Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Curso de Pós-graduação em Ensino de Matemática

FRANCISCO BERGSON ARAUJO GOMES

NÚMEROS PRIMOS, APLICAÇÕES OLÍMPICAS

Teresina - PI

2020

FRANCISCO BERGSON ARAUJO GOMES

NÚMEROS PRIMOS, APLICAÇÕES OLÍMPICAS

Dissertação apresentada ao Curso de pós-Graduação em Matemática-Profissional da UFPI, como requisito parcial para a obtenção do grau de MESTRE em Ensino de Matemática.

Orientador: ANTONIO KELSON VIEIRA DA SILVA

Doutor em Matemática - UFC

Teresina - PI

2020

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial de Ciências da Natureza - CCN

G633n Gomes, Francisco Bergson Araújo.
Números primos, aplicações olímpicas / Francisco Bergson Araújo Gomes. – Teresina: 2020.
80 f. il.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT, 2020.
Orientador: Prof. Dr. Antonio Kelson Vieira da Silva.

1. Ensino de Matemática. 2. Números Primos. 3. OBMEP I. Titulo.

CDD 510

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes – CRB3/1461

FRANCISCO BERGSON ARAUJO GOMES

NÚMEROS PRIMOS, APLICAÇÕES OLÍMPICAS

Dissertação apresentada ao Curso de pós-Graduação em Matemática-Profissional da UFPI, como requisito parcial para a obtenção do grau de MESTRE em Ensino de Matemática.

Aprovado em 22/07/2020

BANCA EXAMINADORA

Antonio K V Silva

ANTONIO KELSON VIEIRA DA SILVA

Doutor em Matemática - UFC

Liane Mendes Feitosa Soares

LIANE MENDES FEITOSA SOARES

Doutora em Matemática - UFC

Edvalter da Silva Sena Filho

EDVALTER DA SILVA SENA FILHO

Doutor em Matemática - UFC

A Deus, por tudo.

A toda minha família, em especial minha mãe, que me fez o que sou.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por me guiar e me dar forças para continuar diante de todas as dificuldades.

A minha mãe, Simone Araujo Ferreira, por toda sua vida que foi dedicado aos filhos.

A meus irmãos, Breno Gomes e Brenda Gomes, os mais verdadeiros amigos.

A minha esposa, Antônia Raquel Mariano de Paiva, pelo companheirismo nos momentos difíceis.

A minha filha de coração, Ranamara Ferreira de Paiva, por ser tão maravilhosa, e me ajudar a estudar cuidando do seu irmão.

Ao meu filho, Antonio Ruan de Paiva Gomes, por ser a maior motivação de tudo na minha vida.

Ao meu orientador, prof. Dr. Antonio Kelson Vieira da Silva, por sua paciência e importantíssima contribuição.

A professora Solange Linhares, por ensinar com amor e me apresentar a porta de entrada para esse mundo magnífico chamado matemática.

A família de Marcelo Holanda e sua esposa Regina, pelo apoio, pois sem os quais não teria conseguido.

Aos meus amigos de turma, pelo sensacional companheirismo, em especial, Sérgio Castro por ter sido um grande parceiro nesta etapa.

Ao meu amigo, Rodolfo Teixeira, pelo companheirismo nos estudos e na estrada.

Ao meu grande amigo, Marcelo Aguiar, pela força que sempre me deu, por sempre ter acreditado em mim, quando talvez nem eu mesmo acreditasse.

Ao professor João Batista Farias Damasceno, (professor Figueiredo), pela ajuda prestada.

Aos meus companheiros de trabalho, pela ajuda e força nesta caminhada, em especial, minhas excelentíssimas diretoras, Núbia Maria, Júlia Maria e Dalva Bezerra.

Aos professores que tive na UFPI, Kelson, Liane, Valmária, Manoel Vieira, Gleison, Gildásio Guedes, Jackelia, Jéferson Leite e Isaías, pelos riquíssimos ensinamentos que se mostraram de fundamental importância nessa caminhada.

Aos meus amigos que sempre me desejaram sorte, e sempre me ajudaram no que precisei, em especial meu grande amigo Darlan Souza.

Enfim, a todos que de alguma forma colaboraram para que este sonho se realizasse.

"O alto nível de conhecimento pode ser tanto, um grande mar de insanidade, no qual velejamos com as vendas da falta de bom senso, como também a melhor das ferramentas para modificar o meio. O que define a diferença é o que tens no coração".

Bergson Gomes

Resumo

Neste trabalho, foi explorado o estudo dos números primos e suas aplicações na OBMEP e no concurso Canguru de Matemática Brasil. Comparamos dois materiais didáticos que tratam de números primos de formas bem diferentes, o livro didático "A Conquistada Matemática" e um material extraído do POTI (Polo Olímpico de Treinamento Intensivo). Aplicamos, de forma virtual, uma aula sobre os números primos, afim de se verificar na turma, parâmetros fundamentais para um bom desenvolvimento do aprendizado, como: participação, resolução de problemas, entre outros. Enfim, o objetivo deste trabalho foi obter um parâmetro para nortear a abordagem do ensino dos números primos aplicados em provas olímpicas, tal como sua exploração no sistema regular de ensino. Tecer uma opinião de como se deve trabalhar o assunto, baseada em dados obtidos a partir do experimento.

Palavras-chaves: Números primos, Matemática, Ensino, Olimpíadas de Matemática.

Abstract

In this work, the study of prime numbers and their applications in OBMEP and in the Kangaroo of Mathematics Brazil contest was explored. We compared two teaching materials that deal with prime numbers in very different ways, the textbook "A Conquistada Mathematics" and a material extracted from POTI (Olympic Intensive Training Pole). We applied, in a virtual way, a class on prime numbers, in order to verify in the class, fundamental parameters for a good development of learning, such as: participation, problem solving, among others. Anyway, the objective of this work was to obtain a parameter to guide the approach of teaching the prime numbers applied in Olympic tests, such as its exploration in the regular education system. To give an opinion on how to work the subject, based on data obtained from the experiment.

Keywords: Prime numbers, Mathematics, Teaching, Mathematics olympics.

Sumário

1 Introdução

Na minha trajetória como aluno e posteriormente como professor, destacam-se sem sombra de dúvidas dois temas que, particularmente, me atraem muito no mundo do ensino de matemática. O primeiro deles é o fascinante mistério que envolve os números primos. Quando aluno, sempre me intriguei bastante com o tema, sendo um dos fatores que me motivaram a querer fazer parte desse ramo. O segundo, já como professor, foi o ramo das olimpíadas de matemática. Concordando com Shine (2009), acredito que o papel das olimpíadas de matemática é de fundamental importância para o conhecimento de uma matemática diferente. Talvez por isso, tenho esse gosto por temas olímpicos. Resolvi unir esses dois assuntos que me marcaram para esta dissertação, fazendo um parâmetro de estudos com dois tipos de materiais abordando o mesmo assunto: Números primos.

O trabalho do professor nos dias atuais é, sem dúvidas, um desafio gigantesco, quando voltamos as atenções para o ensino de matemática, esse desafio se torna ainda maior. Segundo Lima et al. (2007), são vários os motivos para o baixo rendimento no ensino da matemática. Ter alunos motivados, é fundamental para um bom processo de ensino aprendizagem, devemos encontrar uma maneira para motivar nossos alunos, consequentemente nos motivar-mos, o que não é uma tarefa fácil. É preciso planejar a melhor estratégia para que se obtenha êxito em atrair o aluno para aprender, e continuar aprendendo.

> A palavra *motivação* é, atualmente, uma das mais usadas pelos professores e outros responsáveis pela educação, em particular a educação formal, para justificar quer o insucesso quer o sucesso dos alunos, em particular no ensino e na aprendizagem da ciência escolar (RIBEIRO, 2011).

O modo como abordamos um conteúdo, a maneira como o apresentamos e o desenvolvemos para a turma é de fundamental importância para a efetiva participação dos alunos no processo de ensino-aprendizagem, tendo como fundamental a relação interpessoal entre professores e alunos, temos que uma boa conduta do professor unida com uma atraente abordagem de um conteúdo bem curioso, obteremos a receita para um bom resultado nesse processo. (BARIANI; PAVANI, 2008).

Em busca dessa melhor estratégia, esse texto traz uma experiência feita com alunos de 8º e 9º anos da Escola Municipal Manoel Bandeira de Moura, em Guaraciaba do Norte - CE, que consiste em comparar dois materiais com abordagens diferentes do mesmo assunto. A realização de um experimento enriquece nossas informações e fortalece nossos dados sobre uma pesquisa.

> O uso de experimentos didáticos como prática educacional de forma tradicional em laboratório ou de forma mais simples em sala de aula é sem dúvida uma importante ferramenta no ensino (MORAES; JUNIOR, 2015).

Com efeito, a prática do experimento nos permite acompanhar de perto e documentar com maior precisão os pontos cruciais de uma atividade da qual nos interessam as consequências. Dando maior confiabilidade e credibilidade para resultados outrora supostos. No experimento que se encontra nesse trabalho, verificou-se o desempenho de um grupo de estudantes, que foi dividido em duas turmas, em uma atividade educacional. Esses alunos cursam os anos finais do Ensino Fundamental em uma escola no interior do Ceará.

Seguindo a linha de pensamento de Botas e Moreira (2013), o material didático é uma ferramenta importantíssima para uma boa execução do plano de ensino. Dado que ele vai nortear os passos do professor durante a aula, fica imprescindível sua importância. Portanto, em linhas gerais, tivemos como objetivo analisar os resultados que essas duas turmas apresentaram, após terem sido submetidas à aulas de um mesmo conteúdo, porém com materiais de apoio distintos. Afim de determinar para que situação qual material é o mais apropriado.

2 Números Naturais

Os números naturais estão presentes no cotidiano da humanidade desde a pré-história, segundo Ifrah (1989), nessa época já se conseguia perceber uma correspondência um a um, por exemplo, já se concluía que quatro cadeiras não eram suficientes para 5 pessoas.

Relacionar uma pedra, ou um nó em uma corda, para cada ovelha que saia para o pasto é um exemplo dessa relação de correspondência um a um. Mal sabiam esses pastores que com isso dariam início a aritmética que conhecemos hoje. Isso também deu origem a palavra cálculo. (FRAGA et al., 2013).

Cabe aqui o relato histórico dessa prática.

> Antigos pastores, para controlar seus rebanhos de ovelhas, os associavam a pedras que guardavam em sacolas. Cada ovelha correspondia a uma pedrinha. No início e final do dia, faziam as devidas correspondências. Se sobrasse pedra, faltava ovelha. Como pedrinha em latim significa "Calculus", daí vem a palavra cálculo (SOMATEMATICA, 2020).

Certa vez Leopold Kronecker (1823-1891) disse, *"Deus fez os números inteiros, o resto é obra do homem"*. Essa frase é muito famosa por representar a natureza dos números inteiros, mais especificamente os naturais. Definimos como o **conjunto dos números naturais**, o conjunto $\mathbb{N}$, tal que;

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}.$$

2.1 Axiomas de Peano

De acordo com Lima (2004), todo o estudo sobre números naturais pode ser obtido a partir dos axiomas que serão citados a seguir. Esses postulados são conhecidos como **axiomas de Peano** por terem sido publicados pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858 - 1932) por volta do ano de 1900. Para referências posteriores, definimos como $s(a)$ o **sucessor** do número natural a.

A1: 0 (zero) é um número natural e não é sucessor de um número natural.

A2: todo número natural tem um único sucessor, que também é um número natural.

A3: se dois números naturais tem o mesmo sucessor, então eles são iguais entre si.

A4: *(Axioma da Indução)* Se um subconjunto X dos números naturais possui o elemento zero e também o sucessor de todos os elementos de X, então X é igual ao conjunto dos números naturais (GEQUELIM, 2012).

Teorema 2.1.1. *(Princípio de Indução Matemática) Seja P(n) uma sentença aberta sobre o número natural n. Se valem as duas condições:*
(i) $P(0)$ *é verdadeira;*
(ii) *Para todo n, se* $P(n)$ *é verdadeira, então* $P(s(n))$ *é verdadeira;*
então $P(n)$ *é verdadeira para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja $S = \{n \in \mathbb{N}; P(n) \text{ é verdadeira}\}$ vamos mostrar que $S = \mathbb{N}$. Da hipótese (i) temos que $0 \in S$. Supondo que $n \in S$, temos que $P(n)$ é verdadeira. Por (ii), $P(s(n))$ é verdadeira logo $s(n) \in S$. Assim, $n \in S$ implica $s(n) \in S$ e pelo axioma **A4** $S = \mathbb{N}$. Logo, $P(n)$ é verdadeira, para todo $n \in \mathbb{N}$. □

2.2 Operações com Números Naturais

Por motivos de objetividade não fizemos um estudo minucioso sobre as operações com números naturais, para o leitor que quiser se aprofundar no assunto, deixo como sugestão os livros *Curso de Análise Vol 1* (LIMA, 2004) e *Elementos de Aritmética* (HEFEZ, 2006). Destacamos que Hefez define o 0 (zero) como natural enquanto que para Lima os naturais começam a partir do número 1.

Operação 1: Adição

Para definirmos a **adição** de dois números naturais começamos definindo a adição de qualquer natural com 0 (z ero), a adição de qualquer natural com 1 (um) e a adição de um natural com o sucessor de outro natural.

$$i)\ a+0=a \qquad ii)\ a+1=s(a) \qquad iii)\ a+s(b)=s(a+b).$$

(GEQUELIM, 2012).

Comutatividade: Se $a, b \in \mathbb{N}$ então $a + b = b + a$.

Associatividade: Se $a, b, c \in \mathbb{N}$ então $a + (b + c) = (a + b) + c$.

Lei do corte: Se $a, b, c \in \mathbb{N}$ e $a + b = a + c$ então $b = c$.
(LIMA, 2004)

Operação 2: Multiplicação

Análoga a adição temos a **multiplicação** ou **produto**, ou seja, definimos inicialmente o produto de qualquer número natural por 0, em seguida por 1 e finalmente a multiplicação de um natural por o sucessor de outro natural.

$$i)\ a \cdot 0 = 0 \qquad ii)\ a \cdot 1 = a \qquad iii)\ a \cdot s(b) = a \cdot b + a.$$

(GEQUELIM, 2012).

Comutatividade: Se $a, b \in \mathbb{N}$ então $a \cdot b = b \cdot a$.

Associatividade: Se $a, b, c \in \mathbb{N}$ então $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

Lei do corte: Se $a, b, c \in \mathbb{N}$ com $a \neq 0$ e $a \cdot b = a \cdot c$ então $b = c$.
(LIMA, 2004)

Operação 3: Subtração

Subtração em aritmética é a operação que tem por objetivo, dados dois números, achar a quantidade pela qual um excede o outro; diminuição (Operação inversa da adição) (FERREIRA; ANJOS, 1988).

