Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

Erimar Da Costa Silva

Alguns substitutos para o quinto postulado de Euclides

Teresina - 2022

Erimar da Costa Silva

Dissertação de Mestrado:

Alguns substitutos para o quinto postulado de Euclides

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - Profmat, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática na modalidade profissional.

Orientador:
Prof. Dr. Newton Luís Santos.

Teresina - 2022

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas da UFPI – SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

S586a Silva, Erimar da Costa.
Alguns substitutos para o quinto postulado de Euclides / Erimar da Costa Silva. – 2022.
50 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT, Teresina, 2022.
"Orientador: Prof. Dr. Newton Luís Santos".

1. Geometria Euclidiana. 2. Geometria Hiperbólica. 3. Axiomas das Paralelas. 4. Quinto Postulado Euclidiano. I. Santos, Newton Luís. II.Título.

CDD 512.5

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes. CRB/3-1461

Erimar da Costa Silva

Alguns substitutos para o quinto postulado de Euclides

Dissertação submetida à banca examinadora abaixo discriminada em defesa pública e apro vada em 25/02/2022.

BANCA EXAMINADORA

Newton Santos

Orientador Prof Dr Newton Luís Santos

Universidade Federal do Piauí

Antonio Kelson V da Silva

Prof Dr Antonio Kelson Vieira da Silva

Universidade Federal do Piauí

Adécio da Silva Santos

Prof Msc Adécio da Silva Santos

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão - IFMA

Teresina - 2022

Dedico esta dissertação à toda minha família, em especial, minha mãe EVA (in memorian), meu pai Francisco, minha esposa Francisca Célia e minhas filhas Maria Eduarda e Maria Luiza.

Agradecimentos

Agradeço a todos os professores do programa PROFMAT, que ministraram brilhantemente, as disciplinas, em especial, agradeço a meu orientador Newton Luís Santos, que acreditou que era possível desenvolver essa dissertação.

Agradeço a todos os amigos da turma do Profmat: Daniel(In memorian), Dalton, Bezerra, Giorsan(Lobo Solitário), Giovana, Gerson, Ítalo, José Augusto, Leonardo, Rodolfo e Rodrigo, pela grande ajuda, bem como, os colegas Delon, Antônio Pinheiro, Francisco Teixeira, Juscelino e Lucas, que por um motivo, ou outro, não conseguiram concluir.

Agradeço pela compreenção de minha esposa e filhas, pelas horas que passei distante e por todos os meus amigos, que muito me apoiaram.

Aula de Matemática

Pra que dividir sem raciocinar
Na vida é sempre bom multiplicar
E por A mais B
Eu quero demonstrar
Que gosto imensamente de você

Por uma fração infinitesimal,
Você criou um caso de cálculo integral
E para resolver este problema
Eu tenho um teorema banal

Quando dois meios se encontram
desaparece a fração
E se achamos a unidade
Está resolvida a questão

Pra finalizar, vamos recordar
Que menos por menos dá mais, amor
Se vão as paralelas,
Ao infinito se encontrar,
Por que demoram tanto os corações a se integrar?
Se infinitamente, incomensuravelmente,
Eu estou perdidamente, apaixonado por você.

Tom Jobim.

Resumo

A história do quinto postulado de Euclides atravessa dois milênios de pesquisas que permitiram, não somente uma melhor compreensão do processo de construção axiomática em Matemática, como também a criação de outras geometrias, hoje chamadas não euclidianas. Em particular, devido aos inúmeros esforços na tentativa de demonstração deste postulado, nasceu a geometria hiperbólica a partir da negação do quinto postulado. Nesta dissertação discutimos alguns dos substitutos ao quinto postulado, isto é, teoremas que são demonstrados em curso de Geometria Euclidiana, mas que, se assumidos como axioma, implicam no axioma das paralelas(o quinto postulado).

Palavras-Chave: Axiomas das Paralelas, Demonstrações, Geometria Euclidiana, Geometria hiperbólica, Quinto Postulado de Euclides, substitutos ou Equivalentes.

Abstract

The history of Euclid's fifth postulate spans two millennia of research that allowed not only a better understanding of the axiomatic construction process in Mathematics, but also the creation of other geometries, today called non-Euclidean. In particular, due to the innumerable efforts in the attempt to demonstrate this postulate, hyperbolic geometry was born from the negation of the fifth postulate. In this dissertation we discuss some of the substitutes for the fifth postulate, that is, theorems that are demonstrated in a Euclidean Geometry course, but which, if assumed as an axiom, imply the axiom of parallels (the fifth postulate).

Keywords: Parallel Axioms, Proofs, Euclidean Geometry, Hyperbolic Geometry, Euclid's Fifth Postulate, Substitutes or Equivalents.

Lista de Figuras

2.1 Ptolomeu 5
2.2 Posidônio de Apameia 6
2.3 Proclo Diádoco 7
2.4 Nasiredine 7
2.5 Cristóvão Clávio 7
2.6 John Wallis 8
2.7 Girolamo Saccheri 9
2.8 Georg Klügel 10
2.9 Johann Heinrich Lambert 10
2.10 John Playfair 11
2.11 Adrien Marie Legendre 11
2.12 Carl Friedrich Gauss 12
2.13 Janos Bolyai 12
2.14 Nikolai Ivanovich Lobachewski 13
2.15 Eugenio Beltrami 13
2.16 David Hilbert 14

3.1 figura auxiliar do 5^0 postulado 16

4.1 Apoio para demonstração do Teorema do ângulo externo 20
4.2 Apoio para demonstração da proposição 27 de Euclides 20
4.3 Apoio para demonstração da proposição 27 de Euclides 20
4.4 Apoio para demonstração da proposição 28 de Euclides 21
4.5 Apoio para demonstração da proposição 29 de Euclides 21
4.6 Apoio para demonstração do Axioma de Playfair 23

4.7 Apoio para demonstração do Axioma de Playfair e o 5^0 postulado 23
4.8 Apoio para demonstração do Axioma de Playfair e o 5^0 postulado. 23
4.9 Apoio para demonstração do Axioma de Playfair e o 5^0 postulado. 24
4.10 Apoio para demonstração da equivalência da soma dos ângulos de um triângulo ser dois retos e o 5^0 postulado. 24
4.11 Apoio para demonstração da equivalência da soma dos ângulos de um triângulo ser dois retos e o 5^0 postulado. 25
4.12 Apoio para demonstração do lema do ângulo externo de um triângulo. . . . 25
4.13 Apoio para demonstração do Lema 2. 25
4.14 Triângulo retângulo isósceles. 26
4.15 Processo construtivo de triângulos isósceles. 26
4.16 Sequência de triângulos isósceles obtida por processo construtivo. 26
4.17 Apoio para a demonstração da equivalência da soma dos ângulos de um triângulo ser dois retos e o 5^0 postulado. 27
4.18 Apoio para o Axioma de Pasch. 27
4.19 Equivalência entre a existência de triângulos semelhantes e não congruentes e o 5^0 postulado. 28
4.20 Apoio para a primeira proposição de Legendre. 29
4.21 Apoio para demonstração da segunda proposição de Legendre. 30
4.22 Apoio para a demonstração da segunda proposição de Legendre. 30
4.23 Apoio para a demonstração da segunda proposição de Legendre. 31
4.24 Apoio para demonstração de equivalência entre a existência de triângulos semelhantes e não congruentes e o 5^0 postulado. 32
4.25 Apoio para demonstração de equivalência entre a existência de triângulos semelhantes e não congruentes e o 5^0 postulado. 32
4.26 Apoio para a demonstração de equivalência entre a existência de retas equidistantes e o 5^0 postulado. 33
4.27 Apoio para a demonstração de equivalência entre a existência de retas equidistantes e o 5^0 postulado. 33
4.28 Apoio para a demonstração de equivalência entre a existência de retas equidistantes e o 5^0 postulado. 33
4.29 Apoio para a demonstração do teorema de Pitágoras como equivalente do 5^0 postulado. 34

4.30 Apoio para demonstração do teorema de Pitágoras como equivalente do 5^0 postulado. 35
4.31 Apoio para demonstração do teorema de transitividade de retas paralelas. . 36
4.32 Apoio para demonstração do teorema de transitividade de retas paralelas. . 36

Sumário

Resumo **iv**

Abstract **v**

Sumário ix

1 Introdução **1**

2 O decorrer histórico **5**

3 As Bases da Geometria Euclidiana Plana **15**

3.1 Os Axiomas de Euclides 15

3.1.1 Noções Comuns de Euclides 15

3.1.2 Os Cinco Postulados de Euclides 16

3.2 Os Axiomas de Hilbert 16

3.2.1 Axiomas de Incidência 17

3.2.2 Axiomas de Ordem 17

3.2.3 Axiomas de Congruência 17

3.2.4 Axiomas de Continuidade 18

3.2.5 Axiomas das Paralelas 18

4 Equivalentes do Quinto Postulado de Euclides **19**

4.1 Proposições Importantes 19

4.2 O Quinto Postulado e Alguns dos seus Equivalentes 22

5 Considerações Finais **37**

Capítulo 1

Introdução

Esta dissertação aborda um conteúdo, que há mais de 2000 anos é motivo de estudos, de muitas discussões profundas, entre os mais renomados amantes e estudiosos da matemática da época e contemporâneos.

Tais discussões, giravam em torno do quinto postulado de Euclides, publicado no livro "Os elementos"a cerca de 300 anos a.C. Acreditavam, inclusive o próprio Euclides, que a afirmação do 5º postulado, não deveria ser apenas um enunciado a ser aceito, mas uma afirmação passível de demonstração, elevando-se ao grau de teorema e não apenas, de um simples postulado.

Segundo Almir e Humberto em [2] (2011) *"O trabalho de Euclides destaca-se pelo fato de que com apenas 5 postulados ele foi capaz de deduzir 465 proposições, muitas complicadas e não intuitivas".*

As várias tentativas, fracassadas, de demonstração do 5º postulado levaram não só a uma melhor compreensão da geometria euclidiana, mas também à descobertas de outras geometrias, as chamadas não-euclidianas, tais como: a geometria hiperbólica e a geometria elíptica. Além disso, permitiram compreender melhor, a importancia da fundamentação lógica na Matemática. Elas se baseavam em um sistema axiomático totalmente diferente, que não vem a ser, a priori, o motivo de nosso estudo.

Segundo Barbosa em [3](1994),

> *Uma das consequências da busca da prova do 5º postulado, foi a produção de um número de substitutos (ou equivalentes) a esse postulado. Estes substitutos são proposições equivalentes ao quinto postulado, ou seja, usando-se os quatro primeiros postulados, mais o substituto, é possível desenvolver a mesma geometria euclidiana.*

Para que uma proposição seja considerada um substituto, é necessário que:

1-A proposição a ser usada, faça parte da geometria euclidiana, ou seja, a proposição possa ser demonstrada com os cinco postulados originais.

2-Usando os quatro primeiros postulados originais, mais o substituto, é possível demonstrar o quinto postulado.

Existem vários sustitutos ou equivalentes para o quinto postulado de Euclides.

