, Ty) \leq d((1 - \lambda)x \oplus \lambda Tx, (1 - \lambda)y \oplus \lambda Ty),$$

para todo $x, y \in C$ e $\lambda \in [0, 1[$.

Um exemplo importante de operador firmemente não-expansivo é a projeção sobre conjuntos convexos e fechados em espaços $CAT(0)$ (veja [4]), assim o método (2) generaliza o método das projeções alternadas definido em (1). O resolvente de uma função convexa própria, semicontínua inferiormente definida em espaços $CAT(0)$ também é um operador firmemente não-expansivo, para mais detalhes veja [5]. Bauschke, Combettes Reich [14] estudaram o método (2) no caso particular em que T_i ($i = 1, 2$) é o resolvente de uma função convexa definida em espaços de Hilbert, onde os autores mostram que a sequência gerada pelo método converge fracamente para um ponto de mínimo (caso exista) de um problema associado à duas funções convexas.

O método (2) foi estudado por Ariza, López e Nicolae em [4], onde mostraram que a sequência (x_n) gerada por este método converge fracamente para um ponto fixo dos operadores T_i ($i = 1, 2, \dots, N$), desde que cada T_i seja firmemente não-expansivo e definido em um espaço p - uniformemente convexo. Os autores também mostraram que (x_n) é assintoticamente regular.

No caso de uma única aplicação firmemente não-expansiva T definida em espaços de Banach p -uniformemente convexo, o método (2) converge fracamente, como mostrado em [25, Teorema 15.1], mas em geral não ocorre a convergência forte, veja [36]. A convergência forte também não ocorre mesmo no caso em que $N = 2$ e as aplicações T_1, T_2 são projeções sobre subconjuntos convexos e fechados de um espaço de Hilbert, veja [15, 39, 41, 46].

Como foi exposto acima, a convergência fraca do método (2) já foi bem estudada, enquanto que a convergência forte ainda pode ser explorada. Assim, pretendemos estudar condições necessárias e suficientes para a convergência forte do método (2) no caso em que consideramos operadores satisfazendo a propriedade (P) em espaços p - uniformemente convexo, em particular, obtendo novos resultados de convergência em $CAT(k)$, e generalizando alguns resultados em $CAT(0)$.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo apresentamos as notações e alguns resultados preliminares que serão usados ao longo da tese.

1.1 Teoria da medida

Nesta seção apresentamos alguns conceitos básicos de teoria da medida, que podem ser encontrados em [26, 37, 63].

Definição 1.1. *Seja X um conjunto não vazio. Uma álgebra de conjuntos sobre X é uma coleção \mathcal{A} de subconjuntos de X satisfazendo*

1. $X \in \mathcal{A}$;
2. Se $E \in \mathcal{A}$, então $E^c \in \mathcal{A}$, onde E^c denota o complementar de E em relação a X ;
3. Se $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$, então $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$.

Definição 1.2. *Uma álgebra diz-se uma σ -álgebra de subconjuntos de X se também for fechada para união enumerável, isto é, se $E_j \in \mathcal{A}$ para $j = 1, 2, \dots$, então*

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{A}.$$

Definição 1.3. *Um espaço mensurável é uma dupla (X, \mathcal{B}) onde X é um conjunto e \mathcal{B} é uma σ -álgebra de subconjuntos de X . Os elementos de \mathcal{B} são chamados conjuntos mensuráveis.*

Exemplo 1.4. *Seja X um conjunto qualquer.*

1. Denotemos por 2^X a família de todos os subconjuntos de X . Então $\mathcal{B} = 2^X$ é claramente uma σ -álgebra.

2. $\mathcal{B} = \{\emptyset, X\}$ é também uma σ -álgebra.

Note que se \mathcal{B} é uma σ -álgebra de X , então $\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{B} \subset 2^X$, ou seja, $\{\emptyset, X\}$ é a menor σ -álgebra e 2^X é a maior σ -álgebra de X .

Proposição 1.5. *Considere uma família não-vazia $\{\mathcal{B}_i : i \in I\}$ qualquer de σ -álgebras. Então a intersecção*

$$\mathcal{B} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{B}_i$$

também é uma σ -álgebra.

Observação 1.6. *Segue da Proposição 1.5 que a menor σ -álgebra que contém ξ é dada pela intersecção de todas as σ -álgebras que contém ξ .*

Definição 1.7. *A σ -álgebra gerada por uma família ξ de subconjuntos de X é a menor σ -álgebra que contém a família ξ .*

Exemplo 1.8. *A σ -álgebra de Borel de um espaço topológico (X, τ) é a σ -álgebra gerada por τ , isto é, gerada pelos conjuntos abertos de X . Neste caso, os conjuntos mensuráveis recebem o nome de borelianos.*

Definição 1.9. *Seja X um conjunto com uma σ -álgebra \mathcal{A} . Uma medida em \mathcal{A} , é uma função $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ com as propriedades abaixo:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. Se $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma coleção enumerável de conjuntos mensuráveis, disjuntos dois a dois, então

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

A tripla (X, \mathcal{B}, μ) é chamada espaço de medida. Quando $\mu(X) < \infty$ dizemos que μ é uma medida finita e se $\mu(X) = 1$ dizemos que μ é um medida de probabilidade.

Exemplo 1.10. *Seja X um conjunto e consideremos a σ -álgebra $\mathcal{B} = 2^X$. Dado qualquer $p \in X$, considere a função $\delta_p : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ definida por*

$$\delta_p(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \in A; \\ 0, & \text{se } p \notin A. \end{cases}$$

A medida δ_p é chamada de medida de Dirac no ponto p .

Sejam $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$, $j = 1, \dots, n$ espaços de medida finita, isto é, tais que $\mu_j(X_j) < \infty$. É possível tornar o produto cartesiano $X_1 \times \dots \times X_n$ um espaço de medida, da seguinte forma. Considere em $X_1 \times \dots \times X_n$ a σ -álgebra gerada pela família de todos os conjuntos da forma $E_1 \times \dots \times E_n$ com $E_j \in \mathcal{A}_j$. Ela é chamada σ -álgebra produto e é representada por $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$.

Proposição 1.11. *Existe uma única medida μ em $(X_1 \times \dots \times X_n, \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n)$ tal que $\mu(E_1 \times \dots \times E_n) = \mu_1(E_1) \cdots \mu_n(E_n)$ para todo $E_1 \in \mathcal{A}_1, \dots, E_n \in \mathcal{A}_n$. Em particular, μ é uma medida finita.*

Demonstração. Veja [37, página 152]. □

A medida μ dada pela proposição acima é denotada por $\mu = \mu_1 \times \dots \times \mu_n$ e é chamada de medida produto. Desta forma, fica bem definido o espaço produto

$$(X_1 \times \dots \times X_n, \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n, \mu_1 \times \dots \times \mu_n).$$

Vamos apresentar agora a construção do produto de uma família enumerável de espaços de medida de probabilidade.

Sejam $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$, $j \in I$, espaços de medida de probabilidade. O conjunto de índices tanto pode ser $I = \mathbb{N}$ como $I = \mathbb{Z}$. Consideremos o produto cartesiano

$$\Sigma = \prod_{j \in I} X_j = \{(\mathbf{x}_j)_{j \in I}; \mathbf{x}_j \in X_j\}.$$

Definição 1.12. *Chamamos cilindros de Σ os subconjuntos da forma*

$$[m; A_m, \dots, A_k] := \{(\mathbf{x}_i)_{i \in \mathbb{N}}; \mathbf{x}_i \in A_i \text{ for } m \leq i \leq k\},$$

onde $m \in I$, $m \leq k$ e $A_j \in \mathcal{A}_j$ para todo $m \leq j \leq k$.

Exemplo 1.13. *O próprio Σ é um cilindro, pois podemos escrever, por exemplo, $\Sigma = [1, X]$.*

Definição 1.14. A σ -álgebra produto em Σ é a σ -álgebra \mathcal{B} gerada pela família de todos os cilindros de Σ .

Proposição 1.15. Existe uma única medida μ em (Σ, \mathcal{B}) tal que

$$\mu([m; A_m, \dots, A_n]) = \mu_1(A_m) \cdots \mu_n(A_n),$$

para qualquer cilindro $[m; A_m, \dots, A_n]$. Em particular, μ é uma medida de probabilidade.

Demonstração. Veja [37, página 157]. □

A medida de probabilidade μ dada pela proposição acima é chamada medida produto e é representada por $\prod_{j \in I} \mu_j$ e o espaço de probabilidade $(\Sigma, \mathcal{B}, \mu)$ construído desta forma é denominado espaço produto dos espaços $(X_j, \mathcal{B}_j, \mu_j), j \in I$.

Quando todos os espaços de medidas são iguais, a medida produto é chamada de medida de Bernoulli, como definido abaixo.

Definição 1.16. Dado um espaço de medida de probabilidade (X, \mathcal{A}, ν) , a medida produto $\mu = \nu^I$ de $X^I = \{(x_j)_{j \in I}; x_j \in X\}$ é chamada de medida de Bernoulli.

Estes espaços podem ser usados para modelar sequências de experimentos randômicos idênticos em que o resultado de cada experimento é independente dos demais. O espaço das sequências introduzido no próximo exemplo será de grande importância no estudo da sequência definida em (1).

Exemplo 1.17. Considere o conjunto $B = \{1, 2, \dots, N\}$ e uma medida de probabilidade p em B onde $p_i = p(\{i\})$ é positivo para cada i . Denotamos por Σ o espaço produto $B^{\mathbb{N}}$ munido da σ -álgebra produto \mathcal{A} e da medida de Bernoulli $p^{\mathbb{N}}$, que denotaremos por \mathcal{P} . Isso significa que cada elemento de Σ é uma sequência infinita de números naturais cujos termos pertencem ao conjunto $\{1, 2, \dots, N\}$. A σ -álgebra \mathcal{A} de Σ é gerada pelos cilindros elementares

$$[m; \alpha_m, \dots, \alpha_k] := \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}}; x_i = \alpha_i \text{ para } m \leq i \leq k\}.$$

Além disso, a medida \mathcal{P} é caracterizada por

$$\mathcal{P}([m; \alpha_m, \dots, \alpha_k]) = \prod_{i=m}^k p_{\alpha_i}.$$

1.2 Teoria ergódica

Nesta seção, apresentamos algumas definições e resultados básicos de Teoria Ergódica. Para mais detalhes, veja [51, 63].

Definição 1.18. *Sejam (X, \mathcal{A}) e (Y, \mathcal{B}) espaços de medida. Dizemos que $f : X \rightarrow Y$ é uma transformação mensurável se $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$, para todo $E \in \mathcal{B}$.*

Definição 1.19. *Seja (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida e seja $f : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável. Dizemos que a medida μ é invariante por f se $\mu(f^{-1}(E)) = \mu(E)$ para todo conjunto mensurável $E \subset X$.*

Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida e $f : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável. Escreveremos $f^n = f \circ \dots \circ f$ (n vezes) para denotar a n -ésima iterada de f .

Definição 1.20. *Seja $f : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável. Dizemos que um subconjunto $A \subset X$ é invariante (por f) quando $f^{-1}(A) = A$.*

O resultado abaixo é um dos teoremas mais importantes em teoria ergódica e é essencial na prova de alguns resultados desse trabalho.

Teorema 1.21 (Teorema Ergódico de Birkhoff). *Seja $f : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável e μ uma medida de probabilidade invariante por f . Dada uma função integrável $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$, o limite*

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)),$$

existe em μ -quase todo ponto $x \in X$. Além disso, a função $\tilde{\varphi}$ é integrável e satisfaz

$$\int_X \tilde{\varphi} \, d\mu = \int_X \varphi \, d\mu.$$

Demonstração. Veja [63, página 73]. □

Outro conceito importante em teoria ergódica é a ergodicidade.

Definição 1.22. *Seja μ uma medida de probabilidade invariante por $f : X \rightarrow X$. Dizemos que μ é ergódica para f quando para todo subconjunto invariante A tem-se $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.*

Quando a medida invariante μ no Teorema 1.21 é ergódica, a função $\tilde{\varphi}$ é constante e

$$\tilde{\varphi} = \int_X \varphi \, d\mu.$$

A medida de Bernoulli é um exemplo importante de uma medida invariante ergódica pela transformação deslocamento (shift) de Bernoulli, que definimos no próximo exemplo.

Exemplo 1.23. *Seja (X, \mathcal{A}, ν) um espaço de probabilidade qualquer. Considere o espaço produto $\Sigma = X^{\mathbb{N}}$, munido da σ -álgebra produto $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ e da medida produto $\mu = \nu^{\mathbb{N}}$. O operador deslocamento (ou shift) de Bernoulli $\beta : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é definido por*

$$\beta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots) = (\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots),$$

observe que $\beta^j(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots) = (\alpha_{j+1}, \alpha_{j+2}, \dots)$.

Proposição 1.24. *A medida de Bernoulli de Σ é invariante e ergódica em relação ao deslocamento de Bernoulli β .*

Demonstração. Veja [63, página 109]. □

Segue do teorema Ergódico de Birkhoff e da ergodicidade da medida de Bernoulli, que dado um conjunto mensurável $E \subset \Sigma$, para μ -quase todo $\alpha \in \Sigma$, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_E(\beta^j(\alpha)) = \mathcal{P}(E), \tag{1.1}$$

onde χ_E denota a função característica de E . Ou seja, o tempo médio de visita a qualquer subconjunto mensurável E existe e é igual à medida de E , para quase todo ponto α .

1.3 Variedades Riemannianas

Denotaremos por M^n (ou simplesmente M) uma variedade Riemanniana conexa de dimensão n e classe C^∞ , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sua métrica Riemanniana, com a correspondente norma denotada por $\| \cdot \|$, ∇ sua conexão Riemanniana, $T_p M$ o plano tangente a M no ponto $p \in M$ e $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores C^∞ de M . A seguir, iremos relembrar algumas definições e proposições, que podem ser encontradas com maiores detalhes em [32].

Definição 1.25. *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ uma curva diferenciável por partes. O comprimento da curva α , denotado por $L(\alpha)$, é definido por*

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt.$$

Definição 1.26. *Sejam M uma variedade e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . O gradiente de f , denotado por $\text{grad } f$, é o único campo $\text{grad } f \in \mathfrak{X}(M)$ definido por*

$$\langle \text{grad } f(p), v \rangle = Df_p(v), \quad \forall v \in T_p M.$$

Proposição 1.27. *Se $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis, então*

(a) $\text{grad } (f + g) = \text{grad } f + \text{grad } g$.

(b) $\text{grad } (fg) = g \cdot \text{grad } f + f \cdot \text{grad } g$.

Demonstração. Veja [32, página 93]. □

Proposição 1.28. *Sejam $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, $p \in M$, $v \in T_p M$ e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ uma curva suave tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Então*

$$\langle \text{grad } f, v \rangle_p = \left. \frac{d}{dt} (f \circ \alpha)(t) \right|_{t=0}.$$

Demonstração. Veja [32, página 93]. □

Agora vamos apresentar algumas definições e proposições relacionadas a curvatura de uma variedade Riemanniana, que serão utilizadas para definir variedades de Hadamard.

Definição 1.29 (Curvatura). *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Observe que se $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X, Y)Z = 0$ para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.30. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:*

(i) R é $C^\infty(M)$ -bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, isto é,

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

$$f, g \in C^\infty(M), X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M).$$

(ii) Para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o operador curvatura $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ é $C^\infty(M)$ -linear, isto é,

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W,$$

$$R(X, Y)(fZ) = fR(X, Y)Z,$$

$$f \in C^\infty(M), Z, W \in \mathfrak{X}(M).$$

(iii) Vale a Primeira Identidade de Bianchi.

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

(iv) Para quaisquer $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$ valem as seguintes propriedades de simetria:

$$(a) \langle R(X, Y)Z, T \rangle + \langle R(Y, Z)X, T \rangle + \langle R(Z, X)Y, T \rangle = 0$$

$$(b) \langle R(X, Y)Z, T \rangle = -\langle R(Y, X)Z, T \rangle$$

$$(c) \langle R(X, Y)Z, T \rangle = -\langle R(X, Y)T, Z \rangle$$

$$(d) \langle R(X, Y)Z, T \rangle = \langle R(Z, T)X, Y \rangle.$$

Demonstração. Veja [32, página 93]. □

A próxima definição é essencial para definir curvatura seccional variedades Riemannianas.

Proposição 1.31. *Seja $\sigma \subset T_p M$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente $T_p M$ e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K_p(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Demonstração. Veja [32, página 104]. □

Definição 1.32 (Curvatura Seccional). *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_p M$, o número real $K_p(\sigma) = K_p(x, y)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ é chamado curvatura seccional de σ em p .*

1.4 Variedades de Hadamard

Definição 1.33. *Uma variedade Riemanniana M é (geodesicamente) completa se para todo $p \in M$, a aplicação exponencial, \exp_p , está definida para todo $v \in T_p M$, isto é, se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.*

Se M é uma variedade Riemanniana conexa e $p, q \in M$, então existe uma curva diferenciável por partes ligando p a q , isto é, existe uma curva $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ com $\alpha(a) = p$ e $\alpha(b) = q$ e uma partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de $[a, b]$ tal que α é diferenciável em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Usando este fato podemos definir uma distância em uma variedade Riemanniana, como segue:

Definição 1.34. *Seja M uma variedade Riemanniana conexa. Dados $p, q \in M$, definimos a distância $d(p, q)$ por*

$$d(p, q) = \inf\{L(\alpha); \alpha \text{ é uma curva diferenciável por partes ligando } p \text{ a } q\}$$

onde $L(\alpha)$ indica o comprimento da curva α .

Proposição 1.35. *Com a distância d , M é um espaço métrico, isto é:*

- (1) $d(p, q) \geq 0$ e $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$;
- (2) $d(p, q) = d(q, p)$;
- (3) $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$.

Demonstração. Veja [32, página 164]. □

Observação 1.36. *A topologia induzida por d coincide com a topologia original de M .*

A seguir, lembramos a definição de espaço métrico completo.

Definição 1.37. *Uma sequência (x_n) de um espaço métrico (M, d) diz-se uma sequência de Cauchy quando, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$m, n \in \mathbb{N}, m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Definição 1.38. *Dizemos que um espaço métrico é completo, quando toda sequência de Cauchy for convergente.*

O teorema de Hopf e Rinow mostra algumas condições que são equivalentes à uma variedade Riemanniana M ser geodesicamente completa.

