Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

Ítalo André Medeiros Leite

O USO DAS MÉDIAS PITAGÓRICAS NO MERCADO DE AÇÕES: UMA FERRAMENTA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DA EDUCAÇÃO FINANCEIRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Teresina - 2022

PROFMAT

Ítalo André Medeiros Leite

Dissertação de Mestrado:

O USO DAS MÉDIAS PITAGÓRICAS NO MERCADO DE AÇÕES: UMA FERRAMENTA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DA EDUCAÇÃO FINANCEIRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação submetida à Coordenaçao do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - Profmat, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática na modalidade profissional.

Orientador:
Prof. Dr. Roger Peres de Moura

Teresina - 2022

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas da UFPI – SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

L533u Leite, Ítalo André Medeiros.
O uso das médias pitagóricas no mercado de ações: uma ferramenta para o ensino e aprendizagem da educação financeira na educação básica / Ítalo André Medeiros Leite. – 2022.
104 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT, Teresina, 2022.
"Orientador: Prof. Dr. Roger Peres de Moura".

1. Matemática (Educação Básica). 2. Educação Financeira. 3. Mercado de Ações. I. Moura, Roger Peres de. II.Título.

CDD 510.7

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes. CRB/3-1461

Universidade Federal do Piauí - UFPI, Centro de Ciência da Natureza - CCN, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Mestrado Profissional em Matemática. Cep 64049-550 - Teresina, PI.

Ítalo André Medeiros Leite

O USO DAS MÉDIAS PITAGÓRICAS NO MERCADO DE AÇÕES: UMA FERRAMENTA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DA EDUCAÇÃO FINANCEIRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação submetida à banca examinadora abaixo discriminada em defesa pública e aprovada em 14/03/2022.

BANCA EXAMINADORA

Roger Peres de Moura (Orientador)
Universidade Federal do Piauí

Gleison do N Santos

Gleison do Nascimento Santos
Universidade Federal do Piauí

Kelton Silva Bezerra

Kelton Silva Bezerra
Universidade Federal do Piauí

Documento assinado digitalmente
gov.br
Ailton Campos do Nascimento
Data: 23/05/2022 20:54:04-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Ailton Campos do Nascimento
Universidade Federal do Ceará

Teresina - 2022

Dedico esta dissertação à minha família e a Deus.

Agradecimentos

É chegada a hora dos agradecimentos, e iniciamos agradecendo, primeiramente a Deus, por todas as coisas grandiosas que Ele tem realizado e ainda realizará em minha vida. Perceber a sua misericórdia e a sua presença nos caminhos que tenho trilhado é uma das razões que me faz ter a certeza de que, apesar de tudo, de bom ou de ruim, Ele sempre estará ao meu lado. Obrigado, meu Deus!

Aos meus pais, Jeferson e Leila, por todo o apoio e incentivo para que eu chegasse até aqui. Meu pai foi quem me propiciou os primeiros conhecimentos acerca do mercado financeiro e, por meio dele, desenvolvi uma grande paixão pelo que faço hoje. Obrigado pai! E minha mãe foi meu porto seguro, foi quem passou dias e noites comigo, ao meu lado, incentivando-me a não desistir e me apoiando em todos os momentos, mesmo nos mais difíceis. Obrigado por tudo mãe, principalmente por acreditar em mim.

À minha irmã, Dalila, minha confidente. Você é um exemplo para mim.

Ao meu cunhado, Francisco Filho, és para mim como um irmão.

À minha querida Morgana, por ter me dado todo apoio quando eu mais precisei. Você tem um lugar especial no meu lado esquerdo do peito. Muito obrigado por tudo!

Ao meu amigo Lucas, meu parceiro da Matemática desde o tempo da graduação. Muito obrigado meu amigo por todo o apoio durante esta caminhada.

Ao meu orientador, Prof. Doutor Roger Peres de Moura, por todo o conhecimento mediado, por toda a paciência, por acreditar que eu seria capaz e por não desistir de mim. Professor Roger, você é um exemplo a ser seguido. E também ao Prof. Doutor Kelton Bezerra, um grande mestre, principalmente por ter me inspirado e me incentivado à iniciação científica. Meu muito obrigado!

A todos os professores do Profmat, todos grandes professores. Vocês serão sempre uma inspiração para mim.

Aos meus colegas de turma, especialmente ao Dalton, ao Rodrigo e ao Gerson, toda a minha admiração e respeito a cada um de vocês. Muito obrigado por todo o apoio nesse processo. Sem vocês teria tudo sido muito mais difícil.

A todos que direta ou indiretamente auxiliaram na realização desta pesquisa. Os meus agradecimentos!

"*Eu quero colocar uma marca no universo*".

Steve Jobs.

Resumo

Este estudo busca compreender a importância do ensino da Educação Financeira (EF) como tema obrigatório na educação básica, uma vez que a nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada pelo Ministério da Educação em 2017, estabeleceu a Educação Financeira como um dos temas transversais que deve ser inserido nos currículos de todo o País. Nesse sentido, foi delineado como problema de pesquisa: quais as contribuições da educação financeira para educação básica, considerando os conteúdos relacionados ao mercado de ações e a aplicação das médias pitagóricas na resolução de problemas de ordem financeira? Para responder à questão de pesquisa, foi definido como objetivo geral analisar a importância da educação financeira para educação básica, tendo como base a aplicação das médias pitagóricas no mercado de ações. A justifica deve-se à necessidade que emerge da própria sociedade que precisa aprender como administrar o dinheiro, como realizar investimentos, como lidar com o endividamento e frustrações econômicas, em um cenário de avanço da digitalização dos bancos e demais instrumentos econômicos virtuais. Quanto à metodologia, foi realizada a revisão integrativa, caracterizada como uma abordagem metodológica referente a revisões que permitem maior compreensão do fenômeno estudado. Tem-se como principais resultados que a função da Educação Financeira no sistema de ensino não se restringe apenas a uma unidade curricular, no caso a matemática, vai muito além disso, constitui-se como tema transversal e transdisciplinar, possibilitando construção de conhecimentos para tomada de decisões assertivas e mais vantajosas do ponto de vista financeiro.

Palavras-chave: Educação Financeira; Ensino da Matemática; Educação Básica; Mercado de Ações.

Abstract

This study seeks to understand the importance of teaching Financial Education (FE) as a mandatory topic in basic education, since the new National Common Curricular Base (BNCC), approved by the Ministry of Education in 2017, established Financial Education as one of the themes that should be inserted at the curricula throughout of the country. In this sense, it was outlined as a research problem: what are the contributions of financial education to basic education, considering the contents related to the stock market and the application of pythagorean averages in solving problems financially? To answer the research question, the general objective was defined to analyze the importance of financial education for basic education, based on the application of Pythagorean averages in the stock market. The justification is due the lack that emerges from society itself, which needs to learn how to manage money, how to make investments, how to deal with indebtedness and economic frustrations, in a scenery of advancing digitalization of banks and other virtual economic instruments. As for the methodology, an integrative review was carried out, characterized as a methodological approach referring to review that allow a greater understanding of the phenomenon studied. The main results are that the role of Financial Education in the education system is not restricted to just one curricular unit, in this case mathematics, goes far beyond that, it constitutes a transversal and transdisciplinary theme, enabling the construction of knowledge for taking of assertive and more advantageous decisions from a financial point of view.

Keywords : Financial Education; Teaching Mathematics; Basic Education; Stock Market.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Este estudo busca compreender a importância do ensino da Matemática Financeira (EF) como tema obrigatório na educação básica, uma vez que a nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada pelo Ministério da Educação em 2017, estabeleceu a Educação Financeira como um dos temas transversais que deve ser inserido nos currículos de todo o País. Assim, com a nova determinação, essa temática passa a fazer parte da relação de assuntos que devem ser incorporados às propostas pedagógicas de estados e municípios brasileiros.

De acordo com dados de 2018 do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA), da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), o Brasil é apontado como o quarto pior país em competência financeira de jovens, dentre os 20 países analisados, ficando à frente apenas do Peru, Geórgia e Indonésia, sendo que esta posição pode ser considerada um avanço quando comparada com o resultado de 2015, em que o Brasil ocupou a última colocação nesta mesma pesquisa (STRICKLAND, 2021). Entendemos que esses índices inexpressivos têm impulsionado o Ministério da Educação a articular esforços no sentido de mudar essa realidade, a exemplo do programa de capacitação e incentivo à educação financeira oferecido para professores, em parceria com a Comissão de Valores Imobiliários (CVM), objetivando capacitar 500 mil docentes do 9º ano do ensino fundamental e do 1º ano do ensino médio de escolas públicas municipais, estaduais e militares de todo o país, até 2023, por meio de cursos gratuitos, em plataforma on-line, possibilitando a difusão de conhecimentos específicos junto a esses profissionais, para que, por sua vez, adolescentes e jovens brasileiros tenham acesso a uma educação financeira, a partir de conteúdos como planejamento financeiro, gestão das finanças pessoais e investimentos em mercado de ações, entre outros conteúdos (BERTÃO, 2020).

Nesse sentido, merece destaque a diferença entre Matemática financeira e Educação financeira. A primeira "[...] é uma área que aplica conhecimentos matemáticos à análise de questões ligadas a dinheiro; já a segunda está voltada para a "formação de comportamentos do indivíduo em relação às finanças" (ANNUNCIATO, 2018, p. 2), de modo que esta última contribui para desenvolver no estudante a capacidade de planejar sua vida e a de sua família, bem como tomar boas decisões financeiras. A mesma autora ainda faz a ressalva de que, embora se considere e se reconheça a transversalidade e interdisciplinaridade da Educação Financeira, a sua inserção expressa no ensino fundamental só se efetiva na Base de Matemática, aparecendo como "[...] contexto para o desenvolvimento do conteúdo em quatro habilidades (uma no 5º, uma no 6º, uma no 7º e uma no 9º ano), todas ligadas a conteúdos típicos da matemática financeira, como porcentagem e cálculo de juros" (ANNUNCIATO, 2018, p. 2). Para o ensino médio, a nova Base Nacional trouxe expressamente em seu texto a "Educação financeira e o consumo em quatro das cinco áreas do conhecimento que a constituem, nas disciplinas de Língua Portuguesa, Arte, Língua Inglesa, Matemática, Geografia e História", consolidando, desse modo, a importância da transversalidade do tema (BERTÃO, 2020, p. 3).

A necessidade da articulação curricular da Educação Financeira de forma interdisciplinar e transversal com as demais áreas do conhecimento é uma discussão que tem sido pauta recorrente já há algum tempo, mesmo antes da BNCC, a qual vem sendo mobilizada principalmente depois da constituição da Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF), criada pelo Decreto Federal 7.397/2010, e renovada pelo Decreto Federal nº 10.393, de 9 de junho de 2020, que objetivou, sobretudo, "contribuir para o fortalecimento da cidadania ao fornecer e apoiar ações que ajudem a população a tomar decisões financeiras mais autônomas e conscientes". Os programas desenvolvidos pela ENEF reúnem representantes de vários órgãos e entidades governamentais, que juntos integram o Fórum Brasileiro de Educação Financeira (FBEF). Além disso, o referido decreto instituiu o Comitê Nacional de Educação Financeira (CONEF), dentro do Ministério da Fazenda, que conta com membros do Ministério da Educação (MEC), do Banco Central e de outros órgãos do governo e da sociedade civil (BRASIL, 2020).

A relevância dessa discussão é potencializada principalmente em 2020, ano de início da pandemia causada pela Covid-19, que trouxe com ela, além de um elevado índice de morbidade, uma grave crise econômica, gerando significativas taxas de desemprego e alto custo de vida, evidenciando ainda mais as desigualdades sociais e as lacunas estruturais da economia brasileira. Desse modo, faz-se necessárias medidas emergentes para mudança de cenário.

Para tanto, Strickland (2021) afirma que a educação financeira tem um papel considerável na retomada do crescimento econômico, uma vez que uma população alfabetizada financeiramente tem capacidade de realizar investimentos no mercado financeiro de forma assertiva, identificando créditos mais acessíveis, com taxas de juros mais adequadas e operações de baixo risco e mais rentáveis. Com base nessas diretrizes, constituiu-se como problema de pesquisa: quais as contribuições do ensino da matemática financeira na educação básica, considerando os conteúdos relacionados ao mercado de ações e a aplicação das médias pitagóricas na resolução de problemas de ordem financeira?

Nesse sentido, este estudo buscou, como objetivo geral, analisar a importância da educação financeira no ensino básico, tendo como base a aplicação das médias pitagóricas no mercado de ações. De forma específica, objetivamos: identificar o que dizem as pesquisas, entre os anos de 2010 e 2021, sobre educação financeira realizadas em âmbito escolar, verificando se o mercado de ações é pautado entre suas categorias de estudo; demonstrar como as médias pitagóricas contribuem para solucionar problemas de ordem financeira, uma vez que servem como uma medida-resumo de um conjunto de dados aleatórios; apresentar a descrição de um jogo voltado para a aplicação de conceitos relacionados ao mercado de ações no contexto do ensino da matemática financeira como produto final desta pesquisa de mestrado.

Vale ressaltar que, inicialmente, tínhamos traçado outros objetivos para esta pesquisa, os quais consistiam em realizar uma investigação empírica e de campo com professores de Matemática do Ensino Médio, a fim de compreender como a matemática financeira é trabalhada em sala de aula, verificando ainda se, na abordagem do conteúdo, é pautado o mercado de ações e qual a sua relação com a realidade dos discentes. No entanto, o processo de isolamento desencadeado pela pandemia, no período da pesquisa, dificultou sobremaneira o contato com os docentes, visto que estes estavam desenvolvendo as aulas por meio remoto, impossibilitando o acompanhamento e a realização das observações e a coleta de dados.

Com isso, decidimos proceder com uma pesquisa de revisão integrativa, caracterizada como uma abordagem metodológica referente a revisões que permitem maior compreensão do fenômeno estudado. Ela correlaciona dados de base teórica e empírica, propiciando análises de conceitos, métodos e propostas (WHITTEMORE, 2005). Desse modo, a revisão integrativa determina um conhecimento específico e atual sobre o objeto a ser investigado, podendo sistematizar e/ou abordar estudos independentes, mas que possuem o mesmo assunto a partir de fases distintas, se' ndo elas (BOTELHO, 2011): identificação do tema e seleção da hipótese; estabelecimento de critérios para inclusão e exclusão; definição das informações a serem extraídas dos estudos; avaliação dos estudos incluídos na revisão integrativa; interpretação dos resultados; apresentação da revisão e síntese do conhecimento adquirido.

No que se refere à justificativa deste estudo, consiste não só na determinação estabelecida pela nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC), de que, a partir de 2020, todas as escolas são obrigadas a inserirem a educação financeira como item obrigatório na matriz curricular – não podendo o conteúdo ficar restrito a uma unidade curricular específica, como, por exemplo, a "disciplina" de matemática, devendo este ser abordado de forma transversal e interdisciplinar. Esse fator é reforçado também pelo contexto econômico que o país está atravessando, de modo que a exigência de inserção curricular do conteúdo como componente obrigatório coincide com a emergência provocada pela Covid-

19, uma vez que impõe também a necessidade de se aprender como administrar o dinheiro, como realizar investimentos, como lidar com o endividamento e frustrações econômicas, em um cenário de avanço da digitalização dos bancos e da virtualização dos instrumentos econômicos.

Para melhor compreensão dos assuntos aqui abordadas, este trabalho foi dividido em cinco capítulos. Desse modo, o primeiro capítulo versou sobre os aspectos introdutórios, apresentado a contextualização da pesquisa, bem como seus principais elementos, tais como: problema, objetivos, justificativa, metodologia utilizada e organização do trabalho.

No segundo capítulo, foi apresentado o contexto histórico da matemática e do mercado de ações, abordando aspectos, conceitos e concepções das categorias pertinentes ao mercado financeiro, como, por exemplo, os principais produtos e serviços do mercado, emissores de títulos, riscos dos investimentos, garantias em renda variável, negociação na bolsa de valores, agentes do mercado, principais instituições, investimento em fundos, entre outros.

No terceiro capítulo, foi abordado o estado da arte acerca da Educação Financeira a partir de pesquisas que tiveram como campus de investigação o espaço educacional, considerando o impacto desses estudos para o ensino da matemática, buscando desvelar um cenário que denota as dificuldades, desafios e conquistas vivenciadas por professores e alunos nos mais diversos estados e escolas brasileiras.

No quarto capítulo, foram apresentadas as médias pitagóricas: aritmética, geométrica e harmônica. Nas demonstrações da primeira, foram trabalhadas as medidas de tendência central, definições, desvio médio, propriedades, vantagens e desvantagens, bem como a relação entre média aritmética e média ponderada; quanto à média geométrica, foram trabalhadas as propriedades, a unicidade, a relação entre a média geométrica e a ponderada, aplicações, crescimento proporcional e a média geométrica em ações; e, por fim, na última média, também foram demonstrados os mesmos aspectos trabalhados na anterior e sua aplicação no mercado de ações.

No quarto capítulo, foi feita a descrição do produto educacional, com apresentação dos aspectos relacionados ao objetivo, justificativa e regras específicas para sua aplicação no ensino da educação financeira na educação básica.

E no quinto, e último capítulo, foram tecidas as considerações finais, com os resultados da pesquisa, destacando as questões principais acerca do que foi desenvolvido sobre a temática aqui pautada.

Capítulo 2

A Matemática e o Mercado de Ações: Aspectos Históricos e Conceituais

Há muito, o homem busca formas de padronizar o pensamento empírico, fruto da observação da natureza, através da razão e da lógica com vistas a traduzi-lo em expressões matemáticas. Nesse sentido, Tales de Mileto foi um dos precursores desse tipo de pensamento, considerado por Aristóteles como o primeiro filósofo da história ocidental (SOUZA, 2018).

A busca desse pensamento racional para descrever pensamentos empíricos deu bons frutos na Grécia, de onde surgiram grandes pensadores filosóficos e, consequentemente, com o surgimento de grandes matemáticos. Arquitas de Tarento foi um desses filhos da escola pré-socrática, sendo dele a criação do termo concebido atualmente como média harmônica, que antes era denominada de sub-contrária e foi um dos primeiros a fazer uso da média aritmética através da teoria das proporções.

Arquitas nasceu em Tarento e viveu no século IV a.c. Foi, portanto, um contemporâneo de Platão. Filiado à doutrina pitagórica, Arquitas foi político, e dedicou-se às ciências da Matemática, da Mecânica e da Música. Numerosas obras lhes são atribuídas; com certeza, sabe-se que escreveu uma Ciência Matemática, uma Harmonia e, possivelmente, um livro sobre Mecânica. Os poucos fragmentos que se conhecem ocupam-se sobretudo de problemas de Matemática e de Música (BORNHEIM, 2005).

Inspirado em Pitágoras, que foi um dos primeiros a traduzir a música em matemática, Arquitas de Tarento fez um estudo detalhado sobre a música e escreveu Harmonia, da qual podemos citar um dos fragmentos, retirado do livro de Bornheim (1998, p. 89):

> Há três proporções na música: a aritmética, a geométrica e a contraposta, chamada harmonia. A aritmética se dá quando três termos manifestam analogicamente a seguinte diferença: o segundo supera tanto o primeiro quanto o terceiro supera o segundo. Nesta analogia, se vê que a relação dos termos maiores é menor e a dos menores é maior. A geométrica ocorre quando o pri-

> meiro termo está para o segundo assim como o segundo está para o terceiro. As maiores guardam a mesma relação que as menores. A contraposta, também chamada proporção harmônica, é produzida quando os termos se comportam da seguinte maneira: Quando, da própria grandeza, o primeiro termo supera o segundo tanto quanto o médio supera o terceiro. Nesta analogia, a relação dos termos maiores é maior; já a dos menores é menor.

Outros matemáticos tiveram suas contribuições atestadas ao longo da história em relação as médias. Um deles foi Arquimedes, no qual fez aproximações sucessivas de π utilizando a sequência de perímetros P_{2n} e p_{2n}, onde P_{2n} e p_{2n} denotam respectivamente os perímetros dos polígonos regulares circunscritos e inscritos,respectivamente,com $n = 3$ fixado.(BOUER, 2010)

Papus de Alexandria também deu a sua contribuição no desenvolvimento das médias. Papus foi um matemático grego que, por volta do ano 320 d.C., escreveu uma obra composta por oito livros, denominada coleção matemática. Em um dos livros, o livro III, Papus fez uma representação geométrica para as médias aritmética, geométrica e harmônica, através de uma construção geométrica em um semicírculo.

As médias pitagóricas, no seu significado mais atual, tiveram origem na Estatística, ciência que se ocupa de organizar, descrever, analisar e interpretar dados para que seja possível a tomada de decisões e/ou a validação científica de uma conclusão. Além disso, fazem parte de um ramo da Estatística denominado inferência estatística, cujo objetivo é fazer afirmações probabilísticas sobre as características do modelo probabilístico, que se supõe representar uma população, a partir dos dados de uma amostra aleatória (probabilística) desta mesma população (CASELLA, 2010).

As médias e também as médias pitagóricas são de extrema importância para todas as áreas do conhecimento, passando desde a educação básica até a educação superior. Além disso, possui aplicação em diversas áreas como robótica, Engenharia, Matemática Financeira, Física, Economia, etc. Neste trabalho, focaremos no seu uso voltado para educação financeira, mais precisamente sobre mercado de ações.

A matemática financeira para a educação básica caminha de maneira lenta, principalmente porque ainda é muito voltada para a renda fixa. O estudo dos agentes do mercado financeiro, a estrutura e as estratégias de investimento são muito precárias e limitadas. A matemática financeira do ensino básico busca prioritariamente ensinar sobre renda fixa, se dedicando a falar sobre taxas fixas e rendimentos constantes (GODFREY, 2007). A história da matemática financeira no ensino básico é permeada pela criação de perfis conservadores e pela constante busca de segurança máxima. Esse trabalho buscará dar uma idéia de renda variável através da aplicação de conhecimentos do ensino médio que possa contribuir futuramente para a criação de perfis mais arrojados.

Ao se tratar do mercado de ações, é necessário discorremos, mesmo que sucintamente, sobre a sua estrutura e a forma como ele foi pensado como sistema financeiro em âmbito nacional.

De acordo com Cavalcante, Misumi e Rudge (2005), a constituição do Sistema Financeiro Nacional ocorreu em um lapso temporal de quatro anos, especificamente entre 1964 e 1968. Conforme Kerr (2011) e Assaf Neto (2012), o SFN é composto por um grupo de instituições com dispositivos que permitem proporcionar a intermediação financeira. Desse modo, o SFN tem o objetivo de intermediar a conexão entre deficitários, que precisam de recursos financeiros e os superavitários, que possuem recursos para emprestar. "Tais agentes econômicos podem ser pessoas, empresas ou governo" (ASSAF NETO, 2012, p. 36).

Segundo Selan (2014), o primeiro banco criado, com a chegada da Família Real Portuguesa, em 1808, foi o Banco do Brasil, cuja função era a cobrança de tributos e a emissão de moeda para prover as necessidades da Família Real. No entanto, com o retorno da Família Real para Portugal em 1821, ocorreu a inviabilização da continuidade de funcionamento do banco, uma vez que toda a reserva de metais preciosos foi retirada deste, ocasionando o seu fechamento oito anos mais tarde, em 1829 (VIEIRA; PEREIRA; AMARAL PEREIRA, 2012).

Em 1833, outros bancos são criados, depois da liquidação do Banco do Brasil, sendo que este retoma suas atividades em 1851, "[...] com a fusão bancária de alguns bancos estaduais e por sugestão do Barão de Mauá. Em 1906, o Banco do Brasil tornou-se a única instituição autorizada a emitir moeda" (SELAN, 2014, p. 48). Somente em 1920, foi criada a Inspetoria, que se constituiu como órgão fiscalizador dos bancos, sendo este um fator muito importante para o período.

Segundo Assaf Neto (2012), mesmo antes do final do século XIX, em 1890, é criada a Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa), a qual se tornou a maior bolsa de valores da América Latina. Outro fator importante foi a criação da Superintendência da Moeda e do Crédito (SUMOC), em 1945, com a função de supervisão e controle do mercado monetário (SELAN, 2014).

Em 1952, foi criado o Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico (BNDE), com finalidade de elaborar e instituir a política nacional em favor do desenvolvimento econômico do Brasil. Diante das emergências, demandas sociais e preocupações sociais, em 1980 o referido banco sofre alterações e passa a ser intitulado de Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social (BNDES), passando a investir em várias áreas, com inúmeras propostas de financiamento, tendo como finalidade primordial "[...] melhorar a competitividade da economia, para desenvolver e fortalecer a economia brasileira e também apoiar o avanço social e cultural, a fim de contribuir com a elevação da qualidade e do acesso a insumos sociais e culturais também".

Nesse contexto, a partir de 1960, a bolsa de valores começou a configurar o formato que tem hoje, com regulamentação e forma jurídica de associação civil sem fins lucrativos.

De acordo com Selan (2014), nesse mesmo contexto ocorreu a reforma bancária e também foram criadas várias outras instituições, inclusive em substituição de órgãos já existentes, mas que não supriam mais as necessidades da nova realidade que se desenhava, como é o caso da criação do Banco Central do Brasil (BACEN) e do Conselho Monetário Nacional (CMN), em substituição da Superintendência da Moeda e do Crédito (SUMOC). Vejamos:

> [...] foi aprovada a Lei 4.595 referente a Reforma Bancária, em 31 de dezembro de 1964, juntamente com a criação do Banco Central do Brasil (BACEN) e o Conselho Monetário Nacional (CMN), substituindo a Superintendência da Moeda e do Credito (SUMOC). A institucionalização e implementação do Sistema Financeiro Nacional (SFN) é constituído pelo Banco Central do Brasil, Conselho Monetário Nacional, Banco do Brasil e véárias outras instituições financeiras públicas e privadas presentes no Brasil.

Em um contexto mais atual, o mercado de capitais passou a contar com a atuação de inúmeras bolsas de valores regionais, mas, em 2001, para potencializar o mercado de ações do Brasil, foi realizada a integração de todas as bolsas brasileiras em vigência, de modo que as negociações com títulos de renda variável ficaram em torno de um único mercado de valores, a Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa).

Assim, o Sistema Financeiro Nacional (SFN) desenvolve-se com base em quatro subdivisões: a) mercado monetário; b) mercado de créditos; c) mercado de capitais; d) mercado cambial.

De acordo com Selan (2014, p. 54), no primeiro mercado (monetário), concentram-se "as operações para o controle das taxas de juro de curto prazo, com objetivo de controlar a liquidez da economia, por meio das autoridades monetárias". No segundo (de crédito), são concentradas as "operações de financiamento de curto e médio prazos, por meio da concessão de créditos às pessoas físicas, ou por empréstimos e financiamentos às empresas". No terceiro mercado (de capitais), busca-se alcançar "o financiamento de médio, longo prazo e prazo indeterminado para quem apresenta déficit de investimento. As operações envolvem compra e venda de títulos e valores mobiliários, de empresas, investidores e intermediários". Já o quarto mercado (cambial) fica encarregado das "operações de compra e venda de moeda estrangeira, verificação das conversões de moeda nacional em estrangeiras e vice-versa".

A partir dessas considerações, ressalta-se a importância de se apresentar alguns conceitos básicos acerca dos elementos que compõem o Sistema Financeiro Nacional, com base no mercado de capitais, que é o objeto de análise desta pesquisa. Nesse sentido, destaca-se o mercado de ações, que representa o sistema de renda variável composto por títulos, bem como por valores mobiliários, cuja principal característica é a variação do valor no decorrer do tempo em razão da oferta e demanda. Conforme Assaf Neto (2012, p. 78):

> O mercado de renda variável tem composição de títulos e valores mobiliários, cujo valor varia ao longo do tempo apenas em funções do já conhecida oferta e demanda, e não em funções de variáveis ou eventuais indicadores pré-estabelecidos. Considerando esta ampla definição, um dos mercados mais abordados e utilizados dentro do mercado no mundo todo é justamente o mercado de ações.

Desse modo, ressalta-se que, nessa perspectiva, uma "ação" representa "a menor parcela do capital social das companhias ou sociedades anônimas". Com isso, constitui-se como "título patrimonial e como tal, concede aos seus titulares (acionistas), todos os direitos e deveres de um sócio, na limitação das ações detidas" (SELAN, 2014, p. 54). Ou seja, uma ação equivale à menor fração em que subdivide o capital de uma empresa (sociedade anônima ou companhia), a qual permite a compra e venda em negociações na bolsa de valores.

Portanto, uma ação é um valor mobiliário. Entretanto, apesar da divisão do capital em ações das companhias ou sociedades, apenas as ações das que possuem registro na Comissão de Valores Mobiliários podem ser negociadas no mercado de valores mobiliários, que no caso são as companhias de capital aberto.

Quanto à classificação das ações, elas podem ser ordinárias ou preferenciais, dependendo de possuírem ou não, respectivamente, o direito ao voto, e dependendo também da definição de prioridade na distribuição de dividendos. Vejamos:

> Ações ordinárias: ações que, além de proporcionarem participação nos resultados da empresa aos seus titulares, conferem o direito a voto em assembleia geral. Sendo assim, toda vez que a empresa for ter uma assembleia para decidir qualquer assunto com seus sócios, você tem o direito de participar dessa assembleia. Ações preferenciais: ações que garantem ao acionista a prioridade no momento de receber dividendos. Em geral, não conferem direito a voto. (ASSAF NETO, 2012, p. 78).

Diante disso, as bolsas de valores buscam garantir um sistema organizado para a realização das negociações de compra e venda de títulos e valores. "Essas estabelecem um sistema de negociação fornecendo um mercado de preço contínuo e liquidez nas aplicações" (CAVALCANTE; MISUMI; RUDGE, 2005, p. 79).

Segundo Kerr (2011), uma das perspectivas das bolsas de valores é beneficiar a sociedade a partir de seus agentes econômicos, por contribuir para "[...] o desenvolvimento das empresas que vendem suas ações para captar recursos financeiros e realizar investimentos empresariais". Já os acionistas que adquirem ações de uma determinada empresa passam a ser proprietários de uma parcela da empresa, definida pelo total de ações obtidas. Desse modo, "os acionistas beneficiam-se com a participação nos ganhos da empresa" (CAVALCANTE; MISUMI; RUDGE, 2005, p. 54).

Nesse sentido, o valor da ação é medido pelo grau de confiança dos investidores, no momento em que efetuam a compra ou venda das ações. Consequentemente, é avaliado o potencial da economia do país e o desempenho das empresas. Segundo Pinheiro (2005, p. 37), "os valores das ações são influenciados pela expectativa dos agentes econômicos".

Pinheiro (2005) ainda esclarece que, em razão do desempenho desses dois elementos – empresa e economia –, os valores das ações sofrem variação e, com isso, podem não ser compatível com o valor intrínseco, podendo ser inclusive cotada a um valor superior, ou até mesmo inferior ao valor real. Compreende-se, portanto, que "[...] o valor de mercado tem como base a concorrência do mercado e a lei da oferta e da procura, contrapondo ao valor real" (PINHEIRO, 2005, p. 39). Assim, ela pode oferecer duas possibilidades de rendimentos aos seus acionistas: dividendos e valorização.