O professor Sérgio Alves, da Universidade de São Paulo, elencou de forma organizada por assunto, um grande número destes substitutos, encontrados em "Notas de Geometria não-euclidiana"e publicadas em [10](2014). Vejamos:

Retas:

• *Por um ponto fora de uma reta dada, passa exatamente uma reta, paralela àquela.* (axioma de Playfair)

• *Existe um par de linhas retas que estão a uma distância constante uma da outra.*

• *Se duas retas distintas são paralelas a uma terceira, então são paralelas entre si.*

• *Se uma reta intersecta uma, de duas retas paralelas no plano, então intersecta também a outra.* (axioma de Proclus)

• *Quaisquer duas retas paralelas têm duas retas perpendiculares comuns.*

• *Quaisquer três retas distintas têm uma transversal comum.*

• *Não existem três retas tais que duas delas estejam do mesmo lado da terceira.*

• *Duas retas paralelas quaisquer têm uma perpendicular comum.*

• *Se duas retas paralelas são cortadas por uma tranversal, os ângulos alternos internos são iguais, e os correspondentes também o são.*

• *Dado as retas r , s , se r é paralela a s, então r é equidistante de s.*

• *Dada uma reta r, o conjunto dos pontos que estão do mesmo lado de r e que são equidistantes de r, é uma reta.*

• *Dadas as retas r , s , u , v, E se r é paralela a s, u é perpendicular a r e v é perpendicular a s, então u e v são paralelas.*

• *Dadas as retas r , s , u , v, E se $r \perp s$, $s \perp u$ e $u \perp v$, e se r e v são retas concorrentes então são perpendiculares.*

• *Se a reta AB é paralela a reta CD e a reta BC é transversal a ambas, tal que A e D estão do mesmo lado de BC, então $\angle ABC + \angle DCB = 180^0$.*

• *Dado um ponto interior de um ângulo, então uma reta pode ser traçada por este ponto, intersectando ambos os lados do ângulo.*

Triângulos:

• *A soma dos ângulos internos de cada triângulo, é igual a dois retos.* (postulado do triângulo)

• *Existe um par de triângulos semelhantes, mas não congruêntes.*

• *Todo triângulo pode ser circunscrito.*

• *As mediatrizes dos catetos de um triângulo retângulo, são retas concorrentes.*

• *Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados (Teorema de Pitágoras).*

• *Dado um triângulo ABC, se $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$, então o ângulo B é um ângulo reto (inversa do Teorema de Pitágoras).*

• *Dado um triângulo ABC, existe o triângulo DEF de tal modo que $A \in \overline{DE}$, $B \in \overline{EF}$ e $C \in \overline{FD}$.*

• *Dado um triângulo ABC, e se D e E são, respectivamente, os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, então $\overline{AC} = \frac{1}{2}\ \overline{BC}$*

• *Dado um triângulo ABC, com B no círculo de diâmetro $\overline{AC}$, então $\angle ABC$ é um ângulo reto (Tales).*

• *Existem triângulos com áreas arbitrariamente grande(axioma de Wallis).*

• *Em todo triângulo, a medida de cada ângulo exterior é igual à soma das medidas dos ângulos que não lhe são adjacentes.*

Retângulos:

• *Todo quadrilátero de Saccheri, é um retângulo.*

• *Os ângulos do topo de um quadrilátero de Saccheri, medem 90^0.*

• *Se os três ângulos internos de um quadrilátero são ângulos retos, então o quarto ângulo é também um ângulo reto.*

• *Existe um quadrilátero em que todos os ângulos internos, são retos.*

• *(Hipótese do ângulo reto de Saccheri) Existe um retângulo.*

• *Todo quadrilátero de Lambert é um retângulo.*

• *As diagonais de um quadrilátero de Saccheri se intersectam no ponto médio de ambas.*

Círculos:

• *Dados três pontos não colineares, então existe uma circunferência que os contém.*

• *Se o $\angle ABC$ é um ângulo reto, então B pertence à cicunferência de diâmetro $\overline{AC}$*

• *Se A, B e C são pontos de uma circunferência com centro D de tal modo que B e D estão do mesmo lado da reta AC, então $\angle ABC = \frac{1}{2}\ \angle ADC$.*

- *Uma curva de curvatura constante diferente de zero é um círculo.*
- *Uma curva de curvatura constante diferente de zero tem extensão finita.*
- *Existem círculos de curvatura arbitrariamente baixa.*
- *A área de um círculo cresce no máximo polinomialmente em seu raio.*

Percebam que a lista é um tanto quanto extensa e demonstrar todos esses substitutos do quinto postulado de Euclides requer uma grande habilidade e uma disponibilidade enorme de tempo. Vamos fazer a demonstração de alguns que aparecem em textos de geometria euclidiana, bem como, geometrias não-euclidianas.

Capítulo 2

O decorrer histórico

Neste capítulo vamos falar dos principais matemáticos que ao longo da história tentaram, incansavelmente, demonstrar o quinto postulado de Euclides. Estas tentativas de demonstração, mesmo que fracassadas, tiveram suas contribuições nas bases da geometria euclidiana e no surgimento dos substitutos ou equivalentes ao quinto postulado, bem como das geometrias não-euclidianas.

Ptolomeu: Dos escritos do filosofo, matemático e historiador, Proclo (410-485) vieram comentários a respeito do trabalho de Ptolomeu. Segundo ele, Euclides viveu em Alexandria durante o reinado do primeiro Ptolomeu, que era também geógrafo e astrônomo, e este, escreveu um livro sobre o quinto postulado de Euclides, onde era proposta uma das suas primeiras tentativas de demonstrações. Intitulava-se "Que linhas prolongadas de ângulos menores que dois ângulos retos encontram-se uma com a outra". O que Ptolomeu afirma no título do livro é precisamente o quinto postulado de Euclides, no sentido em que os ângulos a que se refere são os dois ângulos também referidos no dito postulado como menores que dois retos, porém, sua demonstração continha um erro, pois assumia que o paralelismo acarreta na congruência de duas figuras, quando assume que as propriedades aceitas para os ângulos interiores de um lado da reta transversal também devem ser válidas para os ângulos do outro lado, ele acabou admitindo uma propriedade que é verdadeira somente sob a validade do Postulado das Paralelas.

Figura 2.1: Ptolomeu

Fonte: Opera Mundi-uol

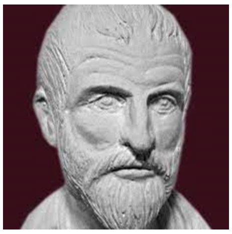
Posidônio de Apameia (135 - 51 a.C.): No século I a.C., Posidônio apresentou uma definição de paralelismo segundo a qual as retas paralelas são as retas equidistantes, ou seja, duas linhas retas são paralelas se a distância medida numa qualquer perpendicular de uma delas for sempre igual, independentemente da perpendicular escolhida. Assumir este fato, é equivalente a pressupor o quinto postulado e, por isso, as demonstrações baseadas nesta definição não estavam corretas.

Figura 2.2: Posidônio de Apameia

Fonte: *cognoscomm.com*

Proclo Diádoco (410-485): nasceu em Constantinopla por volta do ano 410. Estudou filosofia em Alexandria e, posteriormente, foi para Atenas, estudar com Plutarco na Academia de Platão. Mais tarde, chegaria a diretor da Academia, cargo que manteve até morrer, no ano 485. Como já relatado a obra "Comentário sobre o Livro I dos Elementos de Euclides"é a principal fonte de conhecimentos sobre a história antiga da geometria grega. Após comentar sobre o trabalho de Ptolomeu, o próprio Proclo indicou a falha na demonstração deste e propôs a sua prova. Seu argumento consiste em mostrar que dadas duas retas paralelas, se uma transversal intersecta uma delas, deveria então intersectar a outra. Ele acaba admitindo que duas retas paralelas são equidistantes. Essa propriedade é válida dentro da Geometria Euclidiana, como consequência da validade do V postulado. Aganis: numa tradução do século XII de um comentário árabe aos elementos de Euclides de Al-Nirizi (século IX), é citado Simplício (século VI) que, num comentário seu ao primeiro livro de Euclides, terá apresentado a demonstração de Aganis, que comete o erro de assumir uma definição de paralelismo semelhante à de Posidônio. O fato de esta demonstração de Aganis chegar até nós através do comentário de um matemático árabe é sintomático da importância da Matemática árabe após a decadência da Grécia.

Figura 2.3: Proclo Diádoco



Fonte: *Proclos-página inicial/facebook*

Nasiredine ou Nácer Edine al-Tusi (1201 - 1274): apresenta também uma demonstração do quinto postulado. Nesta demonstração, Nasiredine supõe que se duas retas AB e CD são cortadas por uma reta PQ que é perpendicular apenas a uma delas (por exemplo, AB). Então, as distâncias medidas nas perpendiculares de AB para CD serão menores do lado em que PQ faz ângulos agudos com CD e maiores do lado em PQ faz ângulos obtusos com CD. O seu erro reside no fato desta suposição ser equivalente ao quinto postulado.

Figura 2.4: Nasiredine

Fonte: *toosfoundation.com*

Clávio (1537-1612): traduziu para latim os Elementos, reproduziu e criticou a demonstração de Proclo e apresentou uma demonstração sua do quinto postulado. A sua demonstração assenta no fato de o conjunto dos pontos equidistantes de uma reta (de um lado da reta) formarem uma linha reta. Ora, supor isso é equivalente a supor o quinto postulado. A sua demonstração acaba por ter algumas semelhanças com a de Nasiredine.

Figura 2.5: Cristóvão Clávio

Fonte: *americanhistory.si.edu*

Cataldi (1548-1626): é o primeiro matemático a publicar uma obra exclusivamente dedicada à teoria das paralelas. Cataldi assume uma hipótese que é equivalente ao quinto postulado: linhas retas não equidistantes convergem numa direção e divergem na outra.

Jonh Wallis (1616 - 1703): abandona a ideia de equidistância que os seus antecessores matemáticos haviam utilizado sem sucesso para tentar demonstrar o postulado. Wallis desiste de tentar demonstrar o quinto postulado a partir unicamente dos primeiros quatro postulados e introduz um axioma que considera ser mais plausível que o quinto postulado: sobre um segmento é sempre possível construir um triângulo semelhante a um triângulo dado. Wallis demonstra com sucesso o quinto postulado, mas utiliza um axioma alternativo, portanto o que prova é equivalência desse axioma ao quinto postulado (porque reciprocamente, o quinto postulado implica aquele axioma). Na sua demonstração do quinto postulado, Wallis ao provar que uma determinada hipótese é equivalente ao quinto postulado, acaba por não fazer algo muito diferente dos seus antecessores. Contudo, é de destacar o fato de estar consciente disso e apresentar o seu axioma como alternativa ao quinto postulado.

Figura 2.6: John Wallis

Fonte: *pt.wahooart.org*

Girolamo Saccheri (1667-1733): se dedicou muito a tentar demonstrar o quinto postulado de Euclides e que deu um passo largo no caminho das geometrias não euclidianas. Em primeiro lugar, Saccheri analisou e criticou muitas das tentativas de demonstrar o quinto postulado por matemáticos anteriores. Nessas análises, Saccheri sublinhou que tudo tinha que ser demonstrado e que, portanto, não fazia sentido tomar certas hipóteses sem as demonstrar, como haviam feito muitos matemáticos anteriores. Saccheri não cometeu esse erro. Profundamente convicto de que poderia demonstrar o quinto postulado, embrenhou-se num longo estudo com esse objetivo, sem nunca considerar o quinto postulado. Começou por considerar um tipo especial de quadriláteros (os quadriláteros de Saccheri), que se caracterizam por ter um par de lados opostos iguais e perpendiculares a um terceiro lado. Este lado chama-se base e o oposto é o topo. Os ângulos β e α são os ângulos de topo. Intuitivamente, a tendência será dizer que é óbvio que estes quadriláteros são retângulos e os ângulos β e α têm de ser retos. Contudo, por incrível que pareça se não for considerado o quinto postulado, essa afirmação não pode ser provada! Saccheri provou várias equivalências ao quinto postulado: todos os quadriláteros de Saccheri são retângulos. Nesse sentido, Saccheri procurou provar que os quadriláteros por ele inventados seriam retângulos mesmo que não se considerasse o quinto postulado. Primeiro, provou que os ângulos de topo teriam que ser congruentes e que, por isso, teriam que ser ambos retos, ambos agudos ou ambos obtusos. Então, procedeu a uma demonstração por redução ao absurdo: considerou três hipóteses consoante os ângulos (a hipótese do angulo agudo (HAA), a hipótese do angulo reto (HAR) e a hipótese do angulo obtuso (HAO)) e procurou atingir absurdos a partir de HAA e HAO, para concluir que HAR era a única possível. O esforço de Saccheri teve sucesso ao provar que HAO levava a um absurdo. Contudo, o sucesso não foi total, pois HAA é impossível provar ser um absurdo. Ao considerar HAA, Saccheri vai estudar a geometria hiperbólica sem perceber isso. Na busca de absurdos, vai demonstrar propriedades desta nova geometria até chegar a um ponto em que, talvez por querer tanto que aquilo resultasse num absurdo, comete um erro na demonstração que o faz pensar ter chegado à conclusão que pretendia. No ano da sua morte, é publicada a obra, intitulada de Euclides ab omne naevo vindicatus, o que significará algo como Euclides liberto de todos os erros. Para ele, o grande erro de Euclides era ter colocado aquele resultado como postulado e para livrá-lo dos erros tinha de demonstrá-lo. Há quem defenda que Saccheri percebeu que a sua demonstração não estava absolutamente correta e que por isso hesitou tanto antes de publicá-la.

