Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

Dalton Francisco Carvalho Sousa

Resolução de Problemas de Otimização e Combinatória Utilizando o Método de George Pólya

Teresina - 2022

PROFMAT

Dalton Francisco Carvalho Sousa

Dissertação de Mestrado:

Resolução de Problemas de Otimização e Combinatória Utilizando o Método de George Pólya

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - Profmat, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática na modalidade profissional.

Orientador:
Prof. Dr. Ítalo Dowell Lira Melo.
Coorientador:
Prof. Dr. João Carlos de Oliveira Souza.

Teresina - 2022

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas da UFPI – SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

S725r Sousa, Dalton Francisco Carvalho.
Resolução de problemas de otimização e combinatória utilizando o Método de George Pólya/ Dalton Francisco Carvalgo Sousa. – 2022.
75 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT, Teresina, 2022.
"Orientador: Prof. Dr. Ítalo Dowell Lira Melo".
Coorientador: Prof. Dr. João Carlos Oliveira Souza.

1. Otimização. 2. Método George Pólya. 3. Resolução de Problemas. I. Melo, Ítalo Dowell Lira. II.Título.

CDD 519.3

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes. CRB/3-1461

Dalton Francisco Carvalho Sousa

Resolução de Problemas de Otimização e Combinatória Utilizando o Método de George Pólya

Dissertação submetida à banca examinadora abaixo discriminada em defesa pública e aprovada em 10/02/2022.

BANCA EXAMINADORA

Ítalo Dowell Lira Melo

Ítalo Dowell Lira Melo (Orientador)

Universidade Federal do Piauí

João Carlos de Oliveira S

João Carlos de Oliveira Souza (Coorientador)

Universidade Federal do Piauí

Kelton Silva Bezerra

Kelton Silva Bezerra

Universidade Federal do Piauí

Afonso Norberto da Silva

Afonso Norberto da Silva

Universidade Estadual do Piauí

Teresina - 2022

Dedico esse trabalho à minha mãe Ivanildes da S. C. Sousa, ao meu pai Pedro Sousa e a meu irmão Dino Rafael C. Sousa (in memorian), com muito amor e saudade.

Agradecimentos

Agradeço, a Deus, por tornar possível a vida e os meus sonhos.

A minha esposa *Alba Simone A. C. Sousa* e a minha querida e amada filha *Ana Beatriz Alves Sousa* que juntas foram meu alicerce, a minha força motivadora.

Aos meus irmãos *Daniel Igor C. Sousa* e *Duzek Danilo C. Sousa* pelo incentivo e apoio.

Aos meus amigos e familiares, que sempre estiveram ao meu lado, pela amizade incondicional e pelo apoio demonstrado ao longo de todo o período de tempo em que estivemos juntos.

Ao meu amigo e Professor Dr. *Ítalo Dowell*, por ter sido meu orientador e ter desempenhado tal função com dedicação e amizade.

Ao meu amigo *Daniel Cavalcante* (in memorian), que nos alegrou durante todo esse período.

Ao meu amigo e Pastor *Luis Nunes* (in memorian), que com suas palavras fortaleceu a minha fé.

Enfim, agradeço a todos que participaram dessa jornada.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

"*Tudo posso naquele que me fortalece*".

Filipenses 4:13.

Resumo

Este trabalho consiste em uma pesquisa qualitativa de revisão bibliográfica que teve como objetivo demonstrar as contribuições do método de George Pólya para o ensino de matemática com a metodologia da resolução de problemas. Para isso, fizemos uma pequena reflexão a respeito do ensino através da resolução de problemas e aplicamos o método de George Pólya na resolução de problemas de otimização e de contagem.

Palavras-chave: Resolução de Problemas, Método de George Pólya, Otimização, Contagem.

Abstract

This work consists of qualitative research of bibliographical revision that had as objective to demonstrate the contributions of George Pólya's method for the teaching of mathematics with the methodology of the resolution of problems. For this, we made a small reflection about teaching through problem-solving and applied George Pólya's method in solving optimization and counting problems.

Key words: Problem Solving, George Pólya's Method, Optimization, Counting.

Sumário

Introdução

A matemática é considerada por muitos estudantes uma das matérias mais difíceis. Muitos alunos, quando se deparam com um problema de matemática, se veem diante de um grande desafio. Pensam que nunca irão conseguir e que só pessoas com habilidade inata são capazes de resolver. Convencer um aluno de que ele tem capacidade, e que isso não é privilégio, é um desafio para o professor. Desmistificar essa ideia não é tão fácil. Não basta só dizer que todos podem e que isso não é coisa só pra gênio, é preciso convencê-lo.

Quando pesquisamos o ensino de matemática, notamos que há muitos recursos que os professores podem usar para tornar o ensino e a aprendizagem mais interessante, dinâmica e significativa. São recursos que trazem mais lucidez para o aluno, que melhoram a sua compreensão e enriquecem a aula. Também notamos que há várias metodologias que podem tornar o caminho até o objeto estudado mais prazeroso. Um caminho em que o aluno de fato se apropria do conhecimento.

No entanto, o que se observa na prática do ensino da matemática é que a aula de matemática ainda tem como recursos principais ou mais utilizados o quadro, o giz(ou pincel) e o livro. Isso nos remete a um ensino mais tradicional porém, com uma diferença, hoje há muito mais diálogo, dinâmica e interação entre aluno e professor.

É no quadro, através de uma aula dialogada e interativa, que muitos estudantes despertam o interesse pela matemática. Ao observar com atenção a resolução de um problema, ficam admirados com a tamanha habilidade que o professor tem de fazer com que algo que parecia impossível pareça fácil e elementar. Mas essa prática, geralmente, só tem alcançado poucos alunos. A matemática deve alcançar também aqueles que têm dificuldade em compreendê-la. Muitos alunos desistem de aprender matemática quando não conseguem entender um processo de resolução. Se prendem mais as operações básicas ou aos algoritmos do que ao raciocínio lógico usado na solução, ou melhor, a forma como se procedeu na busca da solução. Pólya passou por isso, e se perguntava como ele mesmo poderia fazer aquilo.

Pólya pensou em uma heurística, feita através de indagações e respostas, que contribui significativamente para a aprendizagem através da resolução de problemas. Nesse método, Pólya divide o processo de resolução de problemas em quatro etapas, a saber:

compreensão, planejamento, execução e verificação. O objetivo desta dissertação é mostrar as potencialidades desse método para melhorar o diálogo com o aluno na resolução de problemas, mostrar como podemos usá-lo para resolver e explorar um problema de matemática e, dessa forma, contribuir para a melhoria do ensino de matemática.

Embora os desafios sejam ainda cada vez maiores, o professor não pode se deter. Segundo os PCNs em [22], "conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática". A resolução de problemas é uma alternativa de metodologias que privilegia os estudantes, tornando-os protagonistas do processo de ensino e aprendizagem, fazendo com que eles saltem da posição de meros espectadores e passem a ser os atores principais desse processo.

Capítulo 1

A Resolução de Problemas

Os problemas fazem parte da história da humanidade. Os diversos problemas e situações que desafiaram a inteligência humana contribuíram e ainda contribuem para a sua evolução. Quando se trata de problemas de matemática, um dos mais antigos registros encontram-se em um documento egípcio chamado Papiro de Rhind ou Ahmes, que contém mais de oitenta problemas de geometria e aritmética acompanhados de soluções, veja em [15]. Segundo Stanic e Kilpatrick em [32], a resolução de problemas assumia uma visão limitada para a aprendizagem da matemática.

No contexto educacional, a resolução de problemas como recurso e meio para o ensino-aprendizagem de matemática só teve início, de forma mais efetiva, na década de 1980 com o NTCM (National Council of Teachers of Mathematics), que chamou interessados para, num esforço conjunto, encontrarem uma melhor educação para o ensino de matemática, veja [19]. Segundo Dante em [6],

> Desde 1980, os educadores matemáticos têm estudado a formulação de problemas devido à sua grande importância na aprendizagem e no ensino da matemática. Quando se trata do ensino fundamental, alguns especialistas chegam a considerar a formulação e a resolução de problemas como a principal razão de se aprender e ensinar matemática, porque é por meio dela que se inicia o aluno no modo de pensar matemático e nas aplicações dessa disciplina no nível elementar.

No entanto, de acordo com a pesquisadora Onuchic em [19], o ensino de resolução de problemas começou a ser investigado de forma mais sistemática sob a influência de Pólya já na década de 1960, com trabalhos que datam de 1944.

No Brasil, segundo Onuchic em [11], os Standards do NCTM serviram de apoio para a criação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), que passaram a indicar e discutir caminhos para se fazer matemática a partir da resolução de problemas. Nos PCNs, veja [23], temos uma seção voltada só para resolução de problemas, que enfatiza, resumidamente, alguns princípios que descrevemos abaixo:

- o ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
- o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
- o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas. Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações;
- a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode aprender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

Note acima que a resolução de problemas é vista como um recurso metodológico que pode ser usado não só para aprender matemática mas, também, para fazer matemática.

No documento mais recente que normatiza o currículo nacional, a BNCC, os processos de resolução de problemas são concebidos como formas privilegiadas de atividade matemática, que têm potencial para desenvolver competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e o pensamento computacional. É fácil ver a importância dada à resolução de problemas nas várias habilidades discriminadas ao longo do documento, mostrando que esse recurso metodológico é necessário para o desenvolvimento das competências que se almeja alcançar.

Outra importância dada à resolução de problemas é porque ela é considerada uma metodologia ativa. Sua relevância está no fato de poder propor para o aluno uma participação mais ativa no processo de ensino e aprendizagem, que lhe permite desenvolver competências para enfrentar situações-problemas e resolvê-las de forma inteligente. Essa metodologia aproxima o aluno do objeto de conhecimento de uma forma mais efetiva, contribuindo assim para que ele se aproprie do conhecimento. Dante, em [6], afirma que ensinar apenas conceitos, habilidades, procedimentos e atitudes não são suficientes, tendo em vista que mais tarde poderão se tornar obsoletos para os alunos no auge de suas vidas. Desta forma segundo Dante,

> Um caminho bastante razoável é preparar o aluno para lidar com situações novas, quaisquer que sejam elas. E, para isso, é fundamental desenvolver nele iniciativa, espírito explorador, criatividade e independência por meio da formulação e da resolução de problemas.

Segundo Matthews em [13], a aprendizagem ativa pode ser classificada como um conjunto de práticas pedagógicas centradas no aluno, fazendo com que ele aprenda os conhecimentos propostos por meio de sua interação entre ele e os outros estudantes, sem deixar de lado o pensamento crítico. Nesse sentido a autonomia intelectual dos estudantes será desenvolvida por atividades previamente planejadas. O professor vai trabalhar como um facilitador, mais precisamente como um mediador, propondo novos desafios, conduzindo de forma ativa o processo. Segundo Luckesi em [12],

> A aprendizagem ativa é aquela construída pelo educando a partir da assimilação ativa dos conteúdos socioculturais. Isso significa que o educando assimila esses conteúdos, tornando-os seus, por meio da atividade de internalização de experiências vividas.

Mas, para trabalhar com a resolução de problemas, é preciso saber o que é um problema. Para Onuchic e Allevato, veja [20], problema "é tudo aquilo que não conseguimos fazer, mas que temos o interesse em fazer". Muitos professores confundem problemas com exercícios, fazendo com que o aluno recorra a algoritmos e procedimentos padrões para resolvê-los. Esses métodos não contribuem para uma aprendizagem significativa, pois exigem mais memória do aluno que a capacidade de raciocínio e ação reflexiva diante de situações-problema. Desperdiçamos, assim, uma grande oportunidade, como destaca Pólya em [27],

> Um professor de matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo.

Além do conceito de problema, que é importante para distingui-lo de exercício, há também, segundo Schroeder & Lester em [30], três modos de concebermos a resolução de problemas para se ensinar matemática: ensinar a resolver problemas, ensinar através da resolução de problemas e ensinar sobre resolução de problemas. O professor que ensina a resolver problema tem como proposta principal que o aluno desenvolva a capacidade de aplicar a matemática em diversas situações-problemas. Nessa concepção parte-se de definições, exemplos e conceitos para se chegar ao fim que se almeja que é a sua aplicação. Ao se ensinar matemática através da resolução de problemas, o professor parte de um problema gerador, que é aquele capaz de conduzir através do processo de resolução à construção do conteúdo planejado. Segundo Onuchic em [19], essa forma de abordar a Resolução de Problemas é uma das mais consistentes com o que recomenda o NTCM e os PCNs. E a última forma de abordagem, é aquela que ressalta o método de Polya, que é o modelo abordado nesta pesquisa. Segundo Onuchic em [19], embora haja essas distinções, elas se superpõem de maneiras e em sequências diferentes.

Como podemos ver, a metodologia da resolução de problemas proporciona para o aluno um leque de estratégias, processos e formas que possibilita sua ampla aplicação em diversas situações-problemas. Segundo Huete e Bravo em [29], o objetivo da resolução de problema é facilitar o conhecimento das habilidades básicas, os conceitos fundamentais e desenvolver habilidades para resolver uma variedade de problemas. Ainda segundo os autores a resolução de problemas deveria ser usada para introduzir novos conteúdos. No entanto, é preciso ressaltar, concordando com Diniz em [7], que para trabalhar com a resolução de problema é necessário que o professor tenha paciência, já que requer tempo, pois cabe a ele orientar o aluno sem atropelar seu processo de criação. Para tanto, é necessário sacrificar a quantidade em prol da qualidade de ensino.

1.1 A prática docente

A prática e o exercício da resolução de problemas contribui para o desenvolvimento de habilidades e técnicas que podem ser usados em situações futuras. No entanto, sua prática não deve ser feita de forma desorganizada. Para que haja um bom desenvolvimento, o professor deve estar ciente de que este não é um processo simples, pois requer bom planejamento e acompanhamento adequado para que os objetivos sejam alcançados. Este processo considera vários fatores, dentre eles podemos enfatizar o conhecimento da turma, pois ao encaminhar um problema este deve ter significado para o aluno, servindo assim de incentivo para uma participação mais efetiva. Além disso, devemos propiciar meios e recursos para o seu bom desenvolvimento. Segundo Micotti em [16],

> Cabe ao professor organizar situações problemáticas (com sentido, isto é, que tenha significado para os estudantes) e escolher materiais que sirvam de apoio para o trabalho que eles realizaram nas aulas. Atividades que propiciem a sua manifestação sobre os dados disponíveis e possíveis soluções para os problemas que desencadeiam suas atividades intelectuais. Nas situações voltadas para a construção do saber matemático, o aluno é solicitado a pensar - fazer inferência sobre o que observa, a formular hipóteses – não necessariamente a encontrar uma resposta correta. A efetiva participação dos alunos neste processo depende dos significados das situações propostas, dos vínculos entre elas e os conceitos que já dominam.

O ambiente também é importante. Ao trabalhar com a resolução de problemas, como metodologia em sala de aula, o professor deve criar um ambiente que inspire ao aluno resolver situações problemas e ao propô-lo, deve estimular a autoestima dos seus alunos e explicitar suas expectativas agindo como observador durante todo o processo de resolução. Além disso, é importante saber que quando o professor decide por essa metodologia, esteja ciente que deverá propor problemas que seus alunos sejam capazes de resolver. Propor situações impossíveis para os alunos resolverem não terá eficácia alguma no processo de ensino e aprendizagem e poderá ter até um efeito contrário, fazendo com que o estudante saia desmotivado ao fim desse processo. Segundo Micotti em [16], fundamentar o ensino na atividade intelectual do aprendiz significa entre outras coisas, respeitar suas possibilidades de raciocínio e organizar situações que propiciem o aperfeiçoamento desse raciocínio.

