UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ - UFPI
CAMPUS MINISTRO REIS VELLOSO - CMRV
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
REDE NACIONAL - PROFMAT

JOSÉ CLAUDIO TERTO

GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA, UMA OPÇÃO PARA O ENSINO MÉDIO

PARNAÍBA - PI
2017

JOSÉ CLAUDIO TERTO

GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA, UMA OPÇÃO PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentado ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) realizado na Universidade Federal do Piauí - Campus de Parnaíba, como requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora:
Prof. Dra. Sissy da Silva Souza

PARNAÍBA - PI
2017

T332g Terto, José Claudio.
Geometria não euclidiana, uma opção para o ensino médio / José Claudio Terto. – 2017.
36 f. : il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Mestrado Profissional em Matemática, Parnaíba, 2017.
"Orientadora: Prof.ª Dr.ª Sissy da Silva Souza".

1. Matemática. 2. Geometrias – História. 3. Geometria euclidiana. 4. Geometria não euclidiana. I. Título.

CDD: 516.9

JOSÉ CLAUDIO TERTO

GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA, UMA OPÇÃO PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentado ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) realizado na Universidade Federal do Piauí - Campus de Parnaíba, como requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em:

Sissy da Silva Souza

Prof. Dra. Sissy da Silva Souza - UFPI/CMRV
Orientadora

Paulo Sergio Marques dos Santos

Prof. Dr. Paulo Sérgio Marques dos Santos - UFPI/CMRV
Examinador Interno

Cleidivan Alves dos Santos

Prof. M.Sc. Cleidivan Alves dos Santos - UFPI/CMRV
Examinador Externo ao Programa

PARNAÍBA - PI
2017

À minha amada e companheira Maria dos Anjos e aos meus Victor, Pyetro, Eloah e Rayssa.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, a minha mãe Maria Rodrigues Terto(*in memoriam*) e a meu pai José Maria Terto (*in memoriam*), aos meus irmãos fundamentais na minha existência e formação.

A minha orientadora Prof^{a}. Dra. Sissy da Silva Souza.

Aos meus amigos: Deodato Pereira da Silva Filho e José Eliésio

A minha amiga e colega Prof^{a} Hildamar.

A todos os meus colegas do PROFMAT.

A jornada foi curta, porém intensa, a qualidade dos nossos mestres, que nos orientou para as escolhas corretas na busca do aprendizado matemático, foi fundamental para a conclusão do curso.

Agradeço a CAPES pelo apoio. À UFPI, À Direção do Campus Ministro Reis Veloso, por proporcionar inestimável oportunidade de qualificação profissional a todos nós.

"A Geometria existe, como já disse o filósofo, por toda parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la." Júlio César de Melo e Sousa (Malba Tahan)

RESUMO

Este trabalho trás um histórico sobre a primeira catalogação dos conhecimentos sobre a geometria que reinou de forma absoluta, de 300 a.C. até o século XIX, influenciando não somente no campo da matemática, mas observa-se traços de sua influência na própria filosofia, tais conhecimentos foram compilados em uma obra intitulada "Os elementos", cuja autoria é atribuída a Euclides de Alexandria. Posteriormente, vem os matemáticos que deram os primeiros passos para a descoberta de uma ’nova geometria’, Saccheri e Lambert, até chegar aos matemáticos que desenvolveram uma geometria denominada de geometria hiperbólica, Gauss, János Bolyai e Lobachevsky, e mais adianta a outra face da nova geometria desenvolvida a geometria elíptica, criada por um discípulo de Gauss chamado de Georg Friedrich Bernhard Riemann. Vale salientar que este trabalho vem em uma linguagem onde o estudante possa lê e compreender de forma clara e precisa.

Palavras-chave: Geometria Euclidiana. Geometrias Não Euclidianas.

ABSTRACT

This work brings a small survey on the first cataloging of knowledge about geometry that dictated the rules for over 2000 years written in a book entitled The Elements written by Euclid of Alexandria. Later came the mathematicians who took the first steps towards the discovery of a 'new geometry', Saccheri and Lambert, until reaching the mathematicians who developed a geometry called hyperbolic geometry, Gauss, János Bolyai and Lobachevski, and further on the other side Of the new geometry developed the elliptical geometry, created by a disciple of Gauss called Georg Friedrich Bernhard Riemann. It is worth mentioning that this work comes a language where the student can read and understand clearly and accurately.

Key words: Euclidean Geometry. Non-Euclidean Geometries.

INTRODUÇÃO

Observando a mudança na nova grade curricular da educação básica brasileira, analisa-se a necessidade da introdução da geometria euclidiana plana, mais conhecida como geometria plana, e ao mesmo tempo observando o quanto se faz necessário uma ênfase a geometria não euclidiana. Onde está observa-se sua grande importância no mundo cotidiano, como exemplo tem-se a localização através de GPS (Utilização da geometria não euclidiana).

Na geometria euclidiana, onde recebe esse nome em homenagem ao grego Euclides considerado o "pai da geometria", que escreveu o livro Elementos de Euclides, onde o mesmo procurou alicerçar toda a geometria até então conhecida em cinco pontos. Pontos estes conhecidos como "Os cincos postulados de Euclides".

Em contra partida a geometria "não euclidiana", a geometria das curvas(hiperbólicas e elípticas), houve vários matemáticos que com seus estudos contribuíram para o seu desenvolvimento, inicialmente destacando-se o brilhante trabalho do padre jesuíta Giovanni Saccheri , e posteriormente, o matemático francês Lambert, em seus estudos sobre o V postulado de Euclides. Muitos matemáticos, até mesmo o grande Gauss interessou-se pelo assunto. Prova disso são suas cartas endereçadas a seu contemporâneo, o húngaro Wolfgang Bolyai.

