

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

WERTON ALVARENGA BASTOS

**A Utilização de Circunferências e Círculos na
Resolução de Problemas**

Teresina
2020

WERTON ALVARENGA BASTOS

**A Utilização de Circunferências e Círculos na Resolução de
Problemas**

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Piauí como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Gleison do Nascimento Santos

Teresina

2020

FICHA CATALOGRÁFICA

Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial de Ciências da Natureza - CCN

B327u Bastos, Werton Alvarenga.

A utilização de circunferências e círculos na resolução de problemas / Werton Alvarenga Bastos. – Teresina: 2020.
116 f. il.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT, 2020.

Orientador: Prof. Dr. Gleison do Nascimento Santos.

1. Geometria Plana. 2. Matemática – Ensino Médio. 3. Olimpíadas de Matemática. I. Título.

CDD 516.5

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes – CRB3/1461

WERTON ALVARENGA BASTOS

A Utilização de Circunferências e Círculos na Resolução de Problemas

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Piauí como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada em 28/07/2020.

BANCA EXAMINADORA

Gleison do Nascimento Santos

Prof. Dr. Gleison do Nascimento Santos (Orientador)
Universidade Federal do Piauí - UFPI

Ítalo Dowell Lira Melo

Prof. Dr. Ítalo Dowell Lira Melo (Membro Interno)
Universidade Federal do Piauí - UFPI

Roger Peres de Moura

Prof. Dr. Roger Peres de Moura (Membro Interno)
Universidade Federal do Piauí - UFPI

Afonso Norberto da Silva

Prof. Dr. Afonso Norberto Silva (Membro Externo)
Universidade Estadual do Piauí - UESPI

Teresina

2020

“Se você conhece o inimigo e conhece a si mesmo, não precisa temer o resultado de cem batalhas. Se você se conhece mas não conhece o inimigo, para cada vitória ganha sofrerá também uma derrota. Se você não conhece nem o inimigo nem a si mesmo, perderá todas as batalhas.”

Sun Tzu.

Agradecimentos

Agradeço a **DEUS**, por mais uma vitória alcançada e por ter me dado Saúde, Força, Coragem e Perseverança, para a luta por meu Sonho.

Dedico esse momento de Alegria a todos(as) que me ajudaram na busca dessa realização.

Ao meu Pai, **Benito Mussolini de Araújo Bastos**(in memoriam), que me ensinou a ser Honesto, Sincero, Justo e sobretudo, o meu exemplo de Vida.

A minha Mãe, **Ivonilda Chaves Alvarenga Bastos**, pela sua Religiosidade, por suas Orações, que me fazem admirá-la por sua Inteligência, Bondade, Humildade e por ser o Grande Pilar de Minha Família.

A meu Irmão, **Werlon Alvarenga Bastos**, e minha Irmã, **Wertânia Alvarenga Bastos**, pelo Apoio e Incentivo que me deram.

A minha Esposa, **Maria Ana Fortes Oliveira Bastos**, pela Compreensão, Incentivo e Apoio, que me fizeram transpor todos os obstáculos e fazer a minha jornada mais leve.

A meus Filhos, **Benito Mussolini de Araújo Bastos Neto** e **Werton Alvarenga Bastos Júnior**, pelo Carinho e Confiança em mim depositada.

A meus **Tios** e **Tias**, que acompanharam, torceram e incentivaram meus Estudos, para conseguir alcançar esse momento. Em especial ao meu Tio **Antonio Chaves Alvarenga**, (in memoriam), por ter me ajudado em minha conquista no Concurso para Professor do Magistério Superior no CEFET/MA, hoje IFMA, à minha Tia **Maria Iranêide Alvarenga e Silva**, por ter me ajudado em minha estadia em São Luis/MA até minha remoção para Caxias/MA, aos dois agradeço por serem meu suporte Familiar em São Luis/MA e a minha Tia **Maria Ivonêde Chaves Alvarenga**(in memoriam), por sempre estar próxima de minhas conquistas.

A minha Sogra, **Francisca Fortes de Oliveira**, Cunhados e Cunhadas, pelas Orações feitas em prol do meu Sucesso.

A meus **Professores e Professoras do Mestrado PROFMAT**, pelo zelo e dedicação na transmissão dos seus conhecimentos.

Ao meu Orientador, **Profº Dr. Gleison do Nascimento Santos**, pela paciência, compreensão e dedicação ao me orientar na Elaboração da minha Tese de Mestrado.

Resumo

Neste trabalho abordamos vários resultados envolvendo o tema círculo e circunferências e aplicamos à resolução de problemas. O objetivo deste trabalho é fornecer um material de apoio para professores de Matemática que atuem no ensino médio e que desejam preparar seus alunos para olimpíadas de Matemática, vestibulares e outros.

Palavras-chaves: Geometria Plana, Olimpíadas, Resolução de Problemas, Vestibulares.

Abstract

In this work we present several results about circles and circumference and their applications to solve problems. The goal of this work is to provide a support material to Math teachers who work in high school and intente to prepare students for Mathematical olympiads; entrance exam and others.

Keywords: Plane Geometry; Olympiads; Problem Solving; Entrance Exam.

Lista de Siglas

EGMO: Olimpíada de Matemática de Meninas da Europa.

EpCar: Escola Preparatória dos Cadetes do Ar.

Fuvest: Fundação para o Vestibular da Universidade de São Paulo.

IFSul: Instituto Federal do Rio Grande do Sul.

IGO: Olimpíada Iraniana de Geometria.

IMO: Olimpíada Internacional de Matemática.

INMO: Olimpíada Indiana Nacional de Matemática.

ITA: Instituto Tecnológico de Aeronáutica.

Uece: Universidade Estadual do Ceará.

Uerj: Universidade Estadual do Rio de Janeiro.

USAMO: Olimpíada de Matemática dos Estados Unidos da América.

Sumário

Resumo	iv
Abstract	v
1 Introdução	1
2 Triângulos	4
2.1 Elementos do Triângulo	4
2.2 Casos de Congruência	6
2.3 Semelhanças de Triângulos	9
3 Circunferência	14
3.1 Elementos da Circunferência	14
3.2 Posições Relativas	17
3.3 Ângulos na Circunferência	20
3.4 Inscrição e Circunscrição de Polígonos Regulares	25
3.5 Potência de um ponto	30
3.6 Comprimento de uma circunferência	36
4 Círculo	40
4.1 Círculo Trigonométrico	41
4.2 Área de um círculo	48
5 Teoremas que envolvem Circunferências e Círculos	51
5.1 Teorema da corda quebrada	51
5.2 Teorema de Simson-Wallace	52
5.3 Teorema de Pitot	54

5.4	Teorema de Ptolomeu	56
5.5	Teorema de Stewart	58
5.6	Teorema de Carnot	59
6	Resolução de Problemas	62
6.1	OLIMPÍADAS	62
6.2	VESTIBULARES	77
6.3	OUTROS	92

Capítulo 1

Introdução

Círculos e circunferências são objetos geométricos básicos que podem ser definidos utilizando-se apenas os conceitos de pontos, segmentos e congruência. Tais objetos aparecem na Matemática desde a antiguidade, como, por exemplo, nos postulados da célebre obra *Os Elementos* (EUCLIDES, 2009) cuja primeira publicação foi feita no século III, a.C.

Ainda no primeiro milênio a.C., os babilônios, que utilizavam uma base de numeração sexagesimal, dividiram o círculo em 360 partes e obtiveram o que hoje chamamos de *grau*. Cada uma destas partes foi dividida em 60 partes (minuto), e repetiram o processo para estas sub-partes. Além disso, babilônios e egípcios conseguiram boas aproximações para o valor de π (o quociente entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro) (BOYER, 2011).

Outro problema que fascinou os matemáticos durante mais de 2000 anos foi a quadratura de um círculo, cujo objetivo consistia em encontrar um quadrado com área igual à de um círculo dado. Este problema é considerado hoje um dos três mais famosos da antiguidade e representa um dos primeiros problemas da Geometria a dar mais ênfase ao aspecto teórico do que o aspecto prático. (OSTERMANN; WANNER, 2012).

Em aproximadamente 240 a.C. o matemático grego Eratóstenes, inspirado em trabalhos teóricos sobre círculos, tentou medir o comprimento da circunferência da Terra e cometeu um erro de menos do que 2% em comparação com o valor exato que é conhecido hoje. (DOLCE; POMPEO, 2013).

Apesar da literatura sobre círculos e circunferências ser bastante antiga e vasta, é possível encontrarmos aplicações mais recentes. Podemos citar, como exemplo de aplicação

na tecnologia, o GPS (Sistema de Posicionamento Global), cuja fundamentação matemática se baseia no chamado teorema das quatro esferas (ALVES, 2008). Vale ressaltar que no plano, uma esfera coincide com a noção de circunferência.

Teorema 1.0.1. *Se quatro superfícies esféricas se intersectam e seus centros são não coplanares, então essa intersecção consiste em um único ponto.*

O conteúdo de círculos e circunferências faz parte da ementa da disciplina Matemática ensinada na educação básica, pertencente à categoria “Espaço e Forma” (BRASIL, 1997). Atualmente, seu ensino deve ser direcionado para atender às habilidades e competências exigidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Tais habilidades consistem em consolidar e ampliar a aplicação de noções geométricas, calcular e relacionar medidas de comprimentos e áreas (BRASIL, 2018). Vale ressaltar que estas habilidades também são exigidas em exames de vestibulares.

Além disso, uma das competências presentes na BNCC consiste em preparar o aluno para desenvolver a habilidade do pensamento geométrico, necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. Esta competência coincide com a proposta das olimpíadas de Matemática.

Mundialmente, as olimpíadas de Matemática representam hoje, muito mais do que apenas uma competição, uma política pública voltada ao processo de ensino-aprendizagem em Matemática, visando melhorar a motivação, o interesse, o desempenho e o raciocínio lógico dos alunos.

Tanto nas olimpíadas nacionais quanto nas internacionais, sempre são abordadas questões que envolvem círculos e circunferências. Apesar disso, ainda hoje é praticamente inexistente materiais em Língua Portuguesa voltados para a preparação de alunos do ensino médio que desejam participar de olimpíadas internacionais.

Levando-se em consideração os direcionamentos da BNCC e a observação feita no último parágrafo, propomos o presente trabalho com o objetivo de auxiliar professores de Matemática que atuam no ensino médio e que desejam preparar seus alunos para olimpíadas de Matemática, sobretudo as internacionais, e para vestibulares em geral.

Nosso trabalho está organizado da seguinte forma. No capítulo 2 apresentamos alguns tópicos sobre triângulos. Apesar do foco de nosso trabalho ser círculos e circunferências, observamos que na maioria das questões de olimpíadas sobre círculos, sempre existem

associados conceitos sobre triângulos. Assim, pensando em tornar nosso trabalho auto-suficiente, preferimos iniciar com este capítulo.

No capítulo 3 apresentamos a circunferência e seus principais elementos. Além disso, investigamos as posições relativas, a inscrição e circunscrição em polígonos regulares e finalizamos com a noção de potência de um ponto. No capítulo 4 falamos do círculo, cujo enfoque é o círculo trigonométrico e o conceito de área. Os teoremas clássicos que envolvem círculos e circunferências e que normalmente são utilizados na solução de problemas olímpicos foram abordados no capítulo 5.

Por fim, o capítulo 6 é dedicado à resolução de problemas. Para atingirmos um dos objetivos deste trabalho, na seção 6.1 selecionamos exclusivamente problemas de olimpíadas internacionais. Na seção 6.2 procuramos enfatizar ao máximo os conceitos e teoremas utilizados na resolução das questões, buscando desenvolver no aluno argumentos geométricos convincentes. Finalmente, a seção 6.3 contém problemas que, apesar de não terem sido extraídos de olimpíadas ou vestibulares, consideramos importantes para a preparação e formação dos alunos.

Capítulo 2

Triângulos

A fim de tornar o texto o mais auto suficiente possível exibiremos neste capítulo alguns conceitos e fatos relacionados a triângulos. Estes serão de grande importância para o entendimento de outros conceitos geométricos que aparecerão no decorrer do trabalho. Os resultados deste capítulo foram extraídos das referências (BARBOSA, 2012) e (POGORELOV, 1974).

2.1 Elementos do Triângulo

Um **triângulo** é uma figura plana que é formada por três pontos que não pertencem a uma mesma reta e pelos três segmentos determinados por esses três pontos. Os três pontos são chamados de **vértices** do triângulo e os segmentos, **lados** do triângulo.

O segmento de reta determinado por dois pontos A e B será denotado por \overline{AB} , enquanto que seu comprimento será denotado por \overline{AB} . Um triângulo determinado pelos vértices A, B e C será denotado por ΔABC . Por fim, usaremos o símbolo $\angle A\hat{B}C$ para indicar a medida do ângulo $A\hat{B}C$.

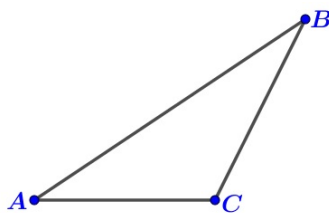


Figura 2.1: Triângulo ΔABC determinado pelos vértices A, B e C . Neste caso, os lados de ΔABC são os segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}$ e \overline{AC} .

Dado um triângulo ΔABC , os ângulos $\hat{A}BC$, $\hat{B}CA$ e $\hat{C}AB$ são chamados de **ângulos internos** ou simplesmente de ângulos do triângulo. Os suplementos destes ângulos são chamados de **ângulos externos** do triângulo.

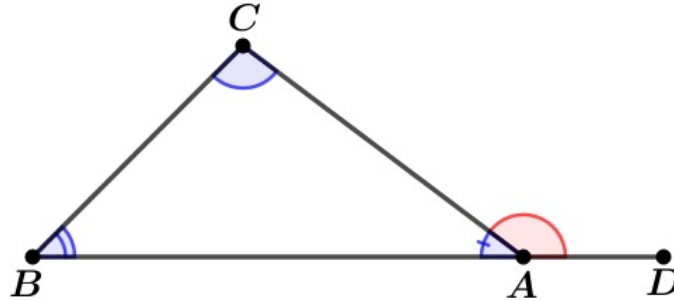


Figura 2.2: Na figura acima, o ângulo $\hat{D}AC$ é um ângulo externo do triângulo ΔABC adjacente ao ângulo interno $\hat{C}AB$.

Considere um triângulo ΔABC e seja D um ponto da reta que contém o segmento BC . O segmento AD chama-se **mediana** do triângulo relativamente ao lado BC , se D for o ponto médio de BC . O segmento AD chama-se **bissetriz** do ângulo \hat{A} se a semirreta de origem em A contendo o ponto D divide o ângulo $\hat{C}AB$ em dois ângulos congruentes, isto é, $\hat{C}AD = \hat{D}AB$. O segmento AD chama-se **altura** do triângulo relativamente ao lado BC , se AD for perpendicular à reta que contém BC .

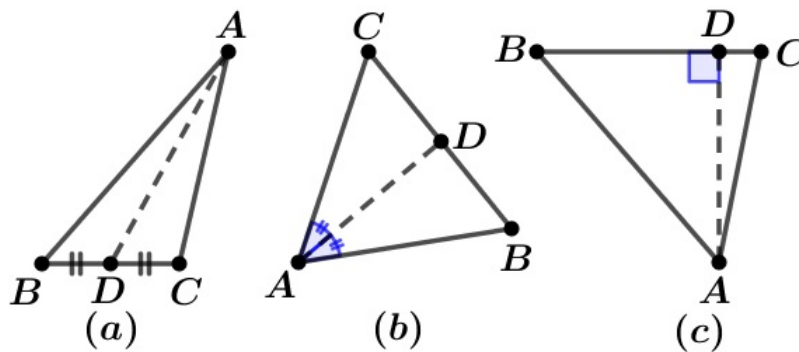


Figura 2.3: (a) AD é uma mediana. (b) AD é uma bissetriz. (c) AD é uma altura.

2.2 Casos de Congruência

Definição 2.2.1. Dois triângulos são **congruentes** se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que lados e ângulos correspondentes tenham medidas iguais.

Se $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$ são dois triângulos congruentes e se

$$A \leftrightarrow E$$

$$B \leftrightarrow F$$

$$C \leftrightarrow G$$

é a correspondência que define a congruência, então são válidas as seguintes relações:

$$\overline{AB} = \overline{EF}; \quad \overline{BC} = \overline{FG}; \quad \overline{AC} = \overline{EG}$$

$$\hat{A} = \hat{E}; \quad \hat{B} = \hat{F}; \quad \hat{C} = \hat{G}.$$

Se, nos triângulos abaixo, considerarmos a correspondência $C \leftrightarrow G, B \leftrightarrow F$ e $A \leftrightarrow E$, verificaremos que $\hat{C} = \hat{G}, \hat{B} = \hat{F}, \hat{A} = \hat{E}, \overline{CB} = \overline{FG}, \overline{BA} = \overline{FE}$ e $\overline{AC} = \overline{EG}$. Portanto, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$ são congruentes.

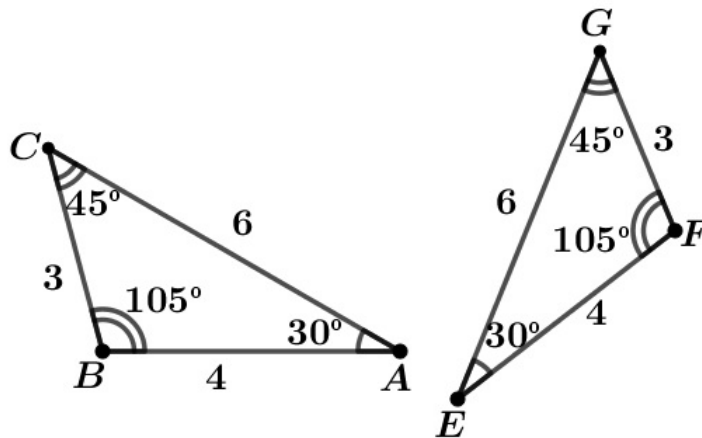


Figura 2.4:

Escreveremos $\triangle ABC = \triangle EFG$ para significar que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$ são congruentes e que a congruência leva A em E , B em F e C em G .

Axioma 2.2.1. Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$, se $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\overline{AC} = \overline{EG}$ e $\hat{A} = \hat{E}$, então $\triangle ABC = \triangle EFG$.

O axioma acima nos mostra que para verificarmos se dois triângulos são congruentes, é suficiente verificarmos apenas três das seis relações que aparecem na definição 2.2.1. Este axioma é conhecido como *primeiro caso de congruência de triângulos*. Classicamente, existem três casos de congruência. Os outros dois serão apresentados a seguir em forma de teorema.

Teorema 2.2.1. *Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$, se $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\angle \hat{A} = \angle \hat{E}$ e $\angle \hat{B} = \angle \hat{F}$, então $\triangle ABC = \triangle EFG$.*

Demonstração. Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$ dois triângulos tais que $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\angle \hat{A} = \angle \hat{E}$ e $\angle \hat{B} = \angle \hat{F}$. Seja D um ponto da semirreta com origem em A e que contém o ponto C , tal que $\overline{AD} = \overline{EG}$. Compare os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle EFG$. Como $\overline{AD} = \overline{EG}$, $\overline{AB} = \overline{EF}$ e $\angle \hat{A} = \angle \hat{E}$, concluímos, pelo axioma 2.2.1 que $\triangle ABD = \triangle EFG$. Como consequência, tem-se que $\angle \hat{A} \hat{B} D = \angle \hat{F}$. Mas, por hipótese, $\angle \hat{F} = \angle \hat{A} \hat{B} C$. Logo, $\angle \hat{A} \hat{B} D = \angle \hat{A} \hat{B} C$. Consequentemente, as semirretas com origem em B e que contém os pontos D e C coincidem. Então, o ponto D coincide com o ponto C e, portanto, coincidem os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$. Como já mostramos que $\triangle ABD = \triangle EFG$, então $\triangle ABC = \triangle EFG$.

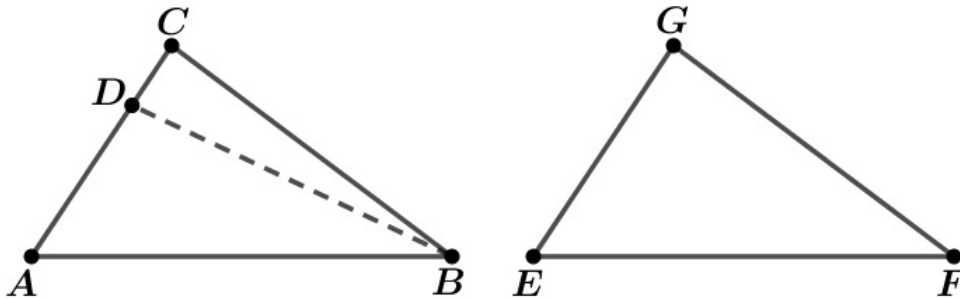


Figura 2.5:

□

Definição 2.2.2. Um triângulo é dito **isósceles** se tem dois lados congruentes. Estes lados são chamados de **laterais** e o terceiro lado é chamado de **base**.

Segue-se do Axioma 2.2.1 que em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes (confira (BARBOSA, 2012, pág. 58)).

Proposição 2.2.1. *Em um triângulo isósceles, a mediana relativamente à base é também bissetriz e altura.*

Demonstração. Seja $\triangle ABC$ um triângulo isósceles cuja base é AB . Seja CD sua mediana relativamente à base. Deve-se provar que $\angle A\hat{C}D = \angle B\hat{C}D$ e que $A\hat{D}C$ é um ângulo reto.

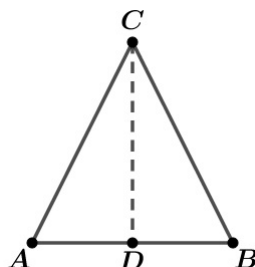


Figura 2.6:

Para isto, considere os triângulos $\triangle ADC$ e $\triangle BDC$. Como $\overline{AD} = \overline{DB}$ (já que CD é mediana); $\angle A = \angle B$ e $\overline{AC} = \overline{CB}$ (já que o triângulo é isósceles com base AB), então pelo Axioma 2.2.1, tem-se $\triangle ADC = \triangle BDC$. Segue-se daí que $\angle A\hat{C}D = \angle B\hat{C}D$ e $\angle C\hat{D}A = \angle B\hat{D}C$. A primeira congruência nos diz que CD é bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$. Como $A\hat{D}B$ é um ângulo raso e $\angle C\hat{D}A + \angle B\hat{D}C = \angle A\hat{D}B$, então $\angle C\hat{D}A + \angle B\hat{D}C = 180^\circ$. Como já sabemos que $\angle C\hat{D}A = \angle B\hat{D}C$, então concluímos que $\angle C\hat{D}A = \angle B\hat{D}C = 90^\circ$. Portanto, CD é perpendicular a AB . Isto conclui a prova da proposição. \square

Teorema 2.2.2. *Se dois triângulos tem três lados correspondentes congruentes, então os triângulos são congruentes.*

Demonstração. Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$ dois triângulos tais que $\overline{AB} = \overline{EF}$; $\overline{BC} = \overline{FG}$ e $\overline{AC} = \overline{EG}$.

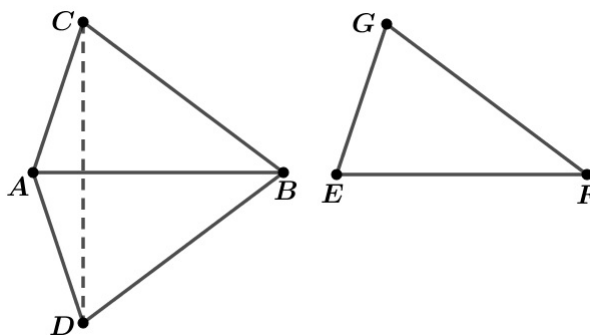


Figura 2.7:

Vamos provar que $\triangle ABC = \triangle EFG$. Para isto construa, a partir da semirreta com origem em A e que contém o ponto B , e no semi-plano oposto ao que contém o ponto C , um ângulo de medida igual ao ângulo \hat{E} . No lado deste ângulo que não contém o ponto B , marque um ponto D , tal que $\overline{AD} = \overline{EG}$ (por construção) e $\angle D\hat{A}B = \hat{E}$ (por construção), então $\triangle ABD = \triangle EFG$.

Vamos agora mostrar que os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle ABC$ são congruentes. Para tanto, trace CD . Como $\overline{AD} = \overline{EG} = \overline{AC}$ e $\overline{DB} = \overline{FG} = \overline{BC}$, então os triângulos $\triangle ADC$ e $\triangle BDC$ são isósceles. Segue-se que $\angle A\hat{D}C = \angle A\hat{C}D$ e $\angle C\hat{D}B = \angle D\hat{C}B$, logo, $\angle A\hat{D}B = \angle A\hat{C}B$. Então, pelo primeiro caso de congruência de triângulos, podemos concluir que $\triangle ADB = \triangle ABC$. Como já tínhamos provado que $\triangle ABD = \triangle EFG$, concluímos que $\triangle ABC = \triangle EFG$.

□

2.3 Semelhanças de Triângulos

Diremos que dois triângulos são **semelhantes** se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais.

Com isto, queremos dizer que, se $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$ são dois triângulos semelhantes e se $A \rightarrow E, B \rightarrow F$ e $C \rightarrow G$ é a correspondência que estabelece a semelhança, então valem simultaneamente as seguintes relações

$$\angle \hat{A} = \angle \hat{E}; \quad \angle \hat{B} = \angle \hat{F}; \quad \angle \hat{C} = \angle \hat{G} \quad (2.1)$$

e

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}}. \quad (2.2)$$

O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de **razão de proporcionalidade** entre os dois triângulos. Observemos que dois triângulos congruentes são sempre semelhantes com razão de proporcionalidade igual a um. Inversamente, dois triângulos semelhantes com razão de proporcionalidade igual a um são congruentes.

Vamos apresentar agora, em forma de teorema, os três casos clássicos de semelhanças de triângulos.

Teorema 2.3.1. *Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$, se $\angle \hat{A} = \angle \hat{E}$ e $\angle \hat{B} = \angle \hat{F}$, então os dois triângulos são semelhantes.*

Demonstração. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , então a congruência dos ângulos \hat{A} e \hat{E} e dos ângulos \hat{B} e \hat{F} acarreta na congruência dos ângulos \hat{C} e \hat{G} . Resta provar que os lados são proporcionais. Para isto, tome, na semirreta com origem em E e que contém o ponto F o ponto H, de modo que $\overline{EH} = \overline{AB}$. Pelo ponto H, trace uma reta paralela a FG. Esta intersecta a semirreta de origem em E e que contém o ponto G em um ponto J, formando um triângulo $\Delta E H J$ que é congruente ao triângulo $\Delta A B C$, já que $\angle \hat{A} = \angle \hat{E}$, $\overline{AB} = \overline{EH}$ e $\angle \hat{B} = \angle \hat{F} = \angle E H J$. Esta última congruência deve-se ao paralelismo de JH e GF.

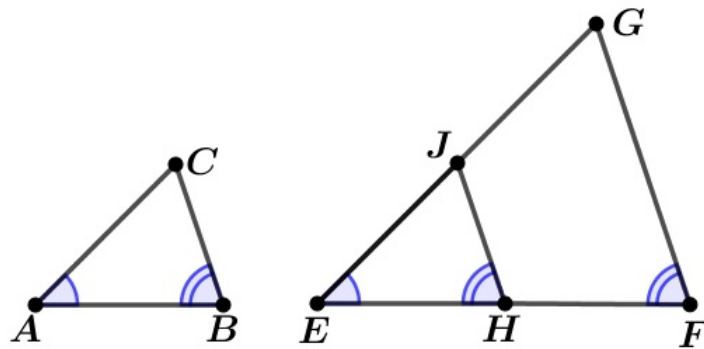


Figura 2.8:

Assim,

$$\frac{\overline{EH}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EJ}}{\overline{EG}}.$$

Como $\overline{EH} = \overline{AB}$ e $\overline{EJ} = \overline{AC}$, então da igualdade acima, obtemos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}.$$

De maneira totalmente análoga, demonstra-se que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{GF}}.$$

Fica, assim, demonstrado o teorema. □

Teorema 2.3.2. *Se, em dois triângulos ΔABC e ΔEFG tem-se $\angle A = \angle E$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$, então os dois triângulos são semelhantes.*

Demonstração. Construa um triângulo ΔHIJ que tenha $\overline{HI} = \overline{EF}$, $\angle \hat{H} = \angle \hat{A}$ e $\angle \hat{I} = \angle \hat{B}$.

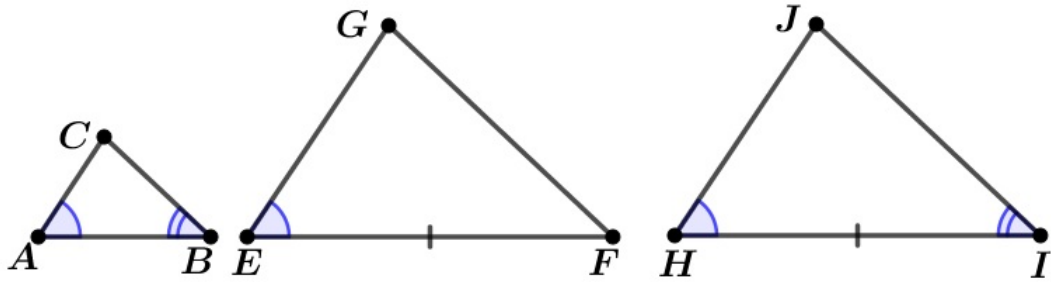


Figura 2.9:

De acordo com o teorema anterior, os triângulos ΔABC e ΔHIJ são semelhantes. Por conseguinte,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HJ}}.$$

Como $\overline{HI} = \overline{EF}$, a hipótese $(\overline{AB}/\overline{EF} = \overline{AC}/\overline{EG})$ e a igualdade acima implicam que $\overline{HJ} = \overline{EG}$. Como, por construção, $\overline{HI} = \overline{EF}$ e $\angle \hat{H} = \angle \hat{A} = \angle \hat{E}$, podemos concluir, que os triângulos ΔEFG e ΔHIJ são congruentes. Como já sabemos que ΔABC e ΔHIJ são semelhantes, então podemos concluir que ΔABC e ΔEFG são semelhantes.

