



Universidade Federal do Piauí  
Centro de Ciências da Natureza  
Departamento do Curso de Física  
Programa de Pós-Graduação em Física

# Comportamento Crítico do Modelo BCS em Redes de Solomon

Edmundo Alves de Moura Filho

Teresina - Piauí - Brasil

Julho de 2019

Universidade Federal do Piauí  
Centro de Ciências da Natureza  
Departamento do Curso de Física  
Programa de Pós-Graduação em Física

Edmundo Alves de Moura Filho

# Comportamento Crítico do Modelo BCS em Redes de Solomon

Dissertação apresentada ao Programa de  
Pós-Graduação em Física da UFPI como  
requisito necessário para obtenção do  
título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Wellington de Sousa Lima

Teresina - Piauí - Brasil

Julho de 2019

---

FICHA CATALOGRÁFICA

Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí  
Biblioteca Setorial de Ciências da Natureza - CCN

M929c Moura Filho, Edmundo Alves de.  
Comportamento crítico do modelo BCS em redes de  
Soloms / Edmundo Alves de Moura Filho. – Teresina: 2019.  
54 f.: il. color.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí,  
Centro de Ciências da Natureza, Pós-graduação em Física,  
2019.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Wellington de Sousa Lima.

1. Física. 2. Matéria Condensada. 3. Rede de Soloms. 4.  
Simulações de Monte Carlo. I. Título.

CDD 530.41

# Comportamento Crítico do Modelo BCS em Redes de Solomon

Edmundo Alves de Moura Filho

Dissertação apresentada ao Programa de  
Pós-Graduação em Física da UFPI como  
requisito necessário para obtenção do  
título de Mestre em Física.

Teresina (PI), 19 de Julho de 2019

## BANCA EXAMINADORA:

---

Orientador: Prof. Dr. Francisco Welington de Sousa Lima-UFPI

---

Prof. Dr. Cleânio da Luz Lima-UFPI

---

Prof. Dr. Gladstone de Alencar Alves-UESI

---

Prof. Dr. Tayroni Francisco de Alencar Alves-UFPI

# Dedicatória

*A Deus!*

A toda minha família!

Em especial Minha mãe Edia Maria e ao meu pai Edmundo Alves. Dedico também esse trabalho às minhas irmãs Eline e Claudiana e ao meu sorinho Marcos Vinícios.

Aos meus amigos em geral!

# Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus e em segundo a minha família pelo apoio e carinho que recebi em todos os momentos. Em lições de vida, as quais nem sempre pude entender e até interpretei errado, amo vocês! Mesmo não sabendo como demonstrar isso, sempre os levarei onde quer que eu vá.

Aos meus pais, Edmundo Alves de Moura e Edia Maria Santtana Moura agradeço por tudo que fizeram para me darem educação. Se não fosse vocês isso tudo não estaria acontecendo. Sou e serei eternamente grato à estas pessoas com poucos estudos, mais com bastante: dignidade, simplicidade e caráter. Aos minhas irmãs: Enine, Cláudia, por estarem comigo e me apoiarem nos momentos complicados pelos quais passei ao longo dessa jornada. MUITÍSSIMO obrigado por tudo e feliz por fazer parte desta grande e unida família.

A meu orientador, Francisco Welington de Sousa Lima, agradeço pela paciência, orientação e pelas disciplinas das quais fui seu aluno. MUITÍSSIMO obrigado!

Pela compreensão na minha fase inicial de adaptação a um novo mundo e por sua contribuição para minha formação como pesquisador em Física. Agradeço aos professores que participaram da banca pela contribuição, pelas críticas. Obrigado! Aos meus amigos, os quais sempre estiveram comigo. E em especial aqueles que compartilharam seus conhecimentos comigo, contribuindo de forma direta para minha formação acadêmica. Aos meus amigos de longa data que mesmo estando longe tenho certeza que estão torcendo por mim.

# RESUMO

Neste trabalho realizados estudos usando modelo do comportamento critico do modelo BCS em redes de Solomon, através de simulações de Monte Carlo em 1-dimensão e 2-dimensões. Onde os indivíduos de um determinado grupo interagem aos pares com seus vizinhos mais próximos. Assim, após a interação cada indivíduo terá uma nova opinião a favor ou contrária em torno de um tema em debate. Nosso principal objetivo neste trabalho é extrairmos algumas propriedades físicas, como por exemplo, o cumulante de Binder ( $U_4$ ), a susceptibilidade magnética e a magnetização. A partir destas propriedades físicas extraímos os expoentes críticos  $\gamma/\nu$ ,  $\beta/\nu$  e  $1/\nu$ . Com isso, vimos que os valores encontrados para os expoentes críticos tanto para 1-dimensão quanto para 2-dimensão estão bem próximos dos valores já previstos na literatura. Coincedindo também com critério de Grinstein para modelos que apresentam simetria 'up and down'.

**Palavras-chaves:** Rede de Solomon, comportamento crítico do modelo BCS, Simulações de Monte Carlo.

# ABSTRACT

In this work, we performed studies using the model of critical behavior of BCS model on Solomon networks in the Monte Carlo simulation, in the 1-dimensional and 2-dimensional Solomon network. The paired groups interact have pairs with their closest neighbors. Thus, after the interaction each individual will have a new opinion agreeing or disagreeing a topic under discussion. Our main goal is to work with physical properties, such as cumulative Binder  $U_4$ , magnetic susceptibility and magnetization. From these physical properties we extract the critical exponents  $\beta/\nu, \gamma/\nu$  e  $1/\nu$ . Thus, we have seen that the values found for the critical exponents for both 1-dimension and 2-dimension are very close to the values already predicted in the literature. It also coincides with Grinstein's criteria for models that show up and down symmetry.

**Keywords:** Solomon network, critical behavior of model BCS, Monte Carlo simulation.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Método de Monte Carlo</b>	<b>3</b>
2.1	Simulação de Monte Carlo . . . . .	4
2.1.1	Processo de Markov . . . . .	4
2.1.2	Hipótese Ergótica de Boltzmann . . . . .	5
2.1.3	Balanço Detalhado . . . . .	6
2.2	Algoritmo . . . . .	7
2.2.1	Algoritmo de Metropolis . . . . .	7
2.2.2	Banho Térmico . . . . .	8
2.2.3	Equação Mestre . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Transição de Fase e Fenômenos Críticos</b>	<b>10</b>
3.1	Transição de Fase e Criticalidade . . . . .	10
3.1.1	Modelo de Ising . . . . .	14
3.1.2	Expoentes Críticos . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Redes</b>	<b>18</b>
4.1	Redes Complexas . . . . .	18
4.2	Tipos de Redes . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Comportamento Crítico do Modelo BCS em Redes de Solomon</b>	<b>23</b>
<b>6</b>	<b>Resultados e Discussões</b>	<b>27</b>
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>39</b>

# Lista de Figuras

4.1	Redes complexas . . . . .	18
4.2	Rede Erdör Reny . . . . .	19
4.3	Rede de pequeno-mundo . . . . .	20
4.4	Redes de quadrada . . . . .	22
4.5	Rede de pequeno-mundo . . . . .	22
6.1	Mostra as curvas do $U_4$ , para diferentes tamanhos de redes $N = 1000, 5000, 10000, 20000, 30000$ em 1D. . . . .	29
6.2	Mostra as curvas do $U_4$ para diferentes tamanhos de redes $L = 16, 32, 64, 128, 256, 512$ em 2D. . . . .	29
6.3	Mostra as curvas da magnetização para diferentes tamanhos de redes $N = 1000, 5000, 10000, 20000, 30000, 50000, 70000$ em 1D. . . . .	30
6.4	Mostra as curvas da magnetização com diferentes tamanhos de rede $L = 16, 32, 64, 128, 256, 512$ em 2D. . . . .	30
6.5	Mostra as curvas da susceptibilidade para diferentes tamanhos de redes $N = 1000, 5000, 10000, 20000, 30000, 50000, 70000$ em 1D. . . . .	31
6.6	Mostra as curvas da suceptibilidade com diferentes tamanhos de redes $L = 16, 32, 64, 128, 256, 512$ em 2D . . . . .	31
6.7	Mosta o gráfico do logarítimo da magnetização no ponto do ruído crítico em função do logarítimo do tamanho da rede para 1D. . . . .	32
6.8	Mostra o gráfico do logarítimo da magnetização no ponto do ruído crítico em função do tamanho de rede para 2D. . . . .	32
6.9	Mostra o gráfico do logarítimo da susceptibilidade no ponto do ruído crítico em função do logarítimo do tamanho de rede para 1D. . . . .	33

6.10	Mostra o gráfico do logarítimo da susceptibilidade no ponto do ruído crítico para 2D. . . . .	33
6.11	Mostra o gráfico do logarítimo da susceptibilidade máxima em função do logarítimo do tamanho de rede para 1D. . . . .	34
6.12	Mostra o logarítimo da susceptibilidade máxima em função do logarítimo para 2D. . . . .	34
6.13	Mostra o gráfico do colapso de dados do $U_4$ versus o ruído crítico para tamanhos de redes diferentes $N = 1000, 5000, 10000, 20000, 30000, 50000, 70000$ sítios em 1D. . . . .	35
6.14	Mostra o gráfico do colapso de dados do $U_4$ versus o ruído crítico para diferentes tamanhos de redes $L = 16, 32, 64, 128, 256, 512$ em 2D. . . . .	35
6.15	Mostra o gráfico do colapso de dados da susceptibilidade versus o ruído crítico para diferentes tamanhos de redes $N = 1000, 5000, 10000, 20000, 30000, 50000, 70000$ em 1D. . . . .	36
6.16	Mostra o gráfico do colapso de dados da susceptibilidade versus o ruído crítico para diferentes tamanhos de redes $L = 16, 32, 64, 128, 256, 512$ em 2D. . . . .	36
6.17	Mostra o gráfico do colapso de dados da magnetização versus o ruído crítico para diferentes tamanhos de redes $N = 1000, 5000, 10000, 20000, 30000, 50000, 70000$ em 1D. . . . .	37
6.18	Mostra o gráfico do colapso de dados da magnetização versus o ruído crítico para diferentes tamanhos de redes $L = 16, 32, 64, 128, 256, 512$ em 2D. . . . .	37

# Lista de Tabelas

6.1	Os expoentes críticos e $U_4$ para o modelo BCS em redes des Solomon para 1D e 2D. $1/\nu, \beta/\nu_c, \gamma/\nu_c$ e $\gamma/\nu_{max}$ são os expoentes críticos extraídos da magnetização, da susceptibilidade no ponto crítico e da susceptibilidade máxima, respectivamente. . . . .	38
-----	---	----

**PÁGINAS RESTRITAS  
1 E 2 (CAPÍTULO 1)**

# Capítulo 2

## Método de Monte Carlo

Em física estatística, o MMC é muito requisitado no que diz respeito na realização de vários trabalhos. Segundo relatos, o mesmo foi desenvolvido entre as décadas de 1940 e 1950. Neste período, se passava a Segunda Guerra Mundial, onde existia um projeto de construção da bomba atômica que ficou conhecido como projeto Manhattan. Nicholas Metropolis juntamente com Jon Von Neuman e Stanislaw Ulam, em 1947 introduziu-se pela primeira vez o Método de Monte Carlo como solução de uma parte do projeto de Manhattan.

Stanislaw Ulam, em homenagem ao seu tio, atribuiu esse nome de Método de Monte Carlo ao seu trabalho devido seu tio jogar constantemente nos cassinos da cidade de Monte Carlo em Mônaco. Onde o caráter aleatório das roletas tem uma relação com a aplicação do MMC e por tê-lo inspirado no desenvolvimento do mesmo. Partindo de uma descrição do sistema físico desejado em termos de um modelo hamiltoniano, utiliza-se (números pseudo-aleatórios) números aleatórios para construir as probabilidades com as quais os vários estados gerados do sistema devem ser ponderados[2].

Portanto, partindo do pressuposto de que qualquer que seja o sistema venha a se enquadrar nessas características esse sistema poderá ser estudado e resolvido pelo MMC. Logo, percebeu-se que o MMC poderia resolver uma gama enorme de problemas em várias campos da ciência. Nos dias de hoje, seu trabalho tem aplicação em diversas áreas do conhecimento, possibilitando o desenvolvimento de áreas como, por exemplo, física, matemática, biologia, química, economia, medicina etc[3].

## 2.1 Simulação de Monte Carlo

Na física, quando fala-se de simulação computacional a primeira coisa que vem em mente é com certeza uma das áreas que mais tira-se proveitos da simulação computacional, que é a mecânica estatística. E a mesma remete a um dos métodos de simulação mais utilizados em física computacional, a simulação de Monte Carlo. Tentando seguir uma "dependência do tempo" de um modelo para o qual a mudança, ou o crescimento, não ocorre de forma rigorosa pré-definida, mas claro que de maneira estocástica, que dependa apenas de uma seqüência aleatória de números gerados durante a simulação[4] .