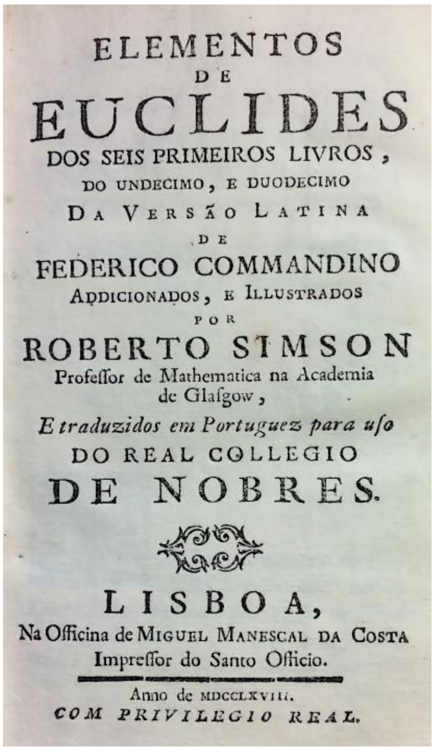
János Bolyai, filho de Farkas Bolyai, fez estudo aprofundado sobre essa nova geometria, que não pertencia aos domínios da Geometria Euclidiana, porém este não os publicou, perdendo assim a chance de entrar para a história como seu descobridor, este título coube ao russo Nikolai Ivanovich Lobachevsky, de forma ousada publicou suas descobertas.

Neste trabalho é procurado observar o quanto é importante a geometria não euclidiana para o conhecimento do aluno da educação básica, onde poderia ser incluída efetivamente a geometria não euclidiana da mesma forma como a geometria euclidiana.

1 BREVE HISTÓRICO SOBRE A GEOMETRIA PLANA

A palavra geometria vem de dois vocábulos gregos geo (significa terra) e metria (medida) , desta forma literalmente significa "a medida da terra". Segundo o historiador Heródoto (século V a.C.) a geometria teve origem provavelmente na medição de terras, nas regiões próximas ao rio Nilo, onde se construíam moradias fora do alcance das cheias do citado rio, observando que muitas civilizações tinham conhecimentos relacionados à geometria mesmo sendo de maneira rudimentar, pode-se destacar: as babilônicas, chinesas e hindus.

Alguns matemáticos se destacam notórios geômetras como Tales de Mileto (c. 624-547 a.C.) e Pitágoras (c. 572-497 a.C.), mas foi somente, aproximadamente, em 300 a.C. que todo conhecimento matemático até então foi compilado em uma única obra composta de 13 livros, intitulada "Os elementos" de autoria do grego Euclides de Alexandria, pouco se sabe da vida deste matemático.


ELEMENTOS
DE
EUCLIDES
DOS SEIS PRIMEIROS LIVROS,
DO UNDECIMO, E DUODECIMO
DA VERSÃO LATINA
DE
FEDERICO COMMANDINO
ADDICIONADOS, E ILLUSTRADOS
POR
ROBERTO SIMSON
Profeſſor de Mathematica na Academia de Glaſgow,
E traduzidos em Portuguez para uſo
DO REAL COLLEGIO
DE NOBRES.

LISBOA,
Na Officina de MIGUEL MANESCAL DA COSTA
Impreſſor do Santo Officio.
Anno de MDCCLXVIII.
COM PRIVILEGIO REAL.

Figura 1 – Versão latina. Fonte: https://oportunityleiloes.auctionserver.net/view-auctions/catalog/id/1912/lot/688705/?url=/view-auctions/info/id/1912/

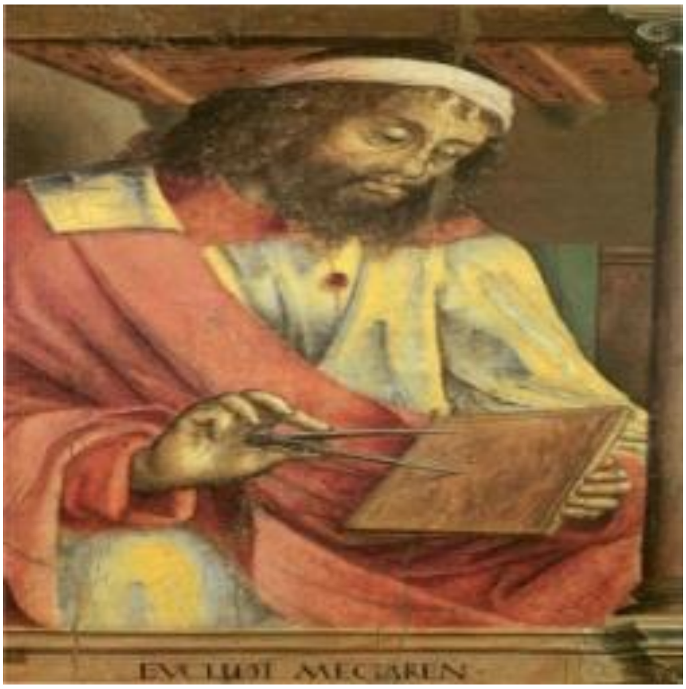


Figura 2 – Euclides. Fonte: http://matematica-na-veia.blogspot.com/2007/08/euclides-de-alexandria.html

Devido a esse empenho de Euclides sua obra revolucionária hoje é conhecida como “ **Os elementos de Euclides**”.

Tendo uma grande importância para a evolução da civilização, em destaque a ocidental, desta maneira, a geometria plana é colocada como um dos principais conhecimento matemáticos na educação básica. Porém com o desenvolvimento da tecnologia houve a necessidade de uma nova forma de abordar o mundo.

1.1 .AXIOMAS E POSTULADOS DE EUCLIDES

Vale destaque o livro-I que comenta e traz vários conhecimentos sobre geometria, alguns conhecidos como noções comuns e outros chamados de postulados.

1.1.1. Noções Comuns

- Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais.
- Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais.
- Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
- Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais
- O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

1.1.2. Postulados

São apresentados a seguir os cinco postulados de Euclides.

I. Pede-se, como cousa possível, que se tire de um ponto qualquer para outro qualquer ponto uma linha reta.

II. E que uma linha reta determinada se continue em direitura de si mesma, até onde seja necessário.

III. E que com qualquer centro e qualquer intervalo se descreva um círculo.

IV. Todos os ângulos retos são iguais.

V. E se uma linha reta, encontrando-se com outras duas retas, fizer os ângulos internos da mesma parte menores que dois retos, estas duas retas produzidas ao infinito concorrerão para a mesma parte dos ditos ângulos internos.