Outro ponto bastante importante é a solução do aluno. Cabe ao professor aproveitar as soluções dos seus alunos conduzindo sempre a uma discussão que os envolva e os leve a justificar e a avaliar seus resultados e métodos, finalizando com a formalização de novos conceitos e novos conteúdos construídos. Além disso, é também a oportunidade para aproveitar o erro e utilizá-lo como estratégia didática, aumentando assim possibilidades para propostas de ensino mais eficazes. Pinto em [25] afirma que

> [...] o erro, concebido numa dimensão construtivista, configura-se como uma oportunidade didática para o professor. Em primeiro lugar, por ser um guia para um planejamento de ensino mais eficaz, oferecendo indícios importantes para a identificação dos processos subjacentes à construção conceitual - condição relevante na organização do ensino. Em segundo lugar, porque, se observado com maior rigor, poderá oferecer novos elementos para o professor refletir sobre suas ações didáticas e, com isso, imprimir novos direcionamentos a suas práticas pedagógicas.

Dessa maneira ao pensar nesse processo é fundamental ao professor conhecer seus alunos para que ele possa refletir qual tipo de problema ele irá propor e qual o nível de aprendizado eles podem alcançar quando o processo for concluído. De acordo com os PCNs, veja [22], ao refletir sobre o ensino de matemática é importante ao professor:

- identificar as principais características dessa ciência, de seus métodos, de suas ramificações e aplicações;
- conhecer a história de vida dos alunos, sua vivência de aprendizagens fundamentais, seus conhecimentos informais sobre um dado assunto, suas condições sociológicas, psicológicas e culturais;
- ter clareza de suas próprias concepções sobre a Matemática, uma vez que a prática em sala de aula, as escolhas pedagógicas, a definição de objetivos e conteúdos de ensino e as formas de avaliação estão intimamente ligadas a essas concepções.

1.1.1 Elaboração de problemas matemáticos

Uma tarefa importante do professor de matemática consiste na elaboração de problemas que mais se adequem ao processo de ensino aprendizagem onde estão inseridos seus alunos, podendo ser esses problemas grandes alavancadores desse processo fazendo com que os estudantes alcancem grandes resultados ao fim dele. Por isso, torna-se necessário avaliar se o enunciado dos problemas elaborados estão bem escritos, bem explicados, para que assim, mesmo distante, o aluno entenda o problema. De acordo com Morais em [17],

> Ao escrever, você organiza suas ideias em um texto e espera serem entendidas por quem o leia. Há nessa atividade, no mínimo, duas pessoas: você e um leitor. Por isso nunca esqueça de seus leitores, do que na medida do possível, você pode fazer para tornar as coisas mais simples e inteligíveis para eles. Muitos acusam a Matemática de ser complicada e difícil. Cuidado para não a tornar mais inacessível para quem tem essa opinião. Seus leitores podem ter mais ou menos conhecimento do que você sobre aquilo que escreveu; geralmente em qualquer desses casos, você não estará por perto para esclarecer-lhes alguma passagem mal escrita ou mal explicada.

De acordo Dante em [6] a observação dos parâmetros abaixo permite que o elaborador contorne alguns fatores que dificultam um problema, tornando-os mais adequados ou mais passíveis de serem resolvidos pelos alunos de uma determinada faixa etária.

- A linguagem utilizada na redação dos problemas;
- O tamanho e estrutura das frases;
- Os termos específicos do vocabulário matemático devem ser usados, porém apenas aqueles mais comuns para os leitores;
- O tamanho e a complexidade dos dados, procurar destacar apenas os que serão usados na resolução do problema;
- Procurar apresentar um problema de uma forma motivacional;
- Evitar o excesso de dados inúteis à resolução para não prejudicar a heurística do problema.
- Procurar limitar condições e estratégias de complexidade para a resolução dos problemas, procurar estabelecer uma escala de complexidade para facilitar o processo de resolução do mesmo.

A elaboração dos problemas de matemática seguindo esses parâmetros devem acontecer de forma gradativa para que aos poucos e com as devidas intervenções os alunos conheçam as características de um problema matemático.

Nesse mesmo sentido para se trabalhar com essa metodologia pode se optar por dois caminhos igualmente desafiadores. O primeiro trata-se da reformulação de um problema já existente, recomendado para aqueles que ainda não possuem experiência com esse tipo de metodologia, onde o professor poderá navegar por diversas possibilidades como reescrever enunciados, alterar objetivos e até criar um problema semelhante. De acordo com Smole e Diniz em [7],

> Cabe aqui deixar claro para o professor que ele deve organizar seu trabalho para que o aluno mostre em sua produção em que o problema formulado é parecido com o problema dado, pois observamos a aparição de diferentes interpretações de ser parecido: é parecido na história (personagens, cenários), na operação que se utiliza para resolvê-lo (estrutura matemática), na pergunta que é dada, nas ações desenvolvidas, etc. Muitas vezes, o professor propõe tal atividade querendo que o aluno faça um problema parecido no sentido que ele, professor, acha que deve ser parecido; contudo, nem sempre os alunos tem essa concepção, o que cria um impasse para ambos. Uma conversa, em geral, esclarece essas interpretações e da margens para ótimas discussões em sala, podendo acontecer antes ou depois da proposta lançada, dependendo do objetivo que o professor estabeleceu para a atividade.

Outro ponto que o professor pode explorar é o saber fazer. Formular seus próprios problemas, porém, não é tarefa fácil como se possa parecer. É preciso ter uma formação específica para executá-la e também o aluno pode ser convidado para fazer junto com o professor e, mesmo que indiretamente, contribuir para ajudar em tal tarefa. Segundo os PCNs, veja [3],

> aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático.

Em uma pesquisa feita sobre resolução de problemas, Mandarino em [14] mostrou que muitos professores tinham o hábito de pegar problemas prontos ao invés de criá-los. Nota-se, então que muitos profissionais ainda estão presos à metodologia que se utiliza apenas do livro didático como referência, deixando de lado muitas teorias e práticas que poderiam contribuir significativamente para a melhoria da sua prática docente.

Capítulo 2

O Método de George Pólya

2.1 Conhecendo o Professor George Pólya

Segundo [10], George Pólya nasceu em Budapeste, Hungria, no dia 13 de dezembro de 1887 e faleceu em Palo Alto, Estados Unidos da América. Destacou-se no ensino secundário, mesmo discordando dos métodos de aprendizagem praticados pela escola que estudava. Inspirado por seu pai, iniciou seu estudo de Direito em 1905, na Universidade de Budapeste, mas insatisfeito decidiu mudar de área, interessando-se, então por literatura, latim, física, filosofia e finalmente matemática, onde concluiu seu doutorado em 1912.

No ano de 1913, em Göttingen, publicou a solução do problema do passeio aleatório, e conheceu David Hilbert. Ainda neste mesmo ano, foi para Paris, onde deu inicio ao seu trabalho de pós-doutorado. No ano seguinte, 1914, assumiu um cargo no Instituto Federal de Tecnologia Suíço, em Zurique, onde conheceu Adolf Hurwitz. O medo de ser preso por não prestar serviço militar, fez com que voltasse para Hungria depois do fim da Segunda Guerra Mundial.

Em 1924, publicou a classificação dos planos de simetria em dezessete grupos. Publicou em 1925 em trabalho conjunto com Szegö: "Aufgaben und lehrsätze aus der Analysis" e "Die grundlehren der mathematischen wissenschaften". Em 1942 tornou-se professor na Universidade de Stanford, onde ficou até 1953. E, em 1945, publicou um dos seus livros mais famosos: "How to Solve it". Segundo Pereira em [24],

> Pólya foi o primeiro matemático a apresentar uma heurística de resolução de problemas específica para a matemática. Por isso, Pólya representa uma referência no assunto, uma vez que suas ideias representam uma grande inovação em relação às ideias de resolução de problemas existentes até então (vide Descartes, Wallas, Skinner). Muitas de suas ideias são razoáveis até os dias atuais, servindo de alicerce para trabalhos de outros pesquisadores contemporâneos a Pólya na área.

Segundo Balieiro em [2], Pólya determinou uma linha divisória nas pesquisas sobre os procedimentos heurísticos envolvidos na resolução de problemas, influenciando o surgimento de um novo campo de pesquisa em Educação Matemática. Assim, as discussões sobre alguns aspectos dessa atividade heurística proposta pelo pesquisador, bem como de outras investigações derivadas da mesma, se fazem necessárias para alicerçar o que foi proposto para este estudo.

Pólya, com seus trabalhos e pesquisas acadêmicas, se destacou em diversas áreas da matemática, mas, para o ensino de matemática, o mais notável foi sobre resolução de problemas, onde se tornou referência no assunto com seu livro **How to Solve It** traduzido para o português como **A Arte de Resolver Problemas**, publicado em 1945. Nessa obra, Pólya trabalha com pequenas indagações e sugestões úteis para aqueles que desejam resolver qualquer tipo de problema, em especial os problemas de matemática. Assim, para alcançar esse objetivo, o professor deve auxiliar seus alunos de forma adequada, o que segundo Pólya não é tarefa fácil, já que exige tempo, prática e dedicação. Ainda sobre isso, Pólya em [27] enfatiza que:

> Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho. (...) O melhor é, porém, ajudar o estudante com naturalidade.

Para a tarefa de auxiliador de situações-problemas, Pólya desenvolveu um método que se divide em quatro etapas. Em cada uma dessas etapas, Pólya sugere algumas indagações que são pertinentes para uma boa análise do problema proposto, de tal forma que o aluno consiga chegar à solução. Com o uso frequente desse método, o aluno poderá desenvolver técnicas, métodos e estratégias para solucionar futuros problemas sem o auxílio de um professor ou mediador, ou seja, apenas seguindo as etapas de resolução de problemas.

2.2 O método de George Pólya

O método de George Pólya não é apenas uma ferramenta que serve para resolver problemas, mas sim uma forma inteligente e metódica de proceder na resolução de um problema. As etapas sugeridas por Pólya valorizam mais o processo da resolução do que o resultado em si. Dessa forma, espera-se que, com o uso constante desse método, o aluno possa desenvolver: capacidade de ler e interpretar um problema, de desenvolver estratégias de resolução, o pensamento crítico e outas habilidades.

2.2.1 Compreensão do problema

A primeira fase do problema é fundamental para quem deseja solucioná-lo, pois um problema não pode ser resolvido se não for compreendido. Para isso, deve-se ler o problema quantas vezes for necessário para melhor interpretá-lo, buscando identificar os dados e estabelecendo relações entre eles. Esboçar um gráfico ou um esquema ajuda muito na solução e analise do problema, além de dizer o quanto o problema foi compreendido, possibilita a fixação de estratégias para resolver problemas semelhantes.

Nem todos os problemas despertam o interesse dos alunos, e isso se deve a alguns fatores como: falta de compreensão, por ser o problema muito difícil, ou pelo fato do problema não oferecer nenhum desafio, como enfatiza o autor em [27],

> É uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja. (...) o aluno precisa compreender o problema, mas não só isso: deve também desejar resolvê-lo. (...) O problema deve ser bem escolhido, nem muito difícil nem muito fácil, natural e interessante.

Para a primeira fase do problema, Pólya sugere algumas perguntas que são pertinentes para melhor compreendê-lo. Veja em [27], algumas indagações possíveis são: "Qual é a incógnita do problema? Quais são os dados encontrados? Qual é a condicionante? É possível satisfazer a condição? A condição é suficiente para resolver o problema? Ou não? Ou excessiva? Ou contraditória? Preciso desenhar uma figura? É possível defini-las de outro modo?" Através desses questionamentos pode-se chegar a melhor compreensão dos problemas.

Note que embora sejam perguntas de respostas elementares ou triviais, uma vez que estão explícitas no enunciado, elas são pertinentes e têm sua relevância, pois o aluno ao fazer tais perguntas retorna ao enunciado do problema analisando-o e interpretando-o com mais atenção, notando e percebendo informações e dados que não foram compreendidos inicialmente. É claro que aquele que deseja de fato resolver um problema, se não compreendeu numa primeira leitura, vai retornar para o enunciado várias vezes quanto for necessário para compreendê-lo, mas se ele reler o enunciado buscando responder a tais indagações sua compreensão será melhor e o desenvolvimento da solução terá um bom andamento.

2.2.2 Planejamento

A segunda fase da resolução de um problema trata do desenvolvimento de uma estratégia ou plano de solução. Segundo Pólya em [28], "temos um plano quando conhecemos, pelo menos de modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita". De acordo com o autor, desenvolver um plano é muito importante para a resolução de um problema. Nesta fase, o aluno irá aplicar conceitos e estratégias que foram consolidados, ancorando, assim, novos saberes a estes. O papel do professor também é importante, mas a sua participação deve ser discreta, pois o deslumbramento do aluno com a sua própria descoberta contribui de forma significativa para o seu maior engajamento no aprendizado. Segundo Pólya em [27],

> Realmente, o principal feito na resolução de um problema é a concepção da ideia de um plano. Esta ideia pode surgir gradualmente ou, então, após tentativas infrutíferas e um período de hesitação, aparecer repentinamente, num lampejo, como uma "ideia brilhante". A melhor coisa que pode um professor fazer por seu aluno é propiciar-lhe, discretamente, uma ideia luminosa.

Pólya, ver em [27], sugere algumas indagações para esta fase da resolução do problema, como por exemplo: "É possível encontrar problemas auxiliares se não puder resolver de modo imediato? É preciso criar um plano para resolver o problema? Já viu esse problema antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado de modo diferente? Conhece um problema parecido? Ou um que seja importante aqui? Ou uma propriedade? Olhando para a incógnita, consegue pensar em um problema já solucionado que a possua? É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar a sua resolução?".

Propor para o aluno problemas semelhantes ou correlatos contribui para a fixação de conceitos e estratégias de solução, mas quanto mais diversificados estes problemas, melhor, pois assim o aluno poderá desenvolver independência para aprender matemática de forma mais autônoma.

É interessante apresentar para os alunos estratégias de resolução de problemas, e mostrar que não existe só uma, e que cada problema exige uma estratégia específica. Aqui indicamos algumas elencadas em [6],

- Tentativa e erro organizados
- Procurar padrões ou regularidades para generalizar
- Resolver um problema mais simples
- Reduzir à unidade
- Fazer o caminho inverso

2.2.3 Execução do plano

Depois de compreender e elaborar um plano para o problema, o que se tem a fazer é executar o plano. Nesta fase o que se exige do aluno é paciência e atenção, pois aqui teremos principalmente a aplicação de algoritmos e operações da matemática. Neste caso, sugere-se para o aluno que demonstre o resultado encontrado, observando cada passo.

Mesmo após conceber o plano, o que não é uma tarefa fácil, o estudante deve colocá-lo em prática, sendo que o fator mais importante para isso é, segundo Pólya, a paciência. Ainda seguindo a lista de indagações, veja em [27], para a terceira fase temos: "Ao executar o plano, conseguimos verificar cada passo? É possível verificar claramente que cada passo está correto? Mas podemos também demonstrar que o passo está correto?" O trabalho do professor nesta etapa será menor, pois com o plano em mãos o estudante possui um roteiro a ser seguido, e assim, a maior dificuldade que possivelmente apareça é que o estudante esqueça seu plano. De acordo com Pólya, ver em [27],

> Se o aluno houver realmente concebido um plano, o professor então terá um período de relativa tranquilidade. O maior risco é o de que o estudante esqueça o seu plano, o que pode facilmente ocorrer se ele recebeu o plano de fora e o aceitou por influência do professor. Mas se ele próprio houver preparado o plano, mesmo com alguma ajuda, e concebido com satisfação a ideia final, não perderá facilmente essa ideia. De qualquer maneira, o professor deve insistir para que o aluno verifique cada passo.