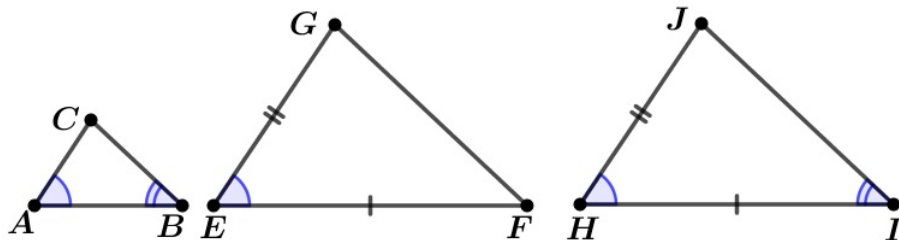
□

Teorema 2.3.3. *Se, em dois triângulos ΔABC e ΔEFG , tem-se*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}},$$

então os dois triângulos são semelhantes.

Demonstração. Construa um triângulo ΔHIJ que tenha $\angle \hat{H} = \angle \hat{A}$, $\overline{HI} = \overline{EF}$ e $\overline{HJ} = \overline{EG}$.



Segue-se, então, da hipótese que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HJ}}.$$

Portanto, de acordo com o teorema anterior, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle HIJ$ são semelhantes. Decorre daí que, além da igualdade acima, também ocorre

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{IJ}}.$$

Segue-se daí e da hipótese do teorema que $\overline{IJ} = \overline{FG}$. Como já tínhamos $\overline{HI} = \overline{EF}$ e $\overline{HJ} = \overline{EG}$ (por construção), então $\triangle HIJ = \triangle EFG$. Como, $\triangle HIJ$ e $\triangle ABC$ são semelhantes, conclui-se que $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$ são também semelhantes. Isto conclui a prova do teorema. \square

Com a noção de semelhança, podemos deduzir um dos teoremas mais importantes da Geometria Plana, a saber, o **Teorema de Pitágoras**.

Teorema 2.3.4. *Em todo triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*

Demonstração. Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice A . Trace a altura AD do vértice A ao lado BC . No que segue, vamos fazer uso da seguinte notação: $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, $h = \overline{AD}$, $m = \overline{BD}$ e $n = \overline{DC}$.

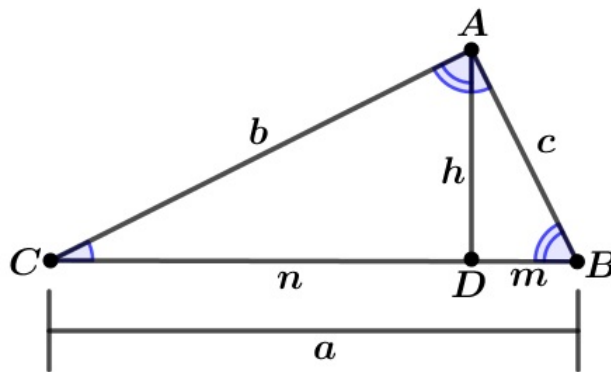


Figura 2.10:

Como AD é perpendicular a BC , então os triângulos $\triangle ADB$ e $\triangle ADC$ são retângulos. Como $\angle \hat{B} + \angle \hat{C} = 90^\circ$ e $\angle \hat{B} + \angle \hat{BAD} = 90^\circ$, então $\angle \hat{BAD} = \angle \hat{C}$. Como também $\angle \hat{DAC} + \angle \hat{C} = 90^\circ$, então $\angle \hat{DAC} = \angle \hat{B}$. Os triângulos $\triangle ADB$ e $\triangle CDA$ são, portanto, ambos semelhantes ao triângulo $\triangle ABC$ e são também semelhantes entre si. Da semelhança de $\triangle ADB$ e $\triangle ABC$ ($A \rightarrow C$, $B \rightarrow B$, $D \rightarrow A$,) conclui-se que

$$\frac{m}{c} = \frac{c}{a}.$$

Da semelhança dos triângulos ΔCDA e ΔABC , conclui-se que

$$\frac{n}{b} = \frac{b}{a}.$$

Logo, $am = c^2$ e $an = b^2$. Portanto, $a(m + n) = c^2 + b^2$. Como $m + n = a$, então $a^2 = b^2 + c^2$, como queríamos demonstrar.

□

Capítulo 3

Circunferência

Neste capítulo, fixaremos a notação e apresentaremos as principais definições e resultados concernentes às circunferências necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Nossas principais referências são (MUNIZ NETO, 2013) e (LANG, 1983).

3.1 Elementos da Circunferência

Definição 3.1.1. Dados um ponto O pertencente a um plano α e um número real $r > 0$, a **circunferência** de centro O e raio r , denotada por $\Gamma(O; r)$, é o conjunto dos pontos $P \in \alpha$ que estão a uma distância r de O . Mais precisamente,

$$\Gamma(O; r) = \{P \in \alpha \mid \overline{PO} = r\},$$

onde \overline{PO} representa a distância de P até O .

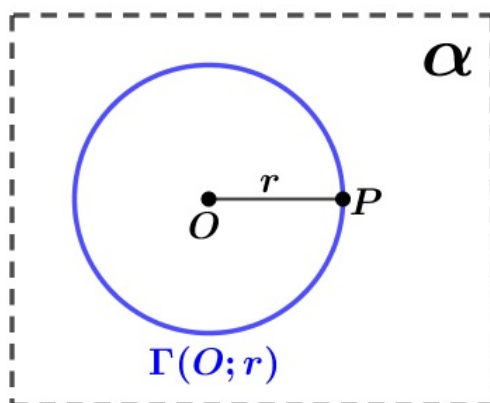


Figura 3.1: Circunferência de centro O e raio r pertencente ao plano α .

Salvo menção explícita em contrário, utilizaremos letras gregas maiúsculas $\Gamma, \Pi, \Sigma, \dots$ para designar circunferências e letras gregas minúsculas $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ para designar planos.

Chamamos de **raio** ao segmento que une o centro de uma circunferência a qualquer um de seus pontos. Uma **corda** é um segmento que une dois pontos quaisquer da circunferência; um **diâmetro** é uma corda que passa pelo centro da circunferência. Na figura 3.2 os segmentos OA, OD e OE são raios; os segmentos BC e DE são cordas; o segmento DE é um diâmetro.

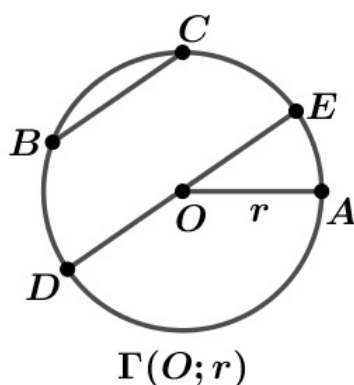


Figura 3.2: Elementos de uma circunferência.

Proposição 3.1.1. *Um raio é perpendicular a uma corda (que não é um diâmetro) se, e somente se, a divide em dois segmentos congruentes.*

Demonstração. Seja O o centro da circunferência e OC o raio que é perpendicular à corda AB . Seja M o ponto de interseção da corda com o raio. Como OA e OB são raios da mesma circunferência, então $\overline{OA} = \overline{OB}$. Logo, o triângulo ΔOAB é isósceles com base AB e, desse modo, $\angle \hat{A} = \angle \hat{B}$.

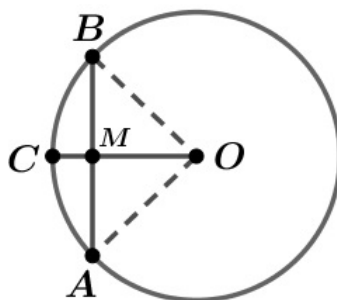


Figura 3.3:

Se a corda é perpendicular ao raio, então os ângulos \widehat{OMA} e \widehat{OMB} são retos. Como consequência, $\angle A\widehat{OM} = \angle B\widehat{OM}$. Segue-se do caso de congruência LAL (lado, ângulo, lado) que os triângulos $\triangle AOM$ e $\triangle BOM$ são congruentes e, portanto, $\overline{AM} = \overline{MB}$. Reciprocamente, se $\overline{AM} = \overline{MB}$, então os triângulos $\triangle AOM$ e $\triangle BOM$ são congruentes pelo caso LLL (lado, lado, lado). Consequentemente, $\angle O\widehat{MA} = \angle O\widehat{MB}$. Mas, como a soma destes dois ângulos é um ângulo raso, então cada um deles mede 90° . Portanto, a corda é perpendicular ao raio passando por M . \square

Sejam A e B dois pontos de uma circunferência. Tracemos a reta que passa por estes dois pontos. Ela separa o plano em dois semiplanos, cada um dos quais contém uma parte da circunferência. Estas partes são denominadas de **arcos** determinados pelos pontos A e B e são denotadas por \widehat{AB} .

Quando A e B são extremidades de um diâmetro, estes arcos são denominados de **semicircunferências**. Quando a corda AB não é um diâmetro, distinguimos os dois arcos determinados por A e B do seguinte modo: como o centro da circunferência encontra-se em um dos semiplanos determinados pela reta que passa por A e B , o arco que pertence ao mesmo semiplano que o centro da circunferência é chamado de **arco maior**; o outro é chamado de **arco menor**.

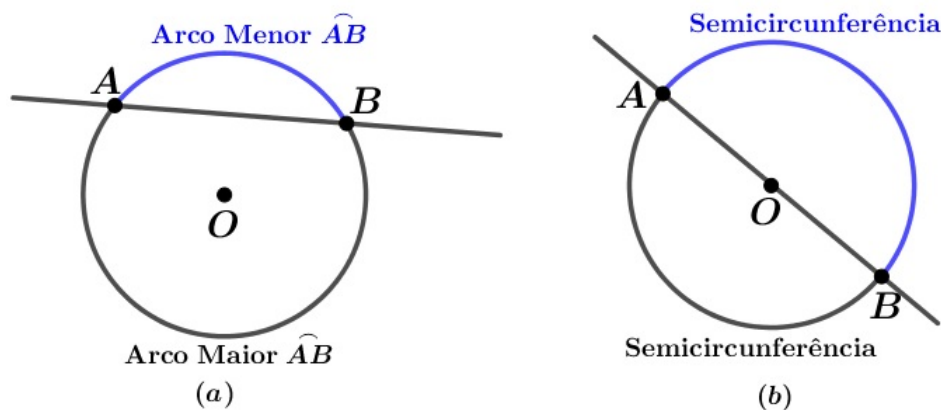


Figura 3.4: (a) Arcos determinados pelos pontos A e B . (b) Semicircunferências determinadas pelos pontos A e B .

Salvo aviso contrário, ao nos referirmos ao arco \widehat{AB} , estamos considerando o arco menor determinado pelos pontos A e B , cuja medida em graus será denotada por $m(\widehat{AB})$.

3.2 Posições Relativas

O complemento de uma circunferência no plano consiste de duas regiões, uma *limitada*, que chamamos de seu **interior** e a outra *ilimitada*, denominada o **exterior** da circunferência. Mais precisamente, dada uma circunferência $\Gamma(O; r) \in \alpha$ temos,

$$\text{interior } \Gamma(O; r) = \{P \in \alpha \mid \overline{PO} < r\} \quad \text{e} \quad \text{exterior } \Gamma(O; r) = \{P \in \alpha \mid \overline{PO} > r\}.$$

Assim, dados um ponto $P \in \alpha$ e uma circunferência $\Gamma(O; r) \in \alpha$, diremos que P é **interno** a $\Gamma(O; r)$ quando $\overline{PO} < r$ e que P é **externo** a $\Gamma(O; r)$ quando $\overline{PO} > r$.

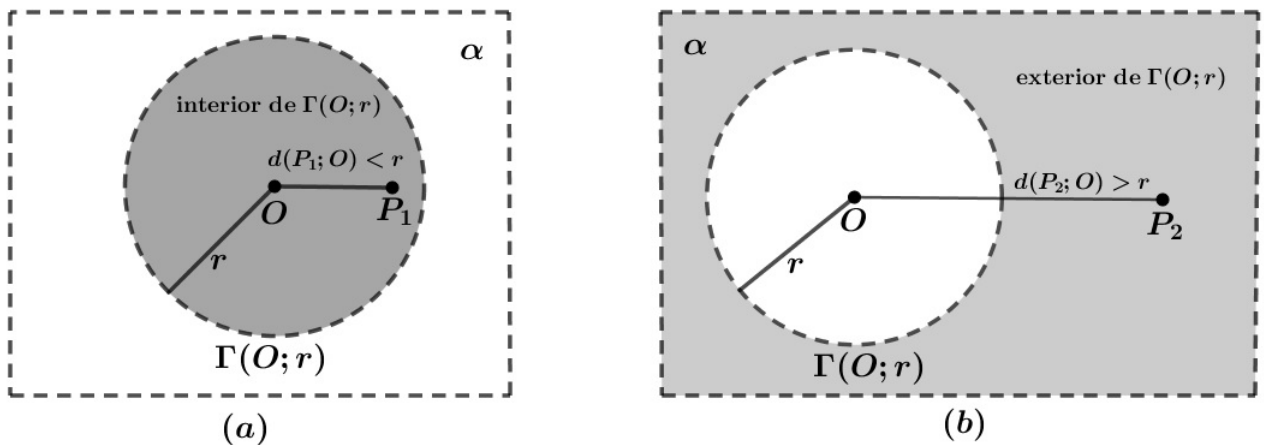


Figura 3.5: (a) P_1 é interno a $\Gamma(O; r)$. (b) P_2 é externo a $\Gamma(O; r)$.

Uma reta intersecta uma circunferência em, no máximo, dois pontos. As que a intersectam em exatamente dois pontos são chamadas de **secantes**.

Quando uma reta e uma circunferência têm apenas um ponto em comum, dizemos que a reta tangencia a circunferência e a chamamos de reta **tangente** à circunferência. O ponto em comum entre uma tangente e uma circunferência é chamado de **ponto de tangência**.

Caso uma reta não intersecte uma circunferência, dizemos que a reta é **exterior** à circunferência.

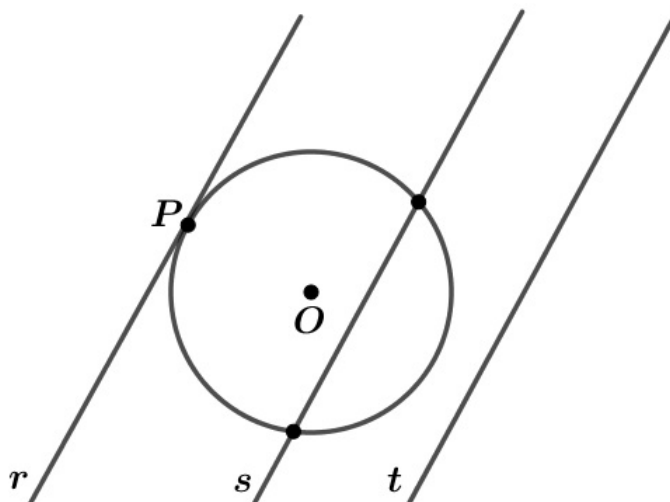


Figura 3.6: r é uma reta tangente à circunferência e P é o ponto de tangência. s é uma reta secante e t é uma reta exterior à circunferência.

Proposição 3.2.1. *Se uma reta é tangente a uma circunferência, então ela é perpendicular ao raio que liga o centro ao ponto de tangência.*

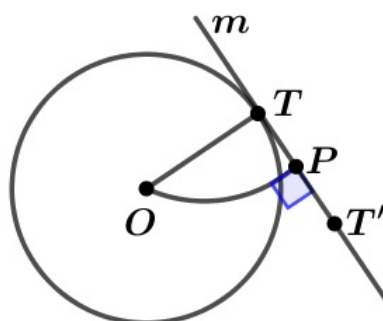


Figura 3.7:

Demonstração. Consideremos uma circunferência de centro O e uma reta m que lhe seja tangente em um ponto T . Designemos por P o pé da perpendicular baixada do ponto O à reta m . Desejamos mostrar que P e T coincidam. Suponhamos, então, que P e T sejam pontos distintos. Assim, OT é a hipotenusa do triângulo retângulo ΔOPT . Portanto, $\overline{OP} < \overline{OT}$. Como OT é um raio, então P é um ponto interior à circunferência. Tomemos, então, um ponto T' sobre a reta m , tal que $\overline{PT} = \overline{PT'}$, com $T' \neq T$. Pelo caso de congruência LAL (lado, ângulo, lado) concluímos que os triângulos ΔOPT e $\Delta OPT'$ são congruentes. Portanto, $\overline{OT} = \overline{OT'}$. Assim, T' é outro ponto da reta m que também

pertence à circunferência, donde segue que m não é tangente. Contradição. Portanto, P e T coincidem e OT é perpendicular a m . \square

A extremidade de um raio que não é o centro da circunferência é chamada de **extremidade do raio**.

Proposição 3.2.2. *Se uma reta é perpendicular a um raio em sua extremidade, então a reta é tangente à circunferência.*

Demonstração. Consideremos uma circunferência de centro O e seja m uma reta perpendicular ao raio OT passando pelo ponto T . Devemos provar que m é tangente à circunferência, ou seja, que m não tem outro ponto de interseção com a circunferência. Seja P qualquer outro ponto de m , então o triângulo ΔOTP é retângulo e, portanto,

$$\overline{OT}^2 + \overline{TP}^2 = \overline{OP}^2.$$

Segue-se que $\overline{OP} > \overline{OT}$ e, portanto, P é um ponto externo à circunferência. Logo, T é o único ponto comum à reta e à circunferência. Isto conclui a demonstração. \square

Vamos classificar agora as posições relativas existente entre duas circunferências. Dizemos que $\Gamma_1(O_1; r_1)$ e $\Gamma_2(O_2; r_2)$ são:

- **exteriores** se não tiverem pontos comuns e tiverem interiores disjuntos;

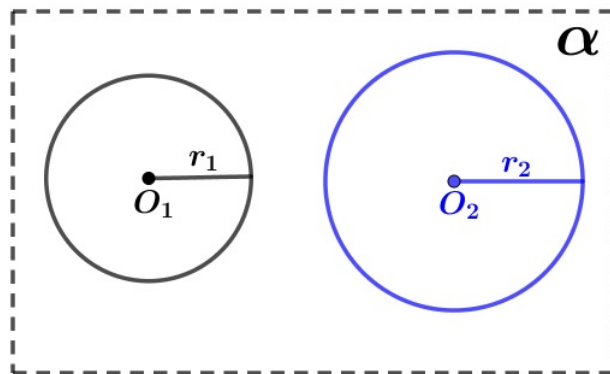


Figura 3.8: $\Gamma_1(O_1; r_1)$ e $\Gamma_2(O_2; r_2)$ são circunferências exteriores.

- **interiores** se não tiverem pontos comuns, mas o interior de uma delas contiver a outra. Em particular, quando os centros de duas circunferências interiores coincidem, dizemos que elas são **concêntricas**.

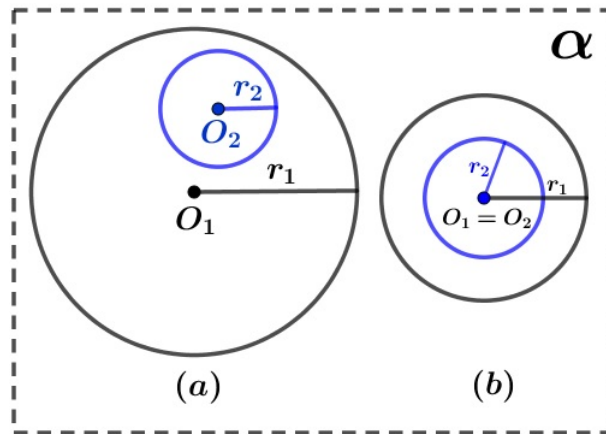


Figura 3.9: (a) $\Gamma_1(O_1; r_1)$ e $\Gamma_2(O_2; r_2)$ são circunferências interiores. (b) $\Gamma_1(O_1; r_1)$ e $\Gamma_2(O_2; r_2)$ são circunferências concêntricas.

- **secantes** se tiverem dois pontos em comum;
- **tangentes** se tiverem um único ponto comum. Nesse caso, as circunferências são **tangentes exteriormente** se tiverem interiores disjuntos e **tangentes interiormente** caso contrário.

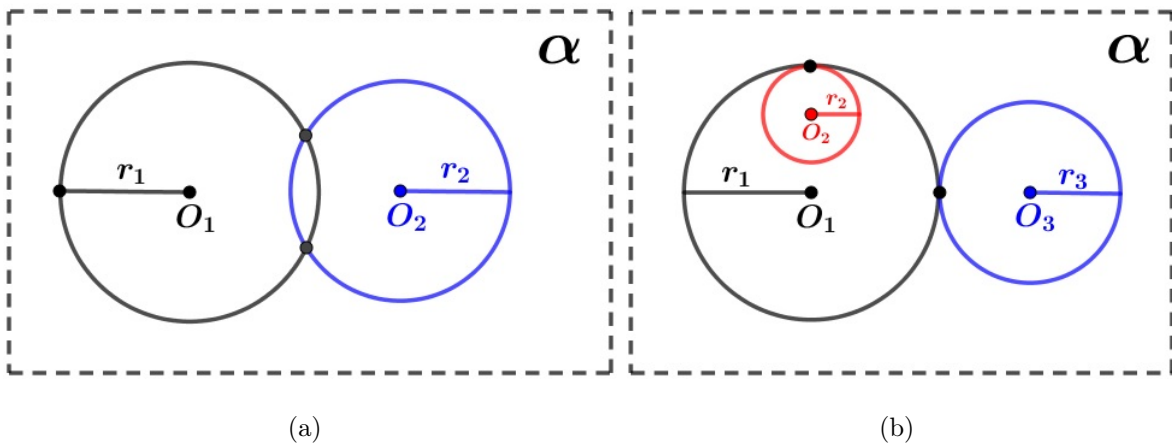


Figura 3.10: (a) $\Gamma_1(O_1; r_1)$ e $\Gamma_2(O_2; r_2)$ são secantes. (b) $\Gamma_1(O_1; r_1)$ e $\Gamma_2(O_2; r_2)$ são tangentes interiormente. $\Gamma_1(O_1; r_1)$ e $\Gamma_3(O_3; r_3)$ são tangentes exteriormente.

3.3 Ângulos na Circunferência

Dados dois pontos A e B em uma circunferência $\Gamma(O; r)$, o ângulo $A\hat{O}B$ é chamado de **ângulo central**. A medida em graus do arco menor determinado pelos pontos A e B é, por definição, a medida do ângulo central $A\hat{O}B$. A medida em graus do arco maior é

definida como sendo $360^\circ - \alpha^\circ$, onde α° é a medida em graus do arco menor. No caso em que AB é um diâmetro, a medida dos dois arcos é 180° .

Proposição 3.3.1. *Em uma mesma circunferência, duas cordas são congruentes se, e somente se, determinam ângulos centrais congruentes.*

Demonstração. Consideremos uma circunferência $\Gamma(O; r)$ e sejam AB e CD duas cordas desta circunferência. Suponhamos que $\overline{AB} = \overline{CD}$. Como $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = r$, então os triângulos ΔOAB e ΔOCD são congruentes pelo caso LLL (lado, lado, lado). Logo, $\angle A\hat{O}B = \angle C\hat{O}D$. Reciprocamente, se $\angle A\hat{O}B = \angle C\hat{O}D$, então os triângulos ΔOAB e ΔOCD são congruentes pelo caso LAL (lado, ângulo, lado). Como consequência, $\overline{AB} = \overline{CD}$. \square

Um ângulo $B\hat{A}C$ é chamado de **inscrito** em uma circunferência $\Gamma(O; r)$ quando seu vértice A é um ponto da circunferência e seus lados AB e AC são cordas de $\Gamma(O; r)$. Os pontos B e C determinam dois arcos. O arco que não contiver o ponto A é chamado de **arco correspondente** ao ângulo inscrito dado. Diremos também que o ângulo **subtende** o arco.

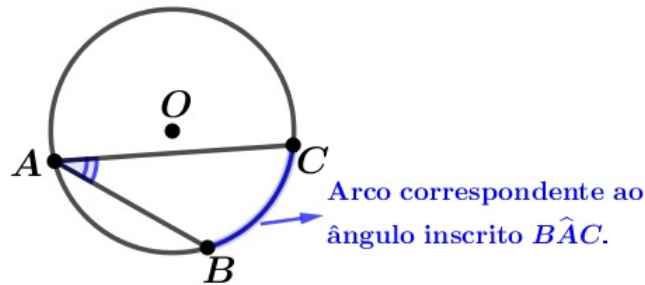


Figura 3.11: Exemplo de um ângulo inscrito em uma circunferência.

Proposição 3.3.2. *Todo ângulo inscrito em uma circunferência tem a metade da medida do arco correspondente.*

Demonstração. Consideremos primeiro o caso em que um dos lados do ângulo inscrito é um diâmetro (veja a figura 3.12). Sejam A o vértice do ângulo inscrito e B e C os pontos em que seus lados intersectam a circunferência. Suponha que o centro O da circunferência pertença ao lado AC .

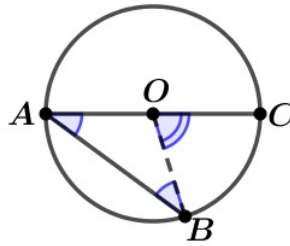


Figura 3.12:

Neste caso, a medida do arco correspondente ao ângulo inscrito é a medida do ângulo \widehat{BOC} . Como $\overline{OB} = \overline{OA}$, então o triângulo $\triangle OAB$ é isósceles e, portanto, $\angle O\hat{A}B = \angle O\hat{B}A$. Logo,

$$\angle B\hat{O}C = \angle O\hat{A}B + \angle O\hat{B}A = 2 \cdot \angle C\hat{A}B.$$

Portanto, neste caso particular, a proposição é verdadeira.

Suponhamos agora que nenhum dos lados do ângulo inscrito é um diâmetro. Tracemos, então, o diâmetro que passa pelo vértice A do ângulo inscrito. Seja D a outra extremidade desse diâmetro. Pelo primeiro caso, concluiremos que $\angle B\hat{O}D = 2 \cdot \angle B\hat{A}D$ e que $\angle D\hat{O}C = 2 \cdot \angle D\hat{A}C$.

Neste ponto, temos de distinguir dois casos: (a) o diâmetro AD divide o ângulo $B\hat{A}C$. (b) O diâmetro AD não divide o ângulo $B\hat{A}C$ (veja a figura 3.13).

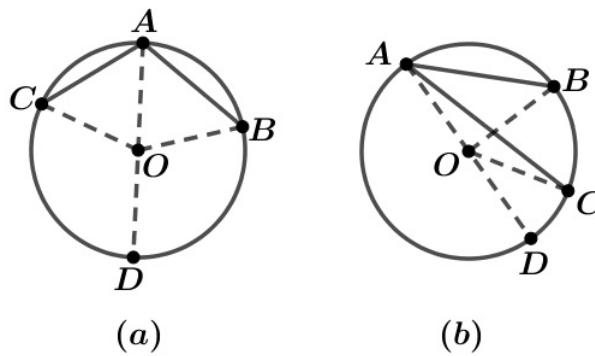


Figura 3.13:

No caso (a), temos $\angle B\hat{A}D + \angle D\hat{A}C = \angle B\hat{A}C$. A demonstração é então completada somando-se as igualdades já obtidas,

$$\angle B\hat{O}D + \angle D\hat{O}C = 2 \cdot (\angle B\hat{A}D + \angle D\hat{A}C) = 2 \cdot \angle B\hat{A}C.$$

Observe que $\angle B\hat{O}D + \angle D\hat{O}C$ é exatamente a medida do arco correspondente ao ângulo

\widehat{BAC} . No caso (b), podem ainda ocorrer duas situações distintas: (i) AC divide o ângulo \widehat{BAD} e (ii) AB divide o ângulo \widehat{CAD} . A prova nos dois casos é essencialmente a mesma. Faremos o caso (i). Neste caso, $\angle \widehat{BAC} = \angle \widehat{BAD} - \angle \widehat{CAD}$. Então, utilizando-se as duas igualdades obtidas inicialmente, tem-se

$$\angle \widehat{BOD} - \angle \widehat{COD} = 2 \cdot (\angle \widehat{BAD} - \angle \widehat{CAD}) = 2 \cdot \angle \widehat{BAC}.$$

Agora, observe que $\angle \widehat{BOD} - \angle \widehat{COD}$ é exatamente do arco correspondente ao ângulo \widehat{BAC} . Isto completa a demonstração. \square

Uma consequência imediata da última proposição é que ângulos inscritos que subtendem um mesmo arco têm a mesma medida. Em particular, todos os ângulos que subtendem uma semicircunferência são retos.

O caso limite de um ângulo inscrito \widehat{BAC} em uma circunferência $\Gamma(O; r)$ é aquele em que seu vértice \widehat{A} é um ponto da circunferência, um de seus lados é uma corda e o outro a tangente a $\Gamma(O; r)$ no ponto A . Tal ângulo é denominado **ângulo de segmento**.

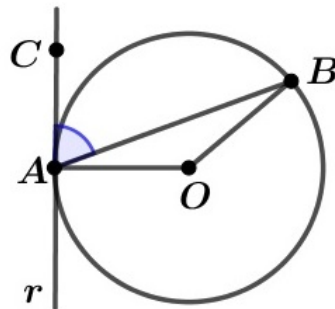


Figura 3.14: Ângulo de segmento \widehat{BAC} .

A proposição a seguir mostra que podemos calcular a medida de ângulos de segmento de maneira análoga ao cálculo das medidas de ângulos inscritos.