Figura 2.7: Girolamo Saccheri

Fonte: *facebook.com*

Georg Klügel (1739-1832): Consistiu em analisar vinte e oito tentativas de demonstrar este postulado. Klügel concluiu que todas eram insatisfatórias e sugeriu que o postulado não podia ser provado e que apenas era aceito como verdadeiro por causa dos testemunhos dos nossos sentidos. Aqui, finalmente, começa a ser levantada a possibilidade de ser impossível demonstrar o quinto postulado.

Figura 2.8: Georg Klügel

Fonte: *wellcomecolection.org*

Lambert (1728-1777): Estudou as investigações de Saccheri e descobriu novos resultados no âmbito da HAA. Lambert teve também uma aproximação semelhante à de Saccheri, ao estudar quadriláteros cujas características essenciais seriam ter pelo menos três ângulos retos (quadriláteros de Lambert). Também ele contribuirá com novos resultados para a geometria não euclidiana, mas não atingirá contradição. Nos finais do século XVIII, o estudo da teoria das paralelas, que já havia dado frutos na Itália e na Alemanha, começa a ter notáveis avanços também em França. Por esta altura, vários matemáticos famosos franceses manifestaram interesse nesta temática da teoria das paralelas e o quinto postulado, como foi o caso de D'Alembert, Lagrange, Carnot e Laplace. D'Alembert teria falado no "escândalo da geometria"a propósito do fracasso das muitas tentativas de demonstração do quinto postulado.

Figura 2.9: Johann Heinrich Lambert

Fonte: *researchgat.net/Download Scientific Diagram*

John Playfair (1748-1819): No século XVIII, a geometria era sistematicamente estudada a partir dos Elementos de Euclides nas universidades, enquanto as escolas geralmente se contentavam em aceitar os teoremas e construções sem prova. No entanto, os matemáticos começaram a exigir mais rigor com o crescente interesse pela investigação analítica. Em 1795, Playfair publicou uma edição dos Elementos que ele pretendia usar com seus alunos. A principal inovação foi o uso da notação algébrica por Playfair para abreviar as provas que ele ensinou em sua classe. A intenção era evitar o "tédio e a circunlocução"da teoria geométrica. Ele introduz um axioma que considera ser mais plausível que o quinto postulado: dada uma reta e um ponto exterior, existe uma e uma só reta contendo o ponto e paralela à reta dada. Há uma equivalência entre o quinto postulado e o axioma de Playfair.

Figura 2.10: John Playfair

Fonte: *profcard.com*

Adrien Marie Legendre (1752-1833): um dos melhores matemáticos do seu tempo e que, de tal modo desenvolveu uma espécie de obsessão pela demonstração do quinto postulado, que durante 29 anos publicou tentativa após tentativa em várias edições do seu Élements de Géométrie. No século XIX, começa-se a compreender que é possível uma geometria sem o quinto postulado, embora ainda se acredite que no espaço físico é a geometria euclidiana a única possível.

Figura 2.11: Adrien Marie Legendre

Fonte: *m.ww2.mediatly.com*

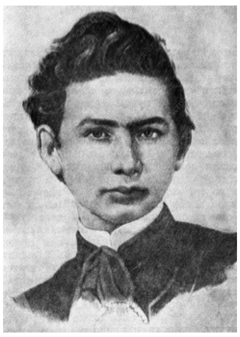
Carl Friedrich Gauss (1777-1855): Possivelmente teria se interessado pelas discussões sobre o quinto postulado de Euclides desde 1792, quando tinha apenas 15 anos de idade. Ao longo dos anos, através de suas correspondências, é possível perceber seus trabalhos e investigações no que se refere a formalização de uma nova geometria. Inicialmente, Gauss, utilizando-se do método de redução ao absurdo, teria tentado demonstrar o quinto postulado. Trabalhando na tentativa de prova do quinto postulado que, cautelosamente, mas de forma cada vez mais clara, foi aumentando a sua certeza em relação ao fato deste postulado não ser demonstrável. Logo ele percebera que se utilizasse uma armação que contrariasse este postulado, não encontraria contradição alguma nos resultados, aliás, ele percebe que acaba formulando uma Geometria diferente da Euclidiana, porém completamente satisfatória. Durante a segunda década do século XIX que Gauss começa a desenvolver as ideias da nova Geometria. Ele foi o primeiro a designar a nova geometria de Geometria não euclidiana.

Figura 2.12: Carl Friedrich Gauss

Fonte: *sapaviva.com*

Janos Bolyai (1802-1860): estudou matemática com seu pai, e devido a isto, acabou se interessando pela teoria das paralelas. Seu pai saturado com esse problema, pede que deixe de lado essa questão: Pelo amor de Deus, te peço que abandones. Ela teme mais do que paixões sensuais, porque ela também ocupa todo o seu tempo, te priva de saúde, paz de espírito e felicidade na vida. Janos, porém, continuou trabalhando, e, admitindo que por um ponto fora de uma reta passam pelo menos duas retas paralelas a reta dada, conseguiu resultados de natureza diferenciada, de modo que sua atenção foi voltando para a possibilidade de formular uma outra Geometria. Inicialmente imaginou uma Geometria geral que tivesse a Geometria Euclidiana como caso particular. No entanto, durante a terceira década do século XIX o trabalho de Janos foi ganhando forma, admitindo uma armação que contrariasse o postulado das paralelas, Janos alcançou diversos resultados, que constituiu a geometria que mais tarde seria chamada de Geometria Hiperbólica.

Figura 2.13: Janos Bolyai



Fonte: *Stock Image-H402/0627-Science Photo Library*

Nikolai Ivanovich Lobachewski (1792-1856): Dedicou mais de 20 anos a descoberta da nova geometria (geometria hiperbólica), que inicialmente ele chamou de geometria imaginária. A primeira apresentação pública de seu trabalho foi feita a Sociedade de Física- Matemática da cidade de Kazan, em 1826, sem nenhuma aceitação, pois suas armações punham em dúvida a inquestionável Geometria de Euclides. Em 1829, publicou o artigo Sobre os Princípios da Geometria que marca o nascimento oficial da Geometria não euclidiana. Neste artigo ele se mostra completamente convencido de que o quinto postulado de Euclides não pode ser provado com base nos outros quatro, e constrói a ideia da nova geometria fundamentada na hipótese, contraria ao quinto Postulado de Euclides, de que por um ponto fora de uma reta pode-se traçar mais de uma reta no plano que não encontra a reta dada. Estes resultados se tornaram um marco revolucionário da geometria, mostrando que a Geometria Euclidiana não era a verdade absoluta suposta até então, e tornando necessário fazer-se uma revisão completa nos conceitos fundamentais da Matemática.

Lobachewsky nasceu em 1 de dezembro de 1792 em Nizhny, na Rússia e morreu em 24 de fevereiro de 1856 em Kazan, também na Rússia.

Figura 2.14: Nikolai Ivanovich Lobachewski

Fonte: *Frases de Nikolai Lobachewski/citações e frases famosas*

Beltrami: Em 1868, Beltrami prova a consistência de uma geometria não euclidiana, ao provar que se a geometria euclidiana é consistente, também o é a geometria hiperbólica. Deste modo, provou que era impossível demonstrar o quinto postulado pois, provou que não havia contradição lógica em considerar os quatro primeiros postulados e um quinto que contrariasse o quinto postulado de Euclides.

Figura 2.15: Eugenio Beltrami

Fonte: *MacTutor History of Mathematics-University of St. Andrews*

David Hilbert. No final do século XIX "Os Elementos" de Euclides não estavam resistindo ao rigor que a lógica exigia para os fundamentos da geometria. Muitas proposições de geometria euclidiana plana faziam uso de resultados que não haviam sido demonstrados anteriormente e que não constavam do rol de axiomas, ou seja, era necessária uma reformulação dos axiomas de Euclides. A proposta que foi melhor aceita pela comunidade matemática foi a do matemático e lógico alemão David Hilbert, publicada em seu célebre trabalho "Grundlagen der Geometrie" (Fundamentos de Geometria) de 1899 onde Hilbert coloca a Geometria Euclidiana sobre bases sólidas por meio da substituição dos cinco Postulados de Euclides por cinco grupos de axiomas, que chamou de Axiomas de Incidência, Axiomas de Ordem, Axiomas de Congruência, Axiomas de Continuidade e Axioma das Paralelas.

Com o trabalho de Hilbert, encerra-se talvez o mais longo problema em aberto na Matemática, o "Problema das Paralelas" que, ironicamente, foi introduzido pelo próprio Euclides e resistiu por cerca de 2200 anos! Hilbert nasceu em 23 de janeiro de 1862 em Konigsberg na Prússia (atualmente, Rússia) e morreu em 14 de fevereiro de 1943 em Gottingen na Alemanha.

Segundo Clarissa em [4](2015), David Hilbert disse que: *"devemos ser capazes de nos referir sempre - ao invés de pontos, linhas e planos - a mesas, cadeiras e canecas de cervejas".*

Figura 2.16: David Hilbert

Fonte: *pelasbarbasdeneptuno.blogspot.com*

Capítulo 3

As Bases da Geometria Euclidiana Plana

Os postulados de Euclides e os axiomas de Hilbert, constituem uma base para a geometria euclidiana plana, pois elencam proposições aceitas sem demonstração.Conceitos como os de ponto, reta, plano e espaço são considerados primitivos, isto é, não são definidos, pois quaisquer tentativas de definição desses entes geométricos, recaem na utilização de outros conceitos que não foram, previamente, definidos.

3.1 Os Axiomas de Euclides

Em sua obra [5](2009), Euclides estabeleceu 10 axiomas, divididos em duas partes: os cinco primeiros chamados de noções comuns e os outros cinco, chamados de postulados.

3.1.1 Noções Comuns de Euclides

Noções Comuns são afirmações inquestionáveis que consideramos verdadeiras e constituem os princípios da teoria(não precisam ser demonstradas). Euclides denomina noções comuns às proposições primitivas, referente às grandezas matemáticas quaisquer. São elas:

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são iguais entre si.
2. Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais.
3. Se iguais são subtaídos de iguais, os diferenças são iguais.
4. Coisas que coincidem uma com a outra são iguais uma à outra.
5. O todo é maior do que quaisquer de suas partes.