2.2.4 Retrospecto ou Verificação

Nesta fase, o aluno ou professor irá examinar a solução encontrada, o argumento usado e verificará se é possível utilizar o resultado, ou o método, em outro problema. Note que após a solução o mesmo problema pode ainda ser explorado dando ao aluno uma dimensão maior de sua aplicabilidade.

Muitos professores e alunos ao conferir o resultado em gabaritos dão por finalizado o problema e partem para outro, perdendo assim a possibilidade de conhecer novos conceitos, que estão relacionados aos do problema em questão. Essa é uma oportunidade para o professor fazer uso das demonstrações, pois elas são importantes para o fazer matemática, e para a consolidação de conceitos matemáticos, como afirma Pólya em [27]:

> Se fizerem um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas.

De acordo com Pólya em [27], um "bom professor precisa compreender e transmitir a seus alunos o conceito de que problema algum fica completamente esgotado". Isto é, um problema matemático não se encerra ao ser resolvido, sempre há algo a ser explorado, como, por exemplo, resolvê-lo de outra maneira. Nesta fase Pólya, também sugere algumas perguntas que são: "É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível percebê-lo num relance? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?".

Segundo Pólya, há problemas que têm pouca relação uns com os outros, e um dos deveres do professor é não dar aos seus alunos essa impressão, pois dessa forma surge a oportunidade de investigação, que deve ser encorajada pelo professor, assim, os "estudantes acharão realmente interessante a reflexão se eles tiverem feito um esforço honesto e ficarem conscientes de terem resolvido bem o problema", veja [27].

Capítulo 3

Conceitos Básicos

A Análise Combinatória, de acordo com Morgado em [18], "é a parte da matemática que analisa estruturas e relações discretas". Tem como objetivo desenvolver métodos e técnicas de contagem que permitem contar o número de elementos de um conjunto *agrupados sob certas condições.* Muitos problemas de contagem podem ser resolvidos apenas enumerando os elementos, mas problemas em que há uma grande quantidade de elementos, essa tarefa se torna difícil e passiva de erro, tornando-se quase que impossível sem métodos e técnicas adequados.

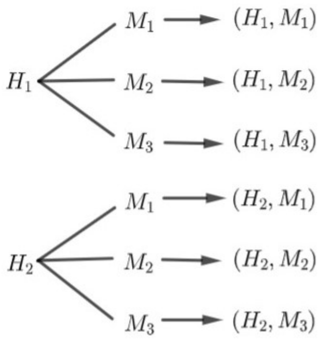
3.1 Princípio fundamental da contagem

O princípio fundamental da contagem diz que se há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é xy.

Exemplo 1. Com 2 homens e 3 mulheres, de quantas maneiras podemos formar um casal formado por um homem e uma mulher?

Solução 1: Uma maneira de resolver é através de desenhos de diagramas conhecido também como *árvore das possibilidades.*

Figura 3.1: Árvore das possibilidades



Fonte: Autor

Solução 2: Formar um casal em que há um homem e uma mulher equivale a tomar as decisões:

D_1: Escolher um homem (2 modos)

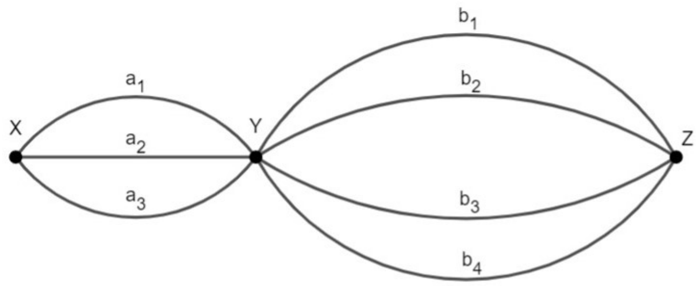
D_2: Escolher uma mulher (3 modos)

Pelo Princípio fundamental da contagem, há $2 \cdot 3 = 6$ modos de formar um casal.

Exemplo 2. Temos três cidades X, Y e Z. Existem três rodovias que ligam X com Y e quatro que ligam Y a Z. Partindo de X e passando por Y, de quantas formas podemos chegar até Z?

Solução: Dispondo de um esquema, temos

Figura 3.2: Esquema das rodovias



Fonte:Autor

Sair de X para chegar até Z passando Y equivale a tomar as decisões:

D_1: Escolher uma rodovia que liga X com Y (3 modos)

D_2: Escolher a rodovia que liga Y com Z (4 modos)

Pelo princípio fundamental da contagem temos $3 \cdot 4 = 12$ formas de chegar até Z passando por Y.

Exemplo 3. Quantos são os números de três dígitos distintos?

Solução: O primeiro dígito pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual a

0. O segundo dígito pode ser escolhido de 9 modos, pois tem que ser distinto do primeiro dígito e neste caso o zero pode entrar como opção. O terceiro dígito pode ser escolhido de 8 modos, pois tem que ser distinto do primeiro e segundo dígito. Portanto, a resposta é $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ números.

Uma estratégia inteligente para resolver os problemas de combinatória são os *Métodos de Morgado*, veja [18]:

1. **Postura:** Se colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devem ser tomadas. No exemplo 1, nos colocamos no lugar da pessoa que deveria formar o casal. No exemplo 2, nos colocamos no lugar da pessoa que deveria fazer a viagem da cidade X até a cidade Z passando pela cidade Y. No exemplo 3, nos colocamos no lugar da pessoa que deveria escrever o número de três dígitos distintos.

2. **Divisão:** Sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples. Formar um casal foi dividido em escolher um homem e escolher uma mulher; viajar da cidade X até a cidade Z, foi dividido em escolher uma rodovia que liga a cidade X com a cidade Y, e escolher uma rodovia que liga a cidade Y com a cidade Z; formar um número de três dígitos foi dividido em escolher cada um dos três dígitos.

   Algumas observações em relação a tomada de decisão são relevantes. Note que as decisões tomadas acima são simples e bem definidas, caso contrário, podemos estar gerando um problema no futuro. No exemplo 1, uma primeira decisão poderia ser escolher uma pessoa (5 modos). Escolhida a pessoa, a segunda decisão seria escolher uma pessoa do gênero oposto. Veja que agora temos um novo problema: de quantos modos podemos escolher a pessoa do gênero oposto? "Depende". Se na primeira decisão foi escolhida uma pessoa do gênero masculino, a resposta é 3 modos, caso contrário, serão 2 modos. No exemplo 3, se começamos a escolha pelo último dígito, há 10 modos. Em seguida, há 9 modos de escolher o penúltimo dígito, pois este tem que ser distinto do dígito já usado. E para o primeiro dígito temos um problema, pois não sabemos de quantos modos podemos escolhê-lo. De fato, se tivermos escolhido o zero, teremos 8 modos de escolher o primeiro dígito, pois este tem que ser distinto e diferente de zero; se não tivermos escolhido o zero, haverá apenas 7 modos de escolher o primeiro dígito, pois além de ser distinto dos algarismos que já foram escolhidos, também deve ser diferente de zero.

   Por isso, uma importante estratégia para resolver problemas de combinatória é:

3. **Não adiar dificuldades:** Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar. No exemplo 3, a

escolha do primeiro dígito é a mais restrita. Como podemos ver tomar uma decisão errada ou adiar dificuldades pode causar problemas e, portanto, devem ser evitadas.

Vejamos agora algumas formas de agrupamento que são consequências do princípio fundamental da contagem.

3.2 Permutações simples

De quantos modos podemos ordenar n objetos distintos?

Tomando, por exemplo, os objetos a, b e c, temos: (a, b, c), (a,c,b),(b,a,c), (b,c,a), (c,a,b) e (c,b,a), isto é, 6 modos. Generalizando, temos n modos de escolher o objeto que ocupará o primeiro lugar, $n-1$ modos de escolher o objeto que ocupará o segundo lugar,...,1 modo de escolher aquele que ocupará o último lugar. Portanto, pelo princípio da contagem, temos

$$n(n-1)(n-2)...1 = n!$$

modos de ordenar. Cada ordenação dos n objetos é chamada de *permutação simples* de n objetos e o número de permutações simples de n objetos distintos é representado por P_n. Assim, $P_n = n!$.

Exemplo 1: Quantos são os anagramas da palavra "BEATRIZ"? Quantas começam por vogal?

Solução: Cada anagrama é uma ordenação das 6 letras, logo o número de anagramas é $P_6 = 6! = 720$.

Para formar um anagrama que começa por vogal, devemos primeiro escolher uma das vogais A, E e I, isto é, 3 modos. Escolhida a vogal, devemos ordenar as 5 letras restantes, que pode ser feito de $P_5 = 120$ modos. Portanto, há $3 \cdot 120 = 360$ anagramas começados por vogal.

Exemplo 2: Quantos são os divisores inteiros e positivos de 120?

Solução: A ideia para resolver este problema é decompor 120 em produto de potências de primo, assim podemos obter a formal geral de seus divisores. De fato, $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Os divisores de 120 são da forma $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$, com $\alpha \in \{0,1,2,3\}$, $\beta \in \{0,1\}$, $\gamma \in \{0,1\}$. Há $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ maneiras de escolher os expoentes α, β *e* γ. Portanto, há 16 divisores.

3.3 Combinações simples

De quantas maneiras podemos selecionar p objetos distintos entre n objetos distintos dados?

Cada seleção de p objetos é chamada de *combinação simples* de classe p dos n objetos. Por exemplo, as combinações simples de classe 3 dos números 1, 2, 3 e 4 são $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$. Representamos o número de combinações simples de classe p de n elementos por C_n^p ou $\binom{n}{p}$. Assim, $C_4^3 = 4$

Para resolver o problema das combinações simples basta notar que selecionar p entre os n objetos equivale a dividir os n objetos em um grupo de p objetos, e um grupo de $n-p$ objetos, que são os não selecionados. De modo geral, temos

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Exemplo 1: Quantos são os anagramas da palavra "BANANA"?

Solução: Para resolver este problema, não basta somente permutar as 6 letras, pois existem letras que se repetem que ao trocarem de lugar entre si não gera um novo anagrama. Por exemplo, no anagrama BAAAN'N ao trocar o N' com N, obteremos o mesmo anagrama. Para formar um anagrama de "BANANA" devemos colocar as 6 letras em 6 lugares. Para isso, devemos escolher 3 dos 6 lugares para colocar as letras A, que pode ser feito de $C_6^3 = 20$ modos; em seguida devemos escolher 1 dos 3 lugares restantes para colocar a letra B (3 modos), e, finalmente, há apenas um modo de colocar as duas letras N nos dois lugares restantes. Portanto, há $20 \cdot 3 \cdot 1 = 60$ anagramas.

3.4 Princípio das Gavetas

O princípio das gavetas nos diz que, se $n+1$ objetos são colocados em n gavetas, então pelo menos uma gaveta deverá conter, pelo menos, dois ou mais objetos. De fato, suponha, por absurdo, que nenhuma das gavetas contenha mais de um objeto. Então, a contagem de no máximo um objeto em cada uma das gavetas nos fornece um total de no máximo n objetos, o que é uma contradição, porque há pelo menos $n+1$ objetos.

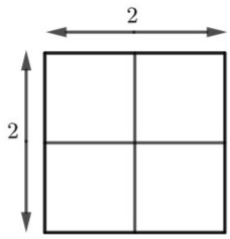
Exemplo 1: Em um conjunto de 8 pessoas podemos afirmar que: pelo menos duas nasceram no mesmo dia da semana.

Solução: Uma estratégia inteligente para resolver este tipo de problema é: imaginar o "pior cenário" ou a "pior hipótese", que é aquela que não satisfaz as condições do problema. Raciocinando dessa forma, veremos que em cada dia da semana podemos ter no máximo um aniversariante. Ora, mas temos sete dias na semana que nos dá sete pessoas. Como temos 8 pessoas, a próxima ficará em algum dos sete dias. Este tipo de problema pode ser resolvido também, identificando os objetos e as gavetas, como veremos no próximo exemplo.

Exemplo 2: Escolhem-se 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos dois destes pontos estão em um distância menor que ou igual a $\sqrt{2}$.

Solução: De fato, dividindo o quadrado maior em quatro quadrados menores de lado 1, obtemos

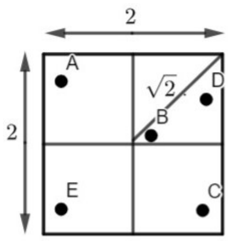
Figura 3.3: Gavetas



Fonte: Autor

Temos que os objetos são os cinco pontos (A, B, C, D, E) e as gavetas são os quatro quadrados menores. Note que a maior distância entre dois pontos do mesmo quadradinho não é maior que a diagonal, que mede $\sqrt{2}$. Como temos cinco pontos e quatro quadrados, pelo Princípio das gavetas, teremos pelo menos dois pontos no mesmo quadradinho. Como podemos ver na figura abaixo.

Figura 3.4: Objetos nas gavetas



Fonte: Autor

3.5 Desigualdade das médias

Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ números reais positivos. Define-se a Média Aritmética A e a Média Geométrica G de $x_1, x_2, ..., x_n$ da seguinte forma:

$$A = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

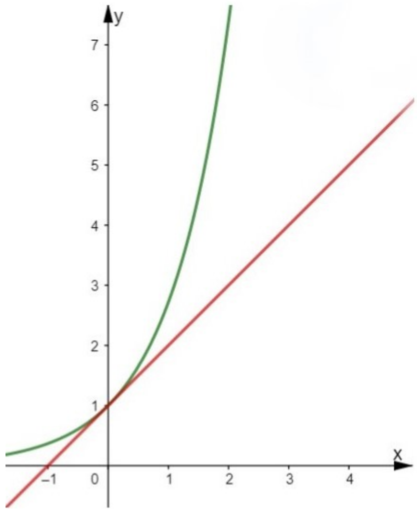
e

$$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$$

Vale que $A \geqslant G$, ocorrendo a igualdade se, e só se, $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Em "Meu Professor de Matemática" de Elon Lages Lima [8], encontramos interessantes demonstrações dessa desigualdade, aqui provaremos a desigualdade utilizando a ideia de G. Pólya, que é baseada na desigualdade $e^x \geqslant x+1$. Uma justificativa para esta desigualdade pode ser vista no gráfico abaixo, onde a reta $y = x+1$ esta sob a exponencial $z(x) = e^x$.

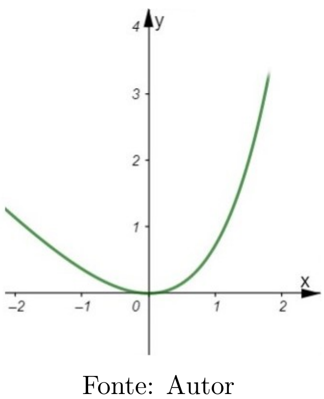
Figura 3.5: $e^x \geqslant x+1$



Fonte: Autor

Uma outra justificativa é considerar a função $f(x) = e^x - x - 1$, que assume valor mínimo para $x = 0$. Note que, $f'(x) = e^x - 1$ que tem $x = 0$ como único ponto crítico e $f > 0$ para $x > 0$ e $f < 0$ para $x < 0$. Daí, $f(x) = e^x - (x+1) \geqslant 0$ para todo x real. Portanto, $e^x \geqslant x+1$, ocorrendo a igualdade apenas se $x = 0$.