Proposição 1.39 (Hopf-Rinow). *Sejam M uma variedade Riemanniana conexa e $p \in M$. As afirmações abaixo são equivalentes:*

- (a) \exp_p está definida em todo o T_pM , isto é, M é geodesicamente completa.
- (b) Os conjuntos limitados e fechados em M são compactos.
- (c) M é completa como espaço métrico.

Além disso, cada uma das afirmações acima implicam que

- (d) Para todo $q \in M$ existe uma geodésica γ ligando p a q com comprimento de γ igual à $d(p, q)$.

Demonstração. Veja [32, página 162]. □

Finalmente podemos definir o conceito de variedade de Hadamard:

Definição 1.40. *Dizemos que uma variedade Riemanniana é uma variedade de Hadamard quando M é completa, simplesmente conexa e a curvatura seccional $K_p(\sigma) \leq 0$ para quaisquer subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_pM$ e $p \in M$.*

A seguir apresentamos um exemplo específico de variedade de Hadamard.

Exemplo 1.41. *Denote por S_{++}^n o cone das matrizes simétricas positivas definidas $n \times n$. É possível mostrar que o par $M = (S_{++}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, com a métrica induzida pela Hessiana Euclideana de $\varphi(X) = -\ln \det X$, isto é,*

$$\langle U, V \rangle_X = \text{tr}(V\varphi''(X)U) = \text{tr}(VX^{-1}UX^{-1}), \quad X \in M, \quad U, V \in T_XM,$$

é uma variedade de Hadamard cuja a única geodésica ligando os pontos $X, Y \in M$ é dada por

$$\gamma(t) = X^{\frac{1}{2}}(X^{-\frac{1}{2}}YX^{-\frac{1}{2}})^tX^{\frac{1}{2}}.$$

Para mais detalhes, veja [43, página 323].

Em geral, a aplicação exponencial é uma função de classe C^∞ definida apenas em uma vizinhança Ω da origem em T_pM e um difeomorfismo sobre sua imagem. No caso em que M é uma variedade de Hadamard, temos o seguinte resultado, mostrado por Élie Cartan e Jacques Hadamard.

Proposição 1.42 (Teorema de Cartan-Hadamard). *Seja M uma variedade de Hadamard. Então M é difeomorfa a \mathbb{R}^n , $n = \dim M$; mais precisamente, $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. Veja [32, página 165]. □

Sejam M uma variedade de Hadamard e $q \in M$. Pelo teorema de Cartan-Hadamard podemos definir a inversa da aplicação exponencial $\exp_q^{-1} : M \rightarrow T_q M$ e obter a seguinte relação entre distância Riemanniana e aplicação exponencial

$$d(p, q) = \|\exp_q^{-1} p\|.$$

1.5 Espaços CAT(0)

Nesta seção, apresentamos as definições e alguns resultados preliminares a respeito dos espaços CAT(0). Para mais detalhes, consulte [7].

Seja (X, d) um espaço métrico. Uma aplicação contínua $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ é chamada de caminho e seu comprimento é definido por

$$l(\gamma) := \sup \sum_{i=1}^n d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})),$$

onde o supremo é tomado sobre o conjunto de todas as partições $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ do intervalo $[0, 1]$. Dados $x, y \in X$, dizemos que um caminho $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ liga x a y quando $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$.

Um caminho $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ é chamado de geodésica quando para cada $s, t \in [0, 1]$, tem-se

$$d(\gamma(s), \gamma(t)) = d(\gamma(0), \gamma(1))|s - t|,$$

isto é, quando é parametrizado proporcionalmente ao comprimento de arco.

Definição 1.43. *Dizemos que (X, d) é um espaço geodésico quando dois pontos quaisquer $x, y \in X$ podem ser ligados por uma geodésica.*

Observação 1.44. *Pode acontecer de existir mais de uma geodésica ligando dois pontos. Quando quaisquer dois pontos $x, y \in X$ podem ser ligados por um única geodésica, dizemos que o espaço é unicamente geodésico, e denotamos tal geodésica por $[x, y]$.*

Dado $z \in [x, y]$, com $x \neq y$, existe uma geodésica $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ ligando x a y e para $t = d(x, z)/d(x, y)$ tem-se $\gamma(t) = z$. Para simplificar a notação, escreveremos simplesmente $z = (1 - t)x + ty$ e dizemos que z é uma combinação convexa de x e y . Um subconjunto C de um espaço geodésico (X, d) diz-se convexo quando todo par de pontos $x, y \in C$ pode ser ligado por uma geodésica em X e sua imagem está contida em C .

Definição 1.45. *Um triângulo geodésico $\Delta(p_1, p_2, p_3)$ em um espaço geodésico X é um conjunto formado por três segmentos de geodésicas*

$$\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow M, \quad \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow M, \quad \gamma_3 : [0, 1] \rightarrow M,$$

de modo que $\gamma_1(1) = p_2 = \gamma_2(0)$, $\gamma_2(1) = p_3 = \gamma_3(0)$ e $\gamma_3(1) = p_1 = \gamma_1(0)$.

Os segmentos geodésicos são chamados de lados do triângulo geodésico e são denotados por $[p_1, p_2]$, $[p_2, p_3]$ e $[p_3, p_1]$.

Dizemos que $z \in \Delta(p_1, p_2, p_3)$ quando z pertence a algum dos lados do triângulo, por exemplo $z \in [p_1, p_2]$.

Dado um triângulo geodésico $\Delta(p, q, r)$ em M , existe um triângulo de comparação em \mathbb{R}^2 , isto é, três segmentos de reta $[\bar{p}, \bar{q}]$, $[\bar{q}, \bar{r}]$ e $[\bar{r}, \bar{p}]$ em \mathbb{R}^2 , tais que

$$d(p, q) = \|\bar{p} - \bar{q}\|, \quad d(q, r) = \|\bar{q} - \bar{r}\| \quad \text{e} \quad d(r, p) = \|\bar{r} - \bar{p}\|,$$

como mostra a figura 1.1. O triângulo de comparação é único a menos de isometrias em \mathbb{R}^2 .

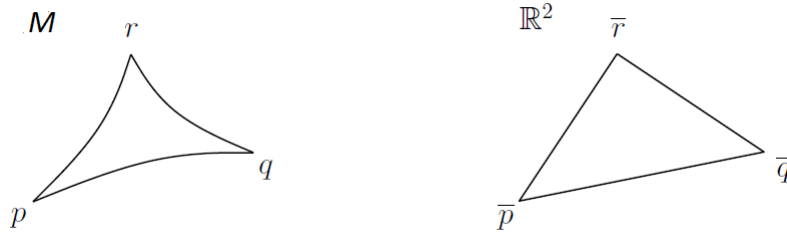


Figura 1.1: Triângulo geodésico e triângulo de comparação.

Dado $z \in \Delta(p_1, p_2, p_3)$, digamos $z = (1 - t)p_1 + tp_2$, o ponto de comparação de z no triângulo $\Delta(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3)$ é dado por $\bar{z} = (1 - t)\bar{p}_1 + t\bar{p}_2$. A seguir apresentamos uma importante noção geométrica em espaços geodésicos.

Definição 1.46 (Ângulo entre duas geodésicas). *Seja (X, d) um espaço geodésico. Definimos o ângulo entre duas geodésicas $\gamma, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ com $\gamma(0) = \beta(0)$ por*

$$\alpha(\gamma, \beta) := \limsup_{s, t \rightarrow 0^+} \angle(\overline{\gamma(t)}, \overline{\gamma(0)}, \overline{\beta(s)}).$$

onde $\overline{\gamma(t)}, \overline{\gamma(0)}, \overline{\beta(s)}$ são os vértices do triângulo de comparação $\Delta(\overline{\gamma(t)}, \overline{\gamma(0)}, \overline{\beta(s)})$.

Definição 1.47 (Espaços CAT(0)). *Seja X um espaço geodésico. Dizemos que X é um espaço CAT(0) se para todo triângulo geodésico $\Delta(p, q, r)$ e $x \in [p, r], y \in [p, q]$, tem-se*

$$d(x, y) \leq \|\bar{x} - \bar{y}\|,$$

onde \bar{x} e \bar{y} são os pontos de comparação correspondentes no triângulo de comparação $\Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$. Essa definição está ilustrada na figura 1.2.

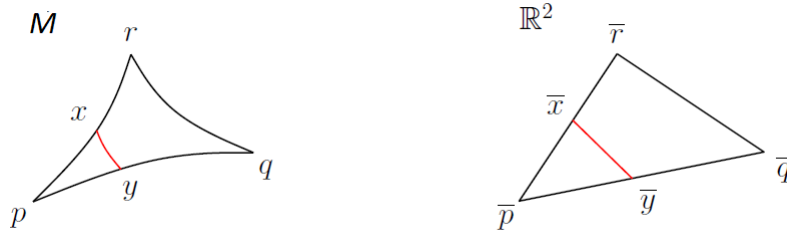


Figura 1.2: Triângulo geodésico e triângulo de comparação.

Observação 1.48. *Os espaços CAT(0) também podem ser definidos através da comparação entre ângulos, mais precisamente, X é um espaço CAT(0) quando o ângulo de um triângulo geodésico em X não é maior do que o ângulo correspondente de seu triângulo de comparação. Para ver essa e outras definições equivalentes de espaços CAT(0), consulte [7].*

Se (X, d) é um espaço CAT(0), então para todo triângulo geodésico com vértices p, q, r e $x \in [q, r]$, temos

$$d(p, x) \leq |\bar{p} - \bar{x}|. \tag{1.2}$$

Dada uma geodésica $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ ligando \mathbf{q} a \mathbf{r} , note que

$$\begin{aligned}
 \|\bar{\mathbf{p}} - \overline{\gamma(t)}\|^2 &= \|\bar{\mathbf{p}} - ((1-t)\bar{\mathbf{q}} + t\bar{\mathbf{r}})\|^2 \\
 &= \|\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{q}}\|^2 - t\langle \bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{q}} \rangle - t\langle \bar{\mathbf{q}} - \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}} - \bar{\mathbf{r}} \rangle + t^2\|\bar{\mathbf{q}} - \bar{\mathbf{r}}\|^2 \\
 &= \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|^2 - t\langle \bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{q}} \rangle - t\langle \bar{\mathbf{q}} - \bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}} - \bar{\mathbf{r}} \rangle + t^2\|\bar{\mathbf{q}} - \bar{\mathbf{r}}\|^2 \\
 &= (1-t)\|\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{q}}\|^2 + t(-\langle \bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{p}} \rangle - \langle \bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}} - \bar{\mathbf{r}} \rangle) - (t-t^2)\|\bar{\mathbf{q}} - \bar{\mathbf{r}}\|^2 \\
 &= (1-t)\|\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{q}}\|^2 + t\|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{p}}\|^2 - t(1-t)\|\bar{\mathbf{q}} - \bar{\mathbf{r}}\|^2 \\
 &= (1-t)d^2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + td^2(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - t(1-t)d^2(\mathbf{q}, \mathbf{r}).
 \end{aligned}$$

Assim, a desigualdade (1.2) é equivalente a

$$d^2(\mathbf{p}, \gamma(t)) \leq (1-t)d^2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + td^2(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - t(1-t)d^2(\mathbf{q}, \mathbf{r}), \quad \forall \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in X. \quad (1.3)$$

Ou seja, em espaços $\text{CAT}(0)$ a função quadrado da distância é fortemente convexa.

Definição 1.49 (Espaços de Hadamard). *Um espaço $\text{CAT}(0)$ completo é chamado de espaço de Hadamard.*

Exemplo 1.50 (Espaços de Hilbert). *Os espaços de Hilbert são exemplos de espaços de Hadamard em que seus segmentos geodésicos são segmentos de retas. Além disso, é possível mostrar que um espaço de Banach é $\text{CAT}(0)$ se, e somente se, for um espaço de Hilbert.*

Exemplo 1.51 (\mathbb{R} -tree). *Um espaço métrico (X, d) é um \mathbb{R} -tree quando for unicamente geodésico e quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ satisfazendo $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \cap [\mathbf{y}, \mathbf{z}] = \{\mathbf{y}\}$, tem-se*

$$[\mathbf{x}, \mathbf{z}] = [\mathbf{x}, \mathbf{y}] \cup [\mathbf{y}, \mathbf{z}].$$

A seguir, apresentamos exemplos de espaços \mathbb{R} -tree, que podem ser encontrados em [20, página 168].

Exemplo 1.52. *Considere o conjunto $X = (0, \infty) \times (0, \infty)$ e a distância entre dois pontos $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ definida por*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} x_1 + y_1 + |x_2 - y_2| & \text{se } x_2 \neq y_2, \\ |x_1 - y_1| & \text{se } x_2 = y_2. \end{cases}$$

O espaço métrico (X, d) é um \mathbb{R} -tree. Os grafos métricos simplesmente conexos e o cone assintótico do espaço hiperbólico \mathbb{H}^n também são exemplos de \mathbb{R} -tree.

Um classe importante de espaços de Hadamard são as variedades de Hadamard.

Exemplo 1.53 (Variedade de Hadamard). *Toda variedade de Hadamard, isto é, uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e com curvatura seccional não positiva, é um espaço de Hadamard.*

1.6 Espaços CAT(κ)

As definições e propriedades dessa seção podem ser encontradas em [20]. Todo espaço CAT(k) com $k < 0$ é também um espaço CAT(0) (veja [20, Teorema 1.12]). Por esse motivo, vamos definir a seguir os espaços CAT(κ) para $\kappa > 0$. Assim como na seção anterior, definimos os espaços CAT(κ) com $\kappa > 0$ através de comparação de triângulos.

Denotamos por M_κ^2 a variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa, de dimensão 2, com curvatura seccional constante e igual a κ . Usaremos o símbolo ρ_κ para indicar a função distância em M_κ^2 . Lembramos que M_κ^2 é única a menos de isometrias (veja [29, página 41]). Podemos considerar M_κ^2 sendo a esfera $S_\kappa^2 = \left\{ (x, y); x^2 + y^2 = \frac{1}{\kappa} \right\}$ com a métrica induzida de \mathbb{R}^2 , nesse caso, tem-se

$$\text{diam}(M_\kappa^2) = \sup\{\rho_\kappa(x, y); x, y \in M_\kappa^2\} = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

Denotaremos por \mathcal{D}_κ o diâmetro de M_κ^2 , isto é, $\mathcal{D}_\kappa = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$.

Definição 1.54. *Seja (X, d) um espaço geodésico e sejam $p, q, r \in X$. O perímetro do triângulo geodésico $\Delta(p, q, r)$ é o número real $d(p, q) + d(q, r) + d(r, p)$.*

Em espaços CAT(0), qualquer triângulo geodésico admite um triângulo de comparação em \mathbb{R}^2 . Para garantir a existência de triângulos de comparação em M_κ^2 é necessário hipóteses adicionais.

Proposição 1.55. *Seja (X, d) um espaço geodésico e considere pontos $p, q, r \in X$ e um número real $\kappa > 0$. Se o perímetro do triângulo geodésico $\Delta(p, q, r)$ é menor do que $2\mathcal{D}_\kappa$, então existe um único triângulo de comparação em M_κ^2 .*

Demonstração. Veja [20, página 24]. □

Definição 1.56. *Sejam X um espaço geodésico, κ um número real positivo, Δ um triângulo geodésico em X com perímetro menor do que $2\mathcal{D}_\kappa$ e considere $\bar{\Delta}$ o respectivo triângulo de*

comparação em M_κ^2 . Dizemos que Δ satisfaz a desigualdade $\text{CAT}(\kappa)$ quando para todo $x, y \in \Delta$, tem-se

$$d(x, y) \leq \rho_\kappa(\bar{x}, \bar{y}),$$

onde \bar{x}, \bar{y} são os pontos de comparação de x, y respectivamente.

Definição 1.57. Dado $\kappa > 0$, dizemos que um espaço geodésico X é um espaço $\text{CAT}(\kappa)$ quando todo triângulo geodésico em X com perímetro menor do que $2\mathcal{D}_\kappa$ satisfaz a desigualdade $\text{CAT}(\kappa)$.

Observação 1.58. Se (X, d) é um espaço $\text{CAT}(\kappa)$ com $\kappa > 0$, então dados dois pontos $x, y \in X$ com $d(x, y) < \mathcal{D}_\kappa$ existe uma única geodésica ligando x a y (veja [20, página 160]).

Proposição 1.59. Seja X um espaço geodésico.

- a) Se X é um espaço $\text{CAT}(\kappa)$, então X é um espaço $\text{CAT}(\kappa')$ para todo $\kappa' > \kappa$.
- b) Se X é um espaço $\text{CAT}(\kappa')$ para todo $\kappa' > \kappa$, então X é um espaço $\text{CAT}(\kappa)$.

Demonstração. Veja [20, página 165]. □

Exemplo 1.60. Seja M uma variedade Riemanniana completa. É possível mostrar que M é um espaço $\text{CAT}(\kappa)$ se, e somente se, todas as curvaturas seccionais de M são menores ou iguais a κ e M é simplesmente conexa (veja [20, página 173]).

Exemplo 1.61. Os espaços \mathbb{R} -trees definidos nos Exemplos 1.51 e 1.52 são espaços $\text{CAT}(\kappa)$ para todo $\kappa \in \mathbb{R}$. Reciprocamente, se um espaço métrico é $\text{CAT}(\kappa)$ para todo $\kappa \in \mathbb{R}$, então ele é um espaço \mathbb{R} -tree.

1.7 Projeções sobre conjuntos convexos em espaços de Hadamard

Nesta seção apresentamos algumas definições e propriedades básicas relacionadas à projeção sobre conjuntos convexos. Para maiores detalhes, consulte [7].

Definição 1.62. Seja \mathcal{H} um espaço de Hadamard. Um conjunto $C \subset X$ é convexo, se para quaisquer pontos $p, q \in C$ o único segmento geodésico ligando p a q em \mathcal{H} está contido em C .