A figura abaixo, temos uma representação do V postulado:

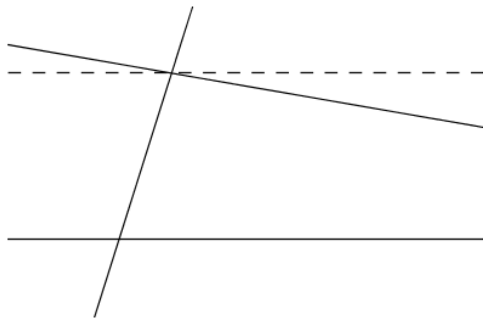


Figura 3 – Quinto Postulado. Fonte: https://www.atractor.pt/va/mat/GeomEsf/postulado_paralelas.htm

Considerando α e β (Figura 3), dois ângulos internos ao mesmo lado em relação a rela transversal t. E a medida do ângulo α adicionado a medida de β, correspondendo a uma medida menor que 180° ($\alpha+\beta<180^{\circ}$). O quinto postulado, "esclarece"que as retas a e b ao lado desses ângulos, prolongando-se ambas, irão em algum momento se intersectar.

> Duas relas paralelas são as que, estando no mesmo plano e prolongadas ao infinito nos dois sentidos, por nenhuma parte coincidem.As definições euclidianas resistem aos séculos e permanecem inabaláveis diante do evoluir do pensamento científico. Anotemos a definição de paralelas que figura em um livro publicado em 1957, em São Paulo: "Linhas paralelas são as que, traçadas no mesmo plano c seguindo a mesma direção, nunca se encontram, por mais que sejam prolongadas."(Malba Tahan, As Maravilhas da Matemática)

Na citação do livro "As Maravilhas da Matemática", Malba Tahan, considera a soma das medidas dos ângulos α e β igual a 180°. Desta forma destaca o paralelismo entre a reta a e b, outra forma de interpretar as palavras de Euclides, em seu quinto postulado.

Citamos abaixo, alguns dos substitutos, conforme menciona Barbosa (1995):

1. A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a dois ângulos retos.
2. Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes.

3. Existe um par de retas equidistantes.

4. Dados quaisquer três pontos não colineares, existe um círculo passando por estes três pontos.

5. Se três ângulos de um quadrilátero são retos, então, o último também é reto.

A etimologia da palavra postulado nos diz seu significado como sendo "pedir, exigir", ou seja, literalmente "pedir" para que se aceite algo.

Nos quatro primeiros postulados de Euclides, sem nenhum esforço é fácil de "aceita- los", praticamente de maneira intuitiva , o mesmo não acontece com o quinto postulado, pois este não fica muito claro intuitivamente. O enunciado que o determina deixava muitas dúvidas, desta forma surgiram perguntas, tais como: Como aceitá-lo, sem provar? E como prová-lo?

No decorrer dos séculos, muitos matemáticos renomados aceitaram essa difícil e decepcionante missão, tentar e se possível "criar" uma base sólida para provar o quinto postulado de Euclides. Foi nesta busca de formalizar o quinto postulado que surge uma nova visão de ver a geometria.

2 RUDIMENTOS DA GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA

No intuito de provar o quinto postulado de Euclides muitos estudiosos se empenharam nesta difícil tarefa, destacando-se: Ptolomeu I, Proclus (410 - 485), Nasir Eddin All Tusin (1201 - 1274) e Joan Wallis (1616 - 1703). Por volta dos séculos XVII e XVIII um padre jesuíta, professor da Universidade de Paiva, chamado Girolano Saccheri, tentando solucionar o problema, obteve resultados superiores em relação aos seus antecessores. Devido a tais resultados obtidos por Saccheri, ele é considerado como o precursor dos trabalhos de Lobachewsky e Riemann.

2.1 .Quadriláteros de Saccheri

Saccheri diferente de seus antecessores construiu sua demonstração não de forma direta, mas para isso ele utilizou o recurso de demonstração através do absurdo, ou seja, utilizando o principio da contradição. Como exemplo nós temos os seus quadriláteros.

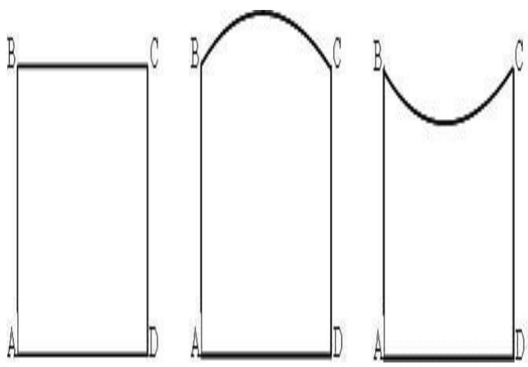


Figura 4 – Quadriláteros de Saccheri. Fonte: Google

Saccheri para sua demonstração construiu quadriláteros, onde supôs que os ângulos são ângulos retos e os lados AB e DC são congruentes e com isso formulou as seguintes hipóteses:

1. Os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, são retos, logo, recai no quinto postulado de Euclides;

2. Os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, são ângulos com medidas maiores que 90°, por assumir que uma reta era infinitamente longa, descartou sem muita dificuldade esta segunda hipótese;

3. Os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, são ângulos agudos, após extrair varias observações, obteve sua prova do quinto postulado.

> Sabemos agora que ele estava construindo uma geometria não euclidi- ana perfeitamente consistente; mas Saccheri estava tao completamente convencido de que a geometria de Euclides era a única valida que per- mitiu que esse preconceito interferisse em sua logica. Onde não havia contradição ele torceu o raciocínio ate pensar que a hipótese 3 levava a um absurdo. Por isso deixou de fazer o que teria sido sem dúvida a des- coberta mais importante do século dezoito - a geometria não euclidiana. Assim seu nome permaneceu desconhecido por mais um século, pois a importância de sua obra não foi reconhecida pelos que o seguiram. (Carl Boyer, 1974, p. 231).

Saccheri, poderia ter obtido melhores resultados, se suas novas descobertas, caso não as considerasse como algo absurdo. Mesmo assim obteve descobertas revolucionarias para sua época, ele poderia ter sido considerado como o descobridor da geometria não euclidiana.

