



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

**Superfícies de Curvatura Média Constante com
Bordo Livre**

João Vinícius da Silva

Teresina - 2021

João Vinícius da Silva

Dissertação de Mestrado:

Superfícies de Curvatura Média Constante com Bordo Livre

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima

Teresina - 2021



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Superfícies de Curvatura Média Constante com Bordo Livre

João Vinícius da Silva

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 26 de Fevereiro de 2021.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima - Orientador

Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista - UFPI

Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro - UFC

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial de Ciências da Natureza – CCN
Serviço de Processamento Técnico

S586s Silva, João Vinicius da.
Superfícies de curvatura média constante em bordo livre /
João Vinicius da Silva – 2021.
69 f.: il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí,
Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em
Matemática, Teresina, 2021.

“Orientador: Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima. ”

1. Geometria Diferencial. 2. Curvatura Média. 3. Estabilidade
de Hipersuperfícies. I. Lima, Barnabé Pessoa. II. Título.

CDD 516.36

Bibliotecária (o): Caryne Maria da Silva Gomes – CRB3/1461

Dedico esse trabalho ao meu saudoso pai João Artur da Silva (in memoriam) e minha querida mãe Valda Maria da Silva.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço à Deus por ter iluminado meu caminho nessa jornada e colocar pessoas tão especiais na minha vida.

A todos os meus familiares, em especial a minha amada mãe Valda Maria, que sempre apoiou e fez de tudo no meio de tantas dificuldades para dar suporte na minha formação, serei eternamente grato a ela, à minha irmã Geovana Maria que está por perto em todos os momentos e a confiança depositada em mim e por sempre acreditar no meu potencial.

Ao meu pai João Artur, que mesmo com pouco tempo de convívio me passou muitos ensinamentos e pelos quais serei eternamente grato.

A minha namorada kátia Sousa, por todo companheirismo, incentivo e compreensão em todos os momentos e fazer os meus dias felizes.

Agradeço ao meu orientador e amigo professor Barnabé Pessoa Lima por me orientar desde a iniciação científica na graduação até aqui, sempre servindo de exemplo para mim como pessoa e o grande profissional que é. Obrigado por me conduzir em todo o desenvolvimento do trabalho com suas dicas e sugestões, e por sempre acreditar no meu potencial, pela paciência e confiança. É uma honra ser seu aluno.

Aos professores do departamento de matemática da UFPI, em especial, aos professores Paulo Alexandre, Halyson Baltazar, Rondinelle Marcolino, Jurandir Oliveira, João Xavier, José Francisco, Leandro Pessoa, Gleison Nascimento, Vitaliano Amaral, João Carlos, Newton Luís, Antônio Wilson, Liane Feitosa e Jefferson Leite que tiveram grande contribuição na minha formação acadêmica.

Aos professores José Fábio Montenegro e Rondinelle Marcolino por terem aceito o convite e participarem da banca examinadora e por todas as dúvidas tiradas e sugestões

para um melhoramento do trabalho.

Ao mais que amigo e sim irmão Erisvaldo Veras que ao longo desses anos fomos a dupla dinâmica do departamento de matemática da UFPI que me ajudou nos momentos bem difíceis da trajetória e conhece de perto minha caminhada. Muito obrigado.

Agradeço a todos meus amigos conquistados nesses longos anos na UFPI pelo incentivo, força e companheirismo, em especial José Edilson, José Márcio, Ruan Diego, Antônio Wesley, Hotávio Fonseca, Kevin Marçal, Sara Rute, Emília Amorim, Juliano Nascimento, Antônio Nilson, Jean Carlos, Marcos Carvalho, Júlio José, Danrley, André, Alexia, Osvaldo, George Lucas, Lucas Bandeira, Melquisedeque, Ousadia, Raylan, Dieme, Francimar, Pedro Paulo, Pedro Rodrigues, Raimundo Bruno, Christopher, Severino, Idalina, Jaciane, Leonardo Silva, Edimilson Lopes, Igor, Thiago Mayson, Douglas Rafael, Michell Dhouglas, Sillas Augusto, Raquel Lemos, Paulo Sérgio, Jonatas Arrais, Jonas Bloch, Suerlan, Bruno Vasconcelos, Gustavo, Atécio Alves, Jefferson de Brito, João Santos, Alexandre Bezerra, Rafael Emanuel, Dário Severo, Danilo, Lucas Emanuel, Maicon Araújo, Rodrigo Brito, Júnior Amaral e Adelson Rios.

Agradeço também Antônio Fágner, Welton Rodrigues, Cláudia, Ézio, Dira, padrinho Wellington, madrinha Nayana, padrinho Welton, Xislene, compadre Willamis, comadre Reizinha, Leila, comadre Lília, Laires, compadre Victor Hugo, Wemerson, Chico Sindô, tia Maria do Livramento (tia neném), tia Vaulene, meu avô Valdimir e meus afilhados que sempre estão por perto na minha caminhada acadêmica.

Aos meus amigos de infância Ivanildo, Josenildo, Alexandre e Eduardo Sousa que nos momentos de descontração sempre estão presentes.

Por fim, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

“Para quem acredita e persiste, um sonho nunca morre, ele apenas pode ser adiado”.

Autor desconhecido.

Resumo

Nesta dissertação, temos que uma hipersuperfície com bordo livre de uma variedade é ponto crítico do funcional área restrito a todas as variações admissíveis que preservam volume. Neste caso, temos uma caracterização especial, possuir curvatura média constante. Aqui, estudamos soluções estáveis do problema e obtemos várias restrições topológicas e geométricas para esse tipo de superfície em domínios convexos limitados. No caso particular de uma bola euclidiana unitária no \mathbb{R}^3 Antônio Ros e Enaldo Vergasta [17] obtiveram resultados bem mais satisfatórios. Tais resultados foram obtidos no artigo *Stability for Hypersurfaces of Constant Mean Curvature with Free Boundary*.

Palavras-Chaves: Bordo livre, Curvatura Média Constante, Hipersuperfície, Superfície Estável.

Abstract

In this dissertation, we have that a hypersurface with a free boundary of a manifold is a critical point of the functional area restricted to all admissible variations that preserve the volume. In this case, we have a special characterization, having constant mean curvature. Here, we study stable solutions to the problem and obtain several topological and geometric restrictions for this type of surface in limited convex domains. In the particular case of a single Euclidean ball at \mathbb{R}^3 Antônio Ros and Enaldo Vergasta [17] got much more satisfactory results. Such results were obtained in the article Stability for Hypersurfaces of Constant Mean Curvature with Free Boundary.

Keywords: Free Boundary, Constant Mean Curvature, Hypersurface, Stable Surface.

Sumário

Resumo	v
Abstract	vi
1 Noções Preliminares	4
1.1 Superfícies com bordo livre	4
1.2 Operadores especiais	6
1.3 Imersões isométricas e a segunda forma fundamental	9
1.4 Fórmulas de variação	13
2 Superfícies Estacionárias	19
2.1 Imersões estacionárias estáveis	19
2.2 A Forma índice	23
3 Estabilidade para hipersuperfícies em domínios convexos	29
4 Estabilidade para hipersuperfícies em uma bola unitária	36
5 Apêndice	54
5.1 Teorema de Gauss-Bonnet	54
5.2 Princípio do Máximo de Hopf	55
5.3 Princípio do Máximo	55
Referências Bibliográficas	57

Introdução

Este trabalho descreve um resultado obtido por Antônio Ros e Enaldo Vergasta [17], publicado em 1995, sobre estabilidade para hipersuperfícies de curvatura média constante com bordo livre. A motivação principal é a demonstração do seguinte resultado:

Teorema 0.1. *Suponha que $B \subset \mathbb{R}^3$ uma bola e que $\phi : M \rightarrow B$ seja estacionária estável. Então ∂M é mergulhada e as únicas possibilidades são*

1. $\phi(M)$ é um disco totalmente geodésico,
2. $\phi(M)$ é uma calota esférica,
3. $g = 1$ e $r = 1$ ou 2 , onde g é o gênero e r é o número de componentes conexas.

Inicialmente, observamos que as hipersuperfícies de curvatura média constante são bem conhecidas por serem soluções para um problema variacional. Elas são pontos críticos para o funcional área para variações que deixam o funcional de volume constante. Aqui, trataremos de uma questão variacional precisa, partindo de problemas para domínios convexos.

Dado um domínio convexo compacto suave $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$, vamos denotar por ∂B e $\text{int}B$ a fronteira e o interior de B , respectivamente. O problema consiste em minimizar a área n -dimensional, ou mais geralmente em estudar os pontos críticos do funcional área, entre todas as hipersuperfícies compactas de \mathbb{R}^{n+1} com bordo contido em ∂B e interior em $\text{int}B$. Sob essas restrições, uma hipersuperfície é chamada de estacionária se tiver área crítica, e estável quando minimiza a área até a segunda ordem (essas definições são conhecidas durante o texto).

As superfícies estacionárias devem ter curvatura média constante e intersectar ∂B ortogonalmente, isto é, ter bordo livre. Quando $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma bola, além dos discos totalmente geodésicos com bordo livre em um equador da ∂B também as calotas esféricas

ou um pedaço de uma catenóide, cada um deles intersectando ∂B em um ângulo reto, são exemplos de superfícies estacionárias.

A dissertação está dividida da seguinte maneira. No capítulo 1, apresentamos algumas definições, notações e resultados sobre geometria riemanniana e variação de área e volume que darão suporte aos próximos capítulos. No capítulo 2, introduzimos superfícies estacionárias e logo em seguida, demonstramos o

Teorema 0.2. *Seja $\phi : M \rightarrow B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão, onde $\phi(\text{int } M) \subset \text{int } B$, $\phi(\partial M) \subset \partial B$ e B é um disco fechado de \mathbb{R}^{n+1} . Então, ϕ é ponto crítico do funcional área para variações admissíveis que preservam volume se, e somente se, ϕ é uma hipersuperfície com curvatura média constante com bordo livre.*

Ainda neste capítulo, mostramos o teorema seguinte.

Teorema 0.3. *Seja $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão de uma superfície compacta M e $f \in C^\infty(M)$ onde vale*

$$\int_M f \, dM = 0$$

Então existe uma variação Φ que preserva volume, onde o campo variacional é dado por $\xi = fN$.

No capítulo 3, estudamos hipersuperfícies imersas estáveis estacionárias sem nenhuma restrição a priori sobre sua topologia. Para superfícies estacionárias em um domínio convexo B de \mathbb{R}^3 , mostramos a seguinte restrição topológica.

Teorema 0.4. *Se B é convexo em \mathbb{R}^3 e ϕ é estacionário estável, então os únicos valores possíveis para g e r são*

1. $g = 0$ ou 1 e $r = 1, 2$ ou 3
2. $g = 2$ ou 3 e $r = 1$.

No capítulo 4, nos restringimos a considerar B a bola unitária de \mathbb{R}^{n+1} , o primeiro resultado que provamos é para hipersuperfícies mínimas.

Teorema 0.5. *Suponha que $B \in \mathbb{R}^{n+1}$ é uma bola e que ϕ é estacionária estável. Se ϕ é mínima, então é totalmente geodésico.*

Mostramos também o caso em que a superfície não é mínima, obtendo somente um resultado parcial. Dizemos que uma hipersuperfície tem a forma de estrela em relação a um ponto ambiente se cada semi-reta se estendendo a partir dele intersecta a hipersuperfície no máximo em um ponto.

Teorema 0.6. *Suponha que B é a bola unitária em \mathbb{R}^{n+1} e que ϕ é estável estacionária com $L \geq nA$. Então u nunca se anula em $\text{int } M$ ou ϕ é totalmente geodésico. No primeiro caso, se além disso ∂M é mergulho, então $\phi(M)$ é uma hipersuperfície em forma de estrela em relação ao centro da bola.*

Para uma bola tridimensional, o seguinte teorema tem descrição mais explícita.

Teorema 0.7. *Suponha que $B \subset \mathbb{R}^3$ uma bola e que $\phi : M \rightarrow B$ seja estacionária estável. Então ∂M é mergulhada e as únicas possibilidades são*

1. $\phi(M)$ é um disco totalmente geodésico,
2. $\phi(M)$ é uma calota esférica,
3. $g = 1$ e $r = 1$ ou 2.

Por fim, incluímos também 1 apêndice. Nele, apresentamos o Teorema de Gauss-Bonnet, Princípio do Máximo de Hopf e o Princípio do Máximo.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições, notações e resultados que serão utilizados nos capítulos seguintes. Não demonstraremos todos os resultados, mas deixaremos as devidas referências. Para a leitura do texto espera-se que o leitor tenha algumas noções de geometria, como a definição de Variedade Riemanniana, Conexão Riemanniana, Primeira e Segunda Variação de área, Volume, Curvatura Média, Hipersuperfície e o Teorema de Gauss-Bonnet.

Denotaremos por M^n (Ou simplesmente M) uma variedade Riemanniana conexa de dimensão n e classe C^∞ , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sua métrica Riemanniana, com a correspondente norma denotada por $\| \cdot \|$, ∇ sua conexão Riemanniana, $T_p M$ o plano tangente a M no ponto $p \in M$ e $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores C^∞ de M . A seguir, iremos relembrar algumas definições e proposições que serão usadas ao longo do texto.

1.1 Superfícies com bordo livre

Seja o conjunto $R_+ \subset \mathbb{R}^n$, dado por

$$R_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\},$$

onde

$$\text{Int}(R_+) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$$

e,

$$\partial R_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\},$$

são respectivamente, o interior e a fronteira de $\mathbb{R}_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$.

Definição 1.1. *Uma variedade topológica M^n com bordo é um espaço topológico, Hausdorff, com base enumerável e localmente euclidiano em que todo ponto $p \in M^n$ tem uma vizinhança homeomorfa ou a um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n ou a um subconjunto aberto de \mathbb{R}_+ .*

Definição 1.2. *Uma estrutura suave para M é um conjunto de cartas cujos domínios cobrem M e as aplicações de transição são diferenciáveis.*

Definição 1.3. *Uma superfície diferenciável M com bordo, é um par (M, \mathbb{A}) em que M é uma variedade topológica com bordo e \mathbb{A} é uma estrutura suave para M .*

Para mais detalhes consulte [10] e [11].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e considere $M \subset \Omega$ uma superfície compacta com $\partial M \neq \emptyset$, onde $\partial M \subset \partial \Omega$.

Definição 1.4. *Dizemos que M é uma superfície com bordo livre quando M intersecta $\partial \Omega$ ortogonalmente.*

Exemplo 1.1. *O catenóide crítico é um exemplo de superfície com bordo livre, onde temos um pedaço de uma catenóide contida na bola unitária B , encontrando ∂B ortogonalmente.*

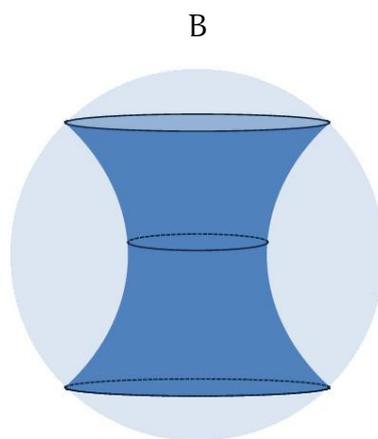


Figura 1.1: catenóide crítico

O catenóide crítico pode ser definido analiticamente como a imagem da aplicação conforme

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbf{t}, \theta) &\in [-\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_0] \times \mathbb{S}^1 \\ &\mapsto \mathbf{a}_0 \cosh(\mathbf{t}) \cos(\theta) \mathbf{e}_1 + \mathbf{a}_0 \cosh(\mathbf{t}) \operatorname{sen}(\theta) \mathbf{e}_2 + \mathbf{a}_0 \mathbf{t} \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

onde $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 . A constante \mathbf{t}_0 é a única solução positiva da equação $\mathbf{t} \operatorname{senh}(\mathbf{t}) = \cosh(\mathbf{t})$, enquanto que $\mathbf{a}_0 = (\mathbf{t}_0 \cosh(\mathbf{t}_0))^{-1}$. Estas constantes são escolhidas de tal maneira que a aplicação φ é conforme e a sua imagem é um pedaço de um catenóide em B , encontrando ∂B ortogonalmente, e cujo eixo de simetria é a reta gerada pelo vetor \mathbf{e}_3 .

1.2 Operadores especiais

Aqui, iremos definir as noções de gradiente e Laplaciano de uma função, Teorema da Divergência, a Fórmula de Green e alguns outros resultados relacionados.

Definição 1.5. *O gradiente de uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é o campo ∇f , definido por*

$$\langle \nabla f(\mathbf{p}), \mathbf{v} \rangle = \mathbf{d}f_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}), \quad (1.1)$$

para todo $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}M$.

Proposição 1.1. *Se $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis, então*

(a) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$.