Exemplo 1.63. *Seja \mathcal{H} um espaço de Hadamard. Dado $p \in \mathcal{H}$ e $a > 0$, a bola fechada de centro p e raio a é convexa, isto é, o conjunto*

$$\bar{B}(p, a) = \{x \in X; d(x, p) \leq a\}$$

é convexo. De fato, dados $x, y \in \bar{B}(p, a)$, considere $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}$ a única geodésica ligando x a y , segue da desigualdade (1.3) que

$$d^2(\gamma(t), p) \leq (1-t)d^2(x, p) + td^2(y, p) - t(1-t)d(x, y) \leq a^2.$$

Observação 1.64. *Existem espaços métricos geodésicos em que as bolas fechadas não são convexas, basta considerar por exemplo uma bola B de raio maior do que $\pi/2$ na esfera unitária $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ munida da métrica induzida do \mathbb{R}^3 , de fato dados dois pontos $p, q \in B$ com $d(p, q) > \pi$, a geodésica minimizante ligando p a q não pertence a B .*

Exemplo 1.65 (Pontos fixos). *Sejam \mathcal{H} um espaço de Hadamard, $C \subset \mathcal{H}$ um conjunto convexo e fechado e $F : C \rightarrow C$ uma aplicação não-expansiva, isto é, $d(F(x), F(y)) \leq d(x, y)$ para todo $x, y \in C$. Então, o conjunto de pontos fixos de F , ou seja,*

$$\text{Fix}(F) := \{x \in C; x = F(x)\},$$

é fechado e convexo. Além disso, de acordo com [7, Teorema4.1.1], quando C é limitado, o conjunto $\text{Fix}(F)$ é não vazio.

Dado um espaço métrico (X, d) e um conjunto $C \subset X$, definimos a função distância

$$d(x, C) := \inf\{d(x, p); p \in C\}.$$

Considere a aplicação ponto - conjunto $P_C : X \rightarrow 2^X$ definida por

$$P_C(x) := \{p \in C; d(x, p) = d(x, C)\}.$$

A aplicação P_C é a projeção sobre o conjunto C .

Definição 1.66. *Dizemos que $C \subset X$ é um conjunto Chebyshev quando para cada $x \in X$, a projeção $P_C(x)$ é um conjunto unitário.*

A seguir, reunimos algumas propriedades da projeção sobre conjuntos convexas em espaços de Hadamard.

Proposição 1.67. *Sejam (\mathcal{H}, d) um espaço de Hadamard e C um conjunto convexo. Então:*

1. *O conjunto C é Chebyshev;*
2. *Se $z \notin C$, então $\alpha(z, P_C(z), y) \geq \pi/2$, onde $\alpha(z, P_C(z), y)$ denota o ângulo entre $[P_C(z), z]$ e $[P_C(z), y]$, ou equivalentemente,*

$$d^2(z, y) \geq d^2(P_C(z), z) + d^2(P_C(z), y). \quad (1.4)$$

3. *A projeção P_C é não-expansiva, isto é,*

$$d(P_C(x), P_C(y)) \leq d(x, y),$$

para qualquer $x, y \in X$.

Demonstração. Veja [7, página 38]. □

Em variedades de Hadamard, temos a seguinte caracterização para a projeção sobre conjuntos convexos:

Proposição 1.68. *Seja M uma variedade de Hadamard e C um conjunto convexo e fechado de M . Então $z \in C$ satisfaz*

$$\langle \exp_z^{-1}y, \exp_z^{-1}x \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C,$$

se, e somente se, $z = P_C(x)$.

Demonstração. Veja [35, página 262] e [65, página 92]. □

1.8 Projeção sobre subespaços em espaços de Hilbert

Quando trabalhamos com projeção sobre subespaços vetoriais em espaços de Hilbert, a aplicação projeção (projeção ortogonal) admite outras propriedades interessantes, sendo que na prova de algumas delas é essencial o fato do espaço ser linear. Reunimos algumas dessas propriedades a seguir:

Proposição 1.69. *Sejam H um espaço de Hilbert e C um subespaço fechado de H e P a projeção sobre C . Então*

1. P é linear, idempotente ($P^2 = P$) e auto adjunto.
2. Para todo $u, v \in H$ com $u \perp v$, temos

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

3. $\|x - Px\|^2 = \|x\|^2 - \|Px\|^2 \quad \forall x \in H$.
4. $\|Px\| \leq \|x\|$ para $x \in H$ e a igualdade ocorre se, e somente, se $Px = x$.

Demonstração. Veja [18, página 111]. □

Enunciamos a seguir dois lemas, que serão usados para generalizar o teorema de Sakai na Seção 2.2. Para ver a prova desses resultados, consulte [55].

Lema 1.70. [55, Lemma 2] *Sejam $y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1}$ elementos de um espaço de Hilbert. Então,*

$$\|y_{k+1} - y_1\|^2 \leq k \sum_{n=1}^k \|y_{n+1} - y_n\|^2,$$

e a igualdade vale se, e somente se, $y_n = y_1 + ((n-1)/k)(y_{k+1} - y_1)$ para $n = 1, 2, \dots, k+1$.

Lema 1.71. [55, Lemma 3] *Seja P a projeção ortogonal sobre um subespaço fechado de um espaço de Hilbert e considere $x, y \in H$. Então,*

$$\|x - y\|^2 \leq \|x - Py\|^2 + \|x - Px\|^2 + 2\|y - Py\|^2.$$

1.9 Funções convexas em variedades de Hadamard

Nesta seção, apresentamos algumas definições e resultados a respeito de funções convexas definidas em variedades de Hadamard.

Definição 1.72. *Seja M uma variedade Hadamard. Dizemos que uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa quando para toda geodésica $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ a função $f \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for convexa, isto é, quando*

$$f(\gamma((1-t)a + tb)) \leq (1-t)f(\gamma(a)) + tf(\gamma(b)),$$

para todo $t \in [0, 1]$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Se a desigualdade for estrita para todo $t \in (0, 1)$, dizemos que f é estritamente convexa.

Proposição 1.73. *Se $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função convexa e $c_i > 0$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$, então a função $f = \sum_{i=1}^n c_i f_i$ dada por $f(x) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x)$ também é convexa.*

Demonstração. veja [62, página 67]. □

Observação 1.74. *Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa, então f é localmente Lipschitziana, e portanto, contínua. Para consultar a prova desse fato, veja [62, página 70].*

Para a definição a seguir, dados $q, r \in M$, considere $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ a única geodésica ligando q a r .

Definição 1.75. *Uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é k -fortemente convexa quando existe uma constante $k > 0$ tal que*

$$f(\gamma(t)) \leq (1-t)f(q) + tf(r) - kt(1-t)d^2(q, r),$$

para todo $q, r \in M$ e $t \in [0, 1]$.

Segue da definição que toda função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fortemente convexa é estritamente convexa.

Exemplo 1.76. *Fixado $p \in M$, a função $\rho_p : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\rho_p(x) = \frac{d(p, x)^2}{2}$ é fortemente convexa. Além disso, ρ_p é diferenciável e*

$$\text{grad}(\rho_p(y)) = -\exp_y^{-1}(p).$$

A prova desse resultado pode ser encontrada em [56, página 106].

A partir da definição de função fortemente convexa, é possível mostrar que:

Proposição 1.77. *Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função k -fortemente convexa e $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa, então a soma $f + g : M \rightarrow \mathbb{R}$ é k -fortemente convexa.*

Proposição 1.78. *Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é k -fortemente convexa, então f admite exatamente um ponto de mínimo. Além disso, se x^* é o ponto de mínimo de f , tem-se*

$$f(x^*) + k \cdot d^2(x^*, y) \leq f(y)$$

para todo $y \in M$.

Demonstração. Veja [7, página 48]. □

Definição 1.79. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Dado $p_0 \in M$, dizemos que $s \in T_{p_0}M$ é um subgradiente de f em p_0 se*

$$f(p) \geq f(p_0) + \langle s, \exp_{p_0}^{-1}(p) \rangle,$$

para todo $p \in M$. O conjunto dos subgradientes de f em p_0 é chamado de subdiferencial de f em p_0 e é denotado por $\partial f(p_0)$.

Observação 1.80. *Note que $0 \in \partial f(p)$ se, e somente se, p é ponto de mínimo de f .*

Proposição 1.81. *Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função convexa e $p_0 \in M$, então $\partial f(p_0)$ é convexo, compacto e não vazio.*

Demonstração. Veja [62, página 74]. □

Lema 1.82. *Sejam M uma variedade de Hadamard e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Se a sequência $\{x_k, v_k\} \subset TM$ é tal que $(x_k, v_k) \rightarrow (x, v) \in TM$ e $v_k \in \partial f(x_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então $v \in \partial f(x)$.*

Demonstração. Veja [44, Lema 2.4]. □

1.10 Espaços uniformemente convexos

Dizemos que um espaço de Banach X é p -uniformemente convexo, com $2 \leq p < \infty$, se existe uma constante $c > 0$ tal que para quaisquer $x, y \in X$, tem-se

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p \leq \frac{1}{2} \|x\|^p + \frac{1}{2} \|y\|^p - \frac{1}{c^p} \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p.$$

A noção de espaços p -uniformemente convexos em espaços de Banach foi introduzida em 1944 por Ball, Carlen e Lieb em [10].

Exemplo 1.83. *Os espaços L_p são 2-uniformemente convexos com $c = \frac{1}{\sqrt{p-1}}$ para $1 < p \leq 2$ e p -uniformemente convexo com $c = 1$ para $2 \leq p < \infty$. Para mais detalhes, veja [10, Teorema 1].*

Em 2011, Naor e Silberman [48] introduziram a noção de espaço métrico p -uniformemente convexo.

Definição 1.84. Fixado $1 < p < \infty$. Dizemos que um espaço métrico (X, d) é p -uniformemente convexo com parâmetro $c > 0$ quando (X, d) é um espaço geodésico, e para quaisquer pontos $x, y, z \in X$ e $t \in [0, 1]$, tem-se

$$d(z, (1-t)x + ty)^p \leq (1-t)d(z, x)^p + td(z, y)^p - \frac{c}{2}t(1-t)d(x, y)^p. \quad (1.5)$$

Observação 1.85. A partir de (1.5) é possível mostrar que X é unicamente geodésico.

Em cenários não lineares, temos os exemplos a seguir.

Exemplo 1.86. Dado $\kappa > 0$, seja X um espaço $\text{CAT}(\kappa)$ com $\text{diam}(X) < \pi/(2\sqrt{\kappa})$. Então X é um 2 - espaço uniformemente convexo com parâmetro $c = (\pi - 2\sqrt{\kappa}\epsilon)\tan(\sqrt{\kappa}\epsilon)$ para qualquer $0 < \epsilon \leq \pi/(2\sqrt{\kappa}) - \text{diam}(X)$ (veja [50, Proposição 3.1]). Dado um conjunto convexo e fechado C de X , a projeção $P_C : X \rightarrow C$ está bem definida e para cada $x \in X$ a projeção $P_C(x)$ é um conjunto unitário, isto é, todo conjunto convexo e fechado C de X é Chebyshev (veja [20, página 176] e [33, Teorema 3.5]). Por outro lado, nesse espaço a projeção em geral não é um operador não-expansivo, mas para $x \in X$ e $y \in C$, tem-se

$$d(P_C(x), y) \leq d(x, y).$$

Exemplo 1.87. Segue da desigualdade (1.3) que todo espaço $\text{CAT}(0)$ é 2-uniformemente convexo com parâmetro $c = 2$, sem restrições sobre o diâmetro do espaço.

1.11 Sequências Fejér e quase-Fejér convergente

Definição 1.88. Dado um espaço métrico (X, d) , dizemos que uma sequência (x_n) é Fejér convergente para um subconjunto $\Omega \subset X$ quando para cada $a \in \Omega$ tem-se

$$d(x_{n+1}, a) \leq d(x_n, a),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 1.89. Dado um espaço métrico (X, d) , dizemos que uma sequência (x_n) é quase-Fejér convergente para um conjunto Ω quando existe uma sequência de números reais não negativos (ϵ_n) tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \infty$ e para cada $a \in \Omega$ tem-se

$$d(x_{n+1}, a) \leq d(x_n, a) + \epsilon_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

A principal propriedade de uma sequência quase-Fejér é apresentada a seguir, e sua demonstração é semelhante à encontrada em [24, Teorema 1] no contexto euclidiano.

Proposição 1.90. *Seja (X, d) um espaço métrico. Se uma sequência (x_n) é quase-Fejér convergente para um subconjunto conjunto não vazio Ω , então (x_n) é limitada. Além disso, se (x_n) possui algum ponto de acumulação x^* em Ω , então (x_n) converge para x^* .*

Observação 1.91. *Segue das definições acima que toda sequência Fejér convergente para Ω é quase-Fejér convergente para Ω .*

Capítulo 2

Convergência do Método das Projeções Alternadas

Neste capítulo estudaremos uma condição necessária e suficiente para a convergência forte do método das projeções alternadas em espaços de Hadamard. Essa condição nos permite responder parcialmente a questão principal que motivou o artigo de Bruck em [22]: "Sob quais hipóteses as iterações randômicas de projeções sobre conjuntos convexos e fechados gera uma sequência convergente?", e também generalizar o teorema de Prager para variedades de Hadamard, ou seja, a sequência gerada por iterações randômicas sempre converge em variedades de Hadamard. Além disso, generalizamos o teorema de Sakai para uma grande classe de sequências (j_n) que contém as sequências quase-periódicas. Também estudaremos o método de projeções alternadas para uma sequência decrescente de conjuntos convexos encaixados em variedades de Hadamard e obtemos uma prova alternativa para a convergência do método do ponto proximal.

Os resultados obtidos neste capítulo deram origem ao seguinte trabalho:

- Melo, Í.D.L., da Cruz Neto, J.X., de Brito, J.M.M. *Strong Convergence of Alternating Projections*. J Optim Theory Appl **194**, 306–324 (2022).

2.1 Método das projeções alternadas

Vamos fixar a seguir algumas notações que serão utilizadas ao longo desse capítulo. Denotamos um espaço de Hadamard por \mathcal{H} , conjuntos convexos e fechados de \mathcal{H} , com interseção não vazia, por C_1, C_2, \dots, C_N , e por (x_n) a sequência gerada pelo método das

projeções alternadas introduzido em (1). Provamos a seguir que se (x_n) tem pelo menos um ponto de acumulação, então ela converge fortemente. Antes de provar este resultado, precisamos do lema a seguir.

Lema 2.1. *Se ξ é um ponto de acumulação da sequência (x_n) definida por (1) e todos os índices aparecem infinitas vezes na sequência (j_n) então $\xi \in C_1 \cap \dots \cap C_N$ e a sequência (x_n) converge para ξ .*

Demonstração. Afirmamos que se $\xi \in C_1 \cap \dots \cap C_d$ com $1 \leq d < N$ então existe algum $i > d$ tal que $\xi \in C_i$. De fato, suponha que $x_{n_k} \rightarrow \xi$ e defina

$$l_1 = \min\{k > n_1 : j_k > d\} \quad \text{e} \quad r_1 = \min\{k : n_k > l_1\}.$$

Em seguida, defina

$$l_2 = \min\{k > n_{r_1} : j_k > d\} \quad \text{e} \quad r_2 = \min\{k : n_k > l_2\}.$$

Indutivamente, podemos construir sequências (l_s) e (r_s) onde $r_0 = 1$ e

$$l_s = \min\{k > n_{r_{s-1}} : j_k > d\} \quad \text{e} \quad r_s = \min\{k : n_k > l_s\}, \quad \forall s \in \mathbb{N}.$$

Observe que existe uma subsequência (l_{s_m}) tal que $j_{b_m} = i > d$, onde $b_m = l_{s_m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Mostraremos que $\xi \in C_i$, de fato, suponha por absurdo que $\xi \notin C_i$ e tome $\alpha \in C_1 \cap \dots \cap C_N$. Pela desigualdade (1.4) segue que

$$d^2(\xi, \alpha) \geq d^2(P_i(\xi), \xi) + d^2(P_i(\xi), \alpha).$$

Sendo $\xi \neq P_i(\xi)$, temos $d^2(\xi, \alpha) > d^2(P_i(\xi), \alpha)$. Daí existe $\delta > 0$ tal que

$$d(\xi, \alpha) - d(P_i(\xi), \alpha) > 4\delta. \tag{2.1}$$

Para simplificar a notação, defina $y_k = x_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, assim $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \xi$. Segue das definições acima que existem $u, p \in \mathbb{N}$ com $n_{r_p} > n_{r_u}$ tais que

$$d(y_{r_p}, \xi) < \delta, \quad d(y_{r_u}, \xi) < \delta \quad \text{e} \quad j_{l_{u+1}} = i.$$

Denotamos por Q_n a aplicação P_{j_n} e definimos R_m^n por

$$R_m^n := Q_n \circ Q_{n-1} \circ \dots \circ Q_{m+1} \circ Q_m.$$

Segue da definição da sequência (l_s) que $1 \leq j_n \leq d$ sempre que $n_{r_u} < n < l_{u+1}$. Sendo $\xi \in C_1 \cap \dots \cap C_d$ e $j_{l_{u+1}} = i$, temos

$$\begin{aligned} R_{n_{r_u}+1}^{n_{r_p}}(\xi) &= Q_{n_{r_p}} \circ \dots \circ Q_{l_{u+1}} \circ \dots \circ Q_{n_{r_u}+1}(\xi) \\ &= Q_{n_{r_p}} \circ \dots \circ Q_{l_{u+1}}(\xi) \\ &= Q_{n_{r_p}} \circ \dots \circ P_i(\xi). \end{aligned}$$

Por outro lado, $R_{n_{r_u}+1}^{n_{r_p}}(y_{r_u}) = y_{r_p}$. Como as projeções são aplicações não-expansivas, temos

$$\begin{aligned} d(y_{r_p}, R_{n_{r_u}+1}^{n_{r_p}}(\xi)) &= d(R_{n_{r_u}+1}^{n_{r_p}}(y_{r_u}), R_{n_{r_u}+1}^{n_{r_p}}(\xi)) \\ &\leq d(y_{r_u}, \xi). \end{aligned}$$

Sendo $d(y_{r_p}, \xi) < \delta$, pela desigualdade triangular segue que

$$d(R_{n_{r_u}+1}^{n_{r_p}}(\xi), \xi) \leq d(R_{n_{r_u}+1}^{n_{r_p}}(\xi), y_{r_p}) + d(y_{r_p}, \xi) < 2\delta.$$

Agora observe que

$$\begin{aligned} d(\xi, a) - 2\delta &< d(\xi, a) - d(R_{n_{r_u}+1}^{n_{r_p}}(\xi), \xi) \\ &\leq d(R_{n_{r_u}+1}^{n_{r_p}}(\xi), a) \\ &= d(Q_{n_{r_p}} \circ \dots \circ P_i(\xi), Q_{n_{r_p}} \circ \dots \circ P_i(a)) \\ &= d(P_i(\xi), a). \end{aligned}$$

Em particular $d(\xi, a) - d(P_i(\xi), a) < 2\delta$, mas isso contradiz a desigualdade (2.1). Portanto $\xi \in C_i$.