2.2. Quadrilátero de Lambert

Em 1766, o matemático suíço de origem francesa Johann Heinrich Lambert , utilizando como base os trabalho de Saccheri escreveu sobre o assunto, porém este trabalho só seria publicado postumamente. Em suas observações Lambert, considerou um quadrilátero com três ângulos retos e formulou hipóteses para o quarto ângulo.

I- O quarto ângulo é reto, então temos o postulado de Euclides;

II- O quarto ângulo é agudo;

III- O quarto ângulo é obtuso.

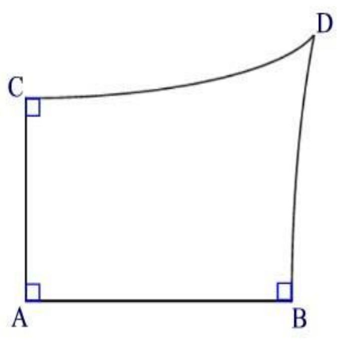


Figura 5 – Quadrilátero de Lambert. Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Quadril%C3%A1tero_de_Lambert

Lambert, concluiu que:

1. Sendo o quarto ângulo $\hat{D}$, um ângulo cuja medida é menor que um ângulo reto, então desta forma é obtido uma superfície hiperbólica;
2. Por outro lado se $\hat{D}$, corresponder a um ângulo cuja medida é maior que 90°, então será obtido uma superfície elíptica.

As conclusões feitas por Lambert nas hipóteses II e III serviram como base para a fundamentação das pesquisas realizadas pelos matemáticos: O russo Lobachewsky, em sua geometria hiperbólica e possivelmente, Riemann, em sua geometria elíptica.

Hoje sabe-se que tanto Saccheri como Lambert, dentro de suas limitações, pois eles realizavam suas descobertas somente com conhecimentos sobre geometria plana, deram um novo rumo a geometria, e assim "criaram"uma nova visão de mundo.

3 AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

John Playfair (1748-1819) estabeleceu em1796, um axioma que ficou mais conhecido que o proposto por Euclides, equivalente ao quinto postulado: "Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela a reta dada." Este axioma ficou conhecido como: O postulado das paralelas.

As geometrias e suas curvaturas

Figura 6 – Tipos de planos. Fonte:

https://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria_n%C3%A3o_eucl

idiana

relação as curvaturas, há três casos;

1. No primeiro plano, temos o plano de Euclides que tem uma curvatura zero, reinou absoluto até o século XIX;
2. No segundo, uma curvatura positiva que é a curvatura da esfera (curva para todo lugar) correspondendo a geometria elíptica; e
3. Na terceira representação o plano assemelhasse a uma sela, tem curvatura negativa, geometria hiperbólica.

No século XIX, entra em cena o grande matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), com seus estudos sobre o postulado das retas, abriu caminho para uma clareza e desenvolvimento de meios que levaram a descoberta da geometria não euclidiana.

Quanto aos métodos, Gauss seguiu os passos de Saccheri e Lambert, utilizando o método da contradição para a análise de seus estudos. E, foi o primeiro a constatar e realmente entender a existência de uma geometria diferente da geometria plana.

Em uma carta destinada a F.A. Taurinus, em Göttingen, em 8 de novembro de 1824, Gauss expõe seus interesses e alguns resultados sobre o assunto. Como destaque, vale ressaltar, suas correspondências que mantinha com um antigo colega de nacionalidade húngaro Wolfang Bolyai (1775 - 1856). Em certa ocasião Bolyai, enviou para Gauss, um pequeno tratado sobre as paralelas. Ao analisar este tratado, Gauss constatou erro nas observações de Bolyai.

János Bolyai, filho de Farkas Bolyai, mesmo com a insistência de seu pai para que desistisse de comprovar o postulado das paralelas, continuou suas pesquisas onde obteve expressivo êxito, porém não conseguiu o reconhecimento esperado, pois três anos antes foi publicado um artigo intitulado "On the Principles of Geometry", que é considerado oficialmente o nascimento da geometria não euclidiana, do matemático russo Nicolai Lobachevski (1793 - 1856).

Gauss seguiu os passos de Saccheri e Lambert, utilizando o método da contradição para a análise de seus estudos. E, foi o primeiro a observar e realmente entender a existência de uma geometria diferente a de Euclides.

Ao pedir que seu amigo Gauss desse o reconhecimento merecido para seu filho, Bolyai recebeu o seguinte comentário do eminente matemático: ***"que não podia elogiar a obra de János pois isso seria autoelogio, já que havia tido essas ideias já havia anos"***.

E, assim, surge a geometria hiperbólica onde nesta geometria "Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar mais de uma reta paralela".

Figura 7 – Parabolóide hiperbólico . Fonte: https://www.gratispng.com/baixar/a-geometria-n%C3%A3o-euclidianas.html

Coube a um discípulo de Gauss, apresentar uma nova geometria não euclidiana, onde se obtinha uma nova reformulação para o postulado das paralelas "Por um ponto fora de uma reta, não passa nenhuma reta paralela", nascia assim a geometria elíptica ou

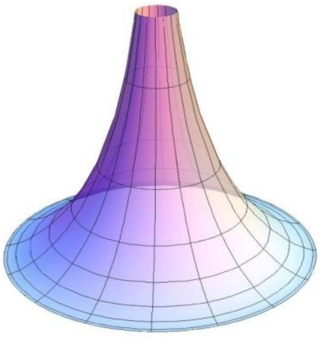


Figura 8 – Pseudoesfera. Fonte: Google

geometria esférica. Este discípulo chama-se Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866).