(b) $\nabla(fg) = g \cdot \nabla f + f \cdot \nabla g$.

Demonstração. Considere $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis e $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}M$, portanto temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla(f + g)(\mathbf{p}), \mathbf{v} \rangle &= \mathbf{d}(f + g)_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{d}f_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) + \mathbf{d}g_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) \\ &= \langle \nabla f(\mathbf{p}), \mathbf{v} \rangle + \langle \nabla g(\mathbf{p}), \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \nabla f(\mathbf{p}) + \nabla g(\mathbf{p}), \mathbf{v} \rangle. \end{aligned}$$

Agora provaremos o segundo item. De fato, note que

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla(fg)(\mathbf{p}), \mathbf{v} \rangle &= \mathbf{d}(fg)_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) \\
 &= f\mathbf{d}g_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) + g\mathbf{d}f_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) \\
 &= f\langle \nabla(g)(\mathbf{p}), \mathbf{v} \rangle + g\langle \nabla(f)(\mathbf{p}), \mathbf{v} \rangle \\
 &= \langle f\nabla(g)(\mathbf{p}), \mathbf{v} \rangle + \langle g\nabla(f)(\mathbf{p}), \mathbf{v} \rangle \\
 &= \langle f\nabla(g)(\mathbf{p}) + g\nabla(f)(\mathbf{p}), \mathbf{v} \rangle.
 \end{aligned}$$

Isto conclui a prova da proposição. \square

Definição 1.6. *Seja X um campo vetorial em M . A divergência de X é a função suave $\operatorname{div} X : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\operatorname{div} X = \operatorname{tr}\{\mathbf{v} \mapsto (\nabla_{\mathbf{v}} X)(\mathbf{p})\}, \quad (1.2)$$

onde $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}M$ e tr é o traço do operador dado entre chaves.

Proposição 1.2. *Sejam X, Y campos vetoriais suaves sobre M e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Então,*

- (a) $\operatorname{div}(X + Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$.
- (b) $\operatorname{div}(fX) = f\operatorname{div} X + \langle \nabla f, X \rangle$.

Demonstração. A prova do primeiro item segue do seguinte cálculo

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(X + Y) &= \operatorname{tr}\{\mathbf{v} \mapsto \nabla_{\mathbf{v}}(X + Y)(\mathbf{p})\} \\
 &= \operatorname{tr}\{\mathbf{v} \mapsto (\nabla_{\mathbf{v}} X(\mathbf{p}) + \nabla_{\mathbf{v}} Y(\mathbf{p}))\} \\
 &= \operatorname{tr}\{\mathbf{v} \mapsto \nabla_{\mathbf{v}} X(\mathbf{p})\} + \operatorname{tr}\{\mathbf{v} \mapsto \nabla_{\mathbf{v}} Y(\mathbf{p})\} \\
 &= \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y.
 \end{aligned}$$

Concluindo a prova do primeiro item, agora tratamos do segundo. Seja $\{e_i\}$ um referencial, com isso temos

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(fX) &= \langle \nabla_{e_i} fX, e_i \rangle \\
 &= \langle e_i(f)X + f\nabla_{e_i} X, e_i \rangle \\
 &= \langle e_i(f)X, e_i \rangle + \langle f\nabla_{e_i} X, e_i \rangle \\
 &= \langle e_i(f)e_i, X \rangle + f\langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle \\
 &= \langle \nabla(f), X \rangle + f\operatorname{div} X.
 \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. \square

Definição 1.7. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. O laplaciano de f é a função $\Delta f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f).$$

Proposição 1.3. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave em M , e $\{e_i\}_{i=1}^n$ um referencial geodésico em $p \in M$. Então,*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n e_i(e_i(f)).$$

Demonstração. Basta ver que $\nabla f = \sum_{i=1}^n e_i(f)e_i$, e assim usando a definição anterior temos que

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^n e_i(f)e_i\right) = \sum_{i=1}^n e_i(e_i(f)) + \langle \nabla_{e_i} e_i, \nabla f \rangle = \sum_{i=1}^n e_i(e_i(f)) + \nabla_{e_i} e_i(f).$$

\square

Teorema 1.1 (Divergência). *Sejam M uma variedade compacta orientável com bordo ∂M e X um campo de classe C^k . Então*

$$\int_M \operatorname{div} X dM = \int_{\partial M} \langle X, \eta \rangle dS,$$

onde η é um campo unitário normal à ∂M apontando para fora de M .

Demonstração. Esse teorema é uma consequência imediata do Teorema de Stokes para variedades. A demonstração do Teorema de Stokes pode ser encontrada em [18]. \square

Corolário 1.1 (1ª Fórmula de Green). *Sejam $u, v : U \rightarrow \mathbb{R}$, funções de classe C^k no aberto U . Seja $M \subset U$ uma variedade orientável, compacta com bordo suave ∂M . Então:*

$$\int_M u \cdot \Delta v dM + \int_M \langle \nabla(u), \nabla(v) \rangle dM = \int_{\partial M} u \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta} dS.$$

Demonstração. Segue diretamente do Teorema da divergência e da definição do div considerando o seguinte campo $X = u \cdot \operatorname{grad}(v)$. \square

Definição 1.8. *Seja M uma Variedade Riemanniana, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Dizemos que f é harmônica se $\Delta f = 0$; f é subharmônica se $\Delta f \geq 0$ e f é superharmônica se $\Delta f \leq 0$ em M .*

1.3 Imersões isométricas e a segunda forma fundamental

Sejam M^n e \overline{M}^{n+k} variedades diferenciáveis e $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k}$ uma aplicação diferenciável.

Definição 1.9. Dizemos que f é uma imersão quando $df_p : T_p M^n \rightarrow \overline{T}_{f(p)} M^{n+k}$ é injetiva para todo $p \in T_p M$.

Definição 1.10. Dizemos que f é um mergulho suave quando,

- (i) f é uma imersão suave.
- (ii) $f : M^n \rightarrow f(M^n)$ é um homeomorfismo, onde a topologia de $f(M^n)$ é a topologia de subespaço.

Teorema 1.2. Seja $f : M^n \rightarrow f(M^n)$ uma aplicação suave. Então f é uma imersão se, e somente se, é um mergulho local.

Demonstração. Veja [11]. □

Dada $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k}$ imersão da Variedade diferenciável M^n na Variedade Riemanniana \overline{M}^{n+k} . A métrica Riemanniana de \overline{M}^{n+k} induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em M^n . Ou seja, define-se

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_p = \langle df_p(\mathbf{u}), df_p(\mathbf{v}) \rangle_{f(p)},$$

$\forall p \in M^n$ e todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p M$. Nesta situação, f passa a ser uma imersão isométrica de M^n em \overline{M}^{n+k} .

Considere f satisfazendo a definição 1.10. Então, f é localmente um mergulho, e assim, para todo $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de \overline{M} . Segue daí que $f : U \subset M^n \rightarrow f(U) \subset \overline{M}^{n+k}$ é um difeomorfismo local, e desta forma $df_p : T_p M^n \rightarrow \overline{T}_{f(p)} M^{n+k}$ é um isomorfismo.

Dado $p \in M^n$, podemos escrever

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp$$

e assim, dado $\mathbf{v} \in T_p \bar{M}$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}^\top + \mathbf{v}^\perp$. Denote por $\bar{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de \bar{M} . Se $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ e \bar{X}, \bar{Y} são extensões locais de X e Y em \bar{M} (isto é, $\bar{X}|_U = X$ e $\bar{Y}|_U = Y$), então

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\top$$

é a conexão de Levi-Civita de M^n .

(1) ∇ está bem definida.

Para cada $\mathbf{p} \in M^n$, $(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})(\mathbf{p})$ só depende do valor de $\bar{X}(\mathbf{p}) = X(\mathbf{p})$ e dos valores do campo \bar{Y} ao longo de uma curva diferenciável $C : I \rightarrow \bar{M}^{n+k}$ tal que $C(0) = \mathbf{p}$ e $C'(0) = \bar{X}(\mathbf{p}) = X(\mathbf{p})$. Escolha C em M^n e observe que $\bar{Y}|_U = Y$.

(2) ∇ é compatível com a métrica.

Em U , temos

$$X\langle Y, Z \rangle = \bar{X}\langle \bar{Y}, \bar{Z} \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, \bar{Z} \rangle + \langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Z} \rangle$$

Logo,

$$X\langle Y, Z \rangle = \bar{X}\langle \bar{Y}, \bar{Z} \rangle = \langle (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\top, Z \rangle + \langle Y, (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Z})^\top \rangle$$

é compatível com a métrica.

(3) ∇ é simétrica.

Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ e $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{X}(\bar{U})$, assim

$$[\bar{X}, \bar{Y}]|_U = [X, Y].$$

Proposição 1.4. *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ campos locais em M^n e $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{X}(\bar{U})$ extensões locais de \bar{X}, \bar{Y} em \bar{M}^{n+k} , a aplicação $\sigma : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)^\perp$ dada por*

$$\sigma(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Demonstração. Como $\bar{\nabla}$ e ∇ são conexões Riemanniana, a aditividade de σ em X e Y é imediata. Agora, seja $f \in D(\mathcal{U})$ (anel das funções em \mathcal{U})

$$\sigma(fX, Y) = \bar{\nabla}_{f\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_{fX}Y = f\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - f\nabla_X Y = f\sigma(X, Y)$$

Seja $\bar{f} \in D(\bar{\mathcal{U}})$ extensão de f em $\bar{\mathcal{U}}$. Logo,

$$\sigma(X, fY) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}(\bar{f}\bar{Y}) - \nabla_X(fY) = \bar{X}(f)\bar{Y} + \bar{f}\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - X(f)Y - f\nabla_X Y.$$

Veja que $\bar{f}|_{\mathcal{U}} = f$ e $\bar{X}(f) = X(f)$, daí

$$\sigma(X, fY) = \bar{f}\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - f\nabla_X Y = f\sigma(X, Y)$$

Agora, observe que

$$\sigma(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} + [\bar{X}, \bar{Y}] - \nabla_X Y - [X, Y]$$

como $[\bar{X}, \bar{Y}]|_{\mathcal{U}} = [X, Y]$, daí teremos que

$$\sigma(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y = \sigma(Y, X).$$

□

Pode-se mostrar que σ independe das extensões locais X e Y . Além disso, sendo σ bilinear, exprimindo σ em um sistema de coordenadas o valor de $\sigma(X, Y)(\mathbf{p})$ depende apenas $X(\mathbf{p})$ e $Y(\mathbf{p})$. Nossa σ acima chamaremos de segunda forma fundamental de M^n em \bar{M}^{n+k} .

Definição 1.11. Dado $\mathbf{p} \in M$ e $\eta \in (T_{\mathbf{p}}M)^\perp$, defina a aplicação linear autoadjunta $S_\eta : T_{\mathbf{p}}M \rightarrow T_{\mathbf{p}}M$ por

$$\langle S_\eta(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \eta \rangle.$$

A proposição seguinte nos dá uma expressão da aplicação linear associada à segunda forma fundamental em termos da derivada covariante.

Proposição 1.5. Seja $\mathbf{p} \in M$, $\mathbf{x} \in T_{\mathbf{p}}M$ e $\eta \in (T_{\mathbf{p}}M)^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a M . Então

$$S_\eta(\mathbf{x}) = -(\bar{\nabla}_{\mathbf{x}}N)^\perp.$$

Demonstração. Considere $\mathbf{y} \in T_p M$ e X, Y extensões locais de x, y respectivamente, e tangentes a M . Logo,

$$\begin{aligned} \langle S_\eta(x), \mathbf{y} \rangle &= \langle \sigma(X, Y), \eta \rangle = \langle \sigma(X, Y), N \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle \end{aligned}$$

como $\langle N, Y \rangle = 0$, então $X\langle N, Y \rangle = 0$ e daí $\langle \bar{\nabla}_X N, Y \rangle + \langle N, \bar{\nabla}_X Y \rangle = 0$. Logo, teremos

$$\langle S_\eta(x), \mathbf{y} \rangle = -\langle Y, \bar{\nabla}_X N \rangle = \langle -\bar{\nabla}_X N, \mathbf{y} \rangle,$$

$$\forall \mathbf{y} \in T_p M \implies S_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_X N)^\perp. \quad \square$$

Definição 1.12. Quando a codimensão da imersão é 1, isto é, $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$; $f(M) \subset \bar{M}$ é então denominada uma hipersuperfície.

Considerando $\mathbf{p} \in M^n$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$, $\|\eta\| = 1$. Como $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ é simétrica, existe uma base ortonormal de vetores próprios $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p M$ com valores próprios k_1, \dots, k_n , isto é ,

$$S_\eta(e_i) = k_i e_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

k_1, \dots, k_n são as curvaturas principais de M^n . Por exemplo: $\det(S_\eta) = k_1 \cdots k_n$ é denominada a curvatura de Gauss de f e $\frac{1}{n}(k_1 + \dots + k_n)$ é denominada a curvatura média de f .

Definição 1.13. Uma imersão $f : M \rightarrow \bar{M}$ é geodésica em $\mathbf{p} \in M$ se $\sigma(x, \mathbf{y}) = 0 \forall x, \mathbf{y} \in T_p M$. Se for geodésica em todo $\mathbf{p} \in M$, ou seja, $\sigma \equiv 0$, neste caso dizemos que a imersão é totalmente geodésica.

Definição 1.14. Uma imersão $f : M \rightarrow \bar{M}$ é mínima se para todo $\mathbf{p} \in M$ e todo $\eta \in (T_p M)^\perp$ tem-se traço $(S_\eta) = 0$.

Definição 1.15. Escolhendo um referencial ortonormal E_1, \dots, E_m de vetores em $\mathfrak{X}(U)^\perp$, onde U é uma vizinhança de \mathbf{p} na qual f é um mergulho, o vetor dado por

$$H = \frac{1}{n} \sum_i (\text{tr } S_i) E_i,$$

onde $S_i = S_{E_i}$, é chamado o vetor curvatura média de f . É claro que f é mínima se e só se $H(\mathbf{p}) = 0, \forall \mathbf{p} \in M$.

Para um melhor entendimento consulte [7].

1.4 Fórmulas de variação

Dada (M^m, g) uma variedade riemanniana e $\varepsilon > 0$. Por variação de ϕ queremos dizer que a aplicação diferenciável $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M^n \rightarrow \overline{M}^m$ tal que $\Phi_t : M^n \rightarrow \overline{M}^m$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $n < m$, definida por $\Phi_t = \phi(t, p)$, $p \in M$, é imersão, e $\Phi_0 = \phi$. E dA_t é o elemento de volume dado por

$$dA_t = \sqrt{\det(g_t)_{ij}} dx$$

onde $g_t = \phi_t^* g$ é a métrica em M^n dada pelo pullback da métrica g em \overline{M}^m por Φ_t . Denotamos $(g_t)^{ij}$ a matriz inversa de $(g_t)_{ij}$, e fazendo um pequeno abuso de notação consideraremos $g_0 = g$.

Lema 1.1. *Dada g_t uma família a um parâmetro de métricas, temos que o elemento de volume evolui como*

$$\frac{\partial}{\partial t} dv_g = \frac{1}{2} \text{tr}(h) dv_g,$$

onde $h = \frac{\partial g_t}{\partial t}$.

Demonstração. Pondo o elemento de volume em coordenadas temos que

$$dv_g = \sqrt{\det(g_t)_{ij}} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Daí,

$$\frac{\partial}{\partial t} dv_g = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \ln(\det(g_t)_{ij}) \right) \sqrt{\det(g_t)_{ij}} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Usando variedades diferenciáveis (consulte [11]) o determinante de uma matriz é dada por

$$\det A(t) = \det(g_t)_{ij} = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)},$$

onde o somatório é sobre todas as permutações de $1, \dots, n$. Supondo que $A(t)$ só depende de t , e derivando a expressão acima, obtemos o seguinte

$$\frac{\partial}{\partial t} \det A(t) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial t} (A(t))_{ij} \cdot \sum_{\sigma: \sigma(i)=j} \text{sign}(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdots \widehat{A_{i\sigma(i)}} \cdots A_{n\sigma(n)},$$

onde $\widehat{A_{i\sigma(i)}}$ significa que o fator é omitido, e esse somatório é sobre todas permutações σ ; $\sigma(i) = j$. Pela regra de cramer tem-se que

$$(A^{-1}(t))_{ij} = \frac{1}{\det A(t)} \cdot \sum_{\sigma: \sigma(i)=j} \text{sign}(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdots \widehat{A_{i\sigma(i)}} \cdots A_{n\sigma(n)}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln(\det A(t)) = \frac{1}{\det A(t)} \frac{\partial}{\partial t} \det A(t) = \text{tr}(\mathbf{h}).$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial t} dv_g = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{h}) dv_g.$$

□

Definição 1.16. Dada uma variação Φ , definimos a função área $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$A(t) = \int_M dA_t,$$

onde dA_t é o elemento de volume de M na métrica induzida por Φ_t , e a função volume $V : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$V(t) = \int_{[0,t] \times M} \Phi^* dV,$$

onde dV é o elemento de volume canônico de \mathbb{R}^{n+1} . O Teorema da Divergência nos dá que o volume é igual a

$$V(t) = \frac{1}{n+1} \int_M \langle \Phi, \mathbf{N}(t) \rangle dA_t.$$

$V(t)$ representa o volume fechado entre a hipersuperfície ϕ e Φ_t . Dizemos que a variação preserva o volume se $V(t) = V(0) \forall t$.