Sobre essas duas formas de rendimento, Fortuna (2005, p. 28) define que dividendos "é a distribuição de lucros aos acionistas de acordo com o número de ações que possuem, cujo pagamento deve ser creditado na conta do acionista", com uma distribuição mínima de 25% do lucro líquido, cujo percentual é determinado pela Assembleia de Acionistas. No que se refere à valorização, Fortuna diz que se trata do "reflexo do desempenho da empresa e do comportamento do mercado, em um período determinado que influencia no preço de mercado" (FORTUNA, 2005, p. 28).

É necessário destacar que, apesar da perspectiva de o mercado de capitais representar um ótimo investimento, com possibilidades reais de lucro, existem vários riscos, principalmente em razão da volatilidade do mercado; por isso é necessário um estudo detido e aprofundado antes de iniciar investimentos nessa área. Os riscos podem ser classificados, de acordo com sua causa, podendo ser: risco de mercado, risco de empresa, risco operacional e risco de liquidez.

Pinheiro (2005, p. 106) faz uma descrição bem didática dessa classificação dos riscos:

> Risco de mercado: as variações na economia determinam os riscos de mercado; Risco de empresa: associado às decisões financeiras da empresa ou reflexo do mercado em que opera; Risco operacional: ocorrência de perdas relacionadas ao gerenciamento inadequado; Risco de liquidez: relacionada a instabilidade da venda das ações.

Ainda de acordo com Pinheiro (2005), para que haja a diminuição do risco de liquidez, o investidor deve buscar ações denominadas de blue chips, que possibilitam (maior) estabilidade, representando, assim, um bom investimento, em razão do seu alto valor de mercado e previsibilidade. Nesse sentido, compreende-se que o investimento diversificado no mercado acionário é importante para diminuir os riscos.

Existe também o circuit breaker constituído, atualmente, como um importante mecanismo de proteção "[...] disparado para paralisar os negócios na bolsa de valores, sempre que ocorrem oscilações bruscas no mercado de ações" (FORTUNA, 2005, p. 58). Esse dispositivo é acionado para que "os operadores reflitam sobre as ordens que estão enviando e reequilibrem as ordens de compra e venda, para proteger o mercado da volatilidade". Segundo Fortuna (2005, p. 58):

> O circuit breaker é acionado quando o índice do Ibovespa atingir uma queda de 10% em relação ao fechamento do dia anterior, assim o mercado interrompe todas as negociações por trinta minutos. Se ocorrer uma queda de mais 5%, o mecanismo é acionado e o mercado fecha por sessenta minutos.

Conforme Moraes (2021), mesmo com os riscos, o mercado financeiro tem conquistado cada vez mais a atenção principalmente dos jovens. Ela afirma que a Geração Z tem se interessado muito ultimamente pelo mercado de ações e, como são nativos digitais, eles têm buscado a internet como principal fonte de informações. Isso demonstra a necessidade de se inserir a pauta da educação financeira em sala de aula.

Em pesquisa recente ao site do Ministério da Educação (BRASIL, 2021), podemos encontrar a preocupação com a pauta da educação financeira, visto que a previsão é de realizar em 2022 uma pauta estratégica para difusão desse conhecimento nas escolas brasileiras, por meio tanto da realização de conferências para capacitar professores como por meio de projetos pilotos em escolas, com temas voltados para: finanças pessoais, orçamento, planejamento, previdência social, sistema financeiro, investimento, entre outros.

Esses temas farão parte, em 2022, de conferências e palestras da Semana Nacional de Educação Financeira, evento este que já vem sendo realizado desde 2014, sendo programada pelo Comitê Nacional de Educação Financeira (Conef) para ocorrer em diversas cidades do país com previsão para serem realizadas neste ano a partir de maio.

Nesse sentido, entendemos que a educação financeira está entre os principais temas da atualidade para a educação. Segundo o Ministério da Educação, "trata-se do conjunto de conhecimentos entendidos como essenciais para o fortalecimento da cidadania e voltados para ajudar a população a tomar decisões financeiras mais autônomas e conscientes".

Capítulo 3

A Educação Financeira na Educação Básica: O que dizem as pesquisas?

Discorremos neste capítulo sobre pesquisas relacionadas à Educação Financeira desenvolvidas em âmbito educacional brasileiro, buscando demonstrar o impacto de suas concepções para o ensino da matemática, sobretudo voltadas para a educação básica, as quais favorecem a compreensão de um cenário que denota a relevância dessas análises para aplicação de seus resultados em sala de aula.

Apesar da sua importância, a pauta da Educação Financeira ainda é pouco discutida e estudada no Brasil, isso pode ser demonstrado a partir do estado da arte realizado nesta pesquisa. Ficou constatado que existe uma carência de trabalhos que tenham esta temática como objeto de estudo. Essa mesma compreensão é confirmada por alguns pesquisadores, como pode ser observado mais adiante.

A referida pesquisa foi realizada junto à Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), a qual integra em um único banco digital "[...] os sistemas de informação de teses e dissertações existentes no país e disponibiliza para os usuários um catálogo nacional de teses e dissertações em texto integral, possibilitando uma forma única de busca e acesso a esses documentos" (BDTD, 2018). Esse sistema trabalha com as seguintes áreas: Administração de empresas, Agroindústria, Ciências sociais, Economia, Educação, Multidisciplina.

Esta biblioteca digital se constitui, atualmente, como o principal repositório brasileiro de pesquisas, criado no final do ano de 2002, e mantido pelo Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia (IBICT), que é quem o coordena, de modo a compor de forma integrada um sistema articulado com todas as instituições de ensino e pesquisa do Brasil, fomentando o registro e a publicação de teses e dissertações em meio eletrônico. Nesse sentido, a BDTD, "[...] em parceria com as instituições brasileiras de ensino e pesquisa, possibilita que a comunidade brasileira de C&T publique e difunda suas teses e dissertações produzidas no País e no exterior, dando maior visibilidade à produção científica nacional" (BDTD, 2018).

Assim, a investigação aqui realizada fez um recorte temporal para que o objeto da pesquisa não ficasse muito extenso e por acreditar que do ano de 2010 a 2021, ano final da realização deste estudo, seria plausível para verificar como estão sendo conduzidas as pesquisas que analisam perspectivas e concepções relacionadas à Educação Financeira em âmbito escolar. Outro aspecto importante deste mapeamento consiste em evidenciar os principais temas de pesquisas verificados e, como consequência, quais as principais categorias e resultados que as referidas pesquisas têm demonstrado. Para tanto, foram selecionados os seguintes descritores: ensino da matemática, educação financeira e educação básica.

Além disso, foram constituídos alguns questionamentos para que fossem verificados ao longo da pesquisa, com vistas a desenvolver subsídios teórico-metodológicos para compreender os percursos trilhados pela pesquisa em Educação Matemática em interface com a Educação Financeira na escola. Assim, partiu-se das seguintes questões norteadoras: quais os temas abordados e os objetivos pautados nas pesquisas realizadas? Que metodologias foram aplicadas? Os referidos elementos serão assim trabalhados: os temas e os objetivos serão apresentados nos quadros demonstrativos e as metodologias nas análises realizadas por blocos de pesquisas, a partir da exposição do quadro 4.

Como já dito anteriormente, o recorte temporal foi de 2010 a 2021, cujo primeiro mapeamento identificou um total de 95 trabalhos, sendo 83 dissertações de mestrado e 12 teses de doutorado, em que aparecem pelo menos um dos descritores elencados na pesquisa inicialmente. No filtro correspondente à área do conhecimento, observou-se que 75% dessa quantidade concentra-se nas área das Ciências Exatas e da Terra: Matemática e Ensino das Ciências e Matemática, totalizando 71 trabalhos, sendo desse total 65 dissertações de mestrado e 6 teses de doutorado, e a maioria está ligada ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). As demais dividem-se em outras áreas com percentuais menos significativos, voltadas para outras áreas do conhecimento, como veremos mais adiante.

Destaca-se que esse total de 95 trabalhos encontratra-se dividido nos seguintes assuntos: educação financeira, matemática financeira, matemática e educação, ciência e tecnologia, economia, gestão pública, engenharia de eletricidade, matemática aplicada e computacional e educação. Para melhor compreensão da pesquisa inicial realizada, com o objetivo de identicar onde se encontram os trabalhos que pautam os descritores aqui referenciados e a quantidade respectiva, elaboramos um quadro para facilitar a verificação, em que ficou demonstrado que o repositório que concentra a maior quantidade de pesquisas é o da UFJF. No quadro 01, destacamos os repositórios das instituições em que os trabalhos foram identificados a partir da busca avançada na BDTD.

Quadro 1:Repositórios das instituições em que as dissertações e teses foram identificadas

Repositório e institução respectiva	**Número de trabalhos identificados**
Repositório Institucional da UFJF	15
Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da PUC-SP	6
Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da UFG	5
Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da UFTM	5
Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da UNIGRANRIO	5
Repositório Institucional da UNESP	5
Repositório Institucional da UnB	4
Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da UEPB	3
Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da UFAM	3
Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da USP	3
Repositório Institucional da UFSCAR	3
Repositório Institucional da UTFPR	3
Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da UFRR	2
Biblioteca Digital de Teses e Dissertações do UNIOESTE	2
Repositório Institucional da UFC	2
Repositório Institucional da UFOP	2
Repositório Institucional da UFSC	2
Repositório Institucional da UNIVATES	2
Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações da UEG	1
Biblioteca Digital de Teses e Dissertações FURB	1
Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da UFCG	1
Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da UFMA	1
Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da UFRGS	1
Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da UFRPE	1

Biblioteca Digital de Teses e Dissertações do UFSM	1
Repositório Institucional Universidade Franciscana	1
Repositório Institucional da UFES	1
Repositório Institucional da UFFS	1
Repositório Institucional da UFMG	1
Repositório Institucional da UFPA	1
Repositório Institucional da UFPB	1
Repositório Institucional da UFPE	1
Repositório Institucional da UFPR	1
Repositório Institucional da UFS	1
Repositório Institucional da UFT	1
Repositório Institucional da UNIFESP	1
Repositório Institucional da UNISUL	1
Repositório Institucional da Unicamp	1
Repositório Institucional da Universidade Estadual de Maringá	1
Repositório Institucional do Centro Universitário La Salle	1
Repositório Institucional do FGV	1
Total	95

Fonte: Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD).

No quadro 2, destacamos os programas de pós-graduação que compõem a BDTD, com suas respectivas áreas de ensino e a quantidade de trabalhos localizados a partir da pesquisa realizada.

Quadro 2: Programas de Pós-Graduação que compõem a BDTD em suas repsectivas áreas de ensino

Programas de Pós-Graduação	**Números de trabalhos identificados**
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática	19
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática	18
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional	17
Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática – PROFMAT	15
Programa de Pós-Graduação em Educação	16
Programa de Pós-graduação em Matemática	2

Programa de Mestrado em Gestão e Avaliação em Educação Pública	1
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade	1
Programa de Mestrado Profissional em Gestão Pública	1
Programa de Pos Graduacao em Educacao Matematica e Tecnologicas	1
Programa de Mestrado em Gestão Empresarial	1
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional	1
Programa de Pós-Graduação em Economia	1
Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica	1
Total	95

Fonte: Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD).

Quanto aos programas, destacamos que a maior concentração de trabalhos encontram-se nos programas relacionados à educação matemática, ciências naturais e nos programas profissionais, juntos totalizando 69 pesquisas. Desse total, 32 estão inseridos nas Pós-Graduações Profissionais em Matemática, conferindo ainda uma baixa representatividade dessa temática junto a esses programas, confirmando que prevalece o entendimento de que ainda é necessário realizar pesquisas sobre o tema aqui abordado, destacamos, ainda, que esses dados estão relacionados à pesquisa mais geral, ou seja, nesses trabalhos estão presentes um dos descritores inseridos no primeiro mapeamento, sem considerar a articulação das categorias de pesquisa quanto ao objeto de estudo.

A partir dessa compreensão, e para atender aos pressupostos e objetivos desta pesquisa, foi necessário realizar uma nova filtragem para identificar pesquisas que estivessem trabalhando com as categorias selecionadas inicialmente, mas que apresentassem articulação com o mesmo objeto de estudo.

Com a consolidação do refinamento da nova pesquisa, foram constituídos critérios de exclusão dos trabalhos em que a educação financeira não estava relacionada ao ensino da matemática na educação básica, portanto, as pesquisas que se vinculavam ao ensino superior ou ao ensino de outra área do conhecimento como Administração, Economia ou Gestão Pública ou Empresarial, por exemplo, foram excluídos, como também foram excluídas as pesquisas que, mesmo abordando as referidas categorias de análise em seu objeto de estudo, não estivessem ligadas aos programas de pós-graduação em educação matemática ou afins, ou seja, as pesquisas desenvolvidas nos programas de educação não fizeram parte deste segundo mapeamento. Segue o resultado do refinamento apresentado no quadro 03.

Quadro 3:Resultado do segundo mapeamento, contendo os programas, instituições e tipos de pesquisa por ano

Programas de Pós-Graduação	Instituição	Tipo	Ano
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática	Universidade Federal de Pernambuco	Dissertação	2019
	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	Dissertação	2017
	Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)	Dissertação	2017
	Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)	Dissertação	2017

	Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)	Dissertação	2014
	Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)	Dissertação	2013
	Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)	Dissertação	2012
	Universidade Federal de Ouro Preto	Dissertação	2014
	Universidade Federal de Ouro Preto	Dissertação	2012
	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	Tese	2015
Total			11
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática	Universidade Federal de Santa Maria	Dissertação	2018
	Universidade do Grande Rio	Dissertação	2017
	Universidade do Grande Rio	Dissertação	2016
	Universidade Federal de São Carlos, Câmpus São Carlos	Dissertação	2016
Total			4
Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática – PROFMAT	Universidade do Vale do Taquari - Univates	Dissertação	2019
	Universidade Federal Rural de Pernambuco	Dissertação	2019
	Universidade Federal do Tocantins	Dissertação	2018
	Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)	Dissertação	2016
	Universidade Federal de Roraima	Dissertação	2016
	Universidade de Brasília	Dissertação	2015
	Universidade Federal de Goiás	Dissertação	2015
	Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)	Dissertação	2015
	Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)	Dissertação	2014
	Universidade Estadual da Paraíba	Dissertação	2014
	Universidade Federal do Rio Grande do Sul	Dissertação	2014
	Universidade Federal de São Carlos	Dissertação	2014
	Universidade Federal de Goiás	Dissertação	2013
Total			13

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional	Universidade Estadual Paulista (UNESP)	Dissertação	2019
	Universidade Federal da Fronteira Sul	Dissertação	2018
	Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Pato Branco	Dissertação	2017
	Universidade Tecnológica Federal do Paraná Cornelio Procopio	Dissertação	2017
	Universidade Federal do Triângulo Mineiro	Dissertação	2016
	Universidade Federal do Triângulo Mineiro	Dissertação	2016
Total			6
Total Geral			34

Fonte: Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD)

Com base nos dados consolidados no quadro 03, podemos observar que, ao verificar a articulação das categorias de análise a partir dos descritores propostos nesta pesquisa, houve uma diminuição do número de pesquisas relacionadas ao ensino da educação financeira na educação básica. Dos 95 trabalhos localizados na primeira pesquisa, restaram apenas 34 depois da segunda busca, sendo 33 dissertações de mestrado e uma tese de doutorado, defendidos entre os anos de 2012 e 2019. Em 2010, 2011, 2020 e 2021, após o refinamento da busca, não foram registradas pesquisas voltadas para a referida temática.

O Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática (PROFMAT) foi o mais produtivo, contando com um total de 13 pesquisas, sendo todas dissertações de mestrado. Desse total, a Universidade Federal de Juiz de Fora foi a que mais desenvolveu estudos voltados para o ensino da matemática financeira na educação básica, com um total de 03 trabalhos, entre os anos de 2014 e 2016, seguida da Universidade Federal de Goiás, com dois trabalhos, nos anos de 2013 e 2015, respectivamente. As demais universidades que compõem o referido programa contaram com apenas um trabalho cada.

Com quase a mesma produtividade, o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática apresentou um total de 11 trabalhos, sendo 10 dissertações de mestrado e uma tese de doutorado. Desse total, a Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) contou com 5 trabalhos defendidos entre os anos de 2012 e 2017, 2 deles neste ano, sem registro no ano de 2015 e 2016. A Universidade Federal de Ouro Preto apresentou 2 trabalhos, em 2012 e 2014 respectivamente, e a Pontifícia Universidade Católica de São Paulo também apresentou 2 trabalhos, um em 2015 e o outro em 2017, sendo o primeiro uma tese de doutorado e o segundo uma dissertação de mestrado. As demais universidades que compõem o referido programa contaram com apenas um trabalho cada.

Na sequência, vem o Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional com 06 e o Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática com 04 trabalhos, todos os trabalhos são dissertações de mestrado. O primeiro, contou com as seguintes universidades: Universidade Estadual Paulista (UNESP), com um trabalho defendido em 2019; Universidade Federal da Fronteira Sul, com um trabalho defendido em 2018; Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Pato Branco, com um trabalho defendido em 2017; Universidade Tecnológica Federal do Paraná Cornelio Procopio, com um trabalho defendido em 2017; Universidade Federal do Triângulo Mineiro, com um trabalho defendido em 2016 e a Universidade Federal do Triângulo Mineiro, com um trabalho defendido em 2015. O segundo e último programa contou com as seguintes universidades: Universidade Federal de Santa Maria, com um trabalho defendido em 2018; Universidade do Grande Rio, com dois trabalhos defendidos em 2016 e 2017 respectivamente; e a Universidade Federal de São Carlos, Câmpus São Carlos, com um trabalho defendido em 2016.

A análise seguinte constitui-se na verificação das temáticas e dos objetivos desenvolvidos nas pesquisas. Para tanto, elas foram organizadas em quatro blocos, mantendo a mesma estrutura esquemática já desenvolvida no quadro 03, com destaque para a universidade, autor, tema trabalhado e investigação desenvolvida pelos autores por ano, para que possamos compreender como os referidos pesquisadores empreenderam seus estudos e a metodologia trabalhada por eles. Desse modo, trabalharemos os blocos em separado para uma melhor visualização dos elementos.

No quadro 04, apresentaremos o primeiro bloco dos trabalhos que compõem o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.

Quadro 04 – Temas e objetivos das pesquisas do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

1-Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática					
Instituição	Tipo	Autor	Título do trabalho	Objetivo do trabalho	Ano
Universidade Federal de Pernambuco	D	Melo, Danilo Pontual de	Educação financeira e matemática financeira: compreendendo possibilidades a partir de um grupo de estudo com professores do ensino médio	Compreender possibilidades de abordagem da Educação Financeira (EF) de forma relacionada com a Matemática Financeira (MF), a partir de um grupo de estudo com professores de Matemática no Ensino Médio.	2019
Universidade Federal do Amazonas	D	Rocha, Marcelo Luiz Lopes	O Ensino da Matemática Financeira na Educação Básica somada a aonhecimentos bancários e financeiros na vida pessoal e profissional	Trazer uma metodologia nova para processo de ensino-aprendizagem para o estudo da matemática financeira idealizando uma maior aproximação do aluno ao tema.	2018
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	D	Trindade, Lilian Brazile	A educação financeira nos anos finais da educação básica: uma análise na perspectiva do livro didático	Analisar a abordagem dessa temática nos anos finais da Educação Básica, mediante as orientações dos documentos oficiais, elencando a Organização Matemática e Didática apresentadas no Livro Didático.	2017

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)	D	Santos, Leandro Gonçalves dos	Educação financeira e educação matemática: inflação de preço no ensino médio	Investigar o processo de produção de tarefas sobre inflação de preços, criadas com o objetivo de estimular a produção de significados dos estudantes do Ensino Médio para este tema.	2017
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)	D	Silva, Vivian Helena Brion da Costa	Educação financeira escolar: os riscos e as armadilhas presentes no comércio, na sociedade de consumidores	Desenvolver um conjunto de tarefas para a sala de aula do Ensino Médio com a finalidade de ensinar sobre os riscos e as armadilhas presentes no comércio com o propósito de estimular o consumo das pessoas, a partir de ciladas intencionalmente colocadas para o consumidor.	2017
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)	D	Gravina, Raquel Carvalho	Educação financeira escolar: orçamento familiar	Investigar a produção de significados de estudantes para tarefas de Educação Financeira, perante as situações problemas voltadas à temática Orçamento Familiar.	2014
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)	D	Losano, Luciana Aparecida Borges	Design de tarefas de educação financeira para o 6º ano do ensino fundamental	Elaborar tarefas de Educação Financeira para o 6º ano do Ensino Fundamental e analisá-las conforme o Modelo dos Campos Semânticos.	2013
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)	D	Campos, Marcelo Bergamini	Educação financeira na matemática do ensino fundamental: uma análise da produção de significados	Investigar a produção de significados de estudantes para tarefas de Educação Financeira.	2012
Universidade Federal de Ouro Preto	D	Moreira, Flávia Márcia Cruz	Cenários para investigação como ambiente de aprendizagem no contexto da matemática financeira	Analisar as contribuições de uma proposta de ensino baseada nos cenários para investigação como ambiente para (re)construção e desenvolvimento de conceitos e procedimentos de Matemática Financeira no 9º ano do Ensino Fundamental.	2014

Universidade Federal de Ouro Preto	D	Sousa, Luciene de	Resolução de problemas e simulações: investigando potencialidades e limites de uma proposta de educação financeira para alunos do ensino médio de uma escola da rede privada de Belo Horizonte (MG)	Investigar as potencialidades e os limites de se implementar uma proposta de atividades de Educação Financeira, inserida num contexto de Educação Matemática.	2012
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	T	Teixeira, James	Um estudo diagnóstico sobre a percepção da relação entre educação financeira e Matemática Financeira	Averiguar o letramento financeiro dos professores que ministram aulas de matemática financeira no Ensino Médio.	2015

Fonte: Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD)

* D-Dissertação

** T-Tese

A partir das leituras dos resumos, que consiste na fase exploratória do processo de verificação dos trabalhos para identificação das categorias e dos elementos constituídos na pesquisa, ficou constatado que os pesquisadores tinham a pretensão de contribuir com a construção de subsídios que favorecessem o ensino da matemática financeira com vistas a facilitar a compreensão dos alunos da educação básica acerca das concepções e diretrizes que fundamentam a temática. Nesse sentido, das pesquisas elencadas, vamos abordar inicialmente os trabalhos de Santos (2017), Silva (2017), Gravina (2014), Losano (2013) e Campos (2012) visto que foram desenvolvidos pela mesma universidade e que compartilharam dos mesmos elementos de pesquisa.

Nesses cinco trabalhos – em que os três primeiros foram produzidos em anos subsequentes (2012, 2013 e 2014), com um intervalo de dois anos para a produção dos dois últimos em 2017 –, encontramos uma categoria de estudo muito interessante que é a "produção de significado", tendo como base teórica o Modelo dos Campos Semânticos, de modo que o interesse principal dos investigadores era verificar quais os conceitos que os sujeitos da pesquisa produzem acerca da matemática financeira e como esse conhecimento pode contribuir para melhorar o ensino em sala de aula.

Assim, nota-se que é recorrente esse objeto de pesquisa na Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), visto que os cinco trabalhos são da mesma universidade. Nesse sentido, em 2012, foi produzido o primeiro trabalho com este objeto de análise, tendo como autor Marcelo Bergamini Campos (2012), com a temática "Educação financeira na matemática do ensino fundamental: uma análise da produção de significados", o qual é parte de uma proposta de inserção da Educação Financeira como tema transversal ao currículo de Matemática da Educação Básica. A investigação se caracteriza por uma abordagem qualitativa e adota como base teórica o Modelo dos Campos Semânticos como possibilidade de análise da produção de significados dos estudantes para as tarefas propostas. A pesquisa de campo aconteceu em uma escola pública e seu principal objetivo era a produção de tarefas sobre o tema para uso em sala de aula do 6º ano do ensino fundamental, cujo produto educacional resultante do estudo constituiu-se num texto direcionado a professores de matemática, apresentando o conjunto de tarefas utilizadas na pesquisa de campo, numa proposta de inserção da Educação Financeira na formação matemática dos estudantes.

No ano de 2013, foi a vez da pesquisadora Luciana Aparecida Borges Losano, com o trabalho intitulado "Design de tarefas de educação financeira para o 6º ano do ensino fundamental", caracterizado pela abordagem qualitativa que também toma como base teórica o Modelo dos Campos Semânticos. Observa-se que o objetivo de Losano (2013) converge com o de Campos (2012), pois ambos tinham a pretensão de analisar o impacto da elaboração de tarefas de Educação Financeira com estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental por meio da mesma metodologia de elaboração de material didático para aplicação em sala de aula, sendo este o produto educacional deste último pesquisador, como parte de uma proposta de inserção da Educação Financeira como tema transversal no currículo de Matemática da Educação Básica. O itinerário metodológico das duas pesquisas pautou-se na aplicação de um conjunto de tarefas com alunos de 6º ano do ensino fundamental.

Em 2014, Raquel Carvalho Gravina, com o trabalho intitulado "Educação financeira escolar: orçamento familiar", investigou a produção de significados de estudantes para tarefas de Educação Financeira, tendo como base as situações problemas voltadas à temática "Orçamento Familiar". Esta pesquisa compartilha da mesma proposta dos dois trabalhos anteriores que é a inserção da Educação Financeira como tema transversal ao currículo de Matemática da Educação Básica. Outra característica que se assemelha aos estudos anteriores é o uso da abordagem qualitativa e do Modelo dos Campos Semânticos como possibilidade de análise da produção de significados dos estudantes para as tarefas propostas. No entanto, o tema desta direciona-se ao orçamento familiar para uso em sala de aula do Ensino Fundamental. O produto educacional resultante deste estudo constituiu-se num texto direcionado a professores de matemática apresentando o conjunto de tarefas utilizadas na pesquisa de campo.

O quarto trabalho envolvendo a categoria citada foi o do pesquisador Leandro Gonçalves dos Santos (2017), com o tema "Educação financeira e educação matemática: inflação de preço no ensino médio", por meio do qual buscou desenvolver uma investigação que estimulasse a produção de significados dos estudantes do Ensino Médio a partir de tarefas sobre inflação de preços. A metodologia utilizada pelo pesquisador também teve como base a pesquisa de campo a partir da abordagem qualitativa empreendida em uma escola pública estadual. Da mesma forma que os anteriores, Santos (2017) desenvolveu a produção de significados dos sujeitos e a elaboração de material didático das tarefas referenciadas teoricamente pelo Modelo dos Campos Semânticos, sendo este o produto educacional para uso em salas de aula de Matemática da Educação Básica.

O último trabalho deste bloco relacionado à Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), produzido ainda em 2017, foi o da pesquisadora Vivian Helena Brion da Costa Silva, com o tema "Educação financeira escolar: os riscos e as armadilhas presentes no comércio, na sociedade de consumidores", tendo como objetivo investigar a produção de um conjunto de tarefas, referenciadas teoricamente, sobre os riscos e as armadilhas presentes no comércio, influenciando o consumismo das pessoas na sociedade de consumidores. A pesquisa caracterizou-se como qualitativa e de campo. As tarefas foram fundamentadas teoricamente a partir do Modelo dos Campos Semânticos, pela concepção de consumismo e sociedade de consumidores e pela proposta de educação financeira escolar. O conjunto de tarefas produzido e a experiência transformada em informação para atividades de ensino resultaram em um produto educacional para uso dos professores da educação básica.

A Universidade Federal de Ouro Preto produziu dois trabalhos – um em 2012 e outro em 2014. O primeiro de Luciene de Sousa, intitulado "Resolução de problemas e simulações: investigando potencialidades e limites de uma proposta de educação financeira para alunos do ensino médio de uma escola da rede privada de Belo Horizonte (MG). O estudo envolveu a utilização da metodologia de resolução de problemas e de atividades de pesquisa e de simulação por meio de aplicativos da internet. Os instrumentos de coleta de dados consistiram de observações que foram registradas num diário de campo, do Test de Alfabetización Económica para adultos (TAE-A), de uma entrevista, de um questionário e das atividades escritas que foram feitas pelos alunos. A análise, de abordagem qualitativa, tomou como referência os documentos oficiais que norteiam a educação básica brasileira, para a identificação de potencialidades e limites da proposta desenvolvida, e avaliou os diálogos e interações estabelecidos entre todos os participantes durante esse processo. Apresentou como produto educacional um livreto no qual constam as principais ideias teóricas e as atividades que foram desenvolvidas e aplicadas no decorrer da pesquisa.

No ano de 2014, Flávia Márcia Cruz Moreira desenvolveu junto a mesma universidade a pesquisa com o tema "Cenários para investigação como ambiente de aprendizagem no contexto da matemática financeira", cujo objetivo foi analisar as contribuições de uma proposta de ensino baseada nos cenários para investigação como ambiente para (re)construção e desenvolvimento de conceitos e procedimentos de Matemática Financeira no 9º ano do ensino fundamental. A pesquisa utilizou a abordagem qualitativa e como estratégia prática atividades que relacionam a Matemática Financeira com situações comuns da realidade, como financiamentos, promoções e interpretação de informações apresentadas em reportagens e produtos alimentícios. Participaram da investigação 28 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma Escola Estadual em Belo Horizonte – MG. Na coleta de dados foram utilizados três instrumentos metodológicos: gravação em áudio, relatório da participação dos alunos e grupo focal e como produto educacional foi gerado um livreto com uma proposta de ensino detalhada para orientar professores da escola básica.

Na sequência, temos as demais pesquisas, as quais também utilizaram estratégias metodológicas interessantes como a de Lilian Brazile Trindade, realizada em 2017 pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, com o tema "A educação financeira nos anos finais da educação básica: uma análise na perspectiva do livro didático", cujo objetivo foi analisar a educação financeira nos anos finais da educação básica, mediante as orientações dos documentos oficiais, elencando a Organização Matemática e Didática apresentadas no Livro Didático. A análise foi subdividida em quatro etapas metodológicas, em que a primeira e a segunda relacionaram-se à quantificação e análise dos critérios estabelecidos com base no Decreto Federal 7.397/2010, contemplando assuntos norteadores pertinentes à educação financeira, a terceira etapa apresentou a análise da organização matemática por meio da Teoria Antropológica da Didático e, por último, a análise da Organização Didática da coleção, à luz do Eixo Tridimensional Hipotético. Verificou-se a ausência da abordagem de conteúdos referentes à Educação Financeira nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio e, que os exercícios analisados seguiram uma linha tecnicista, na qual o aluno fica restrito às resoluções por meio de substituições e aplicações de fórmulas, de uma forma mecânica, sem qualquer tipo de reflexão ou criticidade quanto à tomada de decisão relacionadas a situações de sua realidade.