Nas palavras de Ian Stewart "O discípulo era Georg Bernhard Riemann, e estava tentando obter o que as universidades alemãs chamam de habilitação, o passo seguinte ao doutorado. Na época de Riemann isso significava que se podia cobrar dos estudantes uma taxa pelas aulas. Na época e hoje, a habilitação requer a apresentação de cada pesquisa numa aula pública que também constitui um exame. O candidato apresenta vários tópicos e o examinador, que no caso de Riemann era Gauss, escolhe um deles. Riemann, um brilhante talento matemático, fez uma lista de vários tópicos ortodoxos que sabia de trás para a frente, mas num jorro de sangue para o cérebro sugeriu também "Sobre as hipóteses que jazem nos fundamentos da geometria". Gauss havia muito se interessava exatamente por esse tema, e naturalmente o escolheu para o exame de Riemann. Riemann imediatamente se arrependeu de apresentar algo tão desafiador. Ele tinha uma profunda aversão a falar em público, e não havia pensado detalhadamente a matemática do tema. Tinha simplesmente algumas ideias vagas, embora fascinantes, sobre espaço curvo. Em qualquer número de dimensões. O que Gauss fizera para duas dimensões, com seu notável teorema, Riemann queria fazer em quantas dimensões se desejasse. Precisava tornar aquilo realidade, e depressa. A aula pública estava assomando. A pressão quase lhe provocou um esgotamento nervoso, e seu emprego diurno ajudando Wilhelm Weber, colaborador de Gauss, em experimentos com eletricidade, não contribuiu em nada. Bem, talvez tenha, sim, contribuído, porque enquanto Riemann estava pensando na relação entre forças elétricas e magnéticas no trabalho, percebeu que a força pode estar relacionada com a curvatura. Trabalhando de trás para diante, ele podia usar a matemática das forças para definir curvatura, conforme seu exame exigia."

Na Geometria de Riemann é possível:

- Construir geometrias em que uma reta seja limitada.
- Em que as perpendiculares a uma reta passam por um só ponto.
- Sobre uma esfera as perpendiculares passam por dois pontos diametralmente opostos.
- Duas perpendiculares a uma mesma reta sempre se cruzam.

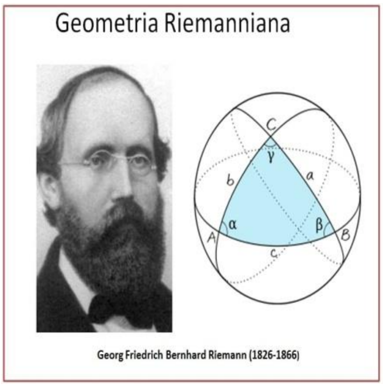


Figura 9 – Riemann. Fonte: https://tematematica.wordpress.com/2015/06/29/ensino-e-aprendizagem-da-geometria-esferica/

Na figura abaixo é apresentado a representação de retas nos três tipos de geometrias:

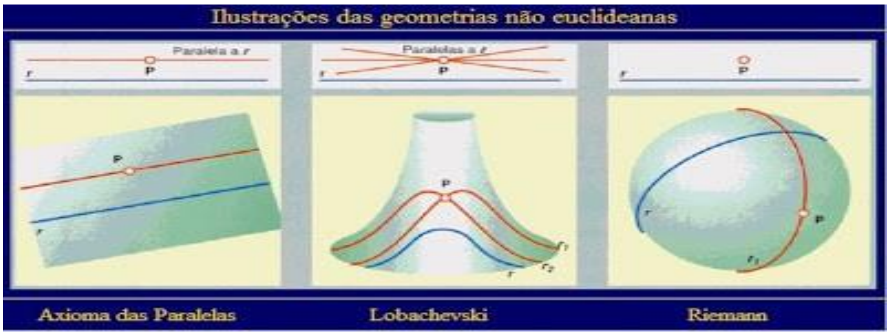


Figura 10 – Geometria Não Euclidiana. Fonte:

http://beafemika.blogspot.com/2008/09/euclides-geometrias-no-euclidianas.html

Considera-se as seguintes observações:

1. Na primeira representação de plano (com curvatura zero) tem-se o postulado das paralelas, onde observamos uma reta r e um ponto P , existe uma única reta que passa por P e é paralela a, r.
2. No plano de Lobachevski (no plano hiperbólico) de curvatura negativa observa-se que por P, passa mais de uma reta paralela a uma reta r.
3. Na representação do plano de Riemann (plano esférico) com curvatura positiva, não há nenhuma reta que passe por P e seja paralela a uma reta r.

Na figura abaixo é apresentado a representação de triângulos nos três tipos de geometrias:

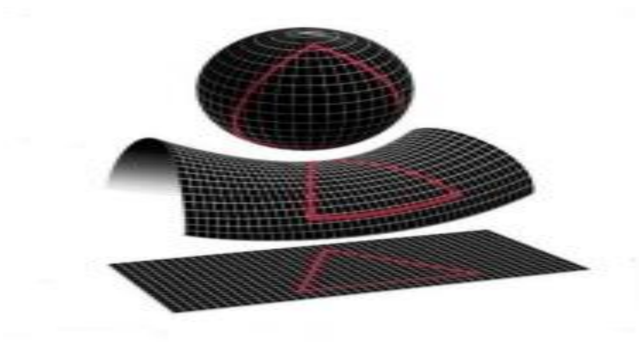


Figura 11 – Formas geométricas. Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria_n%C3%A3o_euclidiana

Considera-se as seguintes observações em relação aos triângulos construídos:

1. Na geometria esférica, a soma de seus ângulos internos medem mais de 180°;
2. Na geometria hiperbólica, a soma dos ângulos internos medem menos de 180°; e
3. Na geometria plana, a soma dos ângulos internos medem 180°.

Assim estava estabelecido todas as bases necessárias, que não somente a geometria plana era a única, como esta corresponde a uma geometria entre as duas novas descobertas e que para a compreensão do mundo real era necessário não somente, a euclidiana.

Ao estabelecer as bases teóricas para seus trabalhos Lobachewsky e Riemann, criaram uma nova forma de "ver"e analisar o mundo real. Deixando para trás todos os conceitos, já estabelecidos como verdade absolutas, dessa forma surgem novas idéias sobre a realidade, até mesmo auxiliando o grande Einstein, em sua visão de universo

Através dessas novas visões de mundo pode-se desenvolver novas tecnologias, em destaque o uso do GPS.

A tabela abaixo traz algumas diferenças entre as geometrias:

Reportamo-nos a uma tabela comparativa entre as Geometrias Euclidiana, Hiperbólica e Elíptica apresentadas por Davis e Hersh (1995, p. 211). A fonte de pesquisa de Davis e Hersh está no livro Basic Concepts of Geometry de Prenowitz e Jordan.