Sendo $x_{n_k} \rightarrow \xi$, a menos de uma subsequência de (j_n) e uma reordenação dos índices dos conjuntos C_j 's, podemos assumir que $j_{n_k} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e daí $x_{n_k} = P_{j_{n_k}}(x_{n_{k-1}}) \in C_1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, em particular, $\xi \in C_1$. Pela afirmação que provamos acima, existe $i > 1$ tal que $\xi \in C_i$. A menos de uma reordenação dos índices dos conjuntos C_j 's, podemos assumir que $i = 2$, isto é, $\xi \in C_2$. Se $N = 2$ a prova está concluída, caso contrário, podemos repetir este argumento um número finito de vezes para provar que $\xi \in C_1 \cap \dots \cap C_N$. Agora, observe que

$$d(x_{n+1}, \xi) = d(P_{j_n}(x_n), P_{j_n}(\xi)) \leq d(x_n, \xi),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Sendo $x_{n_k} \rightarrow \xi$, segue que $x_n \rightarrow \xi$, o que completa a prova do lema. □

Como consequência do lema anterior, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.2. *Se a sequência (x_n) definida por (1) tem pelo menos um ponto de acumulação, então a sequência (x_n) converge para algum $\xi \in \mathcal{H}$. Além disso, se $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ e $j_n = i$ para infinitos valores de n , então $\xi \in C_i$.*

Demonstração. Considere para cada $i \in \{1, \dots, N\}$, o conjunto $A_i = \{n : j_n = i\}$ e defina $A = \{i : A_i \text{ é infinito}\}$. Por definição da sequência (x_n) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica que $j_n \in A$. Agora, considere a sequência (i_k) onde $i_k = j_{k+n_0}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Defina a sequência (z_k) onde $z_k = P_{i_k}(z_{k-1})$ para todo $k \in \mathbb{N}$, onde $z_0 = x_{n_0}$. Pelo Lema 2.1 a sequência (z_k) converge, pois estamos considerando somente as projeções sobre conjuntos convexos e fechados C_i 's com $i \in A$. Sendo $z_k = x_{k+n_0}$, tem-se que a sequência (x_n) converge. \square

Observação 2.3. *A existência de um ponto de acumulação é uma condição necessária para a convergência forte da sequência (x_n) definida por (1). No Teorema 2.2 mostramos que esta condição é suficiente quando \mathcal{H} é um espaço de Hadamard. Existem algumas situações em que a existência de um ponto de acumulação é garantida. Por exemplo, se \mathcal{H} é uma variedade de Hadamard, então a sequência (x_n) tem pelo menos um ponto de acumulação, pois nesses espaços toda sequência (x_n) limitada admite algum ponto de acumulação. Se C_j é compacto e o índice j aparece infinitas vezes na sequência (j_n) , então a sequência (x_n) também tem algum ponto de acumulação. Na próxima seção, definiremos as sequências quase-normais e mostraremos na prova do Teorema 2.18 que se \mathcal{H} é um espaço de Hilbert, a sequência (j_n) é quase-normal e C_1, \dots, C_N são subespaços lineares fechados, então a sequência (x_n) tem pelo menos um ponto de acumulação.*

No Capítulo 3, estudaremos um método mais geral do que o de projeções alternadas, e o Teorema 2.2 pode ser obtido como consequência de um resultado de convergência desse método, a saber, o Teorema 3.9.

O teorema acima responde parcialmente a questão principal que motivou o artigo de Bruck em [22]: "Sob quais hipóteses as iterações randômicas de projeções sobre conjuntos convexos e fechados gera uma sequência convergente?", e como consequência, obtemos o corolário a seguir, que generaliza um resultado de Bruck de espaços de Hilbert para espaços de Hadamard, que é um cenário não linear.

Corolário 2.4. *Se existe algum $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ tal que C_j é compacto, então a sequência (x_n) definida por (1) converge para qualquer sequência (j_n) onde o índice j aparece infinitas vezes na sequência (j_n) .*

Prager em [52] mostrou a convergência do método das projeções alternadas em espaços de Hilbert de dimensão finita. O resultado abaixo generaliza o resultado de Prager para variedades de Hadamard, que é um espaço não necessariamente linear.

Corolário 2.5. *Sejam \mathcal{H} uma variedade de Hadamard e C_1, \dots, C_N conjuntos convexos e fechados de \mathcal{H} cuja a interseção é não vazia. Então a sequência (x_n) definida por (1) converge para qualquer sequência (j_n) .*

O corolário acima também generaliza um dos resultados obtidos em [31], onde os autores mostram a convergência do método das projeções alternadas em variedades de Hadamard quando $C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_N$ tem interior não vazio.

2.2 Generalização do Teorema de Sakai

Quando \mathcal{H} é um espaço de Hilbert e os conjuntos C_i 's são subespaços lineares, o método de projeções alternadas já foi estudado durante muito tempo e por vários autores, como explanado na introdução, mesmo assim a convergência forte da sequência gerada por este método ainda depende da ordem em que as projeções são aplicadas, ou seja, depende de escolhas específicas da sequência de índices (j_n) .

É importante lembrar que em 1962 Halperin mostrou em [38] a convergência forte do método de projeções alternadas em espaços de Hilbert assumindo que a sequência (j_n) é periódica e em 1995 este resultado foi generalizado por Sakai em [55] para sequências quase-periódicas. Apenas em 2017, foi mostrado por Kopecká and Paszkiewicz em [42] que a convergência forte não ocorre para quaisquer subespaços lineares C_1, \dots, C_N ($N \geq 3$) e qualquer sequência (j_n) . Assim, um problema natural é estudar uma classe de sequências de índices mais geral que as quase-periódicas, onde a convergência forte ainda ocorre. Nesta seção, mostramos que o conjunto das sequências (j_n) em que o método de projeções alternadas não converge fortemente tem medida de Bernoulli nula, e além disso exibimos uma classe de sequências (j_n) com medida total onde a convergência forte é garantida, ou seja, generalizamos o teorema de Sakai para quase todas as sequências de índices (j_n) . Ao longo desta seção, supomos que cada $i \in I_N$ aparece infinitas vezes na sequência (j_n) .

Definição 2.6. Para cada $j \in \mathbb{I}_{\mathbb{N}}$, considere a sequência crescente de números naturais (k_n) tal que $j_{k_n} = j$. Dizemos que uma sequência (j_n) é quase-periódica se $I(j) = \sup_n (k_{n+1} - k_n)$ é finito para todo j .

Observação 2.7. Equivalentemente, uma sequência é quase-periódica quando existe um número positivo L tal que qualquer bloco com L elementos consecutivos de (j_n) possui todos os índices de $\mathbb{I}_{\mathbb{N}}$.

O exemplo a seguir é uma motivação para estudar a convergência forte do método de projeções alternadas para sequências de índices mais gerais. Nesse exemplo exibimos uma sequência de índices que não é quase-periódica, mas o método (1) gera uma sequência (x_n) com velocidade de convergência maior quando comparada com a ordem periódica.

Exemplo 2.8. Sejam C_1, C_2, C_3 conjuntos dados na figura (2.8), onde $\cos \eta = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Observe que $C_1 \cap C_2 \cap C_3 = \{0\}$ e considere as projeções P_1, P_2, P_3 sobre C_1, C_2, C_3 respectivamente.

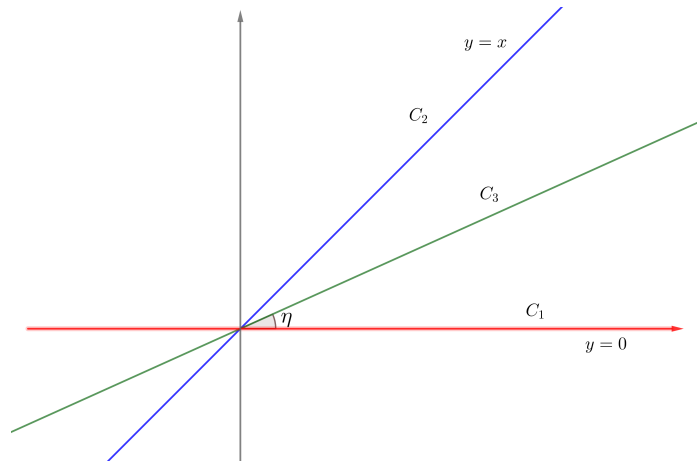


Figura 2.1: Problema de viabilidade convexa

Note que

$$P_1(x, y) = (x, 0), \quad P_2(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right), \quad P_3(x, y) = \left(\frac{x+2y}{5}, \frac{2x+4y}{5} \right).$$

Após simples manipulações algébricas, obtemos

$$(P_3 \circ P_2 \circ P_1)^n(x, y) = \left(\frac{3}{10} \right)^n (x, 2x),$$

e

$$(P_2 \circ P_1)^k(z, w) = \frac{1}{2^k} (z, z).$$

Agora, considere a sequência periódica de índices $(j_l) = (1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots)$. Apresentaremos duas sequências de índices não periódicas na qual em uma delas o método de projeções alternadas converge mais rápido quando comparado com a sequência (j_l) periódica e na outra a convergência é mais lenta. Considere as sequências não periódicas

$$(r_l) = (1, 2, 3, \mathbf{1, 2}, 1, 2, 3, \mathbf{1, 2, 1, 2}, 1, 2, 3, \mathbf{1, 2, 1, 2, 1, 2}, 1, 2, 3, \dots),$$

e

$$(s_l) = \underbrace{1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots, 1, 2, 3, 1, 2}_{10 \text{ blocos}}, \\ \underbrace{1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots, 1, 2, 3, 1, 2, 1, 2}_{10^2 \text{ blocos}}, \\ \underbrace{1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots, 1, 2, 3, 1, 2, 1, 2, 1, 2}_{10^3 \text{ blocos}}, \\ \underbrace{1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots, 1, 2, 3, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots}_{10^4 \text{ blocos}}.$$

Denotamos por $(x_n)_{\alpha_i}$ a sequência gerada pelo método de projeção usando os índices (α_i) . Para analisar qual sequência de índices é mais rápida vamos considerar a subsequência (x_{n_k}) de (x_n) com $n_k = 6k + 9k^2$. Nesse caso, note que

$$(r_{n_k}) = (1, 2, 3, \mathbf{1, 2}, 1, 2, 3, \mathbf{1, 2, 1, 2}, 1, 2, 3, \dots, \underbrace{\mathbf{1, 2, \dots, 1, 2}}_{3k-1 \text{ blocos } 12}, 1, 2, 3).$$

e

$$(j_{n_k}) = \underbrace{(1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots, 123)}_{2k+3k^2 \text{ blocos } 123}.$$

Assim, obtemos as seguintes sequências:

$$(x_{n_k})_{j_l} = (P_3 \circ P_2 \circ P_1)^{2k+3k^2}(x, y) = \left(\frac{3}{10}\right)^{2k+3k^2} (x, 2x)$$

e

$$(x_{n_k})_{r_l} = \left(\frac{3}{10}\right)^{3k} \frac{1}{2^{3k(3k-1)/2}} (x, 2x).$$

Portanto,

$$\frac{|(x_{n_k})_{r_l}|}{|(x_{n_k})_{j_l}|} = \left(\frac{3\sqrt{8}}{10}\right)^k \left(\frac{10}{24}\right)^{3k^2} \rightarrow 0,$$

quando $k \rightarrow +\infty$. Isso significa que a sequência (r_l) é mais rápida que a periódica (j_l) . Considerando agora a subsequência (x_{n_m}) de (x_n) onde $n_m = 3(10 + 10^2 + \dots + 10^m) + m(m+1)$, obtemos as seguintes sequências

$$(x_{n_m})_{j_l} = \left(\frac{3}{10}\right)^{10+10^2+\dots+10^n} \left(\frac{3}{10}\right)^{n(n+1)} (x, 2x)$$

e

$$(x_{n_m})_{s_l} = \left(\frac{3}{10}\right)^{10+10^2+\dots+10^n} \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+\dots+n} (x, x).$$

Portanto,

$$\frac{|(x_{n_k})_{j_l}|}{|(x_{n_k})_{s_l}|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \left(\frac{3\sqrt{8}}{10}\right)^{m(m+1)} \rightarrow 0,$$

quando $m \rightarrow +\infty$. Assim, a sequência de índices (s_l) é mais lenta que a sequência periódica (j_l) . Concluímos que dependendo do problema, a melhor ordem para aplicamos as projeções, isto é, aquela que nos fornece a maior velocidade de convergência, pode não ser a sequência periódica, assim, é interessante estudar a convergência do método de projeções alternadas para sequências de índices mais gerais do que as periódicas.

A seguinte definição é essencial para generalizar o teorema de Sakai.

Definição 2.9. Dizemos que uma sequência (j_n) é quase-normal se existem um número positivo L , uma sequência de blocos disjuntos (\mathcal{R}_k) de elementos consecutivos (j_n) com L termos, onde cada bloco \mathcal{R}_k possui todos os índices de $I_{\mathbb{N}}$ e uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow (0, \infty)$ com $\lim_{n_k \rightarrow +\infty} f(n_k) = +\infty$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k \cdot f(n_k)} = +\infty,$$

onde j_{n_k} é o primeiro elemento do bloco \mathcal{R}_k e n_k é uma sequência crescente.

Observação 2.10. Tseng e Bertsekas em [61] introduziram o conceito de ordem quase-cíclica, que possui algumas semelhanças com a definição acima. Este conceito também foi estudado por Leyner e Reich em [1].

No próximo resultado, obtemos uma condição suficiente para garantir que a sequência (j_n) seja quase-normal.

Proposição 2.11. Suponha que existem um número inteiro positivo L , uma sequência de blocos disjuntos (\mathcal{R}_k) e elementos consecutivos de (j_n) com L termos, onde cada bloco \mathcal{R}_k possui todos os elementos de $I_{\mathbb{N}}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja \mathcal{S}_k o bloco formado pelos elementos entre \mathcal{R}_{k-1} e \mathcal{R}_k , que eventualmente pode ser vazio. Assim, a sequência (j_n) pode ser vista da seguinte forma:

$$\mathcal{S}_1 \mathcal{R}_1 \mathcal{S}_2 \mathcal{R}_2 \dots, \mathcal{R}_{k-1} \mathcal{S}_k \mathcal{R}_k \dots$$

Seja $|\mathcal{S}_k|$ o número de elementos do bloco \mathcal{S}_k e $c > 0$ uma constante. Se

$$\sum_{i=1}^k |\mathcal{S}_i| \leq c \cdot k, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (2.2)$$

então a sequência (j_n) é quase-normal.

Demonstração. Denotamos por j_{n_k} o primeiro elemento do bloco \mathcal{R}_k . Observe que

$$n_k = 1 + (k-1)L + \sum_{i=1}^k |\mathcal{S}_i|.$$

Agora considere uma função não decrescente $f : \mathbb{N} \rightarrow (0, \infty)$ tal que $f(n_k) = \log k$.

Temos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k \cdot f(n_k)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + (k-1)L + \sum_{i=1}^k |\mathcal{S}_i|\right) \cdot \log k} \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + (k-1)L + c \cdot k) \cdot \log k} \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(L + c)k \cdot \log(k)} \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Portanto, (j_n) é quase-normal. □

Denotamos por \mathcal{A} o conjunto das sequências quase-normais, por \mathcal{Q} o conjunto das sequências quase-periódicas e por \mathcal{B} o conjunto das sequências (j_n) que satisfazem a desigualdade (2.2). Mostraremos a seguir que $\mathcal{Q} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

Corolário 2.12. *Toda sequência (j_n) quase-periódica é quase-normal.*

Demonstração. Seguindo a notação da definição (2.6), considere $L = \max_{1 \leq j \leq N} I(j)$. Afirmamos que qualquer bloco \mathcal{R} com L elementos consecutivos de (j_n) possui todos os elementos de I_N . De fato, dado $j \in I_N$, temos que $L \geq I(j)$ e segue da definição de $I(j)$ que existe algum $j_k \in \mathcal{R}$ tal que $j_k = j$. Assim, podemos considerar a sequência de blocos disjuntos (\mathcal{R}_k) onde cada \mathcal{R}_k tem L elementos consecutivos de (j_n) e o primeiro elemento de \mathcal{R}_k é j_{n_k} com $n_k = 1 + (k-1)L$. Usando a notação da Proposição 2.11 temos que $\mathcal{S}_n = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, segue da Proposição 2.11 que (j_n) é quase-normal. □

Apresentamos a seguir uma sequência (j_n) com os elementos em $\{1, 2, 3\}$ que é quase-normal, mas não é quase-periódica.

Exemplo 2.13. *Considere a sequência abaixo, onde temos blocos consecutivos $\mathcal{R}_k = \{123\}$ intercalados por blocos da forma $\mathcal{S} = \{1212 \dots 12\}$.*

$$\underbrace{123123 \dots 123}_{10 \text{ blocos}} \underbrace{12}_{10^2 \text{ blocos}} \underbrace{123123 \dots 123}_{10^2 \text{ blocos}} \underbrace{1212}_{10^3 \text{ blocos}} \underbrace{123123 \dots 123}_{10^3 \text{ blocos}} \underbrace{121212}_{10^4 \text{ blocos}} \underbrace{123123 \dots 123}_{10^4 \text{ blocos}} \dots$$

Para cada $l \in \mathbb{N}$, seja $k_l = \frac{10^{l+1}-1}{9}$. Usando a notação da Proposição 2.11, note que $\mathcal{S}_i \neq \emptyset$ se, e somente se, $i = k_l$ para algum $l \in \mathbb{N}$ e além disso $|\mathcal{S}_{k_l}| = 2l$. Dado $k \in \mathbb{N}$ tal que $k_l \leq k < k_{l+1}$, temos

$$\sum_{i=1}^k |\mathcal{S}_i| = \sum_{j=1}^l |\mathcal{S}_{k_j}| = \sum_{j=1}^l 2j = l(l+1) \leq \frac{10^{l+1}-1}{9} \leq k.$$

Pela Proposição 2.11, a sequência (j_n) é quase-normal. Por outro lado, esta sequência não é quase-periódica, pois para cada $n \in \mathbb{N}$ temos blocos $1212 \dots 12$ com $2n$ elementos distintos de 3.