Relação fundamental da subtração: dados dois números naturais a e b com $a \leq b$, sabemos que existe um terceiro número natural c tal que, $b = a + c$. Definimos daí o número b *menos* a por $b - a$, como sendo c. Logo: $b - a = c$. Concluímos a partir daí que existe a relação;

$$a - b = c \Leftrightarrow b + c = a.$$

Operação 4: Divisão

Divisão em aritmética é a operação que consiste em descobrir quantas vezes um número está contido em outro (FERREIRA, 2004).

Divisibilidade: dados a e b naturais com $a \neq 0$, dizemos que a *divide* b pela notação $a \mid b$, quando existir um c natural tal que $b = a \cdot c$. Se isso ocorre então dizemos também que a é um divisor de b, ou que b é divisível por a ou ainda que b é um múltiplo de a (DOMINGUES, 2009).

Algorítimo da divisão Euclidiana: sejam a, b naturais, e b não nulo, ao efetuarmos a divisão de a por b temos duas situações possíveis.

1º CASO: $b \mid a$, ou seja, b é um divisor de a. O que implica que existe um $c \in \mathbb{N}$ tal que $a = b \cdot c$.

2º CASO: $b \nmid a$, ou seja, existem $q, r \in \mathbb{N}$ com $r < b$ tais que $a = b \cdot q + r$, onde q e r são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão (HEFEZ, 2006).

3 Números Primos

Ao estudarmos o conjunto dos números naturais, encontramos um novo conjunto contido nele que desempenha um papel fundamental na composição de todos os outros números, muito peculiar e bastante excêntrico. Apresentamos o conjunto dos números primos, o qual denotaremos algumas vezes neste trabalho por $\mathbb{P}$. Definimos como **número primo** qualquer número natural maior que 1 que só é divisível por 1 e por si mesmo.

> *Primus* é uma palavra latina que significa "primeiro e único". Ela foi escolhida para denominar o grupo dos números naturais divisíveis apenas por dois números naturais distintos: 1 e ele mesmo (JÚNIOR; CASTRUCCI; GIOVANNI, 2018).

Exemplo 3.0.1. Veja que o número 2 só é divisível por 1 e por 2, logo 2 é um número primo, o mesmo acontece com o 3 que possui apenas o 1 e o 3 como seus divisores, ou seja, o 3 também é primo. Já o número 4 além do 1 e do 4, também possui o 2 como divisor, com isso concluímos que o 4 não é primo. Todo número natural maior que 1 que não é primo, é dito **número composto** (HEFEZ, 2006).

São muitas as curiosidades envolvendo os números primos, eles também são responsáveis por muitos problemas matemáticos antigos ainda sem solução. Por exemplo, a conjectura de Goldbach, proposta pelo matemático prussiano Christian Goldbach que diz que todo número par pode ser escrito como a soma de dois números primos, ainda é uma incógnita. Apesar de já ter sido verificada para todos os números pares até $4 \cdot 10^7$, o teorema ainda não foi efetivamente comprovado (RIBENBOIM, 2012).

Outro exemplo é a conjectura dos **primos gêmeos**, que afirma que existem infinitos pares de primos cuja a diferença entre eles é igual a 2. O menor par de primos gêmeos é (3,5) enquanto que até o ano de 2009 o maior par de primos gêmeos encontrado era $(65516468355 \cdot 2^{333333} - 1, 65516468355 \cdot 2^{333333} + 1)$, cada número com 100355 dígitos. Essa conjectura também perdura até os dias atuais sem uma comprovação (RIBENBOIM, 2012).

3.1 Teorema Fundamental da Aritmética

Conforme dito, os números primos são fundamentais na composição dos demais números naturais. O Teorema Fundamental da Aritmética é uma prova disso, segundo Marques (2013), este teorema nos permite adotar a ideia de que os números primos estão para os números naturais, assim como os átomos estão para os elementos químicos.

Teorema 3.1.1. ***(Teorema Fundamental da Aritmética)*** *Dado um natural $n > 1$, existem primos $p_1 < ... < p_r$ e $\alpha_1, ..., \alpha_r, \in \mathbb{N}$, univocamente determinados, tais que;*

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$$

Demonstração. Segundo Hefez, a demonstração desse teorema é composta fundamentalmente de duas partes, uma delas é a prova de que todo natural maior que 1 pode ser escrito como produto de números primos, enquanto que a outra parte diz respeito a unicidade dessa representação, ou seja, todo natural maior que 1 possui uma única decomposição em fatores primos. Deixo como sugestão de leitura a seguinte página da internet: *http://clubes.obmep.org.br/blog/teorema-fundamental-da-aritmetica.* □

3.2 A Infinidade dos Primos

Uma pergunta que provavelmente vai surgir à quem esteja a estudar sobre os números primos é: "Quantos são os números primos?". Segundo Ribenboim (2012) muitos matemáticos provaram que os números primos são infinitos, contudo, um deles foi o quem ganhou mais fama por esse feito. Euclides demonstrou tal fato em um livro chamado "*Os elementos*". Faremos uma demonstração baseada no trabalho de Euclides.

Proposição 3.2.1. *Os números primos são infinitos.*

Demonstração. Suponha que os números primos sejam finitos, então, temos que o conjunto $\mathbb{P}$ que possui todos os primos, é tal que $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, p_3, ..., p_n\}$ com $n \in \mathbb{N}$. A partir disso, teríamos um número $P \in \mathbb{N}$ tal que $P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_n$. Note que $P + 1$ não é divisível por nenhum elemento de $\mathbb{P}$, logo $P + 1$ só é divisível por 1 e por $P + 1$, ou seja, pelo teorema 3.1.1 $P+1$ é um número primo. Porém, como $P+1$ não pertence à $\mathbb{P}$ concluímos que $\mathbb{P}$ não é finito, portanto os números primos são infinitos.

□

4 Distribuição dos Números Primos

Já sabemos que os números primos são infinitos, agora cabe a pergunta: "Podemos encontrar um sequência que nos dê todos os números primos ordenadamente?". O que estou perguntando é. "Será se existe uma função que associe cada número natural à um número primo?". A resposta para essa pergunta, por enquanto, ainda é não. Apesar de grandes matemáticos terem dedicado muitos anos a este tema, não foi encontrada tal função. Pela dificuldade do problema, e pela falta de novas descobertas, o foco se desviou para outro problema. A frequência com que os primos aparecem entre os naturais (RIBENBOIM, 2012).

4.1 Crivo de Eratóstenes

Eratóstenes foi um matemático grego do século II a.C, muito conhecido por ter calculado a circunferência da Terra com bastante precisão para a época. Ele também desenvolveu um método bem prático para determinar números primos até um certo número n (NETO, 2012).

Vejamos como encontrar todos os primos menores que 60. Colocam-se todos os números naturais de 2 a 60 numa tabela, a partir daí, encontramos os números primos menores, e eliminamos os seus múltiplos. O 2 é primo, ai marcam-se todos os múltiplos de 2. Em seguida temos o 3, que é o próximo primo, então marcam-se todos os múltiplos de 3, e assim sucessivamente até que tenhamos descoberto todos os números primos menores que 60 (HEFEZ, 2006).

	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\cancel{4}$	$\boxed{5}$	$\cancel{6}$	$\boxed{7}$	$\cancel{8}$	$\cancel{9}$	$\cancel{10}$
$\boxed{11}$	$\cancel{12}$	$\boxed{13}$	$\cancel{14}$	$\cancel{15}$	$\cancel{16}$	$\boxed{17}$	$\cancel{18}$	$\boxed{19}$	$\cancel{20}$
$\cancel{21}$	$\cancel{22}$	$\boxed{23}$	$\cancel{24}$	$\cancel{25}$	$\cancel{26}$	$\cancel{27}$	$\cancel{28}$	$\boxed{29}$	$\cancel{30}$
$\boxed{31}$	$\cancel{32}$	$\cancel{33}$	$\cancel{34}$	$\cancel{35}$	$\cancel{36}$	$\boxed{37}$	$\cancel{38}$	$\cancel{39}$	$\cancel{40}$
$\boxed{41}$	$\cancel{42}$	$\boxed{43}$	$\cancel{44}$	$\cancel{45}$	$\cancel{46}$	$\boxed{47}$	$\cancel{48}$	$\cancel{49}$	$\cancel{50}$
$\cancel{51}$	$\cancel{52}$	$\boxed{53}$	$\cancel{54}$	$\cancel{55}$	$\cancel{56}$	$\cancel{57}$	$\cancel{58}$	$\boxed{59}$	$\cancel{60}$

Tabela 4.1: Crivo de Eratóstenes

Outra maneira de gerar números primos e testar a primalidade parte da proposição abaixo.

Proposição 4.1.1. *Se um natural* $n > 1$ *não é divisível por nenhum número primo* p *tal que* $p^2 \leq n$*, então ele é primo.*

Demonstração. Suponha que n não seja divisível por nenhum número primo p tal que $p^2 \leq n$ e que não seja primo. Seja q o menor número primo que divide n; então, $n = qn_1$, com $q \leq n_1$. Segue que $q^2 \leq qn_1 = n$. Logo n é divisível por um número primo q tal que $q^2 \leq n$, o que é um absurdo (HEFEZ, 2006). □

4.2 A Tabela PRIMOS

Os números primos e sua distribuição são assuntos muito interessantes e de feitos impressionantes até então, a espiral de Ulam por exemplo, surgiu quase que de brincadeira, quando o matemático polonês Stasnilaw Marcin Ulam (1909 - 1984) em um encontro cientifico, após se entediar com uma apresentação longa e cansativa, resolveu escrever os inteiros positivos em uma espiral, como na figura 4.1.

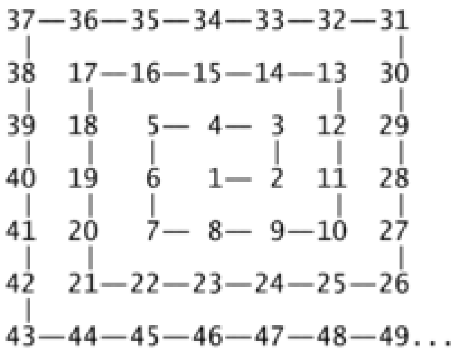


Figura 4.1: A espiral de Ulam
FONTE: (WKIPEDIA, 2020) [1]

Essa "brincadeira" posteriormente rendeu bons estudos sobre os números primos, até a relação com o polinômio de Euler, o qual citaremos posteriormente neste trabalho (FILHO, 2019).

De maneira parecida, a tabela PRIMOS surgiu a partir de a observação de um aluno. Essa tabela é composta de 6 colunas, uma para cada letra da palavra PRIMOS, e tantas linhas quanto quisermos.

Veja a tabela 4.2 *(Tabela PRIMOS)*.

P	R	I	M	O	S
1	2	3	4	$\boxed{5}$	6
$\boxed{7}$	8	9	10	$\boxed{11}$	12
$\boxed{13}$	14	15	16	$\boxed{17}$	18
$\boxed{19}$	20	21	22	$\boxed{23}$	24
25	26	27	28	$\boxed{29}$	30
$\boxed{31}$	32	33	34	35	36
$\boxed{37}$	38	39	40	$\boxed{41}$	42
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 4.2: Tabela Primos

Nesse pequeno exemplo já percebemos um curioso padrão. Os números primos maiores que 3 estão sempre na coluna P ou na coluna O. Um fato interessante é que todos os números das colunas P e O são da forma $6k + 1$ e $6k + 5$ para algum $k \in \mathbb{N}$ respectivamente, o que nos rende a seguinte proposição.

Proposição 4.2.1. *Todo número primo maior que 5 é do tipo* $6k + 1$ *ou* $6k + 5$*.*

Demonstração. Todo número natural se escreve de uma das seguintes maneiras $6k$, $6k+1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$ ou $6k + 5$. É claro que se esse número for primo, essas opções se reduzem a $6k + 1$ e $6k + 5$ caso contrário o número seria par ($6k$, $6k + 2$ ou $6k + 4$) ou múltiplo de 3 ($6k + 3$). Com isso concluímos que todo número primo maior que 5 é do tipo $6k + 1$ ou $6k + 5$. $\square$

5 Fórmulas Geradoras

Como vimos anteriormente neste trabalho, ainda não existe uma fórmula que dê o enésimo número primo, porém existem diversos polinômios que geram alguns números primos, alguns exemplos estão na figura 5.1.

Polinômio
$n^4 - 97n^3 + 3294n^2 - 45458n + 213589$
$n^5 - 99n^4 + 3588n^3 - 56822n^2 + 348272n - 286397$
$-66n^3 + 3845n^2 - 60897n + 251831$
$36n^2 - 810n + 2753$
$3n^3 - 183n^2 + 3318n - 18757$
$47n^2 - 1701n + 10181$
$103n^2 - 4707n + 50383$
$n^2 - n + 41$
$42n^3 + 270n^2 - 26436n + 250703$
$43n^2 - 537n + 2971$
$8n^2 - 488n + 7243$
$6n^2 - 342n + 4903$
$2n^2 + 29$
$n^2 - n + 41$
$7n^2 - 371n + 4871$
$n^4 + 29n^2 + 101$
$3n^2 + 39n + 37$
$n^2 + n + 17$
$4n^2 + 4n + 59$
$2n^2 + 11$
$n^3 + n^2 + 17$

Tabela 5.1: Alguns Polinômios Geradores de Primos
FONTE: (FORNARI; ORIHUELA,)

Essas funções que relacionam número naturais com números primos são definidos como **fórmulas geradoras**, muitos matemáticos criaram ou descobriram polinômios que geram números primos a partir de números naturais. Citamos a seguir os mais famosos.

5.1 Os Primos de Fermat

Pierre de Fermat (1607 - 1665) desenvolveu a fórmula $F_n = 2^{2^n} + 1$ e conjecturou que todo número dessa forma era primo, baseado no fato de que F_1, F_2, F_3 e F_4 são respectivamente, 5, 17, 257 e 65537, todos primos. Posteriormente, mais precisamente em 1732, Leonhard Euler (1707 - 1783) mostrou que F_5 não era primo. De fato;

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$$

Derrubando assim a afirmativa de Fermat. Até hoje não se sabe se os primos de Fermat são infinitos, ou seja, se existe F_n primo para $n > 5$ (HEFEZ, 2006).

5.2 Os Primos de Mersenne

Marin Mersenne (1588 - 1648) criou uma das fórmulas geradoras de primos mais famosas da história da matemática. Os primos da forma;

$$M_p = 2^p - 1,$$

sendo p primo, são conhecidos como *Primos de Mersenne.* A tabela à seguir mostra os *primos de Mersenne* com $2 \leq p \leq 20$.

p	M_P
2	$2^2 - 1 = 3$
3	$2^3 - 1 = 7$
5	$2^5 - 1 = 31$
7	$2^7 - 1 = 127$
13	$2^{13} - 1 = 8191$
19	$2^{19} - 1 = 524287$

Tabela 5.2:

Segundo Magossi, até o ano de 2018 o maior primo de Mersenne conhecido era o $M_{82589933}$, o qual tem 24 862 048 dígitos. Vale lembrar que os números de Merssene são todos os números inteiros do tipo $2^n - 1$, onde n é um número natural, se um número de Merssene é primo, então ele é dito primo de Merssene.