Seja

$$\xi(\mathbf{p}) = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{p}) \right|_{t=0}$$

o campo variacional de Φ . Denotamos por \mathbf{v} o normal unitário exterior ao longo da ∂M e por ds o elemento de volume da ∂M induzido por ϕ . \mathbf{N} denotará um campo vetorial normal unitário ao longo de ϕ e H a curvatura média de ϕ .

Definição 1.17. Uma variação é chamada normal se $\xi = f\mathbf{N}$, e admissível se $\Phi_t(\text{int } M) \subset \text{int } B$ e $\Phi_t(\partial M) \subset \partial B \forall t$.

Vamos enunciar e dar uma prova para as fórmulas de variação, para isso precisamos fazer mais algumas considerações antes.

Observação 1.1. *Veja que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $(-\varepsilon, \varepsilon) \times M$ tem dimensão $n + 1$. Daí, tomando um sistema de coordenadas locais x_1, \dots, x_n, t em uma vizinhança p de $V \subset (-\varepsilon, \varepsilon) \times M$, conseguimos uma base de $T_p((-\varepsilon, \varepsilon) \times M)$*

$$\beta = \left\{ \frac{\partial}{\partial t}(p), \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p) \right\},$$

onde os campos de vetores $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$, ao longo de Φ . Onde, $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = d\Phi \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)$ para $i = 1, \dots, n$ e $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = d\Phi \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$, e satisfazem

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right] = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] = 0, \quad (1.3)$$

pelo fato que $d\Phi[X, Y] = [d\Phi(X), d\Phi(Y)]$.

Teorema 1.3. *(Fórmula da Primeira Variação) Seja $\phi : M^n \rightarrow \overline{M}^m$ uma imersão com vetor curvatura média H_M . Se $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M^n \rightarrow \overline{M}^m$ é uma variação de ϕ , então*

$$A'(0) = -n \int_M f H dA + \int_{\partial M} \langle \xi, \nu \rangle ds,$$

onde $dA = dA_0$ e $f = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, p), N \right\rangle = \langle \xi, N \rangle$ é a componente normal do vetor variação ξ e ν é o vetor exterior ao longo de ∂M .

Demonstração. Pela observação anterior, fazendo $X_t = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ e por abuso de notação escreveremos $X_0 = \xi$. Veja que

$$\frac{\partial}{\partial t}(g_t)_{ij} = X_t \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle \nabla_{X_t} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \nabla_{X_t} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle. \quad (1.4)$$

Sabendo que a conexão é compatível com a métrica e de 1.3, tem-se que

$$X_t(g_t)_{ij} = \left\langle \nabla_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \nabla_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}} X_t \right\rangle. \quad (1.5)$$

Derivando o funcional área, temos que

$$A'(t) = \int_M \frac{\partial}{\partial t} dA_t.$$

Do lema 1.1, vale que

$$\frac{\partial}{\partial t} dA_t = \frac{1}{2} \text{tr} \left(\frac{\partial g_t}{\partial t} \right) dA_t, \quad (1.6)$$

o que nos dá

$$\frac{\partial}{\partial t} dA_t = \frac{1}{2} (g_t)^{ij} \left(\left\langle \nabla_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \nabla_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}} X_t \right\rangle \right) dA_t$$

\implies

$$\frac{\partial}{\partial t} d\mathcal{A}_t = (g_t)^{ij} \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle d\mathcal{A}_t, \quad (1.7)$$

pois $(g_t)^{-1}$ é simétrica. Escrevendo $X_t = X_t^\top + X_t^\perp$, onde X_t^\top é a componente tangente e X_t^\perp a componente normal, daí temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} d\mathcal{A}_t &= (g_t)^{ij} \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} (X_t^\top + X_t^\perp), \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle d\mathcal{A}_t \\ &= (g_t)^{ij} \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t^\top, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle d\mathcal{A}_t + (g_t)^{ij} \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t^\perp, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle d\mathcal{A}_t \\ &= \operatorname{div} X_t^\top d\mathcal{A}_t + \operatorname{div} X_t^\perp d\mathcal{A}_t. \end{aligned}$$

Observação 1.2. *Acima estamos fazendo abuso de notação, pois o divergente está definido para campos tangentes, porém, para facilitar os cálculos vamos considerar*

$$\operatorname{div} X_t^\perp = (g_t)^{ij} \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t^\perp, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle. \quad (1.8)$$

E assim, temos

$$A'(t) = \int_M \frac{\partial}{\partial t} d\mathcal{A}_t = \int_M \operatorname{div} X_t^\top d\mathcal{A}_t + \int_M \operatorname{div} X_t^\perp d\mathcal{A}_t. \quad (1.9)$$

Perceba que, por X_t^\perp ser um campo normal, segue que $\left\langle X_t^\perp, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle = 0$, $\forall j = 1, \dots, m$, o que faz para cada $i = 1, \dots, m$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \left\langle X_t^\perp, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t^\perp, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle X_t^\perp, \bar{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle.$$

De 1.3 e sabendo que a conexão é simétrica, segue que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \left\langle X_t^\perp, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t^\perp, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle X_t^\perp, \bar{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\rangle = 0.$$

Logo,

$$(g_t)^{ij} \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t^\perp, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle = -(g_t)^{ij} \left\langle X_t^\perp, \bar{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\rangle. \quad (1.10)$$

Denotando $X_0^\top = \xi^\top$, $X_0^\perp = \xi^\perp$, $H_\Lambda = H_{\Lambda_0}$ e $\sigma_\Lambda = \sigma_{\Lambda_0}$, onde $H_\Lambda = \mathbf{n}H\mathbf{N}$ e σ_Λ é o vetor curvatura média e a segunda forma fundamental de M , respectivamente. Feito isso, e usando a definição de segunda forma fundamental, obtemos que

$$\begin{aligned} -(g_t)^{ij} \left\langle X_t^\perp, \bar{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\rangle &= -(g_t)^{ij} \left\langle X_t^\perp, \left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)^\top + \sigma_{\mathcal{A}_t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) \right\rangle \\ &= - \left\langle X_t^\perp, (g_t)^{ij} \sigma_{\mathcal{A}_t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Lembrando que vetor curvatura média H_{A_t} é dado por

$$H_{A_t} = (g_t)^{ij} \sigma_{A_t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right),$$

temos que dessa expressão, de 1.8 e 1.10 que

$$\operatorname{div} X_t^\perp = -\langle X_t^\perp, H_{A_t} \rangle. \quad (1.11)$$

Fazendo uma substituição de 1.11 em 1.9 e tomando $t = 0$, tem-se

$$A'(0) = \int_M \operatorname{div} \xi^\top dA - \int_M \langle \xi^\perp, H_A \rangle dA.$$

Agora usando o Teorema da Divergência, temos o seguinte

$$A'(0) = - \int_M \langle \xi^\perp, H_A \rangle dA + \int_{\partial M} \langle \xi^\top, \nu \rangle ds,$$

onde ν é o vetor exterior normal ao longo de ∂M . Por fim, veja que $\langle \xi, nHN \rangle = \langle \xi, H_A \rangle = \langle \xi^\perp, H_A \rangle$ e $\langle \xi, \nu \rangle = \langle \xi^\top, \nu \rangle$, pois $\xi = \xi^\top + \xi^\perp$. Portanto,

$$\begin{aligned} A'(0) &= - \int_M \langle \xi, nHN \rangle dA + \int_{\partial M} \langle \xi, \nu \rangle ds \\ &= - \int_M nH \langle \xi, N \rangle dA + \int_{\partial M} \langle \xi, \nu \rangle ds \\ &= -n \int_M fH dA + \int_{\partial M} \langle \xi, \nu \rangle ds. \end{aligned}$$

□

Para a Primeira Variação de Volume temos o seguinte:

Proposição 1.6. *A primeira variação do volume $V(t)$ é dada por*

$$V'(0) = \int_{M^n} f dA,$$

onde $f = \langle \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, p), N \rangle$ é a componente normal do vetor ξ .

Demonstração. Dada $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma variação de ϕ . Sejam $p \in M^n$ fixo e $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1} = N\}$ um referencial ortonormal positivo adaptado numa vizinhança de $\phi_t(p)$. Daí, podemos escrever

$$\Phi^* dV = b(t, p) dt \wedge dA,$$

onde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}(t, \mathbf{p}) &= \mathbf{b}(t, \mathbf{p}) dt \wedge d\mathbf{A} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \right) \\
 &= d\mathbf{A} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}, d_{\phi_t}(\mathbf{e}_1), \dots, d_{\phi_t}(\mathbf{e}_n) \right) \\
 &= \text{vol} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}, d_{\phi_t}(\mathbf{e}_1), \dots, d_{\phi_t}(\mathbf{e}_n) \right) \\
 &= \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \mathbf{N}_t \right\rangle \sqrt{\det(\langle d_{\phi_t}(\mathbf{e}_i), d_{\phi_t}(\mathbf{e}_j) \rangle)},
 \end{aligned}$$

e \mathbf{N}_t é o campo vetorial normal à imersão ϕ_t . Logo,

$$\begin{aligned}
 V'(0) = \frac{\partial V}{\partial t}(0) &= \frac{d}{dt} \left(\int_{[0,t] \times M^n} \Phi^* dV \right) \Big|_{t=0} \\
 &= \frac{d}{dt} \left(\int_{[0,t] \times M^n} \mathbf{b}(t, \mathbf{p}) dt \wedge d\mathbf{A} \right) \Big|_{t=0} \\
 &= \int_{M^n} \mathbf{b}(0, \mathbf{p}) d\mathbf{A} \\
 &= \int_{M^n} \left\langle \frac{\partial \Phi(0, \mathbf{p})}{\partial t}, \mathbf{N} \right\rangle d\mathbf{A} \\
 &= \int_{M^n} f d\mathbf{A}.
 \end{aligned}$$

□

Observe que a função volume foi definida com elemento de volume em \mathbb{R}^{n+1} . Para um melhor entendimento a primeira variação de volume foi demonstrada no caso geral.

Capítulo 2

Superfícies Estacionárias

Seja B um domínio convexo suave em \mathbb{R}^{n+1} . Ao longo de todo este trabalho, M denotará uma variedade diferencial compacta conexa n -dimensional orientável com bordo ∂M , e $\phi: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é uma imersão que leva $\text{int}M$ em $\text{int}B$ e ∂M em ∂B e é suave mesmo na fronteira de M . Nesta seção, derivamos alguns resultados gerais básicos para a hipersuperfície ϕ . Assumimos a convexidade de B como uma hipótese geral durante este trabalho, embora as definições e resultados sejam válidos de forma mais geral, exceto para o Lema 2.2 e a proposição 2.2.

Apresentamos aqui as noções de hipersuperfície estacionária e estabilidade em uma versão que também é válida no caso não necessariamente mergulhada.

2.1 Imersões estacionárias estáveis

Definição 2.1. Dizemos que a imersão ϕ é estacionária se $A'(0) = 0$ para qualquer variação admissível ϕ que preserva volume.

Teorema 2.1. Seja $\phi: M \rightarrow B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão, onde $\phi(\text{int } M) \subset \text{int } B$, $\phi(\partial M) \subset \partial B$ e B é um disco fechado de \mathbb{R}^{n+1} . Então, ϕ é ponto crítico do funcional área para variações admissíveis que preservam volume se, e somente se, ϕ é uma hipersuperfície com curvatura média constante com bordo livre.

Demonstração.

$$A'(0) = - \int_M nH \langle N, \xi \rangle dA + \int_{\partial M} \langle \nu, \xi \rangle ds,$$

e,

$$V'(0) = \int_{\mathcal{M}} \langle \mathbf{N}, \xi \rangle dA.$$

Usando os multiplicadores de Lagrange, temos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$A'(0) = \lambda \cdot V'(0).$$

Donde, temos que

$$-\int_{\mathcal{M}} nH \langle \mathbf{N}, \xi \rangle dA + \int_{\partial\mathcal{M}} \langle \mathbf{v}, \xi \rangle ds = \lambda \int_{\mathcal{M}} \langle \mathbf{N}, \xi \rangle dA.$$

E assim,

$$\int_{\mathcal{M}} (\lambda + nH) \langle \mathbf{N}, \xi \rangle dA = \int_{\partial\mathcal{M}} \langle \mathbf{v}, \xi \rangle ds.$$

Veja que, se $\mathbf{p} \in \partial\mathcal{M}$ então $\xi(\mathbf{p}) = \left. \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right|_{t=0}$ é um vetor tangente a fronteira, pois $\Phi_{\mathbf{p}} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \partial\mathcal{B}$. Como \mathbf{v} é normal a fronteira então teremos $\langle \mathbf{v}, \xi \rangle = 0$. Se tomarmos $\xi = (\lambda + nH)\mathbf{N}$, obtemos:

$$\int_{\mathcal{M}} (\lambda + nH) \langle \mathbf{N}, (\lambda + nH)\mathbf{N} \rangle dA = 0 \implies \int_{\mathcal{M}} (\lambda + nH)^2 dA = 0.$$

Ora, como $(\lambda + nH)^2 \geq 0$ e a integral acima é nula, então obrigatoriamente deveremos ter

$$(\lambda + nH)^2 = 0 \implies \lambda + nH = 0 \implies H = -\frac{\lambda}{n}.$$

Segue que a imersão tem curvatura média constante e bordo livre.

Reciprocamente, suponha que $\Phi(\mathcal{M})$ intersecta $\partial\mathcal{B}$ ortogonalmente. Assim, é direto que $\langle \mathbf{v}, \xi \rangle = 0$.

Desta forma,

$$\begin{aligned} A'(0) &= -\int_{\mathcal{M}} nH \langle \mathbf{N}, \xi \rangle dA + \int_{\partial\mathcal{M}} \langle \mathbf{v}, \xi \rangle ds \\ &= -nH \int_{\mathcal{M}} \langle \mathbf{N}, \xi \rangle dA \\ &= -nHV'(0) = 0. \end{aligned}$$

Pois, temos uma preservação de volume, e assim esse volume é constante. □

Denotaremos por $N : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ a aplicação de Gauss da imersão ϕ , por σ a segunda forma fundamental de ϕ com relação a N , e por II a segunda forma fundamental de ∂B em \mathbb{R}^{n+1} em relação à direção normal da unitário que aponta para dentro.

A suposição de convexidade sobre B significa que $II(X, X) \geq 0$ para qualquer vetor X tangente a fronteira ∂B .

Teorema 2.2. *Seja $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão de uma superfície compacta M e $f \in C^\infty(M)$ onde vale*

$$\int_M f \, dM = 0.$$

Então existe uma variação Φ que preserva volume, onde o campo variacional é dado por $\xi = fN$.

Demonstração. Considere $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal imersão e $\Phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, a variação dada por

$$\Phi(p, t, s) = \phi(p) + (tf(p) + sg(p))N(p),$$

onde $g \in C^\infty(M)$ com

$$\int_M g \, dA \neq 0.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} V(p, t, s) &= \frac{1}{n+1} \int_M \langle \Phi, N \rangle dA_{t,s} \\ &= \frac{1}{n+1} \int_M \langle \phi + (tf + sg)N, N \rangle dA_{t,s} \\ &= \frac{1}{n+1} \int_M (\langle \phi, N \rangle + \langle (tf + sg)N, N \rangle) dA_{t,s} \\ &= \frac{1}{n+1} \int_M (\langle \phi, N \rangle + tf + sg) dA_{t,s}. \end{aligned}$$

Calculando as derivadas parciais com respeito à t e s , obtemos:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, s) = \frac{1}{n+1} \left(\int_M f \, dA_{t,s} + \int_M (\langle \phi, N \rangle + tf + sg) \frac{\partial}{\partial t} dA_{t,s} \right)$$

e,

$$\frac{\partial V}{\partial s}(t, s) = \frac{1}{n+1} \left(\int_M g \, dA_{t,s} + \int_M (\langle \Phi, N \rangle + tf + sg) \frac{\partial}{\partial s} dA_{t,s} \right)$$

Agora, ao aplicarmos em $t = s = 0$ teremos:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, s) = 0$$

e,

$$\frac{\partial V}{\partial s}(t, s) = \frac{1}{n+1} \int_M g \, dA \neq 0.$$

Assim, como V é de classe C^k , $k \geq 1$, teremos pelo teorema da função implícita que existe $\bar{I} \times \bar{J}$ vizinhança de $(0, 0)$ e uma função $\varphi : \bar{I} \rightarrow \bar{J}$, também de classe C^k , onde φ é o gráfico de V , com $\varphi(0) = 0$. Daí, $V(t, \varphi(t)) = c = cte$, onde consideramos $V(0, 0) = c$.