Em 2018, Marcelo Luiz Lopes Rocha (2018), na Universidade Federal do Amazonas, desenvolveu a pesquisa com o tema : O Ensino da Matemática Financeira na Educação Básica somada a conhecimentos bancários e financeiros na vida pessoal e profissional", o qual ressalta a necessidade "[...] que as pessoas comuns têm para a aplicação dos conceitos de matemática financeira, observando especialmente o jovem colegial a fim de produzir um conhecimento que o acompanhe pelos anos futuros", ou seja, o pesquisador chama a atenção para a aplicação dos conhecimentos relacionados à matemática financeira na vida cotidiana das pessoas, cujo contato e aprofundamento deve ser desenvolvido pela escola ainda no colegial, o qual subsidiará o estudante nos anos posteriores. A metodologia utilizada buscou produzir práticas com alunos do 1º ano do ensino médio, a partir de exemplos temáticos com diferentes graus de dificuldade, contextualizando com a evolução histórica do tema e conceituando aquilo que há de fundamental no mundo financeiro.

O pesquisador Danilo Pontual de Melo, em 2019, pela Universidade Federal de Pernambuco, apresentou o estudo "Educação financeira e matemática financeira: compreendendo possibilidades a partir de um grupo de estudo com professores do ensino médio", com o objetivo de compreender possibilidades de abordagem da Educação Financeira (EF) de forma relacionada com a Matemática Financeira (MF), a partir de um grupo de estudo com professores de Matemática no Ensino Médio. A pesquisa tem natureza qualitativa, contou com a participação de dois professores de Matemática no Ensino Médio. O pesquisador afirmou com base em suas análises que a EF é um dos temas transversais ao currículo da educação básica, sendo assim, deve perpassar por toda a formação básica do estudante, a qual deve ser abordada a partir de uma lente multidisciplinar, a qual possui uma dimensão muito maior de discussão para além do campo matemático.

E para concluir as pesquisas apontadas no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, temos a única tese de doutorado realizada pelo pesquisador James Teixeira, em 2015, pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, com o tema "Um estudo diagnóstico sobre a percepção da relação entre educação financeira e Matemática Financeira", cujo objetivo é averiguar o letramento financeiro dos professores que ministram aulas de matemática financeira no Ensino Médio. A hipótese levantada na investigação foi a de que a educação financeira só pode ser ensinada nas escolas por meio de um corpo docente devidamente letrado financeiramente. Ele defende que a educação financeira é fundamental para que o cidadão aprenda a importância das finanças no seu cotidiano e possa usar racionalmente seus recursos para obter e melhorar a qualidade de vida. Afirma ainda que a família e a escola são importantes aliadas na construção de novos padrões comportamentais na formação das novas gerações. Para desenvolvimento do trabalho, foi realizada uma pesquisa de campo envolvendo 30 questões, aplicada a um grupo de 161 professores que ministram a disciplina de matemática, abordando, portanto, a matemática financeira, em diferentes cidades do Estado de São Paulo. A metodologia utilizada foi a Análise Estatística Implicativa (ASI).

Desse modo, como pode ser verificado, no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, as pesquisas convergem no sentido de buscarem estimular o interesse dos estudantes da educação básica pela matemática financeira, associando teoria e prática. Quanto aos aspectos metodológicos, todas as pesquisas utilizaram a abordagem qualitativa e a maioria selecionou como campus a escola pública para o desenvolvimento da investigação. Do total, somente Sousa (2012) realizou a pesquisa em uma escola da rede privada. Outro fator importante foi a utilização do "Modelo dos Campos Semânticos" para a produção de conceitos elaborados pelos sujetos envolvidos na pesquisa durante a realização das tarefas, visto que esse método favorece a produção empírica do conhecimento, uma vez que possibilita uma maior interação entre pesquisador e sujeitos da pesquisa. Das 11 pesquisas, 7 apresentaram os produtos educacionais que consistiu basicamente em material didático direcionado aos professores da disciplina, livretos contendo as principais práticas desenvolvidas e textos direcionados aos docentes; as demais não fizeram menção ao produto de suas pesquisas.

No quadro 05, apresentaremos o segundo bloco dos trabalhos que compõem o Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.

Quadro 05 – Temas e objetivos das pesquisas do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática

2 - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática					
Instituição	Tipo	Autor	Título do trabalho	Objetivo do trabalho	Ano
Universidade Federal de Santa Maria	D	Almansa, Suziane Dias	Inflação sob a perspectiva da educação financeira escolar nos anos finais do ensino fundamental	Analisar entendimentos matemáticos e não matemáticos a partir dos registros de representação semiótica mobilizados por alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental ao desenvolverem tarefas que envolvam a noção de inflação.	2018
Universidade do Grande Rio	D	Dantas, Luciana Troca	Educação financeira e consumo consciente: tarefas didáticas nos anos iniciais do ensino fundamental	Incentivar os alunos a terem um consumo mais consciente.	2017
Universidade do Grande Rio	D	Silva, Roberto Mendonça da	Cenários para investigação de temas de educação financeira em uma escola pública de Duque de Caxias	Averiguar como a criação de cenários para investigação de temas de Educação Financeira, influenciam a aprendizagem, apoiam o desenvolvimento da cidadania e promovem, a reflexão, o diálogo e a descoberta	2016
Universidade Federal de São Carlos,Campus São Carlos	D	Oliveira, Juliana Bauer de	Atividades de Matemática Financeira por meio de aprendizagem coletiva nos anos finais do ensino fundamental	Desenvolver uma proposta sobre a prática dentro das aulas de vivências de educação financeira, como parte do projeto pedagógico para uma educação de tempo integral da rede SESI – SP.	2016

Fonte: Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD)

* D-Dissertação

** T-Tese

Considerando o recorte temporal de 2010 a 2021 realizado nesta pesquisa, localizamos apenas quatro trabalhos no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, sendo que dois deles foram desenvolvidos na Universidade do Grande Rio, nos anos de 2016 e 2017, um na Universidade Federal de Santa Maria, em 2018, e outro na Universidade Federal de São Carlos Campus São Carlos, em 2016. Os objetos de estudo deste programa não divergem daqueles apresentados no programa analisado anteriormente.

A primeira pesquisa realizada na Universidade do Grande Rio, em 2016, foi empreendida por Roberto Mendonça da Silva, com o tema “Cenários para investigação de temas de educação financeira em uma escola pública de Duque de Caxias", a qual, segundo o autor, foi fruto de questionamentos referentes à qualidade de comunicação e aprendizagem e buscou averiguar como a criação de cenários para investigação de temas de Educação Financeira influencia a aprendizagem. Para tanto, foi aplicado o Modelo de Cooperação Investigativa de Alro e Skovsmose (2006). O campo empírico foi uma escola pública da rede municipal de ensino, cujos dados foram coletados a partir de observações e entrevistas com trinta sujeitos que compuseram o universo do estudo. O pesquisador defendeu a ideia de que é possível romper com a linearidade dos pré-requisitos no ensino das disciplinas escolares, podendo ser uma alternativa de tema nas discussões para a Base Nacional Comum Curricular.

A segunda, feita por Luciana Troca Dantas, em 2017, com o tema "Educação financeira e consumo consciente: tarefas didáticas nos anos iniciais do ensino fundamental", tendo como objetivo incentivar os alunos a terem um consumo mais consciente, refletindo sobre mudanças de atitude em relação ao meio em que eles vivem; elaborar uma sequência didática que venha aprimorar a prática educativa e construir um produto educacional, partindo da hipótese de que o trabalho com Educação Financeira deve ter início desde o Ensino Fundamental, fazendo com que atitudes a longo prazo possam ser mais efetivas em relação aos hábitos de consumo. A metodologia de pesquisa empregada é a Engenharia Didática, sendo assim, foi construída uma Sequência Didática com os alunos, realizada em encontros semanais, buscando uma perspectiva mais lúdica no trabalho em questão, através de fábulas, vídeos, discussões, desenhos, entrevistas, dentre outros, sendo sua descrição fundamentada à luz da Teoria das Situações Didáticas, que apresenta como pressuposto o fato de o aluno tomar decisões satisfatórias, além de colocá-las em prática, no seu dia a dia. Desse modo, teve como produto educacional um livreto infantil, intitulado "Posso comprar?", atuando como um material didático de apoio ao aluno e ao professor.

A pesquisa realizada por Juliana Bauer de Oliveira, em 2016, pela Universidade Federal de São Carlos, era parte do projeto pedagógico para uma educação de tempo integral da rede SESI – SP, com foco no rompimento da visão do currículo fragmentado, objetivando produzir orientações curriculares que visam à integração dos componentes de um currículo básico com uma parte diversificada. Esta pesquisa envolveu cento e setenta e seis alunos em aulas que ocorriam no período da manhã e da tarde nas turmas de 8º e 9º anos. Para propor uma prática diferenciada, utilizou atividades de matemática financeira por meio de aprendizagem coletiva em nível de Ensino Fundamental, levando ao contexto dos jovens, o trato com o dinheiro, a sua relação com o consumo, a influência desse consumo nas realizações futuras, e também a importância do planejamento pessoal e familiar. As atividades foram planejadas atreladas ao estudo de números racionais fracionários e decimais, porcentagens, proporcionalidade, além de trabalhar conceitos da área de grandezas e medidas.

Por fim, a pesquisa realizada por Suziane Dias Almansa, em 2018, com o tema "Inflação sob a perspectiva da educação financeira escolar nos anos finais do ensino fundamental", objetivou analisar entendimentos matemáticos e não matemáticos a partir dos registros de representação semiótica mobilizados por alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental ao desenvolverem tarefas que envolvam a noção de inflação. Para tanto, fundamentou-se nos pressupostos da Educação Financeira Escolar, enfatizando as dimensões Social, Familiar e Pessoal, assim como os eixos temáticos: I - Noções básicas de finanças e economia, II-Finanças pessoal e familiar, III - As oportunidades, os riscos e as armadilhas na gestão do dinheiro numa sociedade de consumo; e IV - As dimensões sociais, econômicas, políticas, culturais e psicológicas que envolvem a Educação Financeira. Além dos registros de representação semiótica de Duval (2012). Na perspectiva metodológica, foram adotados os pressupostos da pesquisa qualitativa, seguindo princípios da análise de conteúdo e tomou como fonte de produção de dados uma sequência didática composta por seis tarefas.

Como pode ser constatado, as quatro pesquisas utilizaram a escola pública como campus, a partir da abordagem qualitativa, com o uso do modelo de cooperação investigativa, de sequência didática, de práticas diferenciadas e de registros de representação semiótica, respectivamente. Somente uma delas, a de Dantas (2017), apresentou um produto educacional – um livreto infantil, intitulado "Posso comprar?", atuando como um material didático de apoio ao aluno e ao professor, as demais não fizeram referência a nenhum tipo de produto educacional. No quadro 06, aprentaremos o terceiro bloco dos trabalhos que compõem o Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática (PROFMAT).

Quadro 06 – Temas e objetivos das pesquisas do Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática (PROFMAT)

Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática (PROFMAT)					
Instituição	Tipo	Autor	Título do trabalho	Objetivo do trabalho	Ano
Universidade do Vale do Taquari - Univates	D	Schneider, Tcharles	Educação financeira: investigação com uma turma de 1º ano do Ensino Médio por meio de práticas colaborativas	Investigar como oportunizar o processo de tomada de decisões financeiras de acordo com suas reais condições e prioridades, harmonizando desejos e necessidades ao planejamento financeiro.	2019
Universidade do Vale do Taquari - Univates	D	Schneider, Tcharles	Educação financeira: investigação com uma turma de 1º ano do Ensino Médio por meio de práticas colaborativas	Investigar como oportunizar o processo de tomada de decisões financeiras de acordo com suas reais condições e prioridades, harmonizando desejos e necessidades ao planejamento financeiro.	2019
Universidade Federal do Tocantins	D	Silva, Gisely Fernandes e	A matemática financeira para além da escola	Realizar um estudo sobre a abordagem dos assuntos Matemática Financeira e Educação Financeira na Educação Básica.	2018

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)	D	Soares, Fernando José	Uma proposta de atividades para o ensino da matemática financeira na educação básica	Estimular o aluno para o aprendizado mais prazeroso e real por meio da matemática financeira, presente em seu cotidiano.	2016
Universidade Federal de Roraima	D	Castro, Héwerton Alves Martins de	Matemática financeira com abordagem em educação financeira para o ensino médio	Orientar os discentes do ensino médio sobre como investir, financiar e acima de tudo, conhecer os fundos de investimentos mais usados em nosso país.	2016
Universidade de Brasília	D	Ferreira, Iuri de Souza Simões	Matemática financeira na educação básica: um novo olhar	Fazer com que o aluno seja capaz de aplicar o conhecimento em seu cotidiano de forma consciente e crítica.	2015
Universidade Federal de Goiás	D	Andreatini Neto, Alessandro	A matemática da educação financeira	Promover uma reflexão acerca das potenciais interfaces didáticas entre a educação financeira e os conteúdos de matemática abordados no ensino médio através de um curso de educação financeira.	2015

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)	D	Bolotari, Márcia Maria Azzi	Alunos competentes, consumidores conscientes: uma proposta para o ensino da matemática financeira na educação básica	Desenvolver competências que tornem os discentes mais participativos e críticos quanto ao modo como a Matemática Financeira atua em suas vidas.	2015
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)	D	Rezende, Renato Afonso	Ensino da matemática financeira na educação básica	Ampliar o estudo da matemática financeira no ensino médio sem que tenhamos que aumentar o conteúdo já tão extenso do currículo mínimo.	2014
Universidade Estadual da Paraíba	D	Santos Filho, Wilson Luiz dos	Uma proposta de aplicação da Matemática Financeira no Ensino Médio	Propor uma estratégia de abordagem da Matemática Financeira capaz de tornar mais significativo aos alunos do Ensino Médio este tema.	2014
Universidade Federal do Rio Grande do Sul	D	Jover, Renato Schneider Rivero	Matemática financeira no Ensino Médio: um jogo para simulação	Desenvolver o jogo "Investindo na Vida", que tem como objetivo contribuir para compreensão da Educação Financeira.	2014

Universidade Federal de São Carlos	D	Tamião, Fabio Carlos Badanaí	Um novo olhar para a matemática financeira no ensino médio	Apresentar a idealização e aplicação de uma sequência didática, embasada na ótica da Engenharia Didática, visando uma aprendizagem significativa da Matemática Financeira no Ensino Médio, com situações-problema contextualizadas, uso de calculadora científica, planilhas eletrônicas e softwares computacionais.	2014
Universidade Federal de Goiás	D	Santos, Paulo Cesar Feracioli dos	O ensino da matemática financeira no contexto do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Triângulo Mineiro - Campus Paracatu	Demonstrar aplicações das rotinas comerciais e bancárias, utilizando para isso uma linguagem acessível pautada na construção dos procedimentos matemáticos adequados a cada situação, e estimular uso de calculadoras científicas e de planilhas eletrônicas com os alunos	2013

Fonte: Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD)

* D-Dissertação

** T-Tese

Consideramos este grupo o mais produtivo em razão da quantidade de pesquisas aqui empreendidas, somando 13 no total, as quais versaram basicamente sobre o ensino da matemática financeira com utilização de sequências didáticas, uso de planilhas eletrônicas e de outras estratégias metodológicas com vistas ao desenvolvimento de competências que tornem os discentes mais participativos nas aulas. Neste programa, não tivemos trabalhos entre os anos de 2010 a 2012. Em comparação com o primeiro bloco, que também apresentou uma quantidade considerável de pesquisas, verificamos que o Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática (PROFMAT), observando o recorte temporal aqui definido, só iniciou as investigações voltadas para matemática financeira um ano depois do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Ou seja, somente em 2013, na Universidade Federal de Goiás, tivemos pesquisa voltada para a temática em pauta, realizada por Paulo Cesar Feracioli dos Santos, com o tema "O ensino da matemática financeira no contexto do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Triângulo Mineiro - Campus Paracatu".

A pesquisa supracitada trabalhou com estudantes dos cursos técnicos integrados ao ensino médio, os quais foram convidados a responder perguntas em relação à matemática financeira, o que subsidiou a abordagem de temas que conduziram a importantes aplicações nas rotinas comerciais e bancárias, utilizando para isso uma linguagem acessível pautada na construção dos procedimentos matemáticos adequados a cada situação, e como suporte foi sugerido o uso de calculadoras científicas e de planilhas eletrônicas.

Nessa mesma universidade, no ano de 2015, foi localizada a segunda pesquisa com o mesmo objeto de estudo, feita por Alessandro Andreatini Neto, com o tema "A matemática da educação financeira", cujo objetivo era promover uma reflexão acerca das potenciais interfaces didáticas entre a educação financeira e os conteúdos de matemática abordados no ensino médio por meio de um curso de educação financeira, que constituiu o produto educacional desta pesquisa, com o uso de uma ferramenta para organizar e classificar os gastos de maneira sistemática. Em seguida, foram abordadas as operações financeiras de crédito como cheque especial, o crédito direto ao consumidor e a antecipação de décimo terceiro salário. E, por fim, a caderneta de poupança e o recibo de depósito bancário, que são as aplicações de renda fixa mais comuns realizadas por pessoas físicas.

A Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) apresentou três pesquisas, em anos subsequentes, 2014, 2015 e 2016. A primeira feita por Renato Afonso Rezende, com o tema "Ampliar o estudo da matemática financeira no ensino médio sem que tenhamos que aumentar o conteúdo já tão extenso do currículo mínimo", objetivando ampliar o estudo da matemática financeira no ensino médio sem necessariamente ter que aumentar o conteúdo já tão extenso do currículo mínimo, a qual foi direcionada a professores de matemática da educação básica, com o intuito de demonstrar que por meio dos estudos de funções e das progressões aritmética e geométrica pode ser resolvido inúmeros problemas de matemática financeira, mostrando assim uma aplicação desses conteúdos em algo que certamente fará parte do dia a dia da vida dos estudantes.

Na sequência, temos a pesquisa feita por Márcia Maria Azzi Bolotari, com o tema "Alunos competentes, consumidores conscientes: uma proposta para o ensino da matemática financeira na educação básica", a qual buscou desenvolver competências para tornar os discentes mais participativos e críticos quanto ao modo como a Matemática Financeira atua em suas vidas. A análise foi feita a partir de reportagens e textos relevantes que versavam sobre a importância da matemática financeira no cotidiano; quanto às atividades práticas realizadas com os estudantes, foram utilizadas ferramentas tecnológicas para torná-las mais atrativa e próximas da realidade deles, explorando sugestões interdisciplinares sobre economia doméstica e consumo consciente.

No ano seguinte, nesta mesma universidade, temos a pesquisa desenvolvida por Fernando José Soares, com o tema "Uma proposta de atividades para o ensino da matemática financeira na educação básica", o qual apresentou uma proposta para a aprendizagem sobre a matemática financeira na educação básica, a partir de situações do mundo financeiro com as quais o aluno terá de lidar nas tomadas de decisões econômicas familiares. O autor defendeu que quando o estudante é exposto a situações do mundo financeiro, como financiamentos e amortizações, aplicações financeiras, taxas de juros, empréstimos e inflação, ele ficará interessado em aprender e a praticar os conteúdos escolares.

O ano de 2014, como expresso no quadro 06, foi bastante produtivo, com mais três pesquisas, todas voltadas para o ensimo médio. A primeira, da Universidade Estadual da Paraíba, feita por Wilson Luiz dos Santos Filho, com o tema "Uma proposta de aplicação da Matemática Financeira no Ensino Médio", propôs uma estratégia de abordagem da Matemática Financeira capaz de tornar mais significativo aos alunos do Ensino Médio este tema, com uma aplicação interessante no cálculo de um financiamento de veículo, descrevendo as características Leasing e CDC, além de evidenciar o cálculo do Custo Efetivo Total (CET) de uma transação, recorrendo ao uso de uma calculadora financeira.

A segunda, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, tendo como autor Renato Schneider Rivero Jover, com o tema "Matemática financeira no Ensino Médio: um jogo para simulação", buscou desenvolver o jogo "Investindo na Vida", que tem como objetivo contribuir para compreensão da Educação Financeira, sendo este o produto educacional deste estudo. A prática em sala de aula teve a duração de quatro encontros, nos quais os alunos manifestaram, verbalmente, a sua opinião sobre a atividade, colaborando para o desenvolvimento da nova versão do jogo "Investindo na Vida".

A última pesquisa deste ano, realizada na Universidade Federal de São Carlos, tendo como autor Fabio Carlos Badanai Tamião, com o tema "Um novo olhar para a matemática financeira no ensino médio", apresentou a idealização e aplicação de uma sequência didática, embasada na ótica da Engenharia Didática, visando uma aprendizagem significativa da Matemática Financeira no Ensino Médio, com situações-problema contextualizadas, uso de calculadora científica, planilhas eletrônicas e softwares computacionais. A partir disso, o autor desenvolveu a aplicação de uma sequência didática, embasada na ótica da Engenharia Didática, visando uma aprendizagem significativa da matemática financeira no ensino médio, com situações-problema contextualizadas, uso de calculadora científica, planilhas eletrônicas e softwares computacionais.

Em 2015, tivemos mais uma, agora na Universidade de Brasília, cujo autor foi Iuri de Souza Simões Ferreira, com o tema "Matemática financeira na educação básica: um novo olhar", por meio da qual o autor buscou despertar nos estudantes a capacidade de aplicar o conhecimento em seu cotidiano de forma consciente e crítica. Para tanto, foram utilizados os conteúdos de razão, proporção, progressões aritméticas e geométricas, funções afim, exponencial e logarítmicas, reveladas como aplicações eficazes para a resolução de problemas, sendo esta uma abordagem pouco usada no ensino regular. Além disso, o autor sugere a inclusão do tema empréstimos e financiamentos, algo que pode contribuir de maneira relevante na vida prática dos estudantes.

No ano de 2016, também tivemos mais um trabalho, agora pela Universidade Federal de Roraima, tendo como autor Héwerton Alves Martins de Castro, com o tema "Matemática financeira com abordagem em educação financeira para o ensino médio", objetivando orientar os discentes do ensino médio sobre como investir, financiar e acima de tudo, conhecer os fundos de investimentos mais usados em nosso país. Nesta pesquisa, o autor demonstrou que o estudo sobre sistemas de amortizações auxilia os estudantes quanto aos financiamentos mais usados em nosso país. A metodologia usada foi essencialmente a pesquisa bibliográfica a partir da qual ele conseguiu aprofundar no assunto pesquisado.

Em 2018, pela Universidade Federal do Tocantins, a pesquisadora Gisely Fernandes e Silva, desenvolveu um estudo com o tema "A matemática financeira para além da escola", buscando demonstrar a pertinência desses conteúdos, defendendo que estes tornam os estudantes pessoas mais organizadas e mais preparadas para lidar com situações concretas, num contexto de ascensão de novas práticas de mercado, no qual o domínio das questões financeiras torna-se fundamental.

Para finalizar o bloco, temos duas pesquisas realizadas em 2019. A primeira, da Universidade do

Vale do Taquari – Univates, feita por Tcharles Schneider, com o tema "Educação financeira: investigação com uma turma de 1º ano do Ensino Médio por meio de práticas colaborativas", segundo o autor, foi fruto da necessidade de abordar de uma forma diferenciada o tema "Educação Financeira", objetivando investigar como oportunizar o processo de tomada de decisões financeiras de acordo com suas reais condições e prioridades, harmonizando desejos e necessidades ao planejamento financeiro. Quanto aos aspectos metodológicos, tratou-se de uma pesquisa qualitativa, com procedimentos que se assemelham a um estudo de caso. No que se refere ao público e ao local de desenvolvimento da proposta, a mesma ocorreu com um grupo de 24 alunos do 1º ano do ensino médio do período matutino de uma escola pública, no município de Vera/MT. A coleta de dados se deu por meio de gravação de áudios, observação, caderno de campo do pesquisador, entrevista coletivas através de rodas de conversas e análise dos documentos produzidos, como pesquisa de preços e planilhas de custo.

A segunda e última, feita por Elizeu Odilon Bezerra Filho, na Universidade Federal Rural de Pernambuco, com o tema "Educação matemática crítica: uma sequência didática para o ensino de matemática e educação financeira a partir do tema Inflação", traz a relação entre Matemática Financeira (MF) e Educação Financeira (EF) a partir de uma sequência didática, e também faz considerações desses temas nas orientações curriculares como os PCNS e a nova BNCC. A sequência didática foi aplicada com alunos do 3º ano do ensino médio de uma escola estadual da Paraiba, sendo organizada em cinco etapas.

Como pode ser observado, na análise aqui realizada, a maioria das pesquisas deste bloco também foram desenvolvidas em escolas públicas, com base na abordagem qualitativa, cujos objetivos convergiam no sentido da busca por ampliação das possibilidades de aplicação dos conhecimentos relacionados à matemática financeira na educação básica, por meio das potenciais interfaces didáticas entre a educação financeira e os conteúdos de matemática, com vistas a subsidiar professores e alunos na construção de competências que favorecessem a reflexão e a participação crítica quanto à forma de trabalhar com a matemática financeira. Como já destacado anteriormente, a maioria também fez opção pela pesquisa de campo, de modo que apenas Castro (2016) fez pesquisa bibliográfica. Do total, apenas dois pesquisadores fizeram menção a seus produtos educacionais: Andreatini Neto (2015), cujo produto foi um curso de educação financeira; e Jover (2014), que desenvolveu o jogo para simulação "Investindo na Vida"; as demais não fizeram referência em seus resumos ao produto final de suas pesquisas. No quadro 07, aprentaremos o quarto bloco dos trabalhos que compõem o Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Quadro 07 – Temas e objetivos das pesquisas do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática (PROFMAT)					
Instituição	Tipo	Autor	Título do trabalho	Objetivo do trabalho	Ano
Universidade Estadual Paulista (UNESP)	D	Regonha, Mariane Rodrigues	Matemática financeira: uma proposta utilizando a BNCC	Mostrar um panorama geral da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) por meio de uma breve análise deste documento e propor atividades para cada objeto de conhecimento nela indicado que pode ser ligado à Matemática Financeira.	2019

Universidade Federal da Fronteira Sul	D	Hammes, Aloisio Pedro	Educação financeira e o contexto escolar do estudante no ensino fundamental II	Auxiliar os estudantes na administração dos seus rendimentos, as suas decisões de poupança e investimento, consumo de forma consciente e no destino correto do lixo produzido.	2018
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Pato Branco	D	Fellini, Eperson Albino	Analisando e contribuindo com o ensino de matemática financeira em nível básico	Apresentar uma proposta para ensino da Matemática Financeira na Educação Básica, com situações do dia a dia dos alunos, contribuindo com a sua Educação Financeira, para que eles saibam, por exemplo, a melhor opção em uma compra ou em um investimento.	2017
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Cornelio Procopio	D	Almeida, Paulo Cesar Zebediff de	Matemática financeira aplicada ao ensino fundamental e médio: ferramenta organizacional do orçamento doméstico	Subsidiar alunos do Ensino Fundamental e Médio com conceitos da Matemática Financeira que levem a um entendimento dos mecanismos envolvidos nas mais variadas transações financeiras e também, contribuir com a formação de professores desses ciclos.	2017
Universidade Federal do Triângulo Mineiro	D	Franco, Edmilson Nahass	A Matemática Financeira e o ensino médio	Desenvolver conceitos simples sobre os Sistemas de Capitalização e Regimes de Juros adotados universalmente.	2016
Universidade Federal do Triângulo Mineiro	D	Costa, Neilton Vieira da	A utilização de recursos computacionais para o ensino da matemática financeira no ensino médio	Buscar estratégias que possam atrair a atenção dos alunos na busca de novos conhecimentos, contribuindo para se tornarem cidadãos críticos, diante do mundo explorador em que vivemos.	2015

Fonte: Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD)

* D-Dissertação

** T-Tese

O quadro 07 traz as pesquisas empreendidas no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, por meio do qual foram localizados apenas seis trabalhos, considerando o recorte temporal aplicado. Em comparação com o Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática (PROFMAT), percebemos uma diferença de produção no que se refere à quantidade, o PROFMAT foi mais produtivo visto que desenvolveu sete pesquisas a mais. Além disso, o Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Naciona só iniciou as pesquisas em 2015, sendo que o PROFMAT iniciou dois anos antes.

Assim, em 2015, na Universidade Federal do Triângulo Mineiro, o pesquisador Neilton Vieira da Costa realizou um estudo com o tema "A utilização de recursos computacionais para o ensino da matemática financeira no ensino médio", por meio do qual buscou estratégias para produzir novos conhecimentos acerca da matemática financeira. Para tanto, utilizou softwares livres como o GeoGebra e o WxMaxima e as planilhas eletrônicas do software Excel, indicando recursos para que os alunos se sentissem estimulados a usar essas tecnologias para analisar, criticar e simular as situações financeiras que os cercam, tanto em sala de aula, quanto no dia a dia.

Em 2016, pela Universidade Federal do Triângulo Mineiro, o autor Edmilson Nahass Franco, com o tema "A Matemática Financeira e o ensino médio", desenvolveu conceitos sobre os Sistemas de Capitalização e Regimes de Juros adotados universalmente. Estabeleceu um paralelo entre os sistemas de capitalização contínua e descontínua e os regimes de juros simples e compostos, mostrando que os cálculos das rendas e anuidades adotadas hoje no Brasil são anatocismo e que os interesses das Instituições Financeiras são estabelecidos em função dos regimes de juros que as favorecem unilateralmente. Além disso, desenvolveu um procedimento para cálculo de rendas e anuidades pelo regime de juros simples sem a presença do anatocismo, mostrando que o tempo não é cindível para tal regime.

Em 2017, foram feitas duas pesquisas. A primeira, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Pato Branco, tendo como autor Eperson Albino Fellini, com o tema "Analisando e contribuindo com o ensino de matemática financeira em nível básico", caracteriza-se como pesquisa bibliográfica, em que foram consultados os Parâmetros Curriculares Nacionais, o Programa Nacional dos Livros Didáticos, artigos sobre Educação Financeira e Letramento Financeiro com o objetivo principal de apresentar uma proposta para ensino da Matemática Financeira na Educação Básica, com situações do dia a dia dos alunos. A segunda, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Cornelio Procopio, desenvolvida por Paulo Cesar Zebediff de Almeida, com o tema "Matemática financeira aplicada ao ensino fundamental e médio: ferramenta organizacional do orçamento doméstico", tendo como propósito subsidiar alunos do ensino fundamental e médio com conceitos da Matemática Financeira que levem a um entendimento dos mecanismos envolvidos nas mais variadas transações financeiras e, também, contribuir com a formação de professores desses ciclos. Além disso, buscou aprofundar-se nos conceitos básicos necessários para a compreensão da Matemática Financeira, como Progressões Aritmética e Geométrica, Juros Simples e Compostos, Operações com taxas de Juros, Séries Uniformes, Sistema de Amortização, além de assuntos referentes à economia e economia doméstica. O presente trabalho apresentou como produto educacional uma oficina para alunos do ensino fundamental e médio.