Agora usaremos algumas técnicas de teoria ergódica para estudar os conjuntos \mathcal{A} e \mathcal{Q} com relação à medida de Bernoulli no espaço de sequências Σ .

Proposição 2.14. $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = 1$, onde \mathcal{P} é a medida de Bernoulli em Σ .

Demonstração. Seja $\Sigma = \{1, 2, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ e considere a medida de Bernoulli \mathcal{P} em Σ . Segue da discussão na Seção 1.2 e da igualdade (1.1), que existe um subconjunto $\Omega \subset \Sigma$ com $\mathcal{P}(\Omega) = 1$ tal que para cada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots) \in \Omega$, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{X}_E(\beta^j(\alpha)) = \mathcal{P}(E), \tag{2.3}$$

onde E é o cilindro $[1; 1, 2, \dots, N]$ e $\mathcal{P}(E) = p_1 p_2 \dots p_N < 1$. Pela desigualdade entre as médias AM-GM segue que

$$0 < \alpha = p_1 p_2 \dots p_N \leq \left(\frac{p_1 + p_2 + \dots + p_N}{N} \right)^N = \frac{1}{N^N}.$$

Tome $\alpha \in \Omega$. Observe que $\beta^{j-1}(\alpha) \in [1; 1, 2, \dots, N]$ se, e somente se, $\alpha_j = 1$, $\alpha_{j+1} = 2, \dots, \alpha_{j+n-1} = N$. Considere uma sequência crescente (n_k) , onde $\beta^{n_k-1}(\alpha) \in$

$[1; 1, 2, \dots, N]$ e a sequência de blocos (\mathcal{R}_k) com N termos cujo primeiro elemento é j_{n_k} . Segue de (2.3), que existe m tal que $n > m$ implica que

$$\frac{a}{2} < \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{X}_E(\beta^j(\alpha)) < \frac{3a}{2}. \quad (2.4)$$

Observe que se $j = n_l - 1$ para algum l , então $\mathcal{X}_E(\beta^j(\alpha)) = 1$ e que $\mathcal{X}_E(\beta^j(\alpha)) = 0$ caso contrário. Portanto,

$$\sum_{j=0}^{n_k-1} \mathcal{X}_E(\beta^j(\alpha)) = k.$$

Tome $n_{k_1} > m$. Por (2.4) segue que para $k \geq k_1$,

$$\frac{a}{2} < \frac{k}{n_k} < \frac{3a}{2}.$$

Agora, considere a função $f : \mathbb{N} \rightarrow (0, \infty)$, onde $f(n) = \log\left(n + \frac{1}{a}\right)$. Tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k \cdot f(n_k)} &= \sum_{k=1}^{k_1-1} \frac{1}{n_k \cdot f(n_k)} + \sum_{k=k_1}^{\infty} \frac{1}{n_k \cdot f(n_k)} \\ &\geq \sum_{k=1}^{k_1-1} \frac{1}{n_k \cdot f(n_k)} + \sum_{k=k_1}^{\infty} \frac{a}{2k \log(2k+1) - 2k \log a} \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Isso prova que $\Omega \subset \mathcal{A}$. Em particular, $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = 1$.

□

De maneira similar, podemos provar que o conjunto \mathcal{B} das sequências (j_n) que satisfazem a condição (2.2), também tem medida total.

Proposição 2.15. $\mathcal{P}(\mathcal{B}) = 1$, onde \mathcal{P} é a medida de Bernoulli em Σ .

Demonstração. Considere o cilindro $E = [1; 1, 2, \dots, N]$, cuja medida de Bernoulli é

$$\mathbb{P}([1; 1, 2, \dots, N]) = p_1 p_2 \dots p_n = a > 0.$$

Como a medida de Bernoulli é ergódica em relação ao operador shift $\beta : \Sigma \rightarrow \Sigma$, pelo teorema ergódico de Birkhoff existe um subconjunto $\Omega \subset \Sigma$ com $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ tal que se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots) \in \Omega$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{X}_E(\beta^j(\alpha)) = \mathcal{P}(E). \quad (2.5)$$

Em particular, existe uma sequência crescente (n_k) tal que $\beta^{n_k-1}(\alpha) \in [1; 1, 2, \dots, N]$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por definição da transformação shift, temos

$$R_k := (\alpha_{n_k}, \alpha_{n_k+1}, \dots, \alpha_{n_k+(N-1)}) = (1, 2, \dots, N).$$

Segue de (2.5) que

$$a = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \#\{1 \leq j \leq n_k : \beta^{j-1}(\alpha) \in [1; 1, 2, \dots, N]\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{n_k}.$$

Tome $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0$ implica

$$\frac{a}{2} < \frac{k}{n_k} < \frac{3a}{2}.$$

Sendo $n_k = 1 + (k-1)L + \sum_{i=1}^k |S_i|$, para $k > k_0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} < \frac{k}{n_k} < \frac{3a}{2} &\Rightarrow \frac{2}{3a} < \frac{n_k}{k} < \frac{2}{3a} \\ &\Rightarrow n_k < \frac{2k}{3a} \\ &\Rightarrow 1 + (k-1)L + \sum_{i=1}^k |S_i| < \frac{2k}{3a} \\ &\Rightarrow \frac{Lk}{2} + \sum_{i=1}^k |S_i| < \frac{2k}{3a} \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^k |S_i| < \left(\frac{2}{3a} - \frac{L}{2}\right)k. \end{aligned}$$

Tomando $c = \max\left\{\sum_{i=1}^{k_0} |S_i|, \frac{2}{3a} - \frac{L}{2}\right\}$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{i=k} |S_k| \leq c \cdot k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como $\Omega \subset \mathcal{B}$, então $\mathbb{P}(\mathcal{B}) = 1$.

□

Apesar do conjunto das sequências quase-normais ter medida total, existem sequências que não são quase-normais.

Exemplo 2.16. Considere a sequência abaixo onde temos blocos consecutivos 123 intercalados por blocos da forma $\{1212 \dots 12\}$.

$$12312312123121212312121212312121212312121212 \dots$$

Note que $n_1 = 1, n_2 = 4, n_3 = 9$ e

$$\begin{aligned} n_k &= (k-1) \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + \dots + (k-2) \cdot 2 + 1 \\ &= 3(k-1) + 2 \cdot \frac{(k-2)(k-1)}{2} + 1 \\ &= k^2. \end{aligned}$$

Dada uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow (0, \infty)$ tal que $\lim_{n_k \rightarrow \infty} f(n_k) = \infty$, existe $M > 0$ tal que $\frac{1}{f(n_k)} \leq M$. Portanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k f(n_k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 f(n_k)} \leq M \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Assim, essa sequência não é quase-normal.

Agora, vamos provar que o conjunto \mathcal{Q} tem medida zero.

Proposição 2.17. $\mathcal{P}(\mathcal{Q}) = 0$, onde \mathcal{P} é a medida de Bernoulli de Σ .

Demonstração. Denotamos por \mathcal{Q}_k o conjunto das sequências quase-periódicas (j_n) tais que $\max_{1 \leq j \leq N} I(j) \leq k$. Afirmamos que $\mathcal{P}(\mathcal{Q}_k) = 0$. De fato, considere o cilindro $E_k = [1; \underbrace{1, 1, 1, \dots, 1}_{2k \text{ termos}}]$. Segue da discussão na Seção 1.2 e da equação (1.1), que existe um subconjunto $\Omega_k \subset \Sigma$ com $\mathcal{P}(\Omega_k) = 1$ tal que para cada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots) \in \Omega_k$, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{X}_{E_k}(\beta^j(\alpha)) = \mathcal{P}([1; 1, 1, \dots, 1]) > 0.$$

Em particular, se $\alpha \in \Omega_k$, então existe j tal que $\beta^{j-1}(\alpha) \in E_k$, isto é, $\alpha_j = \alpha_{j+1} = \dots = \alpha_{j+2k-1} = 1$. Isso implica que $\alpha \notin \mathcal{Q}_k$. Portanto, $\Omega_k \cap \mathcal{Q}_k$ é vazio e $\mathcal{P}(\mathcal{Q}_k) = 0$. Como $\mathcal{Q} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{Q}_k$, segue que

$$0 \leq \mathcal{P}(\mathcal{Q}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}(\mathcal{Q}_k) = 0.$$

□

No próximo resultado, generalizamos o teorema de Sakai para sequências de índices quase-normais. Na prova desse resultado, usamos o Teorema 2.2, assim, obtemos uma

aplicação do Teorema 2.2 em espaços de Hilbert. Em particular, encontramos uma classe maior de seqüências (j_n) contendo as seqüências quase-periódicas tais que a seqüência (x_n) gerada pelo método de projeções alternadas converge.

Teorema 2.18. *Sejam X um espaço de Hilbert e C_1, \dots, C_N subespaços fechados. Se a seqüência (j_n) é quase-normal, então a seqüência (x_n) definida por (1) converge fortemente.*

Demonstração. Usando a notação dada na definição (2.9), considere a seqüência

$$y_k = \sum_{i=0}^{L-2} \|x_{n_k+i+1} - x_{n_k+i}\|^2.$$

Mostraremos que existe uma subsequência crescente (b_k) tal que

$$y_{b_k} \leq \frac{1}{f(n_{b_k})n_{b_k}}.$$

De fato, suponha por absurdo que isso não ocorre, assim existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k_0 \Rightarrow y_k \geq \frac{1}{f(n_k)n_k}.$$

Como a seqüência (j_n) é quase-normal, segue que

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k \geq \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{n_k \cdot f(n_k)} = +\infty.$$

Por outro lado, sendo os blocos \mathcal{R}_k 's disjuntos dois a dois, temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} y_k &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i - x_{i+1}\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 - \|x_{i+1}\|^2 \\ &= \|x_1\|^2 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|^2 \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Mas isso é uma contradição, concluindo a prova da afirmação.

Para simplificar a notação, definimos $w_l = x_{n_l}$, para todo $l \in \mathbb{N}$. Seja P a projeção ortogonal sobre um subespaço fechado de X . Segue do Lema 1.71, que para qualquer $x, y \in X$ temos

$$\|x - y\|^2 \leq \|x - Py\|^2 + \|x - Px\|^2 + 2\|y - Py\|^2. \quad (2.6)$$

Afirmamos que a subsequência $z_k = w_{b_k}$ é convergente. De fato, dado $m < n_{b_k}$, segue de (2.6) que

$$\|z_k - x_m\|^2 \leq \|z_k - x_{m+1}\|^2 + \|z_k - P_{j_m}(z_k)\|^2 + 2\|x_m - x_{m+1}\|^2.$$

Considere $r \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq r \leq n_{b_k} - m$. Aplicando (2.6) recursivamente, obtemos

$$\|z_k - x_m\|^2 \leq \|z_k - x_{m+r}\|^2 + \sum_{i=m}^{m+r-1} \|z_k - P_{j_i}(z_k)\|^2 + 2 \sum_{i=m}^{m+r-1} \|x_i - x_{i+1}\|^2. \quad (2.7)$$

Tomando $m = n_{b_l}$ com $b_l < b_k$ e $r = n_{b_k} - n_{b_l}$ em (2.7), temos

$$\|z_k - z_l\|^2 \leq \sum_{i=n_{b_l}}^{n_{b_k}-1} \|z_k - P_{j_i}(z_k)\|^2 + 2 \sum_{i=n_{b_l}}^{n_{b_k}-1} \|x_i - x_{i+1}\|^2. \quad (2.8)$$

Por hipótese, a sequência (j_n) é quase-normal. Logo, para cada $n_{b_l} \leq i \leq n_{b_k} - 1$ existe $h(i)$ com $n_{b_k} \leq h(i) \leq n_{b_k} + L - 1$ tal que $j_i = j_{h(i)}$, portanto $x_i, x_{h(i)} \in C_{j_i}$. Pelo Lema 1.70 segue que

$$\begin{aligned} \|z_k - P_{j_i}(z_k)\|^2 &\leq \|z_k - x_{h(i)}\|^2 \\ &\leq (h(i) - n_{b_k}) \sum_{s=n_{b_k}}^{h(i)-1} \|x_{s+1} - x_s\|^2 \\ &\leq (L - 1)y_{b_k}. \end{aligned}$$

Pela desigualdade acima e (2.8), temos

$$\begin{aligned} \|z_k - z_l\|^2 &\leq (n_{b_k} - n_{b_l})(L - 1)y_{b_k} + 2 \sum_{i=n_{b_l}}^{n_{b_k}-1} \|x_i - x_{i+1}\|^2 \\ &\leq L \cdot (n_{b_k}y_{b_k}) + 2 \sum_{i=n_{b_l}}^{n_{b_k}-1} \|x_i - x_{i+1}\|^2 \\ &\leq \frac{L}{f(n_{b_k})} + 2 \sum_{i=n_{b_l}}^{n_{b_k}-1} \|x_i - x_{i+1}\|^2. \end{aligned}$$

Observe que $\lim_{b_k \rightarrow \infty} f(n_{b_k}) = +\infty$ e a série $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i - x_{i+1}\|^2$ converge. Pela desigualdade acima, segue que a sequência (z_k) é de Cauchy e portanto a sequência (x_n) tem algum ponto de acumulação e pelo Teorema 2.2 garantimos que a sequência (x_n) é convergente.

□

2.3 Método do ponto proximal

Nesta seção, estudamos a sequência (x_n) definida por (1), mas aqui a sequência (j_n) assumi valores no conjunto dos números naturais. Mais precisamente, considere o método

$$x_n = P_n(x_{n-1}) \quad (2.9)$$

onde P_n é a projeção sobre C_n . Como aplicação, mostramos que o método do ponto proximal pode ser visto como um método de projeções alternadas. Em particular, obtemos uma prova alternativa para a convergência do método do ponto proximal.

Primeiro, vamos provar o seguinte lema, que em particular nos dá informações sobre a interseção dos conjuntos $(C_j)_{j=1}^\infty$ a partir da sequência gerada por (2.9).

Lema 2.19. *Seja \mathcal{H} uma variedade de Hadamard e $(C_j)_{j=1}^\infty$ uma família enumerável de conjuntos convexos e fechados de \mathcal{H} tal que $C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_n \dots$. A sequência (x_n) definida por (2.9) é limitada se, e somente se, $\bigcap_{n=1}^\infty C_n \neq \emptyset$.*

Demonstração. Suponha inicialmente que a sequência (x_k) é limitada. Pelo teorema de Hopf-Rinow (x_n) admite algum ponto de acumulação x^* , isto é, existe uma subsequência (x_{k_j}) convergindo para x^* . Dado $k \in \mathbb{N}$, tem-se $x_m \in C_k$ para todo $m \geq k$, como C_k é fechado, então $x^* \in C_k$, logo $x^* \in \bigcap_{k=1}^\infty C_k$. Em particular $\bigcap_{k=1}^\infty C_k \neq \emptyset$.

Reciprocamente, suponha que $\bigcap_{n=1}^\infty C_n \neq \emptyset$, isto é, existe $a \in \bigcap_{k=1}^\infty C_k$, daí

$$d(x_{k+1}, a) = d(P_{C_k}(x_k), P_{C_k}(a)) \leq d(x_k, a).$$

Logo (x_k) é limitada. □

Proposição 2.20. *Seja M uma variedade de Hadamard e $(C_j)_{j=1}^\infty$ uma família enumerável de conjuntos convexos e fechados encaixados de M , isto é, $C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_k \dots$. Se $C := \bigcap_{k=1}^\infty C_k \neq \emptyset$, então a sequência (x_n) definida por (2.9) converge para um ponto de C .*

Demonstração. Segue do Lema 2.19 que (x_k) é limitada. Seja x^* um ponto de acumulação de (x_k) , pelo Lema 2.19 tem-se $x^* \in C$. Daí

$$d(x_{k+1}, x^*) = d(P_{C_k}(x_k), P_{C_k}(x^*)) \leq d(x_k, x^*).$$

Isto é, $(d(x_k, x^*))$ é decrescente, portanto $d(x_k, x^*) \rightarrow 0$. □

Observação 2.21. *Pelo Lema 2.19, se a sequência gerada por (2.9) é ilimitada, então a interseção dos conjuntos (C_i) é vazia e se a sequência gerada é limitada, então a interseção dos conjuntos (C_i) é não vazia e além disso essa sequência converge para um ponto da interseção.*

Considere uma variedade de Hadamard M , uma função convexa $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in M$. O método do ponto proximal é definido por

$$x_{k+1} = \arg \min_{y \in M} \left\{ f(y) + \frac{\lambda_k}{2} d^2(x_k, y) \right\}, \quad (2.10)$$

onde $\lambda_k \in \mathbb{R}$ satisfaz $0 < \lambda_k < \lambda$ para algum $\lambda > 0$.