5.3 O Polinômio de Euler

Leonhard Euler (1707 - 1783) em uma de suas grandes contribuições para a matemática deu um exemplo de função geradora de primos, que ainda hoje é o polinômio que gera mais primos em sequência. O polinômio $P(n) = n^2 - n + 41$ (Polinômio de Euler), gera um primo para cada natural $0 \leq n \leq 40$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	40
$P(n)$	41	41	43	47	53	61	71	83	97	...	1601

Tabela 5.3:

Para $n > 40$, o polinômio gera alguns compostos (MAGOSSI, 2019).

Começando a espiral de Ulam com o número 41 vemos os primos encontrados pelo polinômio de Euler alinhados, veja na figura 5.1

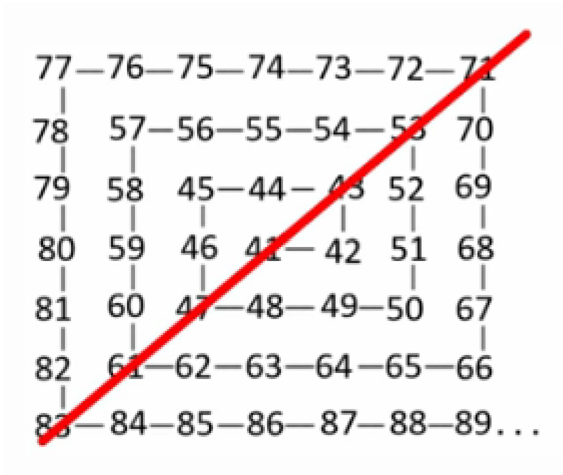


Figura 5.1: A espiral de Ulam iniciada por 41
FONTE: (TODAAMATEMATICA.COM, 2020)

Esse resultado era, de certa forma, inesperado pois não sabemos ainda se os primos obedecem ou não um padrão de distribuição. É importante ressaltar que em 1743, Chistian Goldbach (1690 - 1764) provou, em uma carta a Euler, que **não existe** um polinômio de coeficientes inteiros que sempre forneça números primos.

Teorema 5.3.1. *Todo polinômio com coeficientes inteiros assume uma infinidade de números compostos.*

Demonstração. Considere inicialmente o caso de grau 2. Suponha que exista um polinômio P tal que $P(n) = an^2 + bn + c$; $a, b, c \in \mathbb{Z}$ de modo que $P(n)$ seja primo para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Daí teríamos $P(1) = a + b + c = r$ primo, e também, para todo $t \in \mathbb{N}$ teríamos;

$$\begin{aligned} P(1+tr) &= a(1+tr)^2 + b(1+tr) + c \\ \Rightarrow P(1+tr) &= a + b + c + 2atr + (tr)^2 + b(tr) \\ \Rightarrow P(1+tr) &= r + 2atr + (tr)^2 + b(tr) \\ \Rightarrow P(1+tr) &= r(1 + 2at + t^2r + bt) \\ \Rightarrow r &\mid P(1+tr). \end{aligned}$$

O caso geral é totalmente análogo (FILHO, 2019). □

6 Aplicações Olímpicas

De acordo com Maciel-CMPA e Basso-UFRGS (2009), as competições matemáticas são organizadas há muito tempo, já no século XVI, eram famosos os desafios nos quais importantes matemáticos empenhavam sua reputação, razoáveis quantias em dinheiro e, até mesmo, suas cátedras em importantes universidades italianas.

> Um matemático, cuja notoriedade do saber permitia que detivesse uma cátedra numa universidade, tinha reconhecimento público, prestígio e, principalmente, uma condição econômica privilegiada. Essa situação confortável despertava o interesse de outros matemáticos mais jovens e menos conhecidos, que também buscavam a notoriedade, procurando vencer desafios públicos contra matemáticos respeitados e experientes (MACIEL-CMPA; BASSO-UFRGS, 2009).

Neste capítulo mostraremos como os números primos são abordados nas duas olimpíadas de matemática mais abrangentes do país, a OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), administrada pela SBM, e o Canguru de Matemática Brasil, promovido pela AKSF (Association Kangourou sans Frontières). Veremos alguns exemplos de problemas e suas respectivas soluções.

6.1 OBMEP

Famosa por ser a maior olimpíada de matemática do Brasil, a OBMEP, desde 2005, vem fazendo parte da vida de muitos estudantes no país, transformando o mundo de milhares de jovens com o poder da matemática (OBMEP, 2020).

> A OBMEP foi inspirada nos moldes do projeto NUMERATIZAR, do estado do Ceará. Tal projeto apresentou sua primeira edição em 2003 sob a coordenação da Universidade Federal do Ceará, tendo o formato muito similar ao de uma olimpíada e possuindo proposituras a nível regional muito assemelhadas com as da OBMEP a nível nacional: o aprimoramento do ensino nas instituições públicas, a descoberta de novos talentos e o incentivo para o estudo da disciplina de Matemática (SILVA, 2017).

Promovida pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) em parceria com a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e com o apoio do Governo Federal, a OBMEP é voltado para alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e aos alunos do Ensino Médio, de escolas públicas municipais, estaduais e federais, e Escolas Privadas, o programa também abrange professores, escolas e secretarias de educação (SILVA, 2018).

No Piauí a OBMEP é bastante influente, e todos anos registra muitos medalhistas nessa competição. Segundo Silva (2018), apesar do percentual de municípios medalhistas ser baixo, muitos são os jovens piauienses que conquistaram medalhas na OBMEP, o maior destaque sem dúvidas é o município de Cocal dos Alves que fica a cerca de 220 km de Teresina. Mesmo sendo uma cidade pequena, com aproximadamente 6000 habitantes, Cocal dos Alves até o ano de 2016 conquistou metade de todas as medalhas de ouro do Piauí.

Vejamos alguns exemplos de problemas no perfil da OBMEP.

PROBLEMA: (Banco de questões da OBMEP - 2010) Quais são os números cujos triplos somados com 1 dão um número primo entre 70 e 110?

Solução: Os primos entre 70 e 110 são {71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109}; Subtraindo 1 de cada um desses números temos;

$$70, 72, 78, 82, 88, 96, 100, 102, 106, 108$$

Desta lista os múltiplos de 3 são;

$$72, 78, 96, 102, 108$$

Portanto os números são;

$$72 \div 3 = 24,\ 78 \div 3 = 26,\ 96 \div 3 = 32,\ 102 \div 3 = 34 \text{ e } 108 \div 3 = 36.$$

PROBLEMA: (Banco de questões da OBMEP - 2015) Sejam p, q e r números primos maiores que 3. Sabe-se que $p+q+r$ também é primo. Mostre que $p+q$, $p+r$ ou $q+r$ é um múltiplo de 6.

Solução: Primeiramente vejamos que, se um número primo p é maior que 3, então ele é deixa resto 1 ou 5 na divisão por 6. Segue daí que, p, q e r também deixam resto 1 ou 5 na divisão por 6. Perceba que esses números não deixam, simultaneamente, o mesmo resto na divisão por 6, caso contrário, $p+q+r$ seria um múltiplo de 3. Logo, dois dos números p, q ou r deixam um par de restos $\{1, 5\}$, que quando somados formam um número múltiplo de 6.

6.2 Canguru de Matemática Brasil

Segundo Lins (2016), Em 1991, os professores André Deledicq e Jean Pierre Boudine, inspirados pela Competição Australiana de Matemática, começaram um concurso semelhante na França, chamado Canguru Matemático.

Em junho de 1994, no Conselho Europeu em Estraburgo na França, os representantes de 10 países fundaram a Associação Canguru sem Fronteiras, sigla em inglês AKSF que regulamenta a competição até os dias atuais, com a participação de mais de 52 países.

PROBLEMA: (Canguru Brasil 2014 - Nível J) Num dado diferente, os números em algumas faces podem ser vistos na figura.

Figura 6.1:
FONTE: (CANGURUMATEMATICO, 2020)

Os números das faces não visíveis são todos primos. Sabendo que as somas dos números em faces opostas são iguais, qual é o número da face oposta à face com o número 14?

Solução: Temos $35 + x = 14 + y = 18 + z$, sendo x, y, z primos. Apenas 2 e -2 são primos pares e nenhum deles poderia se opor a 14 ou 18, pois a soma dos números nas faces opostas seria menor do que 35. Portanto, os primos opostos às faces 14 e 18 são ambos ímpares, logo o número oposto à face 35 tem forçosamente que ser par, já que as somas nas faces consideradas anteriormente são ímpares. Esse número não pode ser -2, pois $35 + (-2) = 33$, o que forçaria a face oposta a 18 ter número 15, que não é primo. Mas se $x = 2$, então $y = 23$ e $z = 19$. Logo, o número oposto ao número 14 é 23.

PROBLEMA: (Canguru Brasil 2016 - Nível J) No planeta dos cangurus cada mês tem 40 dias, numerados de 1 a 40. Todo dia cujo número é divisível por 6 é feriado e todo dia cujo número é primo também é feriado. Quantas vezes por mês um dia de trabalho cai entre dois feriados consecutivos?

Solução: Feriados múltiplos de seis: $\{6, 12, 18, 24, 30, 36\}$, feriados primos: $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37\}$. Vejamos os casos em que há somente um número entre dois primos da sequência acima: 4 entre 3 e 5; 6 entre 5 e 7; 12 entre 13 e 17; 18 entre 17 e 19; 30 entre 29 e 31. Com exceção do primeiro caso, todos são múltiplos de 6, logo são feriados. Portanto, o número de dias de trabalho entre dois feriados consecutivo é um.

7 Pesquisa de Campo

7.1 Metodologia

O experimento foi constituído de três etapas. Na primeira etapa, criou-se um grupo de alunos de 8º e 9º anos do ensino fundamental, o qual chamamos de Turma 1, que tiveram uma aula expositiva sobre números primos como o livro didático adotado pela secretaria de educação do município. Em seguida, foi realizado um teste que era composto tanto de questões do próprio livro como de questões olímpicas.

Na segunda etapa, foi criado um outro grupo de alunos também de 8º e 9º anos do ensino fundamental, ao qual foi chamado de Turma 2, que tiveram também uma aula expositiva sobre números primos, porém com um material específico de treinamento olímpico, adquirido no site do POTI (Polo Olímpico de Treinamento Intensivo). Em seguida, esse grupo se submeteu ao mesmo teste.

Por fim, foi feita uma Avaliação geral dos resultados dos testes afim de se tirar as mais prudentes conclusões sobre o experimento. Segundo Luckesi (2014), existe uma diferença entre examinar e avaliar o processo de aprendizagem. Partindo disso, tivemos como objetivo no processo avaliativo, não apenas o resultado do teste, mas sim todo o andamento do experimento, nos mais diversos aspectos como participação por exemplo.

7.2 Campo da Pesquisa

Devido a pandemia de "Covid-19", o passo a passo desta pesquisa se deu de forma remota, com respeito as normas de distanciamento e isolamento social. Recursos tecnológicos como, a plataforma "Google Hangouts Meet", para ministrar aulas, e o "Google Forms", para aplicação dos testes auxiliaram no desenvolvimento da pesquisa, dando espaço para uma nova perspectiva de interação educacional. Segundo Santos (2006), a avaliação no sistema de ensino digital tem muitas vantagens baseadas na autonomia do estudante, como por exemplo, autodidaxia, pesquisa e autoria, que são competências cruciais na formação critica do indivíduo, o que viabilizou a execução do nosso experimento.

O "Google Hangouts"é uma plataforma de comunicação, desenvolvida pela Google, que inclui mensagens instantâneas, chat de vídeo, SMS e VOIP. Foi lançada em 15 de maio de 2013, durante a conferência de desenvolvedores Google. Já os "Formulários Google"é um aplicativo de administração de pesquisa que está incluído no Google Drive suíte de escritório junto com o Google Docs , as Planilhas Google e Apresentações do Google. O Google Forms apresenta todas as funcionalidades de colaboração e compartilhamento encontrados em documentos, planilhas e slides (GOOGLE, 2020).

Todos os estudantes que participaram da pesquisa são alunos da Escola MANOEL BANDEIRA DE MOURA, localizada no distrito de Matinslândia, em Guaraciaba do Norte/CE - CEP: 62380-000. Contato: (88) 3652 - 8001 - e-mail: escolambm@gmail.com. INEP: 23010142, CNPJ: 01.950.630/0001-90 (SEDUC.CE, 2020). A escola da rede municipal, conta com a infraestrutura de 9 salas de aula, 1 sala de professores, 1 sala de diretoria, 1 biblioteca, 2 banheiros para professores, 2 banheiros para alunos, laboratórios de informática, de ciências e de matemática. A referida escola conta também com acesso à internet (ESCOL.AS, 2020).

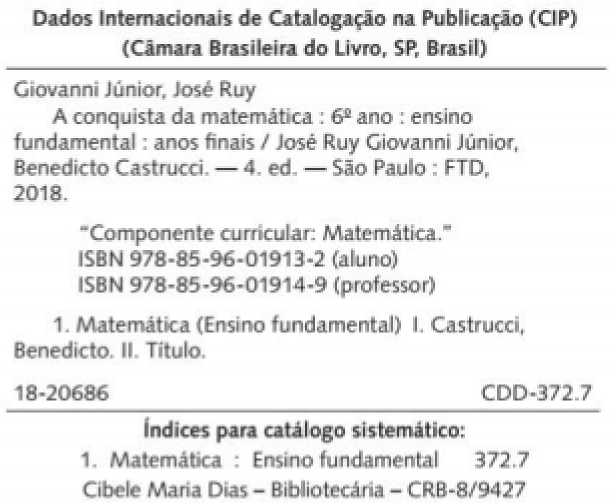
Fundada já em 2020, a MBM, como é carinhosamente chamada por seus professores e funcionários, oferece ensino de qualidade desde o Infantil até os anos finais do ensino Fundamental, distribuídos em 2 turnos de 4 horas cada. Sob a direção de Maria Dalva Bezerra, a escola conta com 41 (quarenta e um) funcionários dentre corpo docente e funcionários em geral. O alunato é composto de 400 (quatrocentos) alunos, sendo 35 (trinta e cinco) da educação infantil, e 315 (trezentos e quinze) do ensino fundamenta I e II (CENSO, 2020).

7.3 Aula Turma 1

A Turma 1 foi composta por 16 alunos escolhidos aleatoriamente, sendo 5 meninos e 11 meninas na faixa etária de 12 a 14 anos de idade. A aula teve duração total de 50 minutos, sendo 30 minutos para apresentação do conteúdo, 15 minutos para exemplos e atividades e 5 minutos para possíveis perguntas finais. A aula apresentou boa desenvoltura, sem grandes problemas para a execução do planejamento previsto e sem nenhum problema de conexão com a internet. Em boa parte da exposição do conteúdo os alunos se mostraram bastante atenciosos e participativos.