Nas simulações de Monte Carlo, alguns parâmetros devem ser levados em consideração para conseguir ter êxito nos resultados. Mas primeiramente, deve-se identificar que parâmetros são esses. A dependência do tamanho da amostra é relevante, assim como, sua qualidade[5]. Obtem-se as amostras por meio de números aleatórios reais os quais são distribuídos maneira uniforme em um intervalo de  $[0,1]$ . As medidas das grandezas termodinâmica são obtidas utilizando as componentes dessas amostra. Onde as mesmas devem estar nos estados de um sistema termodinâmico. Uma simulação para ser realizada com sucesso, deve-se dedicar atenção à influência do tempo de simulação e também quanto a escolha da quantidade de passos a serem realizados.

### 2.1.1 Processo de Markov

Define-se Processos Estocásticos sendo um conjunto de variáveis aleatórias  $X(t)$  indexadas pelo um parâmetro  $t$  que pertence a um conjunto  $T$ . Vamos considerar aqui um processo estocástico tal que o tempo possa ser uma variável discreta e a variável estocástica também seja discretizada. Pode-se tomar  $T$  como um conjunto de números inteiros não-negativos, mas outros conjuntos podem ser utilizados perfeitamente. Geralmente, os Processos Estocásticos são usados pelos campos da ciência que têm interesse em descrever procedimentos de sistemas operando em uma dado período de tempo  $t$ .

Os Processos Estocásticos podem ser classificados quanto ao Estado. Estado Discreto ou Cadeia, onde  $X(t)$  pode ser definido pelo um conjunto enumerável ou finito. Estado Contínuo se opõe ao caso anterior. Também pode-se classificar os processos estocástico quanto ao Tempo ou Parâmetro. Por exemplo, Tempo Discreto  $t$  será finito e enumerável. E temos o caso do Tempo Contínuo que é o caso contrário do Tempo

Discreto. Hoje em dia, na literatura existem vários tipos de Processos Estocásticos, mas aqui, em Física Estatística, frequentemente usamos o Processo de Marcov.

Em resumo, diz-se que um Processo Estocástico é considerado um Processo Marcoviano se um estado futuro depende apenas do estado presente e não mais dos estados passados[2]. Existe uma outra forma de chamar esse tipo de processo conhecido como *memoryless process* (processo sem memória), sem memória simplesmente porque uma vez que o estado se tornou passado, então não nos interessa mais. Porque o estado futuro depende apenas do estado presente como dito anteriormente.

### 2.1.2 Hipótese Ergódica de Boltzmann

A Hipótese Ergódica foi construída por Boltzmann entre os anos de 1844 a 1906, motivada principalmente pela Física Teórica e a Mecânica Estatística. Entre as décadas de 1960 a 1990, Boltzmann realizou, muitas formas de sua Hipótese Ergódica até encontrar uma forma bem mais sofisticada para ela. Boltzmann em 1968, calculou a distribuição de probabilidade para pontos no espaço de fase de um corpo quente, onde hoje em dia, a chama-se de distribuição de probabilidade microcanônica[2].

Mesmo que o principal fator para resolver e obter essa distribuição de probabilidade não foi explicada ou mesmo se quer mencionada por Boltzmann, foi, mais tarde comentada e analisada por Maxwell, o mesmo afirmou que "a única pressuposição necessária para a prova direta da distribuição de probabilidade microcanônica de Boltzmann é que o sistema deixado no seu estado atual de movimento, cedo ou tarde, passará por todas as fases permitidas pela sua equação de energia".

A interpretação feita por Maxwell em torno do trabalho de Boltzmann é simplesmente um conceito da Hipótese Ergódica. Segundo a hipótese de ergodicidade de Boltzmann, um sistema em evolução livre por tempo suficientemente grande deverá passar por todos os estados compatíveis com as condições gerais para um determinado valor de energia[4]. Além do mais, o sistema pode ser descrito como uma condição característica de um grande sistema de partículas interagentes entre si em equilíbrio, cuja média temporal se aproxima da média do ensemble de partículas.

### 2.1.3 Balanço Detalhado

Consiste numa condição que garante que o processo de Markov seja realizado de maneira satisfatória levando o sistema atingir o equilíbrio e alcance a distribuição de probabilidade de Boltzmann. Considera-se que este encontra-se em equilíbrio, a condição crucial é que a taxa de variação do sistema evoluir para um estado  $\mu$  e sair deste deve ser igual. Pode-se expressar matematicamente como:

$$\sum_{\mu} p_{\mu} P(\mu \rightarrow \nu) = \sum_{\nu} p_{\nu} P(\nu \rightarrow \mu) \quad (2.1)$$

A equação acima pode ser reduzida para:

$$p_{\mu} = \sum_{\nu} p_{\nu} P(\nu \rightarrow \mu) \quad (2.2)$$

Portanto, a probabilidade de transição seja satisfeita é necessária que a equação (2.2) se encontre no equilíbrio da dinâmica do processo de Markov. Mas é importante ressaltar que, mesmo que a probabilidade de transição seja satisfeita a equação (2.2) não será o suficiente para garantir que a distribuição de probabilidade de um estado qualquer do sistema tenha para  $p_{\mu}$ . A seguir tem-se uma equação que satisfaz uma condição adicional

$$p_{\mu} P(\mu \rightarrow \nu) = p_{\nu} P(\nu \rightarrow \mu) \quad (2.3)$$

A equação acima é conhecida como a *condição de balanço detalhado*, que por sua vez satisfaz a equação (2.1), informando que na situação de equilíbrio, o número de transição de  $\mu$  para  $\nu$  ou para direção contrária  $\nu$  para  $\mu$ .

A distribuição no equilíbrio satisfaz a distribuição de Boltzmann, na situação em deve-se escolher  $p_{\mu}$  como sendo a probabilidade de transição, devendo a mesma obedecer a equação abaixo:

$$\frac{P(\mu \rightarrow \nu)}{P(\nu \rightarrow \mu)} = \frac{p_{\nu}}{p_{\mu}} = e^{-\beta(E_{\nu} - E_{\mu})} \quad (2.4)$$

Portanto, a distribuição no equilíbrio se comporta de maneira análoga e a distribuição de Boltzmann.

## 2.2 Algoritmo

Um algoritmo é uma maneira de como se descreve uma sequência finita de passos (instruções) para resolver um determinado problema. Ao desenvolver-se um algoritmo estar-se determinando um padrão de comportamento que deve ser seguido (como uma regra de execução de ações) para alcançar resultado de um problema[5].

Ao desenvolver-se um algoritmo de tal modo que ele seja eficiente é necessário que estabeleçamos algumas premissas básica no momento se sua construção que se resume basicamente em: definir ações simples e sem ambiguidade, organizar as ações de forma ordenada e estabelecer as ações dentro de uma sequência finita de passos.

Um algoritmo programado no computador ele deve ser constituído de pelo menos três partes básicas: entrada de dados, processamento de dados, saída de dados. A seguir comenta-se sobre um algoritmo que é muito conhecido na Física Estatística que é o Algoritmo de Metropolis.

### 2.2.1 Algoritmo de Metropolis

Nicolas Metroplis em 1953 mostrou seu algoritmo, juntamente com outros colaboradores em seu artigo relacionado às simulações de "*gases do caroço duro*". Objetvando principalmente determinar os valores esperados de propriedades do sistema simulado, por meio de uma média sobre uma amostra que obedeça a distribuição de Boltzmann.

Assim, ao determinar-se uma probabilidade de transição de fase de uma determinada configuração é preciso que se saiba a chance de ocorrência de todas as outras configurações. Portanto, vamos considerar duas configurações do tipo  $\mu$  e  $\nu$  quaisquer, sendo que suas probabilidades de transição são dadas por

$$P(\mu \rightarrow \nu) = e^{-\beta(E_\nu - E_\mu)} \text{ se } E_\nu - E_\mu > 0 \quad (2.5)$$

$$1 \text{ se } E_\nu = E_\mu \quad (2.6)$$

onde  $E_\nu$  e  $E_\mu$  representam as energias da antiga e da nova configuração. Se  $P(\mu \rightarrow \nu)$  é uma grandeza diferente zero para qualquer estado  $\mu$  e  $\nu$ , assim, a condição de ergodicidade é obedecida. Numa variação de energia  $\Delta E = E_\nu - E_\mu$  a nova configuração tem nível de energia mais alta e por isso segue a regra da distribuição de Boltzmann para  $\Delta E$ .

Para construir o algoritmo de metropolis deve-se usar o Método de Monte Carlo, seguindo as seguintes regras:

- 1 Escolher uma configuração inicial aleatória para os spins;
- 2 Selecionar aleatoriamente um sítio da rede;
- 3 Computar a variação de energia  $\Delta E = E_\nu - E_\mu$  resultante da mudança do valor de spin
- 4 Se  $\Delta E < 0$  a configuração será aceita, mas caso contrário ( $\Delta E > 0$ ) a configuração deste estado é menos provável, segue-se para o próximo passo;
- 5 Calcular a probabilidade transição  $z$ , onde  $z = e^{-\beta\Delta E}$ ;
- 6 Gerar um número aleatório  $r$  escolhido entre 0 e 1;
- 7 Mudar o sinal se  $r < z$ , caso contrário permanece do jeito que está;
- 8 Guardar a configuração gerada, e escolher um novo sítio e repetir o item 2.

Assim, as grandezas físicas (cumulante de Binder, magnetização, susceptibilidade etc.), fazendo uma média aritmética de todas poderão ser calculadas, logo após, todas as etapas serem realizadas tendo um número grande de spins. A condição de ergodicidade será garantida, juntamente com o balanço detalhado, desde que o tempo de simulação seja suficientemente grande, para que a simulação varre toda a rede.

Em Física Estatística, chama-se esse tempo de passo de Monte Carlo (MC), que realiza uma varredura em todos os sítios da rede. A condição de ergodicidade será violada se ao invés de usarmos um MC muito grande, usa-se um número pequeno, pois, assim, a média aritmética não será possível de ser calculada, porque irá surgir uma flutuação muito grande nas médias, conduzindo um erro nas grandezas físicas de nosso interesse (magnetização, susceptibilidade, cumulante de Binder, temperatura crítica, expoentes críticos).

### 2.2.2 Banho Térmico

Proposto por S. German e D. German em 1984. O algoritmo Banho Térmico tem como principal característica determinar uma probabilidade de orientação do spin à

medida que a orientação dos spins vizinhos seja realizada, independentemente do estado atual. Em termos de simulação o Banho Térmico, escolhe um determinado sítio. desta forma, calcula-se a probabilidade deste sítio poder transitar de um estado para outro será dada por:

$$P(\sigma_{i\mu} \rightarrow \sigma_{i\nu}) = \frac{e^{-\beta E\sigma_{i\mu}}}{\sum_{\sigma_i} e^{-\beta E\sigma_{i\nu}}} \quad (2.7)$$

sendo  $\sigma_i$  é o estado do sítio  $i$ ,  $E = \sum_j \sigma_j - H$ , onde  $H$  é conhecido como um campo externo, e  $E$  é a energia total da soma resultante da contribuição de todos os primeiros sítios  $i$  vizinhos. E para que este algoritmo satisfaça o balanço detalhado é preciso que

$$\frac{e^{-\beta E\sigma_{i\mu}}}{\sum_{\sigma_i} e^{-\beta E\sigma_{i\nu}}} e^{-\beta E\sigma_{i\mu}} = \frac{e^{-\beta E\sigma_{i\nu}}}{\sum_{\sigma_i} e^{-\beta E\sigma_{i\nu}}} e^{-\beta E\sigma_{i\mu}} \quad (2.8)$$

Assim, a condição de ergodicidade será satisfeita, de tal maneira, que seja possível atingir qualquer configuração de spins alternando individualmente os spins.

### 2.2.3 Equação Mestre

Ela é responsável por promover a evolução temporal dos processos markovianos. Ela representa a probabilidade  $P(\alpha, t)$  de encontrar um sistema no estado  $\alpha$ , num instante de tempo  $t$  deve satisfazer a seguinte condição

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\alpha, t) = T' - T'' \quad (2.9)$$

Onde a taxa de variação da probabilidade  $T''$  estado  $\alpha$  é dada por

$$T' = \sum_{\alpha'} P(\alpha', t) w(\alpha' \rightarrow \alpha) \quad (2.10)$$

Onde o termo  $w(\alpha')$  representa a probabilidade para que o sistema mude do estado  $\alpha'$  para o estado  $\alpha$ , desde que a taxa de variação da probabilidade  $T''$  do estado  $\alpha$  deve estar de acordo com a condição abaixo

$$T'' = P(\alpha, t) \sum_{\alpha''} w(\alpha \rightarrow \alpha'') \quad (2.11)$$

Assim, escreve-se a equação mestra na forma como se apresenta abaixo

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\alpha, t) = \sum_{\alpha'} P(\alpha', t) w(\alpha' \rightarrow \alpha) - P(\alpha, t) w(\alpha \rightarrow \alpha') \quad (2.12)$$

na qual encontra-se ou obtém-se as probabilidades de transição  $w(\alpha \rightarrow \alpha')$ .