Este método está bem definido, pois dado $p \in M$, pelo Exemplo 1.76 a função $y \mapsto d^2(p, y)$ é fortemente convexa e sendo f convexa, pela Proposição 1.77 tem-se que a função

$$y \mapsto f(y) + \frac{\lambda_k}{2} d^2(y, p),$$

é fortemente convexa e pela Proposição 1.78 admite um único ponto de mínimo, para mais detalhes sobre este método, consulte [35]. Para cada $k \in \mathbb{N}$, considere o conjunto

$$C_k = \{y \in M; f(y) \leq f(x_{k+1})\}.$$

Como f é convexa, para cada $k \in \mathbb{N}$, o conjunto C_k é convexo e fechado. Além disso, por definição do método do ponto proximal, tem-se

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \frac{\lambda_k}{2} d^2(x_k, x_k) = f(x_k).$$

Isto é, a sequência $(f(x_k))$ é decrescente, logo os conjuntos $C_1, C_2, \dots, C_k \dots$ satisfazem as hipóteses da Proposição 2.20, ou seja,

1. C_k é convexo e fechado para todo $k \in \mathbb{N}$.
2. $C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_k \dots$

A proposição a seguir mostra que o método do ponto proximal aplicado a uma função convexa $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é equivalente ao método de projeção aplicado aos conjuntos

$$C_k = \{y \in M; f(y) \leq f(x_{k+1})\}.$$

Proposição 2.22. *Sejam M uma variedade de Hadamard, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa e (x_k) a sequência gerada pelo método do ponto proximal. Se $C_k = \{y \in M; f(y) \leq f(x_{k+1})\}$, então $P_{C_k}(x_k) = x_{k+1}$, onde $P_{C_k}(x)$ é a projeção de x sobre C_k .*

Demonstração. Por (2.10), tem-se

$$0 \in \partial \left(f + \frac{\lambda_k}{2} d^2(x_k, \cdot) \right) (x_{k+1}) = \partial f(x_{k+1}) + \lambda_k \cdot \partial \left(\frac{d^2(x_k, \cdot)}{2} \right) (x_{k+1}).$$

Pelo Exemplo 1.76 a função $y \mapsto \frac{d^2(p, y)}{2}$ é diferenciável e

$$\text{grad} \left(\frac{d^2(p, y)}{2} \right) = -\text{exp}_y^{-1} p.$$

Logo,

$$\lambda_k \cdot \text{exp}_{x_{k+1}}^{-1}(x_k) \in \partial f(x_k). \quad (2.11)$$

Pela definição de subgradiente, temos

$$f(y) \geq f(x_{k+1}) + \langle \lambda_k \cdot \text{exp}_{x_{k+1}}^{-1}(x_k), \text{exp}_{x_{k+1}}^{-1}(y) \rangle, \quad \forall y \in M.$$

Em particular,

$$\langle \text{exp}_{x_{k+1}}^{-1}(x_k), \text{exp}_{x_{k+1}}^{-1}(y) \rangle \leq \frac{f(y) - f(x_{k+1})}{\lambda_k} \leq 0, \quad \forall y \in C_k.$$

Segue da Proposição 1.68 que $x_{k+1} = P_{C_k}(x_k)$. □

A seguir mostramos uma prova alternativa do método do ponto proximal.

Teorema 2.23. *Sejam $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa e $S \neq \emptyset$ o conjunto dos minimizadores de f . Seja (x_k) a sequência gerada por (2.10) e $C_k = \{y \in M; f(y) \leq f(x_{k+1})\}$.*

Então

$$S = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k.$$

Além disso, (x_n) converge para algum ponto de S .

Demonstração. Mostraremos que S coincide com a intersecção dos conjuntos convexos C_n . De fato, se $x \in S$, então $f(x) \leq f(x_{k+1})$ para todo $k \in \mathbb{N}$, logo $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$. Reciprocamente, dado $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$, pela Proposição 2.20 a sequência (x_k) converge para algum $x^* \in M$, logo

$$\|\text{exp}_{x_{k+1}}^{-1}(x_k)\| = d(x_k, x_{k+1}) \rightarrow 0.$$

Além disso, em (2.11) mostramos que

$$\lambda_k \cdot \text{exp}_{x_{k+1}}^{-1}(x_k) \in \partial f(x_k).$$

Sendo $0 < \lambda_k < \lambda$, segue do Lema 1.82 que $0 \in \partial f(x^*)$, ou seja, x^* é ponto de mínimo. Pela definição dos conjuntos C_n , temos

$$f(x) \leq f(x_{k+1}), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Assim, $f(x) \leq f(x^*) = \min f$ e portanto $x \in S$. Segue da Proposição 2.20 que (x_n) converge para algum ponto de S . \square

Capítulo 3

Convergência Forte do Método Alternado Generalizado

Neste capítulo estudamos a convergência forte de um método alternado inexato para operadores mais gerais que projeções e também para cenários mais gerais, em particular obtendo resultados para a convergência forte da composição de aplicações firmemente não-expansivas em espaços p -uniformemente convexos, obtendo novos resultados em $\text{CAT}(k)$ e generalizando alguns resultados em $\text{CAT}(0)$.

3.1 Operadores firmemente não-expansivos

As definições e exemplos apresentados nesta podem ser encontrados em [4].

Definição 3.1. *Seja C um subconjunto convexo não vazio de um espaço p -uniformemente convexo (X, d) . Dizemos que uma aplicação $T : C \rightarrow X$ é firmemente não-expansiva quando*

$$d(Tx, Ty) \leq d((1 - \lambda)x \oplus \lambda Tx, (1 - \lambda)y \oplus \lambda Ty),$$

para todo $x, y \in C$ e $\lambda \in [0, 1[$.

Exemplo 3.2. *Seja X um espaço $\text{CAT}(0)$ e uma função $f : X \rightarrow] - \infty, +\infty]$ convexa, semicontínua inferiormente e própria (i.e., não é constante e igual a $+\infty$), o resolvente de f , definido por*

$$J_\lambda x := \arg \min_{y \in X} \left[f(y) + \frac{1}{2\lambda} d^2(x, y) \right],$$

onde $\lambda > 0$, é firmemente não-expansivo.

Exemplo 3.3. *Seja X um espaço $CAT(0)$ e f a função indicadora de um conjunto convexo $C \subset X$, isto é,*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in C, \\ \infty, & \text{se } x \notin C. \end{cases}$$

É possível mostrar que f é uma função convexa e para cada λ ,

$$J_\lambda x = P_C(x).$$

Em particular, a projeção sobre conjuntos convexos e fechados de um espaço $CAT(0)$ é firmemente não-expansiva.

Definição 3.4. *Seja C um subconjunto não vazio de um espaço métrico (X, d) . Dizemos que uma aplicação $T : C \rightarrow X$ satisfaz a propriedade (P) quando $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$ e existem $l > 1$ e $\beta > 0$ tais que*

$$d(Tx, u)^l \leq d(x, u)^l - \beta d(Tx, x)^l,$$

para todo $x \in C$ e $u \in \text{Fix}(T)$.

Exemplo 3.5. *Se X é um espaço p -uniformemente convexo com parâmetro c e C um subconjunto não vazio de X , então toda aplicação firmemente não-expansiva $T : C \rightarrow X$ com $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$ satisfaz a propriedade (P) com $l = p$ e $\beta = c/2$. De fato, dado $x \in C$, $u \in \text{Fix}(T)$ e $\lambda \in (0, 1)$, tem-se*

$$\begin{aligned} d(u, Tx)^p &= d(Tu, Tx)^p \\ &\leq d((1-\lambda)u \oplus \lambda Tu, (1-\lambda)x \oplus \lambda Tx)^p \\ &\leq d(u, (1-\lambda)x \oplus \lambda Tx)^p \\ &\leq (1-\lambda)d(u, x)^p + \lambda d(u, Tx)^p - \frac{c}{2}\lambda(1-\lambda)d(x, Tx)^p. \end{aligned}$$

Assim,

$$d(u, Tx)^p \leq d(u, x)^p - \frac{c}{2}\lambda d(x, Tx)^p.$$

Fazendo $\lambda \rightarrow 1^-$, obtemos

$$d^p(u, Tx) \leq d^p(u, x) - \frac{c}{2}d^p(x, Tx).$$

Exemplo 3.6. *A projeção sobre conjuntos convexos e fechados em espaços $CAT(0)$ satisfaz a propriedade (P) com $\beta = 1$; de fato, no Exemplo 1.87 vimos que todo espaço*

$CAT(0)$ é 2-uniformemente convexo com parametro $c = 2$ e pelo Exemplo 3.5 a projeção sobre subconjuntos convexos de $CAT(0)$ é firmemente não-expansiva.

Exemplo 3.7. *Seja X um espaço completo $CAT(\kappa)$ (com $\text{diam}(X) < \pi/(2\sqrt{\kappa})$ para $\kappa > 0$) e $C \subset X$ um subconjunto convexo e fechado de X . Lembre-se que se $\kappa > 0$, então a projeção sobre um conjunto convexo e fechado $P_C : X \rightarrow C$ não necessariamente é não-expansiva. No entanto, ela satisfaz a propriedade (P) com $\mathfrak{l} = 2$ e $\beta = c/2$. Para provar este fato, usamos que a projeção em espaços $CAT(\kappa)$ satisfaz a desigualdade*

$$d(P_C(x), a) \leq d(x, a), \quad \forall x \in X, \quad \forall a \in C.$$

E que todo espaço $CAT(\kappa)$ (com $\text{diam}(X) < \pi/(2\sqrt{\kappa})$) é 2-uniformemente convexo (veja Exemplo 1.86). De forma análoga ao Exemplo 3.5, podemos usar estes dois fatos para mostrar que P_C satisfaz a propriedade (P).

3.2 Método alternado generalizado

Considere as aplicações $T_1, T_2, \dots, T_N : X \rightarrow X$ definidas em um espaço métrico completo (X, d) e uma sequência (j_n) tomando valores em $I_n = \{1, 2, \dots, N\}$, escolha um ponto $x_0 \in X$ e denotamos por (x_n) a sequência introduzida em (2), isto é, definida por

$$d(T_{j_n}(x_{n-1}), x_n) \leq \epsilon_n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

onde $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \infty$.

Em espaços em que a projeção sobre conjuntos convexos está bem definida, considere conjuntos convexos e fechados C_1, C_2, \dots, C_N e as aplicações $T_i = P_{C_i}$ (projeção sobre C_i), ou simplesmente P_i ; nesse caso o método (2) se torna uma versão inexata do método de projeções alternadas, isto é,

$$d(P_{j_n}(x_{n-1}), x_n) \leq \epsilon_n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

onde $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \infty$.

Ariza et al. mostraram em [4] que se os operadores T_i satisfazem a propriedade (P), então a sequência obtida por este método é assintoticamente regular.

Teorema 3.8. [4, Theorem 3.1]. *Sejam (X, d) um espaço métrico e aplicações $T_1, \dots, T_N : X \rightarrow X$ satisfazendo a propriedade (P). Se $\bigcap_{i=1}^N \text{Fix}(T_i) \neq \emptyset$, então dado*

qualquer ponto inicial $x_0 \in X$, a sequência (x_n) definida por (2) é assintoticamente regular, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

Em [4], os autores também estudaram a convergência fraca desse método no contexto de espaços p -uniformemente convexo, mas a convergência forte foi pouco explorada. Na próxima seção estudaremos a convergência forte desse método sob algumas hipóteses adicionais.

3.3 Análise de convergência

No teorema abaixo, provamos que se a sequência (x_n) definida por (2) em um espaço p -uniformemente convexo tem pelo menos um ponto de acumulação, então converge fortemente. Vale ressaltar que não supomos que o ponto de acumulação pertence à intersecção dos conjuntos convexos.

Teorema 3.9. *Seja (X, d) um espaço p -uniformemente convexo completo e suponha que as aplicações $T_1, \dots, T_N : X \rightarrow X$ são firmemente não-expansivos com $\bigcap_{i=1}^N \text{Fix}(T_i) \neq \emptyset$. Se a sequência (x_n) definida por (2) tem pelo menos um ponto de acumulação, então (x_n) converge fortemente para um ponto de $\bigcap_{i \in I} \text{Fix}(T_i)$, onde I é o conjunto dos índices que aparecem infinitas vezes na sequência (j_n) .*

Demonstração. Podemos supor sem perda de generalidade que todos os índices aparecem infinitas vezes na sequência (j_n) , de fato segue da definição de I que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow j_n \in I.$$

Agora redefinimos a sequência (x_k) da seguinte forma

$$z_0 = x_{n_0}, \quad z_k = x_{k+n_0}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por definição, em relação à sequência (z_k) , todos os índices aparecem infinitas vezes. Agora, considere ξ um ponto de acumulação de (x_n) .

Afirmção 1: Se $\xi \in \text{Fix}(T_1) \cap \dots \cap \text{Fix}(T_d)$ com $1 \leq d < N$ então existe algum $i > d$ tal que $\xi \in \text{Fix}(T_i)$.

De fato, suponha que $x_{n_k} \rightarrow \xi$ e defina

$$l_1 = \min\{k > n_1 : j_k > d\}, \quad r_1 = \min\{k : n_k > l_1\}.$$

Agora defina

$$l_2 = \min\{k > n_{r_1} : j_k > d\}, \quad r_2 = \min\{k : n_k > l_2\}.$$

Procedendo indutivamente, construímos sequências (l_s) e (r_s) onde $r_0 = 1$ e

$$l_s = \min\{k > n_{r_{s-1}} : j_k > d\}, \quad r_s = \min\{k : n_k > l_s\},$$

para todo $s \in \mathbb{N}$. Observe que existe uma subsequência (l_{s_m}) tal que $j_{b_m} = i > d$ para todo $m \in \mathbb{N}$, onde $b_m = l_{s_m}$.

Mostraremos que $\xi \in \text{Fix}(T_i)$. De fato, suponha por absurdo que $\xi \notin \text{Fix}(T_i)$ e tome $a \in \text{Fix}(T_1) \cap \dots \cap \text{Fix}(T_N)$. Como T_i satisfaz a propriedade (P), temos

$$d^p(\xi, a) \geq \frac{c}{2} d^p(T_i(\xi), \xi) + d^p(T_i(\xi), a).$$

Sendo $\xi \neq T_i(\xi)$, tem-se $d(\xi, a) - d(T_i(\xi), a) > 0$. Assim, existe $\delta > 0$ tal que $3\delta < d(\xi, a) - d(T_i(\xi), a)$. Segue das definições acima que existem $u, p \in \mathbb{N}$ com $p > u$ tais que

$$\sum_{s=u}^{\infty} \epsilon_s < \delta, \quad d(y_{r_p}, \xi) < \delta, \quad d(y_{r_u}, \xi) < \delta,$$

onde $y_k = x_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $j_{l_{u+1}} = i$. Segue da definição de (l_s) que

$$n_{r_u} < n < l_{u+1} \Rightarrow 1 \leq j_n \leq d.$$

Para simplificar a notação, denotaremos por Q_n o operador T_{j_n} e dados $n, m \in \mathbb{N}$ com $n > m$, denotamos por R_m^n o operador

$$T_{j_n} \circ T_{j_{n-1}} \circ \dots \circ T_{j_{m+1}} \circ T_{j_m}.$$

Sendo $\xi \in \text{Fix}(T_1) \cap \dots \cap \text{Fix}(T_d)$, temos

$$\begin{aligned} R_{n_{r_u}+1}^{n_{r_p}}(\xi) &= Q_{n_{r_p}} \circ \dots \circ Q_{l_{u+1}} \circ \dots \circ Q_{n_{r_u}+1}(\xi) \\ &= Q_{n_{r_p}} \circ \dots \circ Q_{l_{u+1}}(\xi) \\ &= Q_{n_{r_p}} \circ \dots \circ T_i(\xi). \end{aligned}$$

Como Q_n é não-expansivo, segue da definição da sequência (x_n) e da desigualdade triangular que

$$\begin{aligned}
 d(y_{r_p}, R_{n_{r_u+1}}^{n_{r_p}}(y_{r_u})) &= d(y_{r_p}, Q_{r_p} \circ \cdots \circ Q_{n_{r_u+1}}(y_{r_u})) \\
 &\leq d(y_{r_p}, Q_{r_p}(y_{r_p-1})) + d(Q_{r_p}(y_{r_p-1}), Q_{r_p} \circ \cdots \circ Q_{n_{r_u+1}}(y_{r_u})) \\
 &\leq \epsilon_{r_p} + d(y_{r_p-1}, Q_{r_p-1} \circ \cdots \circ Q_{n_{r_u+1}}(y_{r_u})) \\
 &\leq \epsilon_p + d(y_{r_p-1}, Q_{r_p-1}(y_{r_p-2})) \\
 &\quad + d(Q_{r_p-1}(y_{r_p-2}), Q_{r_p-1} \circ \cdots \circ Q_{n_{r_u+1}}(y_{r_u})) \\
 &\leq \epsilon_p + \epsilon_{p-1} + d(y_{r_p-2}, Q_{r_p-2} \circ \cdots \circ Q_{n_{r_u+1}}(y_{r_u})) \\
 &\quad \vdots \\
 &\leq \epsilon_{r_p} + \epsilon_{r_p-1} + \cdots + \epsilon_{r_u+1} \\
 &\leq \sum_{s=u}^{\infty} \epsilon_s \\
 &< \delta.
 \end{aligned}$$

Como $d(y_{r_u}, \xi) < \delta$ e Q_n é não-expansivo, concluímos que

$$\begin{aligned}
 d(y_{r_p}, R_{n_{r_u+1}}^{n_{r_p}}(\xi)) &\leq d(y_{r_p}, R_{n_{r_u+1}}^{n_{r_p}}(y_{r_u})) + d(R_{n_{r_u+1}}^{n_{r_p}}(y_{r_u}), R_{n_{r_u+1}}^{n_{r_p}}(\xi)) \\
 &< \delta + d(y_{r_u}, \xi) \\
 &< 2\delta.
 \end{aligned}$$

Sendo $d(y_{r_p}, \xi) < \delta$, segue da desigualdade triangular que

$$\begin{aligned}
 d(R_{n_{r_u+1}}^{n_{r_p}}(\xi), \xi) &\leq d(R_{n_{r_u+1}}^{n_{r_p}}(\xi), y_{r_p}) + d(y_{r_p}, \xi) \\
 &< 3\delta.
 \end{aligned}$$

Agora observe que

$$\begin{aligned}
 d(\xi, a) - 3\delta &< d(\xi, a) - d(R_{n_{r_u+1}}^{n_{r_p}}(\xi), \xi) \\
 &\leq d(R_{n_{r_u+1}}^{n_{r_p}}(\xi), a) \\
 &= d(Q_{n_{r_p}} \circ \cdots \circ T_i(\xi), Q_{n_{r_p}} \circ \cdots \circ T_i(a)) \\
 &\leq d(T_i(\xi), T_i(a)) \\
 &= d(T_i(\xi), a).
 \end{aligned}$$

Assim, $d(\xi, a) - d(T_i(\xi), a) < 3\delta$, que é uma contradição, pois δ foi escolhido de forma que $d(\xi, a) - d(T_i(\xi), a) > 4\delta$. Portanto, $\xi_i \in \text{Fix}(T_i)$.

Mostraremos agora que (x_n) converge para ξ . De fato, podemos supor a menos de uma subsequência de (j_{n_k}) e uma reordenação dos índices das aplicações T_i que $j_{n_k} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Note que

$$\begin{aligned} d(T_{n_k}(x_{n_k}), x_{n_k}) &\leq d(T_{n_k}(x_{n_k}), T_{n_k}(x_{n_k-1})) + d(T_{n_k}(x_{n_k-1}), x_{n_k}) \\ &\leq d(x_{n_k-1}, x_{n_k}) + \epsilon_{n_k}. \end{aligned}$$

Como $j_{n_k} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue do Teorema 3.8 que $\lim_{k \rightarrow \infty} d(T_1(x_{n_k}), x_{n_k}) = 0$, portanto $\xi \in \text{Fix}(T_1)$.