7.3.1 Material de Apoio

Para a aula na Turma 1 foi utilizado "power point"com imagens retiradas do livro *"A Conquista da Matemática - 6º ano"*. Observe a figura 7.1.



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Giovanni Júnior, José Ruy
A conquista da matemática : 6º ano : ensino fundamental : anos finais / José Ruy Giovanni Júnior, Benedicto Castrucci. — 4. ed. — São Paulo : FTD, 2018.

"Componente curricular: Matemática."
ISBN 978-85-96-01913-2 (aluno)
ISBN 978-85-96-01914-9 (professor)

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Castrucci, Benedicto. II. Título.

18-20686 CDD-372.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino fundamental 372.7
Cibele Maria Dias – Bibliotecária – CRB-8/9427

Figura 7.1:
FONTE: (JÚNIOR; CASTRUCCI; GIOVANNI, 2018)

Deste livro também foram extraídos algumas questões utilizadas para o teste.

7.3.2 Conteúdo

Listamos aqui os conteúdos abordados pelo livro citado no material de apoio referente a aula da Turma 1.

1. Definição de número primo: o livro usa como exemplo os números de 0 a 9 e seus respectivos divisores, mostrando que alguns desses números possuem apenas dois divisores, definido-os como primos.

2. Como reconhecer um número primo: Aqui o livro o seguinte processo para descobrir se um número é primo ou não.

- Dividimos o número dado pelos números primos menores que ele, até obter um quociente menor ou igual ao divisor.
- Se nenhuma das divisões efetuadas for exata, o número será primo.
- Se qualquer uma das divisões for exata, o número será primo.

Exemplo 7.3.1. Vejamos se o número 173 é primo a partir do processo citado.

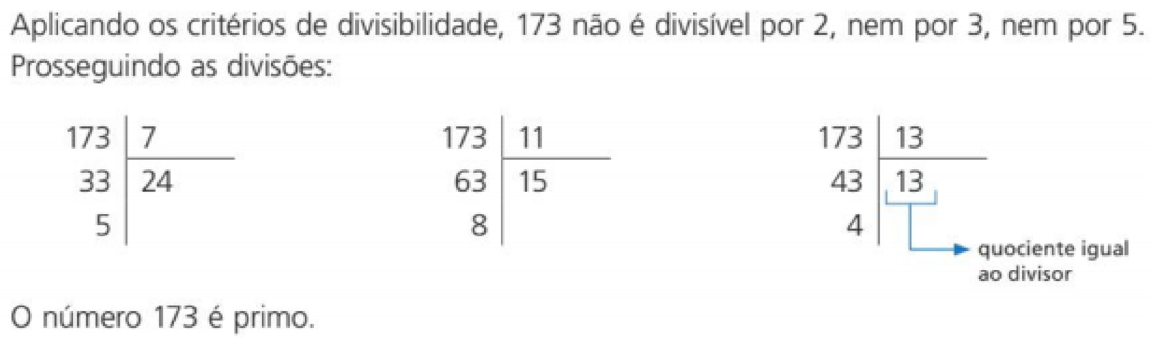


Figura 7.2:
FONTE: (JÚNIOR; CASTRUCCI; GIOVANNI, 2018)

3. Decomposição em Fatores Primos: nesse tópico o livro mostra com alguns exemplos particulares que, todo número ou é primo, ou se escreve como produtos de primos.

Exemplo 7.3.2. Veja a figura 7.3

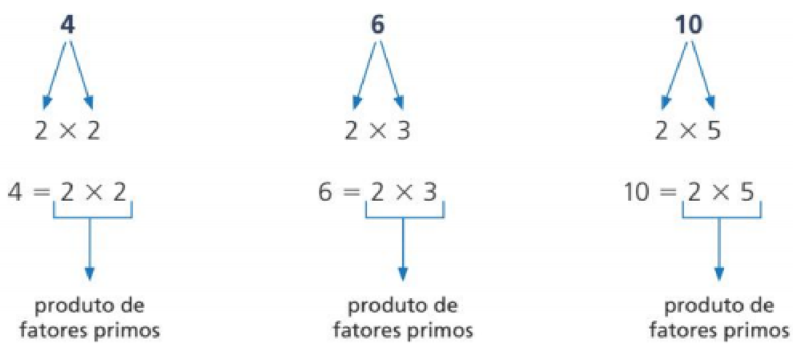


Figura 7.3:
FONTE: (JÚNIOR; CASTRUCCI; GIOVANNI, 2018)

7.4 Aula Turma 2

A Turma 2 foi composta por 16 alunos escolhidos de forma aleatória, sendo 4 meninos e 12 meninas na faixa etária de 12 a 14 anos de idade. Assim como a aula na Turma 1 a duração total foi de 50 minutos, sendo 30 minutos para apresentação do conteúdo, 15 minutos para exemplos e atividades e 5 minutos para possíveis perguntas finais.

A segunda aula, assim como a primeira também foi de excelente desenvoltura e perfeita execução do planejamento previsto e exímia transmissão virtual. A segunda turma também se mostrou bastante atenciosa e participativa, fazendo perguntas pertinentes e emitindo a sensação de entendimento.

7.4.1 Material de Apoio

Para a aula na Turma 2 foi utilizado um "power point"com imagens retiradas do material didático extraído do Polo Olímpico de Treinamento Intensivo (POTI). Mais precisamente, a aula 4 do Curso de Teoria dos Números, professor Samuel Feitosa (PINHEIRO et al., 2012). Disponível no link *https://poti.impa.br/uploads/material.pdf.*

A partir deste material foram pontuados os conteúdos para planejamento da aula da Turma 2, e selecionadas as questões para compor o teste que será aplicado às duas turmas. Segundo Rehfeldt e Quartieri (2004), para o ensino da matemática, basta a ideia de fazer ou experienciar para aprender.

7.4.2 Conteúdo

1. Definição de número primo: a definição apresentada por Pinheiro et al. (2012) é bem direta e usa dos termos mais técnicos e formais da escrita matemática. Observe a figura 7.4.

Definição 1. *Um inteiro $p > 1$ é chamado número primo se não possui um divisor d satisfazendo $1 < d < p$. Se um inteiro $a > 1$ não é primo, ele é chamado de número composto. Um inteiro m é chamado de composto se $|m|$ não é primo.*

Figura 7.4:
FONTE: (PINHEIRO et al., 2012)

2. Aplicação de Teoremas: aqui o autor aplica o teorema que diz que todo número maior que 1 pode ser escrito como produto de fatores primos e o teorema de Euclides, que diz que os primos são infinitos, sempre usando os termos mais técnicos da escrita matemática. O que podemos notar também nesse material, é que os teoremas sempre apresentam suas respectivas demostrações. Segundo Nobre (2019), as demonstrações têm um papel importante no ensino da matemática, pois essa não deve ser apenas aceita, mas sim compreendida.

Porém, vale a ressalva de Lima et al. (2007), quando ele diz que nem toda demostração é apropriada para o melhor aproveitamento do ensino. Ou seja, algumas demonstrações podem ser usadas como atrativo para o conteúdo, enquanto outras podem ser desprezadas dependendo da sua complexidade e profundidade.

3. Aplicação de Exemplos: o material é repleto de exemplos de problemas e suas respectivas soluções, de certa forma, usando a repetição como base para a fixação e o aprendizado. Veja a figura 7.5.

Exemplo 17. *Dados que $p, p+10$ e $p+14$ são números primos, encontre p.*

Vamos analisar os possíveis restos na divisão por 3 de p. Se p deixa resto 1, então $p+14$ é um múltiplo de 3 maior que 3 e consequentemente não poderá ser um número primo. Se o resto é 2, então $p+10$ é um múltiplo de 3 maior que 3 e também não poderá ser um número primo. Assim, o resto de p por 3 é 0 e consequentemente $p = 3$.

Figura 7.5:
FONTE: (PINHEIRO et al., 2012)

7.5 O Teste

O uso de testes como ferramenta para medir o aprendizado é, reconhecidamente, um assunto bastante controverso, que divide opiniões de vários autores.

> A aplicação de testes em avaliação de ensino no Brasil, constituem uma faceta particular da questão da avaliação educacional. A experiência brasileira com avaliação educacional, como um todo, é bem mais ampla e diversificada do que a experiência com testes educacionais (GATTI, 2013).

Entretanto, segundo Guzmán (2004), a teoria clássica dos testes, é uma das ferramentas mais apropriadas para se obter resultados mais precisos em um menor espaço de tempo, e obviamente é o melhor método para se avaliar a absorção de um conteúdo, se tornando assim, a melhor opção para este experimento.

Essa avaliação foi disponibilizado na plataforma "Google Forms"para que todos os alunos tivessem acesso remoto. Os alunos acessaram o teste a partir de seus telefones celulares de modo simples e prático, as respostas dos estudantes ficaram registradas em uma planilha para posterior acesso e análise dos resultados.

O teste é composto de 8 questões, sendo 2 (duas) elaboradas pelo próprio autor, 3 (três) retiradas do livro (JÚNIOR; CASTRUCCI; GIOVANNI, 2018) e 3 (três) do material do POTI (MOREIRA; ABREU; SALDANHA, 2012). A cada resposta será atribuída a sentença de certa ou errada, donde após será feita a contagem geral dos acertos, e a análise particular dos resultados de cada questão. A pesquisa também apresenta um pequeno questionário no inicial com 5 (cinco) itens, abordando tópicos como por exemplo: o nome, idade, sexo e série de cada estudante. Esse questionário traz também um termo de responsabilidade do participante, em que o aluno diz estar ciente que é parte integrante do experimento por livre e espontânea vontade.

Em respeito ao Artigo 247 da Lei nº 8.069 de 13 de Julho de 1990 do Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA), os participantes deste experimento terão suas identidades preservadas, sendo porém associados aos seguintes pseudônimos; os alunos da Turma 1 por $\{1T1, 2T1, ..., 16T1\}$ e os alunos da Turma 2 por $\{1T2, 2T2, ..., 16T2\}$.

> **Art. 247.** Divulgar, total ou parcialmente, sem autorização devida, por qualquer meio de comunicação, nome, ato ou documento de procedimento policial, administrativo ou judicial relativo a criança ou adolescente a que se atribua ato infracional (FEDERAL, 1990).

8 Resultados

Um dos mais complexos temas no âmbito educacional, sem dúvidas é o conceito de avaliação. Definir a melhor proposta avaliativa não é nada simples, todavia, esse mesmo assunto é tido como indispensável no processo educacional. Veja o que diz Pavanello e Nogueira (2006).

> Se há um ponto de convergência nos estudos sobre a avaliação escolar é o de que ela é essencial à prática educativa e indissociável desta, uma vez que é por meio dela que o professor pode acompanhar se o progresso de seus alunos está ocorrendo de acordo com suas expectativas ou se há necessidade de repensar sua ação pedagógica (PAVANELLO; NOGUEIRA, 2006).

Partindo dessa premissa, apresentamos a seguir, os resultados adquiridos no questionário e no teste, afim fazer uma avaliação pertinente à situação. Demos ênfase aos comentários e respostas de maior destaque em cada tópico, tal como uma abordagem geral dos resultados de cada questionamento.

8.1 O Questionário Inicial

Como já foi dito, os alunos responderam à um questionário antes do teste. Esse questionário teve por finalidade obter um perfil social dos participantes. O objetivo foi caracterizar os estudantes antes de ver suas respectivas respostas para o teste.

Segue uma análise feita pelo autor das respostas obtidas neste questionário.

Item 1: *NOME COMPLETO.* O item 1 questionava o nome do participante, e como já citado, preservaremos suas identidades. Seguimos para os demais itens.

Item 2: *QUAL SUA IDADE?.* O gráfico à seguir mostra um panorama completo das respostas dadas para este item.

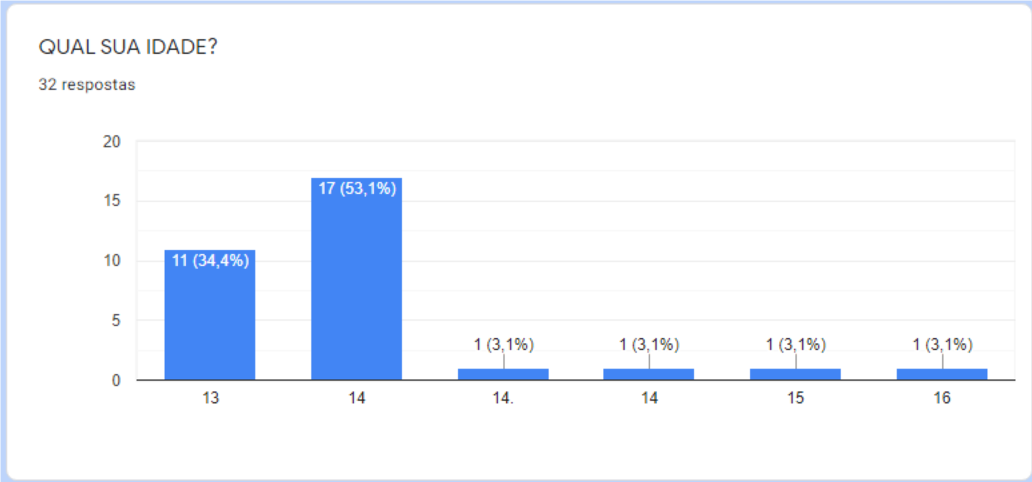


Figura 8.1: IDADES
FONTE: Construído pelo autor

Podemos perceber pelo gráfico que a grande maioria da clientela presente neste estudo tem entre 13 e 14 anos de idade. Nos dando uma ideia da maturidade e do grau de discernimento desses jovens.

Item 3: *SEXO*. Para se ter uma noção do perfil da turma, também foi questionado o sexo dos participantes. Veja a figura 8.2.

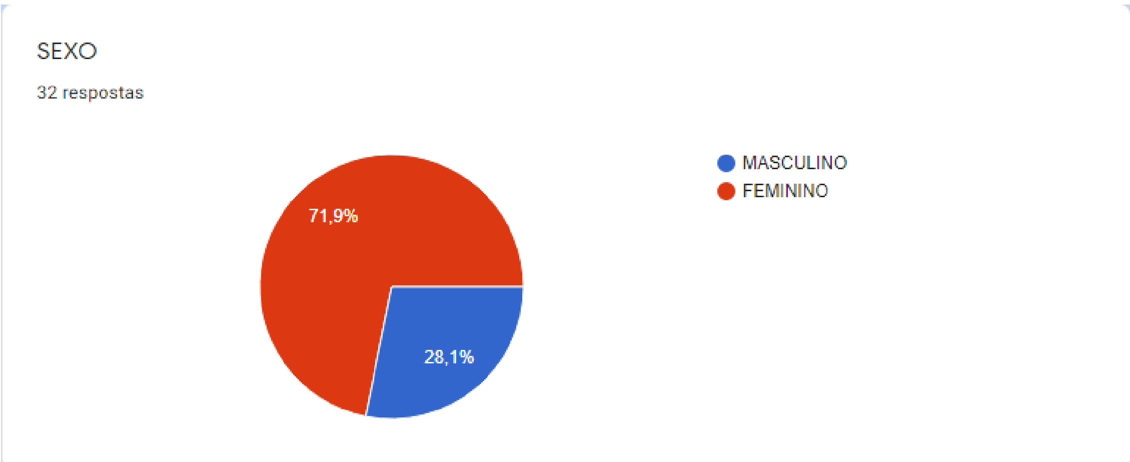


Figura 8.2: SEXO
FONTE: Construído pelo autor

Em valores absolutos, participaram do experimento 23 meninas e 9 meninos, nos permitindo saber que a ampla maioria da clientela integrante é formada por jovens do sexo feminino.