3.1.2 Os Cinco Postulados de Euclides

Estes postulados(ou axiomas) são afirmações específicas da geometria plana, que são aceitas como verdadeiras. São elas:

I. Pode-se traçar uma única reta, ligando-se quaisquer dois pontos

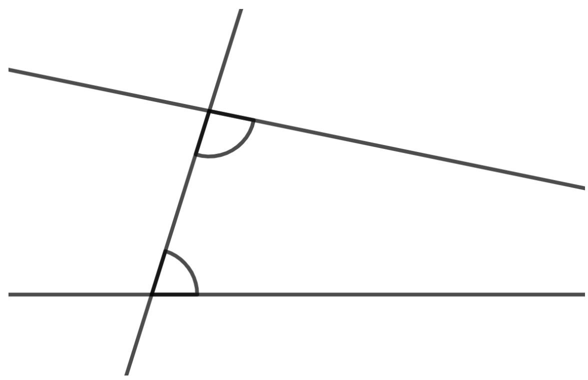
II. Pode-se continuar(de maneira única) uma reta infinitamente.

III. Pode-se traçar uma circunferência com quaisquer centro e raio

IV. Todos os ângulos retos são iguais.

V. Se uma reta, corta duas outras, formando ângulos colaterais internos, cuja soma é menor que dois retos, então as duas retas, se continuadas infinitamente, encontram-se no lado onde estão ângulos cuja soma é menor que dois retos.

Figura 3.1: figura auxiliar do 5^0 postulado



Fonte: Autor

3.2 Os Axiomas de Hilbert

Segundo Inédio Arcari em [6](2008) os axiomas de Hilbert a saber, criados a partir dos cinco postulados de Euclides, foram divididos em 5 grupos:

- Axiomas de Incidência

- Axiomas de Ordem

- Axiomas de Congruência

- Axiomas de Continuidade

- Axiomas das Paralelas

A seguir, veremos a subdivisão de cada grupo de axiomas supracitado.

3.2.1 Axiomas de Incidência

I- Dados dois pontos distintos existe uma única reta contendo-os.

II- Qualquer reta contém, pelo menos, dois pontos distintos.

III- Existem pelo menos três pontos distintos com a propriedade de que nenhuma reta os contém.

Observação: Alguns autores sintetizam os 3 axiomas, acima, em 2 axiomas.

3.2.2 Axiomas de Ordem

I- Se um ponto B, está entre os pontos A e C, então A, B e C são pontos distintos e B, está entre C e A.

II- Dados dois pontos distintos B e D, existem pontos A, C e E tais que: B está entre A e C; C está entre B e D; D está entre C e E.

III- Dados três pontos distintos de uma reta, apenas um deles, localiza-se entre os outros dois.

IV- Seja r uma reta e A, B, C três pontos distintos não pertencentes à reta r:

(a)Se A e B estão do mesmo lado de r, e B e C estão do mesmo lado de r, então A e C estão do mesmo lado de r.

(b)Se A e B estão de lados opostos de r, B e C estão de lados opostos de r, então A e C estão do mesmo lado de r.

3.2.3 Axiomas de Congruência

I- Se A e B são dois pontos distintos e A' é a origem da semi-reta s, então existe um ponto B' distinto de A', em s, tal que o segmento $\overline{AB}$ é congruente ao segmento $\overline{A'B'}$'.

II- Se o segmento $\overline{AB}$ é congruente ao segmento $\overline{CD}$ e ao segmento $\overline{EF}$, então o segmento $\overline{CD}$ é congruente ao segmento $\overline{EF}$. Além disso, todo segmento é congruente a si mesmo.

III- Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ segmentos em uma reta r, com apenas B em comum. Além disso, seja $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$ segmentos em uma reta r' com apenas B' em comum. Se o segmento $\overline{AB}$ for congruente ao segmento $\overline{A'B'}$ e o segmento $\overline{BC}$ for congruente ao segmento $\overline{B'C'}$, então o segmento $\overline{AC}$ é congruente ao segmento $\overline{A'C'}$.

IV- Sejam um semiplano σ em ângulo $\angle$A. Tomemos uma semi-reta s, com origem em B, contida na reta que determina o semi-plano σ. Então existe apenas um ângulo $\angle$B com lado em s, contido no semi-plano σ e congruente ao ângulo $\angle$A.

V- Se o ângulo $\angle$A é congruente ao ângulo $\angle$B e ao ângulo $\angle$C, então o ãngulo $\angle$B,é congruente ao ângulo $\angle$C. Além disso, todo ângulo é congruente a si mesmo.

VI- Dado dois triângulos ABC e EFG, se $\overline{AB}$ é congruente a $\overline{EF}$, $\overline{AC}$ é congruente a $\overline{EG}$ e $\angle$A é congruente a $\angle$E então ABC é congruente a EFG (caso "Lado, Ângulo, Lado"de congruência).

3.2.4 Axiomas de Continuidade

I- (Axioma de Arquimedes) Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ dois segmentos. Existe um número finito de pontos $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ na reta que passa por A e B, tal que os segmentos $\overline{AA_1}$,$\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$,...,$\overline{A_{n-1}A_n}$ são congruentes a $\overline{CD}$ e o ponto B está entre A e A_n.

II- (Axioma de Dedekind) Suponha que o conjunto de todos os pontos de uma reta r, está na união dos conjuntos não-vazios C_1 e C_2. Suponha ainda que nenhum ponto de C_1 está entre dois pontos de C_2 e vice-versa. Então, "existe um único ponto O $\in$ r, tal que O está entre P_1 e P_2 se , e somente se, $P_1 \in C_1$, $P_2 \in C_2$ e O $\neq$ P_1, P_2".

3.2.5 Axiomas das Paralelas

Por um ponto fora de uma reta r, pode-se traçar uma única reta paralela a r.(formulação equivalente ao $5^{\underline{o}}$ postulado de Euclides de John Playfair(1748-1819), físico e matemático escocês).

Capítulo 4

Equivalentes do Quinto Postulado de Euclides

4.1 Proposições Importantes

Antes de estudarmos os equivalentes do quinto postulado de Euclides, vamos ver, de forma suscinta, quatro proposições encontradas em [5](2009) que nos auxiliarão na demonstração desses equivalentes.

Vejamos alguns termos e símbolos que serão usados no decorrer destas demonstrações:

- $\equiv \longrightarrow$ indica a congrência entre segmentos ou ângulos, ou seja, têm medidas iguais.

- L.A.L $\longrightarrow$ refere-se ao caso de congruência de triângulos(caso lado-ângulo-lado), bem como L.L.L (lado-lado-lado), A.L.A (ângulo-lado-ângulo) e L.A.A (lado-ângulo-ângulo oposto).

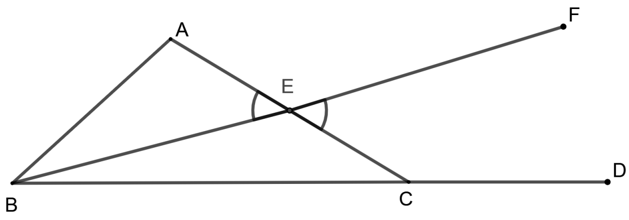
Proposição 4.1.1 (Proposição I.16 - Livro 1 de "Os Elementos") (Teorema do Ângulo Externo) *Em qualquer triângulo, se um dos lados for continuado, o ângulo externo formado é sempre maior do que qualquer dos ângulos internos que não lhe sejam adjacentes.*

Demonstração:

Seja ABC um triângulo. Prolongue o segmento $\overline{BC}$ até um ponto D de tal modo que C esteja entre B e D.

Seja E o ponto médio de $\overline{AC}$ e tomemos F $\neq$ B no prolongamento de $\overline{BE}$, de tal modo que $\overline{BE} \equiv \overline{EF}$, conforme a Figura 4.1.

Figura 4.1: Apoio para demonstração do Teorema do ângulo externo

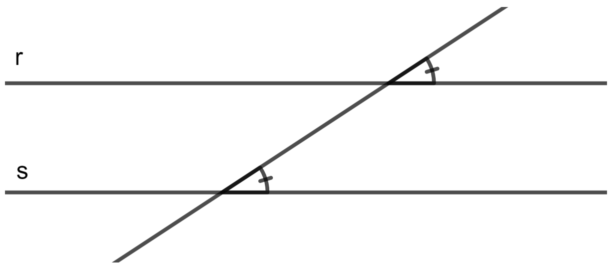


Fonte: Autor

Os triângulos BAE e FCE são congruentes (caso LAL). Logo, $\angle$BAC $\equiv$ $\angle$FCE $<$ $\angle$DCE. Raciocínio análogo para demonstrar que $\angle$ABC $<$ $\angle$ACD.

Proposição 4.1.2 (Proposicão I.27 - Livro 1 de "Os Elementos") *Se uma reta corta duas outras formando ângulos correspondentes congruentes, então as duas retas são paralelas.*

Figura 4.2: Apoio para demonstração da proposição 27 de Euclides

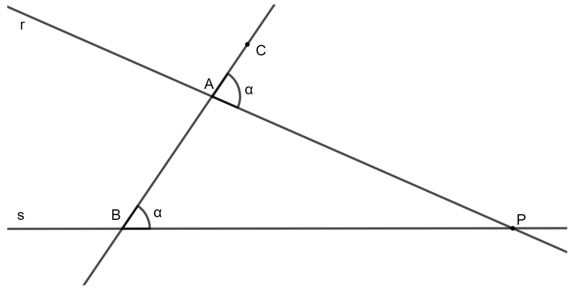


Fonte: Autor

Demonstração:

Suponhamos que as retas r e s não são paralelas, veja na Figura 4.3. Logo, elas se encontram em um ponto P e temos um triângulo ABP.

Figura 4.3: Apoio para demonstração da proposição 27 de Euclides



Fonte: Autor

Assim:

$$\begin{cases} P\hat{A}\text{C é ângulo externo de ABP e mede } \alpha \\ C\hat{B}\text{P é ângulo interno de ABP e mede } \alpha \end{cases}$$

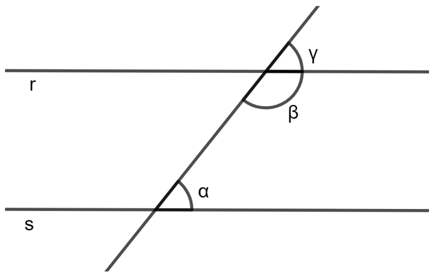
Contradição com o Teorema do Ângulo Externo. Logo r e s são paralelas.

Proposição 4.1.3 (Proposição I.28 - Livro 1 de "Os Elementos") Se uma reta corta duas outras formando ângulos colaterais internos de medidas α e β tais que $\alpha + \beta$ é igual à medida de dois ângulos retos, então as duas retas são paralelas.

Demonstração:

Seja a Figura 4.4:

Figura 4.4: Apoio para demonstração da proposição 28 de Euclides



Fonte: Autor

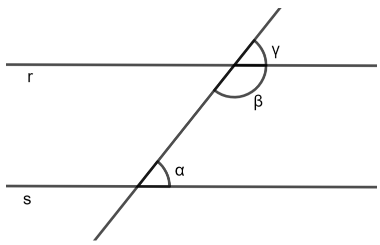
Por hipótese: $\alpha + \beta = 180^0$. Como $\beta + \gamma = 180^0$ (ângulo raso), temos $\alpha = \gamma$, ou seja, os ângulos correspondentes possuem mesma medida, isto é, são congruentes. Pela Proposição 4.1.2 temos que r e s são paralelas. Como queríamos.

Proposição 4.1.4 (Proposição I.29 - Livro 1 de "Os Elementos" - é a primeira proposião de Euclides que faz uso do 5^0 Postulado) Quando uma reta corta outras duas retas paralelas, então os ângulos correspondentes são congruentes.

Demonstração:

Seja a Figura 4.5:

Figura 4.5: Apoio para demonstração da proposição 29 de Euclides



Fonte: Autor

Por hipótese r//s. Devemos mostrar que $\alpha = \gamma$. Como $\beta + \gamma = 180^0$ (ângulo raso), temos $\alpha = \gamma$, isto é, $\alpha + \beta = 180^0$.