CONTEÚDO MATEMÁTICO	GEOMETRIA EUCLIDIANA	GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS	
		LOBACHEVSKIANA	RIEMANNIANA
Duas retas distintas interceptam em:	um ponto	um ponto	em dois pontos antípodas.
Dada uma reta L e um ponto P exterior a L, existe(m):	uma reta e só uma que passa por P e é paralela a L.	pelo menos duas retas que passam por P e é paralela a L.	não há reta que passa por P e é paralela a L.
Uma reta:	é dividida em duas por um ponto	é dividida em duas por um ponto	não é dividida em duas por um ponto
As retas paralelas:	são equidistantes	nunca são equidistantes	não existem
Se uma reta intercede uma de duas paralelas:	intercede a outra	pode ou não intercede a outra	como não há paralelas, isto não ocorre.
A hipótese de Saccheri válida é a do:	ângulo reto	ângulo agudo	ângulo obtuso
Duas retas distintas perpendiculares a uma terceira:	são paralelas	são paralelas	interceptam-se
A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é:	igual a 180°	menor do que 180°	maior do que 180°
A área de um triângulo é:	independente da soma dos seus ângulos	proporcional ao defeito da soma de seus ângulos	proporcional ao excesso da soma de seus ângulos.
Dois triângulos com ângulos correspondentes iguais são:	semelhantes	congruentes	congruentes
Soma dos ângulos internos de quadrilátero:	igual a 360°	menor do que 360°	maior do que 360°

Figura 12 – Geometrias. Fonte: Google

4. CÁLCULO DA ÁREA DE UM TRIÂNGULO NA GEOMETRIA PLANA E NA GEOMETRIA ESFÉRICA

Sendo a figura a representação de um triângulo na geometria plana

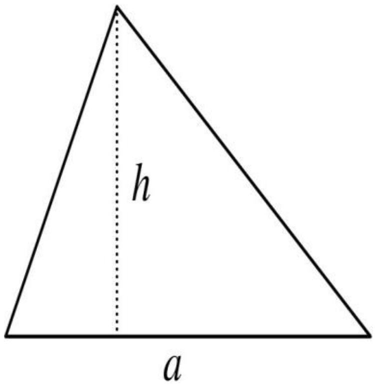


Figura 13 – Triângulo. Fonte: Google

Uma forma simples e tradicional de calcular sua área, é usar a fórmula:

$$S = \frac{a.h}{2}$$

Agora a figura abaixo representa um triângulo esférico e fórmula de como obter sua área:

$S = (\alpha + \beta + \gamma - \pi).R^2 = R^2.E$, Sendo E o excesso esférico que representa o valor que a soma dos ângulos internos do triângulo esférico excede a 180°.

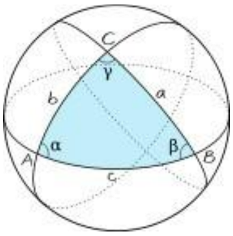


Figura 14 – Triângulo Esférico 1. Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria

Outra questão que envolve a geometria esférica refere-se ao cálculo da área de um triângulo. Albert Girard (1595-1632) mostrou que a área de um triângulo esférico depende do raio da esfera e dos ângulos internos deste triângulo. A área AT do triângulo esférico e definido por $S = (\alpha + \beta + \gamma - \pi).R^2$, onde α , β e γ são os ângulos internos do triângulo em radianos, e R é o raio da esfera. Este resultado é conhecido como o Teorema de Girard. Abaixo segue uma demonstração do Prof^{o} Elon Lages Lima:

Agora podemos demonstrar o teorema de Girard.

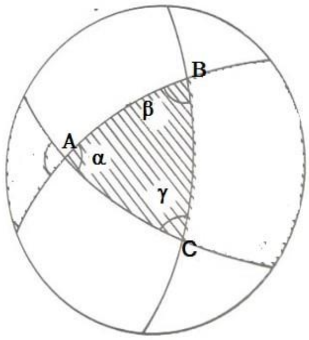


Figura 15 – Triângulo Esférico 2. Fonte: Google

Se α , β e γ são os ângulos internos de um triângulo esférico, medidos em radianos, então $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{S}{R^2}$, onde S é a área desse triângulo.

Demonstração: Consideremos um hemisfério H que contenha o triângulo dado. Prolongando, nos dois sentidos, os lados que formam o ângulo α, até encontrarem o bordo do hemisfério H, obtemos uma região R_α e H, cuja área mede $2\alpha R^2$. A parte hachurada é a região R_α.

Fazendo o mesmo com os ângulos β e γ, obtemos regiões R_β e R_γ, cujas as áreas respectivamente $2\beta R^2$ e $2\gamma R^2$. A reunião dessas 3 regiões é o hemisfério H, com o triângulo dado contado três vezes (duas vezes mais do que devia). Segue-se que a soma das áreas das regiões R_α, R_β e R_γ é igual à área do hemisfério H mais duas vezes a área S do triângulo dado, ou seja, $2\alpha R^2 + 2\beta R^2 + 2\gamma R^2 = 2\pi R^2 + 2S$, pois a área H é $2\pi R^2$. Simplificando, vem $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{S}{R^2}$, como queríamos demonstrar.

5. ATIVIDADES APLICADAS

5.1 .Atividade 1

O problema do barco pesqueiro

Um barco pesqueiro deseja cercar uma região na qual acredita que existam mais peixes. Para isto, ele parte de algum ponto sobre a linha do Equador e percorre 20 Km em direção ao Norte, em seguida gira 90^{o} e navega mais 20 Km em direção ao Leste, depois gira 90^{o} e navega mais 20 Km no sentido Sul.

a) Utilize uma folha plana e posteriormente as esferas de isopor para responder qual a distância percorrida pelo barco. Existe diferença nas distâncias medidas no plano e na esfera? O deslocamento é o mesmo medido no plano e na esfera? Explique:

OBJETIVOS: A atividade 1 (a) tem por objetivo que os alunos observem que as distâncias percorridas e os deslocamentos no plano e na esfera são idênticos (60 km no exemplo), apesar da diferença nos formatos de suas superfícies. Os alunos foram lembrados das diferenças entre distância percorrida e deslocamento (diferença entre o ponto inicial e final). Aqui, o importante era observar que o deslocamento também é o mesmo.

b) Imagine que existem dois barcos pesqueiros unidos por uma corda esticada medindo 200 km de comprimento próximos ao mar. A reta forma uma reta euclidiana, como a reta feita no plano? Explique:

OBJETIVO: Conhecer o conceito de geodésica ou mais especificamente, diferenciar uma reta no plano e uma "reta" em uma superfície esférica.