Proposição 3.3.3. *A medida de um ângulo de segmento é igual à metade do ângulo central correspondente.*

Demonstração. Utilizaremos as mesmas notações da figura 3.14. A reta r é tangente à circunferência e A é o ponto de tangência. Logo, da proposição 3.2.1, segue-se que o segmento AC é perpendicular ao raio OA , ou seja, $\angle O\widehat{AC} = 90^\circ$. Como OA e OB são

raios, então o triângulo $\triangle AOB$ é isósceles com base em AB . Assim, $\angle B\hat{A}O = \angle A\hat{B}O = 90^\circ - \angle B\hat{A}C$. Portanto,

$$\angle B\hat{O}A = 180^\circ - 2 \cdot (90^\circ - \angle B\hat{A}C) = 2 \cdot \angle B\hat{A}C.$$

□

Outra maneira de generalizarmos ângulos inscritos é considerar os chamados ângulos excêntricos. Um ângulo **excêntrico interior** é um ângulo formado por duas cordas de uma circunferência que se intersectam em seu interior. Um ângulo **excêntrico exterior** é um ângulo cujo vértice é um ponto exterior à circunferência e cujos lados estão contidos em duas retas ambas secantes à circunferência, ou ambas tangentes, ou uma secante e a outra tangente.

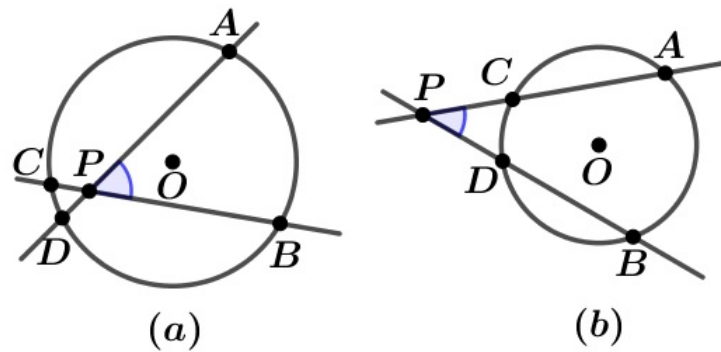


Figura 3.15: (a) $\angle APB$ é um ângulo excêntrico interno. (b) $\angle APB$ é um ângulo excêntrico externo.

Proposição 3.3.4. *Nas mesmas notações da figura 3.15, são válidas as seguintes igualdades*

$$\angle APB = \frac{m(\widehat{AB}) + m(\widehat{CD})}{2} \quad e \quad \angle APB = \frac{m(\widehat{AB}) - m(\widehat{CD})}{2}$$

nas situações (a) e (b), respectivamente.

Demonstração. Consideremos inicialmente a situação em (a). Traçando-se a corda BD , temos $\angle APB$ externo ao triângulo $\triangle BPD$. Assim, pelo teorema do ângulo externo,

$$\angle APB = \angle A\hat{D}B + \angle C\hat{B}D. \tag{3.1}$$

Observe que, $\angle A\hat{D}B$ e $\angle C\hat{B}D$ são ângulos inscritos subtendidos, respectivamente, aos arcos \widehat{AB} e \widehat{CD} . Logo, da proposição 3.3.2, segue-se que

$$\angle A\hat{D}B = \frac{m(\widehat{AB})}{2} \quad \text{e} \quad \angle C\hat{B}D = \frac{m(\widehat{CD})}{2}. \quad (3.2)$$

Portanto, das igualdades em (3.1) e (3.2), obtemos

$$\angle A\hat{P}B = \angle A\hat{D}B + \angle C\hat{B}D = \frac{m(\widehat{AB})}{2} + \frac{m(\widehat{CD})}{2} = \frac{m(\widehat{AB}) + m(\widehat{CD})}{2}.$$

Para demonstrar a igualdade na situação (b), basta considerar a corda AD e usar os mesmos argumentos da primeira parte. \square

3.4 Inscrição e Circunscrição de Polígonos Regulares

Iniciaremos esta seção relembrando que uma **poligonal** é uma figura formada por uma sequência de pontos A_1, A_2, \dots, A_n e pelos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{n-1}A_n$. Os pontos são os **vértices** da poligonal e os segmentos são os seus **lados**.

Uma classe particularmente importante de poligonais são os chamados polígonos. Mais precisamente, um **polígono** é uma poligonal em que as seguintes condições são satisfeitas,

- (i) $A_n = A_1$;
- (ii) os lados da poligonal se intersectam somente em suas extremidades;
- (iii) cada vértice é extremidade de dois lados;
- (iv) dois lados com mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

Um polígono de vértices A_1, A_2, \dots, A_n será representado por $A_1A_2A_3 \dots A_n$. Ele tem n vértices e n ângulos.

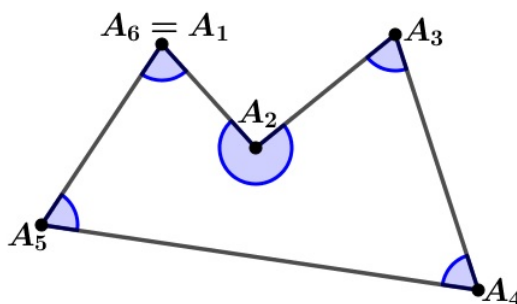


Figura 3.16: $A_1A_2A_3A_4A_5$ é um polígono com 5 lados e 5 ângulos.

Um polígono é dito **convexo** se está sempre contido em um dos semiplanos determinados pelas retas que contêm os seus lados. Caso contrário, diremos que o polígono é **não convexo**.

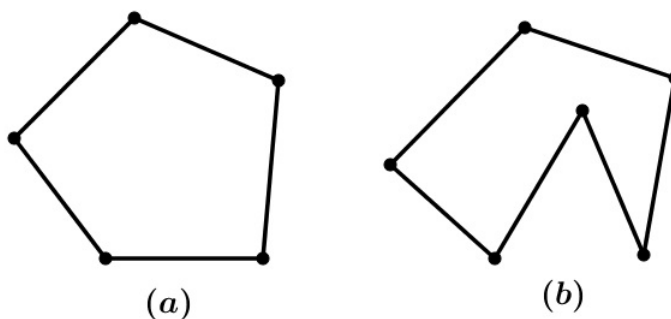


Figura 3.17: (a) Polígono convexo. (b) Polígono não convexo.

Diremos que um polígono está **inscrito em uma circunferência** se seus vértices pertencem a uma circunferência.

Proposição 3.4.1. *Todo triângulo está inscrito em uma circunferência.*

Demonstração. Considere o triângulo ΔABC . Para mostrar que ele está inscrito em uma circunferência, devemos exibir um ponto que seja equidistante de A, B e C . Seja m uma reta perpendicular a AB passando pelo seu ponto médio M e seja n a reta perpendicular a BC passando pelo seu ponto médio N . Designe por P o ponto de interseção destas duas retas. Observe que todo ponto da reta m é equidistante de A e B , e que todo ponto da reta n é equidistante de B e C . Logo, o ponto P será equidistante de A, B e C .

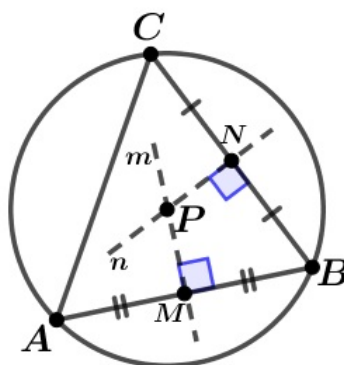


Figura 3.18:

□

A Proposição 3.4.1 nos garante que três pontos não colineares sempre determinam uma circunferência.

De modo geral, apenas os triângulos possuem a propriedade de serem inscritíveis em circunferências. Para outros polígonos, a condição de que o mesmo possa ser inscrito em uma circunferência acarreta em fortes restrições sobre as suas medidas. A seguinte proposição é um exemplo disto.

Proposição 3.4.2. *Um quadrilátero ABCD pode ser inscrito em uma circunferência se, e somente se, qualquer uma das condições a seguir for satisfeitas:*

$$(a) \angle D\hat{A}B + \angle B\hat{C}D = 180^\circ$$

$$(b) B\hat{A}C = B\hat{D}C.$$

Demonstração. (a) Vamos supor inicialmente que o quadrilátero possa ser inscrito em uma circunferência. Assim, seus vértices pertencem à circunferência e, desse modo, cada um de seus ângulos é um ângulo inscrito na circunferência. Seja ABCD o quadrilátero e considere os ângulos \hat{A} e \hat{C} . Eles subtendem exatamente os dois arcos determinados pelos pontos B e D. Como estes dois arcos somam 360° , então, de acordo com a Proposição 3.3.2, a soma das medidas dos ângulos \hat{A} e \hat{C} será 180° . Portanto, eles são suplementares.

Vamos agora supor que um quadrilátero ABCD tem um par de ângulos opostos suplementares. Como a soma dos ângulos internos é 360° , então o outro par de ângulos opostos é suplementar. Trace uma circunferência pelos pontos A, B e C. Isto sempre pode ser feito de acordo com a Proposição 3.4.1. Só existem três alternativas para a localização do ponto D: ele pode estar sobre, dentro ou fora da circunferência. Vamos supor que ele esteja fora da circunferência. Neste caso, trace o segmento BD. Seja E o ponto onde este intersecta a circunferência. O quadrilátero ABCE é um quadrilátero inscrito na circunferência e, portanto, pela primeira parte da proposição, seus ângulos opostos são suplementares. Em particular, temos $\angle A\hat{B}C + \angle A\hat{E}C = 180^\circ$. Por hipótese também temos $\angle A\hat{B}C + \angle A\hat{D}C = 180^\circ$. Das duas igualdades, concluímos que $\angle A\hat{E}C = \angle A\hat{D}C$. Agora, observe que $\angle A\hat{E}B > \angle A\hat{D}B$ e $\angle B\hat{E}C > \angle B\hat{D}C$. Logo,

$$\angle A\hat{E}C = \angle A\hat{E}B + \angle B\hat{E}C > \angle A\hat{D}B + \angle B\hat{D}C = \angle A\hat{D}C.$$

Esta contradição mostra que D não pode estar fora da circunferência. O caso em que D também não pode estar dentro da circunferência é tratado de maneira análoga. Para a

demonstração da parte (b) veja a Proposição 3.39 da referência (MUNIZ NETO, 2013).

□

Uma circunferência está **inscrita em um polígono** se todos os lados do polígono são tangentes à circunferência. Quando tal ocorre, diz-se que o polígono **circunscreve a circunferência**.

Proposição 3.4.3. *Todo triângulo possui uma circunferência inscrita.*

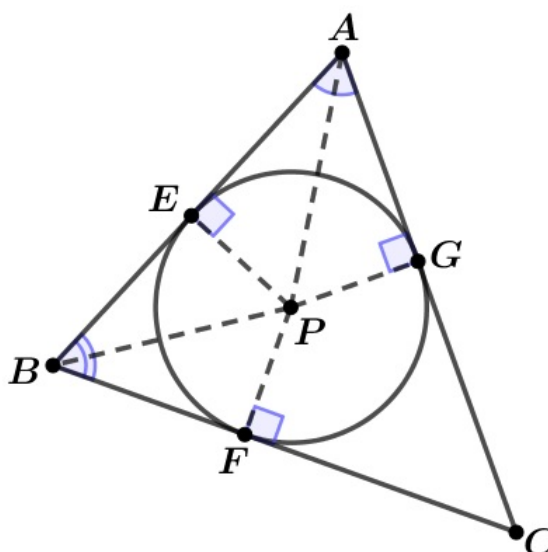


Figura 3.19:

Demonstração. Seja ΔABC um triângulo. Trace as bissetrizes dos ângulos \hat{A} e \hat{B} , as quais se intersectam em um ponto P . Deste ponto, baixe perpendiculares aos lados do triângulo. Sejam E, F e G os pés destas perpendiculares nos lados AB, BC e CA , respectivamente. Vamos provar que $PE = PF = PG$. Assim, o ponto P é o centro de uma circunferência que passa pelos pontos E, F e G . Além disso, como os lados do triângulo ΔABC são perpendiculares aos raios PE, PF e PG , eles são também tangentes à circunferência. Logo, a circunferência está inscrita no triângulo.

Para provar que $PE = PF = PG$, vamos comparar os triângulos ΔPGA e ΔPEA e os triângulos ΔPEB e ΔPFB . Todos eles são triângulos retângulos. Nos dois primeiros temos $\angle P\hat{A}G = \angle P\hat{A}E$ (PA é bissetriz) e PA é comum. Nos dois últimos temos $\angle P\hat{B}E = \angle P\hat{B}F$ (PB é bissetriz) e PB é comum. Portanto, os dois pares de triângulos são congruentes.

Da congruência dos dois primeiros, concluímos que $PG = PE$. Da congruência dos dois últimos, obtemos $PE = PF$. Isto completa a demonstração. \square

Além das circunferências inscrita e circunscrita, existem três circunferências notáveis associadas a todo triângulo, chamadas de *circunferências ex-inscritas*.

Definição 3.4.1. Dado um triângulo ΔABC , a circunferência **ex-inscrita** relativa ao lado BC é a circunferência que é tangente a BC e às extensões de AB e BC que contém os pontos B e C, respectivamente.

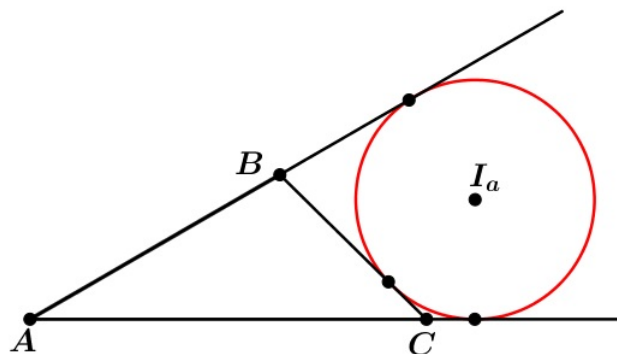


Figura 3.20: A circunferência de centro I_a (em destaque na cor vermelha) é a circunferência ex-inscrita relativa ao lado BC.

Um **polígono regular** é um polígono que é equilátero (todos os seus lados são congruentes) e equiangular (todos os seus ângulos são congruentes).

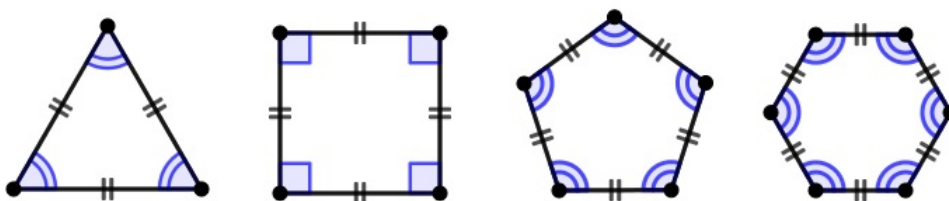


Figura 3.21: Exemplos de polígonos regulares.

Proposição 3.4.4. *Todo polígono regular está inscrito em uma circunferência.*

Demonstração. Seja $A_1A_2 \dots A_n$ um polígono regular. Tracemos a circunferência que passa pelos pontos A_1, A_2 e A_3 . Seja O o centro desta circunferência. Como $\overline{OA_2} = \overline{OA_3}$,

então o triângulo $\triangle OA_2A_3$ é isósceles e, logo, $\angle OA_2A_3 = \angle OA_3A_2$. Como o polígono é regular, então todos os seus ângulos internos tem a mesma medida. Portanto, $\angle A_1\hat{A}_2A_3 = \angle A_2\hat{A}_3A_4$.

Mas, então, $\angle A_1\hat{A}_2O = \angle OA_3A_4$. Como além disso $\overline{A_1A_2} = \overline{A_3A_4}$ (lados de um polígono regular são congruentes) e $\overline{OA_2} = \overline{OA_3}$, então os triângulos $\triangle OA_1A_2$ e $\triangle OA_4A_3$ são congruentes. Daí obtém-se $\overline{OA_4} = \overline{OA_1}$. Portanto, A_4 também é um ponto da circunferência. O mesmo raciocínio pode agora ser repetido para provar que A_5 também pertence a uma circunferência e assim sucessivamente. Como resultado final, obtém-se que todos os pontos do polígono pertencem a uma circunferência.

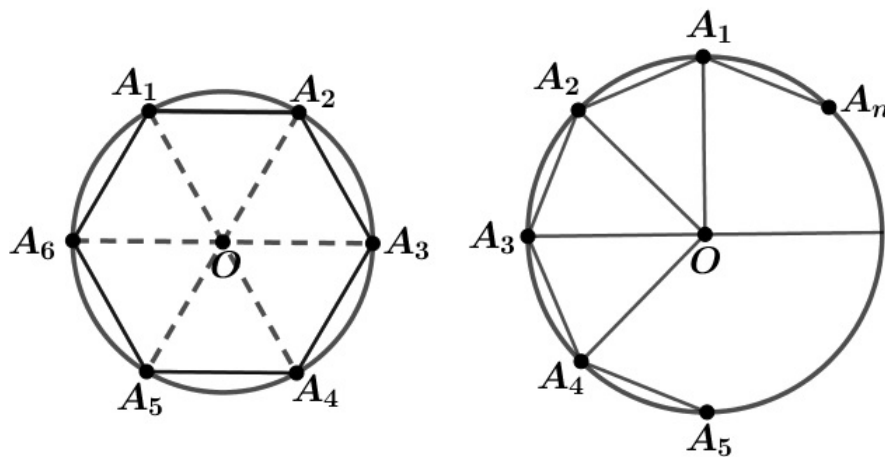


Figura 3.22:

□

Corolário 3.4.1. *Todo polígono regular possui uma circunferência inscrita.*

Demonstração. Trace a circunferência na qual o polígono regular $A_1A_2 \dots A_n$ está inscrito. Seja O o seu centro. Todos os triângulos isósceles $\triangle A_1OA_2, \triangle A_2OA_3, \triangle A_3OA_4, \dots$ são congruentes. Como consequência suas alturas relativas às bases são também congruentes. A circunferência de centro O e com raio igual ao comprimento destas alturas está inscrita no polígono. □

3.5 Potência de um ponto

Considere quatro pontos A, B, X, Y pertencentes a uma circunferência Γ e seja P o ponto de interseção das retas que passam pelos segmentos AB e XY . Como visto na seção

3.3, o ângulo \widehat{BPX} pode ser excêntrico exterior ou excêntrico interior.

Na mesma notação do caso (b) da Figura 3.23 (o caso (a) é tratado de maneira totalmente análoga), temos $\angle A\hat{Y}X = \angle A\hat{B}X$ (ângulos inscritos que subtendem o mesmo arco \widehat{AX}); $\angle B\hat{A}Y = \angle B\hat{X}Y$ (ângulos inscritos que subtendem o mesmo arco \widehat{BY}); e $\angle A\hat{P}Y = \angle B\hat{P}X$ (ângulos opostos pelo vértice). Assim, os triângulos $\triangle APY$ e $\triangle BPX$ são semelhantes pelo caso AA (ângulo, ângulo). Dessa semelhança, obtemos,

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PY}} = \frac{\overline{PX}}{\overline{PB}},$$

ou de maneira equivalente, $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PX} \cdot \overline{PY}$.

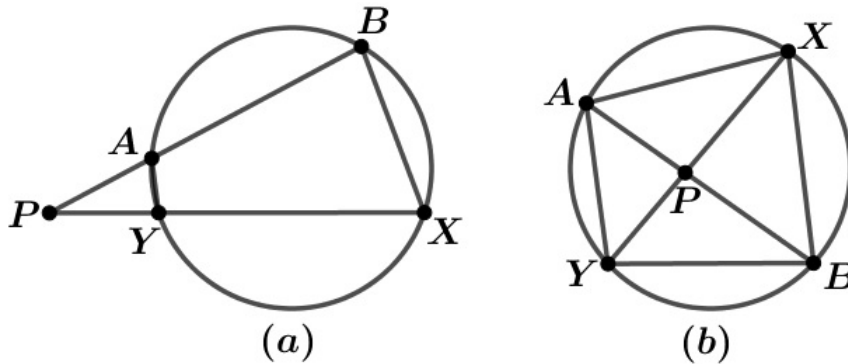


Figura 3.23: (a) O ângulo \widehat{BPX} é excêntrico exterior. (b) O ângulo \widehat{BPX} é excêntrico interior.

Observe que a quantidade $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ não depende da escolha do segmento AB , mas somente do ponto P . Em particular, se escolhermos AB como sendo um diâmetro, obtemos

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = |\overline{PO} - r| |\overline{PO} + r|,$$

onde O e r são o centro e o raio de Γ , respectivamente. Motivados por essas observações, temos a seguinte definição.

Definição 3.5.1. Dados um ponto P e uma circunferência $\Gamma(O; r)$, definimos a **potência** de P com relação a $\Gamma(O; r)$ por

$$\text{Pot}_\Gamma(P) = \overline{OP}^2 - r^2.$$

Proposição 3.5.1. Considere uma circunferência $\Gamma(O; r)$ e um ponto arbitrário P . Então,

(a) $\text{Pot}_\Gamma(P) = 0$ se, e somente se, $P \in \Gamma$.

(b) Se P está no interior de Γ e BC é uma corda de Γ que contém P , então

$$\text{Pot}_\Gamma(P) = -\overline{BP} \cdot \overline{PC}.$$

(c) Se P está no exterior de Γ e l é uma reta que passa por P e intersecta Γ em B e C , então $\text{Pot}_\Gamma(P) = \overline{PB} \cdot \overline{PC}$.

Demonstração. (a) $\text{Pot}_\Gamma(P) = 0$ equivale a dizer que $\overline{OP}^2 - r^2 = 0$. Isso, por sua vez, significa que $\overline{OP} = r$, ou seja, $P \in \Gamma$.

(b) Seja l a reta que passa pelos pontos O e P . Se $l \cap \Gamma = \{D, E\}$, então o quadrilátero $BDCE$ é inscritível. Logo, são semelhantes os triângulos ΔPBE e ΔPDC . Assim, temos a seguinte relação

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PC}},$$

ou seja,

$$\overline{BP} \cdot \overline{PC} = \overline{PE} \cdot \overline{PD}. \quad (3.3)$$

Observe que,

$$\text{Pot}_\Gamma(P) = \overline{OP}^2 - r^2 = (\overline{OP} + r)(\overline{OP} - r) = -(r - \overline{OP})(\overline{OP} + r) = -\overline{PE} \cdot \overline{PD}. \quad (3.4)$$

Das igualdades em (3.3) e (3.4), obtemos $\text{Pot}_\Gamma(P) = -\overline{BP} \cdot \overline{PC}$.

(c) De modo análogo ao item (b), os triângulos ΔPBD e ΔPEC são semelhantes. Logo,

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{PE}}{\overline{PC}},$$

donde,

$$\overline{PB} \cdot \overline{PC} = \overline{PD} \cdot \overline{PE} = (\overline{PO} + r)(\overline{PO} - r) = \overline{PO}^2 - r^2 = \text{Pot}_\Gamma(P).$$

□

Observação 3.5.1. O item (c) da proposição anterior nos mostra que se, em particular, a reta l é tangente a Γ , então $\text{Pot}_\Gamma(P) = \overline{PB}^2$, pois neste caso os pontos B e C coincidem.

O lema a seguir é um clássico resultado devido a Euler.

Lema 3.5.1. *Considere um triângulo ΔABC e sejam $\Gamma_1(O; R)$ e $\Gamma_2(I; r)$ as circunferências circunscrita e inscrita, respectivamente, ao ΔABC . Então, $\overline{OI}^2 = R(R - 2r)$. Em particular, $R \geq 2r$.*

Demonstração. Seja L o ponto de interseção do prolongamento do segmento AI com a circunferência Γ_1 e seja K o ponto diametralmente oposto a L . Chamemos de F o pé da perpendicular baixada de I ao segmento AB . Note que, $\angle F\hat{A}I = \angle B\hat{A}L = \angle B\hat{K}L$ e $\angle A\hat{F}I = \angle K\hat{B}L = 90^\circ$. Além disso, usando-se os resultados sobre ângulo inscrito segue que $\angle L\hat{B}I = \angle L\hat{I}B$ e, portanto, o triângulo ΔBIL é isósceles de base BI .

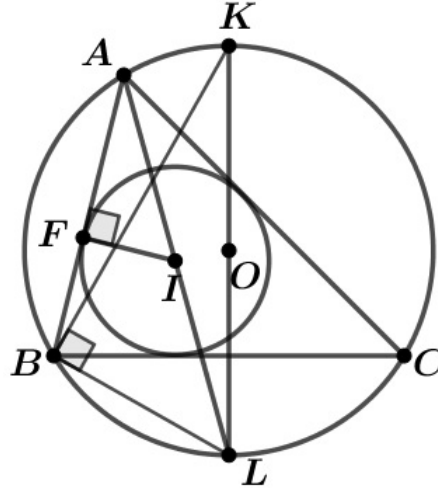


Figura 3.24:

Logo,

$$\frac{\overline{AI}}{r} = \frac{\overline{AI}}{\overline{IF}} = \frac{\overline{KL}}{\overline{LB}} = \frac{2R}{\overline{LI}},$$

e assim, $\overline{AI} \cdot \overline{IL} = 2Rr$. Como I é incentro, então I pertence ao interior de Γ_1 e, desse modo, $-\text{Pot}_{\Gamma_1}(I) = R^2 - \overline{OI}^2$. Por outro lado, pelo item (b) da proposição 3.5.1 temos $-\text{Pot}_{\Gamma_1}(I) = \overline{AI} \cdot \overline{IL}$. Combinando as três últimas igualdades, obtemos $2Rr = R^2 - \overline{OI}^2$. Consequentemente, $\overline{OI}^2 = R(R - 2r)$.

□

Definição 3.5.2. Dada uma propriedade \mathcal{P} relativa a pontos do plano, o **lugar geométrico (LG)** dos pontos que possuem a propriedade \mathcal{P} é o subconjunto \mathcal{L} do plano que satisfaz as duas condições a seguir:

- (a) Todo ponto de \mathcal{L} possui a propriedade \mathcal{P} .
- (b) Todo ponto do plano que possui a propriedade \mathcal{P} pertence a \mathcal{L} .

Definição 3.5.3. Sejam Γ_1 e Γ_2 duas circunferências não concêntricas. O **eixo radical**

de Γ_1 e Γ_2 é o lugar geométrico dos pontos P tais que

$$\text{Pot}_{\Gamma_1}(P) = \text{Pot}_{\Gamma_2}(P).$$

Teorema 3.5.1. *O eixo radical de duas circunferências é sempre uma reta perpendicular ao segmento que une os centros das duas circunferências.*

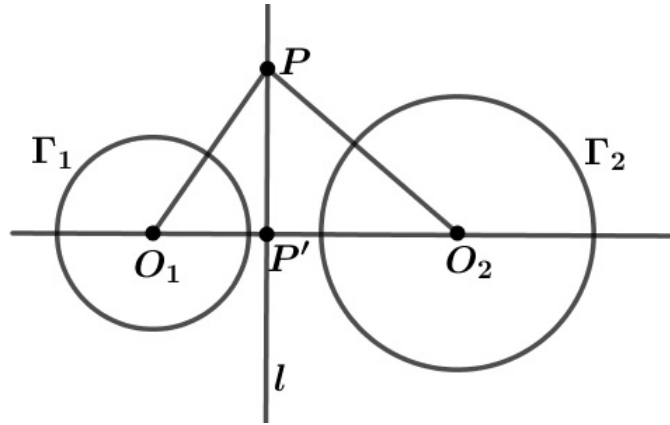


Figura 3.25:

Demonstração. Sejam $\Gamma_1(O_1; r_1)$ e $\Gamma_2(O_2; r_2)$ as circunferências. Vamos mostrar que a projeção P' de todo ponto P do eixo radical sobre O_1O_2 é constante. De fato, aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos $\Delta O_1P'P$ e $\Delta O_2P'P$ temos,

$$\begin{cases} \overline{O_1P}^2 = \overline{O_1P'}^2 + \overline{PP'}^2 \\ \overline{O_2P}^2 = \overline{O_2P'}^2 + \overline{PP'}^2. \end{cases}$$

Subtraindo membro a membro as duas igualdades acima, obtemos

$$\begin{aligned} \overline{O_1P}^2 - \overline{O_2P}^2 &= \overline{O_1P'}^2 - \overline{O_2P'}^2 \\ \overline{O_1P}^2 - (\overline{O_1O_2} - \overline{O_1P'})^2 &= (\text{Pot}_{\Gamma_1}(P) + r_1^2) - (\text{Pot}_{\Gamma_2}(P) + r_2^2). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Como, por hipótese, o ponto P pertence ao eixo radical de Γ_1 e Γ_2 , então $\text{Pot}_{\Gamma_1}(P) = \text{Pot}_{\Gamma_2}(P)$. Assim, da igualdade em (3.5) obtemos

$$2 \cdot \overline{O_1O_2} \cdot \overline{O_1P'} - \overline{O_1O_2}^2 = r_1^2 - r_2^2,$$

donde

$$\overline{O_1P'} = \frac{r_1^2 - r_2^2 + \overline{O_1O_2}^2}{2 \cdot \overline{O_1O_2}}, \quad (3.6)$$

e isso nos mostra que P' é constante, pois não depende da escolha do ponto P . Desse modo, o eixo radical de Γ_1 e Γ_2 está contido na reta l perpendicular a O_1O_2 passando por $P' \in O_1O_2$ satisfazendo (3.6). Falta mostrar que todo ponto dessa reta pertence ao eixo radical. Seja então $P \in l$. Logo, P' satisfaz (3.6), e daí

$$\overline{O_1P}^2 = \overline{PP'}^2 + \left(\frac{r_1^2 - r_2^2 + \overline{O_1O_2}^2}{2 \cdot \overline{O_1O_2}} \right)^2,$$

ou seja,

$$\text{Pot}_{\Gamma_1}(P) = \overline{PP'}^2 + \left(\frac{r_1^2 - r_2^2 + \overline{O_1O_2}^2}{2 \cdot \overline{O_1O_2}} \right)^2 - r_1^2. \quad (3.7)$$

Além disso,

$$\overline{O_2P'} = \overline{O_1O_2} - \frac{r_1^2 - r_2^2 + \overline{O_1O_2}^2}{2 \cdot \overline{O_1O_2}} = \frac{r_2^2 - r_1^2 + \overline{O_1O_2}^2}{2 \cdot \overline{O_1O_2}}$$

isto é,

$$\overline{O_2P}^2 = \overline{PP'}^2 + \left(\frac{r_2^2 - r_1^2 + \overline{O_1O_2}^2}{2 \cdot \overline{O_1O_2}} \right)^2,$$

de onde concluímos que

$$\text{Pot}_{\Gamma_2}(P) = \overline{PP'}^2 + \left(\frac{r_2^2 - r_1^2 + \overline{O_1O_2}^2}{2 \cdot \overline{O_1O_2}} \right)^2 - r_2^2. \quad (3.8)$$

Subtraindo membro a membro as equações em (3.7) e (3.8), obtemos $\text{Pot}_{\Gamma_1}(P) = \text{Pot}_{\Gamma_2}(P)$.