# Capítulo 3

## Transição de Fase e Fenômenos Críticos

### 3.1 Transição de Fase e Criticalidade

Há mais de dez décadas os fenômenos críticos são estudados. Por sua vez, esses fenômenos são assim denominados, por ocorrerem próximos a um ponto crítico, que podem ser vistos como um ponto do diagrama de fase de um sistema onde a transição de fase é de segunda ordem[6]. Nas proximidades do ponto crítico, vários sistemas podem se comportarem de maneira semelhante, que devem obedecer certas funções, mais conhecidas como leis de potência.

Onde seus expoentes críticos não são inteiros, que são justamente os expoentes críticos. Ao longo dos anos muitas teorias foram propostas. Porém, Landau (1937) elaborou uma teoria elegante para transições de fase de segunda ordem. Esta teoria proposta por Landau, foca principalmente na expansão da energia livre do sistema de que estar sendo tratado no momento. Em função do seu parâmetro de ordem[4]. O parâmetro de ordem é uma quantidade, assim definido, sendo zero em torno do ponto crítico em uma determinada fase do sistema.

Isto é, quando o parâmetro de ordem atinge o valor nulo no ponto crítico, o sistema entra na fase desordenada com valores acima da temperatura crítica. Por exemplo, em um sistema magnético quando este atinge o valor nulo da magnetização o mesmo entra na fase desordenada, porque os spins desse sistema se encontram todos em direção aleatória[7]. Pois já sabe-se que a magnetização de um sistema está atrelada ao alinha-

mento dos spins, neste caso do exemplo os spins então todos desalinhados, como dito anteriormente. Mas, quando o parâmetro de ordem for diferente de zero ver-se-á que ele terá qualquer valor abaixo da temperatura crítica.

Então, para qualquer valor abaixo da temperatura crítica o sistema se encontra na fase ordenada. Ou seja, retornando ao exemplo anterior, o parâmetro de ordem desse sistema magnético é diferente de zero, os spins então alinhados em uma dada direção juntamente com o campo magnético. Qualquer fenômeno que ocorrer nas proximidades de um ponto crítico são chamados de fenômenos críticos[8]. De maneira geral, este ponto é o terminus de uma curva finita que separa duas fases distintas de um sistema, por exemplo, a curva de vaporização da água que separa o estado líquido do estado gasoso.

Em torno deste ponto crítico, observa-se que é possível a matéria passar de um estado para outro (de vapor para líquido, por exemplo) sem ocorrer uma mudança abrupta entre os estados. Este comportamento é muito comum na natureza e pode ser descrito por um parâmetro de ordem que é característico de cada substância estudada[9]. Outro ponto em questão a ser considerado é que, embora diferentes sistemas apresentem diferentes fenômenos de transições de fase, na região adjacente ao ponto crítico todos apresentarão o mesmo comportamento.

Isto deve-se ao fato de que os expoentes críticos serão os mesmos, independentemente do tipo de sistema em questão, é o que chama-se dentro da Física Estatística de *Classe de Universalidade*. Depois que ficar claro o entendimento sobre o que é o parâmetro de ordem se tornará mais fácil identificar os tipos de transições de fase observando apenas seu comportamento no sistema no qual ele faz parte.

Então, se o parâmetro de ordem mudar de forma contínua entre uma fase e outra, diz-se que nesse sistema ocorreu uma transição de fase de segunda ordem. Mas se o parâmetro de ordem do sistema mudar de maneira abrupta, diz-se que ocorreu uma transição de fase de primeira ordem. É importante ressaltar que as transições de fase as quais estar-se referindo não são aquelas definidas por *Ehrenfest*, que relaciona a ordem das transições de fase com a ordem das derivadas dos potenciais termodinâmicos adequados.

Portanto, se a primeira derivada do potencial termodinâmico for descontínua, a transição será de primeira ordem, porém se a segunda derivada apresentar uma descontinuidade, sendo que a primeira derivada tenha um comportamento contínuo, diz-se, então, que a transição é de segunda ordem e assim por diante[10].

Segundo a teoria de *Landau* para transições de fase de segunda ordem tem como principal característica a expansão da energia de um determinado sistema (pode-se entender essa energia como sendo a energia que este sistema possui e é possível de transformá-la em trabalho) em potências do parâmetro de ordem  $\eta$  que será específico de cada sistema.

Logo, dessa forma, pode-se observar que o comportamento contínuo da mudança de estado na transição de fase de segunda é expressada matematicamente pelo simples fato de  $\eta$  ter valores muito pequenos perto do ponto crítico. Portanto, olhando-se apenas para a vizinhança desse ponto, pode-se expandir a energia livre de Gibbs em potência de  $\eta$ .

$$G = G_0 + \alpha\eta + a\eta^2 + c\eta^3 + b\eta^4 + \dots \quad (3.1)$$

Observe que a expansão foi feita até a quarta ordem em termos de  $\eta$  devido ao baixo valor e seus coeficientes  $\alpha, a, c, b$ , são funções da pressão ( $P$ ) e da temperatura ( $T$ ). Obter-se-á  $\eta$  minimizando a energia livre de Gibbs:

$$\frac{\partial G}{\partial \eta} = \alpha + 2a\eta + 3c\eta^2 + 4b\eta^3 = 0 \quad (3.2)$$

$$\alpha + \eta(2a + 3c\eta + 4b\eta^2) = 0 \quad (3.3)$$

Assim a equação (3.3) apresenta as possíveis soluções  $\alpha = 0$  e  $\eta = 0$ ,  $\alpha = 0$  e  $\eta \neq 0$ . Observe que o valor de  $\alpha$  é sempre nulo independentemente de qual seja o valor de  $\eta$ . Para satisfazer-se a condição de mínimo, a segunda derivada da energia livre deve ser positiva, assim tem-se que:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} = 2a + 6c\eta + 12b\eta^2 \quad (3.4)$$

Para  $\eta = 0$ , que está associado  $T > T_C$ , correspondente à definição de parâmetro de ordem, conclui-se que a equação (3.4) só será satisfeita se  $a$  for positivo. Para  $\eta \neq 0$ , que corresponde ao caso  $T < T_C$ , pode-se verificar-se a derivada segunda de  $G$  excluindo a constante  $b$  na equação (3.3). Encontra-se, portanto, uma expressão para  $\eta$  dada pela equação abaixo:

$$\eta = -\frac{2a}{3c} \quad (3.5)$$

Agora, substituindo a equação (3.5) na (3.4) sem incluir a constante  $b$  tem-se:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} = -2a \quad (3.6)$$

conclui-se, então, para que a equação (3.6) seja positiva a constante  $a$  deve ser negativa. Então, se  $a$  é positivo acima de  $T_C$  e negativa abaixo dessa mesma temperatura chegou-se à conclusão que no ponto crítico, ou seja, em  $T_C$ , a constante  $a$  é nula.

Landau, nessa teoria assumiu que a função  $a(P, T)$  não apresenta singularidade no ponto crítico, então, Landau propôs na sua teoria a seguinte expressão:

$$a = a_o(T - T_C) \quad (3.7)$$

Onde

$$a > 0 \text{ para } T > T_C \quad (3.8)$$

$$a = 0 \text{ para } T = T_C \quad (3.9)$$

$$a < 0 \text{ para } T < T_C \quad (3.10)$$

Agora, reescrevendo a equação (3.1) e a sua segunda derivada equação (3.2), com  $\alpha = 0$  e aplicando-as no ponto crítico tem-se:

$$G_C = G_O + c_C \eta^3 + b_C \eta^4 \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial^2 G_C}{\partial \eta^2} = 6c_C \eta + 12b_C \eta^2 \quad (3.12)$$

A partir da equação (3.12) obtém-se que se  $c_C = 0$  e  $b_C > 0$ , assim, se  $b_C > 0$  no ponto crítico, ele será positivo para todo ponto nas proximidades dessa região. Assim, restar-se-á duas soluções para  $c$ . Se  $c = 0$ , encontrar-se-á uma linha de pontos no plano  $PT$ . Mas, se  $c \neq 0$  verificar-se-á que a transição de segunda ordem só poderá ocorrer em pontos isolados, como em uma transição líquido-gás. Escolhe-se o caso para  $c = 0$  porque este é o caso mais interessante, porque o mesmo é válido para os supercondutores também. Assim, pode-se reescrever a equação (3.1) da seguinte forma:

$$G = G_O + a_o(T - T_C)\eta^3 + b\eta^4. \quad (3.13)$$

### 3.1.1 Modelo de Ising

Já sabe-se que certos materiais magnéticos como o ferro possui uma magnetização dita permanente e que é eliminada a partir do momento em que o material é aquecido a temperaturas maiores do que a temperatura de Curie[11]. Neste caso pode-se dizer que, a baixas temperaturas, o sistema está numa fase termodinâmica ordenada e, a altas temperaturas, numa fase desordenada.

Descrever-se-á tal fenômeno de uma maneira mais simples através do modelo de Ising[12]. Aqui considera-se um reticulado e supõe-se que em cada ponto do reticulado há um átomo magnético. Sabendo que o estado de um átomo magnético é caracterizado pela direção do momento dipolo magnético. Portanto, o momento de dipolo  $\mu_i$  do  $i$ -ésimo átomo é representado por

$$\mu_i = \gamma\sigma_i, \quad (3.14)$$

o momento de dipolo magnético se encontra na direção do eixo  $z$  ou em direção oposta a  $z$ .

Onde  $\gamma$  é uma constante e a variável  $\sigma_i$  toma valores  $+1$  na situação que o momento de dipolo aponte na direção  $z$  e  $-1$  no sentido contrário. Assim, o sistema apresenta uma configuração que fica totalmente especificado pelas variáveis  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_N$ , pois  $N$  é o número total de átomos magnéticos. Se em cada uma das variáveis assumirem dois valores, logo o máximo de configurações é um total de  $2^N$ . Agora, considera-se apenas dois átomos vizinhos  $i$  e  $j$ [13].

Lembrando que os mesmos podem estar em quatro estados: sendo que dois deles os dipolos estão paralelos em relação um ao outro e nos dois estados restantes eles se encontram antiparalelos entre si. A situação de menor energia será aquela na qual os dipolos estejam paralelos um em relação ao outro, desta forma contribuindo para o ordenamento ferromagnético[14].

Portanto, a contribuição energética dos dois átomos será dada por  $-J\sigma_i\sigma_j$  onde  $J > 0$  é uma constante que pode representar a interação entre os dipolos magnéticos. Então, a energia total do sistema  $E(\sigma)$  que corresponde à configuração  $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_N$  é representada por[15]

$$E(\sigma) = -J \sum_{ij} \sigma_i \sigma_j, \quad (3.15)$$

onde a somatória na equação acima representa a soma que se estende sobre todos os pares de átomos vizinhos. Na situação em que o sistema se encontre sujeito a um campo magnético externo na direção  $z$ , então a energia total do sistema receberá um termo adicional devido ao campo magnético externo, pois os dipolos irão interagir com o campo, ou seja,

$$E(\sigma) = -J \sum_{(ij)} \sigma_i \sigma_j - H \sum_i \sigma_i, \quad (3.16)$$

onde  $H$  é uma constante proporcional ao campo.

No equilíbrio termodinâmico a uma determinada temperatura  $T$ , a probabilidade  $P(\sigma)$  de encontrar o sistema na configuração  $\sigma$  é dada por

$$P(\sigma) = \frac{1}{Z} \exp\{-\beta E(\sigma)\}, \quad (3.17)$$

onde  $\beta = 1/(\kappa_B T)$ , sendo que  $\kappa_B$  e  $Z$  representa a constante de Boltzmann e a função de partição, respectivamente dada por

$$Z = \sum_{\sigma} \exp\{-\beta E(\sigma)\}, \quad (3.18)$$

onde a soma se estende sobre todas as  $2^N$  configurações.

### 3.1.2 Expoentes Críticos

Os estudos feitos nas vizinhanças da criticalidade mostram que os expoentes críticos apresentam valores universais, consideravelmente bem definidos, mas que obviamente não convergem com as "teorias clássicas", apoiadas pela fenomenologia de Landau[16]. Hoje em dia, sabe-se que os expoentes críticos são determinados por pouquíssimos fatores:

- 1 A dimensionalidade dos sistemas físicos; é possível, hoje em dia, obter experimentalmente sistemas praticamente bidimensionais, que se caracterizam por um número de expoentes bem definidos;
- 2 A dimensionalidade do parâmetro de ordem; em si tratando de fluidos simples ou ferromagnetos uniaxiais, o parâmetro de ordem é um escalar; para o ferromagneto isotrópico, o parâmetro de ordem é um vetor tridimensional;

**3** O alcance das interações microscópicas; nos sistemas do ponto de vista da física as interações microscópicas são, em geral, de curto alcance.