Logo, devemos mostrar que $\alpha + \beta = 180^0$.

Suponhamos que $\alpha + \beta = 180^0$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\alpha + \beta < 180^0$

Portanto, pelo 5^0 Postulado de Euclides, r e s se encontram. Contradição com a hipótese assumida. Logo, $\alpha + \beta = 180^0$, ou seja, $\alpha = \gamma$. Como queríamos demonstrar.

4.2 O Quinto Postulado e Alguns dos seus Equivalentes

Primeiramente, precisamos estabelecer algumas notações, que utilizaremos no decorrer de nossas demonstrações. Usaremos **P5**, para representar o quinto postulado de Euclides e as proposições **E1,E2,E3,...**, para representar seus substitutos ou equivalentes.

Os quatro primeiros substitutos ou equivalentes: **E1, E2, E3 e E4**, encontramos em [3](1994) e [6](2008)

O quinto postulado de Euclides, pode ser assim enunciado:

Postulado P5.$\longrightarrow$ *"Se uma reta, intersectando duas retas em um plano, forma ângulos interiores de um mesmo lado, com soma menor que a de dois ângulos retos, então as duas retas, se prolongadas indefinidamente, irão se encontrar do lado cuja soma dos ângulos é menor que a de dois retos".*

Proposição E1.$\longrightarrow$ (axioma de Playfair) *"Por um ponto fora de uma reta, pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada".*

Vamos mostrar que P5 é equivalente a E1.

Demonstração:

(P5 $\Rightarrow$ E1) Seja P um ponto e r uma reta, tal que P$\notin$ r. Tracemos uma perpendicular s a r, passando por P. Tracemos uma perpendicular m a s, passando por P. Veja a figura 4.6:

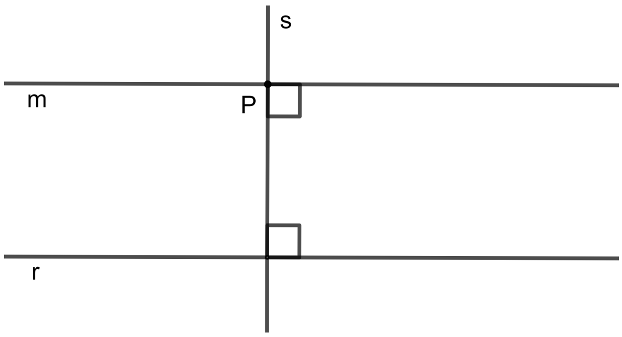
Pela proposição 4.1.2 ou 4.1.3, temos que m // r e isso prova a existência da paralela m, sem usar o P5.

Quanto à unicidade, suponhamos que existe n paralela a r, passando por P e n $\neq$ m.

Logo, $\alpha + \beta \neq 180^0$

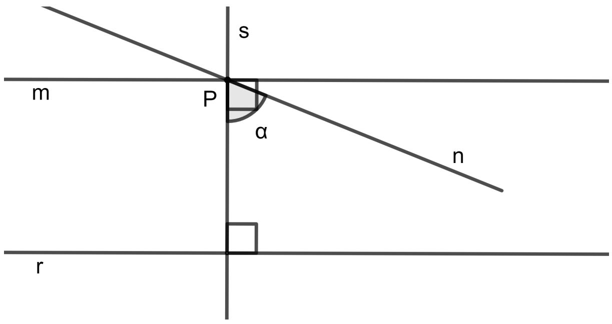
Sem perda de generalidades, suponhamos que $\alpha + \beta < 180^0$. Pelo quinto postulado

Figura 4.6: Apoio para demonstração do Axioma de Playfair



Fonte: Autor

Figura 4.7: Apoio para demonstração do Axioma de Playfair e o 5^0 postulado



Fonte: Autor

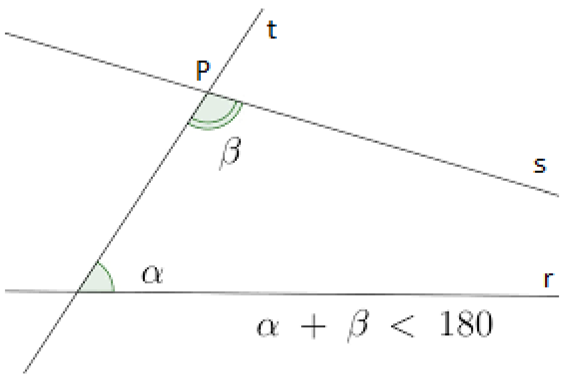
de Euclides, n e r se encontram. Uma contradição com a hipótese de que n e r são paralelas.

Daí concluimos que n e m não podem ser distintas, ou seja, m é única.

(E1 $\Rightarrow$ P5) Sejam as retas r e s, cortadas por uma reta t, de tal modo que os ângulos colaterais internos possuam soma menor que dois retos.

Dado $\{ P \} = t \cap s$. Veja a Figura 4.8 :

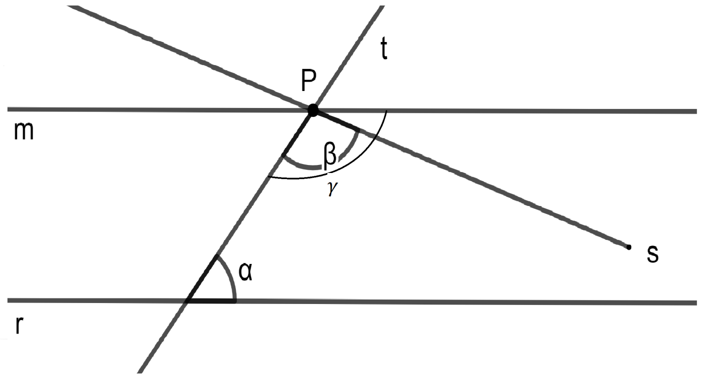
Figura 4.8: Apoio para demonstração do Axioma de Playfair e o 5^0 postulado.



Fonte: repositório.ufba.br

Devemos mostrar que r e s se encontram.

Figura 4.9: Apoio para demonstração do Axioma de Playfair e o 5^0 postulado.



Fonte: Autor

Consideremos uma reta m passando por P, de tal modo que os ângulos colaterais internos, somem dois retos.
Pela proposição 4.1.3, temos que m // r.
Suponhamos que s//r (negação da tese).
Por E1, temos a unicidade das paralelas, ou seja:

m = s $\Rightarrow \gamma = \beta \Rightarrow \alpha + \gamma = \alpha + \beta$, que é uma contradição com a hipótese de $\alpha + \beta < 180^0$.

Concluimos que s não é paralela a r, como queríamos demonstrar. Assim, P5 $\Leftrightarrow$ E1.

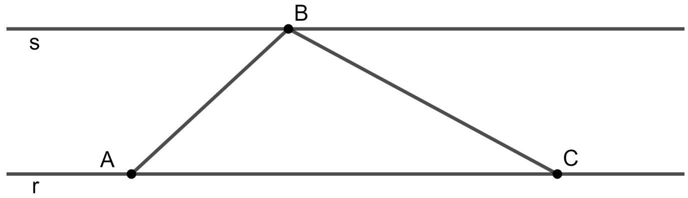
Proposição E2.$\longrightarrow$ *"A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos"*.

Mostraremos que E2 $\Leftrightarrow$ E1. Como E1 $\Leftrightarrow$ P5, teremos E2 $\Leftrightarrow$ P5.

Demonstração:

(E1 $\Rightarrow$ E2) Consideremos o triângulo ABC e a reta r contendo $\overline{AC}$. Tracemos a reta s por B, paralela a r (a existência de s independe de P5). Figura 4.10

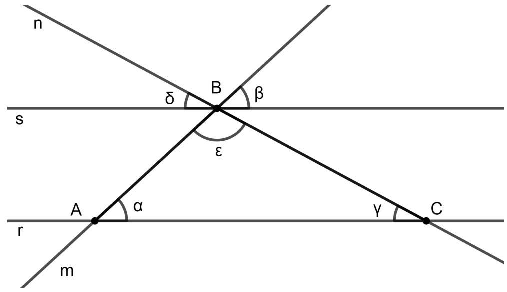
Figura 4.10: Apoio para demonstração da equivalência da soma dos ângulos de um triângulo ser dois retos e o 5^0 postulado.



Fonte: Autor

Tomemos as retas m e n contendo $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. Figura 4.11

Figura 4.11: Apoio para demonstração da equivalência da soma dos ângulos de um triângulo ser dois retos e o 5^0 postulado.



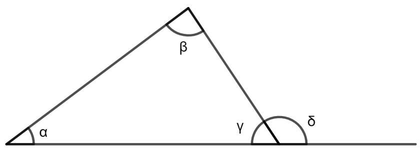
Fonte: Autor

Pela Proposição 4.1.4 (que depende de P5 e portanto depende de E1) temos $\alpha = \beta$ e $\delta = \gamma$. Como $\delta + \beta + \epsilon = 180^0$ (ângulo raso) temos $\gamma + \alpha + \epsilon = 180^0$, como queríamos demonstrar.

Para demonstrar que E2 $\Rightarrow$ E1, precisamos de dois lemas:

Lema 1: Assumindo E2 verdadeiro, um ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes. Veja a Figura 4.12:

Figura 4.12: Apoio para demonstração do lema do ângulo externo de um triângulo.



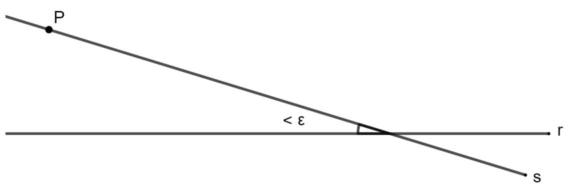
Fonte: Autor

Demonstração:

$$\text{Temos :}\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 180^0 \\ \gamma+\delta = 180^0 \end{cases} \Rightarrow \alpha+\beta = \delta$$

Lema 2: Assumindo E2 verdadeiro. Sejam r uma reta, P um ponto fora de r e $\epsilon > 0$. Então, pode-se traçar uma reta s, por P que forma um ângulo com r cuja medida é menor que ϵ.

Figura 4.13: Apoio para demonstração do Lema 2.

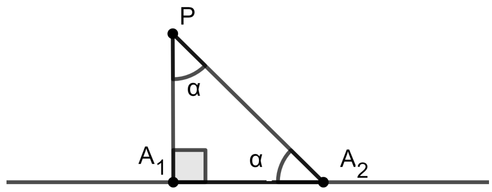


Fonte: Autor

Demonstração:

Sejam P, r e $\epsilon > 0$, conforme a hipótese. Considere A_1 o pé da perpendicular baixada por P, em r. Tomando $A_2 \in$ r tal que PA_1 A_2 seja um triângulo retângulo isósceles.

Figura 4.14: Triângulo retângulo isósceles.

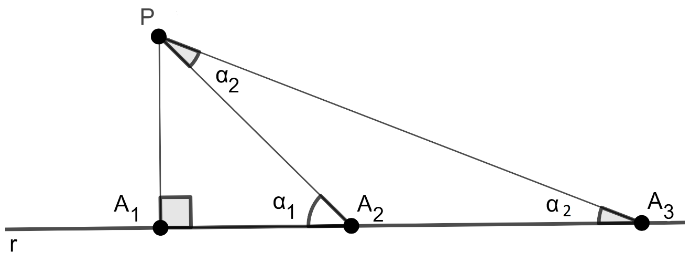


Fonte: Autor

Como estamos assumindo E2 e temos o lema 1 verdadeiro. Logo:
$\alpha_1 + \alpha_1 = 90^0 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{90^o}{2}$.