Figura 3.6: $f(x) = e^x - (x+1)$



Fonte: Autor

Demonstração: Substituindo na desigualdade $e^x \geqslant x+1$, x por $\dfrac{x_i}{A} - 1$, com $i = 1, 2, ..., n$, temos

$$e^{\frac{x_1}{A}-1} \geqslant \frac{x_1}{A}$$

$$e^{\frac{x_2}{A}-1} \geqslant \frac{x_2}{A}$$

$$\vdots$$

$$e^{\frac{x_n}{A}-1} \geqslant \frac{x_n}{A}$$

Multiplicando, obtemos que

$$e^{\frac{x_1+x_2+...+x_n}{A}-n} \geqslant \frac{x_1x_2...x_n}{A^n}$$

. Como $x_1 + x_2 + ... + x_n = nA$. Segue que

$$1 \geqslant \frac{G^n}{A^n}$$

Portanto $A \geqslant G$. Com a igualdade ocorrendo apenas se $\dfrac{x_i}{A} - 1 = 0$, isto é, $x_i = A$ para todo $i = 1, 2, ..., n$. $\square$

No ensino superior, problemas de otimização geralmente são resolvidos com o uso das derivadas que, embora sua introdução no ensino médio seja amplamente defendida em várias pesquisas, não faz parte da programação curricular do Ensino Médio. Por isso, nesse contexto, esses problemas são resolvidos com a função polinomial do segundo grau. Embora útil, a função do segundo grau nem sempre é a forma mais adequada para esses problemas, pois existe uma ampla variedade de problemas elementares que só seriam resolvidos através do Cálculo Diferencial. Nesse caso, a desigualdade das médias aritmética e geométrica, além de outras desigualdades, mostram-se como uma ferramenta eficiente na resolução desses problemas. No capítulo 4, podemos ver algumas aplicações dessa desigualdade.

Capítulo 4

Resolução de problemas com o método de Pólya

4.1 Problemas de Otimização

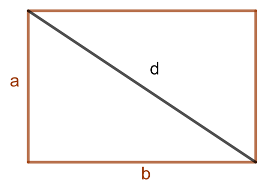
1. Determine as medidas dos lados de um retângulo cuja medida da diagonal é d e que possui área máxima.

   - **Compreensão**

     -O que é dado? O que se pede?

     O problema dá um retângulo de diagonal medindo d, e pede a medida dos lados em função dessa diagonal. Chamando de a e b seus lados, temos:

     Figura 4.1: retângulo

     Fonte: Autor

   - **Planejamento**

     -Conhece algum problema correlato?

     Um problema semelhante a este é aquele que dado um retângulo de perímetro 2p fixado, pede-se para obter os lados que lhe dá área máxima. O resultado desse problema é um quadrado de lado p/2. Podemos pensar que o resultado deste problema também é um quadrado, logo $a = b = \dfrac{d\sqrt{2}}{2}$. Mas para isso precisamos prová-lo. Podemos fazer isso de pelo menos duas formas: através do completamento de quadrados e da desigualdade das médias aritmética e geométrica.

- **Execução**

  - **Completando quadrados**

    Pelo Teorema de Pitágoras temos que $a^2 + b^2 = d^2$. Além disso, $A = ab$, onde A denota a área do retângulo. Daí,

    $$a^2 + b^2 = d^2 \Rightarrow b = \sqrt{d^2 - a^2} \Rightarrow A = a\sqrt{d^2 - a^2} = \sqrt{a^2d^2 - a^4}.$$

    Fazendo $a^2 = t$ e completando quadrados, obtemos

    $$\begin{aligned} A &= \sqrt{td^2 - t^2} \\ &= \sqrt{-\left(t^2 - \frac{2d^2t}{2} + \frac{d^4}{4}\right) + \frac{d^4}{4}} \\ &= \sqrt{-\left(t - \frac{d^2}{2}\right)^2 + \frac{d^4}{4}}. \end{aligned}$$

    Portanto, a área máxima ocorre quando $t = \dfrac{d^2}{2}$. Neste caso, $a = b = \dfrac{d\sqrt{2}}{2}$.

  - **Desigualdade das médias aritmética e geométrica**

    Temos, pela desigualdade das médias que

    $$\frac{d^2}{2} = \frac{a^2 + b^2}{2} \geqslant \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{(ab)^2} = A.$$

    Portanto, a área máxima ocorre quando $a = b = \dfrac{d\sqrt{2}}{2}$.

2. Determine o número real positivo cuja soma com o inverso de seu quadrado seja mínima.

- **Compreensão**

  -*O que se pede?*

  O problema pede para encontrar um número real positivo x tal que $x + \dfrac{1}{x^2}$ seja mínimo.

- **Planejamento**

  -*Qual a ideia? Conhece algum problema correlato?*

  Note que x é um número real positivo, logo podemos fazer uso da desigualdade das médias aritmética e geométrica, mas veja que não podemos escolher os elementos x e $\dfrac{1}{x^2}$ para as médias, pois ainda continuaremos com variáveis no segundo membro da desigualdade, uma ideia para isso é: reescrevê-la de *tal modo que no segundo membro tenhamos apenas uma constante. Façamos:* $x + \frac{1}{x^2} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x^2}$.

- **Execução**

  Temos, pela desigualdade das médias que

$$\frac{x + \frac{1}{x^2}}{3} = \frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x^2}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{x}{2}.\frac{x}{2}.\frac{1}{x^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}.$$

  Daí,

$$x + \frac{1}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

  Logo o valor mínimo é $3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$*, que só ocorre quando* $\frac{x}{2} = \frac{1}{x^2}$*. Portanto,* $x = \sqrt[3]{2}$.

- **Verificação**

  Vamos testar alguns valores, temos que $3\sqrt[3]{1/4} \simeq 1,889$ *calculando* $x + \frac{1}{x^2}$ *para* $x = 1,89$ *e* $x = 1,87$*, obtemos;*

$$1,87 + \frac{1}{(1,87)^2} \simeq 2,155 \text{ e } 1,89 + \frac{1}{(1,89)^2} \simeq 2,169$$

  que são maiores que 1,889...

- **Ampliando o problema**

  E se fizéssemos $x + \frac{1}{x^2} = \frac{x}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{x^2}$*, o resultado seria o mesmo?*

3. (Novo México) Encontre o termo mínimo da sequência

$$\sqrt{\frac{7}{6}} + \sqrt{\frac{96}{7}}, \sqrt{\frac{8}{6}} + \sqrt{\frac{96}{8}}, \sqrt{\frac{9}{6}} + \sqrt{\frac{96}{9}}, ..., \sqrt{\frac{95}{6}} + \sqrt{\frac{96}{95}}.$$

- **Compreensão**

  -O que é dado? O que se pede?

  O que temos é uma sequência de termos, onde queremos o menor deles.

- **Planejamento**

  -Tem alguma ideia? Conhece algum problema semelhante a este?

  Uma das formas de resolver este problema seria através do cálculo, mas isso levaria tempo. Como se trata de uma competição, podemos deduzir que existe uma maneira de encontrar o menor deles sem precisar calcular todos. Note que em cada soma, o numerador de um é o denominador do outro, dessa forma, podemos escrevê-la de uma forma mais generalizada e usar a desigualdade das médias $A \geqslant G$, para encontrar o menor deles, e descobrir em qual n essa condição é satisfeita.

- **Execução**

Podemos escrever os termos da sequência como $\sqrt{\frac{n}{6}}+\sqrt{\frac{96}{n}}$ com $n = 7, 8, ..., 95$. Aplicando a desigualdade $A \geqslant G$, temos:

$$\frac{\sqrt{\frac{n}{6}}+\sqrt{\frac{96}{n}}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt{\frac{n}{6}}\sqrt{\frac{96}{n}}} \Rightarrow \sqrt{\frac{n}{6}}+\sqrt{\frac{96}{n}} \geqslant 4.$$

Ocorrendo a igualdade quando $\sqrt{\frac{n}{6}} = \sqrt{\frac{96}{n}}$, que nos dá $n = \sqrt{576} = 24$. Portanto, o menor dos termos é:

$$\sqrt{\frac{24}{6}}+\sqrt{\frac{96}{24}} = 4.$$

4. Determine a altura do cilindro circular reto, de volume máximo, inscrito na esfera de raio R dado.

- **Compreensão**

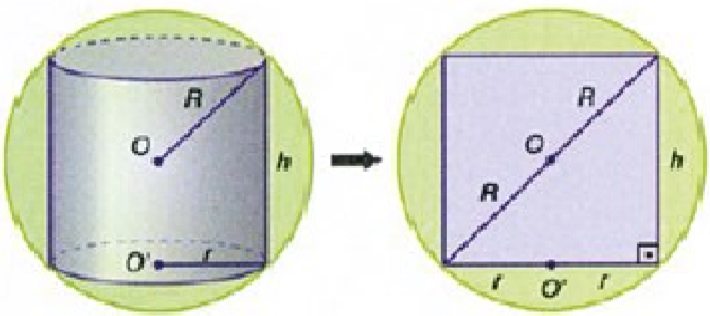
-O que se pede?

-O que é dado?

-Faça um esboço.

O problema pede a altura do cilindro de volume máximo inscrito na esfera. Para isso, façamos um esboço do problema que servirá como base para a resolução do problema, onde R, r e h são, respectivamente, o raio da esfera, raio da base do cilindro e altura do cilindro.

Figura 4.2: Cilindro inscrito



Fonte: Autor

Esboço do problema que destaca o triângulo retângulo de lados $2R$, $2r$ e h.

- **Planejamento**

-Qual a ideia?

-Conhece algum problema parecido?

Conhece alguma ferramenta para chegar a solução?

Para determinação do volume máximo de um cilindro, temos a expressão:

$$V = \pi r^2 h$$

Note ainda no triângulo retângulo que podemos usar o Teorema de Pitágoras. Daí temos:

$$(2r)^2 + h^2 = (2R)^2.$$

Os dados são suficientes?

De que modo podemos usar essas equações?

Para resolver este problema, podemos usar o cálculo diferencial. Basta isolar uma das variáveis da segunda equação, substituir na primeira, e estudar a derivada. Uma outra forma de resolvê-lo, é usando a desigualdade das médias $A \geqslant G$, pois temos grandezas positivas onde a soma é uma constante. Além disso, note que o volume será máximo quanto maior for o produto r^2h.

- **Execução**
  - Usando derivadas.

    Seguindo a ideia, podemos isolar tanto r como h que não fará diferença, pois ao encontrar uma a outra fica determinada. Sendo assim, isolaremos r^2.

    Temos,

    $$(2r)^2 + h^2 = (2R)^2 \Rightarrow 4r^2 = 4R^2 - h^2 \Rightarrow r^2 = \frac{4R^2 - h^2}{4}.$$

    Substituindo em $V = \pi r^2 h$, obtemos:

    $$V = \pi r^2 h \Rightarrow V = \pi \left(\frac{4R^2 - h^2}{4}\right) h \Rightarrow V = \pi R^2 h - \frac{\pi h^3}{4}.$$

    Derivando, temos:

    $$\frac{dV}{dh} = \pi R^2 - \frac{3\pi h^2}{4}.$$

    Daí,

    $$\frac{dV}{dh} = 0 \Leftrightarrow \pi R^2 - \frac{3\pi h^2}{4} = 0 \Rightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}} \Rightarrow r = R\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

    $\dfrac{dV}{dh} > 0$ se $0 < h < \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ e $\dfrac{dV}{dh} < 0$ se $\dfrac{2R}{\sqrt{3}} < h < 2R$.

    Portanto, o volume máximo é dado por $V = \dfrac{4\sqrt{3}\pi R^3}{9}$.

– Usando a desigualdade $A \geqslant G$.
Note que para resolver usando a desigualdade $A \geqslant G$, precisamos reescrever a equação $4r^2 + h^2 = 4R^2$ de tal modo que possamos ter na média geométrica o produto r^2h. Dessa forma, façamos:

$$4R^2 = 2r^2 + 2r^2 + h^2.$$

Daí, temos

$$\begin{aligned}\frac{2r^2 + 2r^2 + h^2}{3} &\geqslant \sqrt[3]{(2r^2)(2r^2)(h^2)} \\ &\geqslant \sqrt[3]{4(r^2h)^2} \\ &\geqslant \sqrt[3]{(2r^2h)^2},\end{aligned}$$

O que nos dá $r^2h \leqslant \dfrac{4R^3}{3\sqrt{3}}$, que é máximo quando $2r^2 = h^2$. Logo, $h = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.

5. (OBMEP 2017 F2N3Q6) Joana retira bolas, sem reposição, de uma caixa com 2017 bolas numeradas de 1 a 2017.

Figura 4.3: Obmep 2017 Q.06

Fonte: OBMEP 2017

(a) Qual é a quantidade mínima de bolas que ela deve retirar para garantir que em pelo menos uma delas haja um número múltiplo de 3?

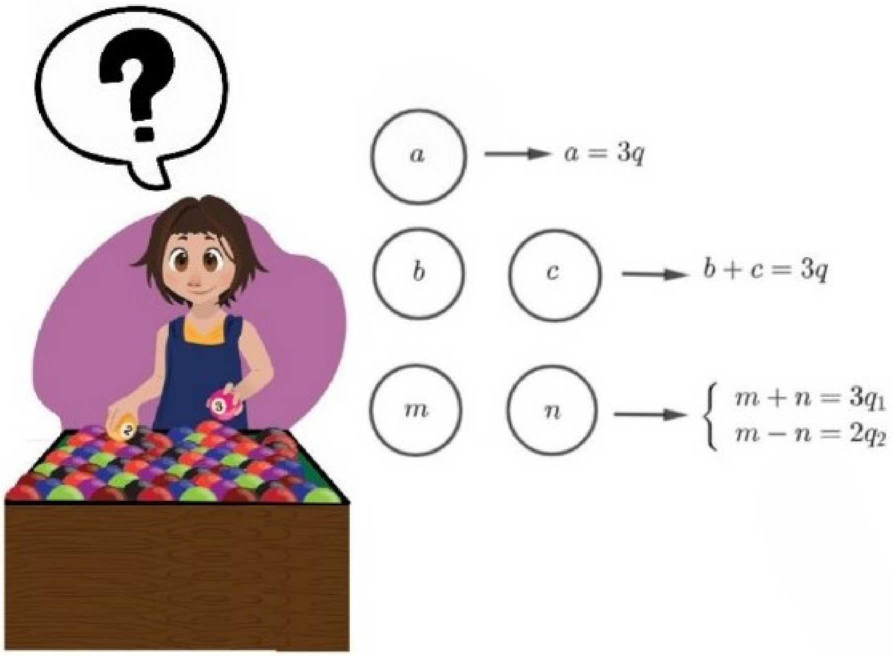
(b) Qual é a quantidade mínima de bolas que ela deve retirar para garantir que existam duas bolas com a soma de seus números igual a um múltiplo de 3?

(c) Qual é a quantidade mínima de bolas que ela deve retirar para garantir que existam duas bolas de modo que a soma de seus números seja um múltiplo de 3 e sua diferença seja um múltiplo de 2?

- **Compreendendo o problema**

  De acordo com o enunciado, Joana quer tirar um número mínimo de bolas que garanta no item (a), um múltiplo de 3, no item (b), uma soma múltipla de 3, e no item (c), uma soma e uma diferença múltipla de 3 e 2, respectivamente.

Figura 4.4: Joana tirando bolas



Fonte: Autor

- **Estabelecendo um plano**

  A ideia para resolver cada um dos itens é tirar o máximo de bolas que não satisfaz as condições do problema, que pode ser feito imaginando o "pior cenário"para Joana.

- **Executando o plano e verificando**

  No item (a), Joana quer garantir pelo menos uma bola cujo número seja múltiplo de 3. Qual é o "pior cenário"? O "pior cenário"para Joana, nesse caso, é: tirar o número máximo de bolas cujo número não é múltiplo de 3. Sejam A, B e C os conjuntos cujos números deixam, respectivamente, restos 0,1 e 2 na divisão por 3. Como $2017 = 3 \cdot 672 + 1$, A tem 672 elementos, B tem 673 elementos e C tem 672 elementos.