Pela Afirmação 1, existe $i > 1$ tal que $\xi \in \text{Fix}(T_i)$, a menos de uma reordenação dos índices das aplicações T_i podemos assumir que $i = 2$. Se $N = 2$ a prova está completa, caso contrário podemos repetir esse argumento uma quantidade finita de vezes para provar que $\xi \in \text{Fix}(T_1) \cap \dots \cap \text{Fix}(T_N)$.

Finalmente, dado $\alpha \in F := \bigcap_{i=1}^N \text{Fix}(T_i)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, \xi) &\leq d(T_{j_{n+1}}(x_n), T_{j_{n+1}}(\xi)) + d(x_{n+1}, t_{j_{n+1}}(x_n)) \\ &\leq d(x_n, \xi) + \epsilon_{n+1}. \end{aligned}$$

Como a sequência (ϵ_n) é somável, então (x_n) é quase-Fejér convergente para F . Além disso, já mostramos que (x_n) admite algum ponto de acumulação $\xi \in F$, daí segue da Proposição 1.90 que (x_n) converge para $\xi \in F$. \square

Observe que a prova do Teorema 3.9 continua válida sob hipóteses mais gerais, como enunciado a seguir.

Teorema 3.10. *Seja (X, d) um espaço métrico completo e suponha que as aplicações $T_1, \dots, T_N : X \rightarrow X$ são não-expansivas com $\bigcap_{i=1}^N \text{Fix}(T_i) \neq \emptyset$ e satisfazem a propriedade (P). Se a sequência (x_n) definida por (2) tem pelo menos um ponto de acumulação, então (x_n) converge fortemente para um ponto de $\bigcap_{i \in I} \text{Fix}(T_i) \neq \emptyset$, onde I é o conjunto dos índices que aparecem infinitas vezes na sequência (j_n) .*

No caso em que X é um espaço $\text{CAT}(0)$ e as aplicações T_i são projeções sobre conjuntos convexos e fechados, obtemos uma condição necessária e suficiente para a convergência forte da sequência gerada por uma versão inexata do método de projeções alternadas em espaços $\text{CAT}(0)$ completo.

Corolário 3.11. *Seja X um espaço $CAT(0)$ completo e C_1, \dots, C_N conjuntos convexos e fechados de X cuja interseção $C_1 \cap \dots \cap C_N$ é não vazia. Se a sequência (x_n) definida por (3.1) tem pelo menos um ponto de acumulação, então a sequência (x_n) converge fortemente para um ponto de $\bigcap_{i \in I} C_i$, onde I é o conjunto dos índices que aparecem infinitas vezes na sequência (j_n) .*

Observação 3.12. *Quando $\epsilon_n = 0$ em (2) para todo n natural, o Corolário 3.11 se torna o principal resultado obtido em [47], que corresponde ao Teorema 2.2 do capítulo anterior.*

3.4 Regularidade de conjuntos

Estudaremos agora outras condições, necessárias e suficientes, para a convergência do método. A seguir definiremos condições de regularidade de uma quantidade finita de conjuntos.

Definição 3.13. *Seja X um espaço métrico. Considere conjuntos $A_1, \dots, A_n \subset X$ e*

$$A = \bigcap_{i=1}^n A_i.$$

(i) *Dizemos que $A_1, A_2, \dots, A_n \subset X$ são limitadamente regular se para qualquer conjunto limitado $S \subset X$ e qualquer $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\max\{d(x, A_1), \dots, d(x, A_n)\} < \delta \Rightarrow d(x, \bigcap_{i=1}^n A_i) < \epsilon, \forall x \in S.$$

(ii) *Dizemos que os conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n são limitadamente linearmente regular se para cada conjunto limitado existir uma constante $\eta > 0$ tal que*

$$\text{dist}(x, A) \leq \eta \max\{\text{dist}(x, A_i), i = 1, \dots, n\}, \forall x \in S.$$

(iii) *Dizemos que os conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n são linearmente regular se existir uma constante $\eta > 0$ tal que*

$$\text{dist}(x, A) \leq \eta \max\{\text{dist}(x, A_i), i = 1, \dots, n\}, \forall x \in X.$$

Observação 3.14. *Segue da definição que (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i).*

A noção de regularidade de conjuntos apresentadas na definição acima já foi estudada em ambientes mais particulares, onde foram encontradas condições suficientes para

garantir que uma coleção finita de conjuntos são linearmente regular, veja por exemplo [13, 17, 34, 58]. Destacamos que em [17], os autores mostram que se a interseção de conjuntos convexos e fechados de um espaço de Hilbert C_1, C_2, \dots, C_n tem interior não vazio, então C_1, C_2, \dots, C_n são linearmente regular.

Lema 3.15. *A sequência (x_n) definida por (2) converge para $x \in \bigcap_{i=1}^N \text{Fix}(T_i)$ se, e somente se,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \bigcap_{i=1}^N \text{Fix}(T_i)) = 0.$$

Demonstração. Seja $C = \bigcap_{i=1}^N \text{Fix}(T_i)$. Para cada $\xi \in C$ e $i \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} d(x_{i+1}, \xi) &\leq d(T_{j_{i+1}}(x_i), T_{j_{i+1}}(\xi)) + d(x_{i+1}, T_{j_{i+1}}(x_i)) \\ &\leq d(x_i, \xi) + \epsilon_{i+1}. \end{aligned}$$

Somando a desigualdade acima com $i = n, \dots, n+p-1$,

$$\sum_{i=n}^{n+p-1} d(x_{i+1}, \xi) \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} d(x_i, \xi) + \sum_{i=n}^{n+p-1} \epsilon_{i+1}.$$

Isto é,

$$d(x_{n+p}, \xi) \leq d(x_n, \xi) + \sum_{i=n+1}^{n+p} \epsilon_i. \quad (3.2)$$

Pela desigualdade triangular e (3.2),

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+p}, \xi) + d(\xi, x_n) \leq 2d(x_n, \xi) + \sum_{i=n+1}^{n+p} \epsilon_i.$$

Tomando o ínfimo sobre $\xi \in C$, temos

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq 2d(x_n, C) + \sum_{i=n+1}^{n+p} \epsilon_i.$$

Sendo $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, C) = 0$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i < \infty$, segue que a sequência (x_n) é de Cauchy, e portanto converge para algum $x \in X$, sendo C fechado e $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, C) = 0$, segue que $x \in C$. \square

A seguir apresentamos uma definição de *error bound* em espaços métricos. No cenário linear, esta definição foi explorada em [45, 57] para estudar condições suficientes para garantir a convergência forte de iteradas de um operador não-expansivo para um ponto fixo.

Definição 3.16. Considere uma aplicação $T : C \subset X \rightarrow X$ com $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$. Dizemos que T admite um error bound quando para cada conjunto limitado $U \subset C$ existe uma função $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tal que $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$ e

$$d(x, \text{Fix}(T)) \leq f(d(x, Tx)), \quad \forall x \in U. \quad (3.3)$$

Exemplo 3.17. Por definição, a projeção sobre conjuntos convexos e fechados admite um error bound, ocorrendo a igualdade em (3.3) para $f(t) = t$.

Exemplo 3.18. Considere o espaço \mathbb{R}^2 munido da norma euclidiana e $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma rotação de ângulo θ em relação à origem, com $\theta \in (0, 2\pi)$. Note que T satisfaz um erro bound, com $f(t) = [2(1 - \cos \theta)]^{-\frac{1}{2}}t$. De fato

$$d(x, \text{Fix}(T)) = d(x, \{0\}) = \|x\|.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} d(x, Tx)^2 &= \|x\|^2 + \|Tx\|^2 - 2\|Tx\|\|x\| \cos(\theta) \\ &= 2(1 - \cos \theta)\|x\|^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$d(x, \text{Fix}(T)) = [2(1 - \cos \theta)]^{-\frac{1}{2}}d(x, Tx).$$

Para o próximo resultado, consideraremos o método (2) com a sequência (j_n) periódica, isto é, $(1, 2, \dots, N, 1, 2, \dots, N, \dots)$.

Teorema 3.19. Seja (X, d) um espaço métrico completo e $T_1, \dots, T_N : X \rightarrow X$ operadores satisfazendo um error bound, a propriedade (P) e $F := \bigcap_{i=1}^N \text{Fix}(T_i) \neq \emptyset$. Se os conjuntos $\text{Fix}(T_1), \text{Fix}(T_2), \dots, \text{Fix}(T_N)$ são limitadamente regular, então a sequência (x_n) definida por (2) converge para $x^* \in F$.

Demonstração. Dado $\xi \in F$, segue da propriedade (P) que existem $l > 1$ e $\beta > 0$ tais que

$$\begin{aligned} \beta d(T_{j_{n+1}}(x_n), x_n)^l &\leq d(x_n, \xi)^l - d(T_{j_{n+1}}(x_n), \xi)^l \\ &\leq d(x_n, \xi)^l - [d(x_{n+1}, \xi) - d(T_{j_{n+1}}(x_n), x_{n+1})]^l. \end{aligned}$$

Para $n_k^i = kN + i$, temos $j_{n_k^i} = i$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por (3.4), tem-se

$$\beta d(T_i(x_{n_k^i}), x_{n_k^i})^l \leq d(x_{n_k^i}, \xi)^l - [d(x_{n_k^i+1}, \xi) - d(T_{j_{n_k^i+1}}(x_{n_k^i}), x_{n_k^i+1})]^l.$$

Seja $\mathcal{C}_k = d(x_{n_k^i+1}, \xi) - d(T_{j_{n_k^i+1}}(x_{n_k^i}), x_{n_k^i+1})$. Daí,

$$\begin{aligned} \beta d(T_i(x_{n_k^i}), x_{n_k^i})^l &\leq d(x_{n_k^i+1}, \xi)^l - \mathcal{C}_k^l \\ &= (d(x_{n_k^i+1}, \xi) - \mathcal{C}_k) \left(\sum_{s=1}^{l-1} d(x_{n_k^i+1}, \xi)^{l-s} \mathcal{C}_k^s \right). \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} |d(x_{n_k^i+1}, \xi) - \mathcal{C}_k| &= |d(x_{n_k^i+1}, \xi) - d(x_{n_k^i+1}, \xi) + d(T_{j_{n_k^i+1}}(x_{n_k^i}), x_{n_k^i+1})| \\ &= d(T_{j_{n_k^i+1}}(x_{n_k^i}), x_{n_k^i+1}) \\ &\leq d(x_{n_k^i}, x_{n_k^i+1}) + \epsilon_{n_k^i+1}. \end{aligned}$$

Segue do Teorema 3.8 que

$$\lim_{b_k \rightarrow \infty} d(x_{n_k^i+1}, \xi) - \mathcal{C}_k = 0.$$

Pela Proposição 1.90, as sequências $(d(x_{n_k^i}, \xi))$ e (\mathcal{C}_k) são limitadas. Assim, segue da desigualdade (3.5) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(T_i(x_{n_k^i}), x_{n_k^i})^l = 0.$$

Como T_i admite um *error bound*, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n_k^i}, \text{Fix}(T_i))^l = 0.$$

Mostraremos agora que $\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{kN+j}, \text{Fix}(T_i)) = 0$ para todo $j \in \{1, 2, \dots, N\}$. De fato, dado $u \in \text{Fix}(T_i)$ e $j < i$, temos

$$d(x_{kN+j}, u) \leq \sum_{s=j}^{s=i-1} d(x_{kN+s}, x_{kN+(s+1)}) + d(x_{kN+i}, u). \quad (3.6)$$

E para $j > i$,

$$d(x_{kN+j}, u) \leq d(x_{kN+i}, u) + \sum_{s=i}^{s=j-1} d(x_{kN+s}, x_{kN+(s+1)}). \quad (3.7)$$

Tomando o ínfimo sobre $u \in \text{Fix}(T_i)$ nas desigualdades (3.6) e (3.7), obtemos as desigualdades (3.8) e (3.9) para $j < i$ e $j > i$ respectivamente

$$d(x_{kN+j}, \text{Fix}(T_i)) \leq \sum_{s=j}^{s=i-1} d(x_{kN+s}, x_{kN+(s+1)}) + d(x_{kN+i}, \text{Fix}(T_i)), \quad (3.8)$$

$$d(x_{kN+j}, \text{Fix}(T_i)) \leq d(x_{kN+i}, \text{Fix}(T_i)) + \sum_{s=i}^{s=j-1} d(x_{kN+s}, x_{kN+(s+1)}). \quad (3.9)$$

Sendo $\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{kN+i}, \text{Fix}(T_i)) = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$, segue de (3.8) e (3.9) que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{kN+j}, \text{Fix}(T_j)) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Assim $\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_n, \text{Fix}(T_i)) = 0$ para $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{d(x_n, \text{Fix}(T_1)), \dots, d(x_n, \text{Fix}(T_N))\} = 0.$$

Como $\text{Fix}(T_1), \dots, \text{Fix}(T_N)$ são limitadamente regular, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \bigcap_{i=1}^r \text{Fix}(T_i)) = 0.$$

Pelo Lema 3.15, concluímos que a sequência (x_n) converge para algum $x^* \in \bigcap_{i=1}^r \text{Fix}(T_i)$. □

Corolário 3.20. *Seja (X, d) um espaço p -uniformemente convexo e suponha que $T_1, \dots, T_N : X \rightarrow X$ são operadores firmemente não-expansivos satisfazendo um error bound e $F := \bigcap_{i=1}^N \text{Fix}(T_i) \neq \emptyset$. Se os conjuntos $\text{Fix}(T_1), \text{Fix}(T_2), \dots, \text{Fix}(T_N)$ são limitadamente regular, então a sequência (x_n) definida por (2) converge para $x^* \in F$.*

Demonstração. Segue do Exemplo 3.5 e Teorema 3.19. □

Corolário 3.21. *Seja X um espaço $\text{CAT}(0)$ e considere conjuntos convexos e fechados C_1, C_2, \dots, C_N limitadamente regular e com $C_1 \cap \dots \cap C_N \neq \emptyset$. Então a sequência (x_n) definida por (3.1) converge para um ponto de $C = \bigcap_{i=1}^N C_i$.*

Demonstração. De fato, pelo Exemplo 3.6 para cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ a projeção P_i satisfaz a propriedade (P). Além disso, a aplicação projeção naturalmente satisfaz um *error bound*, com $f(t) = t$. Portanto, a convergência segue do Teorema 3.19. □

Sabemos que a projeção sobre conjuntos convexos e fechados em espaços $\text{CAT}(\kappa)$ em geral não é não-expansiva. Mesmo assim, o corolário a seguir garante a convergência forte do método de projeções alternadas em $\text{CAT}(\kappa)$, com $\text{diam}(X) < \pi/(2\sqrt{\kappa})$, pois nesses espaços a projeção sobre conjuntos convexos e fechados satisfaz a propriedade (P), como mostrado no Exemplo 3.7.

Corolário 3.22. *Seja X um espaço $CAT(\kappa)$ com $\text{diam}(X) < \pi/(2\sqrt{\kappa})$ para $\kappa > 0$ e considere conjuntos convexos e fechados C_1, C_2, \dots, C_N limitadamente regular e com $C_1 \cap \dots \cap C_N \neq \emptyset$. Então a sequência (x_n) definida por (3.1) converge para um ponto de $C = \bigcap_{i=1}^N C_i$.*

Observação 3.23. *No Teorema 3.19, a hipótese da aplicação T_i ($i = 1, 2, \dots, N$) satisfazer um error bound não pode ser omitida sem acrescentar outras hipóteses; de fato mesmo no caso de uma única aplicação firmemente não-expansiva T definida em espaços de Banach p -uniformemente convexo o método (2) converge fracamente, como mostrado em [25, Teorema 15.1], mas em geral não ocorre a convergência forte, veja [36].*

A hipótese dos conjuntos $\text{Fix}(T_1), \dots, \text{Fix}(T_N)$ serem limitadamente regular também não pode ser omitida, pois a convergência forte não ocorre mesmo no caso em que $N = 2$ e as aplicações T_1, T_2 são projeções sobre subconjuntos convexos e fechados de um espaço de Hilbert, veja [15, 39, 41, 46].

3.5 Taxa de convergência

Nesta seção vamos estudar a taxa de convergência da sequência gerada pelo método (2) no caso exato, isto é, $\epsilon_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, os conjuntos dos pontos fixos das aplicações T_i são limitadamente linearmente regular e cada T_i satisfaz um *error bound* da forma $f(t) = \alpha t^\theta$ para algum $\alpha > 0$ e $\theta > 0$. Em particular, obteremos a taxa de convergência do método de projeções alternadas em $CAT(0)$ e $CAT(\kappa)$ para $\kappa > 0$.