Em 2018, na Universidade Federal da Fronteira Sul, foi feita uma pesquisa com o tema "Educação financeira e o contexto escolar do estudante no ensino fundamental II", cujo autor foi Aloisio Pedro Hammes, a qual analisou os livros didáticos do Ensino Fundamental, constatando que o conteúdo de Matemática Financeira é pouco mencionado. Também abordou conceitos básicos de Educação Financeira, que vai além de Matemática Financeira, com o propósito de auxiliar os estudantes na administração dos seus rendimentos, como também nas suas decisões de poupança e investimento, no consumo de forma consciente e no destino correto do lixo produzido. As atividades foram desenvolvidas com estudantes de uma escola pública do município de Chapecó-SC.

Por fim, no ano de 2019, na Universidade Estadual Paulista (UNESP), a pesquisadora Mariane Rodrigues Regonha fez o estudo com o tema "Matemática financeira: uma proposta utilizando a BNCC", objetivando mostrar um panorama geral da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) por meio de uma breve análise deste documento e propor atividades para cada objeto de conhecimento nela indicado que pode ser ligado à Matemática Financeira. Também apresentou conceitos básicos sobre Matemática Financeira, visando uma preparação inicial do professor para a abordagem do tema.

Como pode ser verificado na análise realizada do conjunto de trabalhos contidos no quarto bloco, ficou evidente o interesse dos pesquisadores por ferramentas tecnológicas que facilitem a análise e a aplicação de simulações de ituações financeiras voltadas para a realidade dos estudantes, principalmente no que se refere ao desenvolvimento de conhecimentos práticos sobre investimentos e orçamento doméstico, como por exemplo as pesquisas de Costa (2015), Franco (2016), Almeida (2017) e Hammes (2018). Outro fator que merece destaque é a preocupação dos pesquisadores com inserção dos conteúdos relacionados à matemática financeira nos livros didáticos, e dos conceitos previstos na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a exemplo da pesquisa de Hammes (2018) e de Regonha (2019), respectivamente. Quando se compara este bloco com os anteriores, observamos a tendência também deste pela pesquisa de campo, com exceção de Fellini (2017) que desenvolveu pesquisa bibliográfica. Quanto ao produto educacional, apenas Almeida (2017) informou em seu resumo que seu produto final consistiu em uma oficina para alunos do ensino fundamental e médio, os demais não fizeram nenhuma menção do produto.

No seção seguinte, aprentaremos como o Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional (PROFMAT) da Universidade Federal do Piauí desenvolveu suas pesquisas voltadas para o ensino da matemática financeira.

3.1 PROFMAT da Universidade Federal do Piauí: continuação do estado da arte

Na Universidade Federal do Piauí (UFPI), o PROFMAT está vinculado ao Centro de Ciências da Natureza (CCN) e ao Centro de Educação Aberta e a Distância (CEAD), regulamentado pela Resolução nº 193/2011 do Conselho de Ensino, Pesquisa e Extensão (CEPEX), subsidiado pelos dispositivos do Estatuto e do Regimento Geral da Universidade Federal do Piauí, e pelo Regimento Nacional do Programa. O PROFMAT tem como objetivo desenvolver formação matemática aprofundada relevante ao exercício da docência no Ensino Básico, visando dar ao egresso qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de Matemática. Nesse sentido, verifica-se que o programa ainda é muito recente, tendo sua primeira defesa registrada pela UFPI em 2013, cuja pesquisa versava sobre "As Leis de Kepler", empreendida por Hélder Borges Vieira Laranjeira da Rocha, o qual teve como orientador o professor doutor Juscelino Pereira Silva. A opção por analisar o PROFMAT da UFPI separadamente deu-se em razão desta universidade não constar no sistema da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), fato este que chamou a atenção deste pesquisador, visto que desde 2013 o referido programa já vem desenvolvendo pesquisas com o respectivo objeto de estudo, como pode ser constatado no quadro 08. Desse modo, a pesquisa para identificação de trabalhos realizados pelo PROFMAT da UFPI relacionados ao objeto de estudo descrito neste capítulo cumpriu com os mesmos critérios estabelecidos para a pesquisa na BDTD, no entanto, o sistema investigado foi o própio banco de dissertações do referido programa, por meio do qual foram localizadas seis pesquisas, conforme descritas no quadro a seguir.

Quadro 08 – Temas e objetivos das pesquisas do Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional (PROFMAT) – Universidade Federal do Piauí

5 - Programa de Pos-Graduação em Matemática Profissional (PROFMAT) - UFPI				
Tipo	Autor	Título do trabalho	Objetivo do trabalho	Ano
D	Leandro Barbosa do Amaral Guimarães Orient.: (João Carlos de Oliveira Souza)	Aplicações dos Padrões de Fibonacci no Mercado de Ações: Uma Proposta para o Ensino de Educação Financeira no Ensino Médio	Investigar aplicações da sequência de Fibonacci e do número de ouro na análise técnica de ações.	2020
D	Lucas Pereira Viana Orient.: (Lima de Oliveira)	Matemática e Educação Financeira: Uma Análise no Contexto Escola e Família	Abordar os conceitos básicos sobre Matemática Financeira aplicado à Educação Financeira.	2019
D	Wylson Almeida Carvalho de Araújo Orient.: (Mário Gomes dos Santos)	Matemática Financeira no Ensino Médio: Análise de livros didáticos e uma nova abordagem	Analisar a abordagem da Matemática Financeira nos livros didáticos, apresentando uma reflexão sobre o seu ensino.	2017
D	Bruno Oliveira de Sousa Orient.: (Joao Benicio de Melo Neto)	Matemática Financeira e os Sistemas Financeiros no Cotidiano	Proporcionar uma melhor compreensão dos conteúdos ligados à Matemática Financeira, tomando como base algumas situações reais de financiamento e utilizando como metodologia a identificação dos principais conceitos em aplicações no cotidiano.	2016
D	Nilson de Sousa Santos Orient.: (Valmaria Rocha da Silva Ferraz)	Atividades de Matemática Financeira na Planilha Eletrônica: uma aplicação para alunos do ensino médio	Mostrar como algumas atividades e exercícios de matemática financeira, comuns no ensino fundamental e médio, podem ser desenvolvidas nos laboratórios de informática das escolas.	2014
D	Fabiano Macêdo de Oliveira Orient.: (Gilvan Lima de Oliveira)	Uma abordagem da Matemática Financeira no Ensino Médio	Propor aos professores algumas sugestões e ferramentas para se trabalhar alguns tópicos de Matemática Financeira a nível médio.	2013

Fonte: Banco de Dissertações do Programa de Pos-Graduação em Matemática Profissional (PROFMAT) – Universidade Federal do Piauí (UFPI).

*D-Dissertação

Conforme a descrição do quadro 08, o qual traz as pesquisas registradas acerca da temática, podemos verificar que a primeira pesquisa realizada pelo PROFMAT na Universidade Federal do Piauí data de 2013, tendo como autor Fabiano Macêdo de Oliveira, com o tema “Uma abordagem da Matemática Financeira no Ensino Médio”, cujo trabalho foi orientado pelo Prof. Dr. Gilvan Lima de Oliveira. Neste estudo, foi feita aplicação dos conteúdos referentes às funções afim e exponencial e de suas caracterizações, associando com as progressões aritméticas e geométricas. O presente trabalho mostrou também as dificuldades oriundas do manejo no ensino da matemática financeira por parte de alguns professores.

Em 2014, Nilson de Sousa Santos, sob orientação da Profa. Dra. Valmaria Rocha da Silva Ferraz, com o tema “Atividades de Matemática Financeira na Planilha Eletrônica: uma aplicação para alunos do ensino médio”, desenvolveu uma pesquisa com o fito de demonstrar como o uso da tecnologia pode favorecer a aprendizagem em matemática financeira, tornando-a mais prazerosa para o aluno.

Em 2016, foi a vez de Bruno Oliveira de Sousa, com a orientação do Prof. Dr. João Benicio de Melo Neto, tendo como tema “Matemática Financeira e os Sistemas Financeiros no Cotidiano”, o qual fez uma revisão dos conteúdos que falam de razão, proporção, porcentagem, função afim e função exponencial, em seguida, foram apresentadas as principais definições relacionadas aos regimes de capitalização simples e composta, com exemplificação de cada tipo para fazer a verificação do comportamento destes sistemas graficamente, na sequência, foi trabalhado com o cálculo de valores futuros e presentes em situações que envolvem aplicações periódicas de certos valores com demonstração dos sistemas de amortizações PRICE e SAC, a partir de situações reais.

No ano de 2017, o pesquisador Wylson Almeida Carvalho de Araújo, sob a orientação do prof. Dr. Mário Gomes dos Santos, trabalhou o tema “Matemática Financeira no Ensino Médio: Análise de livros didáticos e uma nova abordagem”, fez a análise de dois livros didáticos de matemática para verificar se estavam de acordo com as diretrizes estabelecidas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, como também pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e o Guia Nacional do Livro Didático, com vistas a apresentar, com a referida análise das obras, uma proposta de ensino que, segundo o autor, ressaltasse a grande questão da Matemática Financeira “A Tomada de Decisão”.

Em 2019, tivemos o trabalho de Lucas Pereira Viana, com a orientação do Prof. Dr. Gilvan Lima de Oliveira, tendo como tema “Matemática e Educação Financeira: uma análise no contexto escola e família”, em que foi realizada uma pesquisa utilizando a Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF), subsidiada pelas literaturas disponíveis abordando o contexto escola e família, com vistas a desenvolver a prática de resolução de problemas de matemática financeira no cotidiano, com o auxílio de planilhas eletrônicas mostrando a previsão de rendimentos em aplicações financeiras.

O último estudo identificado no repositório do Profmat sobre o tema aqui tratado foi o do pesquisador Leandro Barbosa do Amaral Guimarães, sob a orientação do Prof. Dr. João Carlos de Oliveira Souza, o qual versou sobre “Aplicações dos Padrões de Fibonacci no Mercado de Ações: Uma Proposta para o Ensino de Educação Financeira no Ensino Médio”, o qual objetivou investigar aplicações da sequência de Fibonacci e do número de ouro na análise técnica de ações. Para tanto, o autor realizou uma pesquisa de natureza bibliográfica para subsidiá-lo na análise técnica de ações, tais como a Teoria de Dow e as ondas de Elliot. Para a coleta de dados, utilizou o site br.tradingview.com/ para explorar as ferramentas necessárias para a aplicação das retrações, projeções e extensões de Fibonacci. Como produto educacional, foi desenvolvida uma oficina, com carga horário de 30 horas, para ser aplicada com alunos do ensino médio envolvendo a temática Educação Financeira, recorrências, Sequência de Fibonacci, número de ouro e aplicações da Sequência de Fibonacci e do número de ouro na análise técnica de ações.

Da análise das pesquisas, verifica-se que em quase todos os anos, desde a criação do Profmat na UFPI, a temática foi recorrente nas investigações empreendidas, somente em 2015 e 2018 não tivemos pesquisas relacionadas ao ensino da matemática financeira. Verifica-se também a preocupação dos pesquisadores em demonstrar a necessidade do uso das tecnologias para auxiliar no processo de aprendizagem dos alunos, como também se os livros didáticos atendem às diretrizes estabelecidas pelos PCNs e pla

LDB. No que se refere aos conteúdos analisados nas pesquisas, temos: funções afim e exponencial e de suas caracterizações, com associação das progressões aritméticas e geométricas; regimes de capitalização simples e composto, aplicações periódicas de valores com demonstração dos sistemas de amortizações PRICE e SAC, a partir de situações reais; aplicação das retrações, projeções e extensões de Fibonacci.

No próximo capítulo,vamos introduzir as médias comuns:média aritmética,média geométrica,média harmônica,média dos quadrados,média potencial e para isso, usaremos as definições do próprio Arquitas de Tarento para algumas médias segundo Boyer(1974).

Capítulo 4

Médias Pitagóricas no Mercado Financeiro

4.1 Média Aritmética

Definição 4.1. Um número m (segundo) é a média aritmética de dois outros números,a (primeiro) e b (terceiro), quando o excesso do primeiro para o segundo é igual ao excessso do segundo para o terceiro.

Matematicamente, a Definição 4.1 traduz-se por:

$$\boldsymbol{a - m = m - b} \tag{4.1}$$

Veja que Arquitas de Tarento definiu a média artimética de dois números, mas podemos generalizar para uma lista de n números. Para tal definição usaremos a definição de Scheinerman (2016).

Definição 4.2. Denominamos Média Aritmética dos números reais positivos $\boldsymbol{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n}$ ao número denotado por **M.A** e assim definido:

$$\boldsymbol{M.A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}}. \tag{4.2}$$

A média aritmética preserva a **soma dos números da lista**. De fato, se abrirmos a expressão de (4.2), temos:

$$\begin{aligned} M.A &= \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \\ \Leftrightarrow M.A \cdot n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ \Leftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n &= \underbrace{M.A + \cdots + M.A}_{n \text{ vezes}}. \end{aligned}$$

A Média Aritmética dos valores $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ também pode ser denotada com um traço em cima: $\overline{X}$.

4.1.1 Média Aritmética Segundo a Estatística

Para a Estatística, a média aritmética, assim como as demais médias, comporta-se como uma medida de posição, mais precisamente como uma medida de tendência central em uma distribuição de frequência. Entende-se por distribuição de frequência como um arranjo de valores que uma ou mais varáveis tomam em uma amostra. Portanto, vamos definir o que são medidas de tendência central. Para isso vamos nos basear no artigo de Ana Maria (2010) e nos autores Bussab e Morrettin (2017).

4.1.2 Medidas de Tendência Central

Definição 4.3. (a) **Medidas de Tendência Central** são as medidas representativas de um conjunto de dados qualquer, desde que expressas quantitativamente.

(b) **Tendência Central** é a tendência das medidas incidirem para o centro do conjunto de dados da distribuição.

(c) **Objetivo**: Indicar qual o valor prevalente em uma distibuição de frequência, que possua valores intermediários com maior frequência do que a frequência de valores extremos.

(d) **Utilidade**: Diante de uma distribuição de frequência, é útil dispor de um número que indique onde está aproximadamente o centro da distribuição, dado que ele irá representar todo oconjunto de dados.

A Estatística dá um aspecto muito mais posicional em relação a média do que Arquitas, que dá um aspecto mais geométrico. Para Ana Maria Feijoo,"A média Aritmética representa o 'centro de gravidade' da distribuição, isto é, o ponto de qualquer distibuição em torno de qual se equilibram as discrepâncias positivas e negativas ". A média situa-se entre os dois extremos do conjunto de dados, ou seja, não pode ser inferior ao valor mínimo, nem superior ao valor máximo. A Média tende a ser um resumo da distribuição de frequência, portanto, não necessariamente ela tem que pertencer a tal conjunto. Os conceitos acima pré-estabelecidos são conceitos puramente estatísticos, que fazem parte do *illius scientiae*[1] da Estatística. Feijoo ainda discorre sobre o fato de que a média aritmética é um valor que representa todo o conjunto de dados, e que facilmente pode ser usado como um parâmetro para comparar dois ou mais grupos e constatar qual deles obtiveram resultados mais ou menos elevados.

4.1.2.1 Definição de Média Aritmética

A Definição de média não diferencia-se muito da definição de Arquitas no sentido matemático. A única diferença se dá em termos algébricos denominados de frequência.

Definição 4.4. A média aritmética de um ou mais dados em uma distribuição de frequência ou de um conjunto aleatório de dados é dada por:

$$\overline{X} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot X_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i}, \tag{4.3}$$

onde

[1]corpo do conhecimento

- $\overline{X}$ é a média aritmética da distribuição;
- F_i é a frequência do i-ésimo elemento ou da i-ésima observação;
- X_i é o dado do i-ésimo elemento ou da i-ésima observação;
- n é o total de casos.

4.1.2.2 Desvio Médio

Em relação a média aritmética, ainda temos um importante conceito denominado de desvio médio, muito importante para evidenciar conjuntos homogêneos ou estáveis. Para isso, vamos nos basear em Bussab e Morettin (2017):

Definição 4.5. Desvio Médio é definido como o somatório da diferença das observações, em relação a média de um conjunto aleatório, sobre o total de observações, isto é:

$$dm(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} |X_i - \bar{X}|}{n}, \tag{4.4}$$

onde

- $\bar{X}$ é a média aritmética do conjunto de dados;
- X_i é a i-ésima observação;
- n é o total de observações.

4.1.2.3 Propriedades da Média Aritmética

1. A soma dos desvios das observações em relação a média é igual a zero:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}) = 0.$$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}) &= \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{X} \\
&= \sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot \bar{X} \\
&= \sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} X_i = 0.
\end{aligned}$$

□

2. A soma de quadrados dos desvios das observações em relação a média é mínima, ou seja, a expressão $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ é um valor mínimo. Matematicamente, isto significa que

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(X_i - k)^2, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

Demonstração. Provar (4.5) é equivalente a provar que

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - k)^2 - \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \geq 0.$$

Então seja $A = \sum_{i=1}^{n}(X_i - k)^2 - \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$. Expandindo A, obtemos:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - k)^2 - \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot k + \sum_{i=1}^{n} k^2 - \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \bar{X} - \sum_{i=1}^{n} \bar{X}^2.$$

Cancelando os termos opostos, chegamos à expressão

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - k)^2 - \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = 2\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \bar{X} - 2\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot k + \sum_{i=1}^{n} k^2 - \sum_{i=1}^{n} \bar{X}^2.$$

Agrupando alguns termos semelhantes e colocando aqueles que não dependem de **i** para fora do somatório, temos:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - k)^2 - \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = 2\sum_{i=1}^{n} X_i(\bar{X} - k) + n(k^2 - \bar{X}^2).$$

Como o primeiro membro é A, segue-se que:

$$A = 2\sum_{i=1}^{n} X_i(\bar{X} - k) + n(k^2 - \bar{X}^2).$$

Dividindo ambos os membros por n, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{A}{n} &= 2(\bar{X} - k) \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} + (k^2 - \bar{X}^2) \\
&= 2(\bar{X} - k) \cdot \bar{X} + k^2 - \bar{X}^2 \\
&= \bar{X}^2 - 2 \cdot k \cdot \bar{X} + k^2 \\
&= (\bar{X} - k)^2,
\end{aligned}$$

e portanto, $A = n \cdot (\bar{X} - k)^2 \geq 0$. □

3. Para $k \in \mathbb{R}$ não nulo, tem-se as seguintes propriedades, de demonstração imediata:

- se $Y_i = X_i \pm k$, então $\bar{Y} = \bar{X} \pm k$;
- Se $Y_i = kX_i$,então $\bar{Y} = k\bar{X}$;
- Se $Y_i = \dfrac{X_i}{k}$,então $\bar{Y} = \dfrac{\bar{X}}{k}$.

4.1.2.4 Vantagens e Desvantagens da Média Aritmética

Vamos citar algumas vantagens e desvantagens da média arimética em relação às demais, segundo Feijoo (2010):

1. É um valor que pretende ser um resumo de um conjunto de dados e pode ser usada para comparar dois ou mais conjuntos.
2. É influenciada pelos fatores extremos, isto é, a média tende a ser deslocada para os extremos o quanto forem maior ou menor tais extremos. Portanto, não deve ser utilizada como uma medida-resumo de conjuntos muito assimétricos.
3. Permite uma descrição incompleta na distribuição, pois não diz respeito a frequência de um dado,e nem a quantidade de dados que se encontram acima ou abaixo da média aritmética.

Para finalizar o estudo da média aritmética, vamos a dois exemplos:

Exemplo 4.1. O banco digital denominado Banco Panamericano foi um banco pertencente ao Silvio Santos e foi vendido para Caixa e o BTG PACTUAL devido a problemas financeiros. Desde então, o BPAN (Banco Panamericano) vem apresentando bons resultados financeiros e no ano de 2020, ano marcado pela pandemia do Coronavírus, teve bons lucros trimestrais. Por outro lado, temos o BB (Banco do Brasil), empresa genuinamente brasileira que está no mercado desde 1808. Conforme as tabelas[1] 1 e 2 abaixo, pergunta-se:

Tabela 4.1: Banco do Brasil

Encerramento do Exercício	31.12.2020	30.09.2020	30.06.2020	31.03.2020
Receita Total	28295,8	36076,15	41216,07	56698,74
Lucro Líquido	3541,09	3482,26	3623,3	3619,3

Fonte:https://br.investing.com/equities/brasil-on-financial-summary

Tabela 4.2: Banco Panamericano

Encerramento do Exercício	31.12.2020	30.09.2020	30.06.2020	31.03.2020
Receita Total	2919,19	2218,28	2726,6	2521,78
Lucro Líquido	170,94	170,18	143,89	170,5

Fonte:https://br.investing.com/equities/panamericano-pn-financial-summary

(a) Qual a média aritmetica dos lucros trimestrais de cada uma das empresas?

(b) Qual das duas empresas possui um lucro mais homogêneo?

Solução Item a. Se fizermos a média aritmética do lucro líquido do Banco Panamericano e usarmos a fórmula apresentada descrita em (4.1), obtemos:

$$\bar{X} = \frac{170,94 + 170,18 + 143,89 + 170,5}{4} = \frac{655,51}{4} = 163,88.$$

[1]Lucro em milhões de reais

Fazendo a média aritmética do lucro liquido do Banco do Brasil e usando a fórmula apresentada descrita em (4.1), temos:

$$\bar{X} = \frac{3541,09 + 3482,26 + 3623,3 + 3619,3}{4} = \frac{14265,95}{4} = 3566,5.$$

Solução Item b. Para resolver este item vamos usar a fórmula dada em (4.1.2.2) para as duas empresas:

Banco Panamericano:

$$\begin{aligned} dm &= \frac{|170,94 - 163,88| + |170,18 - 163,88| + |143,89 - 163,88| + |170,5 - 163,88|}{4} \\ &= \frac{7,06 + 6,3 + 19,99 + 6,62}{4} \\ &= 9,99. \end{aligned}$$

Banco do Brasil:

$$\begin{aligned} dm &= \frac{|3541,09 - 3566,5| + |3482,26 - 3566,5| + |3623,3 - 3566,5| + |3619,3 - 3566,5|}{4} \\ &= \frac{25,41 + 84,24 + 56,8 + 52,8}{4} \\ &= \frac{219,25}{4} = 54,81. \end{aligned}$$

Portanto,analisando-se estes dados, chegamos à conclusão que

$$dm(\text{Banco Pan}) < dm(\text{Banco do Brasil}).$$

Logo, o Banco Panamericano teve lucros mais estáveis durante o ano de 2020.

Exemplo 4.2. O mercado de ações utiliza, dentre os diversos parâmetros para a análise de ativos, duas escolas para o estudo dos ativos da bolsa. São elas a análise técnica e a análise fundamentalista. Na análise fundamentalista, existem diversos índices que avaliam o crescimento de uma empresa, denominados de múltiplos de uma empresa,dos quais podemos citar o $\frac{P}{L}$(Preço por lucro). Este índice é a razão entre o **preço por ação** no mercado a vista(preço de fechamento) de uma empresa qualquer, sobre o **lucro por ação** da empresa nos últimos 12 meses. Este índice é muito importante para avaliar o quão otimista ou pessimista os investidores estão com os lucros de uma empresa. Quanto mais próximo de 1 se encontra este índice, mais realista é o preço de uma ação em relação aos seus lucros. A Petrobrás e a Petrorio são empresas listadas em bolsa que negociam ações de petróleo na bolsa de valores. Sabendo-se que o LPA(Lucro por ação) da Petrobrás é de 0,54 reais e o LPA da Petrorio é de 2,58 reais, pergunta-se: Qual das duas empresas apresenta uma média de preço mais justo em relação aos lucros ao compararmos com o preço dos últimos 5 pregões?

Solução. Como o LPA (lucro por ação) de Petrobrás é 0,54 centavos, então pegamos os preço de fechamento dos últimos 5 pregões de Petrobrás:

$$P_1 = 23,03,\ P_2 = 23,61,\ P_3 = 23,25,\ P_4 = 23,09,\ P_5 = 22,8.$$

Como a média de um conjunto está entre os dois extremos, isto é,

$$X_{min} \leq \bar{X} \leq X_{max} \tag{4.6}$$

então pegamos o preço mínimo dos últimos 5 pregões e o preço máximo dos últimos 5 pregões e dividímos pelo LPA:

$$(P/L)_{min} = \frac{22,8}{0,54} = 42,22, \quad \text{e} \quad (P/L)_{max} = \frac{23,61}{0,54} = 43,72.$$

Ou seja, em relação ao preço mínimo, o preço mínimo da ação está sendo negociado em um múltiplo de até 42,22 vezes os lucros. Em relação ao preço máximo dos últimos 5 pregões, o preço máximo da ação está sendo negociada em um múltiplo de até 43,72 vezes em relação aos lucros. Portanto, usando (4.6) e dividindo ambos os membros da desigualdade por 0,54, obtemos:

$$\frac{X_{min}}{0,54} \leq \frac{\bar{X}}{0,54} \leq \frac{X_{max}}{0,54},$$

$$(P/L)_{min} \leq (P/L)_{medio} \leq (P/L)_{max},$$

$$42,22 \leq (P/L)_{medio} \leq 43,72.$$

Assim, o preço médio tem um multiplicador de até pelo menos 42,22 vezes maior.

Em relação à Petrorio, o preço de fechamento dos últimos 5 pregões foi

$$P_1 = 97,42, P_2 = 101,80, P_3 = 100,80, P_4 = 96,75, P_5 = 94,72.$$

Como o LPA de Petrorio é de 2,58, então vamos calcular o $\frac{P}{L}$ da cotação mínima e da cotação máxima.

$$(P/L)_{min} = \frac{94,72}{2,58} = 36,71, \quad (P/L)_{max} = \frac{101,80}{2,58} = 39,45.$$

Usando (4.6) novamente e dividindo ambos os membros por 2,58, temos:

$$\frac{X_{min}}{2,58} \leq \frac{\bar{X}}{2,58} \leq \frac{X_{max}}{2,58},$$

$$(P/L)_{min} \leq (P/L)_{medio} \leq (P/L)_{max},$$

$$36,71 \leq (P/L)_{medio} \leq 39,45.$$

Ou seja, as ações de Petrorio apresentam um múltiplo negociado em pelo menos 36,71 vezes. Com isso, podemos concluir que o preço da ação de Petrorio apresenta múltiplos menores do que os múltiplos de Petrobrás, ou seja, os preços das ações de Petrorio são mais condizentes com os lucros.

4.1.3 Média Aritmética Ponderada

Esta é uma medida de posição bastante conhecida que basicamente apresenta a mesma definição de média aritmética, com a diferença de que quando certas grandezes em análise apresentam diferentes graus de importância, faz-se necessário criar novas quantidades agrupadas denominadas de pesos. A média aritmética ponderada tem uma característica singular, que é criar uma assimetria no conjunto de dados de forma a medir o afastamento em relação ao dado de maior peso (c.f. Freund e Simon (2000)).

Definição 4.6. Dados um conjunto finito de números $X = \{X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n\}$ e pesos $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$

pertencentes aos reais, tal que $n \geq 1$, a média aritmética ponderada desse conjunto é dada por

$$\bar{X_p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i P_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i}. \tag{4.7}$$

Se a sequência de pesos do conjunto for necessariamente a quantidade de vezes que cada dado numérico aparece no conjunto então a média ponderada é rigorosamente igual a média aritmética. Em outras palavras, se $P_i = F_i$,onde F_i é a frequência de cada X_i no conjunto de dados, então $\bar{X} = \bar{X_p}$. Basta substituir P_i por F_i na fórmula (4.7) e comparar com a fómula (4.3).

Ou seja, a média ponderada pode se comportar como uma média arimética se os pesos não forem atribuidos aleatoriamente.

4.1.4 Relação entre média aritmética e média ponderada

Vamos introduzir brevemente a noção de família de conjuntos para utilizarmos uma propriedade interesssante da média ponderada. Para isso usaremos a definição de Lima (2004).

Definição 4.7. Uma **família** de elementos de $\mathbf{X}$ com índices em $\mathbf{L}$ é uma função $x : L \to X$. O valor de x no ponto $\lambda \in L$ é descrito com o símbolo x_λ. A família x é representada pela notação $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$. Uma família de conjuntos é dita disjunta ou mutuamente disjunta se dados dois conjuntos quaisquer da família, eles são disjuntos. Mais precisamente, uma família é dita disjunta quando $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i, j \in \mathbf{L}; i \neq j$.

Nesta seção tomaremos uma família de conjuntos com índices em $L = \{1, 2, \cdots, n\}$.

Se $X = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$,onde A_λ é uma família de conjuntos, então dizemos que o conjunto X pode ser decomposto em subconjuntos menores.

Ter conjuntos de dados menores é muito importante do ponto de vista da estatística e para as empresas, pois em vez de focar no conjunto de dados maior, focamos nos conjuntos menores e ganha-se agilidade e tempo com essa decomposição e tempo é imprescindível para elas. Vejamos como podemos aplicar este conceito para estabelecer uma relação entre média aritmética e média ponderada.

Proposição 4.1. Seja X um conjunto de dados. Se existe $n \in \mathbb{N}; X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, ou seja, se X é um conjunto de dados que pode ser decomposto dessa forma, onde $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ são a quantidade de observações de cada conjunto $A_1, A_2, \cdots, A_n$, tal que o peso de cada observação no conjunto A_i é igual a Frequência desta observação em A_i, então

$$\bar{X}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bar{X}p = \frac{F_{A_1} \cdot \bar{X_{A_1}} + F_{A_2} \cdot \bar{X_{A_2}} + \cdots + F_{A_n} \cdot \bar{X_{A_n}}}{\sum_{i=1}^{n} F_{A_i}}, \tag{4.8}$$

onde $F_{A_1}, F_{A_2}, ..., F_{A_n}$ são os somatórios das frequências de todas as observações em cada conjunto $A_1, A_2, \cdots, A_n$, e $\bar{X_{A_1}}, \bar{X_{A_2}}, \cdots, \bar{X_{A_n}}$ são as médias aritméticas de cada conjunto A_i.