□

Abaixo estão duas possíveis posições de Γ_1 e Γ_2 juntamente com os respectivos eixos radicais.

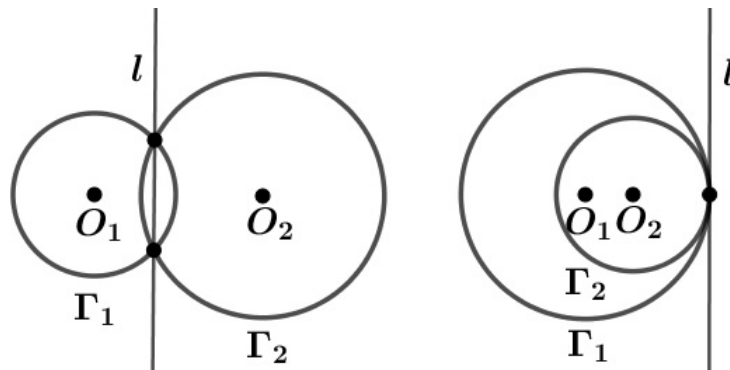


Figura 3.26:

A partir do Teorema 3.5.1 vemos que o eixo radical de duas circunferências Γ_1 e Γ_2 que se intersectam em no máximo um ponto é o lugar geométrico dos pontos P tais que as tangentes de P a Γ_1 e Γ_2 têm o mesmo comprimento.

Proposição 3.5.2. *Sejam Γ_1, Γ_2 e Γ_3 três circunferências não concêntricas. Então os eixos radicais dessas circunferências tomadas duas a duas são paralelos ou concorrentes. Neste último caso, a interseção O é o único ponto P do plano tal que*

$$\text{Pot}_{\Gamma_1}(P) = \text{Pot}_{\Gamma_2}(P) = \text{Pot}_{\Gamma_3}(P)$$

e tal ponto é chamado de **centro radical** de Γ_1, Γ_2 e Γ_3 .

Demonstração. Sejam l_1, l_2, l_3 os eixos radicais de Γ_2 e Γ_3 , Γ_1 e Γ_3 , e Γ_1 e Γ_2 , respectivamente. Pelo teorema 3.5.1, temos

$$O_2O_3 \perp l_1, \quad O_1O_3 \perp l_2 \quad \text{e} \quad O_1O_2 \perp l_3.$$

Assim, se duas dessas retas são paralelas (suponha sem perda de generalidade, $l_1 // l_2$), então $O_2O_3 // O_1O_3$ e isso implica que O_1, O_2 e O_3 são colineares. Logo, l_3 também é paralela a l_1 e a l_2 . Suponha agora que l_1, l_2 e l_3 são duas a duas concorrentes. Seja O a interseção de l_1 e l_2 . Então,

$$\text{Pot}_{\Gamma_2}(O) = \text{Pot}_{\Gamma_3}(O) \quad \text{e} \quad \text{Pot}_{\Gamma_1}(O) = \text{Pot}_{\Gamma_3}(O).$$

Segue que $\text{Pot}_{\Gamma_1}(O) = \text{Pot}_{\Gamma_2}(O)$, ou seja, $O \in l_3$, donde concluímos que l_1, l_2 e l_3 são concorrentes. Como três retas não paralelas se intersectam em no máximo um ponto, então O é único. \square

3.6 Comprimento de uma circunferência

Seja $P = A_1A_2A_3 \dots A_n$ um polígono convexo inscrito em uma circunferência $\Gamma(O; r)$ e sejam A e B dois vértices consecutivos deste polígono. Tomemos um ponto C no arco \widehat{AB} e indiquemos por P_1 o polígono cujos os vértices são os vértices do polígono P mais o ponto C , ou seja, $P_1 = A_1A_2A_3 \dots A_nC$.

A passagem do polígono P para o polígono P_1 está relacionada com a substituição do lado AB pelos lados AC e CB (veja a figura 3.27). Como $\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{CB}$, então o perímetro de P_1 é maior do que o perímetro de P .

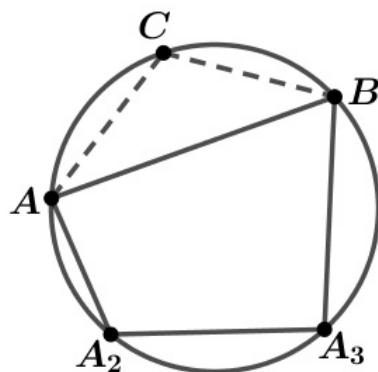


Figura 3.27:

Assim, ao adicionarmos ao polígono novos vértices, aumentaremos seu perímetro. No entanto, este aumento não é ilimitado. De fato, se tomarmos um polígono circunscrito Q , os perímetros de todos os polígonos inscritos serão menores do que o perímetro de Q . Em particular, considerando Q o quadrado circunscrito na circunferência, que por sua vez tem perímetro $8r$, segue que todos os polígonos inscritos na circunferência têm perímetro inferior a $8r$.

Chamamos de **comprimento da circunferência** o menor dos números maiores que o perímetro de qualquer polígono inscrito a ela. Em uma linguagem mais precisa da Análise Matemática, o comprimento de uma circunferência é o **supremo**¹ do conjunto dos perímetros dos polígonos inscritos nessa circunferência.

Proposição 3.6.1. *Qualquer que seja o número positivo α , podemos inscrever na circunferência um polígono convexo cujo perímetro difere do comprimento da circunferência em menos de α .*

Demonstração. Denotemos por l o comprimento da circunferência. Suponhamos por absurdo que a afirmação do enunciado não seja válida. Então, o perímetro de qualquer polígono inscrito na circunferência não é maior do que $l - \alpha$. Por conseguinte, o número l não é o menor dos números maiores que o perímetro de qualquer polígono inscrito. O número $l - \frac{\alpha}{2}$ é menor do que l e, por sua vez, maior do que o perímetro de qualquer polígono inscrito. Esta contradição conclui a demonstração da proposição. \square

¹Ao leitor interessado na definição de **supremo**, recomendamos a referência (LIMA, 2011).

Teorema 3.6.1. *Considere duas circunferências $\Gamma_1(O_1; r_1)$ e $\Gamma_2(O_2; r_2)$ cujos comprimentos são l_1 e l_2 , respectivamente. Então,*

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Demonstração. Suponhamos por absurdo que a afirmação não seja verdadeira. Então existem circunferências de raios R_1 e R_2 tais que

$$\frac{R_1}{R_2} < \frac{l_1}{l_2} \quad \text{ou} \quad \frac{R_2}{R_1} < \frac{l_2}{l_1}.$$

Suponhamos, por simplicidade, que $\frac{R_1}{R_2} < \frac{l_1}{l_2}$ e indiquemos por k a razão $\frac{R_1}{R_2}$. Então, $\frac{l_1}{l_2} > k$ e, por conseguinte, $l_1 > kl_2$. Inscrevamos na primeira circunferência um polígono Q_1 de modo que seu perímetro p_1 difere do comprimento da circunferência menos de $l_1 - l_2k$, ou seja, que se tenha $l_1 - p_1 < l_1 - l_2k$. Então, $p_1 > l_2k$. Inscrevamos na segunda circunferência o polígono Q_2 semelhante a Q_1 . Seja p_2 seu perímetro. A razão dos comprimentos dos polígonos Q_1 e Q_2 é igual à razão dos raios das circunferências, isto é, $p_1 = kp_2$. Como $p_1 > kl_2$ e $p_1 = kp_2$ resulta que $p_2 > l_2$. Mas, isto contradiz a definição do número l_2 que deve ser maior que o perímetro de qualquer polígono inscrito na segunda circunferência. Por outro lado, a razão dos comprimentos das circunferências é igual à razão dos seus raios ou diâmetros

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{d_1}{d_2},$$

onde d_1 e d_2 representam, respectivamente, os diâmetros das circunferências de raios R_1 e R_2 . □

Do teorema anterior, deduzimos que

$$\frac{l_1}{d_1} = \frac{l_2}{d_2},$$

ou seja, que a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro não depende da circunferência que se tenha tomado. Esta razão é representada pela letra grega π e seu valor é aproximadamente

$$\pi \approx 3,14159265358979.$$

Portanto, o comprimento da circunferência se determina segundo a fórmula

$$l = 2\pi R.$$

Assim, a partir de uma regra de três simples

$$360^\circ \longleftrightarrow 2\pi R$$

$$\alpha^\circ \longleftrightarrow l$$

obtemos que o comprimento l do arco de circunferência é determinado pela fórmula

$$l = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ},$$

onde α é a medida em graus do ângulo central correspondente.

Capítulo 4

Círculo

Dados um ponto O pertencente a um plano α e um número real $r > 0$, o **círculo** de centro O e raio r , denotado por $\Gamma[O; r]$, é o conjunto dos pontos $P \in \alpha$ cuja distância até O é menor do que ou igual a r ,

$$\Gamma[O; r] = \{P \in \alpha \mid \overline{PO} \leq r\},$$

onde \overline{PO} representa a distância de P até O .

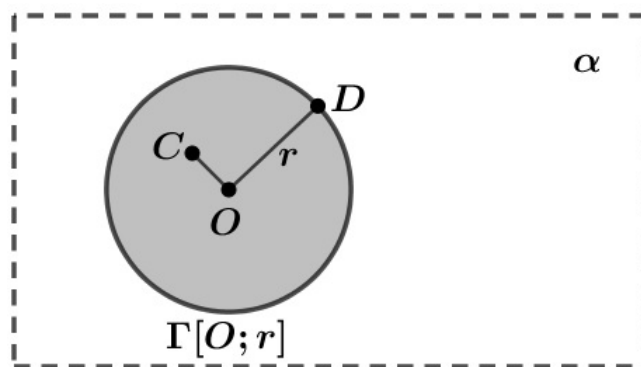


Figura 4.1:

O conjunto dos pontos do círculo tais que a distância até a origem é exatamente igual a r é chamado de **circunferência** e o conjunto dos pontos do círculo tais que a distância até a origem é estritamente menor do que r é chamado de **interior** do círculo. Na figura 4.1, C é um ponto pertencente ao interior e D é um ponto da fronteira do círculo.

4.1 Círculo Trigonométrico

Considere um círculo de centro O e nele um diâmetro AB . Fixemos nossa atenção em um dos semicírculos determinados por AB . Tome um ponto qualquer C deste semicírculo e indique por α o ângulo $C\hat{O}B$. Trace, a partir de C , uma perpendicular à reta que contém AB . Seja D o pé desta perpendicular.

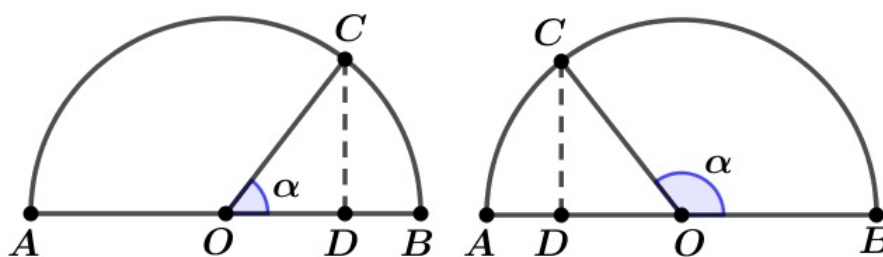


Figura 4.2:

Chama-se de **seno do ângulo** α ao quociente $\overline{CD}/\overline{OC}$ e representa-se por $\sin(\alpha)$. Observe que de acordo com esta definição, tem-se

$$\sin(0^\circ) = 0, \quad \sin(90^\circ) = 1 \quad \text{e} \quad \sin(180^\circ) = 0.$$

Define-se o **cosseno do ângulo** α como o quociente $\overline{OD}/\overline{OC}$ quando o ângulo α é agudo e representa-se por $\cos(\alpha)$. Se o ângulo α é obtuso, o cosseno é definido como o valor negativo deste quociente. Com esta definição, tem-se

$$\cos(0^\circ) = 1, \quad \cos(90^\circ) = 0 \quad \text{e} \quad \cos(180^\circ) = -1.$$

Chama-se de **tangente do ângulo** α ao quociente

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)},$$

não sendo esta função definida se $\alpha = 90^\circ$.

O teorema a seguir estabelece uma identidade conhecida na literatura como relação trigonométrica fundamental.

Teorema 4.1.1. *Qualquer que seja o ângulo $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, tem-se*

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1.$$

Demonstração. Para α igual a 0° , 90° ou 180° , a afirmação acima é comprovada pela substituição direta dos valores do seno e do cosseno correspondentes. Nos outros casos, considere o triângulo ΔOCD da figura 4.2. Tem-se então,

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = \left(\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{CD}}{\overline{OC}}\right)^2 = \frac{\overline{OD}^2 + \overline{CD}^2}{\overline{OC}^2} = \frac{\overline{OC}^2}{\overline{OC}^2} = 1,$$

onde fez-se o uso do teorema de Pitágoras na penúltima igualdade. \square

Agora, vamos apresentar as chamadas fórmulas de redução.

Teorema 4.1.2. *Se α é um ângulo agudo, então*

(a) $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha)$

(b) $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$

(c) $\tan(90^\circ - \alpha) = 1/\tan(\alpha)$.

Demonstração. Sejam C e C' pontos de um semicírculo de extremidades A e B , tais que $\alpha = \widehat{COB}$ e $90^\circ - \alpha = \widehat{C'OB}$, conforme a figura abaixo.

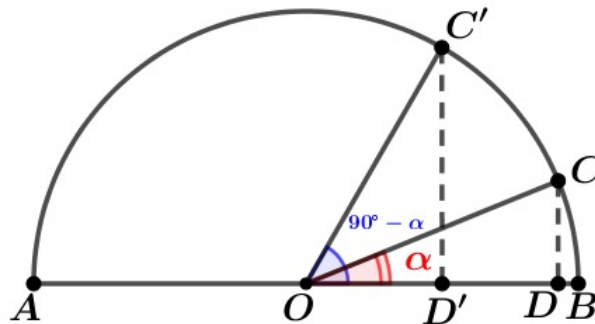


Figura 4.3:

Sejam D e D' os pés das perpendiculares baixadas à reta que contém o segmento AB a partir de C e C' , respectivamente. Observe que, como $\widehat{C'OB} = 90 - \alpha$, então $\widehat{OC'D'} = \alpha$. Logo, os triângulos ΔCOD e $\Delta OD'C'$ são congruentes e, portanto,

$$\frac{\overline{C'D'}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OD'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}.$$

Segue-se que

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{OC'}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \cos(\alpha),$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{\overline{OD'}}{\overline{OC'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}} = \sin(\alpha).$$

Das duas últimas igualdades e da definição de tangente, obtemos

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}} = \frac{1}{\tan(\alpha)}.$$

□

Teorema 4.1.3. *Qualquer que seja $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, tem-se*

(a) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$,

(b) $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$.

Demonstração. Quando α é igual a $0^\circ, 90^\circ$ ou 180° , a afirmação acima é comprovada por substituição direta dos valores do seno e cosseno correspondentes. Nos outros casos, considere pontos C e C' no semi-círculo de sorte que $\widehat{C'OB} = \alpha$ e $\widehat{COB} = 180^\circ - \alpha$. Sejam D e D' os pés das perpendiculares baixadas dos pontos C e C' à reta determinada por A e B. A congruência dos triângulos $\triangle OCD$ e $\triangle OC'D'$ nos fornece $\overline{CD} = \overline{C'D'}$ e

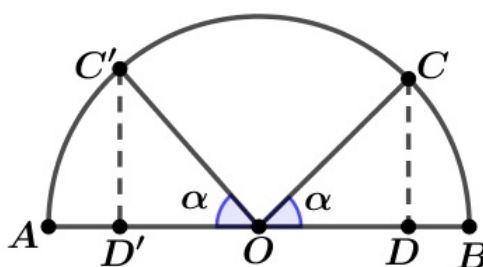


Figura 4.4:

$\overline{DO} = \overline{D'O}$. Como consequência imediata, temos

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{C'O}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CO}} = \sin(\alpha)$$

e

$$|\cos(180^\circ - \alpha)| = \frac{\overline{D'O}}{\overline{C'O}} = \frac{\overline{DO}}{\overline{CO}} = |\cos(\alpha)|.$$

Como $\alpha \neq 90^\circ$, então α ou $180^\circ - \alpha$ é obtuso e o outro é agudo. Por isto, $\cos(\alpha)$ e $\cos(180^\circ - \alpha)$ tem sinais opostos. Logo, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$.

□

Definimos até o momento o seno e o cosseno apenas para ângulos até 180° . Para ângulos $180^\circ < \alpha < 360^\circ$ veja que $\alpha - 180^\circ$ está entre 0° e 180° . Assim, podemos definir o seno e o cosseno de acordo com o Teorema acima:

$$\cos(\alpha) := -\cos(\alpha - 180^\circ)$$

e

$$\sin(\alpha) := \sin(\alpha - 180^\circ).$$

Observação 4.1. *Segue da definição acima que os Teoremas 4.1.1, 4.1.2 e 4.1.3 são válidos para qualquer ângulo α .*

Proposição 4.1.1. *São válidas as seguintes igualdades:*

$$(a) \sin(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ e } \tan(45^\circ) = 1,$$

$$(b) \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}, \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \tan(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Demonstração. (a) Construa um triângulo retângulo ΔABC tendo ângulo reto \hat{C} e tendo $\overline{AC} = \overline{BC}$. Tem-se, então, $\angle \hat{A} = \angle \hat{B} = 45^\circ$ e, utilizando-se o teorema de Pitágoras, $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AB}/\sqrt{2}$. Logo,

$$\sin(45^\circ) = \frac{\overline{AB}/\sqrt{2}}{\overline{AB}} = 1/\sqrt{2}.$$

Da mesma forma, obtém-se o valor de $\cos(45^\circ)$. O valor da tangente é obtido pela simples divisão dos valores do seno e cosseno.

(b) Construa um triângulo equilátero ΔABC . Todos os seus ângulos medem 60° e todos os seus lados têm o mesmo comprimento a . Considere a altura baixada do vértice B ao lado AC e seja D o pé desta altura. Os dois triângulos formados são congruentes e $\overline{DA} = \overline{DC} = a/2$. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ABD, concluímos que $\overline{BD} = a\sqrt{3}/2$. Observe que o ângulo $\hat{A}BD$ mede 30° . Logo,

$$\sin(30^\circ) = \frac{a/2}{a} = 1/2 \tag{4.1}$$

$$\cos(30^\circ) = \frac{a\sqrt{3}/2}{a} = \sqrt{3}/2 \tag{4.2}$$

$$\tan(30^\circ) = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = 1/\sqrt{3}. \tag{4.3}$$

□

Teorema 4.1.4. (*Lei dos Cossenos*) Em um triângulo ΔABC , tem-se

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos(\hat{C}).$$

Demonstração. Se o ângulo \hat{C} for reto, então a afirmação acima é exatamente o teorema de Pitágoras. Podemos, portanto, supor que \hat{C} não é um ângulo reto. Tracemos a altura do vértice A . Como \hat{C} não é um ângulo reto, então o pé desta altura, que designaremos por D , não coincide com o ponto C . Se D coincidir com o ponto B , então o triângulo ΔABC é retângulo tendo \hat{B} como ângulo reto. Neste caso, $\overline{AC} \cdot \cos(\hat{C}) = \overline{BC}$ e o resultado acima é uma consequência imediata do teorema de Pitágoras. Assim, podemos supor que B, C e D são pontos distintos. Como ΔADB e ΔADC são triângulos retângulos, tem-se

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2.$$

Subtraindo-se estas duas equações, obtém-se

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{DC}^2.$$

Agora, iremos substituir o termo \overline{BD}^2 desta equação. Para isto, temos de considerar três possibilidades: (Veja a figura 4.5).

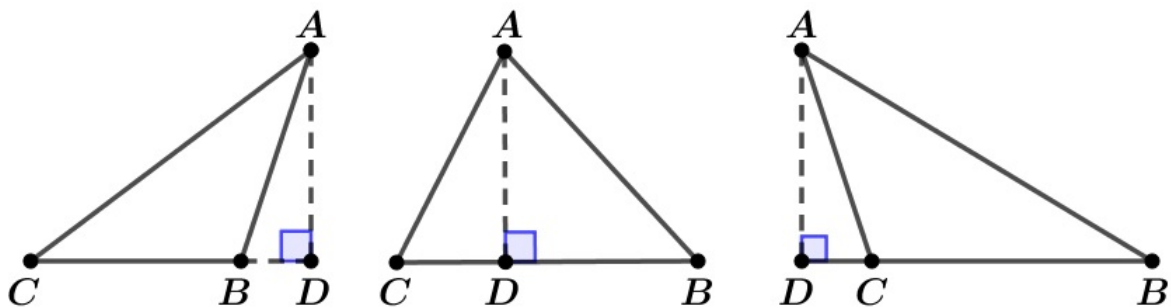


Figura 4.5:

(a) C está entre B e D . Neste caso, tem-se $\overline{DC} + \overline{BC} = \overline{BD}$. Substituindo-se \overline{BD} por $\overline{DC} + \overline{BC}$, desenvolvendo-se o quadrado e simplificando-se os termos, a equação acima torna-se

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{DC}.$$

Observe que $\overline{DC} = \overline{AC} \cdot \cos(\hat{ACD})$ e que $\cos(\hat{ACD}) = -\cos(180^\circ - \hat{ACB}) = -\cos(\hat{ACB})$. Como \hat{ACB} é exatamente o ângulo \hat{C} do triângulo ΔABC , o resultado acima fica demonstrado nesse caso.

(b) D está entre C e B. Neste caso, tem-se $\overline{BD} + \overline{DC} = \overline{BC}$ e, portanto, $\overline{BD} = \overline{DC} - \overline{BC}$. Substituindo-se como no caso anterior este valor de \overline{BD} , obtém-se

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{DC}.$$

Observando-se que $\overline{DC} = \overline{AC} \cdot \cos(\hat{C})$ obtém-se o resultado.

(c) B está entre C e D. Este caso é tratado de forma semelhante. Para uma demonstração completa confira a referência (BARBOSA, J.L.M, 2012). \square

Teorema 4.1.5. (Lei dos senos) *Qualquer que seja o triângulo ΔABC , tem-se*

$$\frac{\sin(\hat{A})}{\overline{BC}} = \frac{\sin(\hat{B})}{\overline{AC}} = \frac{\sin(\hat{C})}{\overline{AB}} = \frac{1}{2R},$$

onde R é o raio da circunferência circunscrita a ΔABC .

Demonstração. Considere o círculo que circunscribe o triângulo ΔABC . Seja O o seu centro e R o seu raio. Considere o diâmetro que tem B como extremidade. Seja D sua outra extremidade. Se os pontos A e D estiverem de um mesmo lado da reta determinada por B e C , então os ângulos \hat{BDC} e \hat{BAC} são congruentes por serem ângulos inscritos correspondentes a um mesmo arco. Se os pontos A e D estiverem em lados distintos da reta que contém BC , então os ângulos \hat{BDC} e \hat{BAC} são suplementares, já que correspondem a arcos que se complementam para formar o círculo. Em ambos os casos, tem-se $\sin(\hat{D}) = \sin(\hat{A})$.

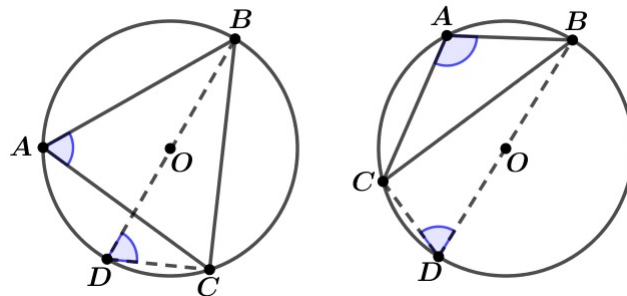


Figura 4.6:

Consequentemente, $\overline{BC} = 2R \sin(\hat{A})$. De forma análoga, demonstra-se que

$$\overline{AB} = 2R \sin(\hat{C}) \quad \text{e} \quad \overline{AC} = 2R \sin(\hat{B}).$$

Comparando-se as três fórmulas obtidas, conclui-se que

$$\frac{\sin(\hat{A})}{BC} = \frac{\sin(\hat{B})}{AC} = \frac{\sin(\hat{C})}{AB} = \frac{1}{2R}.$$

□

Teorema 4.1.6. *Sejam α e β dois ângulos agudos. Então,*

$$(a) \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta),$$

$$(b) \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

Demonstração. Dado o ângulo $\alpha + \beta$ de origem O , trace a semirreta de mesma origem que divide em dois ângulos congruentes a α e β . Por qualquer ponto H desta semirreta, trace uma perpendicular a qual intersectará os lados do ângulo $\alpha + \beta$ em pontos A e B , como indicado na figura 4.7, de modo que $\hat{A}\hat{O}H = \alpha$ e $\hat{B}\hat{O}H = \beta$. Sejam $a = \overline{OA}$, $b = \overline{OB}$, $h = \overline{OH}$, $m = \overline{AH}$ e $n = \overline{BH}$. Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos ΔOAB , ΔOAH e ΔOBH , teremos respectivamente,

$$(m + n)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha + \beta) \quad (4.4)$$

$$m^2 = a^2 + h^2 - 2ah \cos(\alpha) \quad (4.5)$$

$$n^2 = b^2 + h^2 - 2bh \cos(\beta). \quad (4.6)$$

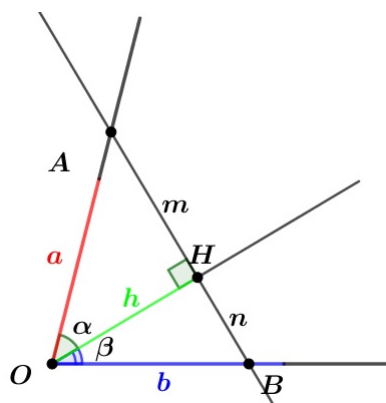


Figura 4.7:

Utilizando-se o triângulo ΔOAH , tem-se $h = a \cos(\alpha)$ e usando-se o triângulo ΔOBH tem-se $h = b \cos(\beta)$. Segue-se que

$$h^2 = ab \cos(\alpha) \cos(\beta)$$

e que

$$ah \cos(\alpha) = ab \cos(\alpha) \cos(\beta) = bh \cos(\beta).$$

Portanto, podemos reescrever as equações (4.5) e (4.6) como

$$\begin{aligned} m^2 &= a^2 - ab \cos(\alpha) \cos(\beta) \\ n^2 &= b^2 - ab \cos(\alpha) \cos(\beta). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Além disso, como $m = a \sin(\alpha)$ e $n = b \sin(\beta)$, tem-se $mn = ab \sin(\alpha) \sin(\beta)$. Logo,

$$(m + n)^2 = m^2 + n^2 + 2mn = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha) \cos(\beta) + 2ab \sin(\alpha) \sin(\beta).$$

Segue-se então da equação 4.4 o resultado desejado.

□

4.2 Área de um círculo

Considere o círculo $\Gamma[\mathbf{O}; r]$. A circunferência de centro \mathbf{O} e raio r é denominada a **circunferência do círculo** $\Gamma[\mathbf{O}; r]$. A área do círculo é definida como sendo o menor dos números maiores que a área de qualquer polígono convexo inscrito na circunferência do círculo.

Teorema 4.2.1. *A área A de um círculo de raio r é igual à metade do produto do comprimento da circunferência do círculo pelo raio, ou seja,*

$$A = \pi r^2.$$

Demonstração. Seja α um número real positivo arbitrário. Inscrevamos na circunferência do círculo um polígono convexo P tal que o comprimento de seus lados sejam menores do que α , que seu perímetro difira do comprimento da circunferência menos do que α , e que a área do círculo difira da área do polígono menos do que αr . Para tanto, vamos construir três polígonos P_1 , P_2 e P_3 de modo que P_1 cumpra a primeira condição, P_2 a segunda e P_3 a terceira. Agora, adicionando ao polígono P_1 os vértices do polígono P_2 e P_3 , obteremos o polígono P que cumpre as três condições. A área do polígono P é obtida somando-se as áreas de todos os triângulos que tem um vértice comum com o centro do círculo e cujos os lados opostos a este vértice são os lados do polígono P . Consideremos a área de um destes triângulos, digamos ΔOAB . Temos,

$$\text{Área}(\Delta OAB) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{OC},$$

onde C é o pé da altura do triângulo ΔOAB relativa ao vértice O . Como $\overline{OA} > \overline{OC} > \overline{OA} - \overline{AC}$, então

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{AB}(r - a) < \text{Área}(\Delta OAB) < \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot r.$$

Somando-se as áreas de todos os triângulos, obtemos

$$\frac{1}{2} \cdot p(r - a) < \text{Área}(P) < \frac{1}{2} \cdot p \cdot r,$$

onde p denota o perímetro do polígono P . Introduzindo no último membro desta desigualdade o comprimento l da circunferência no lugar do perímetro p e no primeiro membro o comprimento $l - a$ no lugar do perímetro, com maior razão podemos afirmar que

$$\frac{1}{2} \cdot (l - a)(r - a) < \text{Área}(P) < \frac{1}{2} \cdot lr,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} \cdot lr - \frac{1}{2}(ar + al - a^2) < \text{Área}(P) < \frac{1}{2} \cdot lr.$$

Desta desigualdade resulta que a $\text{Área}(P)$ do polígono difere de $\frac{lr}{2}$ menos do que $\frac{ar + al - a^2}{2}$. Como, por construção, esta área difere da área do círculo menos do que ar , então deduzimos que a área do círculo difere de $\frac{lr}{2}$ menos do que $ar + \frac{ar + al - a^2}{2}$, ou seja, difere tão pouco quanto se deseja desde que a seja suficientemente pequeno. Porém, isto só pode ocorrer se a área do círculo for igual a $\frac{lr}{2}$. Portanto,

$$A = \frac{l \cdot r}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2.$$

□

Sejam A e B dois pontos pertencentes à circunferência de um círculo de centro O e raio r . Chama-se **setor circular** \widehat{AOB} à parte do círculo pertencente ao interior do ângulo central correspondente ao arco \widehat{AB} (figura 4.8).