5.2 Atividade 2

Retas paralelas.

Imagine dois barcos pesqueiros A e B navegando lado a lado (paralelamente).

a) Desenhe em uma folha de papel o caminho percorrido pelos dois barcos.

b) Desenhe sobre as esferas os caminhos percorridos pelos barcos A e B.

c) É possível traçar retas paralelas para representar o caminho percorrido pelos dois barcos na folha de papel e na bola de isopor?

d) Isto contraria o 5^{o} Postulado de Euclides? Quais suas conclusões?

OBJETIVOS: Esta atividade deve permitir que os alunos percebam que não é possível traçar retas paralelas na superfície esférica e que quaisquer duas "retas"na esfera sempre se interceptam em no mínimo dois pontos. Como as paralelas não podem (por definição) se interceptar, é importante concluir que não podemos obter "retas"paralelas na superfície esférica. Isto contraria o 5^{o} Postulado.

5.3 ANÁLISE DAS RESPOSTAS

Primeiramente foi ministrado uma aula sobre o tema abordado por este presente trabalho, observou-se que o público alvo mostrou bastante curiosidade a cerca do mesmo. Tamanho foi o impacto ao adquirem o conhecimento de um triângulo onde a soma de seus ângulos internos é maior que 180º, ficaram debatendo entre si e surpresos com essa nova informação .

Logo após foi aplicado duas atividades em sala de aula, observando o interesse e a vontade em responder as questões referente a essa “nova” geometria que até então era desconhecido. Pois o sistema de ensino regular só tráz referência a geometria euclidiana.

Abaixo estão as analises observadas das respectivas respostas:

1. Realmente pode-se perceber que mesmo o aluno não tendo conhecimento da geometria não euclidiana, ele consegue elaborar respostas convenientes dentro dos seus limites de conhecimento.

2. Os alunos mostraram que o V postulado de Euclides, é válido somente para geometria plana e perceberam que na geometria esférica todas as retas aparentemente ’paralelas’ se encontram no pólo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O propósito deste trabalho foi de apresentar o caminho percorrido pela geometria, desde seus primórdios, em destaque o grande matemático Euclides, que ao sintetizar todo o conhecimento matemático de sua época deixou para gerações futuras um grande tesouro chamado "Os Elementos". E, apresentando ao leitor os principais pensadores que contribuíram para solucionar o V postulado de Euclides, destacando-se Saccheri, Lambert e chegando a Gauss, János Bolyai, Lobachevsky e a Riemann.

Este trabalho foi elaborado em uma linguagem simples, pois o mesmo tem como finalidade o acesso ao estudante da educação básica a uma geometria que não faz parte de seu cotidiano estudantil, mas pode-se perceber o quanto o mesmo poderia fazer parte do currículo da educação básica , da mesma forma que hoje a física moderna é ensinada no ensino médio.

REFERÊNCIAS

[1] BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Hiperbólica**. Rio de Janeiro, IMPA, 2002.

[2] BOYER, Carl Benjamim. **História da Matemática**. Trad. Elza F.Gomide. São Paulo, Edgard Blücher Ltda, 1974.

[3] Encontro Paranaense de Educação Matemática, 5º, 2009, Pará. **Algumas Diferenças Entre Geometria Euclidiana e as Geometrias Não Euclidianas - Hiperbólica e Elípitica a Serem Abordadas Nas Séries de Ensino Médio**, [s.n], 2009.

[4] OLIVEIRA, Antônio de; SILVA, Agostinho. **Aritmética, Teoria dos Conjuntos. Geometria Plana**. São Paulo, LISA - Livros Irradiantes, 1970.

[5] STEWART, Ian. **17 Equações Que Mudaram o Mundo**. Trad. George Schlesinger, Rio de Janeiro, Zahar, 2013.