Demonstração. A demonstração é rigorosamente aritmética, do tipo recursiva. Se n=1, nada há para demonstrar. Se n=2, então suponha que $X = A_1 \cup A_2$, onde X_i é a i-ésima observação do conjunto A_1 e X_j é a j-ésima observação do conjunto A_2. Então temos um conjunto de dados X formado por dois subconjuntos menores, A_1 e A_2. Como ja vimos na fórmula (4.3), o cálculo da média aritmética é bem simples. Portanto,

$$\bar{X}(A_1 \cup A_2) = \frac{\sum_{i=1}^{\omega_1} X_i \cdot F_i + \sum_{j=1}^{\omega_2} X_j \cdot F_j}{F_{A_1} + F_{A_2}}.$$

Multiplicando cada um dos termos do segundo membro da equação acima por $\frac{F_{A_1}}{F_{A_1}}$ e $\frac{F_{A_2}}{F_{A_2}}$, o resultado não se altera, isto é,

$$\bar{X}(A_1 \cup A_2) = \frac{F_{A_1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{\omega_1} X_i \cdot F_i}{F_{A_1}} + F_{A_2} \cdot \frac{\sum_{j=1}^{\omega_2} X_j \cdot F_j}{F_{A_2}}}{F_{A_1} + F_{A_2}}. \tag{4.9}$$

Como

$$\frac{\sum_{i=1}^{\omega_1} X_i F_i}{F_{A_1}} = \bar{X_{A_1}} \quad \text{e} \quad \frac{\sum_{j=1}^{\omega_2} X_j F_j}{F_{A_2}} = \bar{X_{A_2}},$$

então a expressão em (4.9) é equivalente a

$$\bar{X}(A_1 \cup A_2) = \frac{F_{A_1} \cdot \bar{X_{A_1}} + F_{A_2} \cdot \bar{X_{A_2}}}{F_{A_1} + F_{A_2}}.$$

Para o caso geral, repete-se o mesmo processo para n=2. □

Vemos que a Proposição 4.1 faz menção à quantidade de obervações $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ e às observações em si, mas na equação (4.8) as observações não aparecem na Fórmula. A posteriori, essa é a principal vantagem, pois conhecendo-se a frequência total de cada um dos conjuntos e sabendo-se a média de cada um deles, podemos conhecer rapidamente a média aritmética da união dos conjuntos, sendo desnecessária suas observações.

4.1.5 Propriedades da média ponderada

Assim como a média aritmética, a média ponderada também é uma medida de posição. E como definido ateriomente, a média ponderada busca um desequilibrio no conjunto de dados de forma a medir o afastamento em relação ao dado de maior peso. Chamaremos esse afastamento de distância em relação a média. Para isso, vamos nos basear em Leite (2010). Vejamos algumas delas.

1. Pesos e distâncias em torno da média são grandezas inversamente proporcionais. (Conjunto de dados formado por duas observações e dois pesos, tais que $X_1 < X_2$).

   Demonstração. Pela definição de média ponderada, vale que

$$\begin{aligned} & X_1 \cdot P_1 + X_2 \cdot P_2 = \bar{X}_p \cdot P_1 + \bar{X}_p \cdot P_2 \\ \iff & X_2 \cdot P_2 - \bar{X}_p \cdot P_2 = \bar{X}_p \cdot P_1 - X_1 \cdot P_1 \\ \iff & (X_2 - \bar{X}_p) \cdot P_2 = P_1 \cdot (\bar{X}_p - X_1). \end{aligned}$$

   Como $X_1 < \bar{X}_p < X_2$, então $X_2 - \bar{X}_p > 0$ e também $\bar{X}_p - X_1 > 0$.

Assim, chamando de D_2 a distância de X_2 *a* $\bar{X}_p$ e D_1 a distância de $\bar{X}_p$ a X_1, temos como resultado:

$$D_2 \cdot P_2 = P_1 \cdot D_1,$$

ou seja,

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Portanto, pesos e distâncias são inversamente proporcionais. □

2. Seja X um conjunto de dados com n observações $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ e n pesos $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$, n>1, tal que $X_1 < X_2 < X_3 < \cdots < X_n$, e seja $\bar{X}_p$ a média ponderada das observações. A soma dos produtos da diferença de cada observação até a média, pelos respectivos pesos, é igual a zero.

Demonstração. Usando a definição de média ponderada para n valores,temos:

$$\begin{aligned} & X_1 \cdot P_1 + X_2 \cdot P_2 + X_3 \cdot P_3 + \cdots + X_n \cdot P_n = \bar{X}_p \cdot P_1 + \bar{X}_p \cdot P_2 + \bar{X}_p \cdot P_3 + \cdots + \bar{X}_p \cdot P_n \\ \iff & (X_1 \cdot P_1 - \bar{X}_p \cdot P_1) + (X_2 \cdot P_2 - \bar{X}_p \cdot P_2) + \cdots + (X_n \cdot P_n - \bar{X}_p \cdot P_n) = 0 \\ \iff & (X_1 - \bar{X}_p) \cdot P_1 + (X_2 - \bar{X}_p) \cdot P_2 + \cdots + (X_n - \bar{X}_p) \cdot P_n = 0. \end{aligned}$$

Chamando de d_i a diferença até a média de cada X_i, temos que

$$d_1 \cdot P_2 + d_2 \cdot P_2 + d_3 \cdot P_3 + \cdots + d_n \cdot P_n = 0.$$

A depender do posicionamento da média, alguns d_i serão negativos e alguns serão positivos. Consideraremos o sentido esquerda-direita para definir o sinal positivo de d_i e negativo caso contrário. □

Para finalizar esta seção, vamos apresentar um exemplo de aplicação da média ponderada.

Exemplo 4.3. Uma famosa tática no mercado financeiro denomina-se preço médio. O preço médio na bolsa de valores, como o próprio nome diz, é a média de compra ou venda de um ativo (ações, por exemplo) em uma determinada operação, considerando que os ativos que compõem esta operação foram adquiridos ou vendidos, em momentos diferentes, a preços variados e volumes distintos. Matematicamente, o preço médio nada mais é que a média ponderada de todos os preços pagos pelo ativo em questão.

1. Alphabet Inc. é um grupo de empresas que controla dentra as quais a empresa Google, que emite ações da Google para serem negociadas em bolsa de valores. Um investidor brasileiro, querendo investir seu dinheiro na empresa, investiu todo seu rendimento de 20 anos de poupança na bolsa de valores, fazendo 3 aquisições nos mais variados preços da ação GOGL34. Primeiramente, comprou 1000 ações no valor de 120 reais. Duas semanas depois, vendo a cotação cair drasticamente, comprou 500 ações no valor de 90 reais, e três semanas depois, caiu mais um pouco, na casa dos 82 reais, então ele comprou 300 ações nessa faixa de preço. Pergunta-se:

(a) Qual o preço médio das aquisições feitas pelo investidor?

(b) Qual a cotação que a ação deverá atingir para o investidor recuperar o prejuízo?

(c) Um outro investidor também investiu na mesma empresa, adquirindo as ações da Google em três meses, computando o seguinte procedimento: no primeiro mês, esse investidor tinha 1000 ações com um preço médio em 88 reais por ação. No segundo mês, o seu preço médio estava em 95 reais por ação, 1500 ações, e no terceiro mês o seu preço médio estava em 100 reais por ação, 2200 ações. Qual o preço médio por ação ao final de 3 meses desse investidor?

Solução do item (a). Usando a fórmula estudada em (4.7), temos:

$$\begin{aligned}\bar{X_p} &= \frac{1000 \cdot 120 + 500 \cdot 90 + 300 \cdot 82}{1800} \\ &= \frac{120000 + 45000 + 24600}{1800} \\ &= \frac{189600}{1800} \\ &= 105,33.\end{aligned}$$

Solução do item (b). Como vimos nas propriedades da média ponderada, a soma dos desvios em relação a média é zero. Portanto, o preço médio de todas aquisições feitas é de 105,33. Como foram feitas aquisições em um valor acima, houve prejuízo, e como foram feitas aquisições abaixo, houve lucro. Já que a soma das distâncias entre lucro e prejuízo é zero, então para o investidor zerar os prejuízos, a cotação do ativo deve alcançar o preço médio, isto é, o total de 105,33.

Solução do item (c). Conforme visto na equação (4.8), conhecidas as médias de dois ou mais subconjuntos, podemos calcular a média do conjunto maior. Portanto chamando de $A_1 = 1^{\underline{a}}$ Mês, $A_2 = 2^{\underline{a}}$Mês e $A_3 = 3^{\underline{a}}$Mês, temos que:

$$\begin{aligned}\bar{X_p}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \frac{F_{A_1} \cdot \bar{X_{A_1}} + F_{A_2} \cdot \bar{X_{A_2}} + F_{A_3} \cdot \bar{X_{A_3}}}{F_{A_1} + F_{A_2} + F_{A_3}} \\ &= \frac{1000 \cdot 88 + 1500 \cdot 95 + 2200 \cdot 100}{1000 + 1500 + 2200} \\ &= \frac{88000 + 142500 + 220000}{4700} \\ &= \frac{450500}{4700} \\ &= 95,85.\end{aligned}$$

Portanto, o preço médio do ativo do investidor ao final de 3 meses é de 95,85.

4.2 Média Geométrica

A média geométrica junto à média aritmética e a média harmônica foram desenvolvidas pela escola pitagórica. Na estatística é bastante comum a busca pela representação de um conjunto de dados por um único valor para tomada de decisões. Uma das possibilidades para o valor central é a média geométrica. Neste capítulo adentraremos com o conceito de média geométrica, simples e ponderada, propriedades e aplicações. Para apronfundarmos este estudo de média geométrica usaremos os autores Bussab e Morettin (2017).

Definição 4.8. Dado um conjunto de dados positivos $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, a média geométrica desse conjunto de dados é dada por:

$$\bar{X_g} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ \cdots \ \cdot x_n}, \tag{4.10}$$

onde $\bar{X_g}$ representa a média geométrica e o símbolo $\sqrt[n]{}$ representa a enésima raiz de acordo com tamanho n do conjunto de dados.

A média geométrica geralmente é usada quando temos dados que guardam uma relação de natureza multiplicativa ou exponencial como por exemplo as avaliações de um investimento financeiro, crescimento populacional, crescimento ou decrescimento de capital. Além disso a média geométrica, assim como as demais médias, é uma medida de posição que serve como uma medida representativa de um conjunto de dados que guardam determinadas relações entre si, sejam aritméticas, geométricas ou exponenciais. Vejamos algumas das suas principais características.

4.2.1 Propriedades

- Enquanto a média aritmética preserva a soma, a média geométrica preserva o produto, isto é:

$$\begin{aligned} & \bar{X_g} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ \cdots \ \cdot x_n} \\ \iff & \bar{X_g}^n = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ \cdots \ \cdot x_n \\ \iff & x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ \cdots \ \cdot x_n = \underbrace{\bar{X_g} \cdot \bar{X_g} \cdot \ \cdots \ \cdot \bar{X_g}}_{n \text{ vezes}}. \end{aligned}$$

- O produto dos quocientes de cada valor de um conjunto de números pela média geométrica do conjunto é 1, isto é:

$$\frac{x_1}{\bar{X_g}} \cdot \frac{x_2}{\bar{X_g}} \cdot \frac{x_3}{\bar{X_g}} \cdot \ \cdots \ \cdot \frac{x_n}{\bar{X_g}} = 1.$$

  Demonstração. De fato, a demonstração dessa propriedade é imediata, pois basta usar a definição de média ponderada dada em (4.10). □

- Quanto maior a diferença entre os valores originais maior será diferença entre as médias aritmética e geométrica. Por exemplo:

Tabela 4.3: Comparativo entre média aritmética média geométrica.

Conjunto	**Média Aritmética**	**Média Geométrica**
A=$\{2, 2\}$	2	2
B =$\{14, 16\}$	15	14,97
C = $\{8, 12\}$	10	9,8
D = $\{2, 50\}$	26	10
E= $\{10, 50, 90\}$	50	35,56

Fonte:O Autor

Na tabela acima vemos alguns conjuntos e suas respcetivas médias aritmética e geométricas, e percebemos que quanto maior a diferença entre os dados maior a diferença entre as médias. Uma justificativa para este fato, que abordaremos mais adiante, é que $\bar{X_g} \leq \bar{X}$. A igualdade $\bar{X_g} = \bar{X}$ só ocorrerá quando todos os valores da série forem iguais. Além disso, a Média aritmética é fortemente influenciada pelos valores extremos, enquanto a média geométrica por ter natureza exponencial, possui uma maior estabilidade ao longo da curva. Mais adiante abordaremos algumas dessas peculiariedades.

- Séries que tem o mesmo produto têm a mesma média geométrica.

  Demonstração. A prova é imediata. □

4.2.2 Unicidade da Média Geométrica

Como vimos, a média geométrica preserva o produto em um conjunto de dados que se relaciona de modo multiplicativo. Portanto, se tivermos outro candidato para preservar o produto, este deverá ser igual à média geométrica. Com efeito, se $\bar{X_g}$ é a média geométrica de um conjunto de dados $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$ pertencentes aos reais e c é um número que preserva esse produto como na propriedade 1, então temos por um lado

$$\underbrace{\bar{X_g} \cdot \bar{X_g} \cdot \ \cdots \ \cdot \bar{X_g}}_{n\ vezes} = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ \cdots \ \cdot x_n, \tag{4.11}$$

e por outro,

$$\underbrace{\cdot c \cdot c \ \cdots \ \cdot c}_{n\ vezes} = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ \cdots \ \cdot x_n. \tag{4.12}$$

Dividindo (4.11) por (4.11), obtém-se:

$$\frac{\bar{X_g}^n}{c^n} = 1 \iff \bar{X_g}^n = c^n.$$

Extraindo a raiz-enésima dos dois membros, temos: $\bar{X_g} = c$.

4.3 Média Geométrica Ponderada

Definição 4.9. A média ponderada de um conjunto de dados $A = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$ e frequências $\{f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, é dada por:

$$\bar{X_{gp}} = \sqrt[\sum_{i=1}^{n} f_i]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdot x_3^{f_3} \cdot \ \cdots \ \cdot x_n^{f_n}}. \tag{4.13}$$

A média geométrica ponderada, como podemos ver, é uma fórmula mais geral, pois considera as frequências de cada observação. Além disso, assim como a média aritmética ponderada, ela apresenta similarmente algumas relações que a grosso modo se parecem muito com as relações entre média aritmética e média ponderada vistas na Subseção 4.1.4. Vejamos algumas delas:

4.3.1 Relação entre média geométrica e média geométrica ponderada

Proposição 4.2. Similar à proposição 4.1, temos:

$$\bar{X_g}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bar{X_{gp}} = \sqrt[\sum_{i=1}^{n} F_{A_i}]{\bar{X_{g_{A_1}}}^{F_{A_1}} \cdot \bar{X_{g_{A_2}}}^{F_{A_2}} \cdot \bar{X_{g_{A_3}}}^{F_{A_3}} \cdot \ \cdots \ \cdot \bar{X_{g_{A_n}}}^{F_{A_n}}}. \tag{4.14}$$

Demonstração. Com efeito, se n=1 não há nada a demonstrar, basta usar a definição de média ponderada dada em (4.10). Se n=2, então suponha que $X = A_1 \cup A_2$, onde x_i é a i-ésima observação do conjunto A_1 e x_j é a j-ésima observação do conjunto A_2. Então temos um conjunto de dados X formado por dois subconjuntos menores, A_1 e A_2.

Portanto, tomando o conjunto $X = A_1 \cup A_2$ como referência, vimos pela fórmula (4.13) que a média geométrica tira a raiz $\sum_{i=1}^{n} f_i$-ésima do produto do conjunto de dados, que no caso é o conjunto união. Daí temos que:

$$\bar{X}_g\left(A_1 \cup A_2\right) = \sqrt[F_{A_1}+F_{A_2}]{\prod_{i=1}^{\omega_1} x_i \cdot \prod_{j=1}^{\omega_2} x_j}.$$

Como

$$\prod_{i=1}^{\omega_1} x_i = \left(\sqrt[F_{A_1}]{\prod_{i=1}^{\omega_1} x_i}\right)^{F_{A_1}} \quad \text{e} \quad \prod_{j=1}^{\omega_2} x_j = \left(\sqrt[F_{A_2}]{\prod_{j=1}^{\omega_2} x_j}\right)^{F_{A_2}},$$

e

$$\sqrt[F_{A_1}]{\prod_{i=1}^{\omega_1} x_i} = \bar{X_{g_{A_1}}} \quad \text{e} \quad \sqrt[F_{A_2}]{\prod_{j=1}^{\omega_2} x_j} = \bar{X_{g_{A_2}}},$$

então

$$\bar{X}_g\left(A_1 \cup A_2\right) = \sqrt[F_{A_1}+F_{A_2}]{\bar{X_{g_{A_1}}}^{F_{A_1}} \cdot \bar{X_{g_{A_2}}}^{F_{A_2}}}.$$

Para o caso geral repete-se o mesmo processo feito para o caso n=2. O processo é rigorosamente recursivo. □

Corolário 4.1. Se $F_{A_1} = F_{A_2} = F_{A_3} = \cdots = F_{A_n}$, então a média geométrica da união de n conjuntos é a média geométrica das médias geométricas dos n conjuntos.

Demonstração. Com efeito, se $F_{A_1} = F_{A_2} = F_{A_3} = \cdots = F_{A_n}$, então, sem perda de generalidade, igualaremos todos eles a F_{A_1}, digamos, e disso temos:

$$\begin{aligned}
& \bar{X}_g\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sqrt[\sum_{i=1}^{n} F_{A_1}]{\bar{X_{g_{A_1}}}^{F_{A_1}} \cdot \bar{X_{g_{A_2}}}^{F_{A_1}} \cdot \bar{X_{g_{A_3}}}^{F_{A_1}} \cdot \cdots \cdot \bar{X_{g_{A_n}}}^{F_{A_1}}} \\
\iff & \bar{X}_g\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sqrt[n \cdot F_{A_1}]{\left(\bar{X_{g_{A_1}}} \cdot \bar{X_{g_{A_2}}} \cdot \bar{X_{g_{A_3}}} \cdot \cdots \cdot \bar{X_{g_{A_n}}}\right)^{F_{A_1}}} \\
\iff & \bar{X}_g\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \left(\bar{X_{g_{A_1}}} \cdot \bar{X_{g_{A_2}}} \cdot \bar{X_{g_{A_3}}} \cdot \cdots \cdot \bar{X_{g_{A_n}}}\right)^{\frac{F_{A_1}}{n \cdot F_{A_1}}} \\
\iff & \bar{X}_g\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \left(\bar{X_{g_{A_1}}} \cdot \bar{X_{g_{A_2}}} \cdot \bar{X_{g_{A_3}}} \cdot \cdots \cdot \bar{X_{g_{A_n}}}\right)^{\frac{1}{n}} \\
\iff & \bar{X}_g\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sqrt[n]{\bar{X_{g_{A_1}}} \cdot \bar{X_{g_{A_2}}} \cdot \bar{X_{g_{A_3}}} \cdot \cdots \cdot \bar{X_{g_{A_n}}}}.
\end{aligned}$$

□

4.3.2 Aplicações da média geométrica

Dentre as inúmeras aplicações da média geométrica, vamos realizar uma relacionadas a matemática financeira para finalizarmos esta seção.

A aplicação mais simples da média geométrica se dá nas progressões geométricas, quando temos termos consecutivos cuja razão é constante. Vejamos como podemos aplicar esta relação.

Exemplo 4.4. Dado o conjunto $\{3, 9, 27, 81, 243\}$, qual a melhor média para determinar o termo central?

Solução. Perceba que esse conjunto é uma P.G. de razão 3, pois do primeiro para o segundo termo multiplicamos por três, do segundo para o terceiro também, e assim sucessivamente. Com isso, temos um conjunto de dados que se relaciona de modo multipliativo, o que nos induz a pensar em média geométrica. De fato, se considerarmos a média aritmética, vamos chegar a uma medida resumo altamente desproporcional para representar tal conjunto, pois conforme visto anteriormente, a média arimética se aproxima de forma muito clara dos valores extremos quanto maiores forem estes valores. Então é prudente analisar o conjunto de dados e buscar uma medida resumo que se assemelhe a este comportamento.

Vamos comparar com as médias já vistas até agora:

1ª **Média Aritmética.**

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{5} = \frac{3 + 9 + 27 + 81 + 243}{5} = 72.$$

2ª **Média Geométrica.**

$$\bar{X_g} = \sqrt[5]{X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 \cdot X_5} = \sqrt[5]{3 \cdot 9 \cdot 27 \cdot 8 \cdot 243}.$$

Fatorando, temos:

$$\bar{X_g} = \sqrt[5]{3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4 \cdot 3^5} = \sqrt[5]{3^{15}} = 27.$$

Portanto, temos um conjunto de dados que se comporta de maneira exponencial e uma medida resumo que se comporta de maneira linear que é a média aritmética. Assim, essa medida resumo não é adequada para representar este conjunto. Consequentemente, a média geométrica, que também se comporta de maneira exponencial, é a mais adequada para representar este conjunto.

Outra aplicação bastante importante trata-se do crescimento proporcional como já demos um esboço no exemplo anterior. A média geométrica é mais apropriada que a média aritmética para descrever crescimentos proporcionais, tanto crescimento exponencial (proporção constante de crescimento), que é o caso das progressões geométricas e no crescimento variado. Nos negócios, a média geométrica da taxa de crescimento tem um nome peculiar: é denominada composição anual da taxa crescimento (CAGR). A média geométrica do crescimento sobre períodos produzem os equivalentes crescimentos constantes da taxa, que ao final de um período acarretam no aumento total.

Vamos agora formalizar o crescimento proporcional:

4.3.2.1 Crescimento Proporcional

O crescimento proporcional é um termo matemático para designar uma relação multiplicativa crescente entre os dados. Essa relação multiplicativa crescente pode ser constante ou pode ser variada. Quando a relação é constante, estamos falando de crescimento exponencial, quando a relação é variada, estamos falando de crescimento variado. Formalmente falando:

Definição 4.10. Dado um conjunto de dados $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, a_{n+1}\}$, $n \in \mathbb{N}$, a taxa de crescimento medida entre a_k e $a_{k+1}, 1 \leq k \leq n$ é $\frac{a_{k+1}}{a_k}$. Para termos um crescimento proporcional, devemos ter $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$. Se $\exists\ c \in \mathbb{R}, c \geq 1; \frac{a_{k+1}}{a_k} = c, \forall k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$, então o crescimento proporcional é exponencial. Caso contrário, dado c $\in \mathbb{R}, c \geq 1$, se $\exists\ k \in \mathbb{N}; \frac{a_{k+1}}{a_k} \neq c$, então o crescimento proporcional é variado.

Portanto, para determinar a medida resumo de tendência central para crescimentos proporcionais, usamos a média geométrica. Veremos que ela corresponde, se aplicada em períodos equivalentes, fielmente ao crescimento total. Para isso, não precisamos conhecer todos os crescimentos sucessivos para determinar a média geométrica. Conhecidos os valores inicias e finais a_1 e a_{n+1} do conjunto de dados, a média geométrica é simplesmente dada por:

$$\bar{X_g} = \left(\frac{a_{n+1}}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{4.15}$$

Com efeito, se calcularmos a média geométrica de todos os crescimentos sucessivos, teremos:

$$\bar{X_g} = \sqrt[n]{\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdot \ \cdots \ \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n}}.$$

Trata-se portanto de um produto telescópico em que os termos vão se anulando até sobrar somente os extremos do produto, ou seja,

$$\bar{X_g} = \sqrt[n]{\frac{\cancel{a_2}}{a_1} \cdot \frac{\cancel{a_3}}{\cancel{a_2}} \cdot \frac{\cancel{a_4}}{\cancel{a_3}} \cdot \ \cdots \ \cdot \frac{a_{n+1}}{\cancel{a_n}}} = \left(\frac{a_{n+1}}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Vejamos um exemplo:

Exemplo 4.5. O preço da gasolina no Brasil passou por grandes aumentos nos últimos meses. Os aumentos mensais dos últimos 4 meses foram, respectivamente, de $9\%, 15\%, 25\%$ e 15%. Qual foi o aumento médio percentual nesse período?

Solução. Veja que se considerarmos o conjunto de dados de referência como os 5 últimos preços, ou seja, $A = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$, com P_1 sendo o preço inicial antes do aumento, então os aumentos de $9\%, 15\%, 25\%$ e 15% correspondem respectivamente aos crescimentos

$$\frac{P_2}{P_1} = 1,09, \quad \frac{P_3}{P_2} = 1,15, \quad \frac{P_4}{P_3} = 1,25, \quad \frac{P_5}{P_4} = 1,15.$$

Vemos portanto que se trata de um crescimento proporcional variado, cujas razões entre dois termos consecutivos do conjunto não é constante.

Se chamarmos de

$$B = \left\{\frac{P_2}{P_1}, \frac{P_3}{P_2}, \frac{P_4}{P_3}, \frac{P_5}{P_4}\right\}$$

o conjunto dos aumentos, então o termo médio dos crescimentos proporcionais é a média geométrica de tal conjunto, isto é,

$$\begin{aligned}\bar{X_g} &= \sqrt[4]{1,09 \cdot 1,15 \cdot 1,25 \cdot 1,15} \\ &= \sqrt[4]{1,801906254} \\ &= 1,1585.\end{aligned}$$

Portanto, a média dos aumentos foi de aproximadamente 16%.

Veja que se tirássemos a média aritmética dos aumentos, teriamos como aumento médio

$$\bar{X} = \frac{15\% + 15\% + 25\% + 9\%}{4} = \frac{64\%}{4} = 16\%.$$

Note que média geométrica nesse caso é aproximadamente igual à média aritmética. De fato, como os aumentos percentuais estão bem distribuídos, isto é, não apresentam tanta variação, então a média aritmética nesse caso pode dar uma boa noção do termo médio considerado.

Exemplo 4.6. Se um investimento rende 10% no primeiro ano e 20% no segundo ano, qual será o rendimento médio desse investimento?

Solução. Seja I_1 o investimento inicial. Após esses dois anos o montante M será igual a

$$M = I_1 \cdot 1,10 \cdot 1,20 = 1,32 \cdot I_1.$$

Se tomarmos a média aritmética teríamos 15% como média, porém, ao calcular o montante ao final dos dois anos obteríamos $M = I_1 \cdot 1,15 \cdot 1,15 = 1,3225 \cdot I_1$, que é diferente de $1,32 \cdot I_1$.

Veja que este exemplo é semelhante ao exemplo anterior e também se trata de um crescimento proporcional variado. De fato, sendo I_1 o investimento inicial , então temos

$$\frac{I_2}{I_1} = 1,10 \quad \text{e} \quad \frac{I_3}{I_2} = 1,20.$$

Logo, temos um crescimento proporcional variado. Portanto, o crescimento médio equivalente é a média geométrica dos crescimentos, isto é,

$$\bar{X_g} = \sqrt[2]{1,10 \cdot 1,20} = 1,1489.$$

Ou seja, o rendimento médio ao longo desses dois anos foi de 14,89% ao ano. Veja ainda que, aplicando essa média ao capital inicial, inferimos que:

$$I_1 \cdot \sqrt{1,10 \cdot 1,20} \cdot \sqrt{1,10 \cdot 1,20} = I_1 \cdot (1,10 \cdot 1,20) = 1,32 \cdot I_1,$$

que é exatamente igual ao valor obtido quando aplicamos os rendimentos originais.

Vemos com estes exemplos que a média geométrica, quando comparada com a média aritmética, sempre é a mais indicada para localizarmos a medida resumo de tendência central quando envolve um conjunto de dados que se relaciona de modo multiplicativo. De fato, a prova dos 9 consiste em aplicar a média geométrica em cada crescimento ou decrescimento sucessivo, para constatarmos que na etapa final não existem perdas significativas, como foi feito no trecho final do exempplo anterior. Vimos também que se o conjunto de dados é estável, isto é, não apresenta um desvio muito grande, então a média aritmética se aproxima da média geométrica. Mas se o conjunto de dados apresenta um desvio significativo, então a média aritmética fica completamente distorcida.

Veremos agora como a média geométrica pode ser aplicada em ações.

4.3.3 Média Geométrica em ações

Muito comum no mercado da bolsas de valores é a oscilação dos preços de ações, que sofrem aumento ou diminuição de preços segundo a lei da oferta e da demanda. De acordo com essa lei, quando a demanda é maior que a oferta, o preço sobe e quando a oferta é maior que a demanda, o preço cai (Pinheiro,2002). Assim, o preço reflete o equilíbrio destas duas forças antagônicas (Mello, 2004).

Com isso, podemos afirmar que as correções são normais na bolsa de valores. Mas às vezes, por alguma anomalia de mercado ou por alguma anomalia da própria empresa, podemos presenciar desvalorizações abruptas que embora raras, podem acabar, ao fim de um determinado período, culminando na falência da empresa (Haugen, 2000).

Vamos ver agora que da mesma forma que acontece com os crescimentos proporcionais positivos, acontece com os crescimentos proporcionais negativos, isto é, os decrescimentos e as desvalorizações.

Definição 4.11. Dado um conjunto de dados formado pelos preços de fechamento das ações ao longo de um determinado período $\{P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n\}, n \in \mathbb{N}$, se tomarmos uma sequência temporal de preços $(P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n, P_{n+1})$, onde P_1 representa o primeiro preço da ação antes do decrescimento e $P_2, P_3, \cdots, P_n, P_{n+1}$ representam os sucessivos decrescimentos ao longo do tempo, então de modo análogo à definição dada em 4.10, o decrescimento proporcional ocorre quando a taxa de decrescimento é dada por $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$ entre dois termos consecutivos da sequência temporal e além disso, $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} < 1$.

Com isso, a média geométrica também pode ser aplicada nos crescimentos proporcionais negativos, pois temos um conjunto de dados que se relaciona de modo multiplicativo (Douglas, 2004). Os equivalentes descrescimentos resultam, se aplicados a uma taxa média constante, no descrescimento total. Isto é, se P_1 é o preço inicial e $\bar{D} = \sqrt[n]{D_1 \cdot D_2 \cdot D_3 \cdot \cdots \cdot D_n}$ é a taxa média de decrescimento, então

$$P_1 \cdot \bar{D}^n = P_{n+1}. \tag{4.16}$$

De fato, como a taxa de decrescimento dos preços é dado pela razão entre dois termos consecutivos, então chamando de $\dfrac{P_2}{P_1} = D_1$ o primeiro decrescimento, $\dfrac{P_3}{P_2} = D_2$ o segundo decrescimento e assim sucessivmente até o enésimo decrescimento $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} = D_n$, temos um recorrência linear homogênea de primeira ordem, isto é:

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 \cdot D_1 \\ P_3 &= P_2 \cdot D_2 \\ P_4 &= P_3 \cdot D_3 \\ &\vdots \\ P_{n+1} &= P_n \cdot D_n. \end{aligned}$$

Substituindo cada termo na expressão seguinte, obtemos:

$$P_{n+1} = P_1 \cdot D_1 \cdot D_2 \cdot D_3 \cdot D_4 \cdot \cdots \cdot D_n,$$

ou seja,

$$P_{n+1} = P_1 \cdot \prod_{i=1}^{n} D_i. \tag{4.17}$$

Como $\prod_{i=1}^{n} D_i = \bar{D}^n$, pois $\bar{D}$ é a média geométrica dos decrescimentos, então a equação (4.17) pode ser reescrita como

$$P_{n+1} = P_1 \cdot \bar{D}^n. \tag{4.18}$$

Portanto, vemos que ao reduzir um conjunto de n decrescimentos a um só decrescimento médio constante, o problema fica bem mais simples.

Veremos agora uma motivação para o nosso próximo problema das desvalorizações.