Desta forma, considere a variação dada por

$$\Phi(p, t, \varphi) = \phi(p) + tf(p)N(p) + \varphi(t)g(p)N(p)$$

Claramente tal variação preserva volume. Observe que,

$$V'(t, \varphi(t)) = \frac{\partial V}{\partial t} \cdot 1 + \frac{\partial V}{\partial s} \cdot \varphi'(t)$$

Em $t = 0$, iremos ter

$$\begin{aligned} 0 = V'(t, \varphi(t))|_{t=0} &= \frac{\partial V}{\partial t}(0) \cdot 1 + \frac{\partial V}{\partial s}(0) \cdot \varphi'(0) \\ &= \varphi'(0) \cdot \frac{1}{n+1} \int_M g \, dA \end{aligned}$$

Segue-se que $\varphi'(0) = 0$.

Assim,

$$\begin{aligned} \xi(p) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi_t(p) \Big|_{t=0} &= fN + \varphi'(0)fN \\ &= fN. \end{aligned}$$

□

Um cálculo padrão mostra que, para qualquer variação normal de preservação de volume admissível, temos

$$A''(0) = - \int_{\mathcal{M}} (f\Delta f + \|\sigma\|^2 f^2) dA + \int_{\partial\mathcal{M}} \left(f \frac{\partial f}{\partial \nu} - \text{II}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) f^2 \right) ds, \quad (2.1)$$

onde Δ é o laplaciano da métrica induzida por ϕ e $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ é a derivada parcial de f em relação ao normal externo ν .

Definição 2.2. *Uma imersão estacionária $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{B} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é considerada estável se $A''(0) \geq 0$ para todas as variações normais de ϕ que preservam volume.*

2.2 A Forma índice

Definição 2.3. *Seja $\mathbb{F} = \{f \in C^\infty(\mathcal{M}) : \int_{\mathcal{M}} f dA = 0\}$, e vamos definir a forma índice I de ϕ com a forma bilinear simétrica em $C^\infty(\mathcal{M})$,*

$$I(f, g) = \int_{\mathcal{M}} (\langle \nabla f, \nabla g \rangle - \|\sigma\|^2 fg) dA - \int_{\partial\mathcal{M}} \text{II}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) fg ds, \quad (2.2)$$

onde ∇f significa o gradiente de f para métrica induzida por ϕ .

Proposição 2.1. *Seja ϕ uma imersão estacionária. ϕ é estável se, e somente se, $I(f, f) \geq 0$ para toda $f \in \mathbb{F}$.*

Demonstração. Seja $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{B} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão e Φ uma variação admissível que preserva volume. Desta forma, a fórmula da segunda variação de área nos dá que:

$$A''(0) = - \int_{\mathcal{M}} (f\Delta f + \|\sigma\|^2 f^2) dA + \int_{\partial\mathcal{M}} \left(f \frac{\partial f}{\partial \nu} - \text{II}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) f^2 \right) ds \geq 0 \quad (2.3)$$

Pela Primeira identidade de Green, temos que

$$\int_{\mathcal{M}} \langle \nabla f, \nabla g \rangle dA + \int_{\mathcal{M}} f\Delta g dA = \int_{\partial\mathcal{M}} \frac{\partial f}{\partial \nu} g ds.$$

Assim, teremos

$$- \int_{\mathcal{M}} f\Delta g dA = \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla f, \nabla g \rangle dA - \int_{\partial\mathcal{M}} \frac{\partial g}{\partial \nu} f ds. \quad (2.4)$$

Trocando g por f em 2.4 e substituindo em 2.3, temos que

$$\begin{aligned} A''(0) &= \int_M \|\nabla f\|^2 \, dA - \int_{\partial M} \frac{\partial f}{\partial \nu} f \, ds - \int_M \|\sigma\|^2 f^2 \, dA \\ &\quad + \int_{\partial M} f \frac{\partial f}{\partial \nu} \, ds - \int_{\partial M} \text{II}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) f^2 \, ds. \\ &= \int_M (\|\nabla f\|^2 - \|\sigma\|^2 f^2) \, dA - \int_{\partial M} \text{II}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) f^2 \, ds \\ &= I(f, f) \geq 0. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha $I(f, f) \geq 0$ para toda $f \in \mathbb{F}$. Como $\int_M f \, dA = 0$, então existe uma variação normal Φ de ϕ , admissível preservando volume, onde

$$\begin{aligned} A''(0) &= - \int_M (f \Delta f + \|\sigma\|^2 f^2) \, dA + \int_{\partial M} \left(f \frac{\partial f}{\partial \nu} - \text{II}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) f^2 \right) \, ds \\ &= \int_M (\|\nabla f\|^2 - \|\sigma\|^2 f^2) \, dA - \int_{\partial M} \text{II}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) f^2 \, ds \\ &= I(f, f) \geq 0. \end{aligned}$$

Segue-se que a imersão estacionária ϕ é estável se e somente se $I(f, f) \geq 0, \forall f \in \mathbb{F}$.

□

Dado $f \in \mathbb{F}$. O campo vetorial $f\mathbf{N}$ é um campo de Jacobi quando $I(f, g) = 0, \forall g \in \mathbb{F}$. O próximo lema segue diretamente da definição da forma índice I .

Lema 2.1. *Seja $\phi : M \rightarrow B$ uma imersão estacionária e $f \in \mathbb{F}$.*

1. $f\mathbf{N}$ é um campo de Jacobi se e somente se $f \in C^\infty(M)$, e

$$\Delta f + \|\sigma\|^2 f = \text{constante em } M, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} = \text{II}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) f \text{ em } \partial M.$$

2. Se ϕ é estacionária estável e $I(f, f) = 0$, então $f\mathbf{N}$ é um campo de Jacobi.

Demonstração. Supondo que $f \in \mathbb{F}$ e $f\mathbf{N}$ é um campo de Jacobi.

Mostraremos que

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} = \text{II}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) f$$

em ∂M . Defina a função

$$\bar{g}(p) = \begin{cases} 0, & \text{se } p \in M \\ \frac{\partial f}{\partial \nu} - \text{II}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) f, & \text{se } p \in \partial M. \end{cases}$$

Observe que $\bar{g} \in \mathbb{F}(M)$, e como fN é um campo de Jacobi, então por definição $I(f, g) = 0$ para toda função $g \in \mathbb{F}(M)$, em particular para nossa \bar{g} . Daí,

$$0 = I(f, \bar{g}) = \int_{\partial M} \left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - \text{II}(N, N)f \right)^2 ds.$$

Isto nos dá que $\frac{\partial f}{\partial \nu} = \text{II}(N, N)f$ em ∂M . Feito isso resta mostrar que $\Delta f + \|\sigma\|^2 f = \text{constante}$ em M .

Para isso, defina a função $F(p) = \Delta f + \|\sigma\|^2 f$ e considere $F_0 = \frac{1}{A} \int_M F dA$, onde $A = \int_M dA$.

Afirmamos que $F \equiv F_0$.

Suponha que isso não ocorre, então existe pelo menos um ponto $\bar{p} \in M$, tal que $(F - F_0)(\bar{p}) \neq 0$. Sem perder a generalidade, suponha que $(F - F_0)(\bar{p}) > 0$. Adote os seguintes subconjuntos de M .

$$M^+ = \{q \in M \mid (F - F_0)(q) > 0\} \text{ e } M^- = \{q \in M \mid (F - F_0)(q) < 0\}.$$

Perceba que M^+ é não vazio, pois $\bar{p} \in M^+$, e sendo $F - F_0$ uma função contínua, temos que M^+ é aberto. Sejam $U \subset M$ aberto com $\bar{U} \subset M^+$ e uma aplicação $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞ , com suporte compacto em M^+ tal que $0 \leq \varphi(q) \leq 1$, para todo $q \in M$ e $\varphi(q) = 1$ se $q \in \bar{U}$.

Daí,

$$K = \int_M \varphi (F - F_0) dA > 0. \quad (2.6)$$

Afirmamos que M^- também é não vazio. Note que $\int_M (F - F_0) dA = 0$, pois

$$\int_M (F - F_0) dA = \int_M F dA - F_0 \int_M dA = \int_M F dA - \int_M F dA = 0. \quad (2.7)$$

Dessa forma, se $M^- = \emptyset$, então pela definição do conjunto teríamos que $(F - F_0)(q) \geq 0 \forall q \in M$, mas como $(F - F_0)(\bar{p}) > 0$, isso implica que $\int_M (F - F_0) dA > 0$, o que não ocorre por 2.7. Logo $M^- \neq \emptyset$. De maneira parecida, podemos definir uma função $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , de suporte compacto em M^- . Seja $V \subset M$ aberto com $\bar{V} \subset M^-$, tal que $0 \leq \psi(q) \leq 1$ para todo $q \in M$ e $\psi(q) = 1$ se $q \in \bar{V}$, e então

$$L = \int_M \psi (F - F_0) dA < 0. \quad (2.8)$$

Faça $g = (\varphi + \xi)(F - F_0)$, onde $\xi = -\frac{K}{L}\psi > 0$. Observe que $g \in \mathbb{F}(M)$, pois

$$\begin{aligned} \int_M g dA &= \int_M (\varphi + \xi)(F - F_0) dA \\ &= \int_M \varphi (F - F_0) dA + \int_M \xi (F - F_0) dA \\ &= K - \frac{K}{L} \int_M \psi (F - F_0) dA \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sendo fN um campo de Jacobi, e sabendo que $\frac{\partial f}{\partial \nu} = II(N, N)f$ em ∂M , temos que

$$\begin{aligned} 0 = I(f, g) &= - \int_M g (\Delta f + \|\sigma\|^2 f) dA \\ &= - \int_M g F dA + F_0 \int_M g dA \\ &= - \int_M g (F - F_0) dA \\ &= - \int_M (\varphi + \xi) (F - F_0)^2 dA < 0 \end{aligned}$$

o que não pode acontecer, portanto $F \equiv F_0$.

Agora suponhamos que $f \in C^\infty(M)$ satisfaz 2.5 . Mostraremos que $I(f, g) = 0$ para toda $g \in \mathbb{F}$, ou seja, fN é um campo de Jacobi. Daí, de 2.5, como $f \in C^\infty(M)$ e pelo Teorema da divergência, temos que

$$\begin{aligned} I(f, g) &= - \int_M g (\Delta f + \|\sigma\|^2 f) dA + \int_{\partial M} g \left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - II(N, N)f \right) ds \\ &= - (\Delta f + \|\sigma\|^2 f) \int_M g dA \\ &= 0, \end{aligned}$$

para toda $g \in \mathbb{F}$. Mostremos 2. agora. Por hipótese ϕ é estacionária estável, então por definição $I(g, g) \geq 0 \forall g \in \mathbb{F}$. Daí, dado $\varepsilon > 0$, com $\varepsilon \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$0 \leq I(f + \varepsilon g, f + \varepsilon g) = I(f, f) + 2\varepsilon I(f, g) + \varepsilon^2 I(g, g).$$

Multiplicando a expressão acima por ε^{-1} e que $I(f, f) = 0$, ganhamos que

$$0 \leq 2I(f, g) + \varepsilon I(g, g). \tag{2.9}$$

De maneira similar para $I(f - \varepsilon g, f - \varepsilon g)$, temos

$$0 \leq -2I(f, g) + \varepsilon I(g, g). \tag{2.10}$$

Por fim, como ε é arbitrário, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, de 2.9 temos que de um lado $I(f, g) \geq 0$ e de outro por 2.10, $I(f, g) \leq 0$. Logo, $I(f, g) = 0$, e assim fN é um campo de Jacobi. \square

Lema 2.2. *Se $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma bola unitária centrada na origem e $\phi : M \rightarrow B$ é uma imersão estacionária, então*

1. *O vetor normal unitário externo ν ao longo de ∂M é uma direção principal de ϕ ;*
2. *A segunda forma fundamental de ∂M em M com respeito a $-\nu$ é dada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Em particular, se $n = 2$, então a curvatura geodésica de ∂M em M em qualquer ponto é igual a 1.*

Demonstração. Sendo B uma bola unitária, ν coincide com o vetor posição de ϕ ao longo de ∂M . Daí para qualquer vetor X tangente em ∂M , obtemos que

$$\langle -\bar{\nabla}_\nu N, X \rangle = \langle \sigma(X, \nu), N \rangle = \langle \bar{\nabla}_X \nu - \nabla_X \nu, N \rangle = \langle \bar{\nabla}_X \nu, N \rangle = \langle \bar{\nabla}_X \phi, N \rangle = \langle X, N \rangle = 0,$$

onde $\bar{\nabla}$ denota a conexão usual de \mathbb{R}^{n+1} . Isso prova 1, pois como ϕ coincide com o vetor posição ao longo da fronteira, temos que $\bar{\nabla}_X \phi = X$. Isto garante que $-\bar{\nabla}_\nu N$ é normal a fronteira ∂M , ou seja, $-\bar{\nabla}_\nu N = \lambda \nu$.

Para mostrar 2, tome outro campo vetorial Y tangente a ∂M . Como $\langle Y, \nu \rangle = 0$, pois ν é normal a fronteira, então $\langle \bar{\nabla}_X Y, \nu \rangle = \langle -\bar{\nabla}_X \nu, Y \rangle$. E assim, pelo fato de $\langle \nu, \nu \rangle = 1$ tem-se que $\langle \bar{\nabla}_X \nu, \nu \rangle = 0$. Logo $S_{-\nu}(X) = -\bar{\nabla}_X(-\nu)$. Portanto, a segunda forma fundamental de ∂M em M aplicada a $-\nu$, é dada por

$$-\langle \bar{\nabla}_X Y, \nu \rangle = \langle \bar{\nabla}_X \nu, Y \rangle = \langle \bar{\nabla}_X \phi, Y \rangle = \langle X, Y \rangle.$$

Usando é claro o fato que $\bar{\nabla}_X \phi = X$.

Por fim, naturalmente dada $\alpha : I \rightarrow \partial M$ uma parametrização regular pelo comprimento de arco, então a curvatura geodésica é dada por $k_g = \langle \nabla_{\alpha'} \phi, \alpha' \rangle = \langle \alpha', \alpha' \rangle = 1$. \square

Proposição 2.2. *Se $\phi : M \rightarrow B$ é uma superfície estacionária em uma bola unitária B de \mathbb{R}^3 , então*

$$H^2 A + L \geq 2\pi. \tag{2.11}$$

Se além disso ∂M não estiver mergulhada, então

$$H^2 A + L \geq 4\pi. \tag{2.12}$$

Demonstração. Suponha que B esteja centrada na origem de \mathbb{R}^3 (caso contrário faça uma translação). Considere $\{n_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$ o grupo de um parâmetro $\lambda > 0$ de transformações conformes de $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, dado por $n_\lambda(p) = \pi^{-1} \circ \bar{\pi}^{-1} \circ T_\lambda \circ \bar{\pi}(p)$ sendo $T_\lambda(x) = \frac{x}{\lambda}$, π e $\bar{\pi}$ são projeções estereográficas de S^3 em \mathbb{R}^3 , aqui enquanto π é sobre o pólo norte N , $\bar{\pi}$ é sobre o ponto $x_0 = (1, 0, 0)$. Observe o seguinte diagrama

$$\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \xrightarrow{\pi} S^3 \xrightarrow{\bar{\pi}} \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \xrightarrow{T_\lambda} \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \xrightarrow{\bar{\pi}^{-1}} S^3 \xrightarrow{\pi^{-1}} \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}.$$

Dessa maneira temos este grupo de transformações conformes que preserva a bola B e fixa um par de pontos antípodas $x_0, -x_0 \in S^2$. Assim, quando $\lambda \rightarrow \infty$, $n_\lambda(x)$ converge para $-x_0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^3 - \{x_0\}$. Denotando por \bar{H}, \bar{K} e $d\bar{A}$ respectivamente a curvatura média, a curvatura de Gauss e o elemento de volume induzido em M pela imersão $n_\lambda \circ \phi$, temos

$$\int_M (H^2 - K) dA = \int_M H^2 dA - \int_M K dA = H^2 A - \int_M K dA = \int_M (\bar{H}^2 - \bar{K}) d\bar{A}.$$

A igualdade acima decorre do fato que a integral no lado direito é invariante por transformações conformes (veja [12]). Como as transformações conformes preservam a ortogonalidade, a prova de 2 do Lema 2.2 mostra que a curvatura geodésica da ∂M em relação a nova métrica também é igual a 1 em cada ponto. Portanto, usando o Teorema de Gauss-Bonnet (consulte o apêndice), temos

$$2\pi\chi(M) = \int_M K dA + L = \int_M \bar{K} d\bar{A} + \bar{L},$$

onde \bar{L} é o comprimento de ∂M em relação a métrica induzida por $n_\lambda \circ \phi$, e das equações acima obtemos

$$H^2 A + L = \int_M \bar{H}^2 d\bar{A} + \bar{L} \tag{2.13}$$

Se tomarmos $x_0 = \phi(p_0)$ para algum $p_0 \in \partial M$, então, quando $\lambda \rightarrow \infty$, $n_\lambda \circ \phi(\partial M)$ converge para um ou mais equadores da esfera unitária S^2 e assim $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \bar{L} \geq 2\pi$. Isto prova 2.11.