Item 4: *QUAL SÉRIE VOCÊ CURSA?*. O gráfico da figura 8.3 mostra em valores relativos as respostas obtidas para esse questionamento.

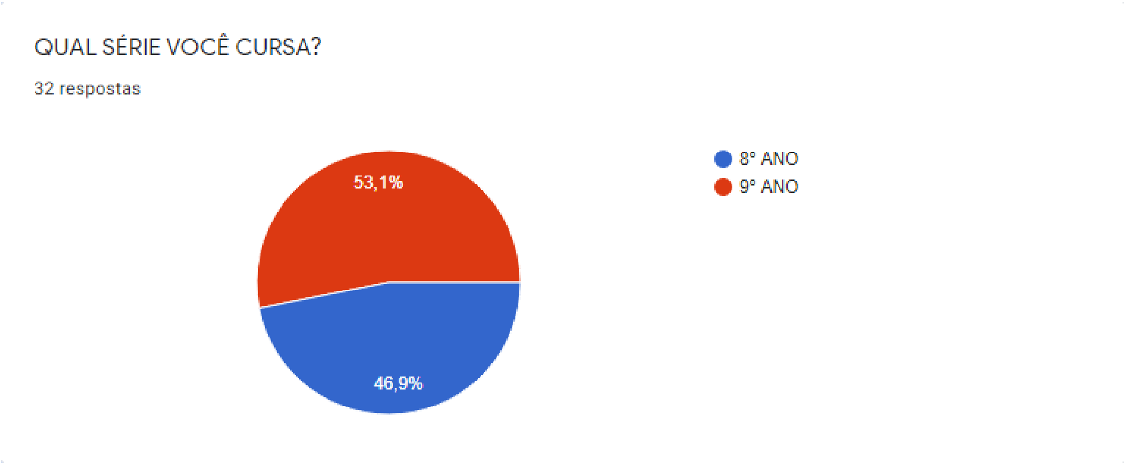


Figura 8.3: SÉRIE
FONTE: Construído pelo autor

Podemos perceber um certo equilíbrio nesse quesito. Em números absolutos temos 17 alunos do 9º ano e 15 alunos do 8º ano.

Item 5: *QUAL TURMA VOCÊ SE ENCONTRA?*. Os alunos integrantes do experimento foram divididos em 2 grupos. O gráfico da figura 8.4 mostra a proporção em que eles foram divididos..

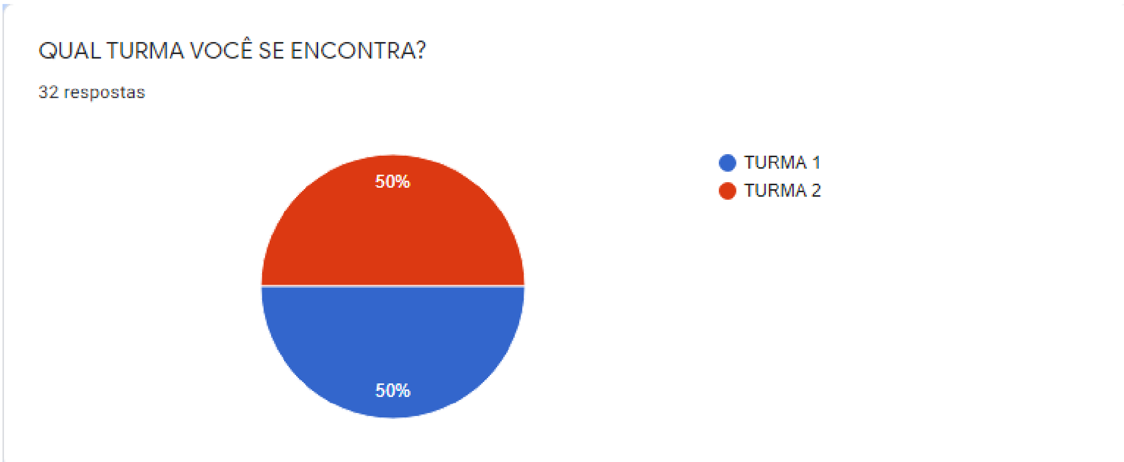


Figura 8.4: TURMA
FONTE: Construído pelo autor

Vemos claramente que eles foram divididos em dois grupos de iguais quantidades de alunos. 16 membros em cada turma.

Após responderem estes 5 itens do questionário, obtemos informações para montar a tabela da figura 8.5.

	8º ANO		9º ANO	
	MENINOS	MENINAS	MENINOS	MENINAS
Turma 1	2	6	3	5
Turma 2	1	7	3	5

Figura 8.5: Organograma das Turmas
FONTE: Construído pelo autor

Antes de iniciar o teste os alunos ainda responderam a um questionamento no qual deixava claro que integravam um experimento, e que sua participação era inteiramente opcional. Segue na figura 8.6 os resultados.

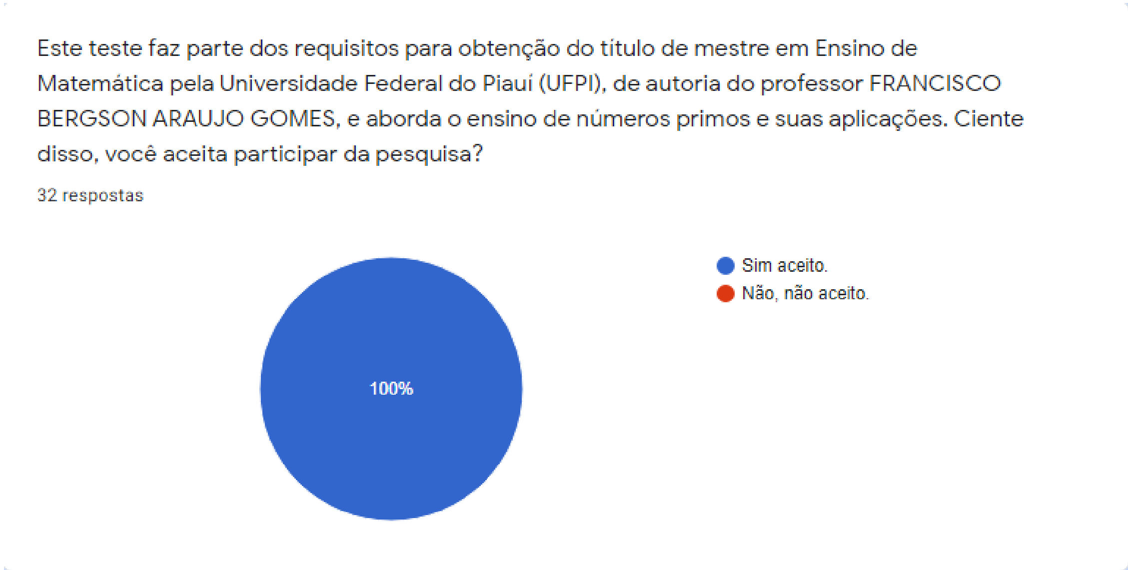


Figura 8.6: TERMO DE PARTICIPAÇÃO
FONTE: Construído pelo autor

Como apresentado no gráfico da figura 8.6, a adesão foi total por parte dos alunos. Todos se mostraram interessados em participar da pesquisa.

8.2 As respostas obtidas no teste

Agora será dado início a análise das respostas dos alunos participantes às questões do teste, ou seja, as questões que envolvem o conteúdo sobre números primos propriamente ditos.

8.2.1 A QUESTÃO 1

A primeira questão trazia o seguinte problema: **"Defina o que é um número primo."**. Apesar de apresentar os mais variados tipos de resposta. A grande maioria dos estudantes acertou esse questionamento.

Destaque para as soluções do aluno 5T1: *"Um número primo é um número que tem apenas 2 divisores o 1 e ele mesmo."* e do aluno 14T2: *"Um número que é dividido apenas por um e por eles mesmo ou seja um número que tem apenas 2 divisores."*

8.2.2 A QUESTÃO 2

No segundo problema a indagação era a seguinte: **Explique por que o 51 não é um número primo.** E novamente grande parte dos alunos das duas turmas responderam de forma correta a questão.

O destaque agora é para os alunos 6T1 e 13T2, que responderam respectivamente; *"Por que ele e divisível por* $1, 3, 17$ *e* 51, *então não é primo."* e *"Pois tem mais de dois divisores, sendo eles* $1, 3, 17$ *e o próprio* 51*."*

Vale a ressalva de que nos dois problemas anteriores, a Turma 2 obteve maior desempenho em suas respostas, com mais soluções aceitáveis que a Turma 1. Apesar de a Turma 1 apresentar várias respostas corretas para os problemas, certificamos que a Turma 2 argumentou melhor na maior parte das soluções.

8.2.3 A QUESTÃO 3

Quantos são os números primos menores que 50? Isso era o que questionava esse problema. Para esse tópico apresentaremos as respostas por turma.

8.2.3.1 Respostas da Turma 1

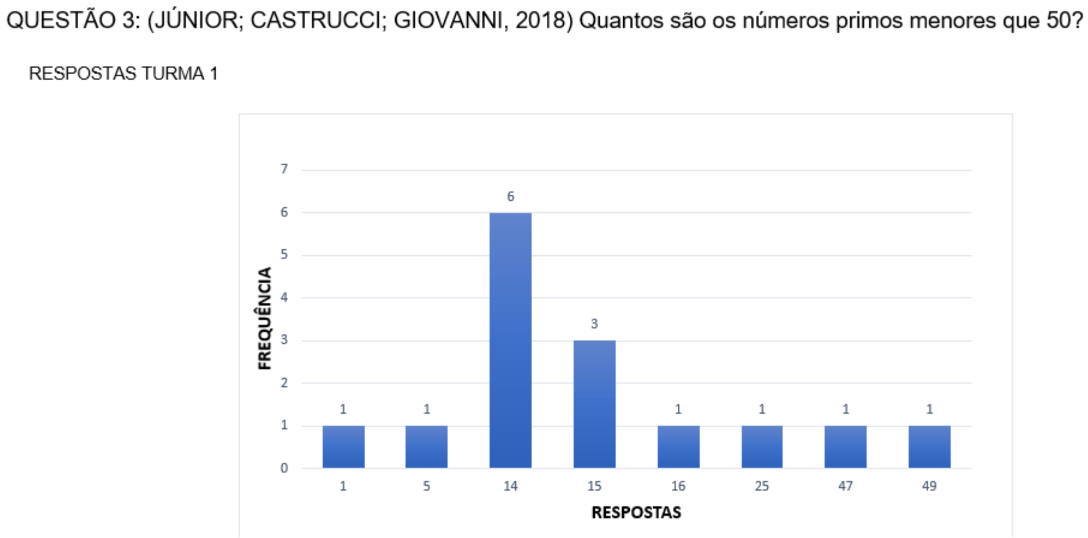


Figura 8.7: Respostas da Turma 1 para a Questão 3
FONTE: Construído pelo autor

A resposta para esse problema é 15. Podemos perceber que a maioria dos alunos da Turma 1 errou essa questão. Enquanto que apenas 3 alunos resolveram corretamente esse problema, 12 erraram e 1 não respondeu.

8.2.3.2 Respostas da Turma 2

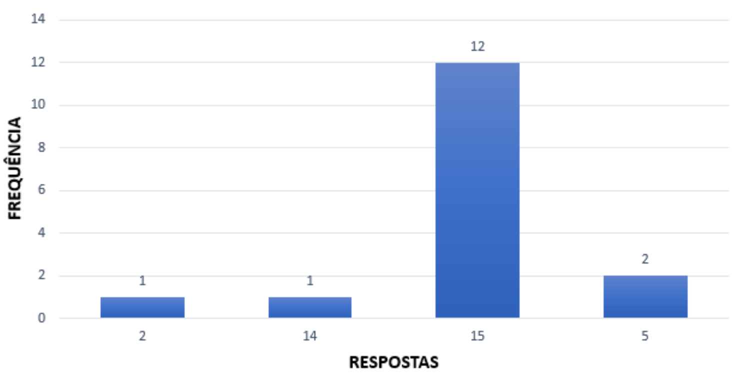


Figura 8.8: Respostas da Turma 2 para a Questão 3
FONTE: Construído pelo autor

Percebemos pelo gráfico da figura 8.8 que a Turma 2 teve um aproveitamento muito superior ao da Turma 1 nesse quesito, mostrando um ótimo entendimento do problema.

8.2.4 A QUESTÃO 4

O problema 4 perguntava o seguinte: **"Qual é a forma fatorada completa do número natural 1000?"**. Vejamos os resultados deste item por turma.

8.2.4.1 Respostas da Turma 1

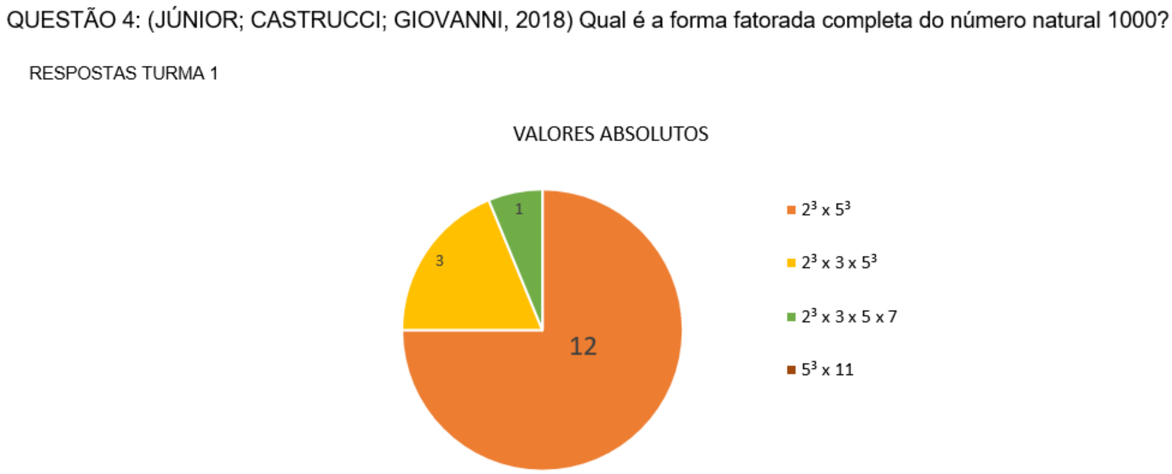


Figura 8.9: Respostas da Turma 1 para a Questão 4
FONTE: Construído pelo autor

O gráfico da figura 8.9 mostra que a grande maioria dos alunos da Turma 1 acertou esse item, transparecendo que a turma não teve grandes dificuldades nesse problema. Concluímos, então, que o assunto abordado na questão foi bem absorvido pelos participantes. Dado que a resposta correta é a alternativa que apresenta $2^3 \times 5^3$, temos que os 12 alunos que solucionaram corretamente a questão representam 75% da turma. Comprovando o bom resultado nesse problema.