Tomemos $A_3 \in$ r tal que PA_2 A_3 seja um triângulo isósceles:

Figura 4.15: Processo construtivo de triângulos isósceles.



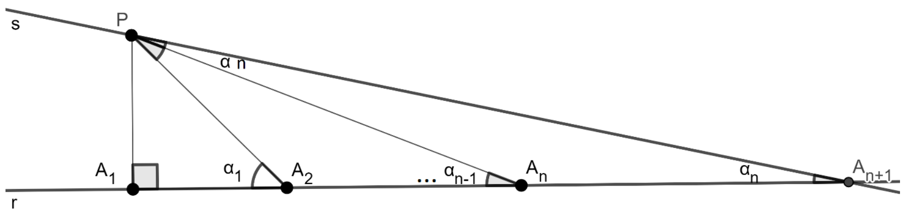
Fonte: Autor

Pelo **Lema 1:**

$\alpha_2 + \alpha_2 = \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{\alpha_1}{2} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{90^o}{2^2}$.

Procedendo de modo análogo com A_4, A_4,..., A_n, $A_{n+1} \in$ r, chegamos ao triângulo isósceles PA_n A_{n+1}, tal que:

Figura 4.16: Sequência de triângulos isósceles obtida por processo construtivo.



Fonte: Autor

Tomando n $\in N$ tal que $\frac{90^o}{2^n} < \epsilon$ temos que a reta s, que passa por P e A_{n+1} forma ângulo com r, cuja medida é menor que $\epsilon > 0$, como queríamos.

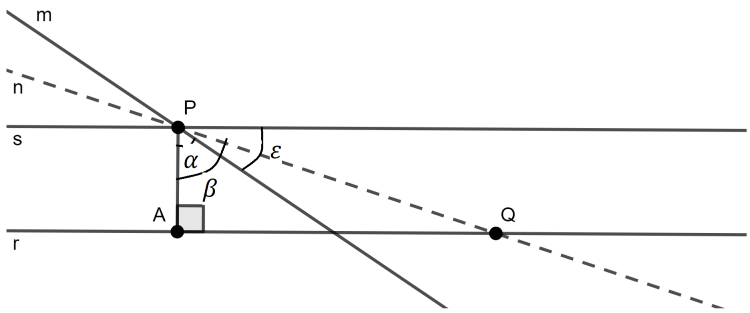
Voltemos à demonstração de que E2 $\Rightarrow$ E1.

Seja r uma reta e P um ponto fora de r. Devemos mostrar que existe uma única reta s, paralela a r passando por P.

Seja A o pé da perpendicular baixada por P em r, e s a reta perpendicular a $\overline{PA}$, passando por P.
Observação: (As construções das perpendiculares acima, não depende de P5 $\Leftrightarrow$ E1). Temos que r//s.

Seja m a reta que passa por P e forma o ângulo $\epsilon > 0$ com s. Nosso objetivo, é mostrar que m $\cap$ r $\neq \oslash$ e portanto, s é a única paralela a r. Pelo **Lema 2:**, podemos traçar a reta n por P, de tal modo que n intersecta r, em um ponto Q, tal que $\gamma < \epsilon$. Seja β a medida do ângulo $\angle$QPA.

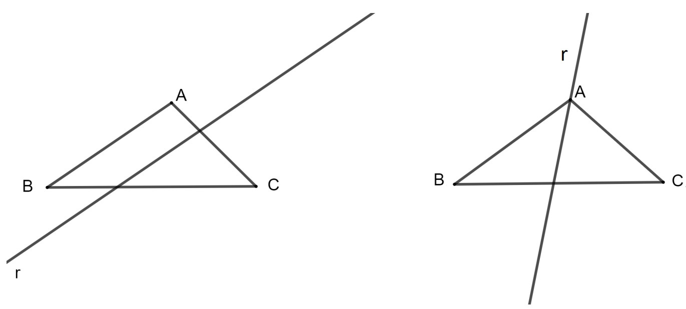
Figura 4.17: Apoio para a demonstração da equivalência da soma dos ângulos de um triângulo ser dois retos e o 5^0 postulado.



Fonte: Autor

Seja α complementar de ϵ. Logo, $\alpha + \epsilon = 90^o$. Como $\gamma < \epsilon$ e, pelo **Lema 1:**,
$\beta + \gamma = 90^o$, concluímos que $\alpha < \beta$. Deste modo a reta m, "entra"no triângulo PAQ pelo vértice P. Pelo axioma de Pasch: *Se uma reta "entra"em um triângulo intersectando um lado, então esta reta intersecta um outro lado desse triângulo.*

Figura 4.18: Apoio para o Axioma de Pasch.



Fonte: Autor

Temos que m intersecta $\overline{AQ}$, ou seja, m não é paralela a r.

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, temos que s é a única paralela a r, como queríamos demonstrar.

Proposição E3$\longrightarrow$ *"Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes"*.

Mostraremos que P5 $\Rightarrow$ E3 e que E3 $\Rightarrow$ E2. Como E2 $\Leftrightarrow$ P5, teremos E3 $\Rightarrow$ P5 e portanto, P5 $\Leftrightarrow$ E3.

Obs: Os triângulos $\triangle$ABC e $\triangle$A'B'C' são semelhantes, isto é, $\triangle$ABC $\approx$ $\triangle$A'B'C' quando existe uma correspondência biunívoca entre os vértices, digamos: $\begin{cases} A \longleftrightarrow A' \\ B \longleftrightarrow B' \\ C \longleftrightarrow C' \end{cases}$,

tal que: $\hat{A} \equiv \hat{A'}$; $\hat{B} \equiv \hat{B'}$; $\hat{C} \equiv \hat{C'}$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{C'B'}}$.

Demonstração:

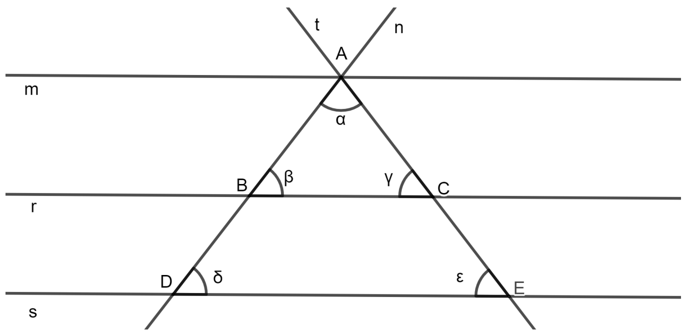
(P5 $\Rightarrow$ E3) Como estamos assumindo que P5 é verdadeira, podemos considerar o seguinte Teorema, como verdadeiro:

Teorema: *"Sejam ABC e EFG triângulos. Se $\hat{A} \equiv \hat{E}$ e $\hat{B} \equiv \hat{F}$, então os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$ são semelhantes"*. Veja a demonstração em [3](1994).

Precisamos construir um par de triângulos semelhantes e não congruentes.

Sejam m//r//s retas distintas e n, t transversais tais que n $\cap$ t $\cap$ m = { A }. Veja a Figura 4.19.

Figura 4.19: Equivalência entre a existência de triângulos semelhantes e não congruentes e o 5^0 postulado.



Fonte: Autor

Pela proposição dos ângulos correspondentes, que são congruentes, temos que $\beta = \delta$ e $\gamma = \epsilon$. Consequentemente, pelo teorema acima, $\triangle$ABC $\approx$ $\triangle$ADE.

(E3 $\Rightarrow$ E2) Para essa parte da demonstração, precisaremos de duas proposições enunciadas abaixo, cujas demonstrações, devidas à Legendre, não dependem de P5.

Para demonstrar a primeira proposição, Legendre provou o seguinte Lema:

Lema 3: Dado um triângulo $\triangle$ABC, existe um triângulo $\triangle$A'B'C' satisfazendo:

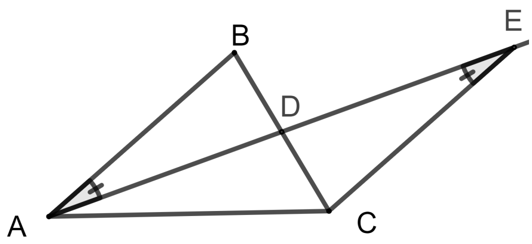
(1) A soma dos ângulos $\triangle$A'B'C' é igual à soma dos ângulos de $\triangle$ABC;

(2) O triângulo $\triangle$A'B'C' possui um ângulo menor do que ou igual à metade do menor ângulo do triângulo $\triangle$ABC.

Demonstração do Lema 3:

Dado um triângulo $\triangle$ABC, suporemos que o ângulo $\hat{A}$ é o menor dos três ângulos. Veja a figura.

Figura 4.20: Apoio para a primeira proposição de Legendre.



Fonte: Autor

Seja D o ponto médio de $\overline{BC}$. Sobre a semi-reta de origem A, passando por D, marque o ponto E, tal que $\overline{AD} \equiv \overline{DE}$. Os triângulos $\triangle$ABD e $\triangle$ECD são, consequentemente, congruentes. Logo a soma dos ângulos do triângulo $\triangle$AEC é igual à soma dos ângulos do triângulo $\triangle$ABC, provando assim o item 1 do Lema.

Agora vemos que a soma dos ângulos D$\hat{A}$C e D$\hat{E}$C é igual ao ângulo $\hat{A}$ do triângulo $\triangle$ABC. Temos que o novo triângulo $\triangle$AEC possui um ângulo θ satisfazendo $\theta \leq \frac{\hat{A}}{2}$, verificando assim o item 2 do Lema.

1ª Proposição de Legendre:*A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor do que ou igual a dois retos.*

Demonstração:

Assuma o lema anterior e a existência de um triângulo, cuja soma dos ângulos seja $180^o + \alpha$. Seja então θ_0 o menor ângulo deste triângulo. Aplicando o Lema, obtemos um novo triângulo, com mesma soma dos ângulos e cujo menor ângulo, θ_1, satisfaz $\theta_1 \leq \frac{\theta_0}{2}$.

Aplicando o Lema a este triângulo, conclui-se pela existência de novo triângulo, com mesma soma dos ângulos e menor ângulo θ_2, satisfazendo a $\theta_2 \leq \frac{\theta_0}{4}$.

Usando este Lema n vezes, chegamos a um triângulo, cuja soma dos ângulos ainda é $180^o + \alpha$ e cujo menor ângulo θ_n, satisfaz $\theta_2 \leq \frac{\theta_0}{2^n}$.

Escolhendo-se n, suficientemente grande, teremos $\theta_n \leq \alpha$. Mas neste caso, a soma dos outros dois ângulos será maior do que 180^0, o que é um absurdo.

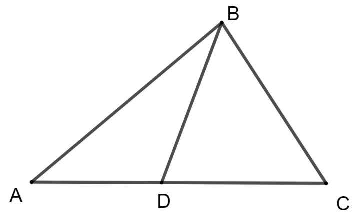
Para demonstrar a segunda proposição, Legendre provou mais dois lemas.

Lema 4: *Se a soma dos ângulos é igual a dois ângulos retos, o mesmo é verdade para todos os triâgulos obtidos deste, traçando-se um segmento ligando um de seus vértices ao lado oposto.*

Demonstração:

Dado um triângulo $\triangle$ABC, considere um ponto qualquer D, do lado $\overline{AC}$ e trace $\overline{BD}$. Veja a figura 4.21.

Figura 4.21: Apoio para demonstração da segunda proposição de Legendre.