Se ϕ não for um mergulho em ∂M e escolhermos $p_0 \in \partial M$ tal que $\phi(p_0)$ seja um ponto múltiplo de ϕ , temos que $n_\lambda \circ \phi(\partial M)$ converge, para $\lambda \rightarrow \infty$, para dois (ou mais) equadores de S^2 e então $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \bar{L} \geq 4\pi$ mostrando 2.12. □

Capítulo 3

Estabilidade para hipersuperfícies em domínios convexos

Daqui em diante consideraremos apenas as hipersuperfícies estacionárias $\phi : M \rightarrow B$ que são estáveis. Sob esta hipótese, se $\partial M = \emptyset$ foi provado por Barbosa e do Carmo([4]) que é uma esfera umbilical, ver El Soufi e Ilias([8]) para outra prova. Portanto, sempre assumiremos que M tem uma fronteira não vazia.

Proposição 3.1. *Seja $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante. Então*

$$\Delta f + \|\sigma\|^2 f = 0; \tag{3.1}$$

$$\Delta u + \|\sigma\|^2 u = -nH, \tag{3.2}$$

onde $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $f = \langle \mathbf{N}, \mathbf{a} \rangle$ e $u = \langle \mathbf{N}, \phi \rangle$.

Demonstração. Fixado $\mathbf{p} \in M$, consideremos um referencial geodésico ortonormal $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ em torno de \mathbf{p} e seja $\mathbf{N} \in (\mathfrak{X}(M))^\perp$. Feito isso, podemos expressar \mathbf{a} como

$$\mathbf{a} = \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{a}, \mathbf{e}_j \rangle \mathbf{e}_j + \langle \mathbf{a}, \mathbf{N} \rangle \mathbf{N}. \tag{3.3}$$

Como nosso referencial é geodésico $\bar{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{e}_i(\mathbf{p}) = 0$, e de \mathbf{N} ser unitário tem-se que

$\langle \bar{\nabla}_{e_i} N, N \rangle = 0$. Segue que o Laplaciano de f é dado por

$$\begin{aligned}
 \Delta f &= \sum_{i=1}^n e_i e_i \langle N, \mathbf{a} \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n e_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, \mathbf{a} \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, \mathbf{a} \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \left\langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{a}, e_j \rangle e_j + \langle \mathbf{a}, N \rangle \right\rangle \\
 &= \sum_{j=1}^n \left(\langle \mathbf{a}, e_j \rangle \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, e_j \rangle \right) + \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, N \rangle \langle \mathbf{a}, N \rangle.
 \end{aligned}$$

Calculemos essas duas parcelas. Usando a aplicação $S_N(\mathbf{h}) = -\bar{\nabla}_h N$, observe que

$$S_N(e_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} e_j,$$

sendo $\alpha_{ij} = -\langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_j \rangle$. Daí, como nossa base é ortonormal

$$\|\sigma\|^2 = \sum_{i,j} \alpha_{ii} = \sum_{i,j} \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_j \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_j} N, e_i \rangle. \quad (3.4)$$

Veja que $\langle N, e_i \rangle = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, obtemos que $\langle \bar{\nabla}_{e_j} N, e_i \rangle = -\langle N, \bar{\nabla}_{e_j} e_i \rangle$.

Note que S_N é autoadjunta, donde temos

$$\|\sigma\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_j \rangle^2.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j,k=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_j \rangle \langle e_j, e_k \rangle \right) \\
 &= \sum_{i,j=1}^n (\langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_j \rangle)^2 = \|\sigma\|^2.
 \end{aligned}$$

Além disso, derivando a igualdade $\langle \bar{\nabla}_{e_i} N, N \rangle = 0$ tem-se que

$$0 = e_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, N \rangle = \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, N \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle,$$

isto é,

$$-\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, N \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle.$$

Portanto,

$$\|\sigma\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_j \rangle^2 = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle = - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, N \rangle,$$

e lembrando que

$$nH = \text{tr}(S_N) = \sum_i a_{ii}$$

ganhamos que

$$nH = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle.$$

Se H é constante é possível mostrar que

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, e_k \rangle = 0, \forall k = 1, \dots, n.$$

Segue-se que

$$\Delta f = -f\|\sigma\|^2.$$

Para a segunda parte, temos $\bar{\nabla}_{e_i} \phi = e_i$ e $\langle e_i, N \rangle = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \sum_{i=1}^n (e_i (e_i \langle \phi, N \rangle)) (p) \\ &= \sum_{i=1}^n (e_i (\langle \nabla_{e_i} \phi, N \rangle + \langle \phi, \nabla_{e_i} N \rangle)) (p) \\ &= \sum_{i=1}^n (e_i (\langle \phi, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle)) (p) \\ &= \sum_{i=1}^n (\langle \bar{\nabla}_{e_i} \phi, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle + \langle \phi, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle) (p) \\ &= \sum_{i=1}^n (\langle e_i, \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle + \langle \phi, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle) (p) \\ &= - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle (p) + \langle \phi, \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle (p). \end{aligned}$$

\implies

$$\begin{aligned} \Delta u(p) &= - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle (p) - \|\sigma\|^2 \langle \phi, N \rangle (p) \\ &= - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle (p) - \|\sigma\|^2 u(p) \\ &= -nH - \|\sigma\|^2 u(p). \end{aligned}$$

□

Lema 3.1. *Suponha que B é estritamente convexa em \mathbb{R}^{n+1} e que é uma hipersuperfície estável estacionária em B . Então $\int_M N dA \neq 0$, onde $N : M \rightarrow S^n(1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é a aplicação de gauss de M .*

Demonstração. Dada $\beta = \{\alpha_i\}_1^n$ uma base ortonormal de \mathbb{R}^{n+1} e $N_i = \langle N, \alpha_i \rangle$. Daí temos que para cada $i = 1, \dots, n+1$, a função coordenada N_i de N por 3.1, satisfaz

$$\Delta N_i + \|\sigma\|^2 N_i = 0, \quad (3.5)$$

Assim

$$I(N_i, N_i) = \int_{\partial M} \left(N_i \frac{\partial N_i}{\partial \nu} - II(N, N) N_i^2 \right) ds. \quad (3.6)$$

Suponha que $\int_M N dA = 0$. Segue que $\int_M N_i dA = 0$ para cada $i = 1, \dots, n+1$. O que faz $N_i \in \mathbb{F}$ para todo i , e como ϕ é estacionário estável, tem-se que $I(N_i, N_i) \geq 0$.

Por outro lado,

$$\sum_i^{n+1} N_i \frac{\partial N_i}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \nu} N_i^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\sum_i^{n+1} N_i^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \nu} (1) = 0.$$

Somando 3.6 em i , obtemos

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{i=1}^{n+1} I(N_i, N_i) &= \sum_{i=1}^{n+1} \int_{\partial M} \left(N_i \frac{\partial N_i}{\partial \nu} - II(N, N) N_i^2 \right) ds \\ &= \int_{\partial M} \left[\sum_{i=1}^{n+1} \left(N_i \frac{\partial N_i}{\partial \nu} - II(N, N) N_i^2 \right) \right] ds \\ &= \int_{\partial M} \left[\sum_{i=1}^{n+1} N_i \frac{\partial N_i}{\partial \nu} - II(N, N) \sum_{i=1}^{n+1} N_i^2 \right] ds \\ &= - \int_{\partial M} II(N, N) ds. \end{aligned}$$

Mas, lembre-se que B é estritamente convexa, então $II(N, N) > 0$ e assim

$$\sum_i^{n+1} I(N_i, N_i) = - \int_{\partial M} II(N, N) ds < 0$$

contradiz a desigualdade acima. Portanto $\int_M N dA \neq 0$. □

Denotaremos por g o gênero de M e por r o número de componentes conexas da ∂M . Lembre-se da fórmula da característica de Euler Poincaré (Veja 5.2)

$$\chi(M) = 2 - 2g - r.$$

As ideias na prova do teorema a seguir foram usadas por vários autores para estudar as condições de estabilidade para superfícies com bordo.

Teorema 3.1. *Se B é convexo em \mathbb{R}^3 e ϕ é estacionário estável, então os únicos valores possíveis para g e r são*

1. $g = 0$ ou 1 e $r = 1, 2$ ou 3
2. $g = 2$ ou 3 e $r = 1$.

Demonstração. Seja \widetilde{M} uma superfície Riemanniana compacta obtida de M colando um disco em cada componente conexa da ∂M . Então existe uma aplicação não constante holomorfa $\widetilde{\psi} : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ tal que (ver [9], p.261)

$$\text{grau}(\widetilde{\psi}) \leq 1 + \left\lfloor \frac{g+1}{2} \right\rfloor, \quad (3.7)$$

onde $[x]$ denota o maior número inteiro menor ou igual a x .

Observação 3.1. *Observe que se g é par natural, então $2 \left\lfloor \frac{g+1}{2} \right\rfloor = g$, enquanto que se g for um número ímpar natural, então $2 \left\lfloor \frac{g+1}{2} \right\rfloor = g + 1$.*

Seja $\psi : M \rightarrow \mathbb{S}^2(1) \subset \mathbb{R}^3$ a restrição de $\widetilde{\psi}$ a M .

Sabemos que existe um difeomorfismo (ver por exemplo [12]) $\phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ tal que

$$\int_M (\phi \circ \psi)_i \, dA = 0$$

para $i = 1, 2, 3$. Comparando ψ com um difeomorfismo conforme de \mathbb{S}^2 podemos assumir que

$$\int_M \psi_i \, dA = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

onde cada ψ_i são funções coordenadas de ψ . Pelo fato de ϕ ser estável e $\text{II}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \geq 0$, temos que

$$0 \leq I(\psi_i, \psi_i) = \int_M (\|\nabla \psi_i\|^2 - \|\sigma\|^2 \psi_i^2) \, dA - \int_{\partial M} \text{II}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \psi_i^2 \, ds \quad (3.8)$$

$$\leq \int_M (\|\nabla \psi_i\|^2 - \|\sigma\|^2 \psi_i^2) \, dA \quad (3.9)$$

Passando o somatório em i na inequação acima e usando o teorema de Gauss-Bonnet (consulte o apêndice) e o fato que

$$4H^2 - 2K = 4 \left(\frac{k_1 + k_2}{2} \right)^2 - 2k_1 k_2 = k_1^2 + 2k_1 k_2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 = k_1^2 + k_2^2 = \|\sigma\|^2, \quad k_1 \text{ e } k_2$$

curvaturas principais.

Tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathcal{M}} (\|\nabla\psi\|^2 - \|\sigma\|^2) \, d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{M}} (\|\nabla\psi\|^2 - 4H^2 + 2K) \, d\mathcal{A} \\ &< 8\pi\text{grau}(\tilde{\psi}) - 4H^2\mathcal{A} + 4\pi\chi(\mathcal{M}) - 2 \int_{\partial\mathcal{M}} k_g \, ds, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde a última integral significa a soma das integrais da curvatura geodésica em \mathcal{M} para cada componente conexa da $\partial\mathcal{M}$. Observe que $k_g = \text{II}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \geq 0$, onde \mathbf{N} é tangente à fronteira de \mathcal{M} e essa condição vem de ser fronteira livre. Usando esse fato e a estimativa acima para o grau de $\tilde{\psi}$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &< 8\pi \left(1 + \left\lceil \frac{g+1}{2} \right\rceil \right) - 4H^2\mathcal{A} + 4\pi(2 - 2g - r) \\ &= 4\pi \left(2 + 2 \left\lceil \frac{g+1}{2} \right\rceil \right) - 4H^2\mathcal{A} + 4\pi(2 - 2g - r) \\ &= 4\pi \left(4 + 2 \left\lceil \frac{g+1}{2} \right\rceil - 2g - r \right) - 4H^2\mathcal{A}. \end{aligned}$$

Então

$$4\pi \left(4 - 2g + 2 \left\lceil \frac{g+1}{2} \right\rceil - r \right) > 4H^2\mathcal{A} \geq 0, \quad (3.11)$$

e, a partir disso, analisemos a desigualdade para g par e ímpar.

Primeiro caso: Se g for um número natural par, por 3.11 temos

$$\begin{aligned} 0 &< 4 + 2 \left\lceil \frac{g+1}{2} \right\rceil - 2g - r \\ &\Leftrightarrow 0 < 4 + g - 2g - r \\ &\Leftrightarrow g + r < 4 \end{aligned}$$

Logo neste caso, temos que se $g = 0$, então as possibilidades para r são 1,2 ou 3. Se $g = 2$ então $r = 1$.

Segundo caso: Se g for um número natural ímpar, de 3.11 temos

$$\begin{aligned} 0 &< 4 + 2 \left\lceil \frac{g+1}{2} \right\rceil - 2g - r \\ &\Leftrightarrow 0 < 4 + (g+1) - 2g - r \\ &\Leftrightarrow 0 < 5 - g - r \end{aligned}$$

Para este caso, temos que se $g = 1$, então as possibilidades para r são 1,2 ou 3. Se $g = 3$, então só tem uma possibilidade para r , que é $r = 1$.

Por fim, dos dois casos, chegamos a conclusão que

(i) $g = 0$ ou 1 e $r = 1, 2$ ou 3 .

(ii) $g = 2$ ou 3 e $r = 1$.

□

Capítulo 4

Estabilidade para hipersuperfícies em uma bola unitária

Nesta seção, nos restringimos a considerar B como uma bola n -dimensional, que assumiremos ter raio unitário e centro na origem. Neste caso, com a mesma notação de antes, ao longo da ∂M temos $\Pi(\mathbf{N}, \mathbf{N}) = 1$ e a normal externa \mathbf{v} do mergulho $\partial M \subset M$ (que identificamos com sua imagem por ϕ_*) coincide com a normal externa da esfera unitária, ou seja, o vetor posição ϕ . Podemos mostrar que a divergência da componente tangente $\phi - \langle \phi, \mathbf{N} \rangle \mathbf{N}$ de ϕ é dada por $\operatorname{div}(\phi - \langle \phi, \mathbf{N} \rangle \mathbf{N}) = n(1 + H\langle \phi, \mathbf{N} \rangle)$. De fato, considerando $\{e_j\}_{j=1}^n$ um referencial geodésico, observe o seguinte

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\phi - \langle \phi, \mathbf{N} \rangle \mathbf{N}) &= \sum_{j=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_j} (\phi - \langle \phi, \mathbf{N} \rangle \mathbf{N}), e_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n [\langle \bar{\nabla}_{e_j} \phi, e_j \rangle - \langle \bar{\nabla}_{e_j} (\langle \phi, \mathbf{N} \rangle \mathbf{N}), e_j \rangle] \\ &= \sum_{j=1}^n [\langle \bar{\nabla}_{e_j} \phi, e_j \rangle - \langle e_j (\langle \phi, \mathbf{N} \rangle) \mathbf{N} - \langle \phi, \mathbf{N} \rangle \bar{\nabla}_{e_j} \mathbf{N}, e_j \rangle] \\ &= \sum_{j=1}^n [\langle \bar{\nabla}_{e_j} \phi, e_j \rangle - e_j (\langle \phi, \mathbf{N} \rangle) \langle \mathbf{N}, e_j \rangle - \langle \phi, \mathbf{N} \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_j} \mathbf{N}, e_j \rangle] \\ &= \sum_{j=1}^n [\langle \bar{\nabla}_{e_j} \phi, e_j \rangle + \langle S_N e_j, e_j \rangle \langle \phi, \mathbf{N} \rangle] \\ &= \sum_{j=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_j} \phi, e_j \rangle + nH\langle \phi, \mathbf{N} \rangle \\ &= n + nH\langle \phi, \mathbf{N} \rangle. \end{aligned}$$

Como o referencial é geodésico, temos $\bar{\nabla}_{e_j} \phi = e_j$. E por isso vale $\sum_{j=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_j} \phi, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \langle e_i, e_i \rangle = n$. Segue-se que

$$\operatorname{div}(\phi - \langle \phi, N \rangle N) = nH\langle \phi, N \rangle + n = n(H\langle \phi, N \rangle + 1).$$