É importante observar que sistemas de natureza distintas entre si, mostram valores para os expoentes críticos que são semelhantes e compatíveis. Essa igualdade entre os expoentes de sistemas distintos é uma demonstração do *princípio da universalidade do comportamento crítico*[17]. Os expoentes críticos relacionados com as diversas grandezas são definidos como segue.

- Expoente  $\alpha$ , estar relacionado com o calor específico

$$c \sim |\varepsilon|^{-\alpha} \quad (3.19)$$

onde  $\varepsilon = T - T_c$ .

- Expoente  $\beta$ , associa-se ao parâmetro de ordem

$$m \sim |\varepsilon|^{-\beta}, \quad (3.20)$$

- Expoente  $\gamma$ , relativo à susceptibilidade

$$\chi \sim |\varepsilon|^{-\gamma}, \quad (3.21)$$

- Expoente  $\delta$ , dado pela relação abaixo

$$m \sim |H|^{1/\delta}, \quad (3.22)$$

calculado ao longo da isotérma crítica entre a magnetização e o campo magnético.

- O expoente  $\nu$ , que está relacionado ao comportamento do comprimento de correlação

$$\xi \sim |\varepsilon|^{-\nu}, \quad (3.23)$$

- $\eta$ , é o expoente que está associado à função de correlação de pares, calculada no ponto crítico,

$$\rho(r) \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}}, \quad (3.24)$$

- Expoente  $z$ , este mostra a relação entre o tempo de relachação e o comprimento de correlação

$$\tau \sim \xi^z \quad (3.25)$$

e por último tem-se

- O expoente  $\zeta$ , relaciona-se ao decaimento temporal da magnetização no ponto crítico

$$m \sim t^{-\zeta}. \quad (3.26)$$

Os expoentes críticos mostrados acima não são todos independentes, mas estão relacionados entre si por diversas maneiras[18]. Uma delas é

$$2\beta + \gamma = d\nu. \quad (3.27)$$

Esta relação só é válida para dimensões abaixo de uma dimensão crítico  $d_c$ . Então, para  $d \geq d_c$  a relação se torna  $2\beta + \gamma = d_c\nu$  e os expoentes clássicos passam a se tornarem válidos[19]. Mas neste trabalho usar-se-á apenas os os expoentes críticos da equação 3.27.

# Capítulo 4

## Redes

### 4.1 Redes Complexas

Grafos, são redes compostas por um conjunto de vértice (ou nós) e por um conjunto de arestas (ou arcos) que conectam esses vértices. As arestas estabelecem algum tipo de relação existente entre dois vértices, dependendo do problema modelado. Porém, os grafos podem ser direcionados ou não[20]. No grafo direcionado (dígrafo), cada uma das aresta tem um sentido (direção) que conecta o vértice origem ao vértice destino

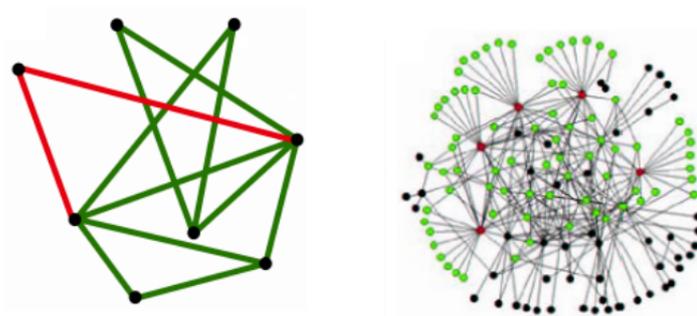


Figura 4.1: Redes complexas

Existem vários exemplos de grafos, mas os conhecidos são aqueles que são usados para representar chamadas telefônicas e mensagens de e-mails. Nesses como já sabe-se as mensagens são transmitidas de uma pessoa para outra. Além do mais, os dígrafos podem ser ciclos ou acíclos[21]. Ciclos quando existe um caminho para ele mesmo e acíclos quando não existe esse caminho.

Uma coisa importante que deve ser considerada aqui é que nem todo grafo pode ser considerado uma rede complexa, porque o que vai definir se um grafo é uma rede

complexa são suas propriedades topográficas as quais não estão presentes em grafos simples. Uma rede complexa pode apresentar as seguintes propriedades: coeficiente de aglomeração, distribuição de graus, resistência, mistura de padrões e correlação de graus.

## 4.2 Tipos de Redes

Aqui nessa seção serão descritas de maneira muito breve as três principais modelos de redes complexas: redes aleatórias, redes pequeno-mundo e por último irei falar da rede de solomon a qual fizemos nossas simulações.

As *Redes Aleatórias* esse modelo foi proposto por Erdős e Rény, é um tipo de modelo que uma rede complexa pode assumir. Nessa rede, suas arestas não direcionadas são colocadas aleatoriamente entre um número fixo de  $N$  vértices[22]. Cada uma de suas arestas pode ser representada de maneira independentemente com base em alguma probabilidade  $p$ . O número de arestas que conectam cada vértice é denominado grau do vértice, seguindo a distribuição de probabilidades de *Poisson* com limite máximo  $N$ . A seguir a figura abaixo é um exemplo de rede aleatória.

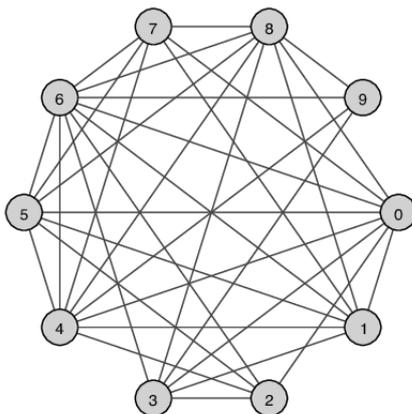


Figura 4.2: Rede Erdős Rény

Portanto, o modelo produz grafos aleatórios com  $N$  vértices e  $k$  arestas. No início com  $N$  vértices desconectado, o modelo ER será obtido ao conectar-se os vértices aleatoriamente até o número de arestas. Portanto, acredita-se que no desenvolvimento do processo de construção de uma rede aleatória deve-se ao caráter puramente probabilístico, pois os vértices também se agregam de maneira aleatória[23].

*Rede Pequeno-Mundo* todos os tipos de redes apresentam um certo padrão que é muito concentrado, conseqüentemente, levando a formar algumas pequenas quantidades

de conexões em cada vértice. Um modelo proposto muito semelhante ao de Erdős e Reny, onde boa parte das conexões são estabelecidas entre os vértices mais próximos, comportando-se como um pequeno mundo[24].

Aqui neste modelo, a distância média entre quaisquer pares de vértices de uma rede muito grande não ultrapassa um número pequeno de vértice. Observa-se os efeitos dessa rede devido ao fato de que a maioria dos vértice conectam-se a outros vértices por meio de um caminho mínimo[25]. O caminho mínimo, ou também podemos chamá-lo de caminho geodésico ou ainda distância geodésica, é o caminho formado pelo menor número de arestas que conectam ao vértice de origem ao vértice de destino.

Para exemplificar melhor esse efeito, considerar-se-á os indivíduos de uma sociedade qualquer porque de acordo com o experimento de Stanley Milgram realizado em 1960, se uma carta fosse entregue a um indivíduo, desde que ele não fosse o destinatário, e ele repassasse a um outro e, assim, por diante[26].

Segundo o experimento de Milgram, em seis passagens apenas, a carta chegaria ao destinatário. Então, esse é pequeno exemplo da demonstração do efeito do pequeno-mundo, diz que o caminho percorrido pela carta até chegar ao destinatário, é o caminho mínimo, isto é, estar-se diante de um problema de minimização. A figura abaixo mostra uma rede de pequeno-mundo.

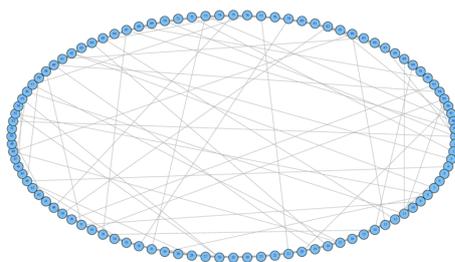


Figura 4.3: Rede de pequeno-mundo

Portanto, o efeito pequeno-mundo leva à conclusões óbvias no que diz respeito na dinâmica de processos em redes. Assim, por exemplo, um boato pode se espalhar muito mais rápido se, ao invés de mil passos, levarem somente seis passos para chegar de um indivíduo a outro.

*Rede de Solomon* essa composta por duas redes quadradas que ficam uma sobreposta na outra, foi criada por Sorin Solomon inspirado pela história bíblica do Rei Salomão. Nestas redes os indivíduo interagem com os quatro vizinhos mais próximos da

rede que pertence, mas por sua vez, os indivíduos de uma rede poderão interagir com os outros da rede adjacente. Essas redes têm um tipo de interação bem parecida com as interações dos modelos do tipo Ising, Voto da Maioria e o modelo Sznajd[27].

Ao adicionar as interações a cada indivíduo da rede a qual ele pertence, ocorrerá uma interação semelhante com o outro indivíduo da outra rede ao mesmo tempo, de tal maneira que como se fosse uma imagem gerada pelo indivíduo da primeira rede. Portanto, como numa rede quadrada cada indivíduo interage com os primeiros vizinhos mais próximos[28]. Suas variáveis no sítio  $i$  vão interagir com as variáveis do sítio  $j$  dos quatro primeiros vizinhos mais próximos, assim como que os quatro primeiros vizinhos do sítio  $P(i)$  da outra rede quadrada. Considerando que  $P$  seria a permutação dos números  $i = 1, 2, \dots, L^2$ .

Além desse modelo, existem outros modelos que são bem conhecidos nesse linha de pesquisa e muito usados para o estudo do comportamento de pessoas, como por exemplo, o modelo de Ising e o modelo Voto da Maioria são muito utilizados para simular o comportamento de pessoas. Nestes modelos as interações também ocorrem aos pares com os quatro primeiros membros da vizinhança, sendo cada pessoa tem o poder de influenciar seus vizinhos, ou o contrário, isto é, os vizinhos também podem influenciar o outro.

Então, a vizinhança de uma casa difere da vizinhança do local de trabalho, desde que todos trabalhem em suas casas. A vizinhança de uma casa e a vizinhança do local de trabalho pode ser aproximada para duas redes quadradas com  $N$  cada[29]. A rede de Solomon se assemelha ao um bairro residencial e ao local de trabalho, onde cada residência e cada indivíduo no local de trabalho estão localizados nos sítios de uma rede quadrada, ou seja, uma das redes quadradas representa o bairro residencial e a outra representa o local de trabalho, cada uma com  $N$  sítios.

No local de trabalho, as pessoas poderão ser enumeradas de tal forma que  $i = 1$  a  $i = L^2$ , levando em conta aqui que devemos considerar as condições de contorno toroidais. De acordo com as regras do modelo da rede uma mesma pessoa pode estar na casa interagindo com a vizinhança ou com uma pessoa que está no seu trabalho, mas com diferentes ordens de probabilidades  $P(i)$ , a qual podemos considerar uma permutação aleatória.

Assim diz-se que cada pessoa tem exatamente um lugar na casa, e cada um dos

seus sítios estão na casa ocupado por exatamente uma pessoa, da mesma forma para o local de trabalho. Estas mesmas pessoas podem ocupar dois sítios  $i$  totalmente diferentes e com probabilidade  $P(i)$  nas duas redes quadradas de *dimensão linear*  $L$  com  $N = 2L \times L$  ao todo.

A rede de Solomon é muito semelhante à rede de Pequeno-Mundo. Isto é, a rede de Solomon são duas redes quadradas sobrepostas uma na outra. Como dito anteriormente, cada sítio da rede quadrada interage com os quatro sítios vizinhos, mas esse padrão não se repete com os sítios que ficam na borda da rede, assim ao invés de quatro sítios interagindo com sítio central apenas três sítios irão interagir com o sítio central. A figura abaixo representa uma rede quadrada.

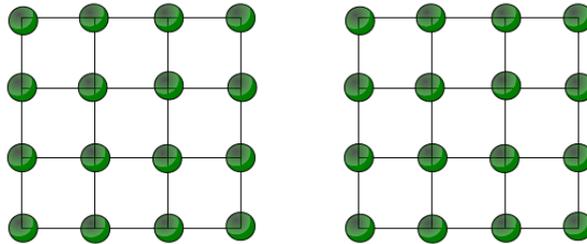


Figura 4.4: Redes de quadrada

Para resolver o problema das bordas da rede deve-se usar as condições de contorno toroidais que consiste em unir todas as bordas da rede quadrada de tal modo a torna-se um toroide ou rede de pequeno-mundo. Como mostra a figura abaixo.