A Petrobrás, empresa brasileira que negocia ações de petróleo na bolsa de valores, sobre os tickets PETR3 e PETR4, teve uma das maiores desvalorizações da bolsa em apenas dois meses. As ações da empresa despencaram 50%. Entre 2010 e 2014, o preço médio dos papéis caiu 64, 37%. É possível, por exemplo, que alguém que comprou uma ação da Petrobras a R\$50,00, no pico histórico, tivesse amargado um valor de R\$ 3,92 por ação em outubro de 2016, uma queda de mais de 92% na ação.

As empresas aéreas foram uma das mais afetadas durante a pandemia de coronavírus. Segundo a ANAC (Agência nacional de aviação civil) o setor aéreo durante a pandemia do coronavírus em 2020 teve uma queda de 76% no número de passageiros somente no terceiro trimestre em comparação em 2019 e essa queda acentuada no setor aéreo ainda segundo a ANAC, se deveu principalmente ao fechamento de fronteiras e à quarentena. E isso se refletiu no preço das ações de empresas do setor aéreo como Gol, Azul e Embraer. A Gol teve um dos maiores impactos no preço das ações quando a pandemia desencadeou uma crise global. As suas ações, que estão cotadas em bolsa com o ticket Goll4, chegaram a desvalorizar mais de 50% no mês de março, pior momento da pandemia para as ações.

Por outro lado, como afirmava Platão, a "necessidade é a mãe da invenção", e o setor de tecnologia da informação e comunicação no Brasil teve, devido uma forte necessidade de isolamento social e necessidade de adaptação às ferramentas tecnológicas, um aumento de $5,1\%$ em 2020 em comparação a 2019, o equivalente a $6,4\%$ do PIB brasileiro quando aglomerado com os outros setores da tecnologia, segundo a Brascom (2021), mostrando, na contramão de outros setores, um crescimento acelerado e alta capacidade de adaptação para enfrentar as crises advindas do Coronavírus.

E isso se refletiu nas ações de empresas de tecnologia, como Wege, Neogrid, Totvs, etc. Algumas das quais tiveram um crescimento de mais de 50 % quando analisadas as cotações do início do ano de 2020 e fechamento ao término de 2020. Veremos como não só a valorização é benéfica para uma ação, como também a desvalorização, podendo ser uma grande oportunidade de investimento, a depender dos critérios adotados pelo investidor na avaliação da empresa.

Vamos olhar uma tabela que mede a desvalorização de uma ação e a respectiva valorização necessária para recuperar o prejuízo obtido.

Por exemplo:

Tabela 4.4: Comparativo entre desvalorização e valorização

Se você perde	**Tem que ganhar**
5%	5%
10%	11%
15%	18%
20%	25%
25%	33%
30%	43%
35%	54%
40%	67%
45%	82%
50%	100%
75%	300%
90%	900%

Fonte:O Autor

Como podemos ver, quanto maior a desvalorização, maior o percentual de valorização necessário para igualar os prejuízos. Intuitivamente, por raciocínio inverso, podemos inferir incorretamente que a valorização necessária seria a mesma do prejuízo. Por exemplo, se perdemos 50% de valor de uma ação, então por raciocínio inverso, pode-se inferir incorretamente que deveremos recuperar o mesmo percentual para reverter os prejuízos, mas na prática isso não acontece, porque o decrescimento é proporcional variado, ou seja, não é linear como algumas pessoas podem pensar. Vejamos a motivação matemática para abordarmos este fato.

Matematicamente, se 1 é o todo e corresponde a 100%, então a desvalorização tira do todo e a valorização acrescenta ao todo. Portanto, sejam t o período de desvalorização de referência, $D_t \in \mathbb{R}$ o módulo do decrescimento no período t e $V \in \mathbb{R}$ o módulo da valorização no período; então $DV_t = 1 - D_t$ representa a desvalorização no período t, e $1+V$ o quanto o todo deverá sofrer de valorização no período.

Então, se tomarmos $t = 1$ como unidade de tempo, seja em dias, semanas, meses ou anos, etc, e DV_1 a desvalorização em $t = 1$, então teremos que $(1 + V) \cdot (1 - DV_1) = 1$ é a valorização necessária para recuperar o todo no primeiro período de desvalorização. Se quisermos generalizar e encontrar a valorização necessária para recuperar o todo em t períodos de desvalorização, $DV_1, DV_2, DV_3, \cdots, DV_t$, então a equação geral é dada por

$$(1 + V) \cdot (1 - DV_1) \cdot (1 - DV_2) \cdot (1 - DV_3) \cdot \ \cdots \ \cdot (1 - DV_t) = 1. \tag{4.19}$$

Como vimos no decrescimento proporcional, D_t representa o decrescimento proporcional no período t e é dado por $\dfrac{P_{t+1}}{P_t}$, ou seja, é dado pela razão entre os preços de fechamento em períodos consecutivos. Além disso, da mesma forma que fizemos com o crescimento e o decrescimento proporcional, podemos achar o termo médio das desvalorizações ou valorizações por se tratar de um processo multiplicativo.

Por exemplo, se $\{DV_1, DV_2, DV_3, \cdots, DV_t\}$ é o conjunto das desvalorizações em t períodos, então da relação $DV_t = 1 - D_t$ concluimos que $\bar{DV} = 1 - \bar{D}$. Portanto, a desvalorização média é a média geométrica dos decrescimentos a menos de uma unidade. A vantagem de conhecer o termo médio é que ele representa todo o conjunto, e com a média geométrica, não há perdas, isto é, o equivalente médio, se tomado a uma taxa constante em t períodos, produz o equivalente total.

Vimos que conhecidas as desvalorizações, podemos conhecer os decrescimentos e consequentemente o decrescimento médio e por fim a desvalorização média. De modo inteiramente análogo ao raciocínio para localizar a desvalorização média, podemos localizar a valorização média constante de cada período de forma a recuperar o prejuízo.

De fato, dadas as desvalorizações $DV_1, DV_2, DV_3, \cdots, DV_n$, estamos procurando um número que a uma taxa periódica constante recupera o prejuízo total. Se observarmos a equação 4.19 com profundidade, estamos procurando um número $c = (1 + V)$ pertencente aos reais, tal que:

$$\begin{aligned} c \cdot (1 - DV_1) &= 1 \\ c \cdot (1 - DV_2) &= 1 \\ c \cdot (1 - DV_3) &= 1 \\ &\vdots \\ c \cdot (1 - DV_n) &= 1. \end{aligned}$$

Multiplicando estas equações cada uma pela outra, obtém-se:

$$\underbrace{c \cdot c \cdot c \cdot c \ \cdots \ \cdot c}_{n \ vezes} \cdot (1 - DV_1) \cdot (1 - DV_2) \cdot (1 - DV_3) \cdot \ \cdots \ \cdot (1 - DV_n) = 1,$$

isto é,

$$c^n \cdot (1 - DV_1) \cdot (1 - DV_2) \cdot (1 - DV_3) \ \cdots \ \cdot (1 - DV_n) = 1.$$

Reorganizando, temos:

$$c^n = \left(\frac{1}{1-DV_1}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-DV_2}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-DV_3}\right)\cdot\ \cdots\ \cdot\left(\frac{1}{1-DV_n}\right).$$

Note que se considerássemos um conjunto de dados $A = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$, onde

$$x_1 = \left(\frac{1}{1-DV_1}\right),\ \ x_2 = \left(\frac{1}{1-DV_2}\right),\ \ x_3 = \left(\frac{1}{1-DV_3}\right),\ \ \cdots,\ \ x_n = \left(\frac{1}{1-DV_n}\right),$$

teríamos um número c que preserva o produto, isto é:

$$c^n = x_1\cdot x_2\cdot x_3\ \cdots\ \cdot x_n \quad\leftrightarrow\quad c = \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ \cdots\ \cdot x_n}\,.$$

Ou seja, c é a média geométrica desse conjunto de dados A.

Como $c = (1+V)$ é a média geométrica de A, e

$$(1-DV_1) = D_1,\ \ (1-DV_2) = D_2,\ \ (1-DV_3) = D_3, \cdots,\ \ (1-DV_n) = D_n,$$

então $(1+V)$ corresponde ao aumento médio e consequentemente V corresponde à valorização média $\overline{V}$. Portanto,

$$\begin{aligned} c^n &= \left(\frac{1}{1-DV_1}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-DV_2}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-DV_3}\right)\cdot\ \cdots\ \cdot\left(\frac{1}{1-DV_n}\right) \\ \iff (1+\bar{V})^n &= \left(\frac{1}{D_1}\right)\cdot\left(\frac{1}{D_2}\right)\cdot\left(\frac{1}{D_3}\right)\cdot\ \cdots\ \cdot\left(\frac{1}{D_n}\right) \\ \iff (1+\bar{V})^n &= \frac{1}{D_1\cdot D_2\cdot D_3\cdot\ \cdots\ \cdot D_n}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Já que $D_1\cdot D_2\cdot D_3\cdot\ \cdots\ \cdot D_n = \bar{D}^n$, como já vimos na Definição 4.11, então a equação em (4.20) pode ser reescrita como

$$(1+\bar{V})^n = \frac{1}{\bar{D}^n}.$$

Extraindo a raiz enésima dos dois membros da identidade acima, obtemos:

$$\begin{aligned} (1+\bar{V}) &= \frac{1}{\bar{D}} \\ \iff \bar{V} &= \frac{1}{\bar{D}} - 1 \\ \iff \bar{V} &= \frac{1-\bar{D}}{\bar{D}}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Como $\bar{DV} = 1 - \bar{D}$, então (4.21) pode ser escrita do seguinte modo:

$$\bar{V} = \frac{\bar{DV}}{1-\bar{DV}}.$$

Ou seja, podemos escrever a valorização média em função da desvalorização média, o que é muito importante em problemas financeiros que envolvem somente valorização e desvalorização.

Para finalizar esta seção vamos a dois exemplos.

Exemplo 4.7. As ações do Banco do Brasil sofreram forte desvalorização no ano de 2020, passando de um teto de 50 reais para um piso de 21 reais em menos de 2 meses; uma desvalorização de 58%. A quarta semana do pior mês para o banco foi chamada de semana do terror em termos de desvalorização. No primeiro dia a desvalorização foi de 4%, no segundo dia a desvalorização foi de 7%, no terceiro a desvalorização foi de $2,5\%$, no quarto a desvalorização foi de 2% e no quinto dia a desvalorização foi de $4,3\%$. Qual deveria ser a valorização média diária necessária para recuperar o prejuízo na semana seguinte?

Solução. Como sabemos, para calcular a valorização média, recorremos à fórmula dada por

$$\bar{V} = \frac{\bar{DV}}{1 - \bar{DV}},$$

onde $\bar{DV} = 1 - \bar{D}$ e $\bar{D} = \sqrt[n]{D_1 \cdot D_2 \cdot D_3 \cdot \ \cdots \ \cdot D_n}$. Portanto, vamos encontrar primeiramente o decrescimento médio.

Como $DV_n = 1 - D_n$, então vamos substituir todos os dados do problema nestas relações.

Pimeiro, como

$$DV_1 = 4\%, \quad DV_2 = 7\%, \quad DV_3 = 2,5\%, \quad DV_4 = 2\%, \quad DV_5 = 4,3\%,$$

então

$$\begin{aligned} D1 &= 1 - 4\% = 0,96, \\ D_2 &= 1 - 7\% = 093, \\ D_3 &= 1 - 2,5\% = 0,975, \\ D_4 &= 1 - 2\% = 0,98, \\ D_5 &= 1 - 4,3\% = 0,957. \end{aligned}$$

Calculando o decrescimento médio, obtemos:

$$\bar{D} = \sqrt[5]{0,96 \cdot 0,93 \cdot 0,975 \cdot 0,98 \cdot 0,957} \approx 0,9602.$$

Calculando a desvalorização média, chegamos ao valor

$$\bar{DV} = 1 - 0,9602 = 0,0398.$$

Agora basta calcular a valorização média, substituindo os dados encontrados até então. Daí,

$$\bar{V} = \frac{0,0398}{0,9602} = 0,041.$$

Logo, $\bar{V} = 0,041$ aproximadamente, o que implica dizer que na semamana seguinte as ações de Banco do Brasil teriam que valorizar em média $4,1\%$ ao dia para ao final dessa mesma semana haver uma recuperação de todo o prejuízo das desvalorizações ocorridas. Isso equivale a uma valorização de aproximadamente $20,5\%$ na semana.

Exemplo 4.8. Uma ação de petróleo tem no dia 01 de maio um preço de fechamento da ação cotada a 50 reais. A partir daí teve a cotação em 01 de junho, um fechamento a $R\$ 42,50$,, em 01 de julho uma cotação de fechamento a $R\$ 39,00$, e em 01 de agosto, após três meses, fechou a $\mathbf{x}$ reais. Sabendo que a desvalorização média dessa ação de petróleo nesse trimestre foi de 10%, calcule o valor de $\mathbf{x}$.

Solução. Como a desvalorização média é dada por $\bar{DV} = 1 - \bar{D}$ e $\bar{D} = \sqrt[n]{D_1 \cdot D_2 \cdot D_3 \cdot \ \cdots \ \cdot D_n}$, então vamos calcular o decrescimento com base na razão entre os preços de fechamento como vimos na seção de decrescimento proporcional. Portanto,

$$D_1 = \frac{R\$42,50}{R\$50} = 0,85, \quad D_2 = \frac{R\$39,00}{R\$42,50} = 0,917 \quad \text{e} \quad D_3 = \frac{\mathbf{x}}{R\$39,00}.$$

Como $\bar{DV} = 10\%$, tem-se que $10\% = 1 - \bar{D}$. Logo, $\bar{D} = 1 - 0,1 = 0,9$.

Além disso, como $\bar{D} = \sqrt[n]{D_1 \cdot D_2 \cdot D_3 \cdot \ \cdots \ \cdot D_n}$, então

$$\begin{aligned} 0,9 &= \sqrt[3]{0,85 \cdot 0,917 \cdot \frac{\mathbf{x}}{39,00}} \\ &= \sqrt[3]{0,77945 \cdot \frac{\mathbf{x}}{39}}. \end{aligned}$$

Elevando ao cubo ambos os membros da igualdade acima, temos:

$$\begin{aligned} (0,9)^3 &= \frac{0,77945 \cdot \mathbf{x}}{39} \\ \iff 0,729 &= \frac{0,77945 \cdot \mathbf{x}}{39} \\ \iff \mathbf{x} &= \frac{28,431}{0,77945} \approx R\$\ 36,48. \end{aligned}$$

Vimos nesta seção a importância da média geométrica em um conjunto de dados que se comportam de modo multiplicativo. Na próxima seção vamos ver como a média harmônica é importante para a análise de conjunto de dados de grandezas inversamente proporcionais e sua apliação no mercado de ações. Para embasar esse texto usamos os estudos de Chou (1969).

4.4 Média Harmônica

Como visto na parte introdutória do estudo das médias, a Média harmônica é uma das três médias pitagóricas desenvolvida por Arquitas de Tarento, o qual cunhou o termo harmônica em homenagem as oitavas de Pitágoras. Ela é muito usada para exprimir o termo central de um conjunto de dados formados por grandezas inversamente proporcionais exprimidas por taxas ou razões, Chou(1969). Vamos definir com mais precisão a média harmônica abaixo.

Definição 4.12. Para um conjunto de dados positivos $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, x_3, \ \cdots x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, a média harmônica desse conjunto é definida por:

$$\overline{X}_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ \cdots \ \frac{1}{x_n}}. \tag{4.22}$$

Vamos ver, a partir de expressões mais simples, como a média harmônica pode ser escrita de outra forma e tirar a partir daí algumas conclusões matemáticas.

Suponha que queremos trabalhar com um conjunto de dados de apenas dois valores positivos, isto é, suponha que $\mathbf{X} = \{x_1, x_2\}$. Então, a média harmmônica desse conjunto é dada por

$$\bar{X}_h = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}},$$

que também pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\overline{X}_h &= \frac{2}{\dfrac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}} \\ &= \frac{2 \cdot x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2} \\ &= \frac{x_1 \cdot \boxed{x_2} + x_2 \cdot \boxed{x_1}}{\boxed{x_2} + \boxed{x_1}}.\end{aligned}$$

Vejamos a média harmônica para um conjunto $\mathbf{X}$ com três dados positivos, ou seja, a média harmônica para $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$:

$$\begin{aligned}\bar{X}_h &= \frac{3}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}} \\ &= \frac{3}{\dfrac{x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}} \\ &= \frac{x_1 \cdot \boxed{x_2 \cdot x_3} + x_2 \cdot \boxed{x_1 \cdot x_3} + x_3 \cdot \boxed{x_1 \cdot x_2}}{\boxed{x_2 \cdot x_3} + \boxed{x_1 \cdot x_3} + \boxed{x_1 \cdot x_2}}.\end{aligned}$$

Para o caso geral, seguindo esse mesmo processo, vamos definir alguns conjuntos para facilitar as notações.

Definição 4.13. Seja $I_n = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots, n\}, \quad n \in \mathbb{N}$. Dado $i \in I_n$, chamaremos de $Z_i = \{i\}$,o conjunto unitário formado por apenas um elemento de I_n, e de $C = I_n - Z_i$ o complementar de I_n em relação a Z_i. Para a generalização da média harmônica, utilizaremos um conjunto de dados com índices em I_n, isto é, o conjunto $A = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$. Assim, se $j \in C$, o número $P_i = \prod_{j \in C} x_j$ é o produto de todos os elementos com índices que pertencem a C mas que não pertencem a Z_i. Portanto, a média harmônica do conjunto A é dado por:

$$\bar{X}_h = \frac{\displaystyle\sum_{i \in Z_i} x_i P_i}{\displaystyle\sum_{i \in Z_i} P_i}. \tag{4.23}$$

Ou seja,a média harmônica nada mais é do que um caso especial da média aritmética ponderada, onde P_i são os respectivos pesos para cada ponto de dados x_i.

A partir desta expressão fica muito mais simples tirar conclusões a partir das expressões dadas em (4.22) e (4.23). Vamos ilustras algumas propriedades na próxima subseção abaixo.

4.4.1 Propriedades da Média Harmônica

1. Como vimos da expressão (4.23), por ser um caso especial de média harmônica, valem as mesmas propriedades da média aritmética ponderada, considerados os pesos especiais dados na expressão (4.23).

2. Da expressão (4.22), a primeira propriedade que podemos notar é que a média harmônica conserva a soma dos inversos, isto é, podemos substituir cada ponto de dados por $\bar{X}_h$ sem prejuízo de erro no valor central.

Demonstração. De fato,

$$
\begin{aligned}
\bar{X}_h &= \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots\ \frac{1}{x_n}} \\
\iff \quad \frac{1}{\bar{X}_h} &= \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n} \\
\iff \quad \frac{n}{\bar{X}_h} &= \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots+\frac{1}{x_n},
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\underbrace{\frac{1}{\bar{X}_h}+\frac{1}{\bar{X}_h}+\frac{1}{\bar{X}_h}+\cdots+\frac{1}{\bar{X}_h}}_{n\ vezes} = \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ \cdots\ +\frac{1}{x_n}.$$

□

3. A Média Harmônica é ideal para grandezas inversamente proporcionais.

Demonstração. De fato, dada uma grandeza $Y = \frac{a}{b}$, sabemos que b é inversamente proporcional a Y, isto é, quanto maior for o módulo de b, menor será o módulo de Y, e vice-versa. Daí, se usassemos qualquer outra média, considerando pesos simples, fossem elas média aritmética normal ou média geométrica, então as grandezas presentes no numerador da razão estariam bem posicionadas no centro, mas as grandezas presentes no denominador não. Portanto para equilibrar isso, faz-se necessário pesos especiais como vimos em (4.23). Vejamos como ficam as grandezas na presença de pesos especiais.

Sejam x_1, x_2, x_3 três pontos de dados positivos, com $x_1 < x_2 < x_3$. Como vimos na equação 4.23, para um conjunto de dados formado por 3 elementos, os pesos P_i são dados por:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= x_2 \cdot x_3, \\
P_2 &= x_1 \cdot x_3, \\
P_3 &= x_2 \cdot x_1.
\end{aligned}
$$

Daí, de $x_1 < x_2 < x_3$ seguem três desigualdades:

I) $x_1^2 < x_2 \cdot x_1 < x_1 \cdot x_3$ (multiplicando a desigualdade original por x_1);

II) $x_1 \cdot x_2 < x_2^2 < x_3 \cdot x_2$ (multiplicando a desigualdade original por x_2);

III) $x_1 \cdot x_3 < x_2 \cdot x_3 < x_3^2$(multiplicando a desigualdade original por x_3).

De I), II) e III) segue que:

$$x_1 \cdot x_2 < x_1 \cdot x_3 < x_2 \cdot x_3,$$

ou seja, $P_3 < P_2 < P_1$.

O mesmo processo serve para o caso geral, cuja demonstração é análoga. Isto é, se

$$A = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$$

é um conjunto de dados positivos, com $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$, então

$$P_n < P_{n-1} < P_{n-2} < P_{n-k} < \cdots < P_1, k \in I_n.$$

De fato, como feito anteriormente, da desigualdade $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$, criamos n desigualdades multiplicando esta desigualdade por $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ respectivamente e comparamos as desigualdades de forma a obter o resultado. □

Com isso vemos que, como na média ponderada, a média harmônica tende a se aproximar do dado de maior peso. A média harmônica portanto equilibra essa relação desigual entre os pontos de dados fazendo uma relação inversa entre pesos e valor de cada ponto de dados, ou seja, quanto maior o valor numérico do ponto, menor será o seu peso intrínseco, atribuído pela média harmônica.

4.4.2 Unicidade da Média Harmônica

Como vimos, a média harmônica, assim como a média artimética e a média geométrica, é uma medida de posicão que tende a centralizar o conjunto de dados, de forma a ser uma boa medida-resumo (Chou, 1969). Mas se tivessémos outro elemento canditado para ser uma boa medida-resumo de valor central, veríamos que este candidato, na verdade, é o mesmo, isto é, a média harmônica.

Com efeito, seja $c > 0$ um candidato que preserve a soma dos inversos. Então:

$$\underbrace{\frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \cdots + \frac{1}{c}}_{n\ vezes} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \cdots + \frac{1}{x_n}. \tag{4.24}$$

Porém, conforme visto na equação (4.22), a média harmônica também é um número que preserva a soma dos inversos. Logo,

$$\underbrace{\frac{1}{\bar{X}_h} + \frac{1}{\bar{X}_h} + \frac{1}{\bar{X}_h} + \cdots + \frac{1}{\bar{X}_h}}_{n\ vezes} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \cdots + \frac{1}{x_n}. \tag{4.25}$$

De (4.24) e de (4.25) temos que:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \cdots + \frac{1}{c}}_{n\ vezes} = \underbrace{\frac{1}{\bar{X}_h} + \frac{1}{\bar{X}_h} + \frac{1}{\bar{X}_h} + \cdots + \frac{1}{\bar{X}_h}}_{n\ vezes} \\
\iff\ & n \cdot \frac{1}{c} = n \cdot \frac{1}{\bar{X}_h} \\
\iff\ & \frac{1}{c} = \frac{1}{\bar{X}_h},
\end{aligned}$$

e portanto, $\bar{X}_h = c$.

Na próxima subseção vamos abordar a média harmônica ponderada, bastante importante para um conjunto de dados que possui algum peso atribuído ou mesmo com uma frequência maior que 1.

4.4.3 Média Harmônica Ponderada

Definição 4.14. A média harmônica ponderada é o número que representa o valor central de um conjunto de dados com algum peso atribuído ou uma frequência maior que 1. Mais precisamente, dado um conjunto de dados positivos $A = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$, com pesos positivos $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$, a média harmônica ponderada de tal conjunto é

$$\bar{X}_h = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + \cdots P_n}{\dfrac{P_1}{x_1} + \dfrac{P_2}{x_2} + \cdots + \dfrac{P_n}{x_n}}. \tag{4.26}$$

A média harmônica ponderada é muito comum em casos onde a incidência de um dado é relevante, isto é, em situações que a sua frequência é levada em consideração e a sua maior vantagem reside no fato de que ela pose ser usada em conjuntos distintos, da mesma forma que foi usado na média geométrica e na média aritmética. Ou seja, quando forem dados dois ou mais conjuntos distintos mas de mesma natureza, podemos ter a média harmônica ponderada do conjunto união, dadas as médias harmônicas ponderadas de cada conjunto isoladamente. Vamos ver mais a fundo como podemos formalizar isto.

4.4.4 Relação entre Média Harmônica e Média Harmônica Ponderada

Considere os conjuntos de dados positivos $A_1 = \{x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, \cdots, x_{1i}\}$ com i termos, $A_2 = \{x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, \cdots, x_{2j}\}$ com j termos, $A_3 = \{x_{31}, x_{32}, x_{33}, \cdots, x_{3k}\}$ com k termos, e assim sucessivamente até $A_n = \{x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \cdots, x_{nl}\}$ com l termos. Além disso, cada observação de cada conjunto tem pesos positivos $P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14}, \cdots, P_{1i}$ para o conjunto A_1, pesos positivos $P_{21}, P_{22}, P_{23}, P_{24}, \cdots, P_{2j}$ para o conjunto A_2, pesos positivos $P_{31}, P_{32}, P_{33}, P_{34}, \cdots, P_{3k}$ para o conjunto A_3 e assim sucessivamente. Além disso, cada conjunto tem a sua média harmônica própria, isto é, chamaremos de $\bar{X_{h1}}, \bar{X_{h2}}, \bar{X_{h3}}, \bar{X_{h4}}, \cdots, \bar{X_{hn}}$ as respectivas médias harmônicas de cada conjunto $A_1, A_2, A_3, A_4, \cdots, A_n$.

Suponhamos que queiramos a média harmônica de um conjunto de dados que seja a união de dois ou mais conjuntos, conhecendo-se apenas as médias harmônicas de cada conjunto isoladamente e os somatórios das frequências ou pesos de cada conjunto. Aproveitaremos a notação usada para somatório das frequências das observações, quando foi discutida a média aritmética ponderada na Proposição 4.1. Então cada conjunto terá seu devido somatório de frequências $F_{A_1}, F_{A_2}, F_{A_3}, \cdots, F_{A_n}$, para cada conjunto $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$, respectivamente.

Para ilustrar, vamos encontrar a média harmônica de um conjunto formado pela união de dois outros e depois de três conjuntos, para podermos generalizar para um conjunto união formado pela união de n conjuntos.

Seja um conjunto $X = A_1 \cup A_2$, tal que, a média harmônica de A_1 é $\bar{X_{h1}}$, a média harmônica de A_2 é $\bar{X_{h2}}$, a soma das frequências ou pesos de A_1 é F_{A_1} e a soma das frequências ou pesos de A_2 é F_{A_2}. Sabemos que o conjunto união contém todos os elementos do conjunto A_1 e do conjunto A_2; portanto, aplicando a fórmula da média harmônica vista em (4.22), temos:

$$\bar{X_h}(A_1 \cup A_2) = \frac{F_{A1} + F_{A2}}{\displaystyle\sum_{y=1}^{i} \frac{P_{1i}}{x_{1i}} + \sum_{z=1}^{j} \frac{P_{2z}}{x_{2z}}}. \tag{4.27}$$

Como a média harmônica do conjunto A_1 é $\bar{X_{h1}}$, então da fórmula da média harmônica temos:

$$\bar{X_{h1}} = \frac{F_{A_1}}{\displaystyle\sum_{y=1}^{i} \frac{P_{1i}}{x_{1i}}}.$$

E pela fómula da média harmônica do conjunto A_2, temos:

$$\bar{X_{h2}} = \frac{F_{A2}}{\displaystyle\sum_{z=1}^{j} \frac{P_{2z}}{x_{2z}}}.$$

Isolando $\displaystyle\sum_{y=1}^{i} \frac{P_{1y}}{x_{1y}}$ na média harmônica do conjunto A_1 e $\displaystyle\sum_{z=1}^{j} \frac{P_{2z}}{x_{2z}}$ na média harmônica do conjunto A_2 e substituindo em (4.27), obtemos:

$$
\begin{aligned}
\bar{X_h}(A_1 \cup A_2) &= \frac{F_{A_1} + F_{A_2}}{\dfrac{F_{A_1}}{\bar{X_{h1}}} + \dfrac{F_{A_2}}{\bar{X_{h2}}}} \\
&= \frac{F_{A_1} + F_{A_2}}{\dfrac{\bar{X_{h2}} \cdot F_{A_1} + \bar{X_{h1}} \cdot F_{A_2}}{\bar{X_{h1}} \cdot \bar{X_{h2}}}} \\
&= \frac{(F_{A_1} + F_{A_2}) \cdot \bar{X_{h1}} \cdot \bar{X_{h2}}}{\bar{X_{h2}} \cdot F_{A_1} + \bar{X_{h1}} \cdot F_{A_2}}.
\end{aligned}
$$

Vimos que para calcularmos a média harmônica da união de dois conjuntos precisamos apenas da média harmônica de cada um deles e do somatório das frequências ou pesos de cada um deles, sendo dispensável as observações, ou seja, não precisamos utilizar as observações do conjunto união para concluir a sua respectiva média harmônica. Agora vamos calcular a média harmônica da união de três conjuntos para observarmos o padrão e em seguida podermos generalizar.

Sejam A_1,A_2,A_3 três conjuntos de dados positivos. Sabendo que a média harmônica de cada um deles é $\bar{X_{h1}}$,$\bar{X_{h_2}}$ e $\bar{X_{h3}}$, qual a média harmônica $\bar{X_h}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$?