8.2.4.2 Respostas da Turma 2

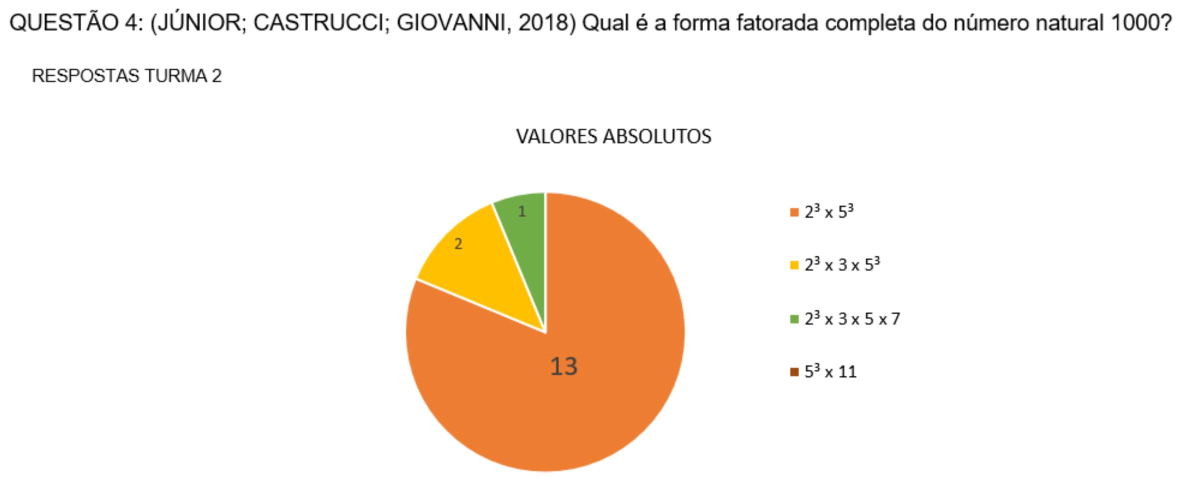


Figura 8.10: Respostas da Turma 2 para a Questão 4
FONTE: Construído pelo autor

Percebemos que a Turma 2 também absorveu de forma satisfatória este assunto, com mais de 81% dos integrantes desse grupo acertando a questão.

8.2.5 A QUESTÃO 5

8.2.5.1 Respostas da Turma 1

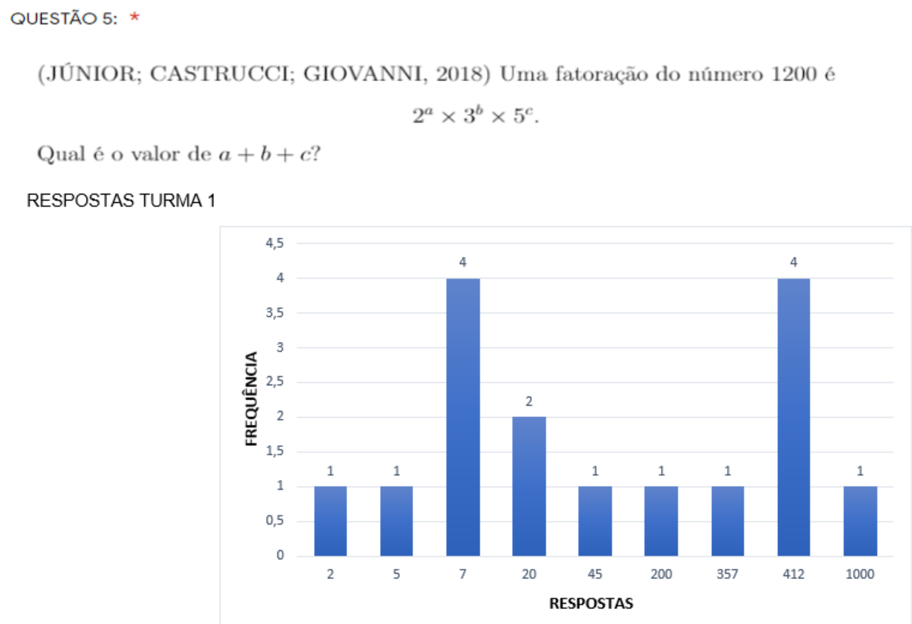


Figura 8.11: Respostas da Turma 1 para a Questão 5
FONTE: Construído pelo autor

8.2.5.2 Respostas da Turma 2

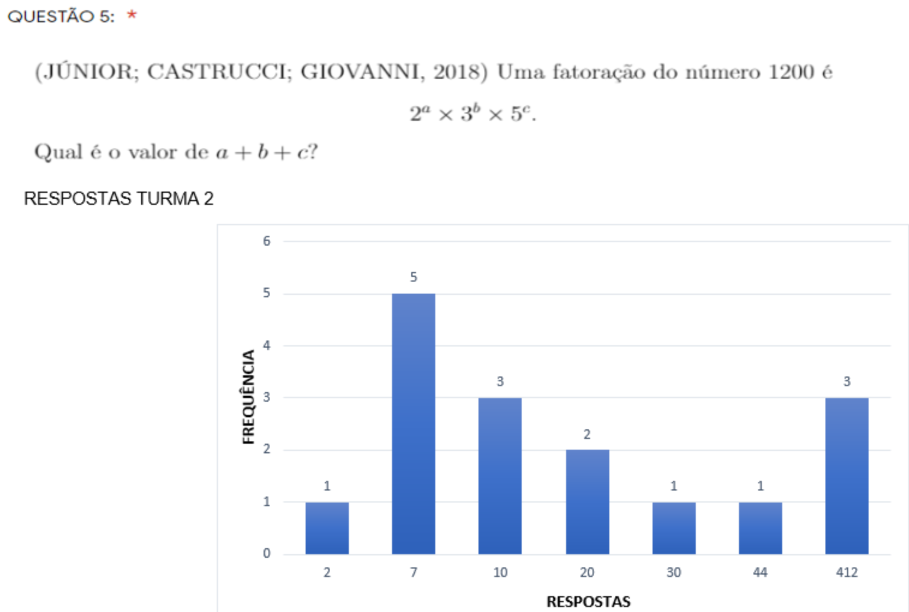


Figura 8.12: Respostas da Turma 2 para a Questão 5
FONTE: Construído pelo autor

Como visto, a questão 5 dava, de forma parcial, a fatoração do número 1200, e pedia que se encontrasse a forma completa, afim de obter a soma dos expoentes dos fatores primos. Um problema que exigiu um pouco mais de raciocínio do aluno em relação as questões anteriores. Fazendo uma abordagem comparativa entre as turmas, vemos que os participantes, em sua maioria, acertaram essa questão, dado que a resposta correta para esse item é 7. Destaque novamente para a Turma 2, a qual teve maior aproveitamento geral dentre os participantes.

A questão 5 foi a última referente ao material que foi utilizado como base para a aula na Turma 1. É notável que mesmo com esse material a Turma 2 se saiu melhor, tanto nas questões objetivas, quanto nas questões discursivas.

A partir de agora, veremos os resultados para as questões que foram extraídas do material de apoio referente aula na Turma 2.

8.2.6 A QUESTÃO 6

O sexto problema do teste trazia o seguinte questionamento: **"Dado que p, 2p + 1 e 4p² + 1 são números primos, encontre p."**. Segundo o próprio material donde a questão foi retirada, a solução para o problema é p = 3 ou p = 5. Vejamos os gráficos da com as soluções apresentadas pelas turmas.

8.2.6.1 Respostas da Turma 1

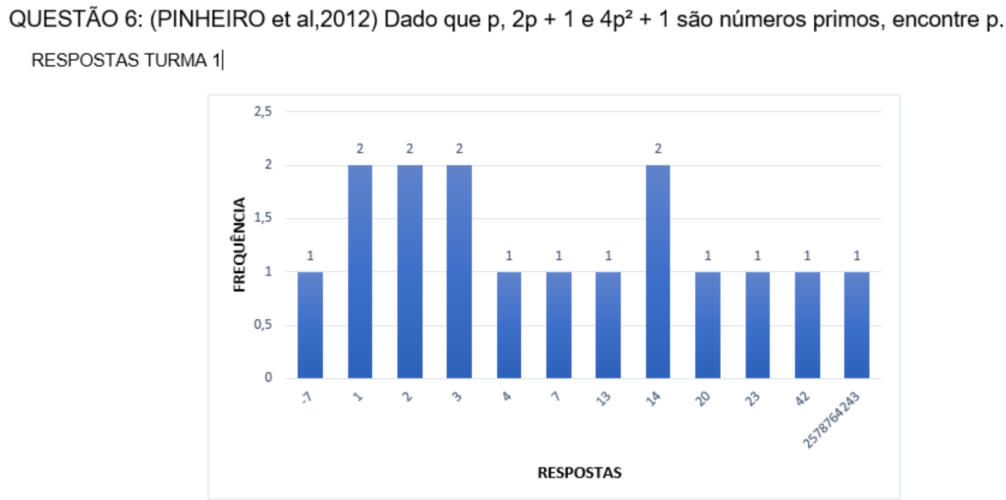


Figura 8.13: Respostas da Turma 1 para a Questão 6
FONTE: Construído pelo autor

8.2.6.2 Respostas da Turma 2

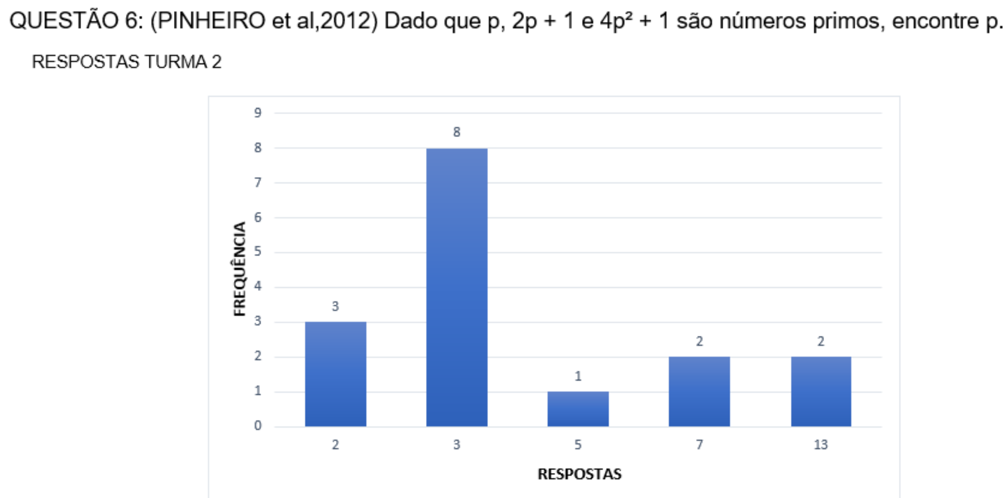


Figura 8.14: Respostas da Turma 2 para a Questão 6
FONTE: Construído pelo autor

A princípio, ao analisarmos o gráfico da figura 8.13 percebemos que houve uma certa discrepância entre as respostas apresentadas pelos alunos dessa turma. Vemos que apenas 2 alunos responderam p = 3, enquanto que nenhum concluiu que p poderia também ser igual a 5, a tal discrepância se revela quando vemos respostas como -7 e 2578764243.

O ideal era que os alunos apresentassem o 3 e 5 como possíveis valores para p. Porém, acreditamos que alguns alunos ao acharem uma das opções como correta, imediatamente deram a questão como resolvida. Apesar de nenhum aluno ter encontrado 3 e 5 simultaneamente, em nenhuma das turmas, observamos que a Turma 2 obteve resultados mais sólidos e coerentes.

8.2.7 A QUESTÃO 7

Podemos dizer que a questão 7 é a cereja no bolo desse teste. Com apenas uma explicação superficial do problema durante as aulas, foi pedido que os alunos solucionassem o seguinte desafio: **"Prove que todo primo maior que 3 é da forma 6k+1 ou 6k+5"**. Obviamente tivemos muitas respostas incorretas para esse item, respostas que deixavam claro que o aluno não foi capaz de compreender a raiz do problema. Todavia, destacaremos aqui uma excelente resposta, que mostram uma capacidade extraordinária de concentração e raciocínio. Acompanhe na figura 8.15 a solução do aluno 6T2 para essa questão.

QUESTÃO 7: (PINHEIRO et al.,2012) Prove que todo primo maior que 3 é da forma 6k+1 ou 6k+5. *

Se n = 6k, então n é múltiplo de 6. Portanto, n não é primo.
Se n = 6k + 1, então n pode ser primo.
Se n = 6k + 2 = 2(3k + 1), então n é múltiplo de 2. Portanto, n não é primo.
Se n = 6k + 3 = 3(2k + 1), então n é múltiplo de 3. Portanto, n não é primo.
Se n = 6k + 4 = 2(3k + 2), então n é múltiplo de 2. Portanto, n não é primo.
Se n = 6k + 5, então n pode ser primo.
Portanto, n pode ser da forma 6k + 1 ou 6k + 5.

Figura 8.15: Resposta do Aluno 6T2 para a Questão 7
FONTE: Google Forms

Ressaltamos que nenhum outro aluno respondeu de maneira correta a questão. Muitos escreveram soluções incompletas, em sua maioria as soluções não foram satisfatórias para se dar destaque.

8.2.8 A QUESTÃO 8

Para finalizar o teste, foi apresentada uma questão que exigia o conhecimento do algoritmo da divisão: **"Encontre os inteiros que, na divisão por 7, deixam um quociente igual ao resto"**. Vejamos os resultados.

8.2.8.1 Respostas da Turma 1

QUESTÃO 8: (PINHEIRO et al.,2012) Encontre os inteiros que, na divisão por 7, deixam um quociente igual ao resto.