De modo análogo ao caso do comprimento do arco de circunferência, a partir de uma regra de três simples

$$\begin{aligned} 360^\circ &\longleftrightarrow \pi r^2 \\ \alpha^\circ &\longleftrightarrow A \end{aligned} \tag{4.8}$$

obtemos que a área A do setor circular é determinado pela fórmula

$$A = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ},$$

onde α é a medida em graus do ângulo central correspondente.

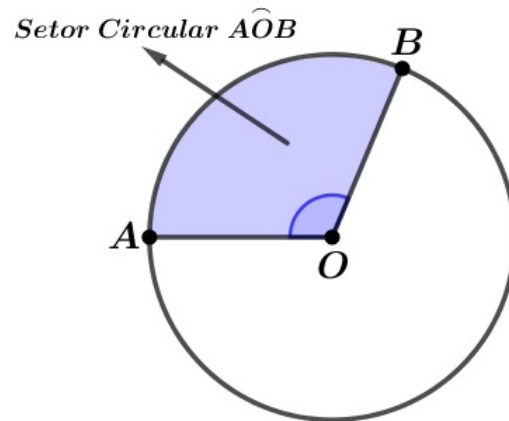


Figura 4.8:

Capítulo 5

Teoremas que envolvem Circunferências e Círculos

5.1 Teorema da corda quebrada

Dados sobre uma circunferência os pontos A , B e C , a união das duas cordas AB e BC chama-se **corda quebrada** ABC .

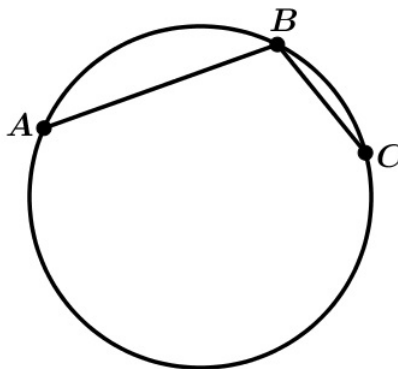


Figura 5.1: Exemplo de uma corda quebrada ABC .

Teorema 5.1.1. (Corda Quebrada) *Sejam A, B, C pontos pertencentes a uma circunferência Γ tais que $\overline{BC} > \overline{AB}$. Seja M o ponto médio do arco \widehat{AC} que contém B . Seja F o pé da perpendicular baixada de M ao segmento BC . Então,*

$$\overline{FC} = \overline{AB} + \overline{BF},$$

ou seja, F é o ponto médio da corda quebrada ABC .

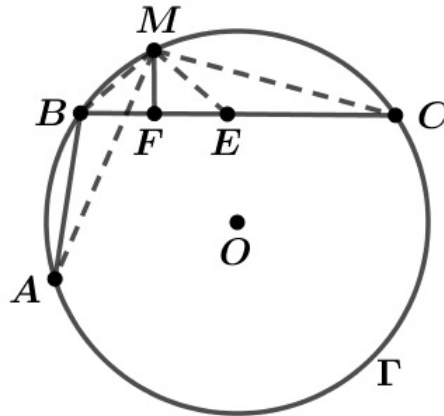


Figura 5.2:

Demonstração. Com a mesma notação da Figura 5.2, seja E um ponto do segmento BC tal que $\overline{EC} = \overline{AB}$. Os triângulos $\triangle BAM$ e $\triangle ECM$ são congruentes pelo caso LAL, pois $\widehat{BCM} = \widehat{BAM}$ (ângulos que subtendem o mesmo arco \widehat{BM}); $\overline{MC} = \overline{MA}$ (subtendem os arcos \widehat{MC} e \widehat{MA} de mesmo comprimento) e $\overline{AB} = \overline{EC}$ (por construção). Essa congruência implica que $\overline{BM} = \overline{EM}$. Daí, o triângulo $\triangle BEM$ é isósceles de base BE e, portanto, $\overline{BF} = \overline{FE}$. Assim,

$$\overline{AB} + \overline{BF} = \overline{EC} + \overline{EF} = \overline{FC},$$

como queríamos demonstrar. □

5.2 Teorema de Simson-Wallace

Dados, no plano, um triângulo $\triangle ABC$ e um ponto P não situado sobre qualquer das retas suportes dos lados de $\triangle ABC$, marcamos os pontos D, E e F, pés das perpendiculares baixadas de P às retas suportes dos lados BC, CA e AB, respectivamente. O triângulo $\triangle DEF$ assim obtido é chamado de **triângulo pedal** de P em relação a $\triangle ABC$.

Dado um triângulo não retângulo $\triangle ABC$, dizemos que o triângulo formado pelos pés de suas alturas é o **triângulo órtico** de $\triangle ABC$. Portanto, o triângulo órtico de $\triangle ABC$ é o triângulo pedal do ortocentro de $\triangle ABC$ (figura 5.3).

O resultado a seguir, conhecido como o **teorema de Simson-Wallace** explica quando o triângulo pedal de um ponto é *degenerado*, isto é, quando D, E e F são colineares.

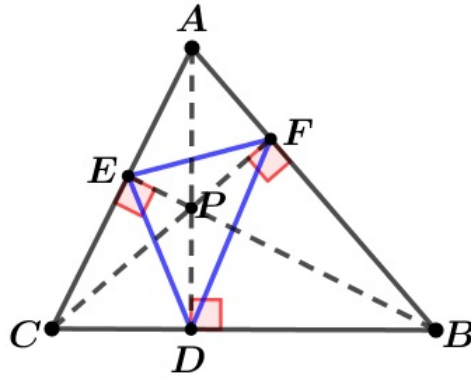


Figura 5.3:

Teorema 5.2.1. (Simson-Wallace) *Dados um triângulo ΔABC e um ponto P não situado sobre as retas suportes de seus lados, o triângulo pedal de P em relação a ΔABC é degenerado se, e somente se, P estiver sobre a circunferência circunscrita a ΔABC .*

Demonstração. A fim de que o ponto P pertença à circunferência circunscrita a ΔABC , a única possibilidade é que P pertença a uma das regiões angulares $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ ou $B\hat{C}A$, mas que seja exterior ao triângulo ΔABC . Analogamente, a fim de que o triângulo pedal de P em relação a ΔABC possa ser degenerado, P deve ser exterior a ΔABC e estar situado em uma de tais regiões angulares. Portanto, podemos, sem perda de generalidade, supor que P é exterior ao triângulo ΔABC e está situado na região angular $A\hat{B}C$ (figura 5.4).

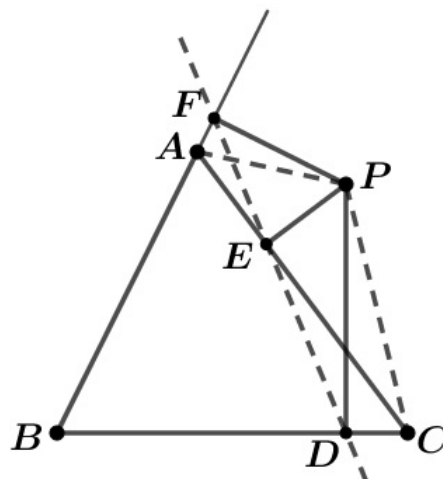


Figura 5.4:

Sejam respectivamente D, E e F os pés das perpendiculares baixadas de P às retas suportes dos lados BC, AC e AB . Podemos também supor, sem perda de generalidade,

que D e E estão sobre os lados BC e AC, respectivamente, mas que F está sobre o prolongamento do lado AB. Como $\angle P\hat{F}A = \angle P\hat{E}A = 90^\circ$, então o quadrilátero PFAE possui ângulos opostos suplementares e portanto, pelo item (a) da Proposição 3.4.2 segue que PFAE é inscritível. Como $\angle P\hat{E}C = \angle P\hat{D}C = 90^\circ$, então pelo item (b) da Proposição 3.4.2 o quadrilátero PEDC também é inscritível. Logo,

$$\angle A\hat{P}C - \angle D\hat{P}F = \angle D\hat{P}C - \angle F\hat{P}A = \angle D\hat{E}C - \angle F\hat{E}A,$$

isto é,

$$\angle A\hat{P}C = \angle D\hat{P}F \Leftrightarrow \angle D\hat{E}C = \angle F\hat{E}A \Leftrightarrow D, E \text{ e } F \text{ são colineares.}$$

Por fim, calculando a soma dos ângulos do quadrilátero BDPF, obtemos $\angle D\hat{P}F = 180^\circ - \angle A\hat{B}C$, de modo que $\angle A\hat{P}C = \angle D\hat{P}F$. Isto equivale a $\angle A\hat{P}C + \angle A\hat{B}C = 180^\circ$, ou ainda, que o quadrilátero ABCP é inscritível. \square

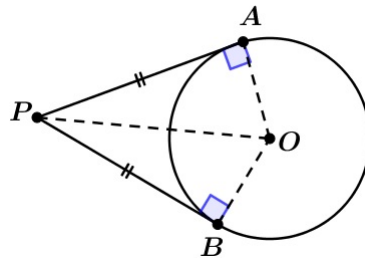
Com as mesmas notações do teorema anterior, quando o ponto P estiver sobre a circunferência circunscrita a ΔABC , diremos que a reta que passa pelos pontos D, E e F é a **reta de Simson-Wallace** de P relativa a ΔABC .

5.3 Teorema de Pitot

O resultado a seguir, conhecido como Teorema de Pitot, dá uma caracterização útil dos quadriláteros inscritíveis. Antes de demonstrá-lo, necessitamos do seguinte lema.

Lema 5.1. *Se os dois lados de um ângulo de vértice P são tangentes a uma circunferência nos pontos A e B, então $\overline{PA} = \overline{PB}$.*

Demonstração. Trace o segmento PO e compare os triângulos ΔPOA e ΔPOB . Como $\angle \hat{A} = \angle \hat{B} = 90^\circ$, $\overline{AO} = \overline{BO}$ (raios) e PO é um lado comum, então pelo primeiro caso de congruência os dois triângulos são congruentes. Portanto, $\overline{PA} = \overline{PB}$



\square

Teorema 5.3.1. (Pitot) *Um quadrilátero convexo ABCD de lados AB, BC, CD e DA é circunscritível se, e somente se,*

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}.$$

Demonstração. Suponha, primeiro, que ABCD seja circunscritível e sejam M, N, P e Q, respectivamente, os pontos de tangência dos lados AB, BC, CD e DA com a circunferência inscrita em ABCD (cf. figura 5.5).

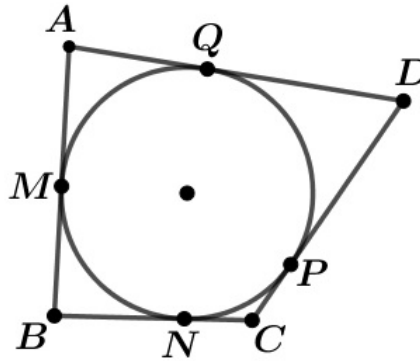


Figura 5.5:

Então, pelo Lema 5.1, obtemos,

$$\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{CD} &= (\overline{AM} + \overline{MB}) + (\overline{CP} + \overline{PD}) \\ &= \overline{AQ} + \overline{BN} + \overline{CN} + \overline{DQ} \\ &= (\overline{AQ} + \overline{DQ}) + (\overline{BN} + \overline{CN}) \\ &= \overline{AD} + \overline{BC}. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponhamos que $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$ e que ABCD não é circunscritível. Se O é o ponto de interseção das bissetrizes dos ângulos internos \hat{DAB} e \hat{ABC} de ABCD, então o ponto O é o centro de uma circunferência que tangencia os lados AD, AB e BC de ABCD (cf. figura 5.6).

Como estamos supondo que ABCD não é inscritível, então concluímos que tal circunferência não é tangente ao lado CD de ABCD. Seja E o ponto sobre a semirreta com origem em A e que contém o ponto D tal que o segmento CE tangencia a circunferência da figura 5.6 (estamos considerando o caso em que E está situado entre A e D; o outro caso é totalmente análogo). Pela primeira parte acima, segue que

$$\overline{AB} + \overline{CE} = \overline{AE} + \overline{BC}.$$

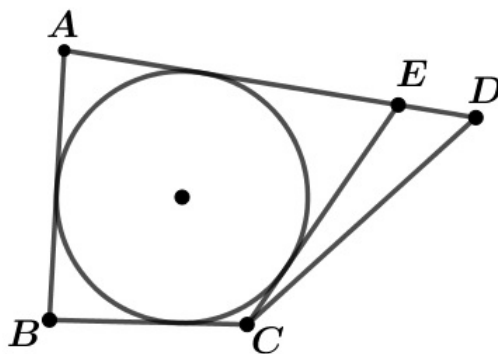


Figura 5.6:

Mas, como $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$ por hipótese, então

$$\overline{CD} - \overline{CE} = \overline{AD} - \overline{AE} = \overline{DE},$$

ou ainda,

$$\overline{CD} = \overline{CE} + \overline{ED}.$$

Por fim, tal igualdade contradiz a desigualdade triangular no $\triangle CDE$.

□

5.4 Teorema de Ptolomeu

Teorema 5.4.1. (Ptolomeu) *Seja ABCD um quadrilátero inscritível. Então,*

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{DA} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

Demonstração. Denotemos por $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e α_4 os ângulos $\widehat{ADB}, \widehat{BAC}, \widehat{CBD}$ e \widehat{DCA} .

Por simplicidade, vamos supor que a circunferência circunscrita de ABCD tenha diâmetro unitário. Então, pela lei dos senos, temos

$$\overline{AB} = \sin(\alpha_1), \quad \overline{BC} = \sin(\alpha_2), \quad \overline{CD} = \sin(\alpha_3), \quad \overline{DA} = \sin(\alpha_4).$$

Além disso,

$$\overline{AC} = \sin(\widehat{ABC}) = \sin(\alpha_3 + \alpha_4)$$

e

$$\overline{BD} = \sin(\widehat{DAB}) = \sin(\alpha_2 + \alpha_3).$$

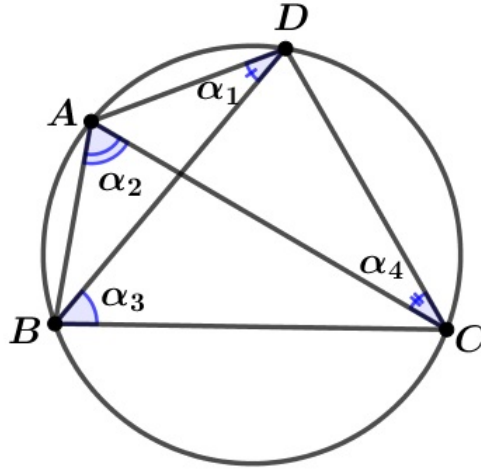


Figura 5.7:

Portanto, desejamos mostrar que

$$\sin(\alpha_1) \sin(\alpha_3) + \sin(\alpha_2) \sin(\alpha_4) = \sin(\alpha_3 + \alpha_4) \sin(\alpha_2 + \alpha_3),$$

com $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 180^\circ$. Das identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_3) &= \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha_1 - \alpha_3) - \cos(\alpha_1 + \alpha_3)] \\ \sin(\alpha_2) \sin(\alpha_4) &= \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha_2 - \alpha_4) - \cos(\alpha_2 + \alpha_4)], \end{aligned}$$

obtemos,

$$\sin(\alpha_1) \sin(\alpha_3) + \sin(\alpha_2) \sin(\alpha_4) = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha_1 - \alpha_3) + \cos(\alpha_2 - \alpha_4) - [\cos(\alpha_1 + \alpha_3) + \cos(\alpha_2 + \alpha_4)] \}.$$

Observe que,

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_1 + \alpha_3) + \cos(\alpha_2 + \alpha_4) &= \cos(\alpha_1 + \alpha_3) + \cos(180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_3)) \\ &= \cos(\alpha_1 + \alpha_3) - \cos(\alpha_1 + \alpha_3) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sin(\alpha_1) \sin(\alpha_3) + \sin(\alpha_2) \sin(\alpha_4) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha_1 - \alpha_3) + \cos(\alpha_2 - \alpha_4)]. \quad (5.1)$$

Por outro lado, da identidade trigonométrica

$$\sin(\alpha_2 + \alpha_3) \sin(\alpha_3 + \alpha_4) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha_2 - \alpha_4) - \cos(\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4)]$$

obtemos,

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_2 + \alpha_3) \sin(\alpha_3 + \alpha_4) &= \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha_2 - \alpha_4) - \cos(180^\circ - (\alpha_1 - \alpha_3))] \\ &= \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha_2 - \alpha_4) + \cos(\alpha_1 - \alpha_3)]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Das igualdades em (5.1) e (5.2) segue a igualdade desejada

$$\sin(\alpha_1) \sin(\alpha_3) + \sin(\alpha_2) \sin(\alpha_4) = \sin(\alpha_3 + \alpha_4) \sin(\alpha_2 + \alpha_3).$$

□

5.5 Teorema de Stewart

Uma consequência imediata do teorema de Ptolomeu é o seguinte resultado.

Teorema 5.5.1. (Teorema de Stewart) *Sejam ΔABC um triângulo; D um ponto no lado BC ; $m = \overline{BD}$; $n = \overline{DC}$; $a = \overline{BC}$ e $d = \overline{AD}$. Então,*

$$a(d^2 + mn) = b^2m + c^2n.$$

Demonstração. Seja P o ponto de interseção da reta que contém o segmento AD com a circunferência circunscrita ao triângulo ΔABC (veja a figura abaixo). Pela semelhança de

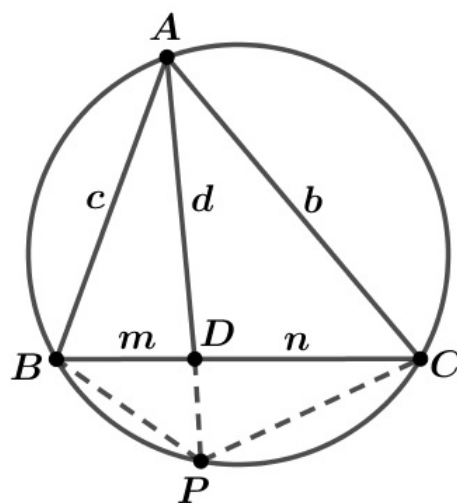


Figura 5.8:

triângulos, obtemos,

$$\frac{\overline{BP}}{m} = \frac{b}{d} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{CP}}{n} = \frac{c}{d}.$$

Além disso, pela potência de um ponto, sabemos que

$$\overline{DP} = \frac{mn}{d}.$$

Agora, aplicando o teorema de Ptolomeu, temos

$$\overline{BC} \cdot \overline{AP} = \overline{AC} \cdot \overline{BP} + \overline{AB} \cdot \overline{CP}.$$

Portanto,

$$a \cdot \left(d + \frac{mn}{d} \right) = b \cdot \frac{bm}{d} + c \cdot \frac{cn}{d}$$

e isto implica no teorema de Stewart.

□

5.6 Teorema de Carnot

Outro importante corolário do teorema de Ptolomeu consiste no teorema de Carnot. Antes de apresentá-lo, necessitamos do seguintes lema.

Lema 5.6.1. *Seja ΔABC um triângulo cujas medidas dos lados são $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ e cujo semiperímetro seja igual a p . Se r e r_a denotam, respectivamente, os raios das circunferências inscrita em ΔABC e ex-inscrita a BC , então*

$$\text{Área}(\Delta ABC) = pr = (p - a)r_a.$$

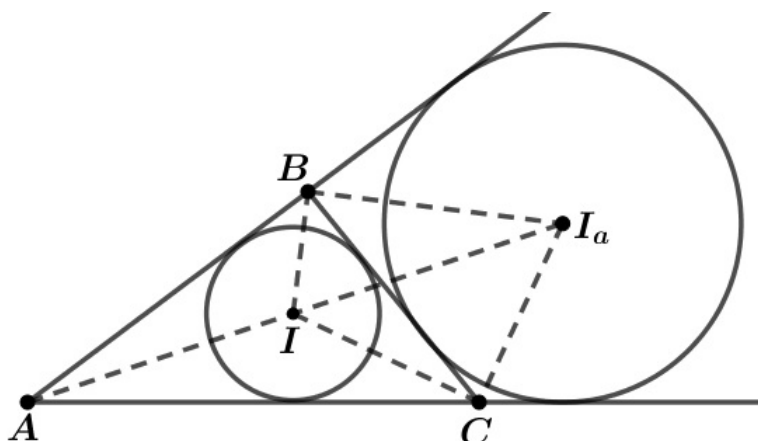


Figura 5.9:

Demonstração. Sejam I o incentro e I_a o ex-incentro de ΔABC relativo a BC (veja a figura 5.9). Uma vez que as alturas dos triângulos ΔAIB , ΔAIC e ΔBIC , respectivamente relativas aos lados AB , AC e BC são todas iguais a r , temos

$$\begin{aligned} \text{Área}(\Delta ABC) &= \text{Área}(\Delta AIB) + \text{Área}(\Delta AIC) + \text{Área}(\Delta BIC) \\ &= \frac{cr}{2} + \frac{br}{2} + \frac{ar}{2} \\ &= pr; \end{aligned}$$

por outro lado, uma vez que as alturas de ΔAI_aB , ΔAI_aC e ΔBI_aC , respectivamente relativas aos lados AB , AC e BC , são todas iguais a r_a , temos

$$\begin{aligned} \text{Área}(\Delta ABC) &= \text{Área}(\Delta AI_aB) + \text{Área}(\Delta AI_aC) - \text{Área}(\Delta BI_aC) \\ &= \frac{cr_a}{2} + \frac{br_a}{2} - \frac{ar_a}{2} \\ &= (p - a)r_a. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.6.1. (Carnot) *Se ΔABC é um triângulo acutângulo de circuncentro O e x, y, z denotam as distâncias de O aos lados BC, AC e AB , respectivamente, então*

$$x + y + z = R + r,$$

onde r e R denotam, respectivamente, os raios das circunferências inscrita e circunscrita a ΔABC .

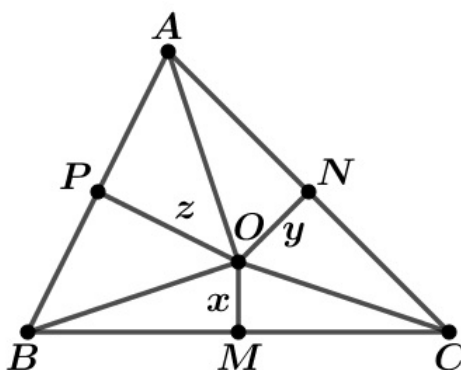


Figura 5.10:

Demonstração. Sejam M, N e P , respectivamente, os pontos médios dos lados BC, AC e AB , de modo que $OM \perp BC, ON \perp CA$ e $OP \perp AB$ (cf. figura 5.10). Os quadriláteros $BMOP, CNOM$ e $APON$, tendo, cada um, dois ângulos opostos retos, são todos inscritíveis. Denotando $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$ e observando que $\overline{OM} = x, \overline{ON} = y$ e $\overline{OP} = z$, obtemos, pelos teorema de Ptolomeu e da base média, as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} x \cdot \frac{c}{2} + z \cdot \frac{a}{2} &= R \cdot \frac{b}{2}, \\ x \cdot \frac{b}{2} + y \cdot \frac{a}{2} &= R \cdot \frac{c}{2}, \\ y \cdot \frac{c}{2} + z \cdot \frac{b}{2} &= R \cdot \frac{a}{2}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Por outro lado, como os triângulos $\Delta OBC, \Delta OCA$ e ΔOAB particionam o triângulo ΔABC , temos

$$\text{Área}(\Delta ABC) = \frac{xa}{2} + \frac{yb}{2} + \frac{zc}{2}.$$

Agora, denotando por p o semiperímetro de ΔABC , sabemos, do lema anterior, que $\text{Área}(\Delta ABC) = pr$; por sua vez, substituindo tal relação na última igualdade acima, obtemos

$$\frac{xa}{2} + \frac{yb}{2} + \frac{zc}{2} = pr.$$

Por fim, somando membro a membro tal como aquelas em (5.3), obtemos

$$(x + y + z)p = (R + r)p,$$

a partir de onde segue o teorema de Carnot.

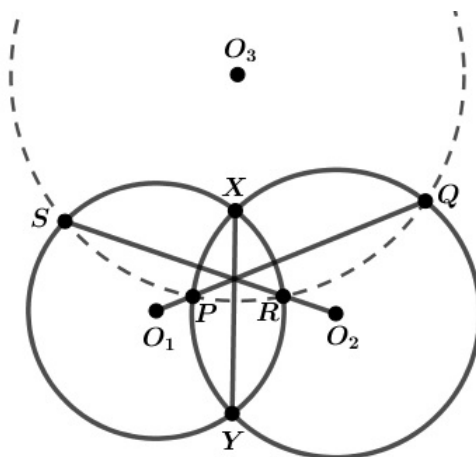
□

Capítulo 6

Resolução de Problemas

6.1 OLIMPIADAS

1. (USAMO - 2009) Considere duas circunferências $\Gamma_1(O_1, r_1)$ e $\Gamma_2(O_2, r_2)$ que se intersectam nos pontos X e Y . Seja l_1 a reta que passa por O_1 e intersecta Γ_2 nos pontos P e Q , e seja l_2 a reta que passa por O_2 e intersecta Γ_1 nos pontos R e S . Prove que se P, Q, R e S pertencem a uma circunferência $\Gamma_3(O_3, r_3)$, então o centro dessa circunferência pertence à reta que passa por X e Y .



Solução. É suficiente mostrarmos que O_3 pertence ao eixo radical de Γ_1 e Γ_2 . Pelo Teorema 3.5.1 o ponto O_1 pertence ao eixo radical de Γ_2 e Γ_3 , logo

$$\text{Pot}_{\Gamma_2}(O_1) = \text{Pot}_{\Gamma_3}(O_1),$$

ou seja,

$$\overline{O_1O_2}^2 - r_2^2 = \overline{O_1O_3}^2 - r_3^2. \quad (6.1)$$

De modo análogo, como O_2 pertence ao eixo radical de Γ_1 e Γ_3 , então

$$\text{Pot}_{\Gamma_1}(O_2) = \text{Pot}_{\Gamma_3}(O_2),$$

ou seja,

$$\overline{O_1O_2}^2 - r_1^2 = \overline{O_2O_3}^2 - r_3^2. \quad (6.2)$$

Subtraindo membro a membro as igualdades em (6.1) e (6.2), obtemos

$$\begin{aligned} (\overline{O_1O_2}^2 - r_2^2) - (\overline{O_1O_2}^2 - r_1^2) &= (\overline{O_1O_3}^2 - r_3^2) - (\overline{O_2O_3}^2 - r_3^2) \\ r_1^2 - r_2^2 &= \overline{O_1O_3}^2 - \overline{O_2O_3}^2 \\ \overline{O_2O_3}^2 - r_2^2 &= \overline{O_1O_3}^2 - r_1^2 \\ \text{Pot}_{\Gamma_2}(O_3) &= \text{Pot}_{\Gamma_1}(O_3). \end{aligned}$$

Da última igualdade segue-se que O_3 pertence ao eixo radical de Γ_1 e Γ_2 , como queríamos demonstrar.

2. (**BALCÂNICA - 1986**) Uma reta passando pelo incentro I do triângulo ΔABC intersecciona a circunferência circunscrita $\Gamma_1(O; R)$ de ΔABC nos pontos F e G , e a circunferência inscrita $\Gamma_2(I; r)$ nos pontos D e E , com D entre I e F . Prove que $\overline{DF} \cdot \overline{EG} \geq r^2$. Quando há igualdade?

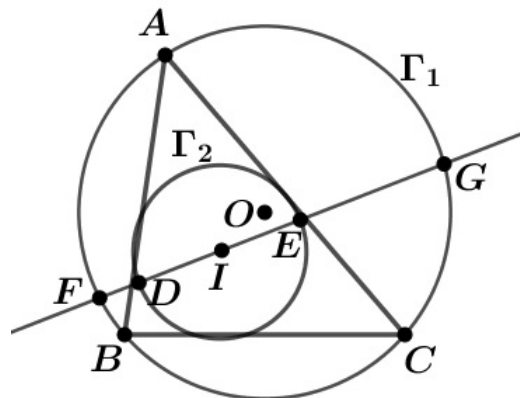


Figura 6.1:

Solução. Observe que,

$$\begin{aligned}
 \overline{DF} \cdot \overline{EG} &= (\overline{FI} - \overline{DI})(\overline{GI} - \overline{EI}) \\
 &= (\overline{FI} - r)(\overline{GI} - r) \\
 &= \overline{FI} \cdot \overline{GI} - (\overline{FI} + \overline{GI})r + r^2 \\
 &= -\text{Pot}_{\Gamma_1}(I) - \overline{FG} \cdot r + r^2.
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Pela relação de Euler (Lema 3.5.1) temos $\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$ e, assim,

$$\text{Pot}_{\Gamma_1}(I) = \overline{OI}^2 - R^2 = -2Rr. \tag{6.4}$$

Substituindo (6.4) em (6.3) obtemos,

$$\overline{DF} \cdot \overline{EG} = 2Rr - \overline{FG} \cdot r + r^2. \tag{6.5}$$

Como, por hipótese, o segmento FG é uma corda, então

$$\begin{aligned}
 2Rr \geq \overline{FG} &\Leftrightarrow 2Rr \geq \overline{FG} \cdot r \\
 &\Leftrightarrow 2Rr - \overline{FG} \cdot r + r^2 \geq r^2.
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Da igualdade em (6.5) e da desigualdade em (6.6), obtemos

$$\overline{DF} \cdot \overline{EG} \geq r^2.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, o segmento FG for um diâmetro.