Conforme feito anteriormente, o conjunto união reune todos os elementos de A_1, de A_2 e de A_3. Portanto, pela fórmula da média harmônica, temos:

$$
\bar{X_h}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \frac{F_{A_1} + F_{A_2} + F_{A_3}}{\displaystyle\sum_{y=1}^{i} \frac{P_{1y}}{x_{1y}} + \sum_{z=1}^{j} \frac{P_{2z}}{x_{2z}} + \sum_{w=1}^{k} \frac{P_{3w}}{x_{3w}}}. \tag{4.28}
$$

Como a média harmônica do conjunto A_1 é $\bar{X_{h1}}$, segue da fórmula da média harmônica que

$$
\bar{X_{h1}} = \frac{F_{A_1}}{\displaystyle\sum_{y=1}^{i} \frac{P_{1i}}{x_{1i}}}.
$$

E pela fómula da média harmônica do conjunto A_2 temos:

$$
\bar{X_{h2}} = \frac{F_{A_2}}{\displaystyle\sum_{z=1}^{j} \frac{P_{2z}}{x_{2z}}}.
$$

Temos ainda a média harmônica do conjunto A_3, dada por

$$
\bar{X_{h3}} = \frac{F_{A_3}}{\displaystyle\sum_{w=1}^{k} \frac{P_{3w}}{x_{3w}}}.
$$

Isolando $\displaystyle\sum_{y=1}^{i} \frac{P_{1i}}{x_{1i}}$ na média harmônica do conjunto A_1, $\displaystyle\sum_{z=1}^{j} \frac{P_{2z}}{x_{2z}}$ na média harmônica do conjunto A_2, $\sum_{w=1}^{k} \frac{P_{3w}}{x_{3w}}$ na média harmônica do conjunto A_3 e substituindo em (4.27), obtemos:

$$
\begin{aligned}
\bar{X_h}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \frac{F_{A_1} + F_{A_2} + F_{A_3}}{\frac{F_{A_1}}{\bar{X_{h1}}} + \frac{F_{A_2}}{\bar{X_{h2}}} + \frac{F_{A_3}}{\bar{X_{h3}}}} \\
&= \frac{F_{A_1} + F_{A_2} + F_{A_3}}{\frac{\bar{X_{h2}} \cdot \bar{X_{h3}} \cdot F_{A_1} + \bar{X_{h1}} \cdot \bar{X_{h3}} \cdot F_{A_2} + \bar{X_{h1}} \cdot \bar{X_{h2}} \cdot F_{A_3}}{\bar{X_{h1}} \cdot \bar{X_{h2}} \cdot \bar{X_{h3}}}} \\
&= \frac{(F_{A_1} + F_{A_2} + F_{A_3}) \cdot \bar{X_{h1}} \cdot \bar{X_{h2}} \cdot \bar{X_{h3}}}{\bar{X_{h2}} \cdot \bar{X_{h3}} \cdot F_{A_1} + \bar{X_{h1}} \cdot \bar{X_{h3}} \cdot F_{A_2} + \bar{X_{h1}} \cdot \bar{X_{h2}} \cdot F_{A_3}}.
\end{aligned}
$$

Como podemos ver, o processo para obtenção da média harmônica da união de dois e três conjuntos é bem intuitivo. O processo para obter a média harmônica de n conjuntos segue exatamente do mesmo modo: basta substituir a expressão do somatório das observações com os pesos na expressão do somatório geral e tirar o M.M.C dos denominadores e depois usar a propriedade da divisão de frações, obtendo com isso a expressão:

$$
\bar{X_h}(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n) = \frac{(F_{A_1} + F_{A_2} + F_{A_3} + F_{A_4} + \cdots + F_{A_n}) \cdot \bar{X_{h1}} \cdot \bar{X_{h2}} \cdot \bar{X_{h3}} \cdot \ \cdots \ \cdot \bar{X_{hn}}}{F_{A_1} \cdot P_1 + F_{A_2} \cdot P_2 + F_{A_3} \cdot P_3 + \cdots + F_{A_n} \cdot P_n}, \qquad (4.29)
$$

onde esses $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$ são exatamente os produtórios de todos os elementos com índices que pertencem a C mas que não pertencem a Z_i, conforme vemos da Definição 4.13.

Para o caso especial $F_{A_1} = F_{A_2} = F_{A_3} = \cdots = F_{A_n}$, a equação 4.29 pode ser escrita como

$$
\begin{aligned}
\bar{X_h}(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n) &= \frac{(F_{A_1} + F_{A_1} + F_{A_1} + F_{A_1} + \cdots + F_{A_1}) \cdot \bar{X_{h1}} \cdot \bar{X_{h2}} \cdot \bar{X_{h3}} \cdot \ \cdots \ \cdot \bar{X_{hn}}}{F_{A_1} \cdot P_1 + F_{A_1} \cdot P_2 + F_{A_1} \cdot P_3 + \cdots + F_{A_1} \cdot P_n} \\
&= \frac{n \cdot F_{A_1} \cdot \bar{X_{h1}} \cdot \bar{X_{h2}} \cdot \bar{X_{h3}} \cdot \ \cdots \ \cdot \bar{X_{hn}}}{F_{A_1} \cdot (P_1 + P_2 + P_3 + P_n)}.
\end{aligned}
$$

Daí, cancelando F_{A_1}, obtemos:

$$
\bar{X_h}(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n) = \frac{n \cdot \bar{X_{h1}} \cdot \bar{X_{h2}} \cdot \bar{X_{h3}} \cdot \ \cdots \ \cdot \bar{X_{hn}}}{(P_1 + P_2 + P_3 + P_n)}.
$$

Para finalizar esta seção, vamos às aplicações da média harmônica no contexto de ações. Vejamos como o seu uso é bastante simples e intuitivo.

4.4.5 Média Harmônica no Mercado de Ações

Como vimos anteriormente, a média harmônica é uma das três médias pitagóricas responsável por ser uma boa medida resumo para um conjunto de dados de grandezas inversamente proporcionais, relaçãoes, taxas, etc.

Em finanças, a média harmônica é usada para determinar a média para múltiplos financeiros, como o índice preço / lucro (P / L), o preço por valor patrimonial (P / VP), o preço da ação por ativo (P / Ativo) e outras relações financeiras. Vamos explicar cada uma delas a seguir.

O índice P / L é a relação entre o preço por ação de uma empresa e lucro por ação. Dá aos acionistas de uma empresa pré-determinada uma noção melhor do valor de uma empresa. O P / L mostra as expectativas do mercado quanto ao upside e valuation da empresa olhando sobre as perpectivas do lucro e o quão pode estar descontada a ação.

O preço por valor patrimonial (P / VP) é a relação entre o preço da ação e o valor patrimonial por ação de uma empresa pré-determinada. O valor patrimonial de uma ação é o pratimônio líquido de uma empresa sobre a quantidade de ações emitidas por uma empresa. Dá aos acionistas uma visão macro da empresa ao saber se o preço da ação está realista com o patrimônio líquido da empresa ou se está exagerada.

O preço por ativo (P / Ativo) é o preço por ação sobre o total de ativos da empresa. Mais precisamente, o total de ativos da empresa é expresso pelo valor contábil por ação. Este indicador é essencial para os investidores saberem se a empresa está valorizada ou desvalorizada em relação ao seu valor contábil.

O Valor contábil de uma empresa é o valor que se calcula considerando-se todos os seus ativos como maquinários, insumos, patrimônio tangíveis e intangíveis que podem ser reconhecidos no seu balanço. O valor contábil por ação é dado pelo valor total dos ativos dividido pelo total de ações emitidas pela empresa.

Quanto menor for o preço por ativo, mais desvalorizada estará, em tese, o valor das ações em relação aos seus ativos, o que pode ser um fator importante para investimentos de longo prazo. Além disso, existem várias maneiras de aumentar o preço por ativo de uma empresa qualquer. Através de uma simples observação na fórmula do P /Ativo, vemos que o mecanismo de recomprar ações dos acionistas, isto é, retirar ações de circulação do mercado para diminuir o quociente, aumentar os ativos, etc, são algumas destas maneiras.

Esses indicadores que descrevemos acima são indicadores chamados de fundamentalistas, que servem para avaliar uma empresa de acordo com sua situação financeira, mercadológica e até mesmo política. Esses indicadores constituem uma das principais ferramentas de estudo para investidores de longo prazo (DEBASTIANI; RUSSO, 2008).

A média dos múltiplos financeiros não deve ser calculada usando a média aritmética porque ela é, como vimos, tendenciosa para valores maiores. Veremos nos exemplos a seguir como podemos aplicar o conceito de média harmônica e suas propriedades. Começaremos com um dos problemas mais comuns em finanças que utilizam a média harmônica, que é o cálculo do índice de uma carteira composta por diversos títulos. Para embasar nossos próximos exemplos vamos utlizar principios de contabilidade usados no livro de Ludícibus, Martins e Gelbecke (2000).

Exemplo 4.9. Suponha que você é um analista de ações em um banco de investimento e seu gerente pediu que você determinasse a relação P / L do índice das ações da Empresa X e da Empresa Y. A empresa X relata uma capitalização de mercado[2] de 1 bilhão de reais e lucros de 20 milhões. A empresa Y relata uma capitalização de mercado de 20 bilhões e ganhos de 5 bilhões. O índice consiste em 40% da Empresa X e 60% da Empresa Y. Qual o valor de mercado (Empresa X) + valor de mercado (Empresa Y)?

Em primeiro lugar, precisamos encontrar os índices P / L de cada empresa. Lembre-se de que o índice P / L é essencialmente a capitalização de mercado dividida pelos ganhos.

$$\text{P / L (Empresa X)} = (\text{ 1 bilhão}) / (\text{ 20 milhões}) = 50.$$

$$\text{P / L (Empresa Y)} = (\text{ 20 bilhões}) / (\text{ 5 bilhões}) = 4.$$

Devemos usar a média harmônica ponderada para calcular a relação P / L do índice. Usando a

[2] A capitalização de mercado (Market Cap) é o valor de mercado mais recente das ações em circulação de uma empresa.

fórmula para a média harmônica ponderada, a relação P / L do índice pode ser encontrada da seguinte maneira:

$$\text{P / L(Índice)} = (0,4+0,6)/(0,4/50+0,6/4) = 6,33.$$

Observe que se calcularmos a razão P / L do índice usando a média aritmética ponderada, seria significativamente exagerado:

$$\text{P / L (Índice)} = 0,4 \cdot 50 + 0,6 \cdot 4 = 22,4.$$

Vejamos também que se usássemos a média geométrica ponderada, teríamos:

$$\text{P / L (Índice)} = 50^{0,4} \cdot 4^{0,6} = 4,78 \cdot 2,3 \approx 11.$$

Vemos que se tomássemos a média aritmética como referência para o P / L, a soma do valor de mercado das empresas X e Y seria altamente distorcido do valor de mercado real.

De fato, suponha que o P / L do índice seja dado pela média aritmética ponderada do P / L de cada empresa. Então como vimos, as médias são medidas resumo, que representam ou que tentam representar todo o conjunto de maneira singular. Com isso, a medida resumo poderia subtituir qualquer observação do conjunto de dados para expressar a sua tendência. Então, se o P / L do índice é 22,4, a média 22,4 substitui de maneira resumida o P / L da empresa X e o P / L da empresa Y, daí temos que:

P / L (Empresa X) =22,4 (significa que a empresa X apresenta em média um preço por ação de 22,4 reais a cada 1 real de lucro obtido nos últimos 12 meses).

P / L (Empresa Y)= 22,4 (significa que a empresa Y apresenta em média um preço por ação de 22,4 reais a cada 1 real de lucro nos últimos 12 meses).

Como sabemos o lucro da empresa X, basta multiplicar a relação P / L por 20 milhões no denominador e o preço por ação médio de 22,4 reais por 20 milhões para termos uma estimativa do valor de mercado da empresa X. Da mesma forma fazemos com a empresa Y, tomamos como referência o P / L médio, multiplicamos pelo lucro de 5 bilhões no denominador e e multiplicamos o preço por ação médio de 22,4 por 5 bilhões para termos uma estimativa do valor de mercado da empresa Y.

Efetuadas essas operações, vamos ter como resultado:

$$\text{P / L (Empresa X)} = \frac{22,4 \cdot 20.10^6}{20.10^6} = \frac{448.10^6}{20.10^6} = 22,4.$$

Ou seja, para ter um P / L médio de 22,4, um lucro de 20 milhões da empresa X corresponde a um valor de mercado de 448 milhões de reais.

Da mesma forma vale para a Empresa Y. Para ter um P / L médio de 22,4 e um lucro de 5 bilhões, a empresa precisa ter uma valor de mercado de 112 bilhões, isto é:

$$\text{P / L (Empresa Y)} = \frac{22,4 \cdot 5.10^9}{5.10^9} = \frac{112.10^9}{5.10^9} = 22,4.$$

Se somarmos os valores de mercado das duas empresas,temos:

$$\text{Valor de mercado(Empresa X)} + \text{Valor de mercado (Empresa Y)} = 112.10^9 + 0,448.10^9 = 112,448 \text{ bilhões.}$$

Ou seja, a valor de mercado das duas empresas juntas corresponde a mais de 112 bilhões de reais, muito fora da realidade se somarmos os valores de mercado real das duas empresas, que é de 21 bilhões de reais.

Vejamos se em vez de utilizarmos a média aritmética utilizarmos a média geométrica para calcularmos o P / L médio, o que acontece com a soma do valor de mercado das duas empresas.

Como vimos anteriormente, calculamos o P / L do índice utilizando a média geométrica, o que deu aproximadamente um P / L médio de 11. Vamos utilizar esse P / L médio para calcularmos o valor de mercado corresponde de cada empresa e depois somarmos a valor de mercado das duas empresas.

$$\text{P / L (Empresa X)}: \frac{11 \cdot 20.10^6}{20.10^6} = \frac{220.10^6}{20.10^6} = 11.$$

Ou seja, para ter um P / L médio de 11 e um lucro de 20 milhões, a empresa X precisa ter um valor de mercado de 220 milhões de reais.

Da mesma forma, vamos calular o valor de mercado da empresa Y, sabendo o P / L médio.

$$\text{P / L (Empresa Y)}: \frac{11 \cdot 5.10^9}{5.10^9} = \frac{55.10^9}{5.10^9} = 11.$$

Daí, o valor de mercado da empresa Y é de 11 bilhões. Somando-se o valor de mercado de ambas as empresas, temos:

$$\text{Valor de mercado(Empresa X) + Valor de mercado (Empresa Y)} = 55.10^9 + 0,22.10^9 = 55,22 \text{ bilhões}.$$

Veja que ainda é desproporcional ao valor de mercado das duas empresas juntas.

Se utilizamos o P / L do índice utilizando a média harmônica como foi utilizado, temos um P / L médio de 6,33. Utilizando esse P / L médio como uma medida-resumo para cada empresa, temos:

$$\text{P / L (Empresa X)}=\frac{6,33 \cdot 20.10^6}{20.10^6} = \frac{126,6.10^6}{20.10^6} = 6,33.$$

Portanto, a empresa X apresenta um valor de mercado de 126,6 milhões de reais.

Fazendo de maneira análoga para a empresa Y, temos:

$$\text{P / L (Empresa Y)}=\frac{6,33 \cdot 5.10^9}{5.10^9} = \frac{31,65}{5.10^9} = 6,33.$$

Logo, a empresa Y apresenta um valor de mercado de 31,65 bilhôes de reais com esta medida resumo.

Fazendo a soma do valor de mercado das duas empresas, temos:

$$\begin{aligned}\text{Valor de mercado (Empresa X) + Valor de mercado (Empresa Y)} &= 31,65.10^9 + 0,1266.10^9 \\ &= 31,77 \text{ bilhões}.\end{aligned}$$

Portanto, como podemos ver, a média harmônica é a mais fidedigna das três médias pitagóricas para representar um conjunto de dados formado por relações ou razões.

Vamos ao próximo exemplo.

Exemplo 4.10. Uma empresa X teve um crescimento do patrimônio líquido nos primeiros 6 meses do ano de 2021 de aproximadamente 200 %, enquanto suas ações se valorizaram 400 % nesse período. Nos últimos 6 meses o patrimônio líquido cresceu 300 % e as ações se valorizaram 150 % nesse período. Dito isto, qual foi o crescimento médio do preço por valor patrimonial (P / VP) em 1 ano? É razoável investir nessa empresa olhando sobre a perspectiva do preço por valor patrimonial?

Solução. Chamaremos de $\frac{P}{VP}$ a relação do preço por valor patrimonial antes dos crescimentos. Isto é, chamamos de P o preço das ações no início do ano de 2021 e VP o valor patrimonial da empresa X no início do ano. Como sabemos, a média harmônica, assim como as outras médias, depende de observações constantes em periodos de tempo iguais. Veja que nos primeiros 6 meses a observação "**preço por valor patrimonial**" passou de $\frac{P}{VP}$ para $\frac{5P}{3VP}$, enquanto nos 6 últimos meses a observação passou de $\frac{5P}{3VP}$ para $\frac{12,5P}{12VP}$. Agora precisamos calcular um equivalente constante, ou seja, uma medida resumo que á uma taxa de crescimento constante conseguiriamos calcular a taxa média do preço por ação em relação ao valor patrimonial.

Como sabemos, para calcularmos a taxa média, precisamos de observações fixas em períodos equivalentes para podermos calcular qualquer que seja a média e neste caso, como queremos a média de taxas ou de razões, precisamos calcular a média harmônica. Tomando o período de 6 meses como referência, temos três instantes possíveis: t_0, t_1, t_2, onde t_0 é o instante inicial dado por $\frac{P}{VP}$ e t_2 é o instante final dado por $\frac{12,5P}{12VP}$. Daí, vamos calcular as taxas equivalentes entre periodos consecutivos, que no caso é dado pela média harmônica entre dois períodos consecutivos e no final vamos calcular a média harmônica das taxas médias equivalentes.

Entre a observação t_0 e a observação t_1, o que equivale a um período de 6 meses, tivemos uma variação entre duas razões, de $\frac{P}{VP}$ para $\frac{5P}{3VP}$. Portanto, devemos calcular a média harmônica equivalente para tais. Daí, calculando-se a média harmônica entre t_0 e t_1, temos:

$$\bar{X_{h_1}} = \frac{2}{\frac{1}{1} + \frac{3}{5}} = \frac{2}{\frac{8}{5}} = \frac{10}{8}.$$

Calculando a taxa equivalente em relação as observações t_2 e t_3, temos:

$$\bar{X_{h_2}} = \frac{2}{\frac{3}{5} + \frac{12}{12,5}} = \frac{2}{\frac{3}{5} + \frac{120}{125}} = \frac{250}{195}.$$

Com isso, descobrimos as taxas equivalentes de cada semestre separadamente, que servem agora como uma taxa fixa. Mas queremos a taxa equivalente do ano. Portanto devemos calcular a média harmônica destas duas taxas.

Vejamos como calcular a taxa final :

Calculando a média harmônica entre $\bar{X_{h_1}}$ e $\bar{X_{h_2}}$, temos:

$$\bar{X_h} = \frac{2}{\frac{8}{10} + \frac{195}{250}} = \frac{500}{395} \approx 1,2658.$$

Encontramos então a taxa equivalente anual do preço por valor patrimonial da empresa X. Note que o valor aproximado 1,2658 nos dá uma taxa equivalente anual cujo crescimento foi de aproximadamente 26%.Portanto, um investidor que decida investir nessa empresa sob estas condições viu que nesse período a taxa preço por valor patrimonial apresentou um crescicmento de 26% em relação ao começo do ano, o que indica que as ações responderam positivamente comparado com o seu valor patrimonial.

Vamos a mais um exemplo, desta vez relacionado ao preço por ativo (P / Ativo). Veremos que existe uma diferença sutil entre patrimônio líquido e total de ativos. Enquanto o patrimônio líquido representa a diferença entre ativos e passivos, o total de ativos representa, como o próprio nome sugere, a quantidade de bens que são capazes de gerar lucro para a empresa. Já vimos que nessa relação preço por ativo (P / Ativo) o denominador é expresso pelo valor contábil por ação. As ações em questão do qual mencionamos referem-se às ações em livre circulação no mercado, tiradas as ações nas mãos de controladores e acionistas majoritários. Portanto um mecanismo de recompra de ações faz o valor contábil por ação aumentar devido a retirada de ações em circulação do mercado, fazendo o preço por ativo diminuir. Desse modo, para o preço por ativo se manter constante, faz-se necessário o preço subir também. Sendo assim, o mecanismo de recompra de ações é uma maneira que a empresa tem de gerar lucro para seus acionistas e para si própria.

Exemplo 4.11. Nos três primeiros meses do ano, uma empresa Y teve seu preço por ativo (P / Ativo) médio de cada mês cotados a 2,3 e 4 respectivamente. Sabendo que a empresa recomprou 2% das ações no primeiro mês, 6% das ações no segundo mês e 5% das ações no terceiro mês e que o seu valor contábil ou valor dos ativos expressos no balanço da empresa no último trimestre foi de 500 milhões de reais e que a empresa Y possui 50 milhões de ações em livre circulação antes da recompra, qual foi a cotação média mensal equivalente das ações no trimestre?

Solução. Como podemos ver, este problema é parecido com o problema anterior, com a diferença de que desta vez queremos calcular o valor em si em vez do aumento percentual. Veja que como a observação preço por ativo foi médio, ela, por ser uma medida resumo, substitui o conjunto das variações dos preços por ação e da variação dos ativos ao longo do mês devido a recompra, o que nos dá uma observação constante para cada mês anunciado. Como a observação se trata de uma taxa e o problema quer a cotação mensal equivalente das ações no trimestre, devemos calcular primeiramente a média harmônica das taxas preço por ativo, o que nos vai dar o preço por ativo (Preço / Ativo) mensal equivalente do trimestre. Além disso, devemos calcular o valor contábil equivalente mensal para por fim calcularmos a cotação média mensal equivalente das ações no trimestre.

Primeiramente vamos calcular a média harmônica mensal equivalente do preço por ativo. Como foi dado o preço por ativo (P/ Ativo) médio de cada mês, a observação passou a ser constante no período de 1 mês, fazendo as observações se tornarem passíveis de serem calculadas através da média harmnônica com pesos iguais, o que significa que usaremos a média harmônica do tipo simples. Com isso, vamos calcular o preço por ativo (P / Ativo) mensal equivalente do trimestre:

$$\bar{X_h} = \frac{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = \frac{3}{\frac{6+4+3}{12}} = \frac{36}{13}.$$

Portanto, o preço por ativo mensal equivalente do trimestre é $(P/Ativo)_{tri} = \frac{36}{13}$.

Para finalizar, falta agora somente calcular a cotação média mensal equivalente do trimestre. Como o preço por ativo equivalente mensal foi de $\frac{36}{13}$, falta agora calcular o valor contábil mensal equialente.

Observe que o valor contábil por ação também se trata de uma taxa. Logo devemos calcular a média harmônica dos valores contábeis de cada mês. Mas primeiro vamos calcular o valor contábil por ação de cada mês:

$$\begin{aligned}
\text{Valor contábil por ação}(1^{\underline{o}} \text{ mês}) &= \frac{\text{Valor contábil da empresa}}{\text{N}^{\underline{o}} \text{ de ações em livre circulação}}\\
&= \frac{500 \cdot 10^6}{50 \cdot 10^6 - 0,02 \cdot 50 \cdot 10^6}\\
&= \frac{500 \cdot 10^6}{49 \cdot 10^6} \approx 10,20.
\end{aligned}$$

Vamos agora calcular o valor contábil por ação do segundo mês:

$$\begin{aligned}
\text{Valor contábil por ação}(2^{\underline{o}} \text{ mês}) &= \frac{\text{Valor contábil da empresa}}{\text{N}^{\underline{o}} \text{ de ações em livre circulação}}\\
&= \frac{500 \cdot 10^6}{49 \cdot 10^6 - 0,06 \cdot 49 \cdot 10^6}\\
&= \frac{500 \cdot 10^6}{46,06 \cdot 10^6} \approx 10,85.
\end{aligned}$$

Vamos agora calcular o valor contábil por ação do terceiro mês para finalizar:

$$\begin{aligned}
\text{Valor contábil por ação}(3^{\underline{o}} \text{ mês}) &= \frac{\text{Valor contábil da empresa}}{\text{N}^{\underline{o}} \text{ de ações em livre circulação}}\\
&= \frac{500 \cdot 10^6}{46,06 \cdot 10^6 - 0,05 \cdot 46,06 \cdot 10^6}\\
&= \frac{500 \cdot 10^6}{43,76 \cdot 10^6} \approx 11,43.
\end{aligned}$$

De posse desses dados, agora podemos calcular o valor contábil mensal equivalente. Note que descobrimos o valor contábil por ação de cada mês. Portanto, mesmo que possua quantidade de ações diferentes em cada mês, o valor já foi calculado em cima de cada quantidade, dando como resultado o valor contábil da unidade de ação por mês, o que faz nos remeter à média harmônica simples.

Vamos então calcular o valor contábil mensal médio para por fim calcularmos a cotação média equivalente mensal do trimestre:

$$\begin{aligned}
\bar{X}_h &= \frac{3}{\frac{1}{10,20} + \frac{1}{10,85} + \frac{1}{11,43}}\\
&= \frac{3}{0,27769417} \approx 10,8.
\end{aligned}$$

Para finalizar o problema, falta agora só calcular a cotação média equivalente mensal das ações no trimestre. Basta aplicar a fórmula do preço por ativo médio, que já encontramos. Vejamos:

$$\begin{aligned}
& \text{preço por ativo médio} = \frac{\text{cotação média}}{\text{valor contábil por ação médio}}\\
\iff & \frac{36}{13} = \frac{\text{cotação média}}{10,8}\\
\iff & \text{cotação média} \approx 29,91.
\end{aligned}$$

Ou seja, a cotação média mensal equivalente das ações da empresa Y no trimestre foi de R\$=29,91.

4.4.6 Relação entre as médias

Vimos nas seções anteriores que dependendo do tipo de observação que estamos estudando, existe uma média que melhor representa o conjunto de dados formado por essas observações, e cada uma delas possui uma fórmula específica. Veremos agora que entre elas, existe uma relação, uma fórmula que relaciona as médias pitagóricas. Usaremos os estudos de Chou (1969) para ilustrar essa relação.

Proposição 4.3. Seja $X = \{x_1, x_2\}$ um conjunto de números reais positivos formado por duas observações cujos pesos são iguais. Se $\bar{X}$ é a média aritmética, $\bar{X_g}$ é a média geométrica e $\bar{X_h}$ é a média harmônica, do conjunto X, então:

$$\bar{X_h} = \frac{\bar{X_g^2}}{X} \tag{4.30}$$

Demonstração. De fato, se desenvolvermos a média harmônica a partir da sua versão canônica, teremos:

$$\bar{X_h} = \frac{2}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}} = \frac{2}{\dfrac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}} = \frac{2 \cdot x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2}. \tag{4.31}$$

Por outro lado, se desenvolvermos o segundo membro da equaçã (4.30), temos:

$$\frac{\bar{X_g^2}}{\bar{X}} = \frac{\left(\sqrt[2]{x_1 \cdot x_2}\right)^2}{\dfrac{x_1 + x_2}{2}} = \frac{2 \cdot x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2}. \tag{4.32}$$

De (4.31) e (4.31) obtemos: $\bar{X_h} = \dfrac{\bar{X_g^2}}{\bar{X}}$. □

Podemos generalizar e equação (4.30) para um conjunto de n observações, de forma que continue a se estabelecer uma relação entre as médias. Vejamos como fica a generalização da equação (4.30).

Teorema 4.2. Seja X um conjunto de números reais positivos formado por n observações $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$, isto. e, $X = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$. Se $\bar{X_g}$ é a média geométrica desse conjunto e $\bar{X_h}$ a média harmônica desse conjunto, então

$$\bar{X_h} = \frac{\bar{X_g^n}}{\bar{X}\left(\dfrac{\prod_{i=1}^n x_i}{x_1}, \dfrac{\prod_{i=1}^n x_i}{x_2}, \cdots, \dfrac{\prod_{i=1}^n x_i}{x_n}\right)} \tag{4.33}$$

Demonstração. O processo para demonstrar a equação (4.33) é exclusivamente aritmético. Isso significa que não é necessário demonstrar essa relação geral para n observações por indução ou qualquer método de prova mais sofisticado. De fato, basta expandir a fómula da média harmônica para n números reais positivos como ja vimos anteriormente. Isto é,

$$\begin{aligned} \bar{X_h} &= \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots \dfrac{1}{x_n}} \\ &= \frac{n}{\dfrac{x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \cdots \cdot x_n + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \cdots \cdot x_n + \cdots + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \cdots \cdot x_{n-1}}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \cdots \cdot x_n}} \\ \iff \bar{X_h} &= \frac{n \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \cdots \cdot x_n}{\dfrac{\prod_{i=1}^n x_i}{x_1} + \dfrac{\prod_{i=1}^n x_i}{x_2} + \cdots + \dfrac{\prod_{i=1}^n x_i}{x_n}}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Por outro lado,

$$\frac{\bar{X}_g^n}{\bar{X}\left(\frac{\prod_{i=1}^n x_i}{x_1}, \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{x_2}, \cdots, \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{x_n}\right)} = \frac{\left(\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ \cdots x_n}\right)^n}{\frac{\frac{\prod_{i=1}^n x_i}{x_2} + \cdots + \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{x_n}}{n}}$$
$$= \frac{n \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ \cdots \ \cdot x_n}{\frac{\prod_{i=1}^n x_i}{x_2} + \cdots + \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{x_n}}. \tag{4.35}$$

De (4.34) e (4.35) segue o resultado. □

Vimos neste capítulo que as médias podem ser muito úteis quando queremos encontrar respostas para problemas de ordem financeira. Vimos que observações podem ser desde taxas, preços, quantidades, índices, indicadores, ou seja, qualquer elemento de natureza quantitativa, pois estamos trabalhando com a estatística quantitativa em detrimento da estatística qualitativa. Para finalizar esta seção, da relação entre as médias, vamos utilizar um exemplo usando o preço de ações como observação.

Exemplo 4.12. Dado um conjunto de dados formado pelos preços de ações x e y, sabemos que se $X = \{x, y\}$ é um conjunto formado pelas observações preço x e preço y, então a média harmônica desse conjunto é dada por $\bar{X}_h = \frac{2 \cdot x \cdot y}{x+y}$. Feitas estas considerações acerca do conjunto X, responda:

a) Calcule o valor de x em função de y, se $\bar{X}_h{=}x$.

b) Se $\bar{X}_h = x^2$ ou $\bar{X}_h = y^2$, então calcule o valor de x ou o valor de y.

c) Se $\bar{X}_h = x^2, x > 0$ ou $\bar{X}_h = y^2, y > 0$, então para quais valores de x ou de y a equação possui duas soluções reais?

d) Se $\bar{X}_h = x^2$ ou $\bar{X}_h = y^2$, então para quais valores de x ou de y a equação possui uma única solução real?

e) Se $\bar{X}_h = x^2$, para quais valores inteiros de y temos Δ um quadrado perfeito?

Solução.

a) De $\bar{X}_h = x$ e substituindo na fórmula da média harmônica, temos:

$$x = \frac{2 \cdot x \cdot y}{x+y} \iff \cancel{x} = \frac{2 \cdot \cancel{x} \cdot y}{x+y} \iff x + y = 2y \iff x = y.$$

Ou seja, se a média harmônica é igual a uma das observações, então uma delas é igual a outra.

b) Sem perda de generalidade,vamos fazer para o caso $\bar{X}_h = x^2$. Então basta substituir $\bar{X}_h = x^2$ na fórmula da média harmônica, chegando ao seguinte cálculo:

$$\begin{aligned} x^2 = \frac{2 \cdot x \cdot y}{x+y} \quad &\iff \quad x = \frac{2y}{x+y} \\ &\iff \quad x^2 + x \cdot y - 2 \cdot y = 0 \\ &\iff \quad x = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 + 8 \cdot y}}{2}. \end{aligned}$$

Logo, $x = \frac{-y + \sqrt{y^2 + 8 \cdot y}}{2}$, pois como x é preço, $x \geq 0$.