  Ora, se Joana tirar todas as bolas dos conjuntos B e C, não teremos bolas com números múltiplos de 3. Feito isso, a próxima bola será, necessariamente, do conjunto A, que é o conjunto das bolas cujo número é múltiplo de 3. Como temos, nos conjuntos B e C, $673 + 672 = 1345$ bolas, ao pegarmos todas elas, a próxima será, necessariamente, do conjunto A. Portanto, Joana deve tirar no mínimo 1346 bolas.

  No item (b), Joana quer tirar um número de bolas que garanta duas bolas cuja soma é múltipla de 3. Como isso pode ser feito? Ora, há dois casos para que a soma de dois números seja um múltiplo de 3:

  caso 1: os dois números são múltiplos de 3, que pode ser feito tirando duas bolas do conjunto A;

caso 2: um número que deixa resto 1 e outra que deixa resto 2 ao serem divididos por 3, que pode ser feito tomando uma bola do conjunto B e outra do C.

Qual é o "pior cenário"para Joana? O pior cenário é: pegar todas as bolas do conjunto B (note que B tem mais elementos que C) mais uma do A, que nos dá 674 bolas. Note agora que, se tomarmos mais uma bola de qualquer um dos conjuntos A ou C, teremos um dos casos satisfeitos. Portanto, o mínimo é 675. De fato, note que para quaisquer 675 bolas que pegarmos, se pelo menos duas delas pertencerem ao conjunto A, teremos o caso 1. Se tivermos uma ou nenhuma bola no conjunto A, teremos que dividir pelo menos 674 entre os conjuntos B ou C. Como em B cabem no máximo 673 bolas, e em C no máximo 672, teremos pelo menos uma bola em cada um deles, que satisfará o caso 2.

No item (c), Joana quer garantir pelo menos duas bolas cujos números atenda as duas condições: soma múltipla de 3, e diferença múltipla de 2. Por exemplo, 2016 e 6, pois $2016 + 6 = 2022 = 3 \cdot 674$ e $2016 - 6 = 2010 = 2 \cdot 1005$. Como podemos fazer isso? Como podemos aproveitar o item anterior? Note que, para satisfazer a primeira condição precisamos de no mínimo de 675 bolas. Logo, podemos concluir que o número de bolas para satisfazer as duas condições é maior ou igual a 675. Observe que a escolha de duas bolas cuja soma de seus números seja um número múltiplo de 6 é equivalente às duas condições exigidas. De fato, tome dois números naturais a_1 e a_2 de tal modo que $a_1 + a_2 = 3k_1$ e $a_1 - a_2 = 2k_2$, somando $a_1 + a_2 = 3k_1$ e $a_1 - a_2 = 2k_2$ membro a membro e dividindo o resultado por 2, obtemos que $a_1 = \dfrac{3k_1}{2} + k_2$. Como a_1 é um número inteiro, então 2 divide $3k_1$, que só é possível se k_1 é par, i.e, $k_1 = 2k$. Logo, $a_1 + a_2 = 3 \cdot (2k) = 6k$. Reciprocamente, se $a_1 + a_2 = 6k$ então $a_1 + a_2$ é múltiplo de 3 e de 2. Note que, $(a_1 + a_2)$ é par, logo a_1 e a_2 tem mesma paridade, o que implica que $(a_1 - a_2)$ também é par.

Assim, vamos analisar os restos da divisão por 6. De fato, essas condições são satisfeitas nos seguintes casos:

Caso 1: duas bolas que deixam resto 0 na divisão por 6.

Caso 2: uma bola que deixa resto 1 por 6 e outra que deixa resto 5 por 6.

Caso 3: uma bola que deixa resto 2 por 6 e outra que deixa resto 4 por 6.

Caso 4: duas bolas que deixam resto 3 por 6.

Sejam R_0, R_1, R_2, R_3, R_4 e R_5 o conjunto das bolas que deixam, respectivamente, restos 0,1,2,3,4 e 5 na divisão por 6. Como $2017 = 6 \cdot 336 + 1$, os conjuntos tem, respectivamente, 336, 337, 336, 336, 336 e 336 elementos.

Qual o "pior cenário"neste caso? O "pior cenário"é: pegar 1 bola do conjunto R_0, 337 bolas do conjunto R_1 (este conjunto é o que possui uma maior quantidade de elementos), 336 bolas do conjunto R_2, e uma bola do conjunto R_3.

Com certeza, se Joana fizer essas escolhas, pegando um total de $1 + 337 + 336 + 1 = 675$ bolas, ela não obterá duas bolas cuja soma de seus números é múltipla de 3 e a diferença múltipla de 2. Mas se Joana pegar mais uma bola, i.e, 676 bolas, pelo menos um dos casos será satisfeito.

De fato, se tomarmos 676 bolas e pelo menos duas dessas bolas estão nos conjuntos R_0 ou R_3, cairemos nos casos 1 ou 4, respectivamente. Caso contrário, teremos pelo menos 674 bolas para dividirmos entre os conjuntos R_1, R_2, R_4 e R_5. Para satisfazer o caso 2, precisamos de pelo menos uma bola no conjunto R_1 e uma em R_5. Se não há bolas em R_1 ou em R_5, teremos pelo menos 337 bolas para os conjuntos R_2 e R_4(note que em R_1 cabem no máximo 337 bolas e em R_5 336 bolas. Como $674 - 337 = 337$ e $674 - 336 = 338$, na pior das hipóteses haverá pelos menos 337 bolas restantes). Como nestes conjuntos só cabem no máximo 336 elementos, teremos pelo menos uma bola em R_2 e pelo menos uma R_4, que satisfaz o caso 3. Portanto, Joana deve tirar no mínimo 676 bolas para garantir as condições exigidas.

4.2 Problemas de Combinatória

1. (OBMEP 2007 F1N3Q11) Manuela quer pintar as quatro paredes de seu quarto usando as cores azul, rosa, verde e branco, cada parede de uma cor diferente. Ela não quer que as paredes azul e rosa fiquem de frente uma para a outra. De quantas maneiras diferentes ela pode pintar seu quarto?

Figura 4.5: Obmep 2007 Q.11

Fonte: OBMEP 2007

a. 8

b. 16

c. 18

d. 20

e. 24

- **Compreendendo o problema**

  O problema nos pede para pintar quatro paredes atendendo a condição de que cada parede deva ser pintada de cores diferentes e as cores azul e rosa não fiquem de frente.

- **Estabelecendo um plano**

  1ª Ideia

  Uma ideia é atender primeiro as condições dadas, ou seja, devemos procurar pintar com as cores azul e rosa e depois com as outras.

  2ª Ideia

  uma segunda ideia é contar todos casos possíveis e subtrair o que não satisfaz as condições dadas.

- **Executando o plano**

  1ª Ideia

  Para Manuela pintar com a cor azul ela tem 4 opções de paredes. Depois disso, ela tem 2 opções de paredes para pintar com a cor rosa, pois a parede oposta a parede azul não pode. E para completar, ela tem 2 opções para cor verde e a que sobra fica para cor branca. Pelo princípio fundamental da contagem obtemos $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ possibilidades.

  2ª Ideia

  Para contar todos os casos possíveis, atendendo a condição de serem de cores distintas, obtemos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ possibilidades. E para os casos indesejados temos 4 maneiras de pintar azul e rosa frente a frente e temos mais 2 paredes que precisam ser pintas com as cores verde e branco, totalizando $4 \cdot 2 = 8$ casos indesejados. Portanto, o total de maneiras de Manuela pintar seu quarto atendendo as condições dadas é $24 - 8 = 16$.

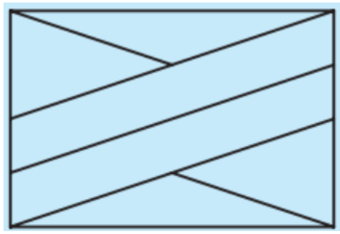
- **Verificação**

  O problema foi resolvido de duas maneiras onde obtemos os mesmos resultados. Além disso, notamos que as operações foram efetuadas sem erros. Portanto podemos nos certificar que a resposta obtida é válida.

- **Os problemas 2, 3, e 4, a seguir, são similares ao problema 1**

2. (OBMEP 2013) Paulo tem tintas de quatro cores diferentes. De quantas maneiras ele pode pintar as regiões da bandeira da figura, cada uma com uma única cor, de modo que cada cor apareça pelo menos uma vez e que as regiões adjacentes sejam pintadas com cores diferentes?

Figura 4.6: Obmep 2013



Fonte: OBMEP 2013

3. (OBMEP 2012) Juca quer pintar os algarismos do número 2013, como na figura ao lado, de modo que cada região seja pintada com uma das cores branca, cinza ou preta e que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

Figura 4.7: Obmep 2012

Fonte: OBMEP 2012

   (a) Observe que Juca pode pintar o algarismo 2 de $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ maneiras diferentes. De quantas maneiras diferentes ele pode pintar o algarismo 1?

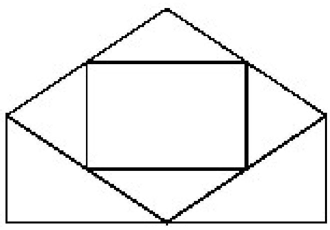
   (b) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 3?

   (c) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 0?

   (d) Escreva uma expressão numérica que permita calcular de quantas maneiras Juca pode pintar o número 2013.

4. (OBMEP 2013) De quantas maneiras diferentes é possível pintar a figura, de modo que cada uma das regiões seja pintada com uma das cores azul, verde ou preto e que regiões cujas bordas possuem um segmento em comum não sejam pintadas com a mesma cor?

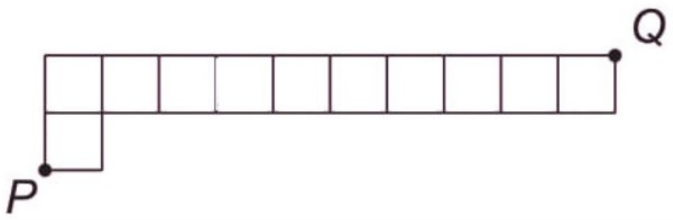
Figura 4.8: Obmep 2013



Fonte: OBMEP 2013

5. (OBMEP 2018 F1N2Q19) Para fazer um percurso do ponto P ao ponto Q da figura, uma formiguinha deve andar sobre os segmentos horizontais sempre para a direita e nunca passar duas vezes por um mesmo segmento vertical. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer esse percurso?

Figura 4.9: Obmep 2018



Fonte: OBMEP 2018

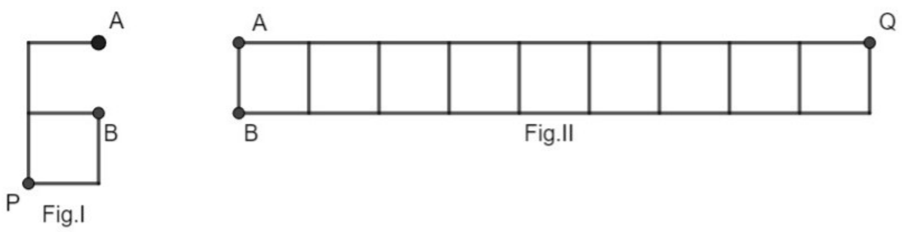
- **Compreendendo o problema**

  O problema pede o número de maneiras diferentes de ir de P a Q, atendendo a condição de andar sobre os segmentos horizontais apenas para a direita e nunca passar duas vezes por um mesmo segmento vertical, ou seja, a formiguinha pode subir e descer desde que não seja pelo mesmo segmento.

- **Estabelecendo um plano**

  Uma ideia para resolver este problema é dividir a figura em duas outras figuras mais simples e restringir a contagem a elas. Determinando os pontos A e B como na figura abaixo, obtemos:

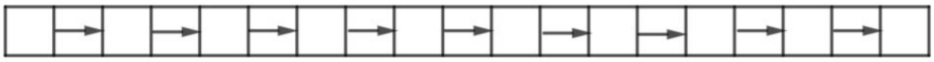
Figura 4.10: Dividindo o percurso



Fonte: Autor

Note na figura I, que só existem três caminhos, mas para a figura II não é tão simples assim. Observe na figura II que será necessário a formiguinha percorrer exatos 9 segmentos horizontais para chegar a Q. Além disso, se partir do ponto A, terá que percorrer um número par de segmentos verticais, e se partir de B, terá que percorrer um número ímpar. Como a formiguinha não pode subir e descer no mesmo segmento vertical, estes segmentos ficarão intercalados pelos segmentos horizontais. Obteremos assim, 10 espaços vazios na figura a seguir

Figura 4.11: Obtendo os espaços



Fonte: Autor

que ao serem preenchidos definirão muito bem os caminhos da formiguinha. Por exemplo,

Figura 4.12: Preenchendo os espaços

Fonte: Autor

Representa o caminho da formiguinha partindo de B.

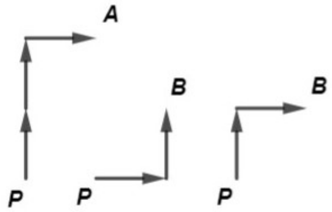
Figura 4.13: Representando o caminho

Fonte: Autor

- **Executando o plano**

  Para a figura I, temos três caminhos, um de P a A e dois de P a B, como podemos ver abaixo.

Figura 4.14: Caminhos de P a A e a B.



Fonte: Autor

Agora para ir de A a Q, devemos escolher um número par de espaços vazios, que nos dá

$$S_1 = \binom{10}{0} + \binom{10}{2} + \binom{10}{4} + \binom{10}{6} + \binom{10}{8} + \binom{10}{10}$$

possibilidades.

Pela Relação de Stifel, temos

$$\binom{10}{2} = \binom{9}{1}+\binom{9}{2}, \binom{10}{4} = \binom{9}{3}+\binom{9}{4}, \binom{10}{6} = \binom{9}{5}+\binom{9}{6}, \binom{10}{8} = \binom{9}{7}+\binom{9}{8}$$

.

Substituindo, obtemos

$$S_1 = \binom{9}{0}+\binom{9}{1}+\binom{9}{2}+\binom{9}{3}+\binom{9}{4}+\binom{9}{5}+\binom{9}{6}+\binom{9}{7}+\binom{9}{8}+\binom{9}{9} = 2^9$$

.

Para ir de B a Q, devemos escolher um número impar de espaços vazios, daí temos

$$S_2 = \binom{10}{1}+\binom{10}{3}+\binom{10}{5}+\binom{10}{7}+\binom{10}{9}$$

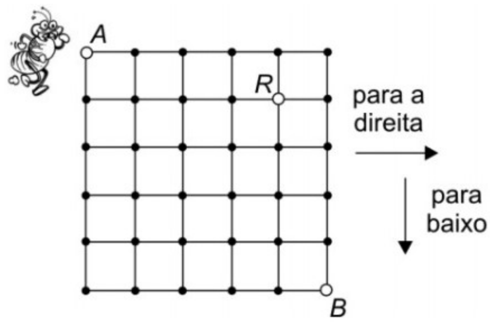
. Como $S_2 = 2^{10} - S_1$, temos $S_2 = 2^{10} - 2^9 = 2 \cdot 2^9 - 2^9 = 2^9$, possibilidades de B a P.

Somando todas as possibilidades obtemos $S_1 + 2 \cdot S_2 = 2^9 + 2 \cdot 2^9 = 3 \cdot 2^9$ maneiras da formiguinha ir de P a Q.

Os problemas 6, 7, e 8, a seguir, são similares ao problema 5.

6. (OBMEP 2008 F1N2Q11) Uma formiguinha está no ponto A do quadriculado da figura e quer chegar ao ponto B passando pelo ponto R, andando sobre os lados dos quadradinhos e apenas para a direita ou para baixo. De quantas maneiras ela pode fazer esse trajeto?