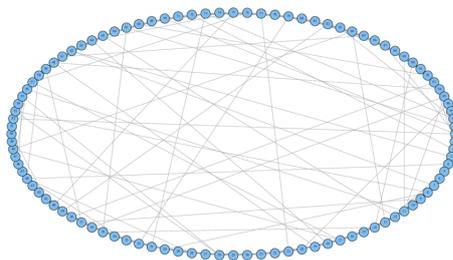


Figura 4.5: Rede de pequeno-mundo

## Capítulo 5

# Comportamento Crítico do Modelo BCS em Redes de Solomon

Aqui neste capítulo será detalhado o modelo utilizado para a realização do estudo de sistemas apresentam comportamentos entorno da criticalidade. Este modelo está voltado para o estudo do comportamento crítico do modelo BCS em redes de Solomon. O modelo apresenta a sigla BCS (Biswas, Chatterjee e Sen) porque é uma homenagem aos próprios autores.

Nele pode considerar que todos os indivíduos de uma "população" estejam todos interligados e inseridos em uma rede quadrada de tamanho  $L$ . Para ficar mais fácil de entender a dinâmica do nosso modelo, imagine que os indivíduos desta "população" estejam participando, por exemplo, de um debate e que cada pessoa que forma esta "população" tenta influenciar seu vizinho mais próximo aderir a mesma opinião[30].

Aqui pode-se adotar que cada pessoa  $i$  inserida nesta sociedade tem uma opinião  $o_i$  formada. A maioria dos modelos de dinâmica de opinião tratam desse problema com espaço de estado discreto e que geralmente, são muito usados para solucionar problemas binários ou problemas com muitas opções particulares[31].

Mas para estudar as opiniões extremas dessa população de uma maneira mais confiável, seria mais adequado representar suas opiniões por meio de uma variável contínua para que de tal maneira que fossem observadas as pequenas variações das opiniões as deixando mais explicitas[32]. Sendo assim, agora considere um espaço de estado contínuo, sendo que as opiniões podem assumir valores dentro de um determinado intervalo real  $[-1, 1]$ .

Assim, os valores positivos (negativos) mostram que a intenção dos indivíduos que compoem aquela sociedade fictícia são favoráveis (desfavoráveis) ao assunto em discussão. Os componentes da sociedade fictícia que apresentam suas opiniões extremistas, terão suas opiniões tendendo para 1 e  $-1$ . E os valores próximos a 0 (zero) mostram as opiniões neutra ou indecisas dos componentes do grupo[33].

Em um dado passo de tempo  $t$ , teremos a seguinte regra que controla a dinâmica de opinião:

- i** Primeiro devemos escolher aleatoriamente dois indivíduos  $i$  e  $j$
- ii** Neste caso o indivíduo tem uma probabilidade  $q$ , tornando-se independente do indivíduo  $i$ . Assim, o mesmo adota uma posição a partir da escolha em torno do assunto em discussão, isto é, a opinião após a escolha  $o_i(t + 1)$  é selecionada aleatoriamente a partir de uma distribuição uniforme, independentemente dos estados atuais  $o_i(t)$  e  $o_j(t)$ . Também repare que a independência não é um atributo do indivíduo, mas uma atitude que, independentemente do indivíduo poderá aleatoriamente adquirir com uma certa probabilidade.
- iii** Por outro lado, o agente  $i$  comporta-se como indivíduo parcialmente conformista, com uma probabilidade  $1 - q$ , e será influenciado pelo agente  $j$  por meio de uma troca cinética.

Desta forma a opinião do agente  $i$  será atualizada conforme a regra abaixo.

$$o_i(t + 1) = o_i(t) + \mu_{ij}o_j(t), \quad (5.1)$$

onde  $\mu_{ij}$  são parâmetros reais que medem o nível de convicção e o poder persuasão do agente  $i$  e  $j$ , respectivamente. Lembrando que as opiniões dos membros desta sociedade fictícia estão restritas no intervalo  $[-1, 1]$ . Desta forma, toda vez que a equação (5.1) indicar  $o_i > 1$  ( $o_i < -1$ ), significa que os integrantes da "população" aderiram opiniões a favor e contra, respectivamente[34].

Geralmente,  $\mu_{ij}$ , é interpretada como uma força de interação ou poder de persuasão que um indivíduo pode adquirir um sobre o outro, é positivo, onde o mesmo mede a concordância entre as opiniões[35]. Mas, a força de interação pode apresentar valores negativos também, estes por sua vez representam o elo que induz a divergência[36]. No

intervalo  $[-1, 0]$  ( $[0, 1]$ ) observa-se apenas a fração das influências negativas que são representadas pelo parâmetro  $p$ , tal que  $\mu_{ij}$  será distribuído de maneira uniforme, com as probabilidades  $p$  e  $(1 - p)$ , respectivamente.

Como este modelo é análogo aos modelos ferromagnéticos, a média das opiniões de todos que estão inseridos no grupo social é dada pelo parâmetro de ordem a seguir

$$O = \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N o_i \right|. \quad (5.2)$$

Para valores do parâmetro de ordem obtidos diferente de zero ( $O \neq 0$ ), isso leva a uma quebra de simetria na distribuição das opiniões. Assim, a população é dividida em dois grupos os que tem opiniões extremas e os que apresentam opiniões moderadas. No caso em que o parâmetro de ordem mostra valores nulos ( $O = 0$ ), isso mostra que todos os membros do grupo social ao qual eles pertencem apresentam a mesma opinião  $o = 0$  world. E por último, quando o parâmetro de ordem atingir valores muito pequenos próximos de zero ( $O \simeq 0$ ) as opiniões adquirem outra simetria na distribuição das mesmas, indicando que houve perdedores, mas pode-se dizer que houve um empate.

Neste modelo é observado uma transição de fase de segunda ordem saindo de uma fase ordenada para uma fase desordenada: a fase ordenada que corresponde à quebra de simetria da fase e a fase desordenada que está relacionada à fase simétrica do sistema. Na fase ordenada mostra que mesmo na presença de uma opinião liderante as opiniões contrárias ainda existem. Na fase desordenada em que todas as opiniões existem simultaneamente é observado que não tem preferência para qualquer que seja a opinião se a favor ou contra (Ver Re.6).

Foram calculadas as  $\langle O^2 \rangle$  e  $\langle O \rangle^2$ , sendo que  $\langle \dots \rangle$  representa a média sobre todas as ligações aleatórias e as configurações iniciais. As flutuações do parâmetro de ordem  $V$  são calculadas usando uma outra grandeza física que faz analogia à susceptibilidade magnética do modelo de Ising citada anteriormente, onde é definida na forma como segue abaixo.

$$V = N(\langle O^2 \rangle - \langle O \rangle^2). \quad (5.3)$$

Outra medida que deve ser calculada é o cumulante de Binder de quarta ordem  $U_4$  que é definido como

$$U = 1 - \frac{\langle O^4 \rangle}{3\langle O^2 \rangle^2}. \quad (5.4)$$

# Capítulo 6

## Resultados e Discussões

Aqui neste capítulo, apresentam-se os resultados dos estudos realizados referentes ao modelo do Comportamento Crítico do Modelo BCS em Redes de Solomon em 1D e 2D. Sendo que, para calcular a razão dos expoentes críticos  $\frac{\beta}{\nu}$ ,  $\frac{\gamma}{\nu}$ ,  $\frac{1}{\nu}$  e  $\frac{\gamma}{\nu_{max}}$ . Foi plotado os gráficos da magnetização crítica ( $O_c$ ), da susceptibilidade crítica ( $V_c$ ) e da susceptibilidade máxima ( $V_{max}$ ) no ponto crítico versus  $N$ , onde  $N$  é o tamanho da rede, variando de  $N = 1000, 5000, 10000, 20000, 30000, 50000$  e  $70.000$  para 1D. E para 2D os tamanhos de redes foram  $L = 16, 32, 64, 128, 256$  e  $512$ .

Nas simulações calculou-se o ruído crítico  $q_c$  e o valor do cumulante de Binder  $U_4$ , respectivamente para 1D e 2D. De acordo com as medidas realizadas os valores encontrados para ambos os parâmetros foram respectivamente,  $q_c = 0.21563(5)$  com o  $U_4 = 0.28(3)$  e  $q_c = 0.21568(5)$  com o  $U_4 = 0.29(3)$ , lembrando que o valor encontrado da temperatura crítica do cumulante  $U_4$ , representa aproximadamente o ponto onde todas as curvas se cruzam.

Destacando aqui que os valores do ruído crítico e do cumulante  $U_4$  calculados para ambas dimensões se apresentam muito próximos um do outro com a mesma ordem de grandeza. O valor do ruído crítico encontrado foi importante para gerar os gráficos que serão expostos mais adiante. Todas as simulações foram feitas por meio do método de monte Carlo em redes de Solomon.

A seguir as Fig.6.1, Fig.6.2, Fig.6.3, Fig.6.4, Fig.6.5 e Fig.6.6 estão representando o cumulante de Binder energético de quarta ordem  $U_4$ , magnetização e susceptibilidade. Todas as curvas estão em função do ruído crítico ( $q$ ), e em todas as figuras, cada curva representa um tamanho de rede diferente, sendo que  $N = 1000, 5000, 10.000, 20.000,$

30.000, 50.000, 70.000 e  $L = 16, 32, 64, 128, 256, 512$  para 1D e 2D, respectivamente.

As Fig.6.7, Fig.6.8, Fig.6.9, Fig.6.10, Fig.6.11, Fig.6.12 estão representando as curvas da magnetização ( $O_c$ ), susceptibilidade ( $V_c$ ) e da susceptibilidade crítica máxima ( $V_{max}$ ), todas calculadas no ponto crítico  $q_c$ . Para extrair os valores dos expoentes críticos, foi realizado o seguinte procedimento. Calculou-se o *loglog* da magnetização ( $O_c$ ), susceptibilidade ( $V_c$ ) e da susceptibilidade crítica máxima ( $V_{max}$ ) em função do tamanho da rede ( $L$ ).

Donde os gráficos gerados, como já eram de se esperar são retas inclinadas. Então, foi feito um ajuste linear em todas as retas e verificou-se os valores dos coeficientes angulares das curvas correspondentes aos expoentes críticos.

As Fig.6.13, Fig.6.14, Fig.6.15, Fig.6.16, Fig.6.17, Fig.6.18 estão representadas os gráficos do colapso de dados do cumulante de Binder  $U_4$ , susceptibilidade  $V$  e da magnetização  $O$ . Para construir o gráfico do colapso das curvas calculou-se a média das 50 amostras geradas através das simulações em todos os tamanhos de redes, e para as três grandezas envolvidas nas simulações (cumulante de Binder, susceptibilidade e magnetização). Em seguida, usou-se as leis de escalas para calcular os valores dos expoentes críticos e gerou-se os gráficos como segue a diante. Observou-se que o colapso dos dados das grandezas estão de acordo com literatura (Ver Ref.27). Conclui-se que mesmo para curvas com tamanho de redes diferentes esses sistemas se comportam de maneira semelhante no limite termodinâmico. Denotando que todas as curvas das grandezas pertencem a mesma classe de universalidade, isto é, sistemas diferentes apresentam valores dos expoentes críticos iguais.

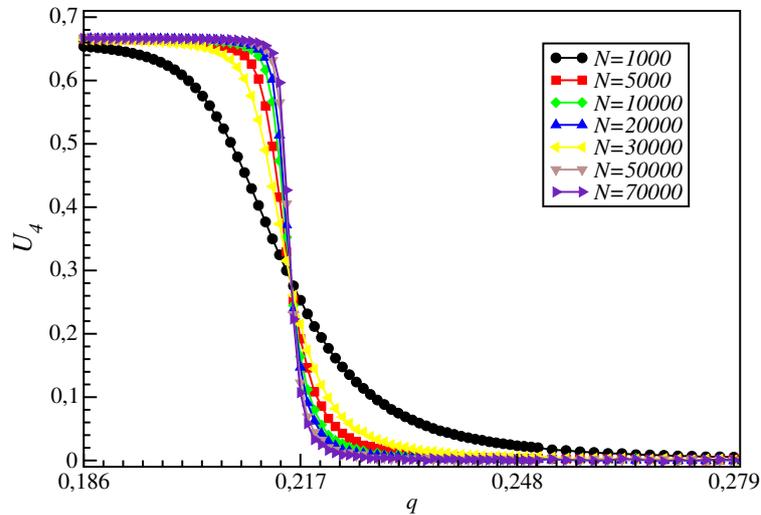


Figura 6.1: Mostra as curvas do  $U_4$ , para diferentes tamanhos de redes  $N = 1000, 5000, 10000, 20000, 30000, 50000, 70000$  em 1D.