Omitiremos o caso $\bar{X}_h = y^2$, pois é análogo ao que acabamos de demonstrar.

c) Vimos no item anterior que se $\bar{X}_h = x^2$, chegamos em uma equação do tipo $x^2 + x \cdot y - 2 \cdot y = 0$, que é uma equação do segundo grau em x. Portanto, para que essa equação possua duas soluções reais, devemos ter $\Delta > 0$. Fazendo $\Delta > 0$ nessa equação, temos:

$$y^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2 \cdot y) > 0 \iff y^2 + 8 \cdot y > 0 \iff y \cdot (y + 8) > 0.$$

Temos então duas possibilidades:

$$y > 0 \text{ e } (y + 8) > 0 \quad \text{ou} \quad y < 0 \text{ e } y + 8 < 0.$$

Como y é preço, a segunda hipótese está descartada. Logo, devemos ter $y > 0$ e $y > -8$, que dá como interseção $y > 0$. Ou seja, basta o preço y ser maior que zero. O caso $\bar{X}_h = y^2$ é inteiramente análogo.

d) Para termos uma única solução real devemos ter $\Delta = 0$, isto é, $y^2 + 8 \cdot y = y \cdot (y + 8) = 0$, o que implica em duas possibilidades: ou $y = 0$ ou $(y + 8) = 0$. Mas $y = -8$ é um absurdo, pois y é preço. Portanto $y = 0$, ou seja, para que tenhamos uma única solução real, dado que $\bar{X}_h = x^2$, basta que o preço y seja nulo. O caso $\bar{X}_h = y^2$ é inteiramente análogo.

e) Para que tenhamos $\Delta := y^2 + 8 \cdot y$ um quadrado perfeito, devemos ter $y \cdot (y + 8) = k^2$, $k \geq 0$. Daí, temos duas possibilidades. Antes de mostrarmos as possibilidades, devemos notar que temos a solução trivial, isto é, $y \cdot (y + 8) = 0$, cuja solução ja vimos: $y = 0$. Dito isso, vamos agora às possibilidades:

$$\begin{aligned} &I) \;\; y = (y + 8); \\ &II) \;\; y = a^2, \;\; a > 0 \text{ e } y + 8 = b^2, \;\; b > 0. \end{aligned}$$

O primeiro caso é claramente um absurdo. Portanto, nos resta a opção $II)$. Substituindo $y = a^2$ em $y + 8 = b^2$, temos:

$$\begin{aligned} & a^2 + 8 = b^2 \\ \iff \;& b^2 - a^2 = 8 \\ \iff \;& (b + a) \cdot (b - a) = 8. \end{aligned}$$

Devemos agora procurar os divisores de 8 para usar como produto de dois fatores. Temos então 4 possibilidades para o produto de dois termos dar 8:

$$\begin{aligned} &1^{\underline{a}}) \; 8 = 2 \cdot 4, \text{ isto é, } (b + a) = 2 \text{ e } (b - a) = 4; \\ &2^{\underline{a}}) \; 8 = 1 \cdot 8, \text{ isto é, } (b + a) = 1 \text{ e } (b - a) = 8; \\ &3^{\underline{a}}) \; 8 = 4 \cdot 2, \text{ isto é, } (b + a) = 4 \text{ e } (b - a) = 2; \\ &4^{\underline{a}}) \; 8 = 8 \cdot 1, \text{ isto é, } (b + a) = 8 \text{ e } (b - a) = 1. \end{aligned}$$

As duas últimas possibilidades são análogas as duas primeiras. Vamos então trabalhar com as duas primeiras possibilidades, chegando a dois sistemas:

$$\begin{cases} b + a = 2 \\ b - a = 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} b + a = 1 \\ b - a = 8 \end{cases}$$

Resolvendo o primeiro sistema chegamos em $b = 3$. Como $y + 8 = b^2$, segue que $y = 1$.
Resolvendo o segundo sistema chegamos em $b = \dfrac{9}{2}$. Novamente substituindo em $y + 8 = b^2$, concluimos que $y = \dfrac{49}{4}$.
Portanto, existem duas soluções possíveis para y. Mas como queremos as soluções inteiras, então temos $y = 1$ como única solução.

Vimos neste capítulo como as médias são importantes para resolver problemas de ordem financeira, principalmente no que diz respeito a bolsa de valores. As médias são muito importantes para expressar um conjunto de dados e passar uma informação a respeito deles, pois são importantes medidas resumo que nos dão uma boa idéia da tendência de tal conjunto. No próximo capítulo trabalharemos a desigualdade das médias, importante conceito para problemas de máximos e mínimos e problemas de intervalos para problemas onde uma determinada observação vale. Para nos aprofundarmos em tal assunto, usaremos como referência os autores Oliveira e Corcho (2010).

Capítulo 5

Desigualdade Das Médias

Vimos no capítulo anterior como as médias são importantes para acharmos medidas resumos de conjuntos com os mais variados tipos de características. Mas nem sempre podemos achar de maneira precisa tais medidas resumo. Para isso faz-se necessário encontrar intervalos ou faixas nas quais as observações podem ser trabalhadas sem prejuízo de análise do conjunto aleatório considerado, ou seja, sem prejuízo na hora de extrair informações do conjunto através de intervalos expressos por meio de desigualdades.

Teorema 5.1. Seja $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n\}$ um conjunto formado por n observações positivas. Então, vale a desigualdade

$$\bar{X} \geq \bar{X}_g \geq \bar{X}_h, \tag{5.1}$$

valendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$.

Demonstração. Provaremos em dois passos a primeira parte da desigualdade, isto é, $\bar{X} \geq \bar{X}_g$.

Passo 1. Para o primeiro passo usaremos indução sobre m. Provaremos que a desigualdade vale para $n = 2^m$.

Para $m = 1$ A desigualdade vale para $m = 1$, isto é, para $n = 2^1 = 2$. De fato, provar que vale para $n = 2$ é provar que

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2}.$$

Para isso, basta notar que, como $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0$, segue que $x_1 - 2 \cdot \sqrt{x_1 \cdot x_2} + x_2 \geq 0$. Logo, $\dfrac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2}$ como queríamos.

Agora provaremos que se vale para m, vale para $m + 1$. Ou seja, se vale para $n = 2^m$(Hipótese de indução), vale para $2 \cdot n = 2^{m+1}$. Com efeito, demonstrar a desigualdade para $2 \cdot n$ é provar que:

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{2 \cdot n} \geq \sqrt[2n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n \cdot x_{n+1} \cdot \cdots \cdot x_{2n}}. \tag{5.2}$$

Do primeiro membro desta desigualdade (5.2) segue que:

$$\begin{aligned}
&\frac{x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{2\cdot n} = \frac{\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}+\dfrac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}}{2}\\
\iff\ &\frac{x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{2\cdot n} \geq \frac{\sqrt[n]{x_1\cdot\ \cdots\ \cdot x_n}+\sqrt[n]{x_{n+1}\cdot\ \cdots\ \cdot x_{2n}}}{2} \qquad (5.3)\\
\iff\ &\frac{x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{2\cdot n} \geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1\cdot\ \cdots\ \cdot x_n}\cdot\sqrt[n]{x_{n+1}\cdot\ \cdots\ \cdot x_{2n}}} \qquad (5.4)\\
\iff\ &\frac{x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{2\cdot n} \geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1\cdot\ \cdots\ \cdot x_n\cdot x_{n+1}\cdot\ \cdots\ \cdot x_{2n}}}\\
\iff\ &\frac{x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{2\cdot n} \geq \sqrt[2n]{x_1\cdot\ \cdots\ \cdot x_n\cdot x_{n+1}\cdot\ \cdots\ \cdot x_{2n}} = \bar{X}_g,
\end{aligned}$$

onde em (5.3) e (5.4) usamos a desigualdade para $n = 2^m$ (hipótese de indução) e $n = 2$, respectivamente.

Ainda da hipótese da indução em (1), temos que

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n \quad \text{e} \quad x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = x_{2n}.$$

Além disso, de (2), temos que

$$\sqrt[n]{x_1\cdot\ \cdots\ \cdot x_n} = \sqrt[n]{x_{n+1}\cdot\ \cdots\ \cdot x_{2n}},$$

e daí,

$$x_1\cdot\ \cdots\ \cdot x_n = x_{n+1}\cdot\ \cdots\ \cdot x_{2n}.$$

De posse dessas informações, conclui-se que

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x_{n+1} = \cdots = x_{2n}.$$

Logo, a desigualdade também é válida para $2\cdot n = 2^{m+1}$. Portanto, por indução, a desigualdade das médias vale para todo n da forma 2^m.

Passo 2. Dado m inteiro positivo, a desigualdade vale para todo $n < 2^m$.

Para verificar isto, definimos o número

$$L = \sqrt[n]{x_1\cdot\ \cdots\ \cdot x_n}.$$

Desse modo, como a desigualdade vale para $n = 2^m$, temos então que

$$\begin{aligned}
&\frac{x_1+\cdots+x_n+\underbrace{L+\cdots+L}_{2^m-n\ vezes}}{2^m} \geq \sqrt[2^m]{x_1\cdot\ \cdots\cdot x_n\cdot L^{2^m-n}}\\
\iff\ &\frac{x_1+\cdots+x_n+\underbrace{L+\cdots+L}_{2^m-n\ vezes}}{2^m} \geq \sqrt[2^m]{L^n\cdot L^{2^m-n}} = L.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{x_1+\cdots+x_n+(2^m-n)\cdot L}{2^m} \geq L.$$

Logo,

$$x_1+\cdots+x_n \geq 2^m\cdot L-(2^m-n)\cdot L = n\cdot L,$$

obtendo assim,

$$x_1 + \cdots + x_n \geq n \cdot L = n \cdot \sqrt[n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n},$$

o que nos dá a desigualdade desejada.

Como para qualquer inteiro positivo n sempre existe um inteiro positivo m tal que $n < 2^m$, a desigualdade fica provada para todo n. A prova dessa última afirmação é imediata: basta tomar no passo $n+1$ de indução o número $m+1$ para ser o inteiro positivo que satisfaz a desigualdade, pois $1 < 2^m$ para todo m natural.

A prova de que a igualdade vale se e somente se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ também pode ser feita por indução analogamente.

Para provar a segunda parte da desigualdade, de que $\bar{X}_g \geq \bar{X}_h$ e que a igualdade vale se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, basta usar a desigualdade das médias aritmética-geométrica com os números x_i substituídos por $\dfrac{1}{x_i}(i = 1, 2, \cdots, n)$ de modo que:

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_1} = \bar{X}_g\left(\frac{1}{x_1}, \cdots, \frac{1}{x_n}\right) \geq \bar{X}\left(\frac{1}{x_1}, \cdots, \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}.$$

Invertendo esta última desigualdade, obtemos então

$$\bar{X}_g\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) \geq \bar{X}_h\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right),$$

concluindo-se assim a prova.

Notemos que as igualdades ocorrem se e só se $\dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{x_2} = \cdots = \dfrac{1}{x_n}$ e $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. □

Exemplo 5.1. Uma empresa de chiclete pode produzir o seu produto principal, o pirulito pegasus, a um custo de 1 real a unidade. Estima-se que, se cada unidade for vendida por $3 \cdot x^2 - x^3$ reais, a empresa venderá por mês x $(x > 0)$ unidades de pitulitos. Assim, o lucro mensal do fabricante é uma função do preço de venda. Sabendo que além disso a empresa ainda recebe um bônus fixo de 3 reais independente de quantidade de vendas, qual deverá ser o lucro máximo da empresa?

Solução. Sabemos que o lucro de uma empresa em função do preço de venda y são as receitas em função de y menos os custos em função de y, isto é, $L(y) = R(y) - C(y)$. Além disso, sabemos que a receita $R(y)$ é dada pelo preço de venda y vezes a quantidade de unidade vendidas, e o custo $C(y)$ é o preço da fabricação F vezes a quantidade de unidades $Q(y)$ para serem fabricadas. Então temos que:

$$L(y) = y \cdot Q(y) - F \cdot Q(y).$$

Dadas essas considerações e substituindo nos dados do problema, temos que

$$L(3 \cdot x^2 - x^3) = (3 \cdot x^2 - x^3) \cdot x - 1 \cdot x.$$

Porém a empresa teve um bônus fixo no valor de 3 reais, portanto o Lucro total da empresa foi de $(3 \cdot x^2 - x^3) \cdot x - 1 \cdot x + 3$, ou seja,

$$LT(3 \cdot x^2 - x^3) = 3 \cdot x^3 - x^4 + 3 - x,$$

onde $LT(3 \cdot x^2 - x^3)$ é o lucro total em função do preço de venda $(3 \cdot x^2 - x^3)$.

Veja que podemos escrever o lucro total como:

$$LT(3 \cdot x^2 - x^3) = (3 - x) \cdot (x^3 + 1).$$

Daí, usando a desigualdade das médias, temos:

$$\sqrt{(3-x) \cdot (x^3+1)} \leq \frac{(x^3+1) + (3-x)}{2}. \tag{5.5}$$

Portanto, de (5.5) temos que a igualdade ocorre se, e somente se, $(3 - x) = (x^3 + 1)$, que tem como solução trivial $x = 1$. Logo, substituindo $x = 1$ no segundo membro de (5.5), concluímos que $\sqrt{(3-x) \cdot (x^3+1)} \leq 2$, isto é, que $(3 - x) \cdot (x^3 + 1) \leq 4$, ou seja, $LT(3 \cdot x^2 - x^3) \leq 4$.

Desse modo, dadas essas condições, o lucro máximo da empresa será de 4 reais por mês.

Exemplo 5.2. Se P_1, P_2, P_3 são os preços das ações em determinado período, prove que

$$\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3} \geq \frac{9}{P_1 + P_2 + P_3}.$$

Solução. Aplicando a desigualdade entre a média aritmética e a média harmônica aos números $\frac{1}{P_1}, \frac{1}{P_2}, \frac{1}{P_3}$, obtemos:

$$\frac{\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3}}{3} \geq \frac{3}{P_1 + P_2 + P_3}.$$

Dai segue que

$$\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3} \geq \frac{9}{P_1 + P_2 + P_3}.$$

Exemplo 5.3. (Baltic-way-adaptada) Se x_1, x_2, x_3 e x_4 são observações positivas em um conjunto de dado, então

$$\frac{x_1 + x_3}{x_1 + x_2} + \frac{x_2 + x_4}{x_2 + x_3} + \frac{x_3 + x_1}{x_3 + x_4} + \frac{x_4 + x_2}{x_4 + x_1} \geq 4.$$

Solução. Aplicando a desigualdade das médias aritmética e harmônica, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{x_1 + x_3}{x_1 + x_2} + \frac{x_3 + x_1}{x_3 + x_4}}{2} &\geq \frac{2}{\frac{x_1 + x_2}{x_1 + x_3} + \frac{x_3 + x_4}{x_3 + x_1}} \\ \Longrightarrow \frac{x_1 + x_3}{x_1 + x_2} + \frac{x_3 + x_1}{x_3 + x_4} &\geq \frac{4 \cdot (x_1 + x_3)}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

De maneira análoga, pela desigualdade das médias,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{x_2 + x_4}{x_2 + x_3} + \frac{x_4 + x_2}{x_4 + x_1}}{2} &\geq \frac{2}{\frac{x_2 + x_3}{x_2 + x_4} + \frac{x_4 + x_1}{x_4 + x_2}} \\ \Longrightarrow \frac{x_2 + x_4}{x_2 + x_3} + \frac{x_4 + x_2}{x_4 + x_1} &\geq \frac{4 \cdot (x_2 + x_4)}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Somando (5.6) e (5.7), temos:

$$\frac{x_1 + x_3}{x_1 + x_2} + \frac{x_2 + x_4}{x_2 + x_3} + \frac{x_3 + x_1}{x_3 + x_4} + \frac{x_4 + x_2}{x_4 + x_1} \geq 4,$$

como queríamos provar.

Capítulo 6

Produto Educacional

6.1 Introdução

Apresentamos como produto educacional o jogo "card game financeiro" para ser utilizado em sala de aula, pois entendemos que se constitui como uma ferramenta muito importante para o desenvolvimento social dos discentes, além de atender ao objetivo da proposta deste estudo que é contribuir para o ensino da matemática financeira em sala de aula com os alunos da educação básica. Desse modo, defendemos que a aplicação dos jogos em sala de aula surge como uma oportunidade de socialização entre os alunos, de cooperação mútua, estimulando a participação da equipe na busca incessante para elucidação de um problema proposto pelo professor. Nesse sentido, a utilização de atividades lúdicas na Matemática e de materiais concretos contribui tanto para o desenvolvimento cognitivo, psicomotor e socioafetivo dos discentes, além de promover o senso crítico, investigador, que ajuda na compreensão e entendimento de determinados conteúdos relacionados ao ensino da Matemática.

6.2 Objetivos

O objetivo do nosso produto educacional é fazer o aluno compreender os conceitos apresentados neste trabalho, sobretudo acerca das médias aritmética e ponderada, temas mais comuns no ensino básico, de forma que ele possa desenvolver habilidades como flexibilidade, adaptação a cenários diversos e raciocínio lógico, empregando elementos da matemática financeira.

6.3 Apresentação do Produto

O game "Compra de Ações" é um carde game voltado para o ensino, tem formato de Gamificação Explícita e trabalha o game-based learning, ou aprendizado baseado em jogos traduzindo para o português. É uma abordagem que utiliza jogos e tem como característica a otimização da experiência com a aprendizagem. Nesse caso o jogo permite o entendimento de questões do mercado financeiras através de simulações da compra e venda de ações.

6.4 Metodologia

O game tem Estrutura de missão solo, cada aluno recebe inicialmente uma ficha de controle, 2 (dois) dados, um card correspondente a um pacote com 100 ações da empresa considerada e 1000 reais em dinheiro (dinheiro falso usado somente no jogo). Nesse caso não foi criado nem um outro tipo de dinheiro, pois a ideia é que apesar da imersão das crianças no jogo, pretende-se trazer uma conexão mais próxima da realidade deixando o Real como a moeda corrente oficial do jogo. Além disso, será dada a opção do aluno comprar mais ações no mercado, ou vender as que já tem, sempre pela cotação atual que será dado pelo preço da rodada anterior $\pm$ a soma dada pelos dados. A Figura 1 mostra o dinheiro que será usado no jogo, cédulas de papel representativas de dinheiro real, porém sem valor monetário.

A ordem do evento será a entrega das missões em formato de rodada. Cada aluno joga 2 (dois) dados, que terão a função de ditar se as ações subiram ou desceram naquela rodada. As ações por parte dos alunos estão em 2 (duas) escolhas que são elas: comprar ou vender.

Os registros das ações e de toda a dinâmica do jogo será registrado na ficha de controle recebido pelo aluno, conforme Figura 2. A ficha de controle está dividida em colunas, onde tem ordem que indica a rodada que deve ser preenchida nome da ação, variação, onde o aluno após jogar o dado vai por se as ações subiram ou desceram seu valor ditado pelo lançamento dos dados, movimento do jogador, indica a ação do jogador naquela rodada, ele preencherá como um "x", Valor da Ação Anterior (R$) e Valor da Ação Atual (R$) e finaliza preenchendo o Custo Médio Acumulado.

A cada rodada um aluno terá sua vez de jogar os dados. Ao lançar os dados, as ações sofrem alta ou baixa no seu valor, que na 1ª (Primeira) rodada valem R$ 1,10 a unidade. Caso a soma dos dados seja um número "PAR" ocorre uma alta nas ações no valor da soma e caso o resultado das somas seja "ÍMPAR" ocorre uma baixa nas ações no valor da soma. Os valores que as ações podem cair e subir estão entre as possibilidades mínimas e máxima de combinações possíveis entre a soma dos dados. Por exemplo:

1. Resultado da rodada 1 para o aluno Y = 1 (dado 1) + 1 (dado 2) = 2, subirá R$ 0,02 centavos.
2. Resultado da rodada 2 para o aluno Y = 6 (dado 1) + 6 (dado 2) = 12, subirá R$ 0,12 centavos.
3. Resultado da rodada 3 para o aluno Y= 6 (dado 1) + 5 (dado 3)= 11, cairá R$ 0,11 centavos.

O professor controla a partida pelos "Tokens de Rodadas", representados na Figura 3, que se inicia no 1 (um) e finaliza no 10 (dez), sendo cada valor sobreposto ao anterior, indicando a passagem da rodada geral, que ocorre quando cada aluno realiza seu turno.

Após distribuir inicialmente 100 ações para cada aluno em forma de cartas (cada pacote de carta corresponde a 1(uma) ação) e o dinheiro no valor de R$ 1.000,00 para cada um, o professor fica com o resto do monte das cartas que serão as ações que serão compradas ou vendidas pelos alunos nas rodadas. Ele (o professor) representará portanto o mercado financeiro, ele será uma espécie de corretora.

O jogo finaliza quando chegar na 10ª (decima) rodada analisando o preenchendo o Custo Médio Acumulado, que é a média ponderada dada por:

$$\bar{X_p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i P_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i},$$

onde as observações X_i correspondem ao preço de compra de cada ação por rodada. Ganhará o jogo aquele que ao final da décima rodada tiver o maior lucro.

6.5 Anexos

Figura 1: Dinheiro sem valor usado no jogo. Fonte: O Autor.

		Variação		Movimento do jogador		Valor da ação	Valor da ação	Custo Médio
Ordem	Nome da ação	Subiu	Desceu	Comprou	Vendeu	Anterior	Atual	Acumulado
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
Final								

Figura 2: Ficha de Controle. Fonte: O Autor.

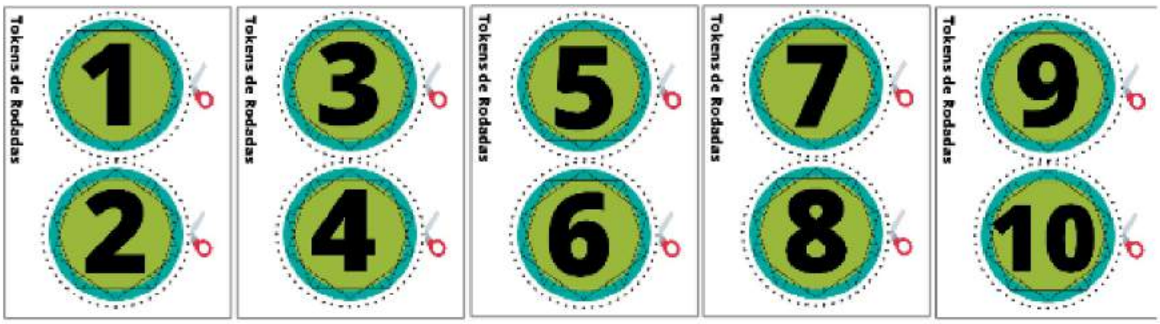

Figura 3: Tokens das Rodadas. Fonte: O Autor.

Figura 4: Unidade de ação. Fonte: O Autor.

Capítulo 7

Considerações Finais

Entender a importância do ensino da Educação Financeira (EF) como tema relevante na educação básica foi o ponto de partida para a construção deste estudo, em um contexto em que a nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada pelo Ministério da Educação em 2017, estabeleceu a EF como um dos temas transversais, devendo realizar sua inserção nos currículos de todo o país. Desse modo, definiu-se como eixo central do trabalho a aplicação das médias pitagóricas no mercado de ações como uma ferramenta importante para o ensino e aprendizagem da educação financeira na educação básica.

A discussão aqui empreendida é de grande relevância diante do cenário pandêmico que estamos enfrentando em âmbito mundial, por meio do qual foi desencadeado um elevado índice de morbidade, uma grave crise econômica, gerando significativas taxas de desemprego e alto custo de vida, evidenciando ainda mais as desigualdades sociais e as lacunas estruturais da economia brasileira.

Assim, constituiu-se como problema inicial desta pesquisa a seguinte questão: quais as contribuições do ensino da educação financeira na educação básica, considerando os conteúdos relacionados ao mercado de ações e a aplicação das médias pitagóricas na resolução de problemas de ordem financeira? Para alcançar respostas para essa questão, foi traçado como objetivo geral analisar a importância da educação financeira no ensino básico, tendo como base a aplicação das médias pitagóricas no mercado de ações.

Diante disso, definimos algumas estratégias para compreendermos como o ensino da matemática financeira estava sendo desenvolvido em âmbito nacional e, para isso, recorremos à pesquisa integrativa com foco nas seguintes questões: quais os temas abordados pelos pesquisadores sobre educação financeira e quais os objetivos pautados nas pesquisas realizadas? Que metodologias foram aplicadas? Além disso, foi feito um recorte temporal (2010 a 2021) que tornasse consistente a amostra, considerando também, para isso, os descritores selecionados para a investigação: ensino da matemática, educação financeira e educação básica, bem como os fatores de exclusão das pesquisas, descartando aquelas que não estavam alinhadas com o objeto de estudo aqui definido.

Assim, foram realizadas análises minuciosas junto à Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), para identificação dos programas e, por sua vez, das pesquisas que apresentassem respostas às questões pautadas inincialmente, cujas discussões foram apresentadas de forma descritiva no capítulo três, de modo que ficou constatado que há carência de pesquisas relacionadas à educação financeira na educação básica, pois, em um período de 11 anos, só foram localizadas 33 dissertações de mestrado e 01 tese de doutorado com temáticas relacionadas ao objeto de estudo aqui referido, e dentre os programas selecionados o PROFMAT foi considerado o mais produtivo.

Também foi intencionado verificar neste estudo se as médias pitagóricas contribuem para solucionar problemas de ordem financeira, e restou comprovado que elas são de fato importantes na resolução desse tipo de problema, principalmente no que diz respeito a bolsa de valores, pois elas expressam um conjunto de dados, produzindo informações acerca deles, fornecendo uma boa ideia da tendência de tal conjunto.

No que se refere ao produto educacional, apresentamos aqui a proposta de um jogo educativo: Card Game Financeiro – para contribuir no ensino da educação financeira com alunos da educação básica. O game "Compra de Ações" é um carde game voltado para o ensino é tem formato de Gamificação Explícita e trabalha o game-based learning, ou aprendizado baseado em jogos, em português, é uma abordagem que utiliza jogos, tem o objetivo de otimizar a experiência de aprendizagem. Nesse caso, o jogo permite o entendimento de questões do mercado financeiras através de simulações, da compra e venda de ações.

A partir desses resultados, compreendemos que a Educação Financeira no sistema de ensino não deve se restringe apenas a uma unidade curricular, no caso a matemática, pois, em razão de sua importância, ela deve se constituir, de fato, como tema transversal e transdisciplinar, possibilitando construção de conhecimentos para tomadas de decisões assertivas e mais vantajosas do ponto de vista financeiro, uma vez que ela pode ser definida como o processo mediante o qual os discentes podem melhorar a sua compreensão sobre os conceitos e produtos financeiros, de maneira que, com informação, formação e orientação, possam desenvolver os valores e as competências necessários para se tornarem mais conscientes das oportunidades e dos riscos que o sistema financeiro oferece.

Referências Bibliográficas

[1] OLIVEIRA, Krerley; CORCHO, Adan J. Iniciação á matemática. Uni.I,Cap. I e II. PROFMAT: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió,2010.

[2] BOTELHO, Louise Lira Roedel; DE ALMEIDA CUNHA, Cristiano Castro; MACEDO, Marcelo. O método da revisão integrativa nos estudos organizacionais. Gestão e sociedade, v. 5, n. 11, p. 121-136, 2011

[3] CAVALCANTE, Francisco; MISUMI, Jorge Yoshio; RUDGE, Luiz Fernando. Mercado de capitais: o que é, como funciona. Elsevier, 2005.

[4] ANNUNCIATO, Pedro. BNCC inclui educação financeira em matemática. Nova, 2018.

[5] NETO, Alexandre Assaf. Mercado financeiro. Atlas, 2003.

[6] CAVALCANTE, F.; MISUMI, J.; RUDGE, L. Mercado de Capitais. 6. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

[7] FORTUNA, Eduardo. Mercado Financeiro, produtos e serviços. Rio de Janeiro: Qualitymark, 2005.

[8] KERR, R. B. Mercado Financeiro e de Capitais. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2011.

[9] PINHEIRO, Juliano Lima. Mercado de Capitais: fundamentos e técnicas. São Paulo, Atlas, 2005.

[10] SELAN, B. Mercado financeiro. Rio de Janeiro: Seses, 2014.

[11] VIEIRA, J. A. G.; PEREIRA, H. F. S.; AMARAL PEREIRA, W. N. do. Histórico do Sistema Financeiro Nacional. Revista Científica e-Locução. v.1, n. 02, p. 17, 28 dez. 2012.

[12] CHAUÍ, Marilena. Introdução à história da filosofia-Vol. 1: Dos pré-socráticos a Aristóteles. Editora Companhia das Letras, 2018.

[13] BORNHEIM, Gerd Alberto. Filósofos pré-socráticos, Os. Editora Cultrix, 2005.

[14] BOYER, C. B. História da Matemática, 3 edição. São Paulo: Blucher, 2010.

[15] CASELLA, George; BERGER, Roger L. Inferência estatística. Cengage Learning, 2010.

[16] GODFREY, Neale S. Dinheiro não dá em árvore: um guia para os pais criarem filhos financeiramente responsáveis. Tradução de Elizabeth Arantes Bueno. São Paulo: Jardim dos Livros, 2007.

[17] BOYER, Carl Benjamin. História da matemática; tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, 1974.

[18] SCHEINERMAN, Edward A. Matemática: uma introdução discreta. Cengage Learning, 2012.

[19] FEIJOO, AMLC. Medidas de tendência central. In: A pesquisa e a estatística na psicologia e na educação [online]. Rio de Janeiro: Centro Edelstein de Pesquisas Sociais, 2010, pp. 14-22. ISBN: 978-85-7982-048-9. Available from SciELO Books <http://books.scielo.org>.

[20] MORETTIN, Pedro Alberto; BUSSAB, Wilton Oliveira. Estatística básica. Saraiva Educação SA, 2017.

[21] FREUND; SIMON, 2000. FREUND, J. E.; SIMON, G. A. Estatística aplicada: economia, administração e contabilidade. São Paulo: Artmed, 2000.

[22] LIMA, Elon Lages. Análise real. Rio de Janeiro: Impa, 2004.

[23] LEITE, A. P. Estimativa de Medidas de Tendência Central: uma intervenção de ensino. São Paulo, 2010. 161p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2010

[24] Pinheiro, J. L. (2002). Mercado de capitais: fundamentos e técnicas. São Paulo: Atlas.

[25] Mello, P. C. (2004). Introdução ao mercado de derivativos. Retirado de http://www.bmfcead.com.br/home/home.asp, em 20 de agosto de 2004.

[26] Haugen, R. A. (2000). Os segredos da bolsa: como prever resultados e lucrar com ações. São Paulo: Pearson Educação

[27] Chou Ya-lun, Holt International, 1969.

[28] DEBASTIANI, Carlos Alberto; RUSSO, Felipe Augusto. Avaliando Empresas, Investindo em Ações. São Paulo: Novatec, 2008.

[29] IUDÍCIBUS, Sérgio de et al. Manual de contabilidade das sociedades por ações. São Paulo: Atlas, 2000.