Fonte: Autor

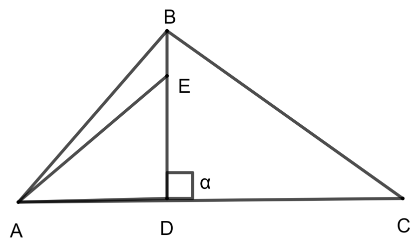
Se a soma dos ângulos do triângulo $\triangle$ABC é 180^0, então a soma dos ângulos dos triângulos $\triangle$ABD e $\triangle$DBC será $\hat{A}$ + A$\hat{B}$C + $\hat{C}$ + $180^0 = 360^0$. Pela proposição anterior, nenhum des dois triângulos tem soma dos ângulos superior a 180^0. Logo, cada um deles tem a soma dos ângulos, exatamente, igual a 180^0. Como queríamos demonstrar.

Lema 5: *Se existe um triângulo cuja soma dos ângulos é igual a dois retos, então pode-se construir triângulos retângulos isósceles, com a soma dos ângulos igual a dois retos e catetos maiores que qualquer segmento dado.*

Demonstração:

Seja $\triangle$ABC o triângulo cuja soma dos ângulos é 180^0. Se este já for um triângulo retângulo isósceles, baixe uma altura do vértice com maior ângulo, ao lado oposto. Traçando a altura $\overline{BD}$ no triângulo da figura, obtemos dois triângulos retângulos, cada um, com soma dos ângulos igual a 180^0.

Figura 4.22: Apoio para a demonstração da segunda proposição de Legendre.



Fonte: Autor

Se nenhum destes triângulos for isósceles, escolha um deles, por exemplo, o triângulo △ADB, com ângulo reto em D. Verifica-se qual dos catetos $\overline{AD}$ ou $\overline{BD}$, tem maior comprimento. Supondo $\overline{BD}$, tracemos um segmento ligando o vértice A a um ponto E, do segmento $\overline{BD}$, tal que $\overline{DA} \equiv \overline{DE}$.

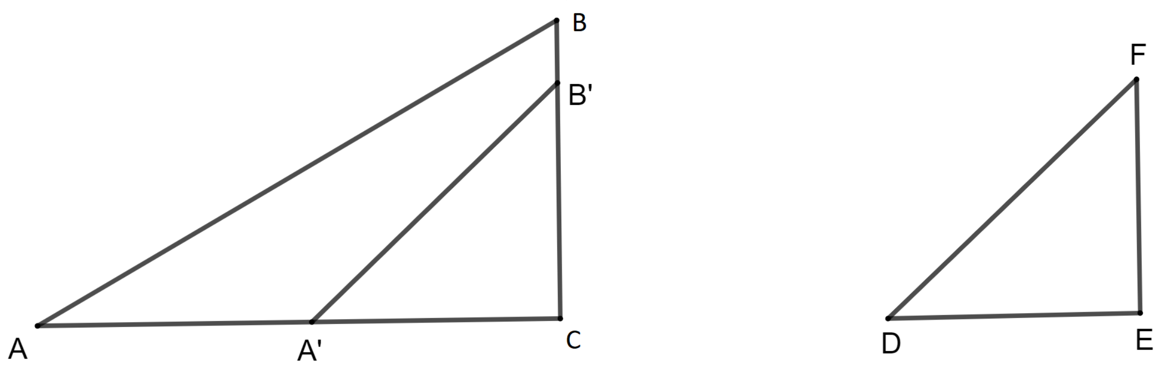
Do **Lema 4**, obtemos que o triângulo retângulo isósceles △ADE, tem soma dos ângulos igual a 180^0. Com base neste triângulo retângulo isósceles, com soma dos ângulos igual a 180^0, observamos que a junção de dois deles, ao longo da hipotenusa, produz um quadrado. Quadrados podem ser empilhados, uns sobre os outros, de modo a produzir quadrados de lados, arbitrariamente, grandes. A diagonal de um deles, o divide em dois triângulos retângulos isósceles cuja soma dos ângulos é 180^0, concluindo assim a demonstração do **Lema 5**

2ª Proposição de Legendre: *Se existir um triângulo cuja soma dos ângulos internos é igual a dois retos, então a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a dois retos.*

Demonstração:

Suponha que exista um triângulo cuja soma dos ângulos é 180^0, e seja △ABC um triângulo retângulo qualquer, com ângulo reto no vértice C. Pelo Lema 5, existe um triângulo retângulo isósceles △DEF, com ângulo reto em E, cujos catetos são maiores do que qualquer dos catetos do △ABC e cuja soma dos ângulos é 180^0.

Figura 4.23: Apoio para a demonstração da segunda proposição de Legendre.



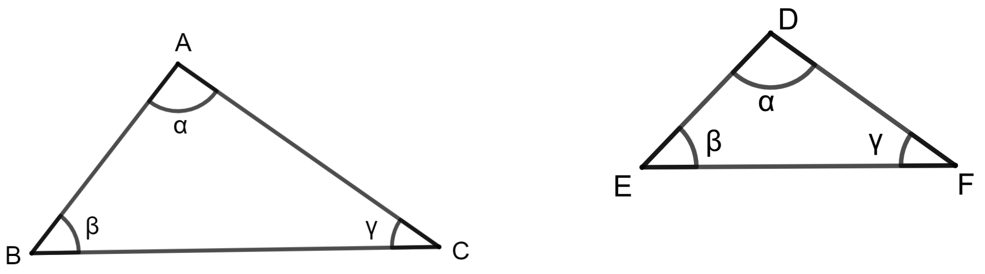
Fonte: Autor

Podemos então, marcar os pontos A' na semi-reta $\vec{CA}$, de modo que $\overline{B'C} \equiv \overline{FE}$. Tem-se então, △A'CB' ≡ △DEF, logo △A'CB' tem soma dos ângulos igual a 180^0. Trace o segmento $\overline{A'B}$, para concluir que △ABC tem soma dos ângulos igual a 180^0.

Voltemos à demonstração **E3 ⇒ E2.**

Sejam △ABC e △DEF triângulos semelhantes e não congruentes, com $\hat{A} \equiv \hat{D}$; $\hat{B} \equiv \hat{E}$ e $\hat{C} \equiv \hat{F}$. Suponhamos que $\overline{AB} > \overline{DE}$.

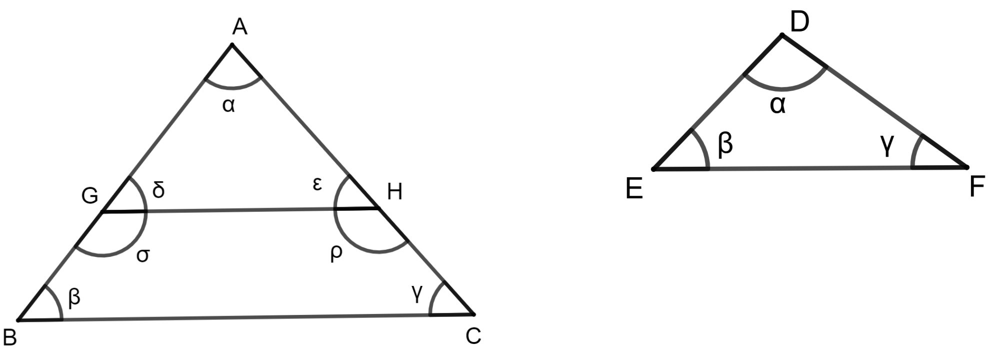
Figura 4.24: Apoio para demonstração de equivalência entre a existência de triângulos semelhantes e não congruentes e o 5^0 postulado.



Fonte: Autor

Sejam G $\in \overline{AB}$ e H $\in \overline{AC}$, tais que $\overline{AG} \equiv \overline{DE}$ e $\overline{AH} \equiv \overline{DF}$.

Figura 4.25: Apoio para demonstração de equivalência entre a existência de triângulos semelhantes e não congruentes e o 5^0 postulado.



Fonte: Autor

Pelo caso de congruência L A L, temos $\triangle$AGH $\equiv$ $\triangle$DEF $\Rightarrow \delta = \beta$ e $\epsilon = \gamma$. Logo, $\beta + \theta + \rho + \gamma = 360^0$ (pois $\theta + \delta + \epsilon + \rho = 360^0$). Dividindo o quadrilátero BGHC em dois triângulos, pela **1ª Proposição de Legendre** e $\beta + \theta + \rho + \gamma = 360^0$, temos que cada triângulo possui soma dos ângulos internos igual a 180^0.

Pela **2ª Proposição de Legendre**, temos que todo triângulo possui soma dos ângulos internos igual a 180^0, ou seja, vale E2. Como queríamos demonstrar.

Proposição E4$\longrightarrow$ *"Existe um par de retas equidistantes"*.

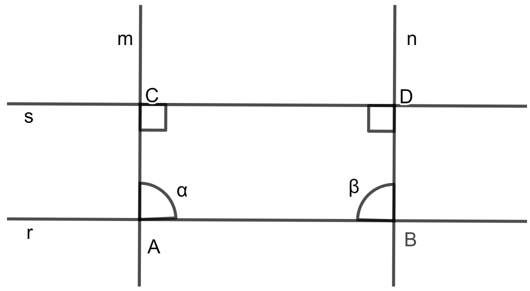
Iremos mostrar que P5 $\Rightarrow$ E4 e que E4 $\Rightarrow$ E2. Como E2 $\Leftrightarrow$ P5, teremos E4 $\Rightarrow$ P5.

Demonstração:

(P5 $\Rightarrow$ E4) Sejam r e s retas paralelas.

Sejam A,B $\in$ r e tomemos as perpendiculares m, n a s, passando po A e B, respectivamente, conforme a figura 4.26:

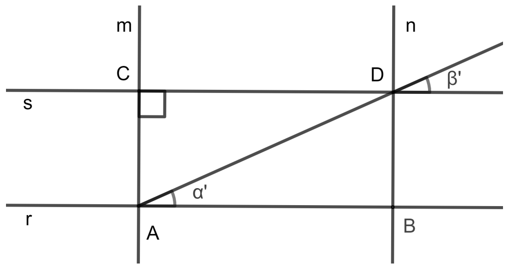
Figura 4.26: Apoio para a demonstração de equivalência entre a existência de retas equidistantes e o 5^0 postulado.



Fonte: Autor

Assumindo P5, temos que pela proposição dos ângulos correspondentes serem congruêntes é verdadeira e portanto, $\alpha = \beta = 90^0$

Figura 4.27: Apoio para a demonstração de equivalência entre a existência de retas equidistantes e o 5^0 postulado.



Fonte: Autor

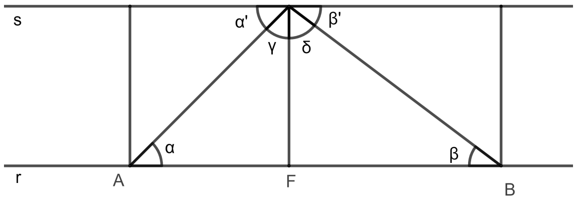
Também, pela proposição anterior, temos que $\alpha' = \beta'$ e, pelo caso de congruência LAA_o, temos que $\triangle$ADB $\equiv$ $\triangle$DCA $\Rightarrow$ $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$.

Como A e B são arbitrários, temos que r e s são equidistantes.

(E4 $\Rightarrow$ E2) Sejam r e s equidistantes.

Tomemos A e B pertencentes a r e baixemos perpendiculares com pés C e D em s. Tomemos E $\in \overline{CD}$ e baixemos uma perpendicular com pé F em r, conforme a Figura 4.28.

Figura 4.28: Apoio para a demonstração de equivalência entre a existência de retas equidistantes e o 5^0 postulado.



Fonte: Autor

Como $\overline{CA} \equiv \overline{EF}$, temos $\triangle$CAE $\equiv$ $\triangle$FEA (caso "cateto hipotenusa"de triângulos retângulos, que não dependem de P5). Logo, $\alpha = \alpha'$. Analogamente,
$\triangle$EDB $\equiv$ $\triangle$BFE $\Rightarrow \beta'$.