Integrando esta fórmula sobre M com o auxílio do Teorema da divergência e usando que $\nu = \phi$ em ∂M , obtemos a Primeira fórmula de Minkowski

$$L = n \left(A + \int_M H\langle \phi, N \rangle dA \right). \quad (4.1)$$

De fato, sendo

$$\int_M \operatorname{div}(\phi - \langle \phi, N \rangle N) dA = \int_{\partial M} \langle \phi - \langle \phi, N \rangle N, \nu \rangle ds.$$

Por $\phi = \nu$ em ∂M , obtemos

$$\int_{\partial M} \langle \nu - \langle \nu, N \rangle N, \eta \rangle ds = \int_{\partial M} \langle \nu, \eta \rangle ds.$$

E sabendo que ν e η são paralelos e unitários, por Cauchy-Schwarz, temos

$$\int_M \operatorname{div}(\phi - \langle \phi, N \rangle N) dA = \int_{\partial M} \langle \nu, \eta \rangle ds = \int_{\partial M} \|\nu\| \|\eta\| ds = L,$$

e portanto

$$L = n \left(A + \int_M H\langle \phi, N \rangle dA \right).$$

Teorema 4.1. *Suponha que $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma bola e que ϕ é estacionária estável. Se ϕ é mínima, então é totalmente geodésico.*

Demonstração. Vamos definir $\bar{\phi} = \phi - c$, onde $c = (\frac{1}{A}) \int_M \phi dA$. Veja que as funções coordenadas $\bar{\phi}_i$ de $\bar{\phi}$ pertencem a \mathbb{F} , pois

$$\int_M \bar{\phi} dA = \int_M (\phi - c) dA = \int_M \phi dA - c \int_M dA = \int_M \phi dA - \left(\frac{1}{A} \int_M \phi dA \right) A = 0.$$

Então $\int_M \bar{\phi} dA = 0$. Agora, usando as condições de estabilidade de ϕ e que a segunda forma fundamental de B é $\operatorname{II}(N, N) = 1$ em ∂M , temos

$$0 \leq I(\bar{\phi}_i, \bar{\phi}_i) = \int_M \left(\|\nabla \bar{\phi}_i\|^2 - \|\sigma\|^2 \bar{\phi}_i^2 \right) dA - \int_{\partial M} \bar{\phi}_i^2 ds.$$

Reescrevendo a desigualdade acima como

$$\int_M \|\nabla \bar{\phi}_i\|^2 dA \geq \int_M \|\sigma\|^2 \bar{\phi}_i^2 dA + \int_{\partial M} \bar{\phi}_i^2 ds.$$

Portanto,

$$\int_{\mathcal{M}} \|\nabla \bar{\phi}_i\|^2 dA \geq \int_{\partial \mathcal{M}} \bar{\phi}_i^2 ds, \quad (4.2)$$

e a igualdade 4.2 se mantém se e somente se ϕ for totalmente geodésica.

Agora, como $\nabla \bar{\phi} = \tilde{\nabla} \bar{\phi} - \langle \tilde{\nabla} \bar{\phi}, \mathbf{N} \rangle \mathbf{N}$, então $\|\nabla \bar{\phi}\|^2 \leq n$. Daí de por 4.2, obtemos que

$$n\mathcal{A} \geq \int_{\partial \mathcal{M}} \|\bar{\phi}\|^2 ds = \int_{\partial \mathcal{M}} \langle \phi - c, \phi - c \rangle ds = \int_{\partial \mathcal{M}} (\|\phi\|^2 - 2\langle \phi, c \rangle + \|c\|^2) ds.$$

Sendo $\phi = v$ ao longo da $\partial \mathcal{M}$, então

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial v} = \langle \nabla \phi_i, v \rangle = \langle \tilde{\nabla} \phi_i, v \rangle = \langle e_i, v \rangle = v_i = \phi_i.$$

Lembrando que as funções coordenadas de uma superfície mínima é harmônica, tem-se pelo Teorema da Divergência que

$$0 = \int_{\mathcal{M}} \Delta \phi dA = \int_{\partial \mathcal{M}} \phi ds.$$

Note o seguinte, como $\int_{\partial \mathcal{M}} \phi_i ds = 0$ para cada $i = 1, 2, 3$ e $c = (c_1, c_2, c_3)$ é constante, temos que

$$\int_{\partial \mathcal{M}} \langle \phi, c \rangle ds = \int_{\partial \mathcal{M}} \left(\sum_{i=1}^3 \phi_i c_i \right) ds = 0.$$

Consequentemente,

$$n\mathcal{A} \geq \int_{\partial \mathcal{M}} (\|\phi\|^2 + \|c\|^2) ds = L(1 + \|c\|^2).$$

Então temos $n\mathcal{A} \geq L(1 + \|c\|^2)$. Por outro lado, por 4.1 temos $L = n\mathcal{A}$. O que implica que $L\|c\|^2 \leq 0$. Então $c=0$. Portanto

$$n\mathcal{A} \geq \int_{\mathcal{M}} \|\nabla \bar{\phi}\| dA \geq \int_{\partial \mathcal{M}} \|\bar{\phi}\|^2 ds = L = n\mathcal{A},$$

e a igualdade acontece em 4.2 e $\sigma \equiv 0$. Disto concluímos que ϕ é totalmente geodésica. \square

Observe que se considerarmos o problema de Plateau para hipersuperfícies mínimas com bordo livre (sem restrição quanto ao volume) em uma bola de \mathbb{R}^n , é fácil ver que não há soluções estáveis estacionários para este problema. Os argumentos usados na prova do teorema mostram que a única solução do índice 1 é a totalmente geodésica.

Lema 4.1. *Suponha ϕ que seja estável e estacionário e que B seja uma bola unitária. Se $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ é uma solução de*

$$\Delta f + \|\sigma\|^2 f = 0 \quad (4.3)$$

Então

$$\int_{\partial M} \left(\frac{\partial f}{\partial \nu} \right)^2 ds \geq \int_{\partial M} f \frac{\partial f}{\partial \nu} ds, \quad (4.4)$$

e a igualdade ocorre apenas se M for totalmente geodésico ou

$$\int_M f dA = 0, f = \frac{\partial f}{\partial \nu} \text{ em } \partial M. \quad (4.5)$$

Demonstração. Para qualquer $c \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} I(f + c, f + c) &= I(f, f) + 2I(f, c) + I(c, c) \\ &= - \int_M f (\Delta f + \|\sigma\|^2 f) dA + \int_{\partial M} f \left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f \right) ds \\ &\quad + 2 \left[- \int_M c (\Delta f + \|\sigma\|^2 f) dA + \int_{\partial M} c \left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f \right) ds \right] \\ &\quad - \int_M \|\sigma\|^2 c^2 dA - \int_{\partial M} c^2 ds \\ &= - \int_M c^2 \|\sigma\|^2 dA + \int_{\partial M} f \left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f \right) \\ &\quad + 2c \int_{\partial M} \left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f \right) ds - c^2 \int_{\partial M} ds \\ &\leq -c^2 L + 2c \int_{\partial M} \left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f \right) ds + \int_{\partial M} f \left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f \right) ds, \end{aligned} \quad (4.6)$$

e a igualdade se mantém se e somente se M for totalmente geodésico ou $c = 0$. Considere

$d = \int_{\partial M} f \left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f \right) ds$ e $b = 2 \int_{\partial M} \left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f \right) ds$. Por 4.6 obtemos a seguinte inequação

$$-Lc^2 + bc + d \geq 0.$$

Resolvendo essa inequação o máximo ocorre quando $c = \frac{b}{2L} = \frac{1}{L} \int_{\partial M} \left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f \right) ds$. Feito isso, substituindo este valor de c em 4.6 e usando a desigualdade de Schwarz, obtemos que

$$\begin{aligned} I(f + c, f + c) &\leq -\frac{1}{L} \left\{ \int_{\partial M} \left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f \right) ds \right\}^2 + \frac{2}{L} \left\{ \int_{\partial M} \left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f \right) ds \right\}^2 + \int_{\partial M} f \left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f \right) ds \\ &= \frac{1}{L} \left\{ \int_{\partial M} \left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f \right) ds \right\}^2 + \int_{\partial M} f \left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f \right) ds \\ &\leq \int_{\partial M} \left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f \right)^2 ds + \int_{\partial M} \left(f \frac{\partial f}{\partial \nu} - f^2 \right) ds \\ &= \int_{\partial M} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \nu} \right)^2 - 2f \frac{\partial f}{\partial \nu} + f^2 \right] ds + \int_{\partial M} \left(f \frac{\partial f}{\partial \nu} - f^2 \right) ds \end{aligned}$$

$$= \int_{\partial M} \left(\frac{\partial f}{\partial \nu} \right)^2 ds - \int_{\partial M} f \frac{\partial f}{\partial \nu} ds. \quad (4.7)$$

Escolhendo $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0 := -\left(\frac{1}{\lambda}\right) \int_M f dA$, temos que $f + \mathbf{c}_0 \in \mathbb{F}$, e então $I(f + \mathbf{c}_0, f + \mathbf{c}_0) \geq 0$, pois ϕ é estável. Segue daí a desigualdade 4.4,

$$\int_{\partial M} \left(\frac{\partial f}{\partial \nu} \right)^2 ds \geq \int_{\partial M} f \frac{\partial f}{\partial \nu} ds.$$

Se a igualdade for mantida em 4.4, então $I(f + \mathbf{c}_0, f + \mathbf{c}_0) = 0$ e do Lema 2.1 obtemos $\frac{\partial(f + \mathbf{c}_0)}{\partial \nu} = f + \mathbf{c}_0$ em ∂M . Como ϕ é estacionária estável, segue do Lema 2.1 que $(f + \mathbf{c}_0)\mathbf{N}$ é um campo de Jacobi. Além disso, uma vez que a igualdade deve ser mantida em 4.6, então ou M é totalmente geodésico ou $\mathbf{c}_0 = 0$. A última alternativa implica em 4.5,

$$\int_M f dA = 0, f = \frac{\partial f}{\partial \nu} \text{ em } \partial M.$$

□

Agora considerando a função de suporte $\mathbf{u} = \langle \phi, \mathbf{N} \rangle$ que verificamos em 3.2 satisfazer em M a equação

$$\Delta \mathbf{u} + \|\sigma\|^2 \mathbf{u} = -nH.$$

Pelo fato de ϕ ser estacionário e coincidir com ν em ∂M , então

$$\mathbf{u} = \langle \phi, \mathbf{N} \rangle = \langle \nu, \mathbf{N} \rangle = 0 \text{ em } \partial M, \quad (4.8)$$

e do Lema 1.4 temos que ν é uma direção principal de ϕ . Seja $\{e_i\}_{i=1}^n$ uma base que diagonaliza a segunda forma fundamental com $e_1 = \nu$. Ora,

$$\nabla \mathbf{u} = \sum e_i(\mathbf{u})e_i = \sum \langle \phi, \nabla_{e_i} \mathbf{N} \rangle e_i,$$

donde temos,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu} = \langle \nabla \mathbf{u}, \nu \rangle = -k_\nu, \quad (4.9)$$

onde k_ν é a curvatura principal de M associada a ν .

O resultado a seguir nos fornece informações sobre o sinal da função de suporte \mathbf{u} e impõe restrições topológicas na topologia de M , quando a integral em 4.1 é não-negativa.

Ou seja,

$$\int_M H \langle \phi, \mathbf{N} \rangle dA = H \int_M \mathbf{u} dA \geq 0.$$

Teorema 4.2. *Suponha que B é a bola unitária em \mathbb{R}^{n+1} e que ϕ é estável estacionária com $L \geq nA$. Então u nunca se anula em $\text{int } M$ ou ϕ é totalmente geodésico. No primeiro caso, se além disso ∂M é mergulho, então $\phi(M)$ é uma hipersuperfície em forma de estrela em relação ao centro da bola.*

Demonstração. Suponha que ϕ não é totalmente geodésica. Mostraremos primeiro que $u \geq 0$ ou $u \leq 0$ em M . Suponha o contrário. Vamos chamar M^+ (respec. M^-) o subconjunto de M onde u é positivo (respec. negativo) e definir $u^+, u^- \in H^1(M)$ por

$$u^+(p) = \begin{cases} u(p) & \text{se } p \in M^+ \\ 0 & \text{se } p \in M - M^+ \end{cases}, u^-(p) = \begin{cases} u(p) & \text{se } p \in M^- \\ 0 & \text{se } p \in M - M^- \end{cases}$$

Nós calculamos

$$\begin{aligned} I(u^+, u^+) &= \int_M \{ \langle \nabla u^+, \nabla u^+ \rangle - \|\sigma\|^2 (u^+)^2 \} dA \\ &= \int_M \{ \langle \nabla u, \nabla u^+ \rangle - \|\sigma\|^2 u u^+ \} dA \\ &= \int_M -\{ (\Delta u + \|\sigma\|^2 u) u^+ \} dA \\ &= nH \int_M u^+ dA. \end{aligned}$$

Daí,

$$I(u^+, u^+) = nH \int_M u^+ dA \tag{4.10}$$

e analogamente

$$I(u^-, u^-) = nH \int_M u^- dA. \tag{4.11}$$

Em seguida definimos $\tilde{u} : M \rightarrow \mathbb{R}$ por $\tilde{u} = u^+ + \alpha u^-$, onde α é uma constante positiva

$$\alpha = -\frac{\int_M u^+ dA}{\int_M u^- dA}.$$

Segue-se que $\tilde{u} = 0$ em ∂M e $\int_M \tilde{u} dA = 0$, o que faz $\tilde{u} \in \mathbb{F}$, e observe que

$$0 \leq I(\tilde{u}, \tilde{u}) = I(u^+ + \alpha u^-, u^+ + \alpha u^-) = I(u^+, u^+) + \alpha^2 I(u^-, u^-)$$

pelo fato de ϕ ser estável e $I(u^+, u^-) = 0$ (u^+ e u^- se anulam uma no complementar da outra). Tendo em mente 4.10 e 4.11, a desigualdade anterior fica

$$\begin{aligned} 0 \leq nH \int_M u^+ dA + \alpha^2 nH \int_M u^- dA &= \alpha nH \left[\frac{1}{\alpha} \int_M u^+ dA + \alpha \int_M u^- dA \right] \\ &= \alpha nH \left[- \int_M u^- dA - \int_M u^+ dA \right] \\ &= -\alpha nH \int_M u dA. \end{aligned}$$

Segue-se que,

$$I(\tilde{u}, \tilde{u}) = -\alpha nH \int_M u dA \geq 0. \quad (4.12)$$

Observe que de 4.1 temos $L = nA + nH \int_M \langle \phi, N \rangle dA$. Estamos supondo $L \geq nA$, donde temos que

$$nH \int_M u dA = L - nA \geq 0 \quad (4.13)$$

E assim de 4.12 e 4.13 obtém-se que $I(\tilde{u}, \tilde{u}) = 0$. Segue do Lema 2.1 que $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} = \tilde{u}$ em ∂M . Como $\tilde{u}|_{\partial M} = 0$ de 4.9 e de $\tilde{u} = \lambda u$, onde $\lambda = 1$ ou α , obtemos $k_\nu = 0$, ou seja, cada função coordenada $N_i, i = 1, \dots, n$, da aplicação de Gauss $N : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ verifica $\frac{\partial N_i}{\partial \nu} = 0$. De fato, sendo $k_\nu = 0$ tem-se $\nabla_\nu N = 0$. Se $\{e_i\}$ é a base canônica do \mathbb{R}^{n+1} , então $N = \sum_i N_i e_i$. Como $\nabla_\nu e_i = 0$, temos que

$$0 = \nabla_\nu N = \sum v(N_i) e_i,$$

\implies

$$\frac{\partial N_i}{\partial \nu} = v(N_i) = 0.$$

Além disso, N_i satisfaz $\Delta N_i + \|\sigma\|^2 N_i = 0$. Então o Lema 4.1 assegura que $\int_M N_i dA = 0$, o que pelo Lema 3.1 não é possível. Assim, mostramos que $u \geq 0$ ou $u \leq 0$ em todos os lugares.

Podemos escolher a orientação em M de forma que $u = \langle \phi, N \rangle \geq 0$. Se $H = 0$, do Teorema 4.1, é totalmente geodésico. Se $H \neq 0$, usando a Primeira fórmula de Minkowski 4.1

$$L = n \left(A + \int_M H u dA \right)$$

e a hipótese $L \geq nA$, então

$$0 \leq L - nA = n \int_M H u dA.$$

Donde temos $H > 0$, já que $u \geq 0$. Então u se verifica

$$u \geq 0,$$

$$\Delta u = -\|\sigma\|^2 u - nH < 0 \quad (4.14)$$

$$u|_{\partial M} = 0.$$

Pelo Princípio do Máximo para funções superharmônicas (consulte o apêndice), u é estritamente positivo em $\text{int } M$.