Teorema 3.24. *Seja (X, d) um espaço métrico completo e aplicações $T_1, \dots, T_N : X \rightarrow X$ satisfazendo um error bound da forma $f(t) = \alpha t^\theta$ com $\alpha > 0$ e $\theta > 0$, a propriedade (P) com parâmetro l e β e $F := \bigcap_{i=1}^N \text{Fix}(T_i) \neq \emptyset$. Suponha que os conjuntos $\text{Fix}(T_1), \text{Fix}(T_2), \dots, \text{Fix}(T_N)$ são limitadamente linearmente regular e seja (x_n) é a sequência gerada pelo método (2) com $\epsilon_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

a) *Se $\theta \geq 1$, então (x_n) converge linearmente para F , isto é, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d(x_{n+1}, F) \leq [1 - \beta(\alpha\eta)^{-l/\theta}]^{\frac{1}{l}} d(x_n, F), \quad \forall n > n_0.$$

(b) *Se $0 < \theta < 1$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d(x_{n+1}, F) \leq [1 - \beta(\alpha\eta)^{-l/\theta} d(x_n, F)^{l/\theta - 1}]^{\frac{1}{l}} d(x_n, F) \quad \forall n > n_0.$$

Demonstração. Pela propriedade (P), para cada $u \in F$, temos

$$\beta d^l(T_{j_{n+1}}(x_n), x_n) \leq d^l(x_n, u) - d^l(T_{j_{n+1}}(x_n), u). \quad (3.10)$$

Como T_1, \dots, T_N admite um *error bound* dado por $f(t) = \alpha t^\theta$, com $\theta > 0$, temos

$$d(x_n, \text{Fix}(T_{j_{n+1}})) \leq f(d(x_n, T_{j_{n+1}}(x_n))) = \alpha \cdot d(x_n, T_{j_{n+1}}(x_n))^\theta.$$

Elevando ambos os lados da desigualdade acima por $\frac{1}{\theta}$, obtemos

$$\alpha^{-1/\theta} d(x_n, \text{Fix}(T_{j_{n+1}}))^{1/\theta} \leq d(x_n, T_{j_{n+1}}(x_n))^l. \quad (3.11)$$

Sendo T_1, T_2, \dots, T_N limitadamente linearmente regular, existe $\eta > 0$ tal que

$$(\alpha\eta)^{-1/\theta} d(x_n, F)^{1/\theta} \leq \alpha^{-1/\theta} d(x_n, \text{Fix}(T_{j_{n+1}}))^{1/\theta} \quad (3.12)$$

Por (3.11) e (3.12), temos

$$(\alpha\eta)^{-1/\theta} d(x_n, F)^{1/\theta} \leq d(x_n, T_{j_{n+1}}(x_n))^l.$$

Segue de (3.10) que

$$\beta(\alpha\eta)^{-1/\theta} d(x_n, F)^{1/\theta} \leq d^l(x_n, u) - d^l(x_{n+1}, u), \quad \forall u \in F.$$

Logo,

$$\beta(\alpha\eta)^{-1/\theta} d(x_n, F)^{1/\theta} \leq d^l(x_n, F) - d^l(x_{n+1}, F). \quad (3.13)$$

Pelo Teorema 3.19 tem-se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, F) = 0.$$

Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, F) < 1$ para $n \geq n_0$. Como $\theta \geq 1$, temos $\frac{1}{\theta} \leq l$, assim

$$d(x_n, F)^{1/\theta} \geq d(x_n, F)^l, \quad \forall n \geq n_0$$

Segue de (3.13) que

$$\beta(\alpha\eta)^{-1/\theta} d(x_n, F)^l \leq d^l(x_n, F) - d^l(x_{n+1}, F), \quad \forall n > n_0.$$

Assim,

$$d(x_{n+1}, F) \leq [1 - \beta(\alpha\eta)^{-1/\theta}]^{\frac{1}{l}} d(x_n, F), \quad \forall n > n_0.$$

Nesse caso, concluímos que (x_n) converge linearmente para F .

Para $0 < \theta < 1$, segue de (3.13) que

$$d(x_{n+1}, F) \leq \left[1 - \beta(\alpha\eta)^{-1/\theta} d(x_n, F)^{1/\theta-1} \right]^{\frac{1}{\theta}} d(x_n, F).$$

Considerando as aplicações T_i sendo projeções sobre subconjuntos convexos e fechados de um espaço $CAT(0)$, obtemos a seguinte taxa de convergência para o método das projeções alternadas em $CAT(0)$, que generaliza a taxa de convergência obtida por Bačák et al. [8] para N conjuntos. \square

Corolário 3.25. *Seja X um espaço $CAT(0)$ e considere conjuntos convexos e fechados C_1, C_2, \dots, C_N limitadamente linearmente regular com parâmetro $\eta > 0$ e com $C_1 \cap \dots \cap C_N \neq \emptyset$. Então a sequência (x_n) definida por (3.1) (com $\epsilon_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$) converge linearmente para um ponto de $C = \bigcap_{i=1}^N C_i$, mais especificamente*

$$d(x_{n+1}, C) \leq \sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}} d(x_n, C).$$

Demonstração. De fato, pelo Exemplo 3.6 cada projeção P_j satisfaz a propriedade (P) com $\beta = 1$ e admite um *error bound* da forma $f(t) = t$, isto é, $\alpha = 1$ e $\theta = 1$. Além disso, $\text{Fix}(P_1) = C_1, \dots, \text{Fix}(P_N) = C_N$ são limitadamente linearmente regular. \square

Outra consequência do Teorema 3.24 é a taxa de convergência em espaços $CAT(\kappa)$ com $\text{diam}(X) < \pi/(2\sqrt{\kappa})$.

Corolário 3.26. *Seja X um espaço $CAT(\kappa)$ com $\text{diam}(X) < \pi/(2\sqrt{\kappa})$ para $\kappa > 0$ e considere conjuntos convexos e fechados C_1, C_2, \dots, C_N limitadamente linearmente regular e com $C_1 \cap \dots \cap C_N \neq \emptyset$. Então a sequência (x_n) definida por (3.1) (com $\epsilon_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$) converge linearmente para um ponto de $C = \bigcap_{i=1}^N C_i$, mais especificamente*

$$d(x_{n+1}, C) \leq \sqrt{1 - \frac{(\pi - 2\sqrt{\kappa}\epsilon)\tan(\sqrt{\kappa}\epsilon)}{2\eta^2}} d(x_n, C),$$

para todo ϵ satisfazendo $0 < \epsilon \leq \pi/(2\sqrt{\kappa}) - \text{diam}(X)$.

Demonstração. De fato, no Exemplo 3.7 vimos que a projeção sobre subconjuntos convexos e fechados de um espaço $CAT(\kappa)$ satisfaz a propriedade (P) com $\beta = \frac{c}{2}$, onde $c = (\pi - 2\sqrt{\kappa}\epsilon)\tan(\sqrt{\kappa}\epsilon)$ com $0 < \epsilon \leq \pi/(2\sqrt{\kappa}) - \text{diam}(X)$. \square

Considerações Finais

Estudamos a convergência forte do método das projeções alternadas e mostramos que quando se trata de projeções sobre subespaços de um espaço de Hilbert o método converge fortemente para quase todas as ordens (j_n) (segundo a medida de Bernoulli) em que as projeções são aplicadas. No entanto, esse resultado não pode ser generalizado para qualquer ordem (j_n) sem hipóteses adicionais, veja [41]. Em particular, generalizamos o principal resultado obtido por Sakai [55] para uma classe de sequências com medida total que contém as sequências quase-periódicas e respondemos a um problema aberto de longa data [1, 60]: “quais são as sequências (j_n) tais que a sequência (x_n) converge fortemente independente do ponto de partida e dos subespaços fechados?”. Quando as projeções ocorrem sobre conjuntos convexos e fechados de um espaço de Hilbert, mesmo no caso $N = 2$, em geral o método não converge fortemente, veja [39], mas em [4] os autores mostram a convergência fraca do método quando as projeções são aplicadas na ordem periódica. Em [22], Bruck considerou o caso de três conjuntos convexos, fechados e simétricos de um espaço de Hilbert e mostrou que nesse caso a sequência gerada pelas iterações randômicas das projeções sobre estes convexos converge fracamente. Nesse contexto, pretendemos analisar, em trabalhos futuros, se em geral a convergência fraca ocorre para todas as ordens (j_n) e caso a resposta seja negativa, construir um exemplo para o qual não ocorra a convergência fraca, assim como estudar uma grande classe de sequências (j_n) de modo que a convergência fraca seja garantida.

Referências Bibliográficas

- [1] ALEYNER, A., AND REICH, S. Random products of quasi-nonexpansive mappings in Hilbert space. *J. Convex Anal* 16 (2009), 633–640.
- [2] AMEMIYA, I., AND ANDÔ, T. Convergence of random products of contractions in Hilbert space. *Acta Sci. Math.(Szeged)* 26, 3-4 (1965), 239–244.
- [3] ARIZA-RUIZ, D., LEUȘTEAN, L., AND LÓPEZ-ACEDO, G. Firmly nonexpansive mappings in classes of geodesic spaces. *Transactions of the American Mathematical Society* 366, 8 (2014), 4299–4322.
- [4] ARIZA-RUIZ, D., LÓPEZ-ACEDO, G., AND NICOLAE, A. The asymptotic behavior of the composition of firmly nonexpansive mappings. *Journal of Optimization Theory and Applications* 167, 2 (2015), 409–429.
- [5] BAČÁK, M. The proximal point algorithm in metric spaces. *Israel journal of mathematics* 194, 2 (2013), 689–701.
- [6] BAČÁK, M. Computing medians and means in Hadamard spaces. *SIAM journal on optimization* 24, 3 (2014), 1542–1566.
- [7] BAČÁK, M. Convex analysis and optimization in Hadamard spaces. In *Convex Analysis and Optimization in Hadamard Spaces*. de Gruyter, 2014.
- [8] BAČÁK, M., AND REICH, S. The asymptotic behavior of a class of nonlinear semigroups in Hadamard spaces. *Journal of fixed point theory and applications* 16, 1 (2014), 189–202.
- [9] BAČÁK, M., AND REICH, S. The asymptotic behavior of a class of nonlinear semigroups in Hadamard spaces. *Journal of fixed point theory and applications* 16, 1 (2014), 189–202.

- [10] BALL, K., CARLEN, E. A., AND LIEB, E. H. Sharp uniform convexity and smoothness inequalities for trace norms. In *Inequalities*. Springer, 2002, pp. 171–190.
- [11] BANERT, S. Backward–backward splitting in Hadamard spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 414, 2 (2014), 656–665.
- [12] BAUSCHKE, H. H., AND BORWEIN, J. M. On projection algorithms for solving convex feasibility problems. *SIAM review* 38, 3 (1996), 367–426.
- [13] BAUSCHKE, H. H., BORWEIN, J. M., AND LI, W. Strong conical hull intersection property, bounded linear regularity, Jameson property (g), and error bounds in convex optimization. *Mathematical Programming* 86, 1 (1999), 135–160.
- [14] BAUSCHKE, H. H., COMBETTES, P. L., AND REICH, S. The asymptotic behavior of the composition of two resolvents. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 60, 2 (2005), 283–301.
- [15] BAUSCHKE, H. H., MATOUŠKOVÁ, E., AND REICH, S. Projection and proximal point methods: convergence results and counterexamples. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 56, 5 (2004), 715–738.
- [16] BENTO, G. C., AND MELO, J. G. Subgradient method for convex feasibility on Riemannian manifolds. *Journal of Optimization Theory and Applications* 152, 3 (2012), 773–785.
- [17] BOLTE, J., NGUYEN, T. P., PEYPOUQUET, J., AND SUTER, B. W. From error bounds to the complexity of first-order descent methods for convex functions. *Mathematical Programming* 165, 2 (2017), 471–507.
- [18] BOTELHO, G., PELLEGRINO, D., AND TEIXEIRA, E. *Fundamentos de análise funcional*. SBM, 2012.
- [19] BREGMAN, L. M. Finding the common point of convex sets by the method of successive projection. In *Doklady Akademii Nauk* (1965), vol. 162, Russian Academy of Sciences, pp. 487–490.
- [20] BRIDSON, M. R., AND HAEFLIGER, A. *Metric spaces of non-positive curvature*, vol. 319. Springer Science & Business Media, 2013.

- [21] BRUCK, R. Nonexpansive projections on subsets of Banach spaces. *Pacific Journal of Mathematics* 47, 2 (1973), 341–355.
- [22] BRUCK, R. E. Random products of contractions in metric and Banach spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 88, 2 (1982), 319–332.
- [23] BRUCK, R. E., AND REICH, S. Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces. *Houston J. Math* 3, 4 (1977), 459–470.
- [24] BURACHIK, R., GRAÑA DRUMMOND, L., IUSEM, A. N., AND SVAITER, B. F. Full convergence of the steepest descent method with inexact line searches. *Optimization* 32, 2 (1995), 137–146.
- [25] BUSHELL, P. Uniform convexity, hyperbolic geometry, and nonexpansive mappings (pure and applied mathematics: A series of monographs & textbooks, 83) by K. Goebel and S. Reich: pp. 192. SFr. 96.-.(Marcel Dekker Inc, USA, 1984), 1985.
- [26] CASTRO, A. Teoria da medida. *Projeto Euclides. IMPA* (2004).
- [27] CENSOR, Y., AND LENT, A. Cyclic subgradient projections. *Mathematical Programming* 24, 1 (1982), 233–235.
- [28] CENSOR, Y., ZENIOS, S. A., ET AL. *Parallel optimization: Theory, algorithms, and applications*. Oxford University Press on Demand, 1997.
- [29] CHEEGER, J., EBIN, D. G., AND EBIN, D. G. *Comparison theorems in Riemannian geometry*, vol. 9. North-Holland Amsterdam, 1975.
- [30] COMBETTES, P. L., AND TRUSSELL, H. J. Method of successive projections for finding a common point of sets in metric spaces. *Journal of optimization theory and applications* 67, 3 (1990), 487–507.
- [31] CRUZ NETO, J., MELO, I., SOUSA, P., AND SOUZA, J. On the relationship between the Kurdyka-Lojasiewicz property and error bounds on Hadamard manifolds.
- [32] DO CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008.

- [33] ESPÍNOLA, R., AND FERNÁNDEZ-LEÓN, A. CAT(k)-spaces, weak convergence and fixed points. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 353, 1 (2009), 410–427.
- [34] FENG, S., XIANG, W., AND MA, Y. The linear regular of infinitely many sets. In *2011 Fourth International Symposium on Computational Intelligence and Design* (2011), vol. 2, IEEE, pp. 64–66.
- [35] FERREIRA, O., AND OLIVEIRA, P. Proximal point algorithm on Riemannian manifolds. *Optimization* 51, 2 (2002), 257–270.
- [36] GENEL, A., AND LINDENSTRAUSS, J. An example concerning fixed points. *Israel Journal of Mathematics* 22, 1 (1975), 81–86.
- [37] HALMOS, P. R. *Measure theory*, vol. 18. Springer, 2013.
- [38] HALPERIN, I. The product of projection operators. *Acta Sci. Math.(Szeged)* 23, 1 (1962), 96–99.
- [39] HUNDAL, H. S. An alternating projection that does not converge in norm. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 57, 1 (2004), 35–61.
- [40] JOST, J. Equilibrium maps between metric spaces. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 2, 2 (1994), 173–204.
- [41] KOPECKÁ, E. Spokes, mirrors and alternating projections. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 68, 6 (2008), 1759–1764.
- [42] KOPECKÁ, E., AND PASZKIEWICZ, A. Strange products of projections. *Israel Journal of Mathematics* 219, 1 (2017), 271–286.
- [43] LANG, S. *Fundamentals of differential geometry*, vol. 191. Springer Science & Business Media, 2012.
- [44] LI, C., LÓPEZ, G., AND MARTÍN-MÁRQUEZ, V. Monotone vector fields and the proximal point algorithm on Hadamard manifolds. *Journal of the London Mathematical Society* 79, 3 (2009), 663–683.

- [45] LUKE, D. R., THAO, N. H., AND TAM, M. K. Implicit error bounds for Picard iterations on Hilbert spaces. *Vietnam Journal of Mathematics* 46, 2 (2018), 243–258.
- [46] MATOUSKOVA, E., AND REICH, S. The Hundal example revisited. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis* 4, 3 (2003), 411–428.
- [47] MELO, Í. D. L., DA CRUZ NETO, J. X., AND DE BRITO, J. M. M. Strong convergence of alternating projections. *Journal of Optimization Theory and Applications* (2022), 1–19.
- [48] NAOR, A., AND SILBERMAN, L. Poincaré inequalities, embeddings, and wild groups. *Compositio Mathematica* 147, 5 (2011), 1546–1572.
- [49] NICOLAE, A. Asymptotic behavior of averaged and firmly nonexpansive mappings in geodesic spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 87 (2013), 102–115.
- [50] OHTA, S.-I. Convexities of metric spaces. *Geometriae Dedicata* 125, 1 (2007), 225–250.
- [51] PETERSEN, K. E. *Ergodic theory*, vol. 2. Cambridge University Press, 1989.
- [52] PRAGER, M. On a principle of convergence in a Hilbert space. *Czech. Math. J* 10 (1960), 271–282.
- [53] REICH, S. Extension problems for accretive sets in Banach spaces. *Journal of Functional Analysis* 26, 4 (1977), 378–395.
- [54] REICH, S., AND SHAFRIR, I. Nonexpansive iterations in hyperbolic spaces. *Nonlinear analysis: theory, methods & applications* 15, 6 (1990), 537–558.
- [55] SAKAI, M. Strong convergence of infinite products of orthogonal projections in hilbert space. *Applicable Analysis* 59, 1-4 (1995), 109–120.
- [56] SAKAI, T. *Riemannian geometry*, vol. 149. American Mathematical Soc., 1996.
- [57] SENTER, H., AND DOTSON, W. Approximating fixed points of nonexpansive mappings. *Proceedings of the American Mathematical Society* 44, 2 (1974), 375–380.

- [58] SONG, W., AND ZANG, R. Bounded linear regularity of convex sets in banach spaces and its applications. *Mathematical programming* 106, 1 (2006), 59–79.
- [59] SUPARATULATORN, R., CHOLAMJIAK, P., AND SUANTAI, S. On solving the minimization problem and the fixed-point problem for nonexpansive mappings in CAT(0) spaces. *Optimization methods and software* 32, 1 (2017), 182–192.
- [60] TSENG, P. On the convergence of the products of firmly nonexpansive mappings. *SIAM Journal on Optimization* 2, 3 (1992), 425–434.
- [61] TSENG, P., AND BERTSEKAS, D. P. Relaxation methods for problems with strictly convex separable costs and linear constraints. *Mathematical Programming* 38, 3 (1987), 303–321.
- [62] UDRISTE, C. *Convex Functions and Optimization Methods on Riemannian Manifolds*, vol. 297. Springer Science & Business Media, 1994.
- [63] VIANA, M., AND OLIVEIRA, K. *Foundations of ergodic theory*. No. 151. Cambridge University Press, 2016.
- [64] VON NEUMANN, J. *Functional operators: The geometry of orthogonal spaces*, vol. 2. Princeton University Press, 1951.
- [65] WALTER, R. On the metric projection onto convex sets in Riemannian spaces. *Archiv der Mathematik* 25, 1 (1974), 91–98.
- [66] WANG, X., LI, C., WANG, J., AND YAO, J.-C. Linear convergence of subgradient algorithm for convex feasibility on Riemannian manifolds. *SIAM Journal on Optimization* 25, 4 (2015), 2334–2358.
- [67] WANG, X., LI, C., AND YAO, J.-C. Subgradient projection algorithms for convex feasibility on Riemannian manifolds with lower bounded curvatures. *Journal of Optimization Theory and Applications* 164, 1 (2015), 202–217.
- [68] YOULA, D. C., AND WEBB, H. Image restoration by the method of convex projections: Part 1-theory. *IEEE transactions on medical imaging* 1, 2 (1982), 81–94.