Assim, $\alpha' + \gamma + \delta + \beta' = 180^0 \Rightarrow \alpha + \gamma + \delta + \beta = 180^0$, ou seja, o triângulo $\triangle$AEB possui soma dos ângulos internos igual a 180^0.

Pela **2ª Proposição de Legendre** temos que todos os triângulos possuem soma dos ângulos internos igual a 180^0, ou seja, vale E2. Como queríamos demonstrar.

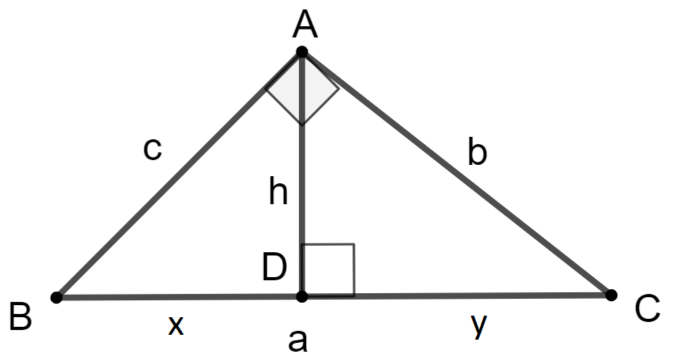
Proposição 5.$\longrightarrow$ *"Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos ".*

Mostraremos que E5 $\Rightarrow$ E2. Como E2 $\Leftrightarrow$ P5, teremos que E5 $\Rightarrow$ P5.

Demonstração:

(E5 $\Rightarrow$ E2) Seja $\triangle$ABC, um triângulo retângulo qualquer, com ângulo reto em A. Desenhe a altura $\overline{AD}$ do ângulo reto até a hipotenusa. Sabendo que a, b e c são os lados opostos aos vértices A, B e C. Sejam x = $\overline{BD}$, y = $\overline{DC}$ e h = $\overline{AD}$. Então $\triangle$BDA e $\triangle$ADC, bem como $\triangle$BAC são triângulos retângulos, e podemos aplicar a suposição pitagórica três vezes:

Figura 4.29: Apoio para a demonstração do teorema de Pitágoras como equivalente do 5^0 postulado.



Fonte: Autor

- $a^2 = b^2 + c^2$
- $c^2 = x^2 + h^2$
- $b^2 = y^2 + h^2$
- $a^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Substituindo as três últimas equações na primeira, obtemos:

$x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + h^2 + h^2 + y^2$

$2h^2 = 2xy \Rightarrow \frac{h}{x} = \frac{y}{h}$, fazendo essa proposição igual a **k**, então temos h = kx e y = kh, como $b^2 = y^2 + h^2$

$\Rightarrow b^2 = k^2h^2 + k^2x^2$

$\Rightarrow b^2 = k^2(h^2 + x^2)$

$\Rightarrow b^2 = k^2c^2$,então:

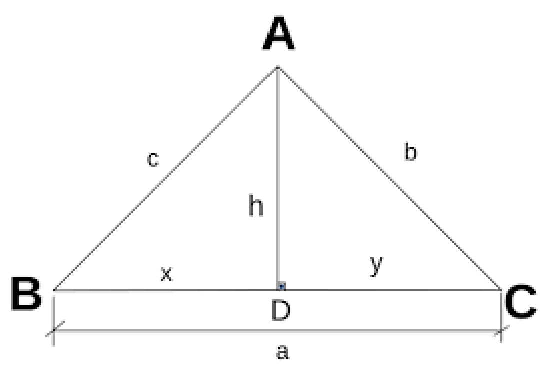
$\frac{b}{c} = k = \frac{h}{x} = \frac{y}{h}$.

De forma análoga, podemos mostrar que: $\frac{b}{a} = \frac{h}{c} = \frac{y}{b}$.

Assim, os lados correspondentes dos dois triângulos pequenos são proporcionais, assim como os lados correspondentes do triângulo original e qualquer um dos triângulos pequenos.

Seria tentador concluir que, uma vez que os lados correspondentes dos triângulos são proporcionais, os ângulos correspondentes são iguais. Esta implicação, no entanto, é uma consequência do Postulado das Paralelas e não se aplica em geral. No entanto, no caso de um triângulo retângulo isósceles podemos proceder da seguinte forma:

Figura 4.30: Apoio para demonstração do teorema de Pitágoras como equivalente do 5^0 postulado.



Fonte: Ptmatemática.ufpr.br

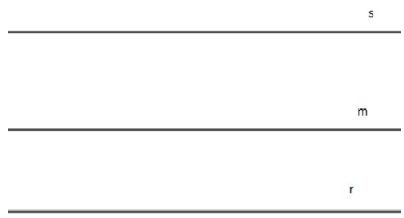
Como b = c e como $\frac{c}{b} = \frac{x}{h}$, temos x = h; da mesma forma, h = y. Assim, os triângulos $\triangle$BDA e $\triangle$CDA são também isósceles e congruentes (pelo caso de congruência LLL, já que b = c e x = h = y.) logo os ângulos da base destes triângulos,isto é, $\angle$DBA, $\angle$BAD, $\angle$DAC e $\angle$DCA são equiangulares entre si e com o triângulo $\triangle$ABC, mais precisamente, $\angle$DBA = $\angle$CBA = $\angle$DCA = $\angle$BCA = $\angle$BAD = $\angle$CAD e além disso, o ângulo $\angle$BAC = 90^0 = $\angle$BDA = $\angle$CDA.

Como a soma $\angle$BAD + $\angle$CAD mede 90^0 e devido a congruência dos ângulos da bases, segue que a soma dos ângulos de cada um dos triângulos $\triangle$BAC, $\triangle$BDA e $\triangle$CDA mede 180^0. Como queríamos demonstrar.

Como E5 $\Rightarrow$ E2 e E2 $\Leftrightarrow$ P5, logo E5 $\Rightarrow$ P5.

Proposição E6$\longrightarrow$ *"Se a reta m é paralela às retas r e s, então r e s são paralelas"* (transitividade).

Figura 4.31: Apoio para demonstração do teorema de transitividade de retas paralelas.



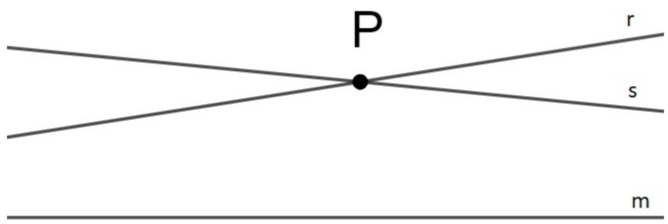
Fonte: Autor

Mostraremos que E6 $\Rightarrow$ E1. Como E1 $\Leftrightarrow$ P5, teremos que E6 $\Rightarrow$ P5.

Demonstração:

E6 $\Rightarrow$ **E1** Sabendo que as retas r e s são distintas, isto é r $\neq$ s, temos as seguintes possibilidades de intersecção para r e s: $\begin{cases} r \cap s = \oslash \text{ (neste caso r // s)} \\ r \cap s = 1 \text{ ponto (r e s são concorrente em um ponto P.)} \end{cases}$

Figura 4.32: Apoio para demonstração do teorema de transitividade de retas paralelas.



Fonte: Autor

Por **E1** (axioma das paralelas), temos que pelo ponto P, passa uma única paralela a m, então r = s. Absurdo! Portanto, r // s.

Como E6 $\Rightarrow$ E1 e E1 $\Leftrightarrow$ P5, logo E6 $\Rightarrow$ P5.

Com este substituto, encerramos aqui as demonstrações com as quais nos propusemos a fazer nesta dissertação. No entanto, ainda há um vasto campo a percorrer na demonstração dos inúmeros equivalentes do Quinto Postulado de Euclides.

Capítulo 5

Considerações Finais

Ao dissertar sobre o quinto postulado de Euclides e seus equivalentes ou substitutos, pudemos constatar a grandeza e complexidade desse postulado, que até o próprio Euclides chegou a duvidar se ele tinha o caráter de axioma ou de um teorema.

Foram inúmeras as tentativas de demonstração desse quinto postulado, embora, como já vimos, um tanto quanto frustradas. Mas essas "frustrações"sofridas por grandes matemáticos ao longo do tempo, não foram em vão, pois levaram a descobertas de outras geometrias, as chamadas não euclidianas, bem como contribuiram para o aperfeiçoamento do rigor lógico nas demonstrações.

Os substitutos ou equivalentes do quinto postulado de Euclides, conteúdo principal desse trabalho, nos levaram a uma melhor compreensão da "geometria mãe"(geometria euclidiana), que é ensinada na educação básica e superior. Com isso, podemos ir além das simples demonstrações propostas na grande maioria dos livros didáticos de ensino fundamental e médio, atualmente adotadas pelo MEC através do Plano Nacional do Livro Didático, que baseiam-se em equações e fórmulas prontas. Embora saibamos que as demonstrações são como uma engrenagem que integra o processo de aprendizagem e contribuem para o desenvolvimento matemático do estudante, nem todo teorema pode ser demonstrado apenas com o conhecimento básico em Matemática, dos alunos do ensino médio.

Embora tenham surgido outras geometrias, tais como a *Hiperbólica*, defendida por Lobachevski, na qual a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor que 180^o e a *Elíptica*, desenvolvida por Riemann[1], onde a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180^o, diferentemente da geometria euclidiana, cada uma tem sua grande contribuição no desenvolvimento do saber matemático.

[1] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866) matemático alemão que fundamentou a Geometria Elíptica.

Segundo palavras de Henri Poincaré[2] *"Uma geometria não pode ser mais verdadeira que a outra; poderá ser apenas mais cômoda"*.

Segundo Almir e Humberto em [2](2011) *"muitos matemáticos acreditavam que o quinto postulado, era uma proposição que Euclides, por não saber demonstrá-la a partir dos quatro primeiros, o introduziu como um postulado."*

Chegamos ao final de nossa dissertação, com a certeza de que as pessoas que farão uso desta, continuarão com a busca de mais substitutos para o quinto postulado de Euclides, visto que ainda tem muito a ser desvendado, apesar de mais de 2200 anos de estudo, lembrando que ainda há muitas demonstrações a serem feitas.

Segundo a revista [8](2014) *"O postulado das paralelas é uma ruga teimosa em uma folha: você pode tentá alisá-la, mas ela nunca desaparece"*.

[2]Jules Henri Poincaré (1854 - 1912), matemático, físico e filósofo francês

Referências Bibliográficas

[1] Adilson Silva, *Quadriláteros de Saccheri na Geometria Elíptica Dupla.* (IFSP, 2017)

[2] Almir Rogério Silva Santos e Humberto Henrique de Barros Viglioni, *Geometria Euclidiana Plana.* (UFS, 2011)

[3] Barbosa, João L.M., *Geometria Hiperbólica* IX Escola de Geometria Diferencial.(Vitória-ES, 1994)

[4] Clarissa Rosa Pinto, *O Quinto Postulado de Euclides. História e Desdobramentos nos fundamentos da Matemática.* (Roraima, 2015)

[5] Euclides, *Os Elementos. Tradução e introdução de Irineu Bicudo.* editora Unesp (São Paulo - SP, 2009)

[6] Inédio Arcari, *Um Texto de Geometria Hiperbólica.* (Campinas-SP, 2008)

[7] Hugo Marques, *As tentativas de demonstração do Quinto Postulado dos Elementos de Euclides.* (Portugal-Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2004)

[8] Revista Cientific American por Evelyn Lamb, https://blogs.scientificamerican.com/roots-of-unity/chasing-the-parallel-postulate/.(2014)

[9] Site, *www.cut-the-knot.org/triangle/pythpar/PTimpliesPP.shtml*

[10] Stackexchange,*math.stackexchange.com/questions/906918/which-statements-are-equivalent-to-the-parallel-postulate.* (2014)