3. **(TESTE PARA A IBERO - 2002)** Sejam $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência Γ_1 ; P o ponto de interseção das diagonais AC e BD ; e M o ponto médio de CD . A circunferência Γ_2 que passa por P e é tangente a CD em M intersecta BD e AC nos pontos Q e R , respectivamente. Seja S o ponto do segmento BD tal que $\overline{BS} = \overline{DQ}$. A paralela a AB por S intersecta AC em T . Prove que $\overline{AT} = \overline{CR}$.

Solução. Como C e D são pontos exteriores a Γ_2 e o segmento CD é tangente a Γ_2 em M , então pelo item (c) da Proposição 3.5.1 temos

$$\begin{cases} \overline{DM}^2 = \text{Pot}_{\Gamma_2}(D) = \overline{DQ} \cdot \overline{DP} \\ \overline{CM}^2 = \text{Pot}_{\Gamma_2}(C) = \overline{CR} \cdot \overline{CP}. \end{cases}$$

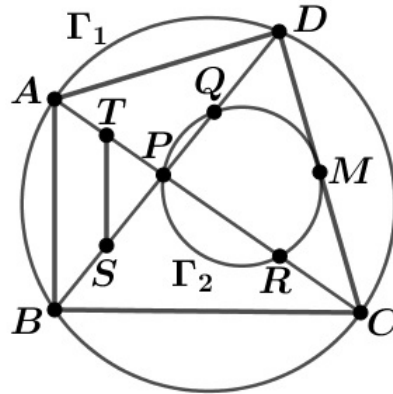


Figura 6.2:

Mas, por hipótese, M é ponto médio de CD , logo $\overline{CM} = \overline{DM}$. Assim, das igualdades acima concluímos que $\overline{DQ} \cdot \overline{DP} = \overline{CR} \cdot \overline{CP}$, ou ainda,

$$\frac{\overline{DQ}}{\overline{CR}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{DP}}.$$

Como, por hipótese, $\overline{BS} = \overline{DQ}$, então

$$\overline{AT} = \overline{CR} \Leftrightarrow \frac{\overline{BS}}{\overline{AT}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{DP}}.$$

Ora, P é um ponto interior a Γ_1 , logo pelo item (b) da proposição 3.5.1 temos

$$-\overline{CP} \cdot \overline{AP} = \text{Pot}_{\Gamma_1}(P) = -\overline{DP} \cdot \overline{BP},$$

de onde obtemos

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{DP}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{AP}}. \tag{6.7}$$

Mas, os segmentos AB e TS são paralelos, assim,

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{BS}}{\overline{AT}}. \tag{6.8}$$

Das igualdades em (6.7) e (6.8) obtemos

$$\frac{\overline{BS}}{\overline{AT}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{DP}}$$

e isso conclui a solução do problema.

4. (BANCO DA CONE-SUL - 2002) Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito e E a interseção das diagonais AC e BD . Se F é um ponto qualquer e as circunferências Γ_1 e Γ_2 circunscritas a ΔFAC e a ΔFBD se intersectam novamente em G , mostre que os pontos E, F, G são colineares.

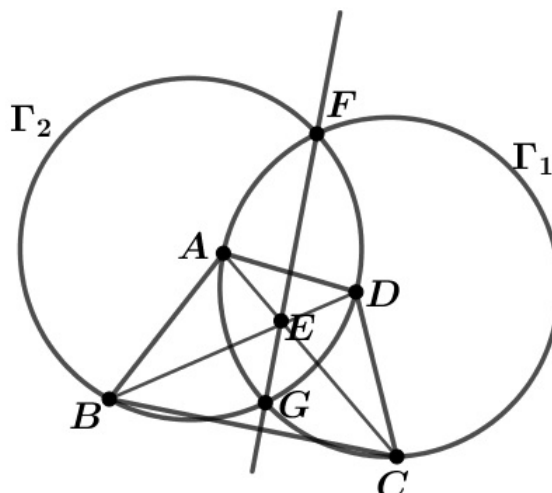


Figura 6.3:

Solução. Pelo teorema 3.5.1, sabemos que o eixo radical de Γ_1 e Γ_2 é a reta que contém o segmento FG . Assim, para mostrarmos que E, F, G são colineares é suficiente provarmos que o ponto E pertence ao eixo radical de Γ_1 e Γ_2 . Como, por hipótese, o ponto E está no interior das circunferências Γ_1 e Γ_2 , então pelo item (c) da proposição 3.5.1 temos

$$\text{Pot}_{\Gamma_1}(E) = -\overline{AE} \cdot \overline{EC} \tag{6.9}$$

$$\text{Pot}_{\Gamma_2}(E) = -\overline{BE} \cdot \overline{ED}. \tag{6.10}$$

Como visto na seção 3.5, $ABCD$ inscritível implica em

$$\overline{AE} \cdot \overline{EC} = \overline{BE} \cdot \overline{ED}. \tag{6.11}$$

Das igualdades em (6.9), (6.10) e (6.11) obtemos

$$\text{Pot}_{\Gamma_1}(E) = \text{Pot}_{\Gamma_2}(E),$$

isto é, o ponto E pertence ao eixo radical de Γ_1 e Γ_2 , como queríamos demonstrar.

5. (USAMO - 1997) Considere o triângulo ΔABC . Construa triângulos isósceles $\Delta BCD, \Delta CAE$ e ΔABF externamente a ΔABC de bases BC, CA e AB , respectivamente. Prove que as retas que passam por A, B, C e são perpendiculares a EF, FD e DE , respectivamente, são concorrentes.

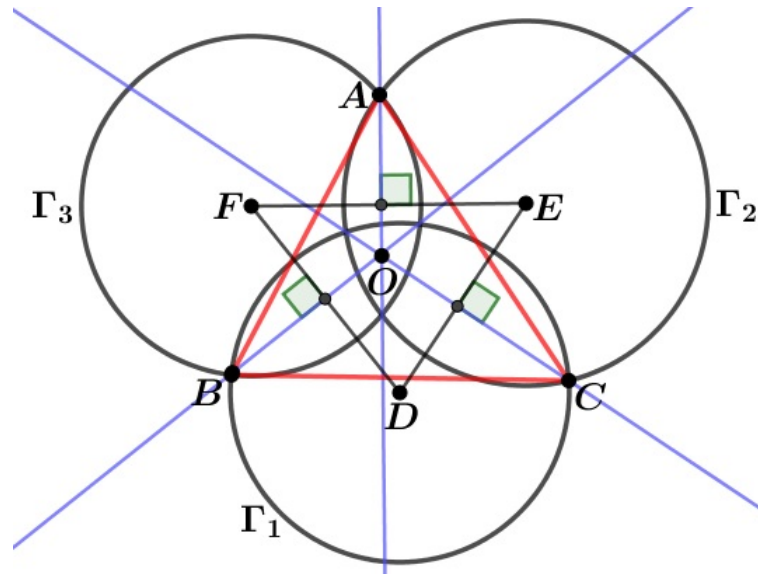


Figura 6.4:

Solução. *Sejam $\Gamma_1 = \Gamma_1(D; DB)$, $\Gamma_2 = \Gamma_2(E; EC)$ e $\Gamma_3 = \Gamma_3(F; FA)$. Então, $B, C \in \Gamma_1$, $A, C \in \Gamma_2$ e $A, B \in \Gamma_3$. Logo, a reta que passa por A e é perpendicular a EF é o eixo radical de Γ_2 e Γ_3 . Raciocínio totalmente análogo aplica-se aos pontos B e C . Como os centros Γ_1, Γ_2 e Γ_3 não são colineares, então pela proposição 3.5.2 concluímos que as três retas se intersectam no centro radical O de Γ_1, Γ_2 e Γ_3 , como queríamos demonstrar.*

6. (USAMO - 2013) Em um triângulo ΔABC , os pontos P, Q e R pertencem aos lados BC, CA e AB , respectivamente. Sejam Γ_1, Γ_2 e Γ_3 as circunferências circunscritas aos triângulos $\Delta AQR, \Delta BRP$ e ΔCPQ , respectivamente. Sabendo-se que o segmento AP intersecta $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ nos pontos X, Y, Z , respectivamente, prove que

$$\frac{\overline{XY}}{\overline{XZ}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}.$$

Solução. *Seja M o ponto de interseção de Γ_1, Γ_2 e Γ_3 . A reta que contém o segmento XM intersecta Γ_2 e Γ_3 nos pontos D e E , respectivamente. Como X é um ponto interior a Γ_2 e exterior a Γ_3 , então da Proposição 3.5.1 temos*

$$\overline{XM} \cdot \overline{XE} = \text{Pot}_{\Gamma_3}(X) = \overline{XZ} \cdot \overline{XP}$$

e

$$\overline{XM} \cdot \overline{XD} = -\text{Pot}_{\Gamma_2}(X) = \overline{XY} \cdot \overline{XP},$$

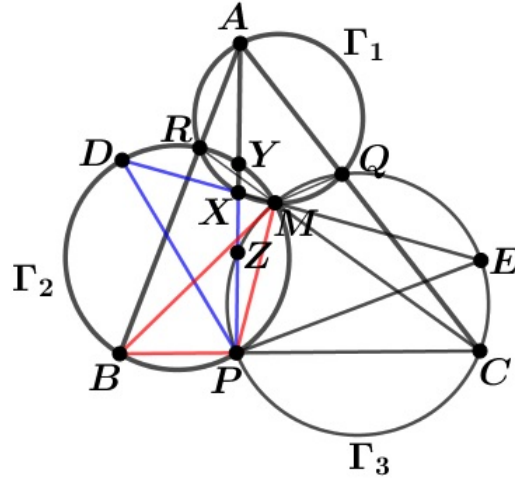


Figura 6.5:

donde

$$\frac{\overline{XY}}{\overline{XZ}} = \frac{\overline{XD}}{\overline{XE}}. \quad (6.12)$$

Agora, vamos mostrar que os triângulos ΔXDP e ΔPBM são semelhantes. De fato, observe que

$$\angle X\hat{D}P = \angle M\hat{D}P = \angle M\hat{P}B$$

e

$$\angle D\hat{X}P = \angle M\hat{X}Y = \angle M\hat{X}A = \angle M\hat{R}A = 180^\circ - \angle M\hat{R}B = \angle M\hat{P}B.$$

Assim, ΔXDP e ΔPBM são semelhantes pelo caso AA (ângulo, ângulo). Desta semelhança segue que

$$\frac{\overline{XD}}{\overline{XP}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PM}} \Rightarrow \overline{XD} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PM}} \cdot \overline{XP}. \quad (6.13)$$

De modo totalmente análogo, os triângulos ΔXEP e ΔPCM são semelhantes e disto obtemos

$$\frac{\overline{XE}}{\overline{XP}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PM}} \Rightarrow \overline{XE} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PM}} \cdot \overline{XP}. \quad (6.14)$$

Das igualdades em (6.13) e (6.14) obtemos

$$\frac{\overline{XD}}{\overline{XE}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}. \quad (6.15)$$

Finalmente, das igualdades em (6.12) e (6.15) obtemos

$$\frac{\overline{XY}}{\overline{XZ}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}.$$

7. (IMO - 2017) Dado um triângulo ΔABC , seja Γ_1 uma circunferência tangente ao lado BC e às extensões dos lados AB e AC . Designemos por D, E e F os pontos onde Γ_1 é tangente às retas que contém os segmentos BC, AC e AB , respectivamente. A circunferência que passa pelos pontos A, E e F interseca a reta que contém BC nos pontos P e Q . Seja M o ponto médio de AD . Prove que a circunferência que passa pelos pontos M, P e Q é tangente a Γ_1 .

Solução. Denotemos por Γ_2 a circunferência que passa pelos pontos A, E, F, P, Q , e denotemos por Γ_3 a circunferência que passa pelos pontos P, M, Q . Chamemos de T o ponto de interseção de Γ_1 com a reta que contém AD .

Vamos mostrar que Γ_3 é tangente a Γ_1 em T . Inicialmente vamos mostrar que os pontos P, Q, M, T pertencem a uma mesma circunferência. Seja A' o centro de Γ_1 . Como $A'E \perp AE$ e $A'F \perp AF$, então AA' é um diâmetro em Γ_2 . Seja N o ponto médio de DT . Como $\overline{A'D} = \overline{A'T}$, então $\angle A'NA = 90^\circ$ e, assim, N também pertence à circunferência Γ_2 . Agora, da potência de D com relação às circunferências Γ_2 e Γ_3 , obtemos

$$\overline{DP} \cdot \overline{DQ} = \overline{DA} \cdot \overline{DN} = 2\overline{DM} \cdot \frac{\overline{DT}}{2} = \overline{DM} \cdot \overline{DT},$$

e disto concluímos que P, Q, M, T pertencem a uma mesma circunferência.

Se os segmentos EF e BC forem paralelos, então ΔABC é isósceles e a solução do problema é imediata por simetria. Caso contrário, designemos por R o ponto de interseção da reta tangente a Γ_1 em T com a reta que contém o segmento BC . Os segmentos RD e RT tem comprimentos iguais, logo $A'R$ é mediatriz de DT . Como $\overline{ND} = \overline{NT}$, então N pertence a esta mediatriz.

No triângulo retângulo $\Delta A'RD$, temos $\overline{RD}^2 = \overline{RN} \cdot \overline{RA'} = \overline{RP} \cdot \overline{RQ}$, onde a última igualdade foi obtida a partir da potência de R com relação a Γ_2 . Assim, $\overline{RT}^2 = \overline{RP} \cdot \overline{RQ}$, o que implica que a reta que contém RT é também tangente a Γ_3 . Como a reta que contém RT é uma tangente comum a Γ_1 e Γ_3 , então estas duas circunferências são tangentes em T .

8. (OLIMPÍADA RUSSA - 2010) O triângulo ΔABC tem perímetro 4. Os pontos X e Y pertencem aos raios AB e AC , respectivamente e são tais que $\overline{AX} = \overline{AY} = 1$. Os segmentos BC e XY se intersectam no ponto M . Prove que o perímetro do triângulo ΔABM ou do triângulo ΔACM é igual a 2.

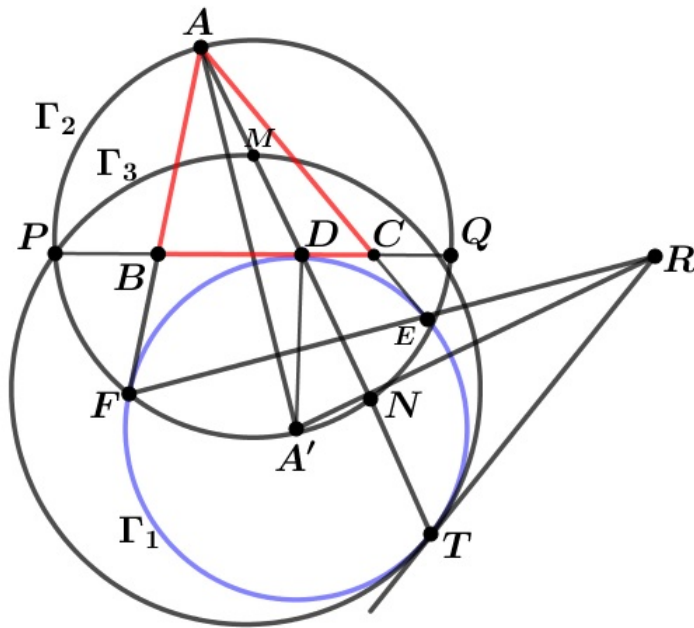


Figura 6.6:

Solução. Seja $\Gamma_A(I_A; r)$ a circunferência tangente ao lado BC e às extensões dos lados AB e AC . Designemos por T, U e V os pontos onde Γ_A intersecta as retas que contém os lados BC, AB e AC , respectivamente. Inicialmente, observemos que

$$\overline{AU} = \overline{AV}, \overline{BT} = \overline{BU}, \overline{CT} = \overline{CV}.$$

Por hipótese, temos $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 4$. Assim,

$$\begin{aligned} 4 &= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} \\ &= \overline{AB} + (\overline{BT} + \overline{TC}) + \overline{CA} \\ &= \overline{AB} + (\overline{BU} + \overline{CV}) + \overline{CA} \\ &= (\overline{AB} + \overline{BU}) + (\overline{CV} + \overline{CA}) \\ &= \overline{AU} + \overline{AV}. \end{aligned}$$

Como $\overline{AU} = \overline{AV}$, então concluímos que $\overline{AU} = \overline{AV} = 2$. Agora, observemos que os triângulos ΔAXY e ΔAUV são semelhantes, pois, por hipótese, $\overline{AX} = \overline{AY}$ e $\overline{AU} = \overline{AV}$. Logo, os segmentos XY e UV são paralelos. Mas, UV é perpendicular a AI_A , assim, os segmentos XY e AI_A são perpendiculares. Desse modo, XY está contido no eixo radical de Γ_A e da circunferência centrada em A de "raio" igual a

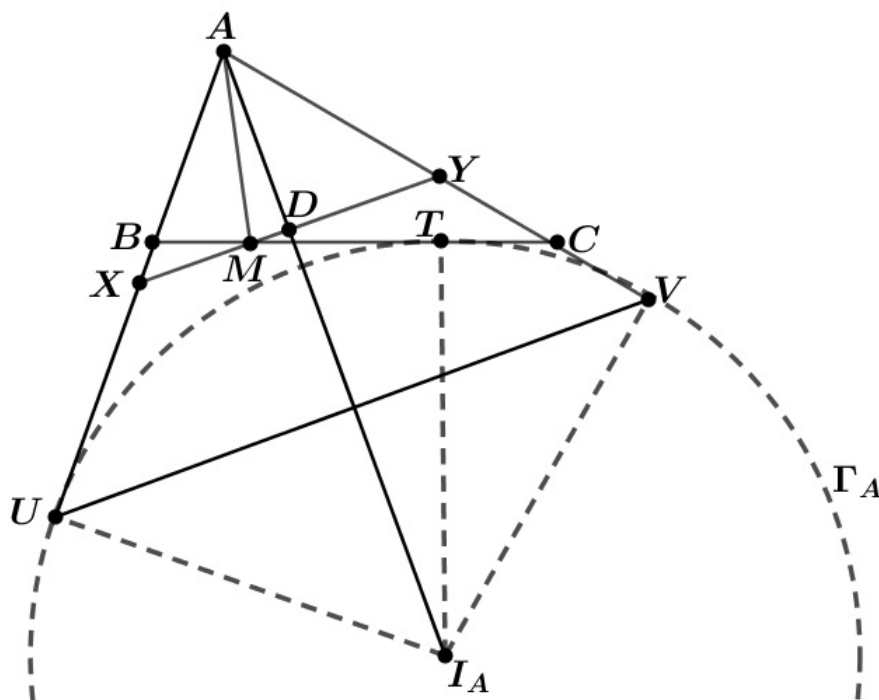


Figura 6.7:

zero, digamos, Γ_0 . Assim, $M \in XY$ implica em

$$\text{Pot}_{\Gamma_A}(M) = \overline{MT}^2 \tag{6.16}$$

$$\text{Pot}_{\Gamma_0}(M) = \overline{AM}^2 - 0^2 \tag{6.17}$$

Das igualdades em (6.16) e (6.17) temos $\overline{MT} = \overline{AM}$. Assumamos, sem perda de generalidade, que o ponto T pertença ao segmento MC. Então,

$$\overline{AB} + \overline{BM} + \overline{MA} = \overline{AB} + \overline{BM} + \overline{MT} = \overline{AB} + \overline{BT} = \overline{AB} + \overline{BU} = \overline{AU} = 2.$$

9. (IMO - 2006) Um ponto D é escolhido sobre o lado AC do triângulo ΔABC com $\angle B\hat{C}A < \angle B\hat{A}C < 90^\circ$ e de tal modo que $\overline{BD} = \overline{BA}$. A circunferência inscrita de ΔABC é tangente aos lados AB e AC nos pontos K e L, respectivamente. Seja J o incentro do triângulo ΔBCD . Prove que KL intesecta o segmento AJ em seu ponto médio.

Solução. Denotemos por P a interseção dos segmentos AJ e KL. Seja M o ponto de interseção da reta que passa pelo ponto J e é paralela ao segmento KL. Como os triângulos ΔAJM e ΔAPL são semelhantes, então P é ponto médio de AJ se, e somente se, L é ponto médio de AM. Denotando por $\angle B\hat{A}C = 2\alpha$, as igualdades

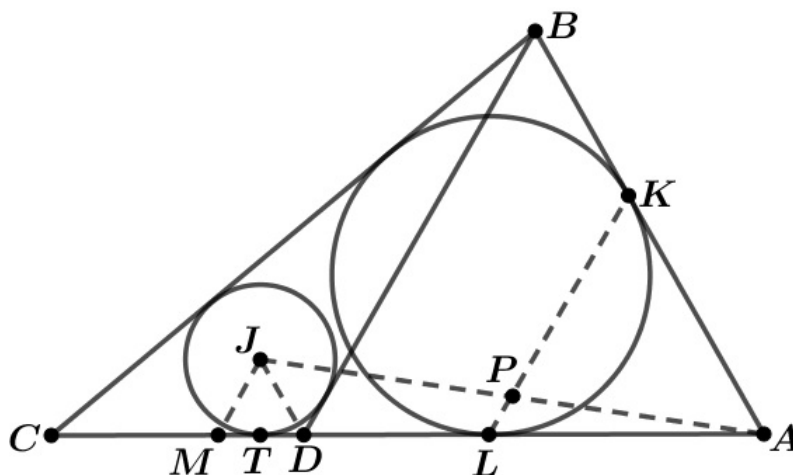


Figura 6.8:

$\overline{BA} = \overline{BD}$ e $\overline{AK} = \overline{AL}$ implicam $\angle A\hat{D}B = 2\alpha$ e $\angle A\hat{L}K = 90^\circ - \alpha$, pois os segmentos JM e KL são paralelos. Segue-se, portanto, que $\overline{JD} = \overline{JM}$. Designemos por T o ponto de interseção da circunferência inscrita do triângulo ΔBCD com o lado CD. Então, $JT \perp CD$, e isso nos mostra que JT é a altura com relação à base DM do triângulo isósceles ΔDMJ . Segue-se agora que $\overline{DM} = \overline{DT}$. Assim,

$$\overline{DM} = 2 \cdot \overline{DT} = \overline{BD} + \overline{CD} - \overline{BC}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \overline{AM} &= \overline{AD} + (\overline{BD} + \overline{CD} - \overline{BC}) \\ &= \overline{AD} + \overline{AB} + \overline{DC} - \overline{BC} \\ &= \overline{AC} + (\overline{AB} - \overline{BC}) \\ &= 2 \cdot \overline{AL}, \end{aligned}$$

ou seja, L é ponto médio de AM, como queríamos demonstrar.

10. (IMO - 1985) Uma circunferência de centro O contém os vértices A e C de um triângulo ΔABC e intersecta os segmentos AB e BC em pontos distintos K e N, respectivamente. As circunferências circunscritas dos triângulos ΔABC e ΔKBN se intersectam em exatamente dois pontos distintos B e M. Prove que o ângulo $\angle O\hat{M}B = 90^\circ$.

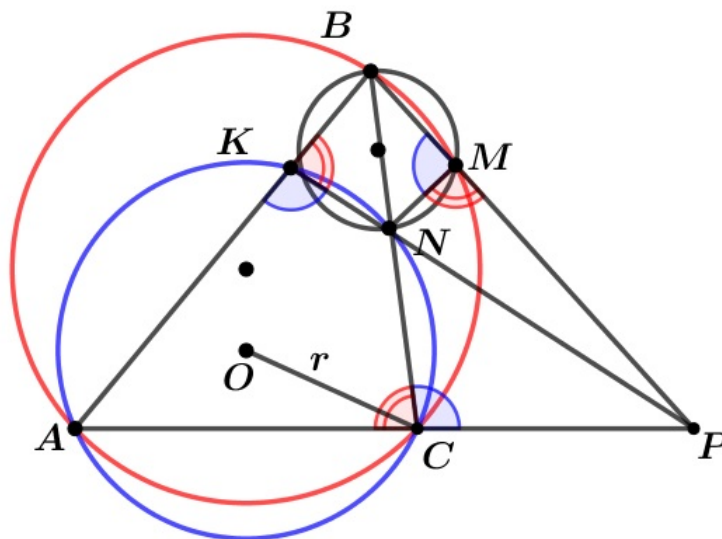


Figura 6.9:

Solução. As três circunferências, tomadas duas a duas, tem como eixos radicais as três retas que contém os segmentos AC, KN e BM. O centro da circunferência inscrita de ΔABC e o ponto O pertencem à mediatriz de AC, o mesmo não ocorrendo com o centro da circunferência circunscrita de ΔBKN , pois as circunferências circunscritas de ΔABC e ΔBKN se intersectam em dois pontos distintos. Segue-se da proposição 3.5.2 que os eixos radicais se intersectam em um ponto cujas potências com relação às três circunferências são iguais. Além disso, como os quadriláteros BKNM e ACNK são inscritíveis, então $\angle \widehat{PMN} = \angle \widehat{BKN} = \angle \widehat{NCA}$ e, assim, PMNC é um quadrilátero inscritível. Logo,

$$\overline{BM} \cdot \overline{BP} = \overline{BN} \cdot \overline{BC} = \overline{BO}^2 - r^2 \tag{6.18}$$

$$\overline{PM} \cdot \overline{PB} = \overline{PN} \cdot \overline{PK} = \overline{PO}^2 - r^2, \tag{6.19}$$

onde $r = \overline{OC}$ é o raio da circunferência com centro em O. Subtraindo membro a membro as igualdades em (6.18) e (6.19), obtemos

$$\overline{PO}^2 - \overline{BO}^2 = \overline{BP}(\overline{PM} - \overline{BM}) = \overline{PM}^2 - \overline{BM}^2,$$

o que implica que OM é uma altura do triângulo ΔOBP .

11. (INMO - 2018) Sejam $\Gamma_1(O_1, r_1)$ e $\Gamma_2(O_2, r_2)$ duas circunferências que se intersectam nos pontos A e B de modo que o ângulo $O_1\hat{A}O_2$ seja obtuso. Sejam C e D os

pontos de interseção da circunferência circunscrita do triângulo ΔO_1AO_2 com Γ_1 e Γ_2 , respectivamente. Designemos por E o ponto de interseção da reta que contém CB com Γ_2 ; e designemos por F o ponto de interseção da reta que contém DB com Γ_1 . Prove que os pontos C, D, E, F pertencem a uma mesma circunferência.

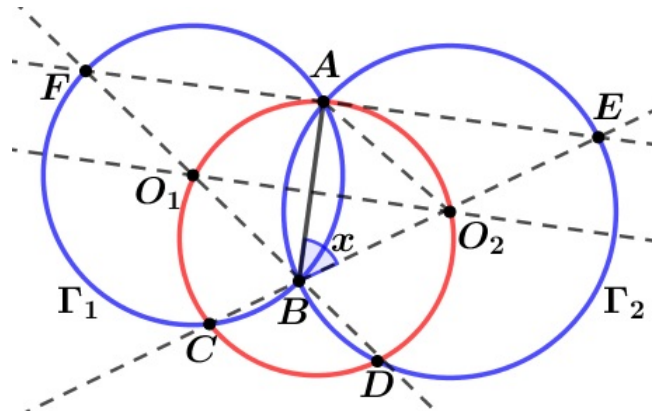


Figura 6.10:

Solução. Inicialmente vamos provar que C, B, O_2 , E são colineares e a reta que os contém é a bissetriz do ângulo \widehat{ACD} . Seja $\angle A\widehat{B}O_2 = x$. Como os segmentos AO_2 e BO_2 são raios de Γ_2 , então o triângulo ΔABO_2 é isósceles com base em AB, logo $\angle A\widehat{O}_2B = (180^\circ - 2x)$. Assim, $\angle A\widehat{O}_2O_1 = (90^\circ - x)$. Como A, O_1 , C, O_2 pertencem a uma mesma circunferência, então $\angle A\widehat{C}O_1 = \angle A\widehat{O}_2O_1 = 90^\circ - x$. Portanto, $\angle A\widehat{O}_1C = 2x$, donde $\angle A\widehat{F}C = x$ e $\angle A\widehat{B}C = 180^\circ - x$. Assim, os ângulos $\widehat{A}BC$ e $\widehat{A}BO_2$ são suplementares e isto implica que C, B, O_2 , E são colineares. Finalmente, notamos que $\overline{O_2A} = \overline{O_2D}$ implica que O_2 é o ponto médio do arco \widehat{AD} , de onde concluímos que CO_2 é bissetriz do ângulo \widehat{ACD} . De modo totalmente análogo, obtemos que D, B, O_1 , F são colineares. Assim, BF e BE são diâmetros de Γ_1 e Γ_2 , respectivamente. Isto nos mostra que $\angle B\widehat{A}E = \angle B\widehat{A}F = 90^\circ$ e, assim, F, A, E são colineares. Por fim, usando todas as propriedades já deduzidas, obtemos

$$\angle E\widehat{C}D = \angle B\widehat{C}D = \angle A\widehat{C}B = \angle A\widehat{F}B = \angle E\widehat{F}D.$$

Portanto, C, D, E, F pertencem a uma mesma circunferência.