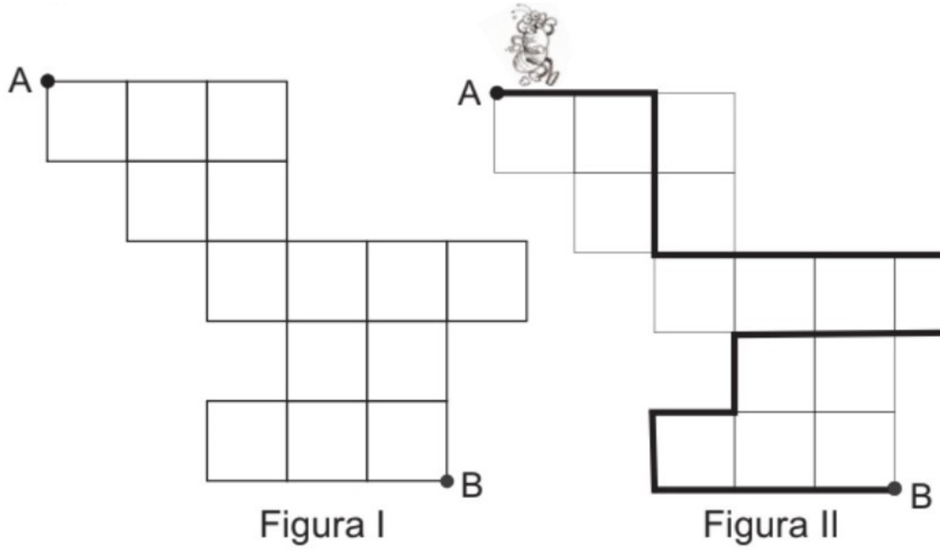
Figura 4.15: Obmep 2008.Q11



Fonte: Obmep 2008

7. (OBMEP 2007 F1N3Q20) Uma formiguinha quer sair do ponto A e ir até o ponto B da figura I, andando apenas pelos lados dos quadradinho na horizontal ou na vertical para baixo, sem passar duas vezes pelo mesmo lado. A figura II ilustra um possível trajeto da formiguinha.

Figura 4.16: Obmep 2007.Q20



Fonte: Obmep 2007

De quantas maneiras ela pode ir de A até B?

a. 120

b. 240

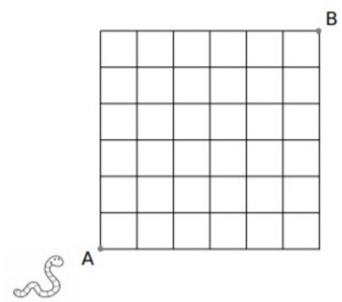
c. 360

d. 480

e. 720

8. (BQ-OBMEP 2013N3Q6) Uma minhoca matemática parte do ponto A e chega no ponto B da figura abaixo.

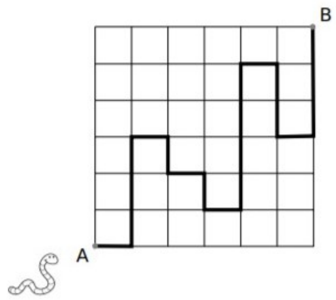
Figura 4.17: Obmep 2013



Fonte: Obmep 2013

Esta minhoca matemática se move sempre sobre as linhas pretas do desenho acima, e nunca passa sobre um lugar no qual ela já esteve anteriormente. Além disso, esta minhoca pode andar para baixo, para cima e para a direita, mas não para a esquerda. Por exemplo, um caminho possível para que a minhoca matemática vá do ponto A ao ponto B poderia ser:

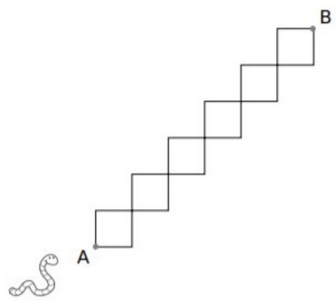
Figura 4.18: Obmep 2013. Exemplo



Fonte: Obmep 2013

a) De quantas maneiras diferentes a minhoca matemática pode ir do ponto A ao ponto B através de caminhos contidos nos segmentos mostrados na figura abaixo? (seguindo as regras descritas anteriormente).

Figura 4.19: Obmep 2013. Item a)



Fonte: Obmep 2013

b) Qual o número total de maneiras que a minhoca matemática pode ir do ponto A ao ponto B? (seguindo as regras anteriores, para qualquer caminho, não apenas os do item a).

9. (OBMEP 2020 N2Q2) Analisando os números naturais de 4 algarismos:

   (a) Quantos deles tem todos os algarismos distintos?

   (b) Quantos têm o algarismo 1 exatamente uma vez e todos os algarismos diferentes?

   (c) Quantos têm o algarismo 1?

10. (OBMEP 2018 N2Q6)

   (a) Quantos números de quatro algarismos têm soma de seus algarismos par?

(b) Um número com dois dígitos distintos e não nulos é chamado de bonito se o dígito das dezenas é maior do que o dígito das unidades. Quantos números bonitos existem?

(c) Quantos números pares de quatro dígitos podemos formar utilizando os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 sem utilizar o mesmo algarismo duas vezes?

(d) Qual a média de todos os números de 5 algarismos que podem ser formados usando cada um dos dígitos 1, 3, 5, 7 e 8 exatamente uma vez?

11. (OBMEP F1N3Q11) Os 535 alunos e professores de uma escola fizeram um passeio de ônibus. Os ônibus, com capacidade para 46 passageiros cada, ficaram lotados. Em cada ônibus havia um ou dois professores. Em quantos ônibus havia dois professores?

    (a) 3

    (b) 5

    (c) 6

    (d) 8

    (e) 9

    - **Compreendendo o problema**

      O problema nos diz que no passeio haviam 535 alunos, e nos pergunta em quantos haviam dois professores, sendo que em cada ônibus haviam um ou dois professores. Além disso, todos os ônibus estavam lotados com 46 passageiros.

    - **Estabelecendo um plano**

      Note no enunciado que não é dado o número de ônibus que foram usados. Dessa forma, o primeiro passo é saber quantos ônibus foram necessários para o passeio. Note ainda que teremos ônibus com 45 alunos e outros com 44. Dessa forma, podemos montar um sistema com as incógnitas x e y, onde x representa o número de ônibus com dois professores e y o número de ônibus com um professor.

    - **Executando o plano**

      Como $535 = 12 \cdot 44 + 7$ e $535 = 11 \cdot 45 + 40$ podemos concluir que temos 12 ou 11 ônibus. Observe que caso houvesse 11 ônibus não seria possível levar todos os alunos. Portanto, foram usados 12 ônibus.

      Como x é o número de ônibus com 2 professores e y com 1 professor, temos que $x + y = 12$. Nos ônibus com 1 professor haviam 45 alunos e naqueles com dois professores haviam 44 alunos assim, $45y + 44x = 535$ alunos. Obtemos assim, o sistema

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 44x + 45y = 535 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $x = 5$ e $y = 7$.

- **Verificação**

  De fato, note que temos $12 \cdot 46 - 535 = 17$ professores. Como cada ônibus tem 1 ou 2 professores e $17 = 2 \cdot 5 + 7 \cdot 1$ concluímos que o número de ônibus com 2 professores é 5, que verifica o resultado.

12. (OBMEP 2019 F1N3Q16) A rã Zinza quer ir da pedra 1 até a pedra 10 em cinco pulos, pulando de uma pedra para a seguinte ou por cima de uma ou de duas pedras. De quantas maneiras diferentes Zinza pode fazer isso?

Figura 4.20: Obmep 2019.Q16 I

Fonte: Obmep 2019

(a) 10

(b) 35

(c) 45

(d) 84

(e) 126

- **Compreendendo o problema**

  O problema nos dá uma rã que deseja ir a pedra 10, pulando 5 vezes, atendendo a condição de pular por cima de uma, duas ou de nenhuma pedra.

  Note que além desses, temos os espaços entre as pedras que serão percorridos até a pedra 10.

Figura 4.21: Obmep 2019.Q16 II

Fonte: Obmep 2013 modificada pelo autor

- **Estabelecendo um plano**

  Note que ao pular até a pedra 10, a rã percorrerá 9 espaços. Sendo que de uma pedra para outra a rã pode percorrer 1, 2 ou 3 espaços. Se chamarmos de a, b e c o número de saltos em que a rã percorre 1, 2 e 3 espaços, respectivamente, poderemos escrever o número de saltos e espaços percorridos em função dessas variáveis e montar um sistema.

- **Executando o plano**

  Como a rã pula 5 vezes e percorre 9 espaços, temos;

$$\begin{cases} a+b+c=5 \\ a+2b+3c=9 \end{cases}$$

  Resolvendo o sistema obtemos $b+2c=4$, que nos dá as soluções $\{a,b,c\}$ iguais a $\{1,4,0\},\{2,2,1\},\{3,0,2\}$. Analisando as possibilidades dos saltos em relação aos espaços, uma das sequências para os saltos são: $\{1,2,2,2,2\},\{3,2,2,1,1\}$, $\{3,3,1,1,1\}$. Mas como a ordem dos saltos não é específica (por exemplo, no primeiro caso a rã poderia pular $\{2,2,1,2,2\}$) temos que levar em consideração essas possibilidades. Assim, para a primeira temos 5 possibilidades, para a segunda temos ${P_5}^{2,2} = \dfrac{5!}{2!2!} = 30$, e para a terceira possibilidade temos ${P_5}^{3,2} = \dfrac{5!}{3!2!} = 10$. Portanto, temos $5+30+10=45$ maneiras de Zinza chegar a pedra 10.

13. (OBMEP 2010 F1N3Q17) Tio Paulo trouxe cinco presentes diferentes, entre os quais uma boneca, para distribuir entre suas sobrinhas Ana, Bruna, Cecília e Daniela. De quantos modos ele pode distribuir os presentes entre as sobrinhas de modo que todas ganhem pelo menos um presente e a boneca seja dada para Ana?

    (a) 20

    (b) 32

    (c) 60

    (d) 72

    (e) 120

- **Compreendendo o problema**

  O problema pede a quantidade de modos que podemos distribuir 5 presentes para 4 crianças de modo que a boneca fique com Ana, e cada uma receba pelo menos um presente.

- **Estabelecendo um plano**

Como o problema diz que as crianças devem ganhar pelo menos um presente e a boneca está destinada a Ana, devemos considerar a possibilidade de Ana receber um ou dois presentes, devemos contar separadamente os casos em que Ana recebe dois presentes e os casos em que Ana recebe apenas a boneca.

- **Executando o plano**

  1º caso

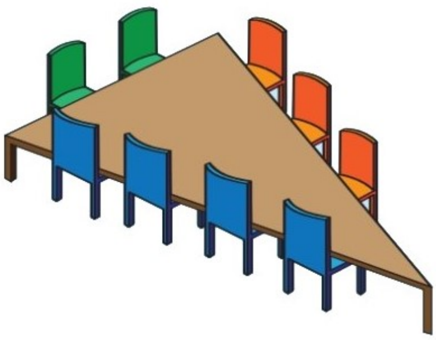
  Como Ana será a criança que ficará com dois presentes, temos 4 maneiras para escolher o outro presente dela. Escolhido o presente de Ana, temos 3 possibilidades para escolher o presente de Bruna, 2 possibilidades para o de Cecília e 1 para Daniela. Portanto, sendo Ana a criança com 2 presentes, podemos distribuir os presentes de $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneiras.

  2º caso

  No caso em que Ana recebe apenas a boneca, o Tio Paulo deve escolher quem vai receber dois presentes, isso pode ser realizado de 3 maneiras. Escolhida a criança o Tio Paulo escolhe os dois presentes que ela vai receber, isso pode ser realizado de 6 maneiras. Escolhidos os presentes temos dois presentes para serem entregues para duas crianças, que pode ser feito de 2 maneiras. Portanto, para o caso em que Ana recebe apenas a boneca, temos $3 \cdot 6 \cdot 2 = 36$ maneiras. No total, Tio Paulo pode distribuir os presentes de $24 + 36 = 60$ maneiras diferentes.

14. (OBMEP 2012 F1N3Q18) Seis amigos, entre eles Alice e Bernardo, vão jantar em uma mesa triangular, cujos lados têm 2, 3 e 4 lugares, como na figura. De quantas maneiras esses amigos podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e em um mesmo lado da mesa?

Figura 4.22: Obmep 2012.Q18



Fonte: Obmep 2012

(a) 288

(b) 6720

(c) 10080

(d) 15120

(e) 60480

- **Compreendendo o problema**

  O problema nos pede o número de maneiras de seis amigos sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos.

- **Estabelecendo um plano**

  Para resolver este problema, devemos começar pela restrição que nos é dada, que é contar de quantas maneiras Alice e Bernardo podem sentar-se juntos num mesmo lado da mesa. Depois disso, contar os casos em que não há restrição.

- **Executando o plano**

  Para escolher os dois lugares no mesmo lado da mesa, temos uma possibilidade nas cadeiras de cor verdes, duas nas cadeiras de cor laranja e três nas de cor azul, o que nos dá 6 possibilidades. Escolhido esses lugares Alice e Bernardo podem se acomodar de duas maneiras, logo há $2 \cdot 6 = 12$ possibilidades para Alice e Bernardo ficarem juntos no mesmo lado da mesa. Os quatro amigos que ainda estão em pé podem se sentar nos 7 lugares vazios de $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ maneiras diferentes. No total, os amigos podem se sentar à mesa de $12 \cdot 840 = 10080$ maneiras diferentes.

15. (OBMEP 2013 F1N3Q11) Ana quer fazer duas aulas de natação por semana, uma de manhã e a outra à tarde. A escola de natação tem aulas de segunda a sábado às 9h, 10h e 11h e de segunda a sexta às 17h e 18h. De quantas maneiras distintas Ana pode escolher o seu horário semanal, de modo que ela não tenha suas aulas no mesmo dia nem em dias consecutivos?

(a) 96

(b) 102

(c) 126

(d) 144

(e) 180

- **Compreendendo o problema**

  O problema diz que Ana quer fazer duas aulas por semana. Além disso, ela quer aulas em turnos e em dias diferentes que não sejam consecutivos. Por exemplo, segunda e terça-feira são dias que não satisfazem Ana, nem muito menos 9h e 17h de quinta-feira. Ela tem a sua disposição os horários de segunda a sábado às 9h, 10h e 11h e de segunda a sexta às 17h e 18h. E o objetivo do problema é contar de quantas maneiras ela pode escolher os horários de suas aulas.

- **Estabelecendo um plano**

  Uma ideia para resolver este problema é contar de quantas maneiras Ana pode ter sua aula pela manhã e contar de quantas maneiras ela pode escolher sua aula da tarde. Mas note que, desta maneira estaríamos contando também os casos indesejados, que são as aulas em dias consecutivos ou no mesmo dia.

  Uma outra ideia é dividir a contagem em dois casos. *(1º caso)* Ana terá aula aos sábado e *(2º caso)* Ana não terá aula aos sábado. Note que temos 6 dias para escolher as aulas da manhã. Escolhido o dia temos quantas possibilidades para as aulas da tarde? Depende. Se o dia da aula pela manhã for sábado, teremos 4 possibilidades, se for sexta-feira, por exemplo, teremos apenas 3 possibilidades.

- **Executando o plano**

  1ª ideia

  1º caso

  Temos 3 possibilidades para a aula de sábado, e para a aula da tarde 2 possibilidade que pode ser de segunda a quinta, que os dá mais 4 possibilidades. Logo, temos $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ horários possíveis para este caso.