RESPOSTAS TURMA 1

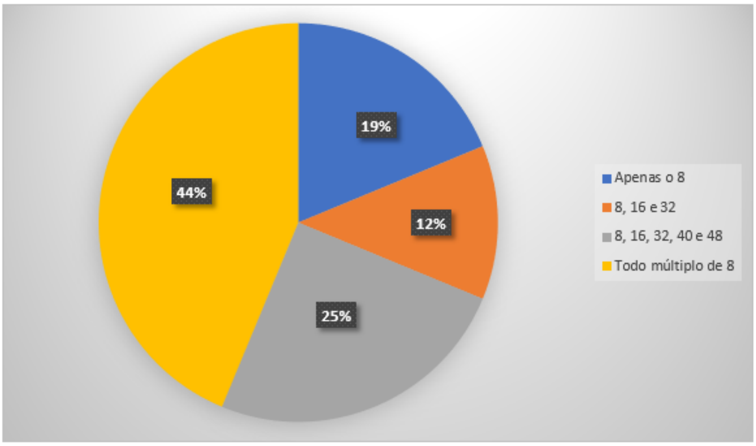


Figura 8.16: Respostas da Turma 1 para a Questão 8
FONTE: Construído pelo autor

8.2.8.2 Respostas da Turma 2

QUESTÃO 8: (PINHEIRO et al.,2012) Encontre os inteiros que, na divisão por 7, deixam um quociente igual ao resto.

RESPOSTAS TURMA 2

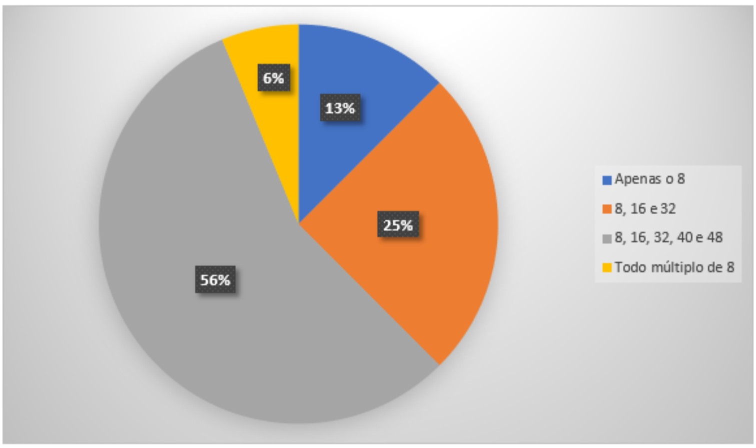


Figura 8.17: Respostas da Turma 2 para a Questão 8
FONTE: Construído pelo autor

Percebemos nesse último problema que, em ambas as turmas, a maioria dos estudantes acertou a questão, dado que a resposta para ela era o item que apresentava 8, 16, 24, 32, 40 e 48 como resposta, onde novamente a Turma 2 mostrou melhor desempenho geral, quando comparada a Turma 1.

O 56% apresentado no gráfico da figura 8.17 mostra que 9 alunos obtiveram êxito na solução do problema, enquanto que apenas 44% (Figura 8.16) dos integrantes da Turma 1, ou seja, 7 alunos acertaram esse item. Mostrando mais uma vez que a Turma 2 foi mais eficaz nas suas soluções.

Enfim, após a análise geral das respostas de cada questão, e alguns destaques individuais selecionados para exemplo, concluímos a apresentação dos resultados obtidos no experimento. De forma categórica, finalizamos os observações podendo assim partir para as conclusões extraídos a partir deste trabalho.

9 Considerações Finais

Quando foi idealizado esse projeto, já sabíamos da importância do material didático no processo de ensino-aprendizagem. Segundo Belisário (2003), o professor passa a conduzir sua aula a partir de um roteiro pré estabelecido no material, facilitando assim o seu trabalho e otimizando o tempo didático.

A partir das conclusões tiradas do experimento, constatou-se que o material, não só é importante para o apoio ao professor durante a atividade pedagógica, mas também, se escolhido corretamente, é fundamental para o bom desempenho na turma, dando maior credibilidade às suas soluções. Com efeito, os resultados obtidos pela Turma 2 foram bastante satisfatórios, e quando comparados aos resultados da Turma 1, a Turma 2 se mostra bastante coerente em suas soluções. Claro que obtivemos boas respostas em ambas as Turmas, mas ficou evidente que os integrantes da Turma 2 apresentaram soluções mais bem construídas.

Quando se trata de resolução de problemas em matemática, é essencial para uma boa desenvoltura que se tenha um boa escrita. Se fazer entender ou não, é o que vai definir se uma questão pode ou não ser corrigida, e para que escrever bem em um problema por exemplo, é de fundamental importância que se interprete corretamente tal problema (POWELL; BAIRRAL, 2006).

Embora tenhamos tirado questões de ambos os materiais, a Turma 2 apresentou melhor desempenho em todos os aspectos, dando-nos a premissa de que foram mais bem preparados. De fato, o material de apoio da Turma 2, por conter assuntos olímpicos em tese mais difíceis, tornou os problemas do material de apoio da Turma 1 bem mais simples e de fácil compreensão. Isso foi perceptível durante a aula, e ficou explicito após os resultados do teste. Logicamente não podemos generalizar, tendo em vista que muitos alunos da Turma 2 não conseguiram responder aos problemas mais simples. Contudo, diagnosticamos que, alunos com maior potencial matemático, se evidenciaram no teste, é o caso do aluno 6T2 que teve sua solução destacada na questão 7 do referido teste.

Chegamos a conclusão que a escolha e aplicação de um certo material didático de apoio é de suma importância para os resultados futuros de uma turma em um processo de ensino-aprendizagem, podendo tanto contribuir de maneira importante, como prejudicar se não for escolhido me modo coerente aos anseios dos estudantes. No nosso caso específico, a conclusão alcançada é que o material do (POTI), por exigir mais do aluno e por ser mais aprofundado, se mostrou mais objetivo nos seus resultados. Portanto, os resultados dessa pesquisa nos levam a crer que o material olímpico intensivo se bem acompanhado e bem desenvolvido, pode representar o holofote para a detecção e destaque de alunos com bom desempenho em matemática.

Referências Bibliográficas

BARIANI, I. C. D.; PAVANI, R. Sala de aula na universidade: espaço de relações interpessoais e participação acadêmica. *Estudos de Psicologia (Campinas)*, SciELO Brasil, v. 25, n. 1, p. 67–75, 2008. Citado na página 10.

BELISÁRIO, A. O material didático na educação a distância e a constituição de propostas interativas. *Silva, M. Educação online. São Paulo: Edições Loyola*, p. 137–148, 2003. Citado na página 49.

BOTAS, D.; MOREIRA, D. A utilização dos materiais didáticos nas aulas de matemática: Um estudo no 1º ciclo. *Revista Portuguesa de Educação*, Centro de Investigação em Educação (CIEd), Universidade do Minho, v. 26, n. 1, p. 253–286, 2013. Citado na página 11.

CANGURUMATEMATICO, s. Disponível em:< https://www.cangurudematematicabrasil.com.br. *Acesso em*, 2020. Citado na página 27.

CENSO. Disponível em:< http://portal.inep.gov.br/censo-escolar. *Acesso em*, 2020. Citado na página 30.

DOMINGUES, H. H. *Fundamentos de aritmética.* [S.l.]: Ed. da UFSC, 2009. Citado na página 15.

ESCOL.AS. Disponível em:< http://www.escol.as. *Acesso em*, 2020. Citado na página 30.

EULER, L. *Mechanica sive motus scienta analytice exposita... instar supplementi ad Commentar. Acad. scient. imper.* [S.l.]: ex typographia Academiae scientarum, 1736. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.

FEDERAL, G. Estatuto da criança e do adolescente. *Lei federal*, v. 8, 1990. Citado na página 35.

FERMAT, P. D. *Oeuvres de Fermat.* [S.l.]: Gauthier-Villars et fils, 1891. v. 1. Citado na página 22.

FERREIRA, A. B. d. H. Novo dicionário aurélio da língua portuguesa. In: *Novo dicionário Aurélio da língua portuguesa.* [S.l.: s.n.], 2004. p. 2012–2012. Citado na página 15.

FERREIRA, A. B. de H.; ANJOS, M. dos. *Dicionário Aurélio básico da língua portuguesa.* [S.l.]: Editora Nova Fronteira, 1988. Citado na página 14.

FILHO, D. C. M. Enrolando os primos dos primos de nossos primos. *Revista do Professor de Matemática*, v. 98, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 24.

FORNARI, A.; ORIHUELA, F. E. T. Polinômios geradores de números primos. Citado na página 21.

FRAGA, C. R. et al. Números naturais: introdução, sistemas de numeração. 2013. Citado na página 12.

GATTI, B. A. Testes e avaliações do ensino no brasil. *Educação e Seleção*, n. 16, p. 33–42, 2013. Citado na página 34.

GEQUELIM, H. F. Axiomas de peano e os números naturais. *Curitiba: UTFPR*, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 13 e 14.

GOOGLE. Disponível em:<
https://about.google/intl/all$_b$*r/products/.Acesso em*, 2020.*Citadonapágina*30.

GUZMÁN, J. L. B. Introducción al modelo psicométrico de la teoría clásica de los tests (parte 1). *Pro Mathematica*, v. 18, n. 35-36, p. 79–107, 2004. Citado na página 34.

HEFEZ, A. *Elementos de aritmética*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. Citado 8 vezes nas páginas 13, 15, 16, 17, 18, 19 e 22.

IFRAH, G. *Os números*. [S.l.]: Globo Livros, 1989. Citado na página 12.

JÚNIOR, J. G.; CASTRUCCI, B.; GIOVANNI, J. A conquista da matemática. *6º ano. São Paulo: FTD*, 2018. Citado 6 vezes nas páginas 16, 31, 32, 35 e 54.

KRONECKER, L. Leopold kronecker. *J.-Ber. Deutsch.* Citado na página 12.

LIMA, E. L. Curso de análise vol 1. 11a edição. *Rio de Janeiro: IMPA*, 2004. Citado 5 vezes nas páginas 12, 13 e 14.

LIMA, E. L. et al. *Matemática e ensino*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matematica, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 34.

LINS, L. F. *Resignificando a Matemática na educação pública da cidade do Rio de Janeiro*. Dissertação (Mestrado), 2016. Citado na página 27.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem escolar: estudos e proposições*. [S.l.]: Cortez editora, 2014. Citado na página 29.

MACIEL-CMPA, M. V. M.; BASSO-UFRGS, M. V. de A. Olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas (obmep): as origens de um projeto de qualificação do ensino de matemática na educação básica. 2009. Citado na página 25.

MAGOSSI, J. C. Números primos com muitos dígitos. *Revista do Professor de Matemática*, v. 100, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.

MARQUES, D. *Teoria dos números transcendentes*. [S.l.]: SBM, 2013. Citado na página 17.

MERSENNE, M. *Harmonie universelle: contenant la théorie et la pratique de la musique (Paris, 1636)*. [S.l.]: Editions du centre national de la recherche scientifique, 1975. v. 2. Citado na página 22.

MORAES, J. U. P.; JUNIOR, R. S. S. Experimentos didáticos no ensino de física com foco na aprendizagem significativa. *Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol*, v. 9, n. 2, p. 2504–1, 2015. Citado na página 11.

MOREIRA, C. G. T. d. A.; ABREU, A. C.; SALDANHA, N. C. Poti-programa olímpico de treinamento intensivo. 2012. Citado na página 35.

NETO, A. C. M. Tópicos de matemática elementar volume 5: Teoria dos números. *Rio de Janeiro: SBM*, 2012. Citado na página 18.

NOBRE, J. D. R. Demonstrações matemáticas: importância e contribuições para a aprendizagem da matemática no ensino médio. 2019. Citado na página 33.

OBMEP, s. Disponível em:< http://www.obmep.org.br. *Acesso em*, 2020. Citado na página 25.

PAVANELLO, R. M.; NOGUEIRA, C. M. I. Avaliação em matemática: algumas considerações. *Estudos em avaliação educacional*, v. 17, n. 33, p. 29–42, 2006. Citado na página 36.

PINHEIRO, R. et al. Poti-material didático. 2012. Citado 4 vezes nas páginas 33 e 34.

POWELL, A. B.; BAIRRAL, M. A. *A escrita e o pensamento matemático: interções e potencialidades*. [S.l.]: Papirus Editora, 2006. Citado na página 49.

REHFELDT, M. J. H.; QUARTIERI, M. T. As concepções dos professores e alunos acerca da construção do conhecimento matemático. *VII Encontro Nacional de Educação matemática. Recife. Acedido em*, v. 15, 2004. Citado na página 33.

RIBEIRO, F. Motivação e aprendizagem em contexto escolar. *Profforma*, v. 3, p. 1–5, 2011. Citado na página 10.

RIBENBOIM, P. *Números primos: velhos mistérios e novos recordes*. [S.l.]: IMPA, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 16, 17 e 18.

SANTOS, J. F. S. Avaliação no ensino a distância. *Revista Iberoamericana de Educación*, Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la . . . , v. 38, n. 4, p. 1–9, 2006. Citado na página 29.

SEDUC.CE. Disponível em:< http://www.seduc.ce.gov.br. *Acesso em*, 2020. Citado na página 30.

SHINE, C. Y. Aulas de matemática olímpica. *Rio de Janeiro, SBM*, 2009. Citado na página 10.

SILVA, E. A. d. Um paralelo entre as ideias de felix klein e os efeitos da obmep. 2017. Citado na página 25.

SILVA, N. V. d. Um estudo acerca do desempenho do estado do piauí na obmep no período de 2005 à 2016. 2018. Citado na página 26.

SOMATEMATICA, P. *Regras para elaboração de uma distribuição de freqüências*. 2020. Citado na página 12.

TODAAMATEMATICA.COM, s. Disponível em:< http://blogtodaamatematica.blogspot.com. *Acesso em*, 2020. Citado na página 23.

WKIPEDIA, s. Disponível em:< https://pt.wikipedia.org/wiki. *Acesso em*, 2020. Citado na página 19.