12. (IGO - 2018) As circunferências Γ_1 e Γ_2 se intersectam nos pontos A e B. O ponto C pertence à reta tangente a Γ_1 no ponto A, de modo que $\angle A\widehat{B}C = 90^\circ$. Uma reta

arbitrária l passa por C e intersecta Γ_2 nos pontos P e Q . As retas que contêm os segmentos AP e AQ intersectam Γ_1 nos pontos X e Z , respectivamente. Seja Y o pé da altura de A a l . Prove que os pontos X, Y e Z são colineares.

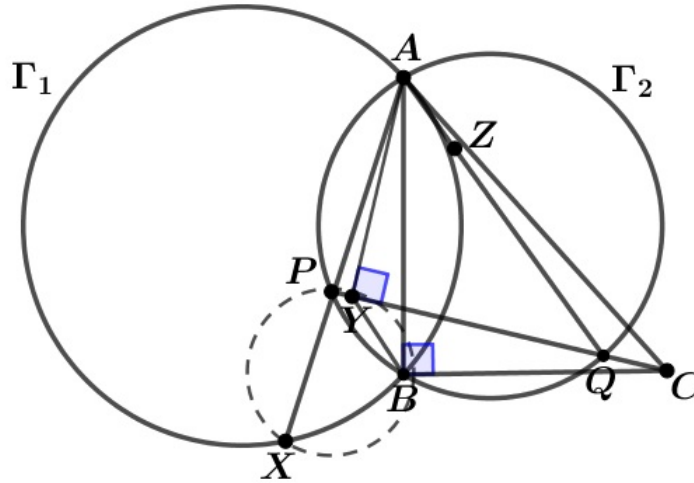


Figura 6.11:

Solução. Como $\angle A\hat{Y}C = \angle A\hat{B}C = 90^\circ$, então pela Proposição 3.4.2 segue-se que o quadrilátero $AYBC$ é inscritível. Assim,

$$\angle B\hat{Y}C = \angle B\hat{A}C = \angle B\hat{X}A = \angle B\hat{X}P.$$

Logo, $PYBX$ e, similarmente, $QBYZ$ são quadriláteros inscritíveis e isto implica que

$$\angle B\hat{Y}X = \angle B\hat{P}X = \angle A\hat{Q}B = \angle Z\hat{Q}B = 180^\circ - \angle Z\hat{Y}B,$$

donde X, Y e Z são colineares.

13. (EGMO - 2012) Seja ΔABC um triângulo acutângulo com circunferência circunscrita Γ e ortocentro H . Seja K um ponto de Γ pertencente ao semiplano determinado pela reta que contém BC e que não contém o ponto A . Seja L a reflexão de K na reta que contém AB e seja M a reflexão de K na reta que contém BC . Seja E o segundo ponto de interseção de Γ com a circunferência circunscrita ao triângulo ΔBLM . Mostre que as retas que contêm os segmentos HK, EM e BC são concorrentes.

Solução. Como, por hipótese, o quadrilátero $B MEL$ é cíclico, então $\angle B\hat{E}M =$

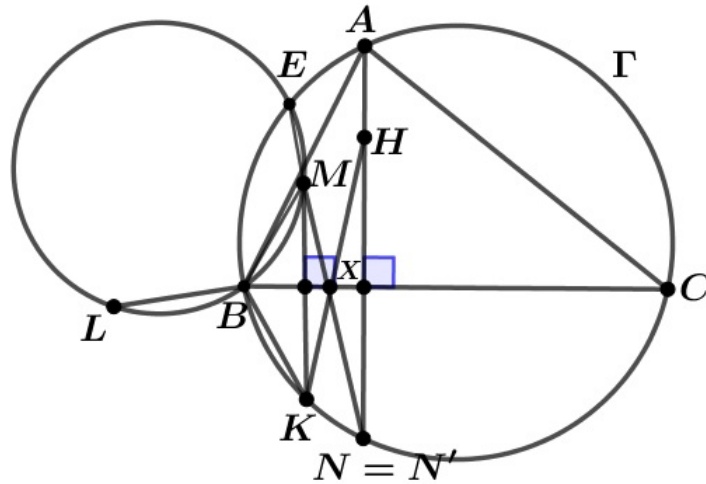


Figura 6.12:

$\angle B\hat{L}M$. Por construção, $\overline{BK} = \overline{BL} = \overline{BM}$, logo

$$\begin{aligned} \angle B\hat{L}M &= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle M\hat{B}L \\ &= 90^\circ - \left(180^\circ - \frac{1}{2}\angle L\hat{B}K - \frac{1}{2}\angle K\hat{B}M\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\angle L\hat{B}K + \frac{1}{2}\angle K\hat{B}M\right) - 90^\circ \\ &= (180^\circ - \angle \hat{B}) - 90^\circ \\ &= 90^\circ - \angle \hat{B}. \end{aligned}$$

Além disso, observe que $\angle B\hat{E}M = \angle B\hat{A}H$ e, desse modo, o ponto N da interseção de EM e AH pertence a Γ . Seja X o ponto de interseção de HK e BC, e seja N' o ponto de interseção de MX e AH. Como, por construção, BC intersecta KM em seu ponto médio, então o triângulo ΔKXM é isósceles; como os segmentos AH e MK são paralelos, então o triângulo $\Delta HXN'$ é isósceles. Observe também que N' é o reflexo de H na reta que contém o segmento BC, pois $AH \perp BC$. Como este reflexo pertence a Γ , então $N' = N$. Assim, E, M, N e M, X, N' pertencem todos à reta que contém o segmento MN, isto é, X pertence à reta que contém EM.

6.2 VESTIBULARES

1. (Fuvest - 2016) Uma bola de bilhar, inicialmente em repouso em um ponto P situado na borda de uma mesa de bilhar com formato circular, recebe uma tacada e se desloca em um movimento retilíneo. A bola atinge a borda no ponto R e é refletida elasticamente, sem deslizar. Chame de Q o ponto da borda diametralmente oposto a P e de θ a medida do ângulo $Q\hat{P}R$.

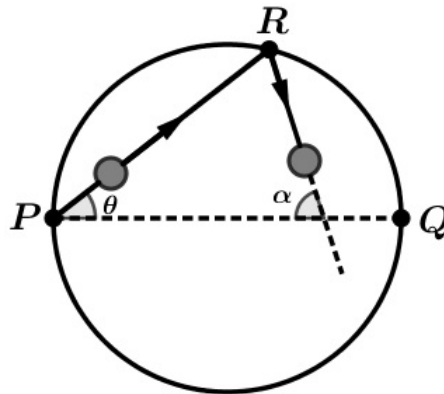


Figura 6.13:

- (a) Para qual valor de θ após a primeira reflexão, a trajetória da bola será paralela ao diâmetro PQ ?
- (b) Para qual valor de θ após a primeira reflexão, a trajetória da bola será perpendicular a PQ ?
- (c) Supondo agora que $30^\circ < \theta < 60^\circ$, encontre uma expressão, em função de θ , para a medida do ângulo agudo formado pela reta que contém P e Q e pela reta que contém a trajetória da bola após a primeira reflexão na borda.

Solução.

- (a) Como a bola atinge a borda no ponto R e é refletida elasticamente, sem deslizar, pode-se concluir que $\angle P\hat{R}O = \angle O\hat{R}Z = \alpha$ (confira a figura 6.14). Pelos fundamentos da Geometria Plana, sabe-se que o ângulo $P\hat{O}R$ também tem medida igual a α . Como os segmentos OP e OR têm medidas iguais (raio da circunferência), pode-se concluir que a medida do ângulo θ também será igual a α . Assim, as medidas de todos os ângulos internos do triângulo ΔPRO são iguais, fazendo deste um triângulo

equilátero. Logo, $\alpha = \theta = 60^\circ$. Caso $\theta = 0^\circ$, após a primeira reflexão a trajetória também será paralela ao diâmetro PQ.

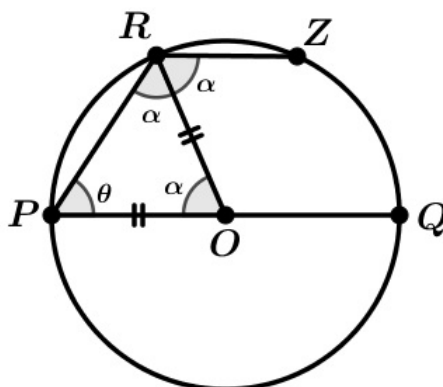


Figura 6.14:

(b) Analisando a figura 6.15, como PO e OZ são segmentos com medidas iguais (ambos são raios de uma mesma circunferência), pode-se concluir que $\theta = \alpha$. Assim, pode-se escrever sobre o triângulo retângulo:

$$3\alpha + 90^\circ = 180^\circ,$$

ou seja,

$$\alpha = \theta = 30^\circ.$$

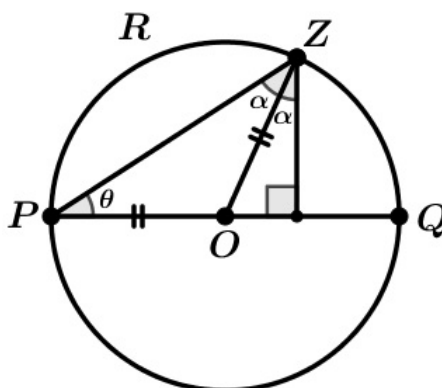


Figura 6.15:

(c) Analisando a figura 6.16, pode-se escrever:

$$\alpha + 3\theta = 180^\circ,$$

donde

$$\alpha = 180^\circ - 3\theta \quad \text{para} \quad 30^\circ < \theta < 60^\circ.$$

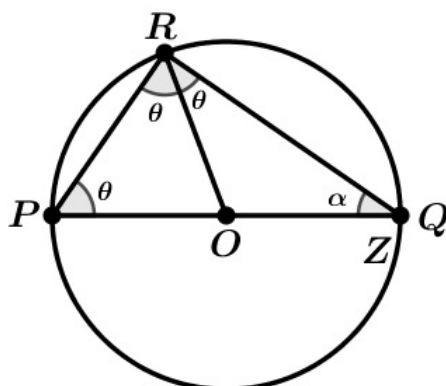


Figura 6.16:

2. (Fuvest - 2016) São dadas três circunferências de raio r , duas a duas tangentes. Os pontos de tangência são P_1, P_2 e P_3 .

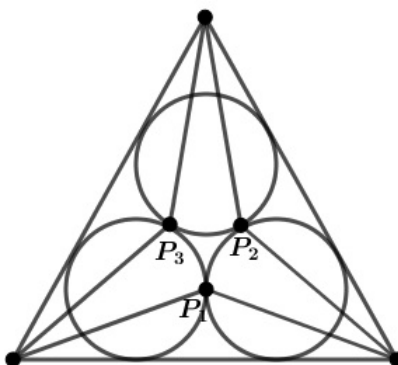


Figura 6.17:

Calcule, em função de r ,

- (a) O comprimento do lado do triângulo T equilátero determinado pelas três retas que são definidas pela seguinte exigência: cada uma delas é tangente a duas das circunferências e não intersecta a terceira
- (b) a área do hexágono não convexo cujos lados são os segmentos ligando cada ponto P_1, P_2 e P_3 aos dois vértices do triângulo T mais próximos a ele.

Solução.

- (a) O triângulo equilátero descrito é o “externo” que contém as três circunferências. Assim, a medida do seu lado é calculado conforme mostra a figura abaixo:

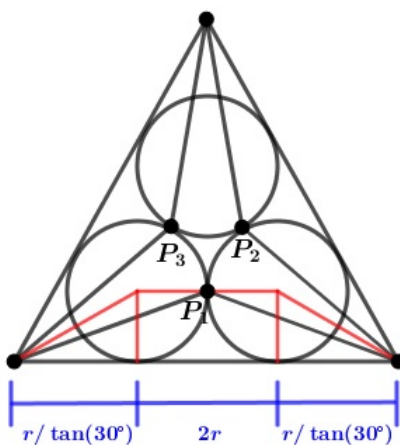


Figura 6.18:

Chamando de l a medida do lado, temos

$$l = \frac{2r}{\tan(30^\circ)} + 2r = 2r \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} + 2r,$$

ou seja,

$$l = 2r \cdot (\sqrt{3} + 1).$$

- (b) Considerando como A, B e C os vértices do triângulo equilátero “externo”, temos:

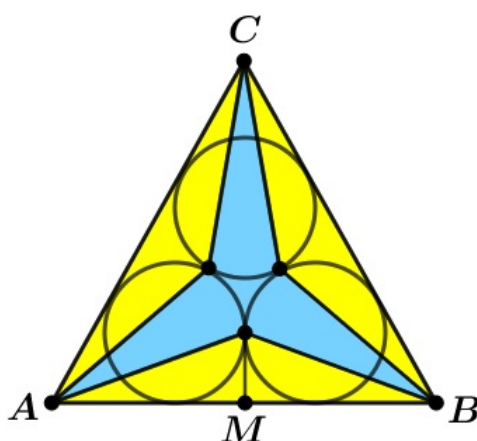


Figura 6.19:

Assim, percebe-se que a área destacada em azul se dá por:

$$S_{\text{azul}} = S_T - S_{\text{amarelo}}.$$

Veja que cada um dos três triângulos amarelo têm altura r e lado l , e portanto $S_{\text{amarelo}} = \frac{3rl}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned} S_{\text{azul}} &= \frac{l^2\sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \frac{rl}{2} \\ &= \frac{(2r(\sqrt{3}+1))^2\sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \frac{2r^2(\sqrt{3}+1)}{2} \\ &= \sqrt{3}r^2(\sqrt{3}+1)^2 - 3r^2(\sqrt{3}+1) \\ &= \sqrt{3}r^2(3+2\sqrt{3}+1) - 3r^2(\sqrt{3}+1) \\ &= 3\sqrt{3}r^2 + 6r^2 + \sqrt{3}r^2 - 3\sqrt{3}r^2 - 3r^2 \\ &= \sqrt{3}r^2 + 3r^2 \\ &= r^2(\sqrt{3}+3) \end{aligned} \tag{6.20}$$

3. (EpCar - 2016) Na figura abaixo A, B, C, D, E e F são vértices de um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio 1 metro e centro O.

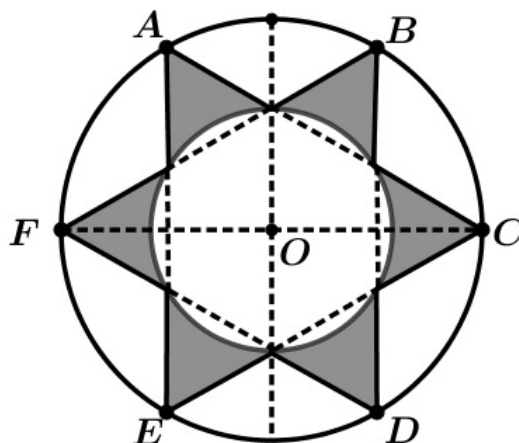


Figura 6.20:

Sabendo-se que ΔACE e ΔBDF são triângulos equiláteros, calcule a área da parte sombreada.

Solução. Considere cada um dos triângulos equiláteros parcialmente hachurados com lado de medida r , que é igual ao raio da circunferência menor da figura. A

altura h de cada um dos triângulos equiláteros é dada por:

$$r = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

A área de cada um dos triângulos equiláteros menores será igual a:

$$S_{\Delta} = \frac{bh}{2} = r \cdot \frac{r\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3}}{4},$$

ou seja,

$$S_{\Delta} = \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

A área que é delimitada por um setor circular abaixo de cada um dos triângulos equiláteros pode ser escrita com sendo:

$$S_{\text{setor}} = \frac{60^{\circ} \cdot \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{360^{\circ}} = \frac{18\pi}{9} \cdot \frac{1}{36} = \frac{\pi}{18}.$$

Por fim, a área hachurada pode ser calculada como sendo:

$$\begin{aligned} S_{\text{hachurada}} &= 6(S_{\Delta} - (S_{\text{setor}} - S_{\Delta})) \\ &= 6(2S_{\Delta} - S_{\text{setor}}) \\ &= 6\left(\frac{2\sqrt{3}}{12} - \frac{\pi}{18}\right) \\ &= 6\left(\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{18}\right) \\ &= 6\left(\frac{3\sqrt{3} - \pi}{18}\right) \\ &= \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3} \\ &= \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

4. (IFSul - 2016) Um triângulo retângulo tem catetos que medem x cm e $4\sqrt{7}$ cm e hipotenusa que mede 16 cm. Na figura abaixo, o diâmetro da circunferência maior tem o mesmo valor do cateto desconhecido do triângulo citado. Sabendo-se que os segmentos que passam por A, B e C dividem o diâmetro da circunferência maior em partes iguais, qual é o valor da área hachurada, em cm^2 ?

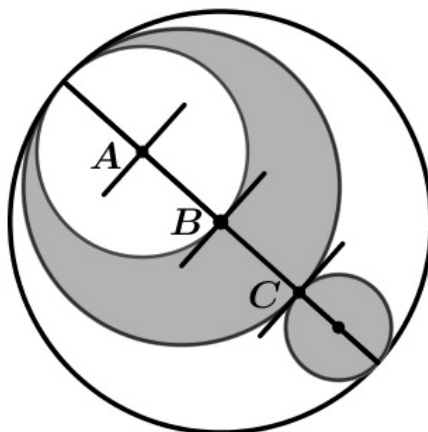


Figura 6.21:

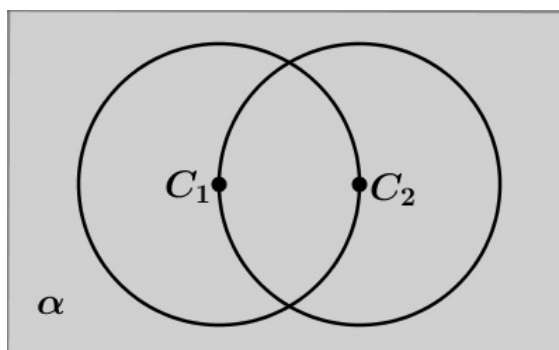
Solução. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo com cateto desconhecido temos:

$$\begin{aligned} \text{hip}^2 &= \text{cat}^2 + \text{cat}^2 \\ 16^2 &= (4\sqrt{7})^2 + x^2 \\ 256 &= 112 + x^2 \\ x^2 &= 144 \\ x &= 12. \end{aligned}$$

Como as medidas A, B, C, D são iguais, basta dividir o diâmetro por quatro e teremos o valor de cada parte: $\frac{12}{4} = 3$ centímetros. A área hachurada será dada pela área da circunferência que engloba os pontos A e B menos a circunferência de centro A somada a circunferência menor que tangencia o ponto C, logo:

$$\begin{aligned} (\pi r_{AB}^2 - \pi r_A^2) + \pi r_C^2 &= \pi \left(\frac{9}{2}\right)^2 - \pi \times 3^2 + \pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \pi \left(\frac{81}{4} - 9 + \frac{9}{4}\right) \\ &= \pi \left(\frac{81}{4} - \frac{36}{4} + \frac{9}{4}\right) \\ &= \frac{54}{4}\pi \\ &= \frac{27}{4}\pi \end{aligned}$$

5. (Uerj - 2016) Na figura abaixo, estão representados dois círculos congruentes, de centros C_1 e C_2 pertencentes ao mesmo plano α . O segmento C_1C_2 mede 6 cm.



Qual a área da região limitada pelos círculos?

Solução. O segmento C_1C_2 é igual ao raio de ambas as circunferências e é igual a 6. Assim, pode-se concluir:

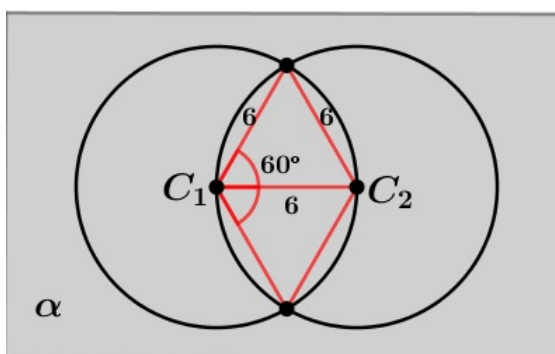


Figura 6.22:

Portanto, a área da região limitada pelos círculos é composta pela área dos círculos menos a área da intersecção entre eles. Já a área da intersecção é composta por dois triângulos equiláteros de lado 6 e 4 segmentos circulares. Assim, considerando $\sqrt{3} \simeq 1,73$ e $\pi \simeq 3,14$ pode-se estimar a área da intersecção como sendo

$$S_{\Delta} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \simeq 15,6.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} S_{\text{seg}} &= S_{\text{setor}} - S_{\Delta} \\ &= \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} - 9\sqrt{3} \\ &= \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} - 9\sqrt{3} \\ &= 6\pi - 9\sqrt{3} \\ &\simeq 3,27 \end{aligned}$$

Por fim,

$$S_{\text{intersec}} = 2 \cdot S_{\Delta} + 4 \cdot S_{\text{seg}} \simeq 2 \cdot 15,6 + 4 \cdot 3,27 = 44,28.$$

Logo, a área S_{∞} da região limitada pelos círculos será:

$$S_{\infty} = 2 \cdot \pi \cdot R^2 - S_{\text{intersec}} = 2 \cdot \pi \cdot 6^2 - 44,28 \simeq 182\text{cm}^2.$$

6. (Uece - 2015) No plano, as circunferências C_1 e C_2 cuja medida dos raios são respectivamente 4 cm e 1 cm tangenciam-se exteriormente e são tangentes a uma reta em pontos distintos. Uma terceira circunferência C_3 exterior a C_1 e a C_2 cuja medida do raio é menor do que 1 cm tangencia a reta r e as circunferências C_1 e C_2 . Nestas condições, qual a medida do raio da circunferência C_3 ?

Solução. Pelo enunciado, pode-se desenhar as circunferências e a reta como segue:

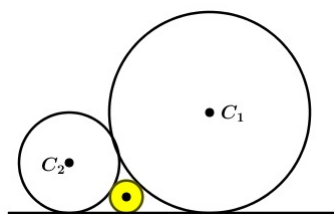


Figura 6.23:

Considerando o raio de C_1 como $R = 4\text{cm}$, o raio de C_2 como $r = 1\text{cm}$ e o raio de C_3 como x (o qual pretende-se encontrar), podemos deduzir algumas relações, conforme figura a seguir:

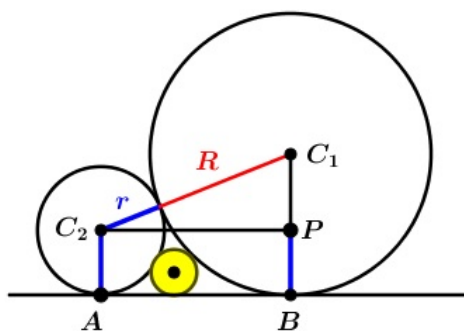


Figura 6.24:

$$(R + r)^2 = (\overline{AB})^2 + (R - r)^2 \Rightarrow 5^2 = (\overline{AB})^2 + 3^2 \Rightarrow \overline{AB} = 4 \text{ cm.}$$

Sabendo-se a medida do segmento AB pode-se deduzir outras relações, conforme figura a seguir:

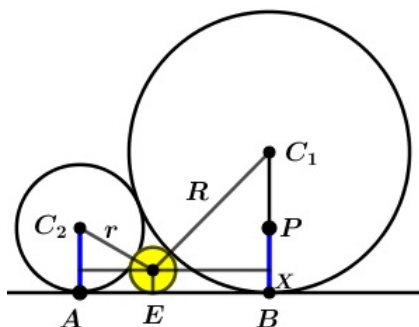


Figura 6.25:

Analisando o triângulo retângulo maior da figura:

$$(R + x)^2 = (4 - \overline{AE})^2 + (R - x)^2 \Rightarrow (4 + x)^2 = (4 - \overline{AE})^2 + (4 - x)^2$$

donde,

$$16 + 8x + x^2 = 16 - 8 \cdot (\overline{AE})^2 + (\overline{AE})^2 + 16 - 8x + x^2,$$

logo

$$16x = 16 - 8 \cdot (\overline{AE}) + (\overline{AE})^2.$$

Analisando o triângulo retângulo menor da figura:

$$(r + x)^2 = (\overline{AE})^2 + (r - x)^2 \Rightarrow (1 + x)^2 = (\overline{AE})^2 + (1 - x)^2$$

donde,

$$1 + 2x + x^2 = (\overline{AE})^2 + 1 - 2x + x^2,$$

logo

$$(\overline{AE})^2 = 4x.$$

Sendo que $(\overline{AE})^2 = 4x$, então $4 \cdot (\overline{AE})^2 = 16x$ logo:

$$4 \cdot (\overline{AE})^2 = 16 - 8 \cdot (\overline{AE}) + (\overline{AE})^2 \Rightarrow 3 \cdot (\overline{AE})^2 + 8 \cdot (\overline{AE}) - 16 = 0.$$

Portanto,

$$\overline{AE} = \frac{-8 + \sqrt{256}}{2 \cdot 3} = \frac{4}{3}.$$

Um comprimento de reta negativo é impossível, logo a única raiz possível para a equação é $4/3$. Assim, substituindo o valor de \overline{AE} na relação $(\overline{AE})^2 = 4x$, obtêm-se o valor de x em centímetros, ou seja, o raio da circunferência C_3

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 = 4x \implies x = \frac{4}{9} \text{ cm}$$

7. (EpCar - 2014) Na figura abaixo, os três círculos têm centro sobre a reta que contém AB e os dois de maior raio têm centro sobre a circunferência de menor raio. Qual a expressão que fornece o valor da área sombreada?

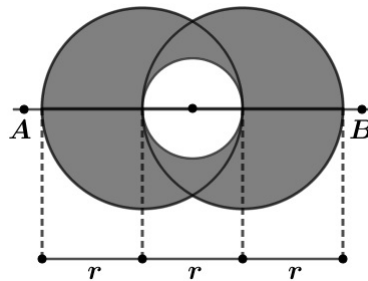


Figura 6.26:

Solução. A área hachurada será igual a área de uma circunferência maior (raio r) somada à área da “lua” remanescente da outra circunferência maior (raio r) subtraindo-se a área da circunferência menor (raio $r/2$) Pode-se deduzir graficamente:

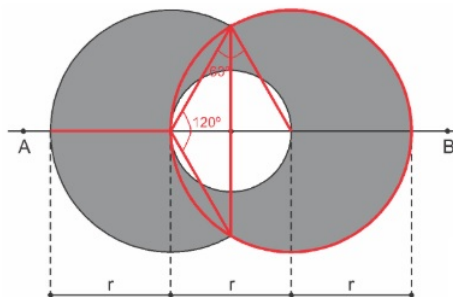


Figura 6.27:

Deduz-se, portanto, que área de uma circunferência maior é igual a πr^2 . Para calcular a área da “lua” remanescente da outra circunferência de raio r (área hachurada em azul nas figuras a seguir) é preciso subtrair o equivalente a duas áreas verdes (ver figuras a seguir). Para calcular a área verde, é preciso calcular a área do setor circular de 120° menos a área de um triângulo equilátero de lado r .

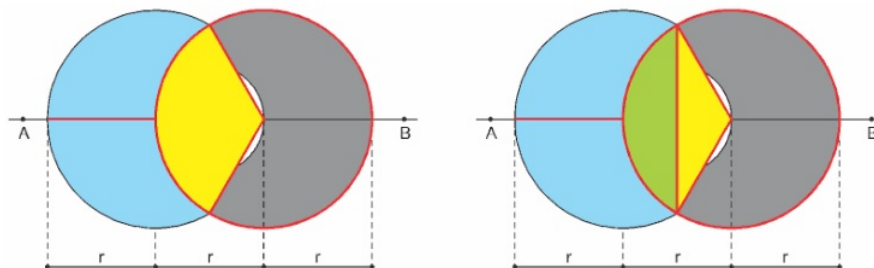


Figura 6.28:

Assim, pode-se escrever que a área total hachurada em cinza é igual a:

$$\begin{aligned}
 2\pi r^2 - 2 \cdot \left(\frac{\pi r^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} - \frac{r^2 \sqrt{3}}{4} \right) - \frac{\pi r^2}{4} &= \frac{3\pi r^2}{4} + \left[\pi r^2 - \left(\frac{8\pi r^2 - 6r^2 \sqrt{3}}{12} \right) \right] \\
 &= \frac{3\pi r^2}{4} + \frac{4\pi r^2 + 6r^2 \sqrt{3}}{12} \\
 &= \frac{13\pi r^2 + 6r^2 \sqrt{3}}{12} \\
 &= \left(\frac{13\pi + 6\sqrt{3}}{12} \right) \cdot r^2
 \end{aligned}$$

8. (ITA - 2012) Um triângulo ABC tem lados com medidas $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm, $b = 1$ cm e $c = \frac{1}{2}$ cm. Uma circunferência é tangente ao lado a e também aos prolongamentos dos outros dois lados do triângulo, ou seja, a circunferência é ex-inscrita ao triângulo. Então, qual a medida, em cm, do raio da circunferência?

Solução. Observe, na figura 6.29, que $EB = BF = y$ e $DC = FC = x$. Logo,

$$BF + CF = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x + y = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad e \quad AD = AE,$$

logo $x + \frac{1}{2} = y + 1$, ou seja, $x - y = \frac{1}{2}$. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x + y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x - y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

temos $x = \frac{\sqrt{3} + 1}{4}$.