Mostremos agora a segunda parte do Teorema, primeiro observe que $\phi(\mathbf{p}) \neq 0$ para qualquer $\mathbf{p} \in M$. Faça a projeção de M na esfera unitária,

$$F : M \rightarrow \mathbb{S}^n$$

$$F(\mathbf{p}) = \frac{\phi(\mathbf{p})}{\|\phi(\mathbf{p})\|}.$$

Calculando a derivada de F , $dF_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}M \rightarrow T_{F(\mathbf{p})}\mathbb{S}^n$, vemos que é dada por

$$dF_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w}\|\phi(\mathbf{p})\|^2 - \langle \phi(\mathbf{p}), \mathbf{w} \rangle \phi(\mathbf{p})}{\|\phi(\mathbf{p})\|^3}.$$

Desde já, observe que $\mathbf{u}(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{N}(\mathbf{p}), \phi(\mathbf{p}) \rangle \neq 0$ e assim o vetor posição $\phi(\mathbf{p})$ é não nulo e não pertence a $T_{\mathbf{p}}\phi(M)$. Com isso, existe $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M$ tal que $dF_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = 0$, ou seja, ocorre quando $\mathbf{w} = \frac{\langle \phi(\mathbf{p}), \mathbf{w} \rangle}{\|\phi(\mathbf{p})\|^2} \phi(\mathbf{p})$. Daí, se $\langle \phi(\mathbf{p}), \mathbf{w} \rangle = 0$, então $dF_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = 0$ o que implica $\mathbf{w} = 0$, pois do contrário chegamos que $\phi(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}(M)$, absurdo!. Portanto, a derivada $dF_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}M \rightarrow T_{\mathbf{p}}\mathbb{S}^n$ é uma aplicação bijetiva e assim $F : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ é um homeomorfismo local. Mostremos agora que F é um homeomorfismo sobre sua imagem, que em outras palavras equivale a dizer que a superfície é estrelada em relação à origem da bola.

Dado $\mathbf{p} \in \partial M$ e uma curva parametrizada $\gamma : (-\varepsilon, 0] \rightarrow M$ com $\gamma(0) = \mathbf{p}, \gamma'(0) = \mathbf{w}$, um pequeno cálculo mostra que

$$\left. \frac{d}{dt} \langle F(\gamma(t)), \mathbf{N}(\mathbf{p}) \rangle \right|_0 = 0,$$

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \langle F(\gamma(t)), \mathbf{N}(\mathbf{p}) \rangle \right|_0 = \langle \gamma''(0), \mathbf{N}(\mathbf{p}) \rangle = k_{\mathbf{v}}.$$

De fato, veja que

$$\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma(t)\|} - \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|^3} \langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle.$$

Daí,

$$\left. \frac{d}{dt} \langle F(\gamma(t)), \mathbf{N}(\mathbf{p}) \rangle \right|_0 = \langle dF_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}), \mathbf{N}(\mathbf{p}) \rangle = \left\langle \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{p}\|} - \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|^3} \langle \mathbf{p}, \mathbf{w} \rangle, \mathbf{N}(\mathbf{p}) \right\rangle = 0$$

e

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \langle F(\gamma(t)), \mathbf{N}(\mathbf{p}) \rangle \right|_0 = \langle \gamma''(0), \mathbf{N}(\mathbf{p}) \rangle = k_{\mathbf{v}},$$

já que $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ é ortogonal a \mathbf{w} e $\mathbf{p} \in \partial M \subset \partial B$.

Mas, usando o Princípio do Máximo de Hopf (consulte o apêndice), obtemos de 4.9 que $k_{\mathbf{v}} = -\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} > 0$ em ∂M .

Se $\alpha(t) := \langle F(\gamma(t)), N(t) \rangle$ pelo que vimos acima podemos escolher $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha(t) > 0$, $\alpha'(t) < 0$ e $\alpha''(t) > 0 \forall -\varepsilon < t < 0$. Usando que $\alpha(t) > 0$ e ∂M ser mergulhada, tem-se $F(\gamma(t))$ pertence a componente conexa de $S^n - \phi(\partial M)$ que tem $\phi(p)$ como ponto de fronteira e $N(p)$ como normal apontando pra dentro. Se $\partial M = \bigcup_{i=1}^r \Gamma_i$, onde Γ_i são componentes conexas de ∂M , então para cada i existe uma faixa estreita no interior de M em torno de Γ_i cuja imagem por F em S^n pertence à mesma componente conexa de $S^n - \phi(\Gamma_i)$. Chamando de D_i a componente conexa de $S^n - \phi(\Gamma_i)$ que não intersecta esta imagem. Vamos definir \widetilde{M} como a união de M disjunta de todos os domínios D_i , e $\widetilde{F}: \widetilde{M} \rightarrow S^n$, como

$$\widetilde{F}(p) = \begin{cases} F(p) & \text{se } p \in M \\ p & \text{se } p \in D_i, i = 1, \dots, r. \end{cases}$$

Claramente \widetilde{F} é um homeomorfismo local sobre S^n , pois F é difeomorfismo local, e, portanto, é uma aplicação de recobrimento (\widetilde{M} é compacta). Sendo S^n simplesmente conexa conclui-se que \widetilde{F} é um homeomorfismo e isso conclui a prova. \square

Corolário 4.1. *Suponha que B é a bola unitária em \mathbb{R}^{n+1} e que ϕ é estável estacionária. Se $0 \in \phi(M)$, então $L < nA$ ou ϕ é totalmente geodésica.*

Demonstração. Seja $p \in M$ tal que $\phi(p) = 0$. Sabendo que $\partial M \subset \partial B$, então p tem que pertencer ao interior de M . Como $u(p) = 0$, se $L \geq nA$ o último teorema implica que ϕ é totalmente geodésica. Por outro lado, se ϕ não é totalmente geodésica e que $L \geq nA$, então novamente pelo teorema anterior temos que $u \neq 0 \forall p \in \text{int}(M)$, absurdo! Pois $u(p) = 0$ com $p \in \text{int}(M)$. \square

Quando $H \neq 0$, podemos fixar uma orientação em M de modo que $H > 0$. Neste caso, se M é mergulho, denotamos B_1 a componente conexa de $B - M$ para a qual a normal N aponta.

Corolário 4.2. *Suponha que B é a bola unitária e que ϕ é um mergulho estável estacionário. Se $H \neq 0$ e $0 \in B_1$, então $L < nA$.*

Demonstração. Suponha que $L \geq nA$. Então $u \neq 0$ em $\text{int } M$, pois $H \neq 0$. Fixada uma orientação para M de modo que $H > 0$. Mas, como $0 \in B_1$, para um ponto $p_0 \in M$ tal que $u(p_0) \leq u(p) \forall p \in M$. Assim, a direção normal a M em p_0 é dada pelo vetor posição. Ora, N aponta para B_1 , donde temos $u(p_0) < 0$. Portanto, temos uma contradição. \square

Definição 4.1. *Seja f uma função de Classe C^∞ e suponha que f é solução de uma equação elíptica em M . O conjunto $f^{-1}(0)$ é chamado de conjunto nodal. Se a dimensão de M é dois e f não é identicamente nula, então podemos escrever $f^{-1}(0) = \bigcup C_i$ tais que C_i é conexo e $\nabla f(\mathbf{p}) \neq 0$ para todo \mathbf{p} no interior de C_i . Cada C_i é chamado de linha nodal.*

Lema 4.2. *Seja $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante. Então*

$$\Delta g + \|\sigma\|^2 g = 0, \quad (4.15)$$

onde $g = \langle \phi \wedge N, N(\mathbf{p}_0) \rangle$ e $\mathbf{p}_0 \in M$ é um ponto fixado. Além disso, se o vetor normal ν a fronteira ∂M é uma direção principal de ϕ e $\phi = \nu$ em ∂M , então

$$\frac{\partial g}{\partial \nu} = g, \quad (4.16)$$

em ∂M .

Demonstração. Dado $\mathbf{p} \in M$ e $\{e_i\}_i^n$ uma base definida em \mathbf{p} que diagonaliza σ . Assim, temos que $\bar{\nabla}_{e_i} N = -\lambda e_i$. Extendendo a base para um referencial geodésico $\{E_i\}_i^n$ em \mathbf{p} . Por definição o Laplaciano de $g = \langle \phi \wedge N, N(\mathbf{p}_0) \rangle$ é dado por

$$\Delta g = \sum_{i=1}^n E_i E_i(\mathbf{p}). \quad (4.17)$$

Veja que

$$\begin{aligned} E_i(g) &= E_i(\langle \phi(\mathbf{p}) \wedge N(\mathbf{p}), N(\mathbf{p}_0) \rangle) \\ &= \langle \bar{\nabla}_{E_i} \phi(\mathbf{p}) \wedge N(\mathbf{p}), N(\mathbf{p}_0) \rangle + \langle \phi(\mathbf{p}) \wedge \bar{\nabla}_{E_i} N(\mathbf{p}), N(\mathbf{p}_0) \rangle \\ &= \langle E_i(\mathbf{p}) \wedge N(\mathbf{p}) + \phi(\mathbf{p}) \wedge \bar{\nabla}_{E_i} N(\mathbf{p}), N_0 \rangle. \end{aligned}$$

Daí, no ponto \mathbf{p} tem-se que

$$\begin{aligned} E_i E_i(g) &= E_i(\langle E_i \wedge N + \phi \wedge \bar{\nabla}_{E_i} N, N_0 \rangle) \\ &= \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i \wedge N + E_i \wedge \bar{\nabla}_{E_i} N + \bar{\nabla}_{E_i} \phi \wedge \bar{\nabla}_{E_i} N + \phi \wedge \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} N, N(\mathbf{p}_0) \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i \wedge N - 2\lambda E_i \wedge E_i + \phi \wedge \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} N, N(\mathbf{p}_0) \rangle \\ &= \langle \phi \wedge \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} N, N(\mathbf{p}_0) \rangle \\ &= \langle N(\mathbf{p}_0) \wedge \phi, \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} N \rangle, \end{aligned}$$

e assim,

$$E_i E_i(g) = \langle N(p_0) \wedge \phi, \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} N \rangle. \quad (4.18)$$

Considere agora

$$W = N(p_0) \wedge \phi = \sum_{j=1}^n w_j E_j + \bar{g} N. \quad (4.19)$$

Substituindo isso em 4.18 obtemos que

$$\begin{aligned} E_i E_i(g) &= \left\langle \sum_{j=1}^n w_j E_j + \bar{g} N, \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} N(p) \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n w_j \langle E_j, \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} N(p) \rangle + \bar{g} \langle N, \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} N \rangle. \end{aligned}$$

Daí, substituindo essa expressão acima em 4.17, tem-se que

$$\begin{aligned} \Delta g &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n w_j \langle E_j, \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} N(p) \rangle + \bar{g} \langle N, \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} N \rangle \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n w_j \langle E_j, \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} N(p) \rangle \right) + \bar{g} \sum_{i=1}^n \langle N, \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} N \rangle. \end{aligned}$$

Lembrando da demonstração da Proposição 3.1 segue

$$\Delta g = -\bar{g} \|\sigma\|^2.$$

Perceba que de 4.19 tem-se que

$$\bar{g} = \langle W, N(p) \rangle = \langle N(p_0) \wedge \phi(p), N \rangle = \langle \phi(p) \wedge N(p), N(p_0) \rangle = g.$$

Portanto,

$$\Delta g + g \|\sigma\|^2 = 0.$$

Mostremos agora a segunda parte. Como \mathbf{v} é uma direção principal de ϕ , temos que $\bar{\nabla}_{\mathbf{v}} N = \lambda \mathbf{v}$. Além disso, desde que $\phi = \mathbf{v}$ na fronteira ∂M segue $\phi \wedge \mathbf{v} = 0$. Ora, usando que

$$\langle \nabla_g, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}(g) = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{v}},$$

em ∂M

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(g) &= \mathbf{v} \langle \phi \wedge N(p), N(p_0) \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\mathbf{v}} \phi \wedge N(p) + \phi \wedge \bar{\nabla}_{\mathbf{v}} N(p), N(p_0) \rangle \\ &= \langle \mathbf{v} \wedge N(p) + \phi \wedge \lambda \mathbf{v}, N(p_0) \rangle \\ &= \langle \phi \wedge N(p), N(p_0) \rangle \\ &= g. \end{aligned}$$

Segue que

$$\frac{\partial g}{\partial v} = g$$

em ∂M . □

Teorema 4.3. *Suponha que $B \subset \mathbb{R}^3$ seja uma bola e que $\phi : M \rightarrow B$ seja estacionária estável. Então ∂M é mergulhada e as únicas possibilidades são*

1. $\phi(M)$ é um disco totalmente geodésico,
2. $\phi(M)$ é uma calota esférica,
3. $g = 1$ e $r = 1$ ou 2.

Demonstração. Veja que $\text{II}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) = 1$ e o Lema 2.2 afirma que $k_v = 1$ em ∂M . Segue-se que, neste caso usando 3.8 e 3.10, a estimativa 3.11 pode ser melhorada para

$$4\pi \left(4 - 2g + 2 \left\lfloor \frac{g+1}{2} \right\rfloor - r \right) > 4H^2A + 3L \geq 3(H^2A + L). \quad (4.20)$$

De 2.11 temos que $H^2A + L \geq 2\pi$, o que nos dá

$$4\pi \left(4 - 2g + 2 \left\lfloor \frac{g+1}{2} \right\rfloor - r \right) > 6\pi.$$

Daí, organizando os termos temos que

$$8 + 4 \left\lfloor \frac{g+1}{2} \right\rfloor - 4g - 2r > 3.$$

De maneira parecida com que fizemos no Teorema 3.1, faremos análise quando gênero g for par, e quando for ímpar.

Primeiro caso: Se g for par então $2 \left\lfloor \frac{g+1}{2} \right\rfloor = g$. Daí

$$\begin{aligned} 3 &< 8 + 2g - 4g - 2r \\ \Leftrightarrow 5 &> 2(g + r). \end{aligned}$$

Nesse caso, se $g = 0$ então $r = 1$ ou 2 se $g = 2$, temos que $r = 0$.

Segundo caso: Se g for ímpar então $2 \left\lfloor \frac{g+1}{2} \right\rfloor = g + 1$. Daí

$$\begin{aligned} 3 &< 8 + 2g + 2 - 4g - 2r \\ \Leftrightarrow 7 &> 2(g + r). \end{aligned}$$

Nesse caso, g só pode ser igual a 1, e assim $r = 1$ ou 2.

Portanto temos que $g = 0$ ou 1 e $r = 1$ ou 2. Agora para eliminar algumas possibilidades iremos supor que ∂M não é mergulhada e chegaremos em uma contradição. De 2.12 temos que $H^2A + L \geq 4\pi$, e usando 4.20, ganhamos que

$$4\pi \left(4 - 2g + 2 \left\lfloor \frac{g+1}{2} \right\rfloor - r \right) > 3(4\pi),$$

o que é equivalente a

$$4 - 2g + 2 \left\lfloor \frac{g+1}{2} \right\rfloor - r > 3.$$

Feito isso, novamente analisaremos o caso em que g é par e o caso em que g é ímpar.

Primeiro caso: Se g for par então $2 \left\lfloor \frac{g+1}{2} \right\rfloor = g$. Daí

$$3 < 4 - 2g + g - r$$

$$\Leftrightarrow 1 > g + r.$$

Isto implica que $g = 0$ e $r = 0$ o que não pode acontecer, já que ∂M é não vazia.

Segundo caso: Se g for ímpar então $2 \left\lfloor \frac{g+1}{2} \right\rfloor = g + 1$. Daí

$$3 < 4 - 2g + g + 1 - r$$

$$\Leftrightarrow 2 > g + r.$$

Assim, temos que $g = 1$ e $r = 0$ o que não pode acontecer, pois a ∂M é não vazia.

Devemos provar que os discos totalmente geodésicos e calotas esféricas são as únicas superfícies estáveis estacionárias com gênero $g = 0$. Seja $p_0 \in M$ um ponto onde a função $|\phi(p)|$ atinge seu mínimo. Perceba que $u \neq 0$ faz com que $0 \notin \phi(M)$. Vamos definir em M a função

$$\beta(p) = \langle \phi(p) \wedge N(p), N_0 \rangle,$$

onde $N_0 = N(p_0)$ e \wedge denota o produto vetorial em \mathbb{R}^3 . Note que

$$\beta(p_0) = \langle \phi(p_0) \wedge N(p_0), N_0 \rangle = 0. \quad (4.21)$$

Além disso,

$$\nabla_w \beta(p_0) = \langle w \wedge N(p_0) + \phi(p_0) \wedge \nabla_w N(p_0), N(p_0) \rangle = 0, \forall w \in T_p M,$$

pois $\phi(p_0) \neq 0$ implica que $\phi(p_0)$ é paralelo a $N(p_0)$. Logo,

$$\nabla \beta(p_0) = 0. \quad (4.22)$$

Pelo Lema 4.2 temos que β satisfaz

$$\begin{cases} \Delta\beta + \|\sigma\|^2\beta = 0, & \text{se } p \in M, \\ \frac{\partial\beta}{\partial\nu} = \beta, & \text{se } p \in \partial M. \end{cases} \quad (4.23)$$

Logo, pela Definição 4.1, obtemos que $\beta^{-1}(0)$ é um conjunto nodal.