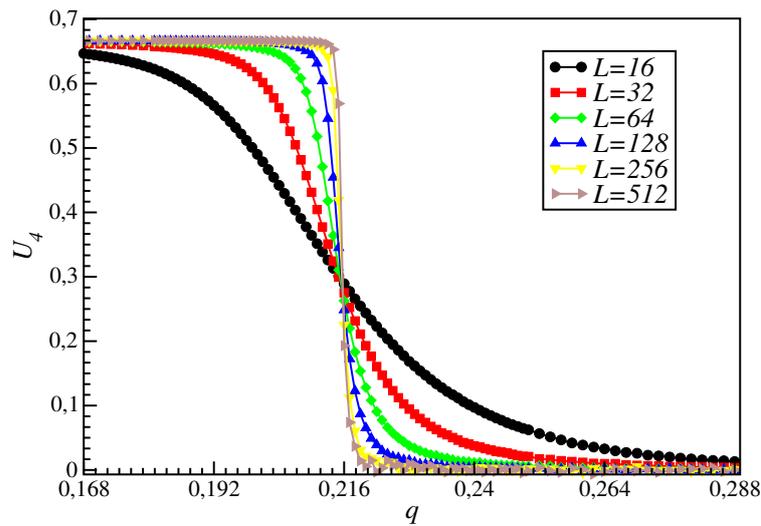


Figura 6.2: Mostra as curvas do  $U_4$  para diferentes tamanhos de redes  $L = 16, 32, 64, 128, 256, 512$  em 2D.

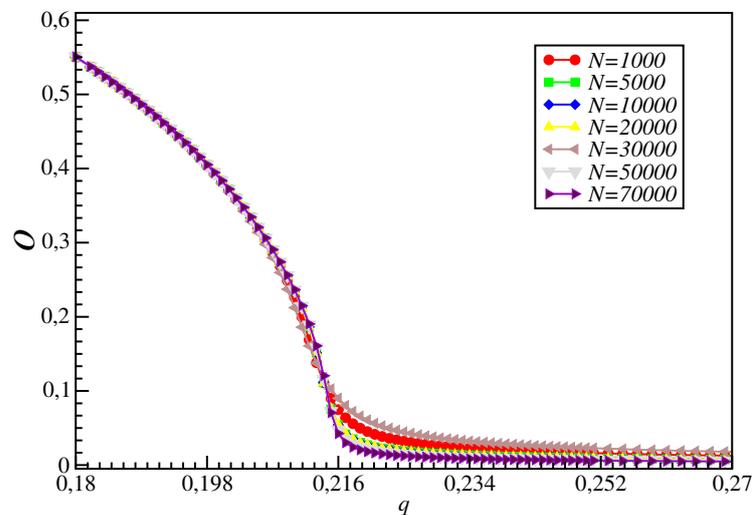


Figura 6.3: Mostra as curvas da magnetização para diferentes tamanhos de redes  $N = 1000, 5000, 10000, 20000, 30000, 50000, 70000$  em 1D.

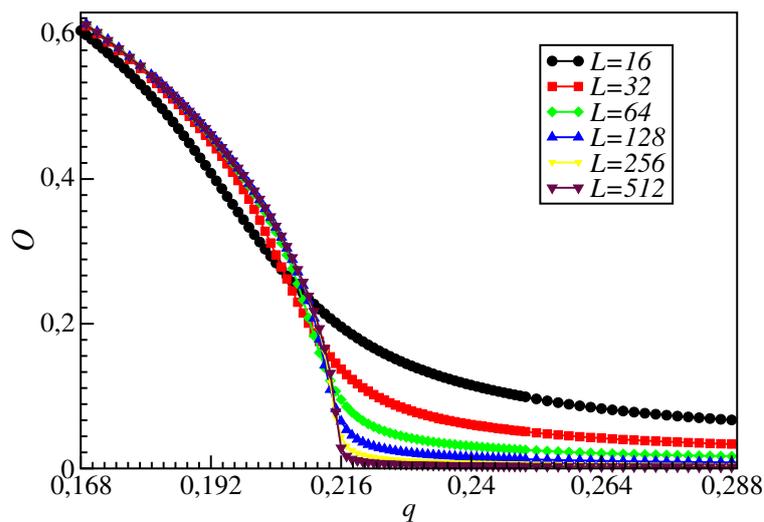


Figura 6.4: Mostra as curvas da magnetização com diferentes tamanhos de rede  $L = 16, 32, 64, 128, 256, 512$  em 2D.

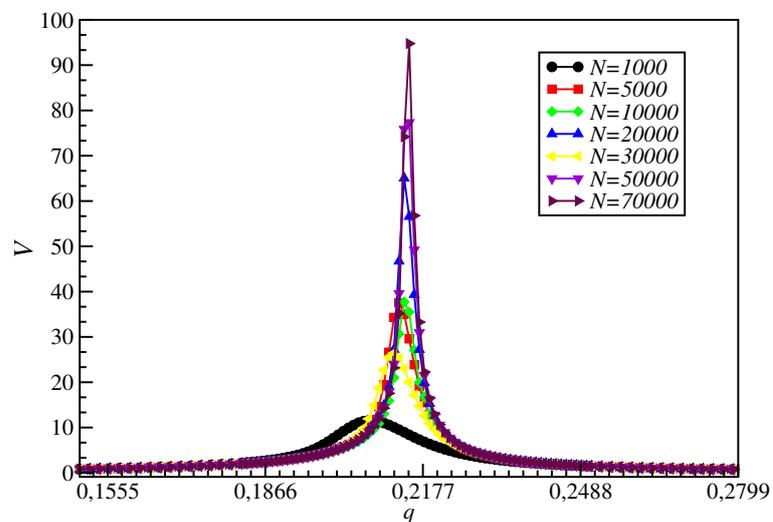


Figura 6.5: Mostra as curvas da susceptibilidade para diferentes tamanhos de redes  $N = 1000, 5000, 10000, 20000, 30000, 50000, 70000$  em 1D.

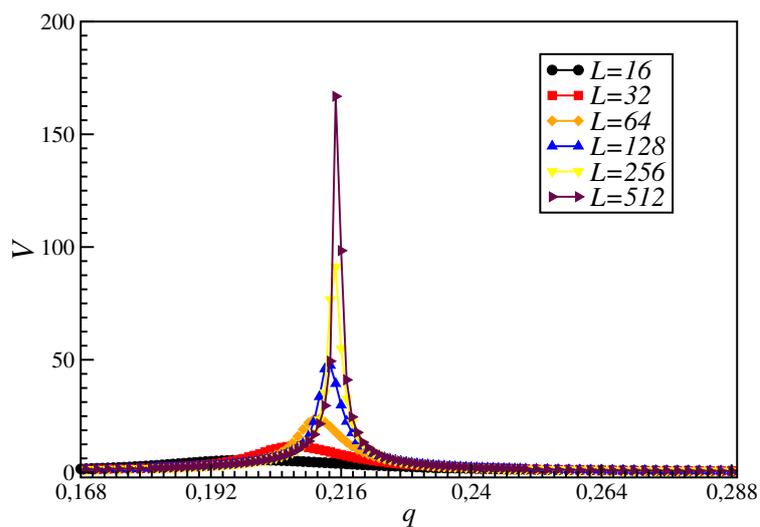


Figura 6.6: Mostra as curvas da susceptibilidade com diferentes tamanhos de redes  $L = 16, 32, 64, 128, 256, 512$  em 2D

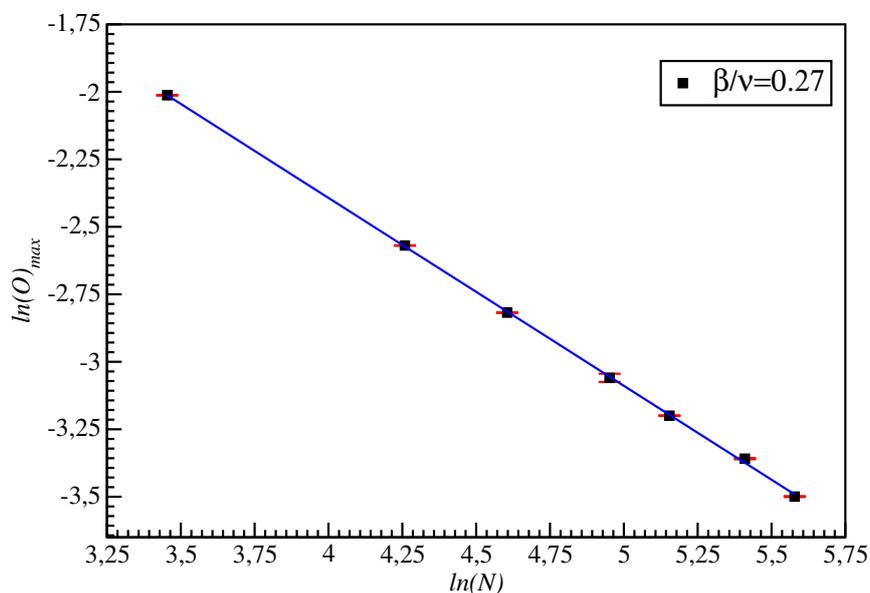


Figura 6.7: Mostra o gráfico do logaritmo da magnetização no ponto do ruído crítico em função do logaritmo do tamanho da rede para 1D.

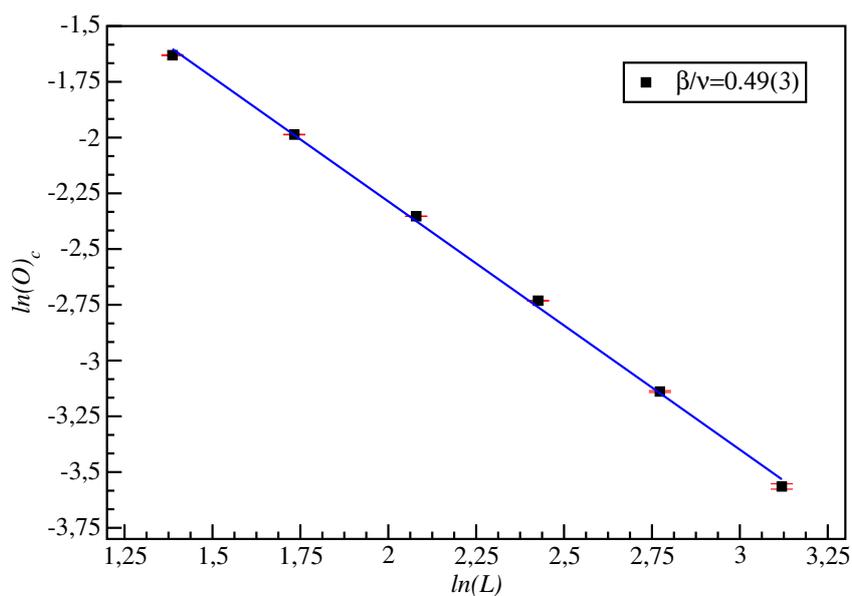


Figura 6.8: Mostra o gráfico do logaritmo da magnetização no ponto do ruído crítico em função do tamanho de rede para 2D.

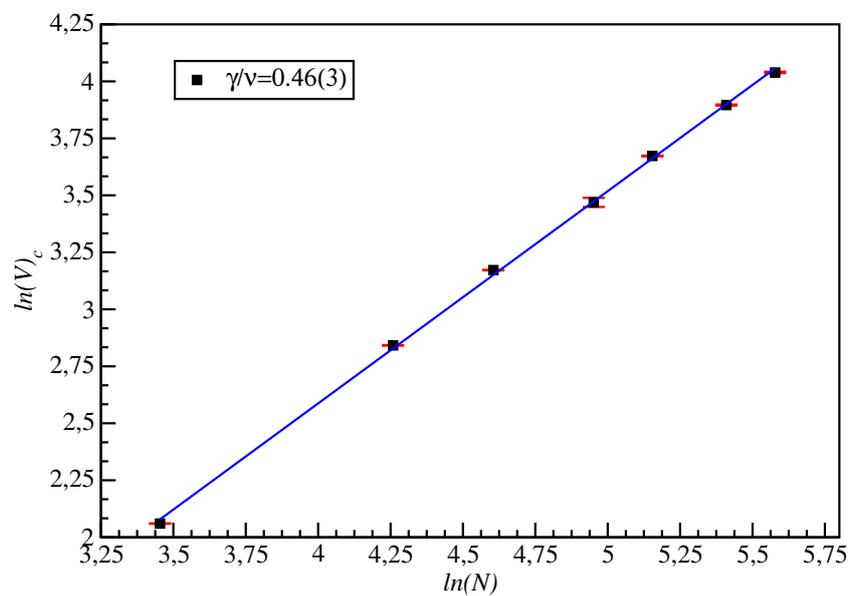


Figura 6.9: Mostra o gráfico do logaritmo da susceptibilidade no ponto do ruído crítico em função do logaritmo do tamanho de rede para 1D.