Portanto,

$$\tan(30^\circ) = \frac{r}{\frac{\sqrt{3} + 1}{4} + \frac{1}{2}},$$

de onde concluímos que

$$r = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}.$$

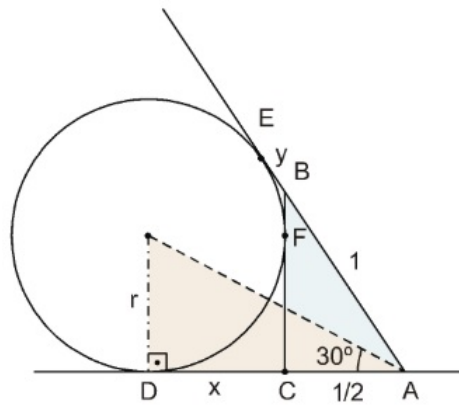


Figura 6.29:

9. Duas circunferências, C_1 e C_2 , ambas com 1 m de raio, são tangentes. Seja C_3 outra circunferência cujo raio mede $(\sqrt{2} - 1)$ m e que tangencia externamente C_1 e C_2 . Qual a área, em m^2 , da região limitada e exterior às três circunferências?

Solução. Temos que um dos lados dos triângulos retângulos medem 1 e a hipotenusa mede $\sqrt{2} - 1 + 1 = \sqrt{2}$, portanto o outro cateto mede $\sqrt{2}^2 - 1^2 = 1$, portanto é um triângulo isósceles de catetos 1 e 1, com isso concluímos que seus ângulos são 45 graus. Portanto, o ângulo interno do triângulo nas circunferências C_1 e C_2 é igual a 45 graus, ou seja, um oitavo da circunferência e em C_3 o ângulo é $45 + 45 = 90$ graus, ou seja, um quarto de circunferência. A área total do triângulo é

$$\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 1.$$

A área das secções das circunferências C_1 e C_2 será

$$\frac{\pi \cdot 1^2}{8} = \frac{\pi}{8}.$$

A área da secção de C_3 será

$$\frac{\pi(\sqrt{2}-1)^2}{4} = \frac{\pi(3-2\sqrt{2})}{4}.$$

Portanto, a área hachurada será

$$1 - 2 \cdot \frac{\pi}{8} - \frac{\pi(3-2\sqrt{2})}{4} = \frac{4 - \pi(4+2\sqrt{2})}{4}.$$

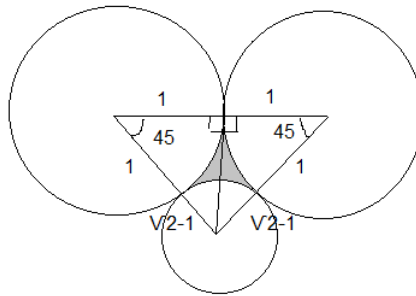
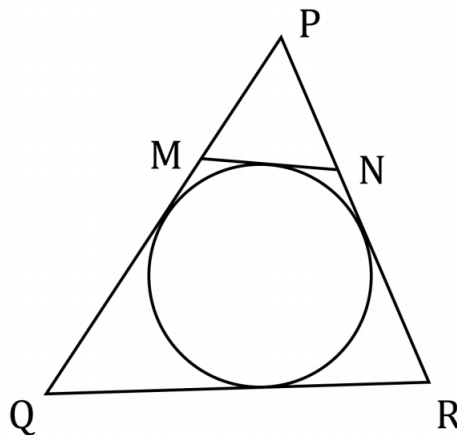


Figura 6.30:

10. **ITA - 2015** Num triângulo ΔPQR , considere os pontos M e N pertencentes aos lados PQ e PR , respectivamente, tais que o segmento MN seja tangente à circunferência inscrita ao triângulo ΔPQR . Sabendo-se que o perímetro do triângulo ΔPQR é 25 e que a medida de QR é 10, então qual o perímetro do triângulo ΔPMN ?

Solução. Utilizando as informações fornecidas, podemos construir a seguinte figura:



Queremos o perímetro do triângulo ΔPMN , logo queremos a soma $s = \overline{PM} + \overline{MN} + \overline{NP}$. O quadrilátero $MNRQ$ é circunscritível, então podemos aplicar nele o teorema

de Pitot: $\overline{MN} + \overline{QR} = \overline{MQ} + \overline{NR}$. Somando $\overline{PM} + \overline{PN}$ em ambos os lados da igualdade, obtemos:

$$\overline{PM} + \overline{PN} + \overline{MN} + \overline{QR} = \overline{PM} + \overline{PN} + \overline{MQ} + \overline{NR}. \quad (6.21)$$

Do lado esquerdo da igualdade, temos exatamente a soma s desejada, mais \overline{QR} . Do lado direito, temos $\overline{PM} + \overline{MQ} + \overline{PN} + \overline{NR}$. Mas, $\overline{PM} + \overline{MQ} = \overline{PQ}$ e $\overline{PN} + \overline{NR} = \overline{PR}$, e sabemos que $\overline{PQ} + \overline{PR} + \overline{QR} = 25$. Como foi dado que $\overline{QR} = 10$ e $\overline{PQ} + \overline{PR} = 15$, então substituindo todas essas informações na expressão (6.21), chegamos em

$$s + \overline{QR} = 15,$$

ou seja, $s = 5$.

6.3 OUTROS

1. Considere um triângulo equilátero ΔABC e seja P um ponto pertencente ao arco \widehat{AB} da circunferência circunscrita a ΔABC . Mostre que,

$$\overline{PC} = \overline{PA} + \overline{PB}.$$

Solução. Trace os segmentos PA, PB e PC como na figura 6.31. Aplicando o teorema de Ptolomeu no quadrilátero $APBC$, temos

$$\overline{PC} \cdot \overline{AB} = \overline{PA} \cdot \overline{BC} + \overline{PB} \cdot \overline{AC}. \quad (6.22)$$

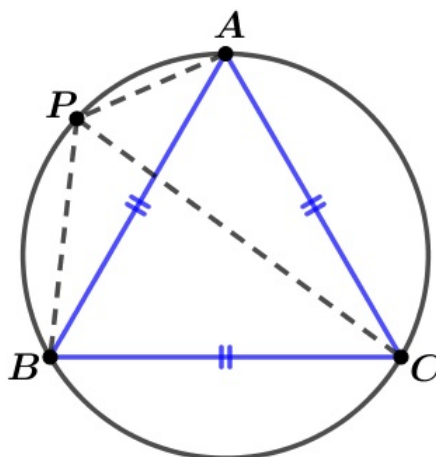


Figura 6.31:

Como, por hipótese, o triângulo ΔABC é equilátero, então $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = s$. Assim, dividindo-se ambos os membros da igualdade em (6.22) por s , obtemos o resultado desejado,

$$\overline{PC} = \overline{PA} + \overline{PB}.$$

2. Dado um heptágono regular $ABCDEFG$, mostre que

$$\frac{1}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}.$$

Solução. Aplicando-se o teorema de Ptolomeu no quadrilátero $ABCE$, obtemos

$$\overline{AC} \cdot \overline{BE} = \overline{BC} \cdot \overline{AE} + \overline{CE} \cdot \overline{AB}. \quad (6.23)$$

Como, por hipótese, o heptágono ABCDEFG é regular, então (veja a figura 6.32)

$$\overline{AB} = \overline{BC}; \quad \overline{AC} = \overline{CE} \quad e \quad \overline{AE} = \overline{BE} = \overline{AD}. \quad (6.24)$$

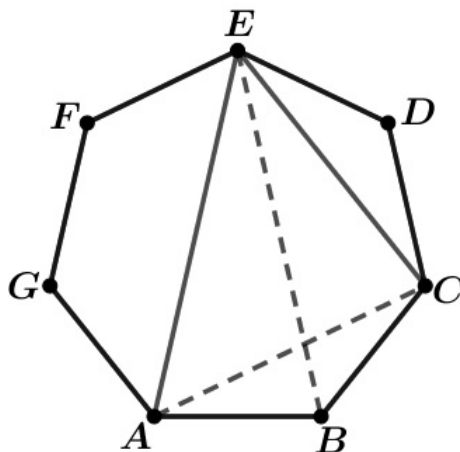


Figura 6.32:

Substituindo as igualdades em (6.24) na igualdade em (6.23), temos

$$\begin{aligned} \overline{AC} \cdot \overline{AD} &= \overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{AC} \cdot \overline{AB} \\ &= \overline{AB} \cdot (\overline{AD} + \overline{AC}), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot (\overline{AD} + \overline{AC}). \quad (6.25)$$

Dividindo-se ambos os membros da igualdade em (6.25) por $\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}$, obtemos

$$\frac{1}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD} + \overline{AC}}{\overline{AC} \cdot \overline{AD}},$$

o que é equivalente a

$$\frac{1}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}.$$

- Na obra de Arquimedes (HEATH, 1953) publicada em 287 a.C., encontramos o Livro dos Lemas, que contém 15 proposições referentes a temas da geometria elementar. Nas de números 4, 5 e 6, aparece o **arbelos**, ou faca do sapateiro, região limitada por três semicircunferências de diâmetros AB, AC e BC com C pertencente ao segmento

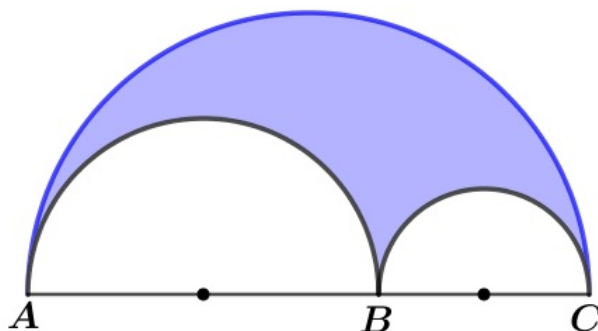


Figura 6.33: A região em destaque é chamada de arbelos.

AB, estando todas em um mesmo semiplano determinado por AB (veja a figura 6.33).

Dada a arbelos da figura 6.34, relacione os raios r_1 e r_2 com o raio r da circunferência inscrita na arbelos.

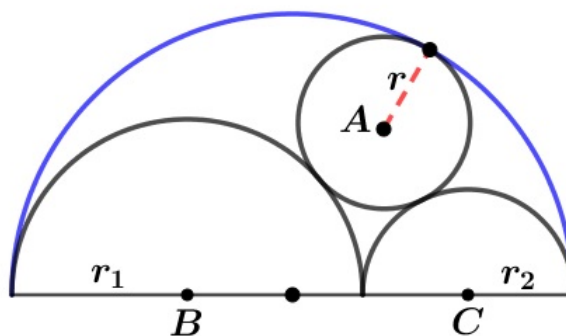


Figura 6.34:

Solução. Vamos considerar o triângulo ΔABC cujos vértices são os centros das semicircunferências de raios r_1 e r_2 e o centro da circunferência inscrita, de raio r (veja a figura 6.35). As medidas dos lados do triângulo ΔABC são,

$$\overline{AB} = r + r_1, \overline{AC} = r + r_2, \overline{BC} = r_1 + r_2.$$

Seja D o centro da semicircunferência de raio $(r_1 + r_2)$, temos

$$\overline{BD} = r_2, \overline{DC} = r_1 \quad e \quad \overline{AD} = \overline{DE} - \overline{AE} = r_1 + r_2 - r.$$

Usando o teorema de Stewart no triângulo ΔABC com o segmento AD, obtemos

$$(r + r_1)^2 \cdot r_1 + (r + r_2)^2 \cdot r_2 - (r_1 + r_2 - r)^2(r_1 + r_2) = r_1 r_2 (r_1 + r_2).$$

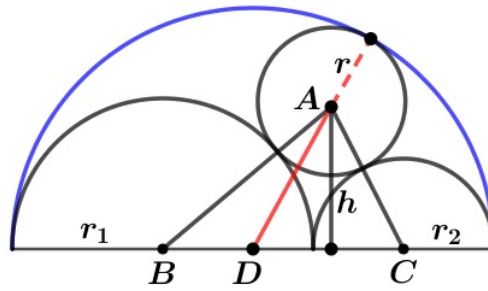


Figura 6.35:

Desenvolvendo algebricamente essa igualdade, e isolando-se o r , chega-se à relação procurada,

$$r = \frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2}.$$

4. Considere uma circunferência inscrita em um quadrado cuja medida do lado é igual a dois. Determine a área da região A destacada na figura abaixo.

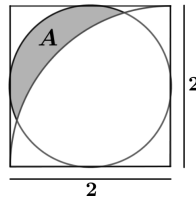


Figura 6.36:

Solução. Vamos usar a mesma notação da figura 6.37. Os triângulos ΔAOC_1 e ΔBOC_1 são congruentes pelo caso LLL, pois $\overline{AC_1} = \overline{BC_1} = 2$, $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$ e OC_1 é um lado comum. Dessa congruência segue-se que

$$\angle A\hat{O}C_1 = \angle B\hat{O}C_1 = \theta \quad e \quad \angle A\hat{C}_1O = \angle B\hat{C}_1O = \beta,$$

donde, $\angle A\hat{O}B = 2\pi - 2\theta$. Além disso, o segmento OC_1 tem medida igual à metade do comprimento da diagonal do quadrado, ou seja, $\overline{OC_1} = \sqrt{2}$. Chamemos de S a

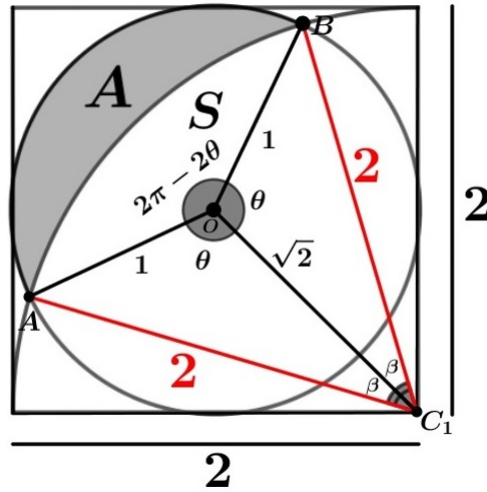


Figura 6.37:

região de interseção dos setores circulares \widehat{AOB} e $\widehat{AC_1B}$. Então,

$$\begin{aligned}
 \text{Área}(A) &= \text{Área}(\widehat{AOB}) - \text{Área}(S) \\
 &= \frac{(2\pi - 2\theta) \cdot 1^2}{2} - \text{Área}(\widehat{AC_1B}) - 2 \cdot \text{Área}(\Delta AOC_1) \\
 &= \frac{(2\pi - 2\theta)}{2} - \frac{(2\beta) \cdot 2^2}{2} - 2 \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\theta)}{2} \\
 &= \frac{(2\pi - 2\theta)}{2} - (2\beta) \cdot 2 - \sqrt{2} \cdot \sin(\theta). \tag{6.26}
 \end{aligned}$$

Inicialmente, vamos determinar o valor de $\sin(\theta)$. Para tanto, aplicamos a lei dos cossenos no triângulo ΔBOC_1 . Logo,

$$\begin{aligned}
 2^2 &= 1^2 + \sqrt{2}^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\theta) \\
 4 &= 1 + 2 - 2\sqrt{2} \cos(\theta) \\
 1 &= -2\sqrt{2} \cos(\theta),
 \end{aligned}$$

donde,

$$\cos(\theta) = \frac{-1}{2\sqrt{2}}.$$

Agora, utilizando a identidade trigonométrica fundamental, obtemos

$$\begin{aligned}
 \sin^2(\theta) + \left(\frac{-1}{2\sqrt{2}}\right)^2 &= 1 \\
 \sin^2(\theta) + \frac{1}{8} &= 1 \\
 \sin^2(\theta) &= \frac{7}{8}.
 \end{aligned}$$

Como $0 < \theta < \pi$, então

$$\sin(\theta) = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4}. \quad (6.27)$$

Agora, vamos determinar o valor de 2β . Usando a igualdade em (6.27) e a lei dos senos no triângulo ΔBOC_1 , obtemos

$$\frac{2}{\frac{\sqrt{14}}{4}} = \frac{1}{\sin(\beta)},$$

de onde segue que

$$\sin(\beta) = \frac{\sqrt{14}}{8}.$$

Usando mais uma vez a identidade trigonométrica fundamental, obtemos

$$\begin{aligned} \cos^2(\beta) + \left(\frac{\sqrt{14}}{8}\right)^2 &= 1 \\ \cos^2(\beta) + \frac{14}{64} &= 1 \\ \cos^2(\beta) &= \frac{50}{64}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\cos^2(\beta) = \frac{25}{32}. \quad (6.28)$$

Da igualdade em (6.28) e da fórmula do arco duplo, temos

$$\begin{aligned} \cos(2\beta) &= 2 \cdot \cos^2(\beta) - 1 \\ \cos(2\beta) &= 2 \cdot \frac{25}{32} - 1 \\ \cos(2\beta) &= \frac{9}{16}, \end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$2\beta = \arccos\left(\frac{9}{16}\right). \quad (6.29)$$

Para encontrarmos o valor de $(2\pi - 2\theta)$ vamos utilizar a fórmula do arco duplo e o fato de que a função cosseno é par. Observe que,

$$\begin{aligned} \cos(2\pi - 2\theta) &= \cos(-2\theta) \\ &= \cos(2\theta) \\ &= 2 \cos^2(\theta) - 1 \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) - 1 \\ &= -\frac{3}{4}, \end{aligned}$$

isto é,

$$2\pi - 2\theta = \arccos\left(-\frac{3}{4}\right). \quad (6.30)$$

Por fim, substituindo as igualdades em (6.27), (6.29) e (6.30) na igualdade em (6.26), obtemos

$$\begin{aligned} \text{Área}(\mathcal{A}) &= \frac{(2\pi - 2\theta)}{2} - 2 \cdot (2\beta) - \sqrt{2} \cdot \sin(\theta) \\ &= \frac{\arccos(-3/4)}{2} - 2 \cdot \arccos(9/16) - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{14}}{4} \\ &= \frac{\arccos(-3/4)}{2} - \frac{4 \cdot \arccos(9/16)}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}. \end{aligned}$$

5. Uma mosca, pousada no chão, observa um pássaro em um ângulo de elevação de 45° . Para chegar aonde está o pássaro, a mosca descreve um caminho curvo de um quarto de circunferência. Ela para em um ponto de sua rota e observa o pássaro em um ângulo de elevação de 37° . Sabendo-se que o pássaro está a uma altura de 2,5 metros do chão, a que altura em metros, aproximadamente, a mosca está nesse ponto? Considere $\tan(37^\circ) \cong 0,75$.

Solução. Vamos utilizar a mesma notação da figura 6.38. Ponhamos $\overline{BC} = c$, $\overline{CD} =$

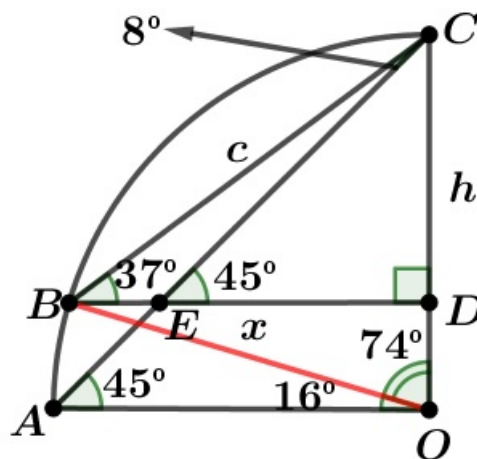


Figura 6.38:

h e $\overline{BD} = x$. Como o triângulo $\triangle BCD$ é retângulo, então pelo teorema de Pitágoras,

$$x^2 = c^2 - h^2. \quad (6.31)$$

Além disso, temos

$$\tan(37^\circ) = \frac{h}{x} \implies h^2 = x^2 \times \tan^2(37^\circ). \quad (6.32)$$

Substituindo a igualdade (6.31) em (6.32), obtemos

$$\begin{aligned} h^2 &= x^2 \times \tan^2(37^\circ) \\ &= (c^2 - h^2) \times \tan^2(37^\circ) \\ &= c^2 \times \tan^2(37^\circ) - h^2 \times \tan^2(37^\circ), \end{aligned}$$

donde,

$$[1 + \tan^2(37^\circ)] \times h^2 = c^2 \times \tan^2(37^\circ),$$

ou seja,

$$h^2 = \frac{c^2 \times \tan^2(37^\circ)}{[1 + \tan^2(37^\circ)]}. \quad (6.33)$$

Observe que,

$$\frac{\tan^2(37^\circ)}{1 + \tan^2(37^\circ)} = \frac{\frac{\sin^2(37^\circ)}{\cos^2(37^\circ)}}{1 + \frac{\sin^2(37^\circ)}{\cos^2(37^\circ)}} = \frac{\frac{\sin^2(37^\circ)}{\cos^2(37^\circ)}}{\frac{\cos^2(37^\circ) + \sin^2(37^\circ)}{\cos^2(37^\circ)}} = \sin^2(37^\circ). \quad (6.34)$$

Substituindo a igualdade em (6.34) na equação em (6.33), temos

$$h^2 = c^2 \times \sin^2(37^\circ). \quad (6.35)$$

Agora, vamos determinar o valor de c . A ideia é usar a lei dos cossenos no triângulo $\triangle BOC$, pois sabemos que $\overline{BO} = \overline{CO} = 2,5$. Precisamos, então, determinar a medida do ângulo \widehat{BOC} . Para tanto, trace o segmento BO . Observe que \widehat{BCA} é um ângulo inscrito subtendido ao arco \widehat{AB} e que \widehat{AOB} é um ângulo central correspondente ao arco \widehat{AB} . Como $\angle BAC = 8^\circ$, então $\angle AOB = 16^\circ$ e, conseqüentemente, $\angle BOC = 74^\circ$. Assim, pela lei dos cossenos

$$\begin{aligned} c^2 &= (2,5)^2 + (2,5)^2 - 2 \times (2,5) \times (2,5) \times \cos(74^\circ) \\ &= 2 \times (2,5)^2 - 2 \times (2,5)^2 \times \cos(2 \times 37^\circ) \\ &= 2 \times (2,5)^2 \times [1 - \cos(2 \times 37^\circ)]. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Veja que,

$$\begin{aligned}
 \cos(2 \times 37^\circ) &= \cos^2(37^\circ) - \sin^2(37^\circ) \\
 -\cos(2 \times 37^\circ) &= \sin^2(37^\circ) - \cos^2(37^\circ) \\
 1 - \cos(2 \times 37^\circ) &= 1 + \sin^2(37^\circ) - \cos^2(37^\circ) \\
 1 - \cos(2 \times 37^\circ) &= \sin^2(37^\circ) + \sin^2(37^\circ) \\
 1 - \cos(2 \times 37^\circ) &= 2 \times \sin^2(37^\circ) \\
 2 \times (2,5)^2 \times [1 - \cos(2 \times 37^\circ)] &= 2^2 \times (2,5)^2 \times \sin^2(37^\circ). \quad (6.37)
 \end{aligned}$$

Substituindo a igualdade em (6.37) na equação em (6.36), obtemos

$$c^2 = [2 \times 2,5 \times \sin(37^\circ)]^2,$$

isto é,

$$c = 5 \times \sin(37^\circ). \quad (6.38)$$

Como $\tan(37^\circ) = 0,75 = \frac{3}{4}$, então da igualdade em (6.34), segue que

$$\sin^2(37^\circ) = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\frac{9}{16}}{\frac{25}{16}} = \frac{9}{25},$$

donde, $\sin(37^\circ) = \frac{3}{5}$.

Das igualdades em (6.35) e (6.38), temos

$$h = c \times \sin(37^\circ) = 5 \times \sin^2(37^\circ) = 5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1,8.$$

Finalmente,

$$\overline{OD} = \overline{OC} - \overline{CD} = 2,5 - h = 2,5 - 1,8 = 0,70.$$

6. Mostre que os simétricos de um ponto da circunferência circunscrita a um triângulo em relação aos lados desse triângulo são colineares e pertencem a uma reta paralela à reta de Simson-Wallace, relativa a esse ponto.

Solução. Sejam P um ponto da circunferência circunscrita ao triângulo ΔABC e L, M e N os simétricos de P em relação aos lados BC, AC e AB , com $PL \cap BC = D, PM \cap AC = E$ e $PN \cap AB = F$ (Figura 6.39).

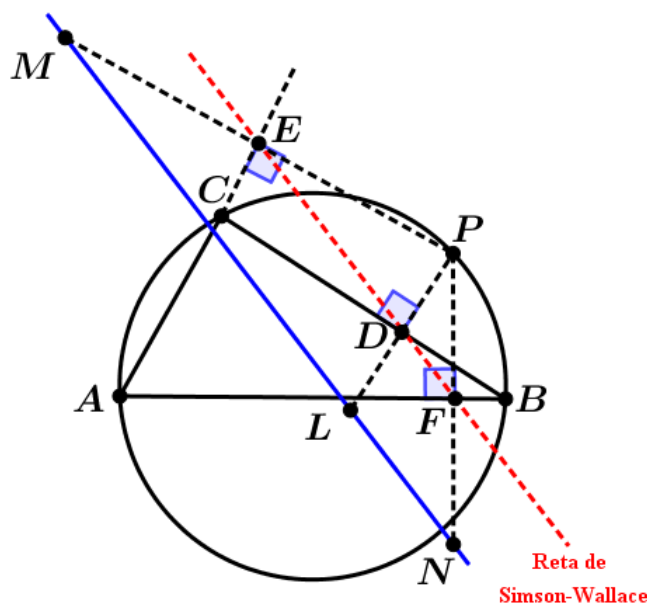


Figura 6.39:

Em outras palavras, D, E e F são os pontos médios de BC, AC e AB, respectivamente. Sabe-se, pelo Teorema de Simson-Wallace, que os pontos D, E e F (pés das perpendiculares baixadas de P aos lados do triângulo ΔABC) são colineares e estão sobre a reta de Simson-Wallace. Como $DF \parallel LN$ (base média do triângulo ΔPLN) e $ED \parallel ML$ (base média do triângulo ΔPML), então L, M e N são colineares e paralelos à reta de Simson-Wallace, relativa ao ponto P.

7. Utilize o Teorema da Corda Quebrada para mostrar a seguinte identidade trigonométrica clássica:

$$\sin(x - y) = \sin(x) \cos(y) - \sin(y) \cos(x).$$

Solução. Com a mesma notação da figura 6.40, sejam $2x$ e $2y$ as medidas dos arcos \widehat{MC} e \widehat{BM} , respectivamente. Como a medida do arco \widehat{AM} também é $2x$, então a medida do arco \widehat{AB} é $2x - 2y$. Os pontos G, H, I e J são os pés das perpendiculares traçadas de O, centro da circunferência, às cordas MC, BM, AB e BC, respectivamente e, para facilitar, tomaremos o raio da circunferência como 1. Temos então, $\angle M\hat{O}G = x$, $\angle M\hat{O}H = y$ e $\angle I\hat{O}A = x - y$, pois são metades dos ângulos centrais $M\hat{O}C$, $B\hat{O}M$ e $A\hat{O}B$. Além disso, $\angle M\hat{B}C = x$ e $\angle M\hat{C}B = y$, pois são ângulos inscritos que subtendem arcos de medidas $2x$ e $2y$. Observe agora os três resultados

a seguir:

(a) $\overline{MG} = \sin(x)$, $\overline{MC} = 2 \sin(x)$ e $\overline{FC} = \overline{MC} \cdot \cos(y) = 2 \sin(x) \cos(y)$.

(b) $\overline{HM} = \sin(y)$, $\overline{BM} = 2 \sin(y)$ e $\overline{BF} = \overline{BM} \cdot \cos(x) = 2 \sin(y) \cos(x)$.

(c) $\overline{IB} = \sin(x - y)$ e então $\overline{AB} = 2 \sin(x - y)$.

O Teorema da Corda Quebrada diz que $\overline{AB} + \overline{BF} = \overline{FC}$ ou $\overline{AB} = \overline{FC} - \overline{BF}$. Substituindo nesta última relação os resultados de (a), (b) e (c) (e dividindo por 2) encontramos a fórmula

$$\sin(x - y) = \sin(x) \cos(y) - \sin(y) \cos(x).$$

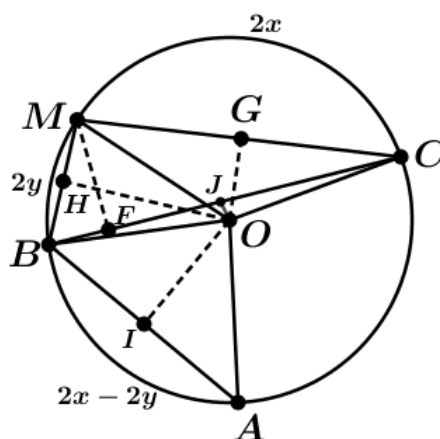


Figura 6.40:

Referências Bibliográficas

- [1] ALVES, Sérgio. *A Matemática do GPS*. **Revista do Professor de Matemática**. n. 59. Rio de Janeiro: SBM, 2008.
- [2] BARBOSA, J. L. *Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do Professor de Matemática).
- [3] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. Brasília: MEC/ Secretaria de Educação Básica, 1997.
- [4] BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio*. Brasília: MEC/ Secretaria de Educação Básica, 2018.
- [5] BOYER, C. B. *A History of Mathematics*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2011.
- [6] CHEN, Evan. *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*. New York: MAA PRESS, 2016.
- [7] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, J. N. *Geometria Plana*. São Paulo: Atual Editora, 2013. v. 9. (Coleção Fundamentos de Matemática Elementar).
- [8] EUCLIDES. *Os Elementos*. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- [9] HEATH, T. L. *The works of Archimedes*. New York: Dover Publications, 1953.
- [10] LANG, Serge; MURROW, Gene. *Geometry: A High School Course*. New York: Springer - Verlag, 1983.
- [11] LIMA, Elon Lages. *Análise Real: funções de uma variável*. 11 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011. v. 1.

-
- [12] MUNIZ NETO, A. C. *Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. v. 2. (Coleção do Professor de Matemática).
- [13] OSTERMANN, A.; WANNER, Gerhard. *Geometry by Its History*. New York: Springer, 2012. (Undergraduate Texts in Mathematics).
- [14] POGORELOV, A. V. *Geometría Elemental*. Tradução de Carlos Vega. Moscou: Editora Mir, 1974.