  2º caso

  Neste caso, Ana não terá aula aos sábados. Temos então 6 possibilidades para os dias das aulas: segunda e quarta, segunda e quinta, segunda e sexta, terça e quinta, terça e sexta, e quarta e sexta. Escolhido os dias devemos escolher o dia em que a aula será pela manhã, temos 2 possibilidades, o dia da aula a tarde, consequentemente, ficará bem definido. Escolher o horário da manhã 3 possibilidades, e escolher o horário da tarde 2 possibilidades. Temos, então $6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 72$ horários possíveis para este caso. Totalizando, temos $24 + 72 = 96$ maneiras distintas para Ana escolher o seu horário semanal.

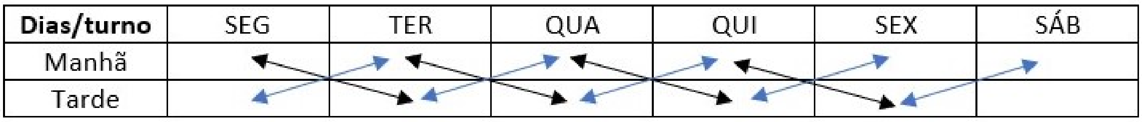
  2ª ideia

  Pela manhã, Ana tem 6 dias e 3 horários disponíveis, que nos dá $6 \cdot 3 = 18$ possibilidades para a aula da manhã. Existem 5 dias e 2 horários disponíveis para a aula da tarde, ou seja, temos $5 \cdot 2 = 10$ maneiras de escolher a aula da tarde. Sem considerar as restrições temos $18 \cdot 10 = 180$ possibilidades. Devemos subtrair desse total, os dias que teremos aulas no mesmo dia e em dias consecutivos.

  No mesmo dia temos 3 horários pela manhã e 2 a tarde, que nos dá $3 \cdot 2 = 6$ maneiras de escolher os horários do mesmo dia. Como as aulas do mesmo dia ocorrem de segunda a sexta, temos $6 \cdot 5 = 30$ maneiras de marcar a aula no mesmo dia.

Temos 9 maneiras de escolher os dias consecutivos e turnos distintos.

Figura 4.23: Horário das aulas



Fonte:Autor

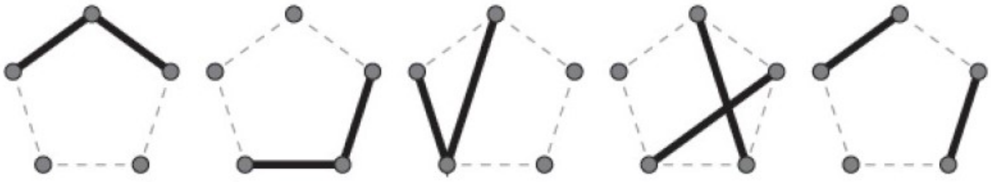
Escolhido os dias, temos $3 \cdot 2 = 6$ horários pra cada escolha dos dias consecutivos, (3 pela manhã e 2 pela tarde), que nos dá $9 \cdot 6 = 54$ possibilidades para aulas em dias consecutivos. Portanto, Ana tem $180 - 30 - 54 = 96$ possibilidades para suas aulas.

- **Verificação**

  O problema foi resolvido de duas maneiras, onde obtemos os mesmos resultados, portanto podemos validar o resultado encontrado.

16. (OBMEP 2009 F1N3Q17) Com exatamente dois segmentos de reta, podemos fazer figuras diferente unindo os vértices de um pentágono. Cinco dessas figuras estão ilustradas a seguir.

Figura 4.24: Obmep 2009



Fonte: Obmep 2009

Incluindo essas cinco, quantas figuras diferentes podemos fazer desse modo?

a. 25

b. 30

c. 35

d. 40

e. 45

- **Compreendendo o problema**

  O problema nos pede o número de figuras que podemos fazer do tipo acima.

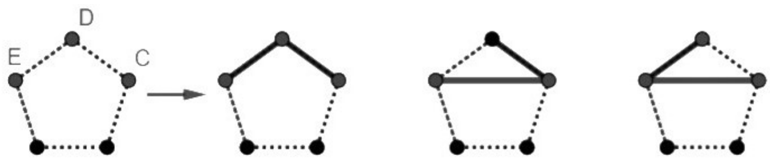
- **Estabelecendo um plano**

  Note que teremos dois tipo de figuras, aquelas em que os dois segmentos estão unidos por um vértice e aquelas em que os dois segmentos não estão unidos por um vértice. Dessa forma, uma ideia para resolver este problema é fazer essa contagem separadamente.

- **Execução do plano**

  Para fazer a contagem das figuras em que os segmentos estão unidos por um vértice, devemos escolher 3 pontos. Escolhidos os pontos há 3 configurações possíveis. Por exemplo, para os pontos C, D e E, temos

Figura 4.25: Tipo I

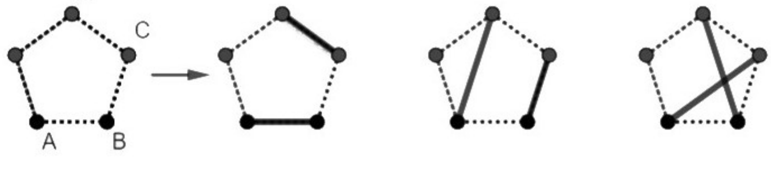


Fonte: Autor

Como dados 5 pontos temos $\frac{5!}{3!2!} = 10$ maneiras de escolher 3 pontos, e para cada escolha temos 3 configurações possíveis, obtemos $10 \cdot 3 = 30$ figuras para este caso.

Para o caso em que os dois segmentos não estão unidos por um vértice, devemos escolher 4 pontos. Escolhidos os pontos temos, também, 3 configurações possíveis, como podemos ver abaixo ao escolher os A, B, C e D.

Figura 4.26: Tipo II



Fonte: Autor

Como temos $\frac{5!}{4!1!} = 5$ maneiras de escolher 4 pontos, obtemos $5 \cdot 3 = 15$ figuras para este caso. Portanto, temos $30 + 15 = 45$ figuras possíveis.

- **Verificação**

  Podemos verificar o resultado resolvendo de uma outra maneira. Para isso, note que há $C_5^2 = \dfrac{5!}{2!3!} = 10$ maneiras de obter um segmento. Como queremos uma figura com dois segmentos, basta combinarmos esses segmentos dois a dois, o que nos dá $C_{10}^2 = \dfrac{10!}{2!8!} = 45$ figuras diferentes.

17. (IME 2014 Q8) Um professor dá um teste surpresa para uma turma de 9 alunos, e diz que o teste pode ser feito sozinho ou em grupos de 2 alunos. De quantas formas a turma pode se organizar para fazer o teste? (Por exemplo, uma turma de 3 alunos pode se organizar de 4 formas e uma turma de 4 alunos pode se organizar de 10 formas).

- **Compreendendo o Problema**

  O problema quer saber de quantas formas uma turma de 9 alunos pode se organizar para um teste, onde os alunos podem fazer individualmente ou em dupla. O enunciado diz, num exemplo, que pode se organizar uma turma de 3 alunos de 4 formas. Suponha os alunos de iniciais A, B e C, e vejamos quais são essas formas, temos $\{A, B, C\}$, onde cada aluno fará a prova individualmente e $\{\overline{AB}, C\}$, $\{B, \overline{AC}\}$ e $\{A, \overline{BC}\}$, onde $\overline{AB}$ significa que os alunos de iniciais A e B compõem uma dupla, totalizando, de fato, 4 formas. Supondo uma turma de 4 alunos, de iniciais A, B, C e D, temos as seguintes formas de organizar a turma, a saber: $\{A, B, C, D\}$,$\{\overline{AB}, C, D\}$,$\{\overline{AC}, B, D\}$,$\{\overline{AD}, B, C\}$,$\{\overline{BC}, A, D\}$, $\{\overline{BD}, A, C\}$, $\{\overline{CD}, A, B\}$,$\{\overline{AB}, \overline{CD}\}$, $\{\overline{AC}, \overline{BD}\}$, $\{\overline{AD}, \overline{BC}\}$. Note que o número de formas de se organizar a turma é determinada pela quantidade de duplas.

- **Estabelecendo um plano**

  Note que podemos ter no máximo 4 duplas. Dessa forma, uma ideia para fazer essa contagem é dividir por casos. Teremos casos em que não haverá dupla, casos em que haverá na turma apenas uma dupla, casos em que teremos duas duplas, casos três duplas e casos em que teremos quatro duplas. Devemos contar de quantas maneiras podemos formar a dupla em cada caso.

- **Executando o plano**

  1° Caso: Não há duplas, dessa forma temos $C_9^0 = 1$ maneira de organizar a turma.

  2° Caso: Com uma dupla, temos $C_9^2 = 36$ maneiras de se organizar a turma.

  3° Caso: Com duas duplas, temos $C_9^2 = 36$ maneiras para forma a primeira dupla. Formada a dupla, temos $C_7^2 = 21$ possibilidades para a segunda dupla. Mas note que formar a dupla $\overline{AB}$ e depois $\overline{CD}$, é mesmo que formar primeiro este e depois aquele para uma mesma organização de turma. Logo, devemos dividir o resultado por 2. Daí, obtemos $\frac{36 \cdot 21}{2} = 378$ possibilidades para este caso.

4° Caso: Com três duplas, temos $C_9^2 = 36$ maneiras para a primeira dupla, $C_7^2 = 21$ maneiras para a segunda dupla, e $C_5^2 = 10$ maneiras para a terceira. E como não há distinção, temos $\frac{36 \cdot 21 \cdot 10}{6} = 1260$ modos.

5° Caso: Para este caso teremos 4 duplas na turma, que pode ser feito de $\frac{C_9^2 C_7^2 C_5^2 C_3^2}{4!} = 945$ modos. Portanto, temos $1 + 36 + 378 + 1260 + 945 = 2620$ modos de organizar a sala para o teste.

18. (ITA 2018 Q17). Quantos pares de números inteiros positivos (A;B) existem cujo mínimo múltiplo comum é $126 \cdot 10^3$? Para efeito de contagem, considerar $(A; B) \equiv (B; A)$.

- **Compreendendo o problema**

  Queremos a quantidade de pares que tem $126 \cdot 10^3$ como mínimo múltiplo comum. Por exemplo 6000 e 1260 é um desses pares. E pediu para considerarmos $(A; B) \equiv (B; A)$, ou seja, não há distinção entre os pares (6000,1260) e (1260,6000).

- **Estabelecendo um plano**

  Uma ideia é escrever o mmc dado na sua forma fatorada. Daí, como A e B são seus divisores, podemos escrevê-los como uma combinação desses fatores, de modo que tenhamos em pelo menos um deles o fator de potência máxima. Além disso, devemos ter cuidado com a contagem dupla, ou seja, devemos subtraí-la caso seja necessário.

- **Executando o plano**

  Podemos escrever $126 \cdot 10^3 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^1$. Como A e B são divisores de $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^1$ podemos escrevê-los como: $A = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} \cdot 7^{a_4}$ e $B = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3} \cdot 7^{b_4}$. Daí, como pelo menos um dos pares (a_i, b_i) tem que ser máximo, temos as possíveis soluções para cada um dos pares

  Para (a_1, b_1) temos: $\{(4,0),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(0,4),(1,4),(2,4),(3,4)\}$ (9 possibilidades)

  Para (a_2, b_2) temos:$\{(2,0),(2,1),(2,2),(0,2),(1,2)\}$ (5 possibilidades)

  Para (a_3, b_3) temos: $\{(3,0),(3,1),(3,2),(3,3),(0,3),(1,3),(2,3)\}$ (7 possibilidades)

  e Para (a_4, b_4) temos: $\{(1,0),(1,1),(0,1)\}$ (3 possibilidades)

  Pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos $9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 = 945$ pares de números com mmc igual $126 \cdot 10^3$. Mas como $(A; B) \equiv (B; A)$, por exemplo, ao contar o par $A = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^1$ e $B = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1$, o contamos novamente quando $A = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1$ e $B = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^1$, o único par que não devemos subtrair da contagem é o par $(126 \cdot 10^3; 126 \cdot 10^3)$ que foi contado apenas uma vez. Daí, foram contados duas vezes $\dfrac{945-1}{2} = 472$ pares. Portanto, temos $945 - 472 = 473$ pares $(A; B)$ distintos cujo mmc é $126 \cdot 10^3$.

Capítulo 5

Problemas propostos

O objetivo deste capítulo é propor problemas adaptados às ideias de George Pólya que possam ser trabalhados em sala de aula e servir de referência para que professores possam fazer suas próprias adaptações.

1. (Problema extraído do livro [9]) Escrevem-se números de 5 dígitos, inclusive os começados em 0, em cartões. Como 0, 1 e 8 não se alteram de cabeça para baixo e como 6, de cabeça para baixo, se transforma em 9 e vice-versa, um mesmo cartão pode representar dois números (por exemplo, 06198 e 86190). Qual é o número mínimo de cartões para representar todos os números de 5 dígitos?

   - **Lendo e compreendendo**
     - O que é dado?
     - O que o problema pede?
     - Podemos distinguir os cartões em três tipos, quais? Dê um exemplo de cada tipo.
     - Quantos cartões há do tipo que virados de cabeça para baixo continuam representando números?
   - **Plano e execução**
     - Há quantos números de cartões no total?
     - Qual é a solução do problema?
   - **Verificação**
     - Releia o problema e verifique se todas as condições foram satisfeitas.

2. (ENEM 2013) Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta corrente pela internet. Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um

deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres. Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo. O coeficiente de melhora da alteração recomendada é:

(a) $\dfrac{62^6}{10^6}$

(b) $\dfrac{62!}{10!}$

(c) $\dfrac{62!4!}{10!56!}$

(d) $62! - 10!$

(e) $62^6 - 10^6$

- **Lendo e compreendendo**
  - O que é dado?
  - O que se pede?
- **Plano e execução**
  - Quantos caracteres podem ser usados na nova senha sugerida pelo especialista?
  - Quantas senhas podemos formar usando o antigo sistema de senhas?
  - Quantas senhas podemos formar usando o novo sistema de senhas?
  - Qual é o coeficiente de melhora?
- **Verificação**
  - Releia o problema e verifique se todas as condições foram satisfeitas. Discuta com seus colegas que fatores são relevantes para considerar uma senha forte.

3. Quantos elementos tem o maior subconjunto de $\{1, 2, 3, ..., 25\}$ que não contêm dois números distintos cujo produto é um quadrado perfeito?

- **Lendo e compreendendo**
  - Qual é a condição que deve ser satisfeita?
  - Dê exemplo de um conjunto com 8 elementos que satisfaça a condição do problema.
- **Plano e execução**

- Escreva todos os conjuntos onde o produto de quaisquer dois ou mais elementos formam um quadrado perfeito.
- Qual a resposta do problema?

• **Verificação**

- Releia o problema, verifique se as condições foram satisfeitas e demonstre seu resultado usando o *Princípio das gavetas*.

4. (OBM 2012) Numa loja de ferragens, vários produtos são vendidos pelo peso. Um prego, três parafusos e dois ganchos pesam 24 g. Dois pregos, cinco parafusos e quatro ganchos pesam 44 g. Juquinha comprou 12 pregos, 32 parafusos e 24 ganchos. Quanto pesou sua compra?

(a) 200 g

(b) 208 g

(c) 256 g

(d) 272 g

(e) 280 g

• **Lendo e compreendendo**

- Analise as informações do enunciado e anote as que julgar relevantes para a resolução do problema.
- Se um prego, três parafusos e dois ganchos pesam 24 g, quanto pesarão dois pregos, seis parafusos e quatro ganchos?
- Qual é a massa de um parafuso?

• **Plano e execução**

- Use a informação do item anterior e monte um sistema de duas equações.
- Quanto pesam um prego e um parafuso?
- Quanto pesou a compra de Juquinha?

• **Verificação**

- Verifique o resultado encontrado através de outra estratégia de solução.