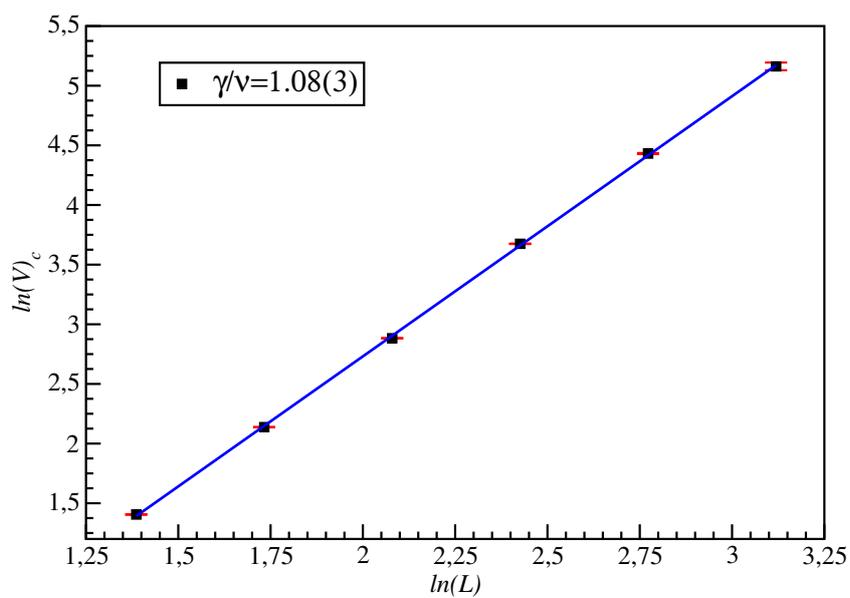


Figura 6.10: Mostra o gráfico do logaritmo da susceptibilidade no ponto do ruído crítico para 2D.

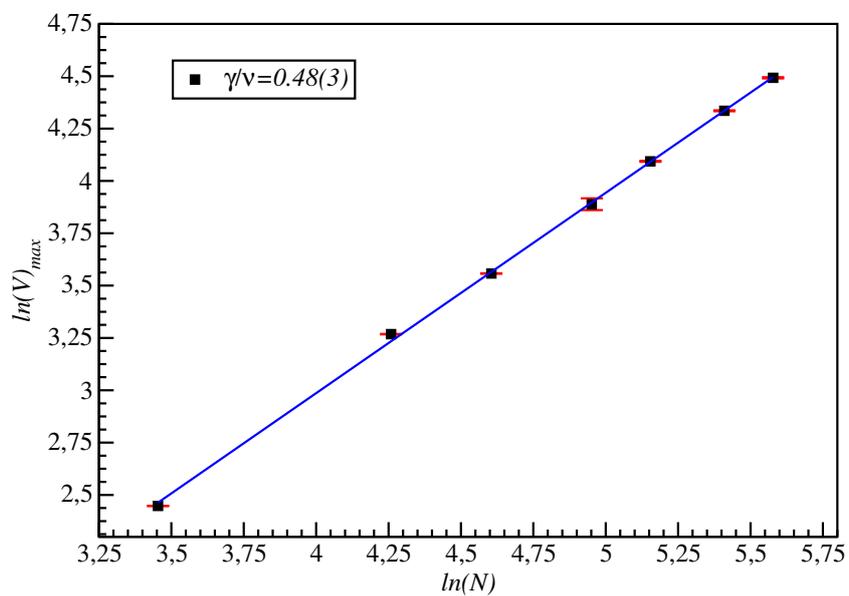


Figura 6.11: Mostra o gráfico do logaritmo da susceptibilidade máxima em função do logaritmo do tamanho de rede para 1D.

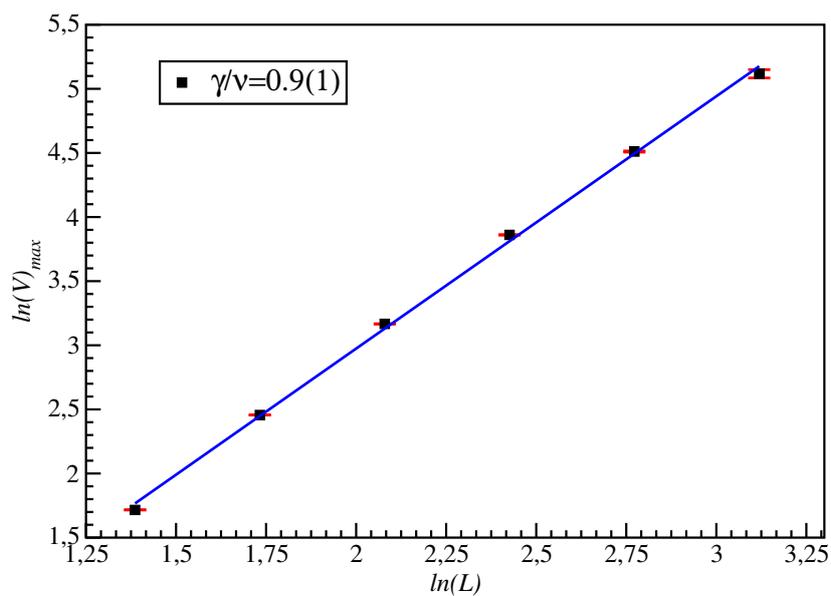


Figura 6.12: Mostra o logaritmo da susceptibilidade máxima em função do logaritmo para 2D.

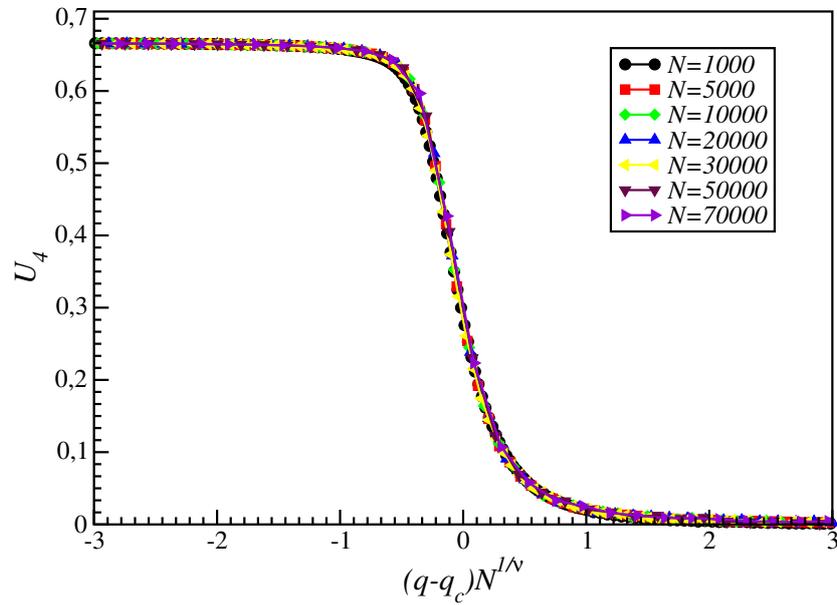


Figura 6.13: Mostra o gráfico do colapso de dados do  $U_4$  versus o ruído crítico para tamanhos de redes diferentes  $N = 1000, 5000, 10000, 20000, 30000, 50000, 70000$  sítios em 1D.

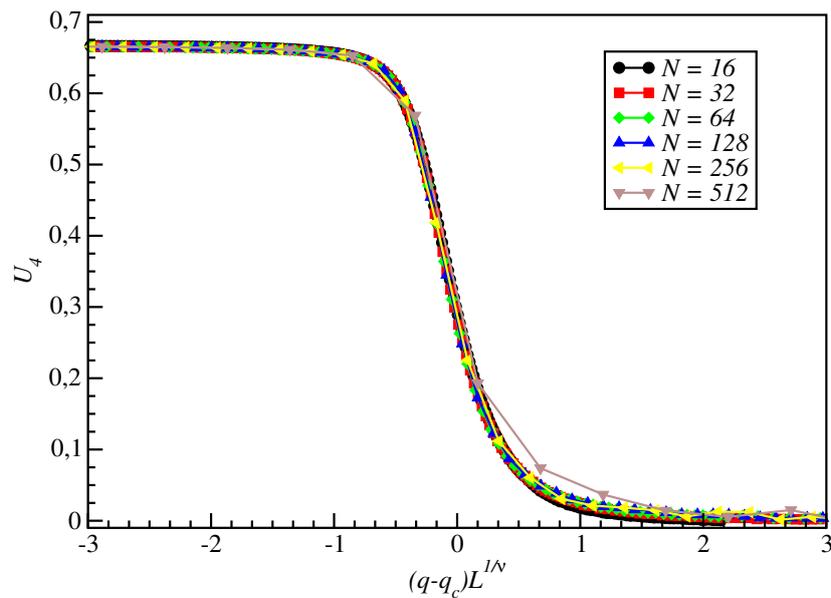


Figura 6.14: Mostra o gráfico do colapso de dados do  $U_4$  versus o ruído crítico para diferentes tamanhos de redes  $L = 16, 32, 64, 128, 256, 512$  em 2D.

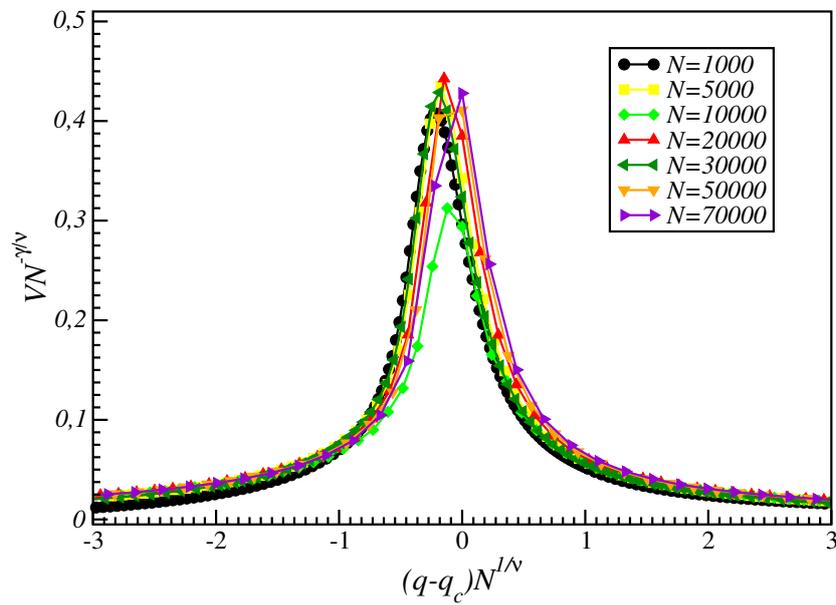


Figura 6.15: Mostra o gráfico do colapso de dados da susceptibilidade versus o ruído crítico para diferentes tamanhos de redes  $N = 1000, 5000, 10000, 20000, 30000, 50000, 70000$  em 1D.

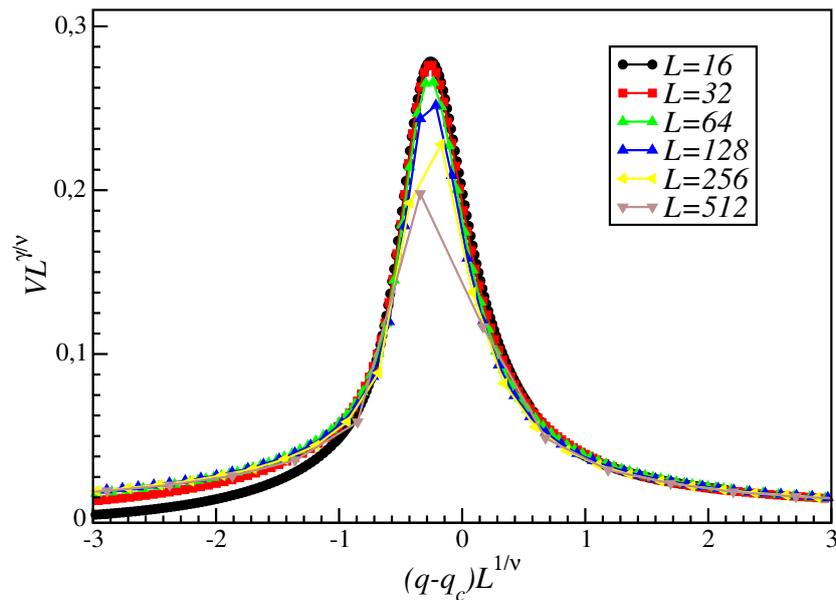


Figura 6.16: Mostra o gráfico do colapso de dados da susceptibilidade versus o ruído crítico para diferentes tamanhos de redes  $L = 16, 32, 64, 128, 256, 512$  em 2D.