ANEXO A

1ª RESOLUÇÃO DAS ATIVIDADES REALIZADAS PELOS ALUNOS

A seguir duas respostas referentes as atividades aplicadas

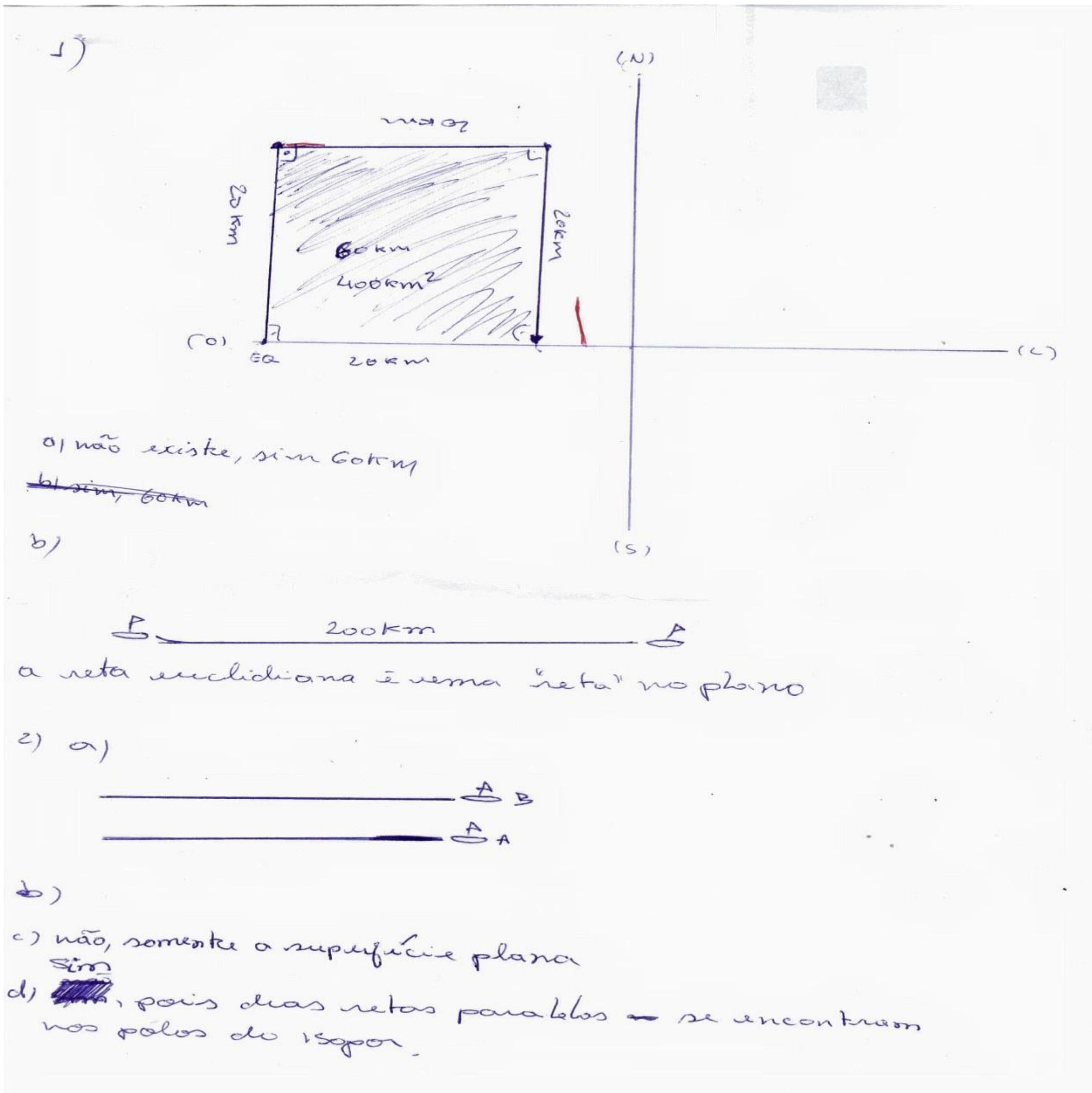

1)
(N)
20km
20km
20km
60km
400km²
(O)
EQ
20km
(L)
(S)
a) não existe, sim 60km
~~b) sim, 60km~~
b)
200km
a reta euclidiana é uma "reta" no plano
2) a)
B
A
b)
c) não, somente a superfície plana
d) sim, pois duas retas paralelas se encontram nos polos do isopor.

Figura 16 – Resolução I. Fonte: Autor

ANEXO B –

2ª RESOLUÇÃO DAS ATIVIDADES REALIZADAS PELOS ALUNOS

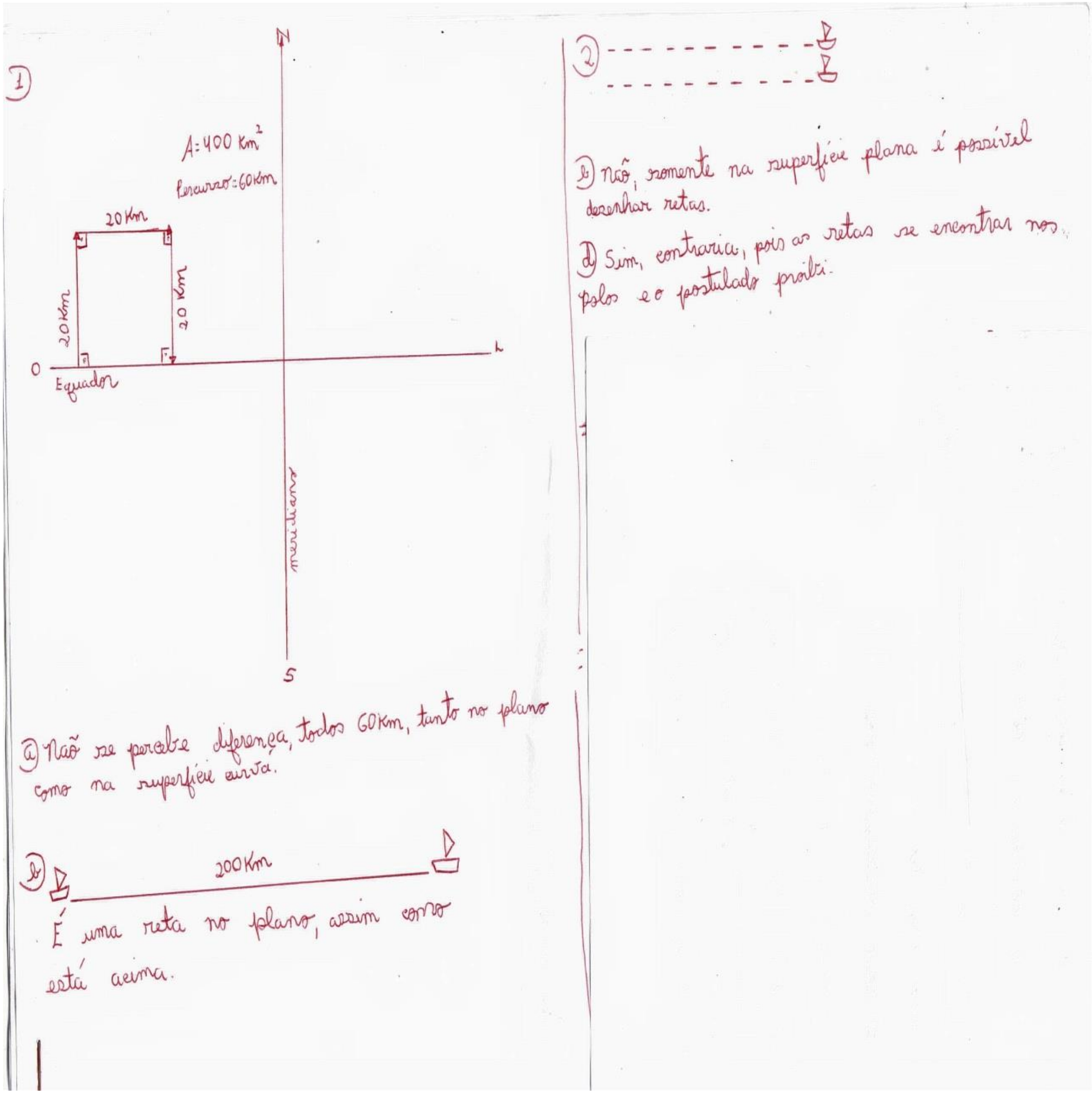


Figura 17 – Resolução II. Fonte: Autor