5. (ENEM 2020) Amigo secreto é uma brincadeira tradicional nas festas de fim de ano. Um grupo de amigos se reúne e cada um deles sorteia o nome da pessoa que irá presentear. No dia da troca de presentes, uma primeira pessoa presenteia seu amigo secreto. Em seguida, o presenteado revela seu amigo secreto e o presenteia. A brincadeira continua até que todos sejam presenteados, mesmo no caso em que o ciclo se fecha. Dez funcionários de uma empresa, entre eles um casal, participarão de um amigo secreto. A primeira pessoa a revelar será definida por sorteio. Qual é a probabilidade de que a primeira pessoa a revelar o seu amigo secreto e a última presenteada sejam as duas pessoas do casal?

(a) $\frac{1}{5}$

(b) $\frac{1}{45}$

(c) $\frac{1}{50}$

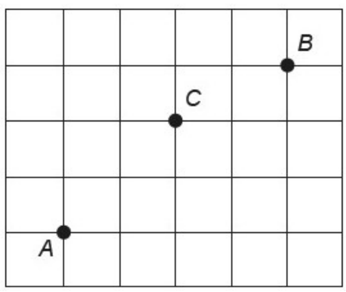
(d) $\frac{1}{90}$

(e) $\frac{1}{100}$

- **Lendo e compreendendo**
  - O que é dado?
  - Qual a condição que deve ser satisfeita? Esboce um exemplo.
- **Plano e execução**
  - Considere que o ciclo não se fecha antes de todos serem presenteados para cada item abaixo.
  - Quantos são os casos favoráveis?
  - Quantos são os casos possíveis?
  - Qual é a probabilidade de que a primeira pessoa a revelar o amigo secreto seja uma pessoa do casal?
  - Se a primeira pessoa a revelar o amigo secreto foi uma pessoa do casal, qual é a probabilidade de que a última a revelar seja seu companheiro(a)?
- **Explorando o problema**
  - Considere o caso em que o ciclo se fecha antes de todos serem presenteados, é possível satisfazer a pergunta do enunciado? Discuta com seus colegas de sala.

6. (ENEM 2020) Três amigos, André, Bernardo e Carlos, moram em um condomínio fechado de uma cidade. O quadriculado representa a localização das ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho nesse condomínio, em que nos pontos A, B e C estão localizadas as casas de André, Bernardo e Carlos, respectivamente.

Figura 5.1: Ruas



Fonte: ENEM 2020

André deseja deslocar-se da sua casa até a casa de Bernardo, sem passar pela casa de Carlos, seguindo ao longo das ruas do condomínio, fazendo sempre deslocamentos para a direita ($\rightarrow$) ou para cima ($\uparrow$), segundo o esquema da figura. O número de diferentes caminhos que André poderá utilizar para realizar o deslocamento nas condições propostas é

(a) 4

(b) 14

(c) 17

(d) 35

(e) 48

- **Lendo e compreendendo**
  - Esboce um caminho possível.
  - Qual a condicionante?
- **Plano e execução**
  - Quantos caminhos existem da casa de André a casa de Bernardo?
  - Quantos caminhos existem da casa de André a casa de Carlos?
  - Quantos caminhos existem da casa de Carlos a casa de Bernardo?
  - Qual a resposta do problema?
- **Explorando o problema**
  - Suponha que além de fazer o deslocamentos para a direita ($\rightarrow$) ou para cima ($\uparrow$), André também possa se deslocar para baixo ($\downarrow$), quantos são os caminhos possíveis seguindo essas condições?

7. (ENEM 2020) Nos livros Harry Potter, um anagrama do nome do personagem "TOM MARVOLO RIDDLE" gerou a frase "I AM LORD VOLDEMORT".

   Suponha que Harry quisesse formar todos os anagramas da frase "I AM POTTER", de tal forma que as vogais e consoantes aparecessem sempre intercaladas, e sem considerar o espaçamento entre as letras.

   Nessas condições, o número de anagramas formados é dado por

   (a) $9!$

   (b) $4!5!$

   (c) $2 \times 4!5!$

   (d) $\dfrac{9!}{2}$

(e) $\dfrac{4!5!}{2}$

- **Lendo e compreendendo**
  - É possível satisfazer as condições do problema? Dê um exemplo.
  - É possível satisfazer as condições do enunciado com o nome do personagem "TOM MARVOLO RIDDLE"? Dê um exemplo?
- **Plano e execução**
  - Quantos anagramas podemos formar só com as vogais?
  - Quantos anagramas podemos formar só com as consoantes?
  - Qual a alternativa correta?
- **Explorando o problema**
  - Quantos anagramas podemos formar com a frase "I AM POTTER", de tal forma que as vogais e consoantes aparecessem sempre intercaladas e em ordem alfabética?

8. (ENEM 2016) O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro.

   Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém, não poderão ser ambos canhotos.

   Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

   (a) $\dfrac{10!}{2! \times 8!} - \dfrac{4!}{2! \times 2!}$

   (b) $\dfrac{10!}{8!} - \dfrac{4!}{2!}$

   (c) $\dfrac{10!}{2! \times 8!} - 2$

   (d) $\dfrac{6!}{4!} + 4 \times 4$

   (e) $\dfrac{6!}{4!} + 6 \times 4$

- **Lendo e compreendendo**
  - O que é dado?
  - Que condições devem ser satisfeitas?
- **Plano e execução**
  - Quantas partidas podemos realizar entre canhotos?
  - Quantas partidas podemos realizar entre destros?
  - Quantas partidas podemos realizar entre destros e canhotos?

  - Quantas partidas podemos realizar sem restrições?
  - Qual a resposta do enunciado?

- **Verificação**
  - Verifique o resultado usando outra estratégia de solução.

9. (ENEM 2012) Em um jogo há duas urnas com 10 bolas de mesmo tamanho em cada urna. A tabela a seguir indica as quantidades de bolas de cada cor em cada urna.

Figura 5.2: Tabela de disposição das bolas

Cor	Urna 1	Urna 2
Amarela	4	0
Azul	3	1
Branca	2	2
Verde	1	3
Vermelha	0	4

Fonte: ENEM 2012

Uma jogada consiste em:

1º) o jogador apresenta um palpite sobre a cor da bola que será retirada por ele da urna 2;

2º) ele retira, aleatoriamente, uma bola da urna 1 e a coloca na urna 2, misturando-a com as que lá estão;

3º) em seguida ele retira, também aleatoriamente, uma bola da urna 2;

4º) se a cor da última bola retirada for a mesma do palpite inicial, ele ganha o jogo.

Qual cor deve ser escolhida pelo jogador para que ele tenha a maior probabilidade de ganhar?

(a) Azul

(b) Amarela

(c) Branca

(d) Verde

(e) Vermelha

- **Lendo e compreendendo**
  - Para o jogador ganhar, é necessário acertar os palpites da urna 1 e urna 2?

- **Plano e execução**
  - Qual é a probabilidade de tirar a bola amarela?
  - Qual é a probabilidade de tirar a bola azul?
  - Qual á probabilidade de tirar a bola branca?
  - Qual é a probabilidade de tirar a bola verde?
  - Qual é a a probabilidade de tirar a bola vermelha?
- **Explorando o problema**
  - Se acrescentarmos mais uma bola de cada cor (exceto de cor vermelha) na urna 1, qual seria a melhor escolha para o jogador?

10. (ENEM 2018) Para ganhar um prêmio, uma pessoa deverá retirar, sucessivamente e sem reposição, duas bolas pretas de uma mesma urna. Inicialmente, as quantidades e cores das bolas são como descritas a seguir:

    - Urna A – Possui três bolas brancas, duas bolas pretas e uma bola verde;
    - Urna B – Possui seis bolas brancas, três bolas pretas e uma bola verde;
    - Urna C – Possui duas bolas pretas e duas bolas verdes;
    - Urna D – Possui três bolas brancas e três bolas pretas.

    A pessoa deve escolher uma entre as cinco opções apresentadas:

    - Opção 1 – Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A;
    - Opção 2 – Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna B;
    - Opção 3 – Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna A; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A;
    - Opção 4 – Passar, aleatoriamente, uma bola da urna D para a urna C; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna C;
    - Opção 5 – Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna D; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna D.

    Com o objetivo de obter a maior probabilidade possível de ganhar o prêmio, a pessoa deve escolher a opção

    (a) 1

    (b) 2

    (c) 3

    (d) 4

    (e) 5

- **Lendo e compreendo**
  - Qual a condição para o jogador vencer o jogo?
- **Plano e execução**
  - Calcule a probabilidade de tirar duas bolas pretas em cada uma das opções.
- **Explorando o problema**
  - Se o jogador pudesse escolher a cor das bolas, isto é, em vez de preta, pudesse escolher, também, verde ou branca, qual seria a melhor opção?

11. (ENEM 2017) O comitê organizador da Copa do Mundo 2014 criou a logomarca da Copa, composta de uma figura plana e o *slogan* "Juntos num só ritmo", com mãos que se unem formando a taça Fifa. Considere que o comitê organizador resolvesse utilizar todas as cores da bandeira nacional (verde, amarelo, azul e branco) para colorir a logomarca, de forma que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

Figura 5.3: Logomarca da Copa do Mundo de 2014

Fonte: ENEM 2017

De quantas maneiras diferentes o comitê organizador da Copa poderia pintar a logomarca com as cores citadas?

(a) 15

(b) 30

(c) 108

(d) 360

(e) 972

- **Lendo e compreendendo**
  - Que condição deve ser satisfeita?
  - Podemos usar somente duas cores para pintar a logomarca?

- **Plano e execução**
  - Quantos são os casos em que podemos pintar com até três cores?
  - Quantos são os casos em que pintamos com até duas cores?
- **Verificação**
  - Releia o problema e verifique se todas as condições foram satisfeitas.

Capítulo 6

Considerações Finais

O desenvolvimento do presente trabalho nos possibilitou compreender o quanto as técnicas de George Pólya contribuem para a construção de uma proposta de ensino com a metodologia da resolução de problemas. Em cada uma das etapas do método, mostramos de que modo o professor pode dialogar com o aluno durante o processo de resolução. Na nossa pesquisa decidimos abordar problemas de otimização e de contagem por se tratar de problemas que os alunos sentem dificuldades. Além disso, nos possibilitou mostrar como podemos explorar um problema, como podemos reestruturá-los e torná-los mais acessíveis para os alunos que têm dificuldades em desenvolver uma sequência lógica de passos na busca da solução. A ideia é que através da prática, o aluno desenvolva a capacidade de abordar e refletir sobre um problema.

Dessa maneira, recomenda-se o uso desse recurso didático pois ele pode propiciar ao aluno uma aprendizagem dos conceitos matemáticos relacionados a qualquer conteúdo de matemática. Assim sendo, pode-se enfatizar que esse método contribui de forma significativa para o desenvolvimento do processo de ensino aprendizagem de matemática e pode ser aplicado a todos os níveis de ensino.

Portanto, precisamos reconhecer e refletir o ensino e a aprendizagem da matemática abordada através da metodologia da resolução de problemas. Lógico que ensinar matemática através da resolução de problemas não é tarefa fácil, pois requer do professor esforço e dedicação. Entretanto, Onuchic e Allevato em [20] nos dão boas razões para isso, pois a resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e que, cada vez que a classe resolve um problema, a compreensão, a confiança e o potencial dos alunos são desenvolvidas.

Referências Bibliográficas

[1] Andreatta, C.; Allevato, N. S. G. *A Resolução de Problemas nos documentos de orientação curricular oficiais da Educação Básica Brasileira*. Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, v. 7, p. 1–12, 2018.

[2] Balieiro, I. F. *Arquimedes, Pappus, Descartes e Pólya - Quatro Episódios na História da Heurística*, Tese (Doutorado em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosóficos Científicos) — Rio Claro, UNESP, 2004.

[3] Brasil, M. E. C. *Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio*, Brasília: SEMTEC, 1999.

[4] Brasil, Ministério da Educação e Cultura. *Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio*, 2018.

[5] Brasil, PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. *Ciências da Natureza, matemática e suas tecnologias*, Secretaria de Educação Média e Tecnológica, Brasília: MEC, SEMTEC, 2002.

[6] Dante, L. R. *Formulação e resolução de problemas de matemática*. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2010.

[7] Diniz, M. *A metodologia "Resolução de Problemas". Revista do professor de Matemática*, Nº 18, Rio de Janeiro: SBM, 1991.

[8] Lima, E. L. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 5ª edição, 2006.

[9] Lima, Elon Lages et al. Temas e problemas. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[10] "George Pólya" em Só Matemática. Virtuous Tecnologia da Informação, 1998-2022. Disponível na Internet em <https://www.somatematica.com.br/biograf/polya.php> Consultado em 07/04/2022.

[11] Onuchic, L. R. *A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos?*, Revista Espaço Pedagógico, v. 20, n. 1, 2013.

[12] Luckesi, C. C. *Avaliação da aprendizagem escolar*. 14. ed. São Paulo: Cortez, 2002.

[13] Matthews, R.S.; Cooper, J.L.; Davidson, N.; Hawkes, P. *Building bridges between cooperative and collaborative learning*, Change, v. 27, p. 35–40, 1995.

[14] Mandarino, M. C. F. *Os professores e a arte de formular problemas contextualizados*, II Bienal da SBM.

[15] Mol, R. S. *Introdução à história da matemática*. Belo Horizonte: CAED-UFMG, p. 17, 2013.

[16] Micotti, M. *O ensino e as propostas pedagógicas*. In.: Bicudo, Maria Aparecida Viggiani. *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

[17] Morais, D. C. de, Filho. *Manual de Redação Matemática*, Campina Grande, 2010.

[18] Morgado, A.; Pitombeira de Carvalho, J.; Pinto de Carvalho, P.; Fernandez, P. *Análise combinatória e probabilidade*. Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

[19] Onuchic, L. R. *Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas*. In: Bicudo, M. A. V. (Org.). Pesquisa em Educação Matemática. São Paulo: Editora UNESP, p.199–220, 1999.

[20] Onuchic, L. R.; Allevato, N. S. G. *Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas*. In: Bicudo, M. A. V.; Borba, M. C. (Org.) Educação Matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortezp, p. 212-231, 2004.

[21] Onuchic, L. R.; Allevato, N. S. G. *Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas*. Bolema-Mathematics Education Bulletin, p. 73–98, 2011.

[22] Parâmetros curriculares nacionais : matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF, p.142, 1997.

[23] Parâmetros curriculares nacionais : terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF, p.174, 1998.

[24] Pereira, A. L. *Problemas Matemáticos: caracterização, importância e estratégias de solução*. São Paulo: USP, 2002.

[25] Pinto, N. B. *O erro como estratégia didática: Estudo do erro no ensino da matemática elementar* / Neuza Bertoni Pinto.- Campinas, SP: Papirus, 2000.-(Série Prática Pedagógica)

[26] Pólya, G. *A arte de resolver problemas.* Rio de Janeiro: interciência, v. 2, p. 12, 1978.

[27] Pólya, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático* / G. Polya, 1887; tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. – 2ª reimpressão - Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

[28] Pólya, G. *A arte de resolver problemas.* 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, p. 203, 2006.

[29] Sánchez Huete, J. C.; Fernández Bravo, J. A. *O ensino da matemática: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas.* Trad. Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006.

[30] Schroeder, T. L., Lester Jr., F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: Trafton, P. R., Shulte, A. P. (Eds.). *New Directions for Elementary School Mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics, 1989. (Year Book).

[31] Smole, K. S.; Diniz, I. (org.). *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática.* Porto Alegre: Artmed, 2001.

[32] Stanic, George M. A.; Kilpatrick, Jeremy. *Perspectivas históricas da resolução de problemas no currículo de matemática*, 1989.