Afirmamos que $\beta = 0$ em M . Caso contrário, o conjunto de nível $\beta^{-1}(0)$ é um gráfico cujos vértices são os pontos críticos de β (ver, por exemplo, Anné ([2]) ou cheng([5]). Seja m o número de componentes conexas M_i de $M - \beta^{-1}(0)$. Usando o Teorema de Gauss-Bonnet para cada componente conexas M_i de $M - \beta^{-1}(0)$, temos

$$\int_{M_i} K dA = 2\pi\chi(M_i) - \int_{\partial M_i} k_g ds - \sum_j \theta_{ij},$$

onde θ_{ij} denotam os ângulos externos de cada componente da ∂M_i . Somando as equações acima para todos os i , obtemos

$$\int_M K dA = 2\pi \sum_{i=1}^m \chi(M_i) - \sum_{i=1}^m \int_{\partial M_i} k_g ds - \sum_{i=1}^m \sum_j \theta_{ij}.$$

Assim,

$$\int_M K dA + \int_{\partial M} k_g ds = 2\pi \sum_{i=1}^m \chi(M_i) - \sum_{i,j} \theta_{ij} \quad (4.24)$$

Como ∂M é suave não temos ângulos externos, a última equação nos dá

$$\int_M K dA + \int_{\partial M} k_g ds = 2\pi\chi(M). \quad (4.25)$$

Nesse caso, comparando 4.24 e 4.25 e sabendo que $\chi(M) = 2 - 2g - r$, obtemos que

$$2\pi(2 - 2g - r) = 2\pi \sum_{i=1}^m \chi(M_i) - \sum_{i,j} \theta_{ij}. \quad (4.26)$$

Devemos obter uma estimativa para a última soma. De 4.21, há pelo menos duas linhas nodais de β se cruzando em p_0 e formando um sistema equiangular em p_0 (ver [An] ou [Ch]). Portanto, $\sum_{i,j} \theta_{ij}$ é pelo menos 2π que a soma dos ângulos que possuem $p_0 \notin \partial M$ como vértice. Por outro lado, em cada componente conexas $\Gamma_k, k = 1, \dots, r$, de ∂M , escolhendo uma parametrização de comprimento de arco orientada positivamente γ_k temos $\phi \wedge N = -\gamma'_k$. Lembrando que estamos usando que M é de fronteira livre. Assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_{\Gamma_k} \beta ds = - \int_{\Gamma_k} \langle \gamma'_k, N_0 \rangle = 0,$$

pois γ_k é uma curva fechada e segue que β tem pelo menos dois zeros em cada componente conexa Γ_k . Cada ponto de $\beta^{-1}(0) \cap \gamma_i$ contribui com pelo menos π para a soma de $\sum_{i,j} \theta_{ij}$ na última equação. Levando em consideração todos estes valores e o anterior obtido em p_0 obtemos a estimativa

$$\sum_{i,j} \theta_{ij} \geq 2\pi(1+r).$$

Comparando isso com a equação 4.26, temos o seguinte

$$2\pi(2-2g-r) = 2\pi \sum_{i=1}^m \chi(M_i) - \sum_{i,j} \theta_{ij} \leq 2\pi \sum_{i=1}^m \chi(M_i) - 2\pi(1+r)$$

donde temos,

$$2-2g-r \leq \sum_{i=1}^m \chi(M_i) - 1 - r,$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^m \chi(M_i) \geq 3-2g.$$

Note que cada componente conexa M_i é homeomorfa a um disco, pela característica de Euler $\chi(M_i) = 1$ para cada i . Se assumirmos que M tem gênero $g = 0$, segue-se que $M - \beta^{-1}(0)$ tem pelo menos três componentes conexas. Sejam M_1 e M_2 duas destas componentes conexas. Assim, sejam $\beta_1, \beta_2 : M \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$\beta_1(p) = \begin{cases} \beta(p), & \text{se } p \in M_1 \\ 0, & \text{se } p \in M - M_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \beta_2(p) = \begin{cases} \beta(p), & \text{se } p \in M_2 \\ 0, & \text{se } p \in M - M_2 \end{cases}$$

Tendo em mente que $\text{II}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) = 1$ e usando o Teorema da Divergência na forma do índice para a função β_1 , temos que

$$\begin{aligned} I(\beta_1, \beta_1) &= \int_M (\langle \nabla \beta_1, \nabla \beta_1 \rangle - \|\sigma\|^2 \beta_1^2) \, dA - \int_{\partial M} \beta_1^2 \, ds \\ &= \int_M (\langle \nabla \beta, \nabla \beta_1 \rangle - \|\sigma\|^2 \beta_1 \beta) \, dA - \int_{\partial M} \beta_1 \beta \, ds \\ &= - \int_M (\beta_1 \Delta \beta + \|\sigma\|^2 \beta_1 \beta) \, dA + \int_{\partial M} \left(\beta_1 \frac{\partial \beta}{\partial \nu} - \beta_1 \beta \right) \, ds \\ &= - \int_M \beta_1 (\Delta \beta + \|\sigma\|^2 \beta) \, dA + \int_{\partial M} \beta_1 \left(\frac{\partial \beta}{\partial \nu} - \beta \right) \, ds, \end{aligned}$$

pois β_1 se anula em $M - M_1$. De 4.23 tem-se que

$$I(\beta_1, \beta_1) = 0.$$

De maneira similar, mostra-se que $I(\beta_2, \beta_2) = 0$. Mais ainda, como β_1 e β_2 se anulam em conjuntos complementares, obtemos que $I(\beta_1, \beta_2) = 0$.

Supondo sem perda de generalidade que $\int_M \beta_2 dA \neq 0$. Seja $\bar{\beta} = \beta_1 + \alpha\beta_2$, onde $\alpha = -\frac{\int_M \beta_1 dA}{\int_M \beta_2 dA}$. E assim, pelo que analisamos anteriormente temos que

$$I(\bar{\beta}, \bar{\beta}) = I(\beta_1, \beta_1) + 2\alpha I(\beta_1, \beta_2) + \alpha^2 I(\beta_2, \beta_2) = 0.$$

Sendo ϕ estacionário estável, e do Lema 2.1 segue que $\bar{\beta}N$ é um campo de Jacobi e assim

$$\Delta \bar{\beta} + \|\sigma\|^2 \bar{\beta} = \text{constante}. \quad (4.27)$$

Como $\bar{\beta}$ desaparece fora de $M_1 \cup M_2$ e 4.27 é uma equação elíptica, o Teorema da Continuação única (ver [3]) nos dá $\bar{\beta} \equiv 0$ em M . Isso implica que $\beta \equiv 0$. Assim,

$$0 = \langle \phi(p) \wedge N(p), N_0 \rangle = -\langle \phi(p) \wedge N_0, N(p) \rangle.$$

Portanto, o vetor $W(p) = \phi(p) \wedge N_0 \in T_p M$, $\forall p \in M$. Considerando o campo de vetores V em \mathbb{R}^3 dado por $V(x) = x \wedge N_0$. V é um campo de Killing, pois é gerado a partir de um grupo a um parâmetro de isometrias de \mathbb{R}^3 , sendo elas as rotações. Ao longo de $\phi(M)$ a restrição de V coincide com W , então M é uma superfície de rotação ao redor do eixo N_0 com ponto fixo p_0 , e então M deve ser homeomorfa a um disco. A conclusão segue de um Teorema de Nitsche ([13]). \square

Exemplo 4.1. *O disco equatorial plano é definido como sendo a interseção da bola fechada unitária $B \subset \mathbb{R}^3$ com um plano contendo a origem.*

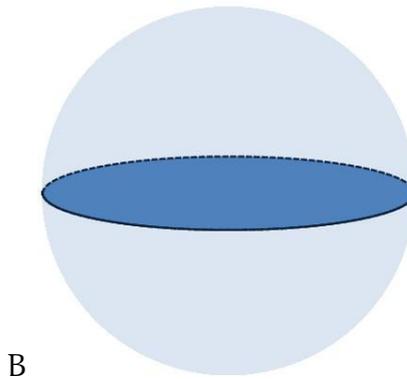


Figura 4.1: O disco equatorial plano

Os discos equatoriais planos são as únicas superfícies com fronteira livre e totalmente geodésicas em B . Nitsche [13] mostrou que eles são de fato as únicas superfícies mínimas de fronteira livre imersas em B que são homeomorfas a um disco.

Exemplo 4.2. *Calotas esféricas ($H \neq 0$). Seja B a bola fechada unitária em \mathbb{R}^3 e $S = \Sigma \cap B$, onde Σ é a parte interior a B de alguma esfera $S^2(r)$ que intersecta $S^2(1) = \partial B$ ortogonalmente.*

Uma vez que as superfícies em forma de estrela devem ter gênero 0, o seguinte corolário segue diretamente do último teorema e do Teorema 4.2.

Corolário 4.3. *Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ a bola unitária. Se ϕ for estacionário estável com $L \geq 2A$, então $\phi(M)$ é um disco totalmente geodésico ou uma calota esférica.*

Na época Ros e Vergasta [17] afirmaram que não conheciam exemplos de superfícies estáveis de gênero 1. No entanto, não conjecturaram que esse tipo de superfície não existisse. Recentemente,IVALDO NUNES [14] usando outra técnica para a prova do Teorema 4.3 concluiu que o terceiro caso não ocorre. Com isso, Nunes [14] obtém o seguinte:

Corolário 4.4. *Os discos totalmente umbílicos são as únicas superfícies com curvatura média constante compactas orientáveis imersas estáveis com bordo livre em $B \subset \mathbb{R}^3$.*

O corolário acima é tido como o resultado análogo ao teorema de Barbosa e do Carmo [4] para superfícies com curvatura média constante estáveis fechadas imersas no espaço euclidiano, que nos dá o seguinte resultado.

Teorema 4.4. *Sejam M uma variedade Riemanniana de dimensão n , compacta, orientável com fronteira vazia e $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma imersão com curvatura média constante não nula. Então φ é estável se, e somente se, $\varphi(M)$ é a esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.*

G. Wang e C. Xia em [19] provam um resultado bem mais geral levando em conta hipersuperfícies capilares estáveis, que são aquelas que tem curvatura média constante, e ∂M intersecta ∂B em um ângulo constante $\theta \in (0, \pi)$ em bolas geodésicas do espaço euclidiano. Em particular, as superfícies de bordo livre são capilares. Esse resultado de classificação diz o seguinte:

Teorema 4.5 (G. Wang e C. Xia, 2019). *Seja $\varphi : M^{n+1} \rightarrow B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície capilar estável imersa na bola euclidiana unitária com curvatura média constante $H \geq 0$,*

onde ∂M intersecta ∂B com um ângulo constante $\theta \in (0, \pi)$. Então φ é uma bola totalmente geodésica ou uma calota esférica.

Capítulo 5

Apêndice

Neste apêndice apresentaremos o Teorema de Gauss-Bonnet, que é provavelmente o Teorema mais profundo na Geometria diferencial das superfícies. Além disso, no trabalho precisamos do Princípio do Máximo de Hopf e o Princípio do Máximo que abordaremos. Aqui, não daremos detalhes a respeito de suas demonstrações, pois no trabalho focamos apenas em aplicá-los. Desta forma, traremos basicamente seus enunciados.

5.1 Teorema de Gauss-Bonnet

Considere M uma superfície.

Definição 5.1. *Uma triangularização de uma região regular $R \subset M$ é uma família finita T de triângulos T_i , $i = 1, \dots, n$, onde*

(a) $\cup_{i=1}^n T_i = R$.

(b) *Se $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ para $i \neq j$, então $T_i \cap T_j$ é uma aresta comum de T_i e T_j ou um vértice comum de T_i e T_j .*

Proposição 5.1. *Toda região regular de uma superfície regular admite uma triangulação.*

Demonstração. Veja [1]. □

Definição 5.2. *Considere M uma superfície e R uma região de M . A característica de Euler Poincaré da triangulação é dada por*

$$\chi(R) = V - A + F, \tag{5.1}$$

onde F é o número de faces, A é o número de arestas e V é o número de vértices.

Seja M uma superfície compacta com bordo, onde o número de componentes conexas da fronteira é dada por r , a característica de Euler Poincaré de M é dada por

$$\chi(M) = 2 - 2g - r. \quad (5.2)$$

Teorema 5.1. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta orientável, e sejam C_1, \dots, C_n as curvas fechadas, simples e regulares por partes que formam a fronteira ∂M de M . Suponha que cada C_i é orientada positivamente e sejam $\theta_1, \dots, \theta_p$ o conjunto de ângulos externos das curvas C_1, \dots, C_n . Então,*

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \int_M K dM + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi\chi(M), \quad (5.3)$$

onde s denota o comprimento de arco de C_i , e a integral sobre C_i significa a soma das integrais em todos os arcos regulares de C_i .

Demonstração. Veja [6]. □

5.2 Princípio do Máximo de Hopf

Teorema 5.2. *(Princípio do Máximo de Hopf): Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto conexo e L um operador linear uniformemente elíptico em Ω de segunda ordem tal que $c(x) \leq 0$. Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, tal que $L(u) \leq 0$. Se u atinge seu máximo em Ω , então u é uma constante não negativa em Ω . Caso contrário, se existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $u(x_0) > 0$, então a derivada normal para fora, se esta existe, satisfaz $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$. Além disso, se $c(x) \equiv 0$, então as mesmas condições são válidas para um máximo não positivo.*

Observação 5.1. *Aqui esse operador L é da forma*

$$L = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x).$$

Demonstração. Veja [15] e [16]. □

5.3 Princípio do Máximo

Teorema 5.3. *Seja M uma Variedade Riemanniana conexa e f uma função em M subharmônica. Se f assume um máximo num ponto interior do domínio em M , então f é constante.*

Demonstração. Veja [16]. □

Observação 5.2. *O Teorema acima vale de forma análoga no caso em que $\Delta f \leq 0$ e f assume um mínimo.*

Referências Bibliográficas

- [1] Ahlfors, L. and Sario, L.: *Riemann Surfaces*. Princeton University Press, N.J.,1960, Cap.1.
- [2] Anné, C.: Bornes sur la multiplicité, Preprint, 1992.
- [3] Athanassenas, M.: *A variational problem for constant mean curvature surfaces with free boundary*, *J. reine angew. Math.* 377 (1987), 97-107.
- [4] Barbosa, J. L. and do Carmo, M.: Stability of hypersurfaces with constant mean curvature, *Math. Z.* 185 (1984), 339-353.
- [5] Cheng, S. Y.: Eigenfunctions and nodal sets, *Comment. Math. Helv.* 51 (1976), 43-55.
- [6] Carmo, M. P. do: *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2010.
- [7] Carmo, M. P. do: - *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides - IMPA, 2005.
- [8] El Soufi, A. and Ilias, S., Küster, A. and Wohlrab, O.: *Minimal Surfaces I*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [9] Griffiths, P. and Harris, J.: *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, New York, 1978.
- [10] Lee, J. M.: *Introduction to topological manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, 202, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [11] Lee, J.: *Introduction to Smooth Manifolds*, Second edition, Springer, New York, 2013.
- [12] Li, P. and Yau, S. T.: A new conformal invariant and its applications to the Wilmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces, *Invent. Math.* 69 (1982), 269-291.

-
- [13] Nitsche, J. C. C.: Stationary partitioning of convex bodies, *Arch. Rational Mech. Anal.* 89 (1985), 1-19.
- [14] Nunes, I.P.: *On stable constant mean curvature surfaces with free boundary*. *Math. Z.* (2017) 287, 473-479.
- [15] Pucci, P. and Serrin, J.: *The maximum principle*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 73, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
- [16] Protter, M. H. and Winberger, H. F.: *Maximum principles in differential equations*, corrected reprint of the 1967 original, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [17] Ros, A. and Vergasta, E.: *Stability for hypersurfaces of constant mean curvature with free boundary*, *Geom. Dedicata* 56 (1995), no. 1, 19-33.
- [18] Spivak, M. - *Calculus on Manifolds*. The Advanced Book Program, 1995.
- [19] Wang, G.; Xia, C. Uniqueness of stable capillary hypersurfaces in a ball. *Math. Ann.*, v. 374, n. 3-4, p. 1845-1882, 2019. ISSN 0025-5831.