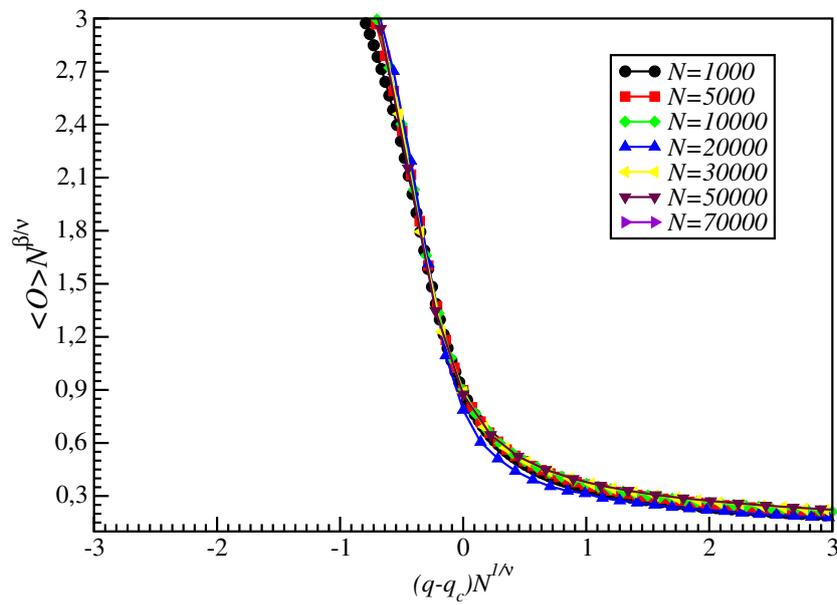


Figura 6.17: Mostra o gráfico do colapso de dados da magnetização versus o ruído crítico para diferentes tamanhos de redes  $N = 1000, 5000, 10000, 20000, 30000, 50000, 70000$  em 1D.

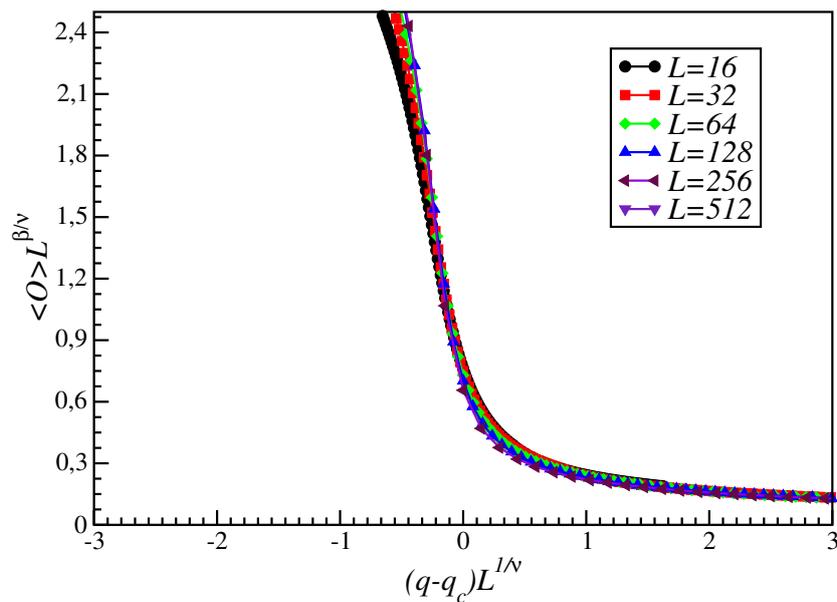


Figura 6.18: Mostra o gráfico do colapso de dados da magnetização versus o ruído crítico para diferentes tamanhos de redes  $L = 16, 32, 64, 128, 256, 512$  em 2D.

Tabela 6.1: Os expoentes críticos e  $U_4$  para o modelo BCS em redes des Solomon para 1D e 2D.  $1/\nu$ ,  $\beta/\nu_c$ ,  $\gamma/\nu_c$  e  $\gamma/\nu_{max}$  são os expoentes críticos extraídos da magnetização, da susceptibilidade no ponto crítico e da susceptibilidade máxima, respectivamente.

Dimensão	$1/\nu$	$\beta/\nu_c$	$\gamma/\nu_c$	$\gamma/\nu_{max}$	$U_4$
<b>MBCRS(1D)</b>	<b>0.50(4)</b>	<b>0.27(3)</b>	<b>0.46(3)</b>	<b>0.48(3)</b>	<b>0.29(3)</b>
<b>MBCRS(2D)</b>	<b>0.999(4)</b>	<b>0.49(3)</b>	<b>1.08(1)</b>	<b>0.91(1)</b>	<b>0.28(3)</b>
MIRS(1D)	0.52(3)	0.237(4)	0.512(4)	0.512(4)	0.285(4)
MVMRS(1D)	0.55(5)	0.223(8)	0.534(3)	0.512(3)	0.287(3)
MI(2D)	1	0.125	1.75	1.75	0.61
MIRS(2D)	0.91(3)	0.52(3)	0.97(4)	0.99(3)	0.277(6)
MVMRS(2D)	0.91(2)	0.50(2)	1.00(2)	0.99(2)	0.285(4)

# Capítulo 7

## Conclusões

Comparando os resultados do comportamento crítico do modelo BCS com os resultados dos modelos de Ising e voto-da-maioria com todos os modelos em redes de Solomon para 1D e 2D, observa-se que os valores encontrados para os expoentes críticos  $1/\nu$ ,  $\beta/\nu_c$ ,  $\gamma/\nu_c$  e  $\gamma/\nu_{max}$  (Ver Tabela 6.1) mostram-se que estão em ampla concordância com os valores dos expoentes críticos dos modelos de Ising e do voto-da-maioria. Portanto, conclui-se que os três modelos pertencem à mesma classe de universalidade. Sendo que o mesmo padrão não se repete ao comparar os expoentes críticos do nosso modelo com os expoentes críticos do modelo de Ising na rede quadrada (Ver Ref.27).

# Referências Bibliográficas

- [1] N. Metropolis and S. Ulam, “The monte carlo method,” *Journal of the American Statistical Association*, vol. 44, no. 247, pp. 335–341, 1949.
- [2] K. Binder, *Introduction: Theory and “Technical” Aspects of Monte Carlo Simulations*, pp. 1–45. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1986.
- [3] R. H. Swendsen and J.-S. Wang, “Nonuniversal critical dynamics in monte carlo simulations,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, pp. 86–88, Jan 1987.
- [4] B. Landau, *A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics*. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2005.
- [5] D. W. Heermann and A. N. Burkitt, *Computer Simulation Methods*, pp. 5–35. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1991.
- [6] S. Biswas, A. Chatterjee, and P. Sen, “Disorder induced phase transition in kinetic models of opinion dynamics,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 391, no. 11, pp. 3257 – 3265, 2012.
- [7] K. Binder and D. P. Landau, “Finite-size scaling at first-order phase transitions,” *Phys. Rev. B*, vol. 30, pp. 1477–1485, Aug 1984.
- [8] B. A. Berg and T. Neuhaus, “Multicanonical ensemble: A new approach to simulate first-order phase transitions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 68, pp. 9–12, Jan 1992.
- [9] K. Kacperski and J. A. HoÅyst, “Phase transitions as a persistent feature of groups with leaders in models of opinion formation,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 287, no. 3, pp. 631 – 643, 2000.
- [10] A. M. Ferrenberg and R. H. Swendsen, “New monte carlo technique for studying phase transitions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 61, pp. 2635–2638, Dec 1988.

- [11] F. Lima and D. Stauffer, “Ising model simulation in directed lattices and networks,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 359, pp. 423 – 429, 2006.
- [12] D. Stauffer, S. M. de Oliveira, P. de Oliveira, and J. S. Martins, “Biology, sociology, geology by computational physicists,” in *Biology, Sociology, Geology by Computational Physicists* (D. Stauffer, S. M. de Oliveira, P. de Oliveira, and J. S. Martins, eds.), vol. 1 of *Monograph Series on Nonlinear Science and Complexity*, pp. i – 276, Elsevier, 2006.
- [13] K. G. Wilson and M. E. Fisher, “Critical exponents in 3.99 dimensions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 28, pp. 240–243, Jan 1972.
- [14] J. Villain, “Nonequilibrium ”critical” exponents in the random-field ising model,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 52, pp. 1543–1546, Apr 1984.
- [15] D. Boulatov and V. Kazakov, “The ising model on a random planar lattice: The structure of the phase transition and the exact critical exponents,” *Physics Letters B*, vol. 186, no. 3, pp. 379 – 384, 1987.
- [16] W. Janke and R. Villanova”, “Two-dimensional eight-state potts model on random lattices: A monte carlo study,”
- [17] G. Ódor, “Universality classes in nonequilibrium lattice systems,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 76, pp. 663–724, Aug 2004.
- [18] H. G. Ballesteros, L. A. Fernández, V. Martín-Mayor, A. Muñoz Sudupe, G. Parisi, and J. J. Ruiz-Lorenzo, “Critical exponents of the three-dimensional diluted ising model,” *Phys. Rev. B*, vol. 58, pp. 2740–2747, Aug 1998.
- [19] M. Suzuki, “Relationship between d-Dimensional Quantal Spin Systems and (d+1)-Dimensional Ising Systems: Equivalence, Critical Exponents and Systematic Approximants of the Partition Function and Spin Correlations,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 56, pp. 1454–1469, 11 1976.
- [20] F. Lima, U. Costa, M. Almeida, and J. Andrade Jr., “Critical behavior of a three-state potts model on a voronoi lattice,” *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, vol. 17, pp. 111–114, Sep 2000.

- [21] G. Robins, P. Pattison, Y. Kalish, and D. Lusher, “An introduction to exponential random graph ( $p^*$ ) models for social networks,” *Social Networks*, vol. 29, no. 2, pp. 173 – 191, 2007. Special Section: Advances in Exponential Random Graph ( $p^*$ ) Models.
- [22] A. Aleksiejuk, J. A. Holyst, and D. Stauffer, “Ferromagnetic phase transition in Barabási-Albert networks,” *Physica A Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 310, pp. 260–266, July 2002.
- [23] F. W. S. LIMA, “Simulation of majority rule disturbed by power-law noise on directed and undirected barabási-albert networks,” *International Journal of Modern Physics C*, vol. 19, no. 07, pp. 1063–1067, 2008.
- [24] C. Moore and M. E. J. Newman, “Epidemics and percolation in small-world networks,” *Phys. Rev. E*, vol. 61, pp. 5678–5682, May 2000.
- [25] V. Latora and M. Marchiori, “Efficient behavior of small-world networks,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 87, p. 198701, Oct 2001.
- [26] W. Kwak, J.-S. Yang, J.-i. Sohn, and I.-m. Kim, “Critical behavior of the majority voter model is independent of transition rates,” *Phys. Rev. E*, vol. 75, p. 061110, Jun 2007.
- [27] F. W. S. Lima, “Equilibrium and nonequilibrium models on solomon networks with two square lattices,” *International Journal of Modern Physics C*, vol. 28, no. 08, p. 1750099, 2017.
- [28] “Editorial board,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 389, no. 16, p. IFC, 2010.
- [29] A. Pękalski, “Ising model on a small world network,” , vol. 64, p. 057104, Nov. 2001.
- [30] S. Biswas, “Mean-field solutions of kinetic-exchange opinion models,” *Phys. Rev. E*, vol. 84, p. 056106, Nov 2011.
- [31] M. Lallouache, A. S. Chakrabarti, A. Chakraborti, and B. K. Chakrabarti, “Opinion formation in kinetic exchange models: Spontaneous symmetry-breaking transition,” *Phys. Rev. E*, vol. 82, p. 056112, Nov 2010.

- [32] C. Castellano, S. Fortunato, and V. Loreto, “Statistical physics of social dynamics,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 81, pp. 591–646, May 2009.
- [33] M. S. de la Lama, J. M. LÃ³pez, and H. S. Wio, “Spontaneous emergence of contrarian-like behaviour in an opinion spreading model,” *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 72, no. 5, p. 851, 2005.
- [34] A. R. Vieira, C. Anteneodo, and N. Crokidakis, “Consequences of nonconformist behaviors in a continuous opinion model,” *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, vol. 2016, no. 2, p. 023204, 2016.
- [35] P. Sen, “Phase transitions in a two-parameter model of opinion dynamics with random kinetic exchanges,” *Phys. Rev. E*, vol. 83, p. 016108, Jan 2011.
- [36] S. Biswas, “Mean-field solutions of kinetic-exchange opinion models,” *Phys. Rev. E*, vol. 84, p. 056106, Nov 2011.