I Anexos

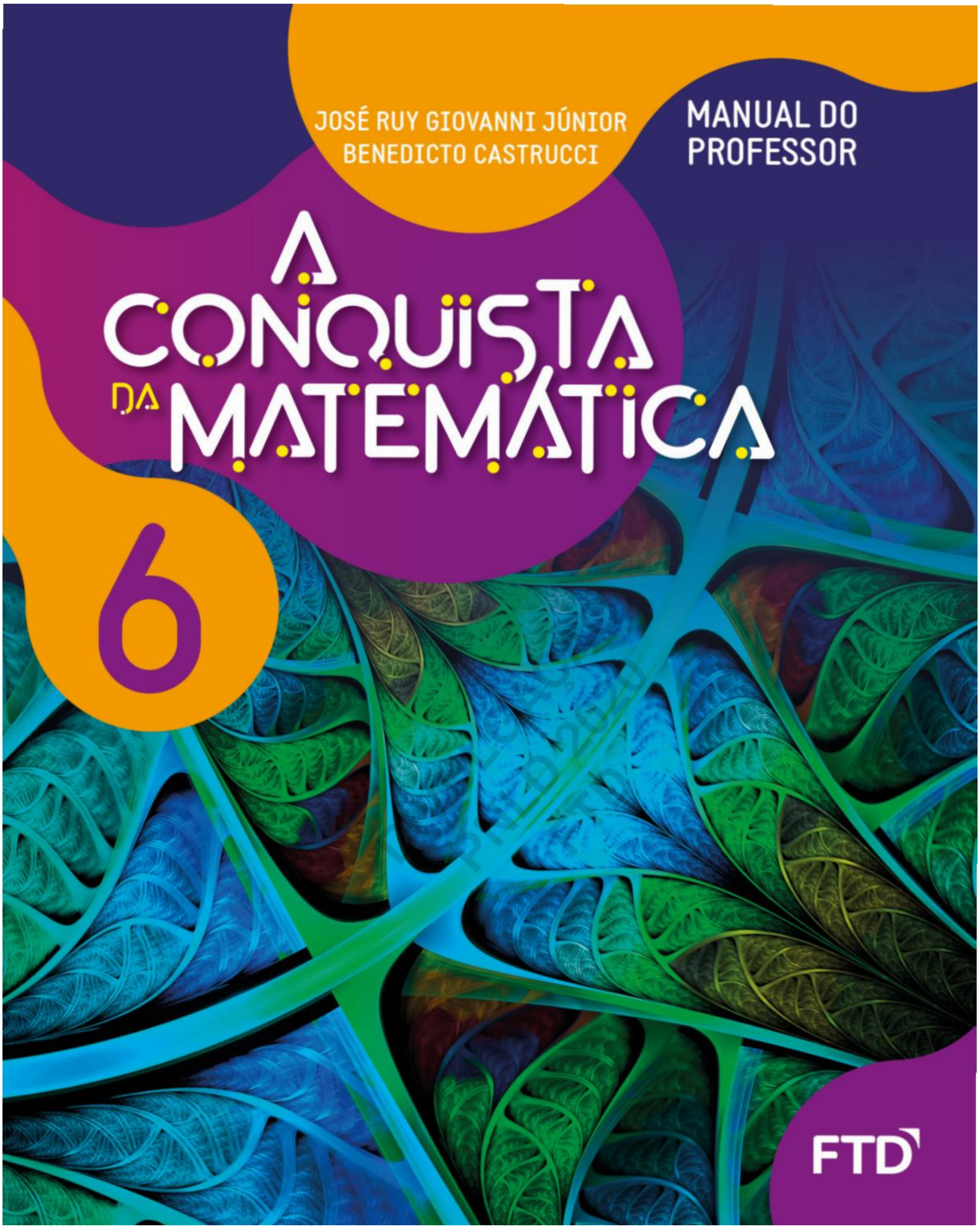


Figura I.1: (JÚNIOR; CASTRUCCI; GIOVANNI, 2018)
FONTE: https://issuu.com/editoraftd

Números Primos, MDC e MMC.

Definição 1. *Um inteiro $p > 1$ é chamado número primo se não possui um divisor d satisfazendo $1 < d < p$. Se um inteiro $a > 1$ não é primo, ele é chamado de número composto. Um inteiro m é chamado de composto se $|m|$ não é primo.*

O próximo teorema nos diz que os primos são as "peças"fundamentais dos números inteiros:

Teorema 2. *Todo inteiro n, maior que 1, pode ser expresso como o produto de número primo.*

Demonstração. Se o inteiro n é um primo, então ele mesmo é o produto de um único fator primo. Se o inteiro n não é primo, existe uma decomposição do tipo: $n = n_1 n_2$ com $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$. Repetindo o argumento para n_1 e n_2, podemos escrever n como o produto de primos ou podemos obter parcelas menores escrevendo n como um produto de naturais. Como não existe uma sucessão infinita de naturais cada vez menores, após um número finito de operações desse tipo, poderemos escrever n como um produto de números primos.

Quantos números primos existem?

Teorema 3. *(Euclides) Existem infinitos números primos.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que exita apenas uma quantidade finita de primos: $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Considere o número $X = p_1 p_1 \ldots p_n + 1$. Pelo teorema anterior, esse número deve ser o produto de alguns elementos do conjunto de todos os números primos. Entretanto, nenhum dos primos p_i divide X.

Exemplo 4. *Existe um bloco de 1000 inteiros consecutivos não contendo nenhum primo?*

Sim. Um exemplo é o conjunto $1001! + 2, 1001! + 3, \ldots, 1001! + 1001$. Veja $i \mid 1001! + i$ para todo $i = 2, 3, \ldots, 1001$.

Exemplo 5. *(Torneio das Cidades) Existe um bloco de 1000 inteiros consecutivos contendo apenas um primo?*

Para cada bloco de 1000 números consecutivos, contemos sua quantidade de números primos. Por exemplo, no bloco $1, 2, 3, \ldots, 1000$, temos 168 números primos (mas só usaremos o fato de que existem mais de dois primos nesse bloco). Comparando os blocos consecutivos $k+1, k+2, \ldots, k+1000$ e $k+2, k+3, \ldots, k+1001$, ou o número de números primos aumenta em uma unidade, ou fica constante ou diminui em uma unidade. Analisando todos os blocos consecutivos desde $1, 2, \ldots, 1000$ até $1001! + 2, 1001! + 3, \ldots, 1001! + 1001$, o número de números primos deve ser igual à 1 em algum deles. Para ver isso, usaremos um argumento de continuidade discreta: Começando com o número 168 e realizando alterações de no máximo uma unidade na quantidade de primos em cada bloco, para chegarmos no número 0, necessariamente deveremos passar pelo número 1 em algum momento.

Relembremos um importante resultado da aula passada:

Teorema 6. *(Bachet- Bèzout) Se $d = mdc(a, b)$, então existem inteiros x e y tais que $ax + by = d$.*

Proposição 7. *Sejam a, b e c inteiros positivos com $a \mid bc$ e $mdc(a, b) = 1$. Então, $a \mid c$.*

Demonstração. Pelo teorema anterior, existem x e y inteiros tais que $ax + by = 1$. Assim, $acx + bcy = c$. Como $a \mid acx$ e $a \mid bcy$, podemos concluir que $a \mid c$.

Em particular, se p é um número primo e $p \mid ab$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$. Podemos usar esse fato para garantir a unicidade em nosso primeiro teorema, obtendo o importante:

Teorema 8. *(Teorema Fundamental da Aritmética) A fatoração de qualquer inteiro $n > 1$, em fatores primos, é única a menos da ordem dos fatores.*

Exemplo 9. *(Rússia 1995) É possível colocarmos 1995 números naturais ao redor de um círculo de modo que para quaisquer dois números vizinhos a razão entre o maior e o menor seja um número primo?*

Não, é impossível. Suponha, por absurdo, que isso seja possível e denotemos por $a_0, a_1, \ldots, a_{1995} = a_0$ tais inteiros. Então, para $k = 1, \ldots, 1995$, $\frac{a_{k-1}}{a_k}$ é primo ou o inverso de um primo. Suponha que a primeira situação ocorra m vezes e a segunda ocorra $1995 - m$ vezes entre esses quocientes. Como o produto de todos os números da forma $\frac{a_{k-1}}{a_k}$, para $k = 1, \ldots, 1995$ é igual à 1, podemos concluir que o produto de m primos deve ser igual ao produto de $1995 - m$ primos. Em virtude da fatoração única, $m = 1995 - m$. Um absurdo pois 1995 é ímpar.

Proposição 10. *Se as fatorações em primos de n e m são:*

$$\begin{aligned} n &= p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}, \\ m &= p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k}. \end{aligned}$$

Então, $mdc(m,n) = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_k^{\gamma_k}$ *e* $mmc(m,n) = p_1^{\theta_1} p_2^{\theta_2} \dots p_k^{\theta_k}$*, onde* γ_i *é o menor dentre* $\{\alpha_i, \beta_i\}$ *e* θ_i *é o maior dentre* $\{\alpha_i, \beta_i\}$.

Proposição 11. *Se* a *e* b *são inteiros positivos, mostre que* $mmc(a,b)mdc(a,b) = ab$.

Demonstração. Basta usar a proposição anterior e observar que:

$$max\{x,y\} + \min\{x,y\} = x + y.$$

Exemplo 12. *(Torneio das Cidades 1998) É possível que* $mmc(a,b) = mmc(a+c, b+c)$ *para alguma conjunto* $\{a,b,c\}$ *de inteiros positivos?*

Não. Suponha que $a+c$ e $b+c$ possuem algum divisor primo p. Como $p \mid mmc(a+c, b+c)$, caso existam tais inteiros, devemos ter que $p \mid mmc(a,b)$. Assim, usando que pelo menos um dentre a e b é divisível por p podemos concluir que c também é divisível por p. Então, podemos cancelar o fator p:

$$mmc\left(\frac{a}{p}, \frac{b}{p}\right) = \frac{mmc(a,b)}{p} = \frac{mmc(a+c,b+c)}{p} = mmc\left(\frac{a+c}{p}, \frac{b+c}{p}\right).$$

Efetuando alguns cancelamentos, podemos supor então que $a+c$ e $b+c$ não possuem fatores primos em comum. Obtivemos um absurdo pois:

$$mmc(a+c, b+c) = (a+c)(b+c) > ab \geq mmc(a,b).$$

Exemplo 13. *(OCM 2005) Determinar os inteiros* $n > 2$ *que são divisíveis por todos os primos menores que* n.

Como $mdc(n, n-1) = 1$, se $n-1$ possui algum fator primo, ele não dividirá n. Assim, $n - 1 < 2$. Consequentemente não existe tal inteiro.

Exemplo 14. *Mostre que* $n^4 + n^2 + 1$ *é composto para* $n >1$.

Veja que $n^4 + n^2 + 1 = n^4 + 2n^2 + 1 - n^2 = (n^2+1)^2 - n^2 = (n^2+n+1)(n^2-n+1)$. Para $n > 1$, $n^2 - n + 1 = n(n-1) + 1 > 1$ e assim $n^4 + n^2 + 1$ é o produto de dois inteiros maiores que 1.

Exemplo 15. *Mostre que* $n^4 + 4^n$ *é composto para todo* $n > 1$.

Se n é par, certamente o número em questão é divisível por 4. Para o caso em que n é impar, iremos usar a fatoração:

$$a^4 + 4b^4 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 = (a^2+2b^2) - 4b^2b^2 = (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2).$$

Para n da forma $4k+1$, faça $a = n$ e $b = 4^k$. Para n da forma $4k+3$, faça $a = n$ e $b = 2^{2k+1}$.

Exemplo 16. *Se* $2^n + 1$ *é um primo ímpar para algum inteiro positivo* n*, prove que* n *é uma potência de 2.*

Já vimos que $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + 1)$. Se n é impar,

$$\begin{aligned}(-a)^n - 1 &= (-a-1)((-a)^{n-1} + (-a)^{n-2} + \ldots + 1) \Rightarrow \\ a^n + 1 &= (a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \ldots - a + 1)\end{aligned}$$

Sendo assim, se n possuísse algum divisor primo ímpar p com $n = pb$, poderíamos escrever: $2^n + 1 = (a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \ldots - a + 1)$, onde $a = 2^b$. Como $a^{n-1} - a^{n-2} + \ldots - a + 1 > 1$, o número $2^n + 1$ não seria primo.

Exemplo 17. *Dados que $p, p+10$ e $p+14$ são números primos, encontre p.*

Vamos analisar os possíveis restos na divisão por 3 de p. Se p deixa resto 1, então $p + 14$ é um múltiplo de 3 maior que 3 e consequentemente não poderá ser um número primo. Se o resto é 2, então $p + 10$ é um múltiplo de 3 maior que 3 e também não poderá ser um número primo. Assim, o resto de p por 3 é 0 e consequentemente $p = 3$.

Exemplo 18. *(Áustria-Polônia) Dados naturais n e $a > 3$ ímpar, mostre que $a^{2^n} - 1$ tem pelo menos $n + 1$ divisores primos distintos.*

Usando a fatoração da diferença de quadrados, temos que:

$$a^{2^k} - 1 = (a^{2^{k-1}} + 1)(a^{2^{k-2}} + 1) \ldots (a+1)(a-1).$$

Assim, $a^{2^m} + 1 \mid a^{2^k} - 1$ se $k > m$. Como a é impar, podemos concluir que:

$$mdc(a^{2^k} + 1, a^{2^m} + 1) = mdc(a^{2^k} - 1 + 2, a^{2^m} + 1) = mdc(2, a^{2^m} + 1) = 2.$$

Sendo assim, na fatoração:

$$\frac{a^{2^n} - 1}{2^n} = \frac{(a^{2^{n-1}} + 1)}{2} \frac{(a^{2^{n-2}} + 1)}{2} \ldots \frac{(a+1)}{2} \frac{(a-1)}{2},$$

temos o produto de pelo menos n inteiros primos entre si e consequentemente seus fatores primos são distintos. Para cada termo $\frac{(a^{2^i}+1)}{2}$, temos um fator primo p_{i+1} diferente de 2. Daí, $a^{2^n} - 1$ possui pelo menos $n + 1$ fatores primos distintos, a saber, $\{2, p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.

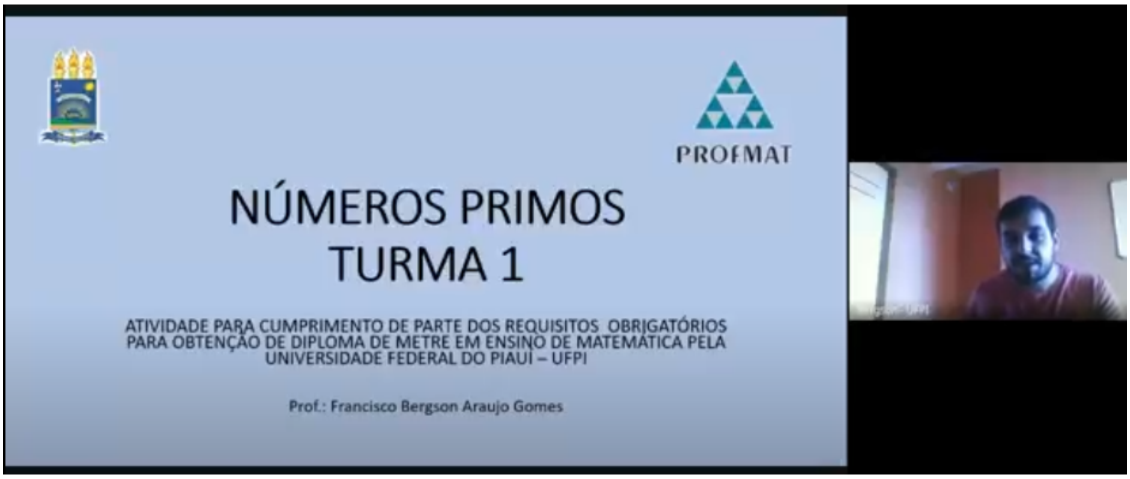
Exemplo 19. *(Rioplatense 1999) Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_k$ primos distintos. Considere todos os inteiros positivos que utilizam apenas esses primos (não necessariamente todos) em sua fatoração em números primos, formando assim uma seqüência infinita*

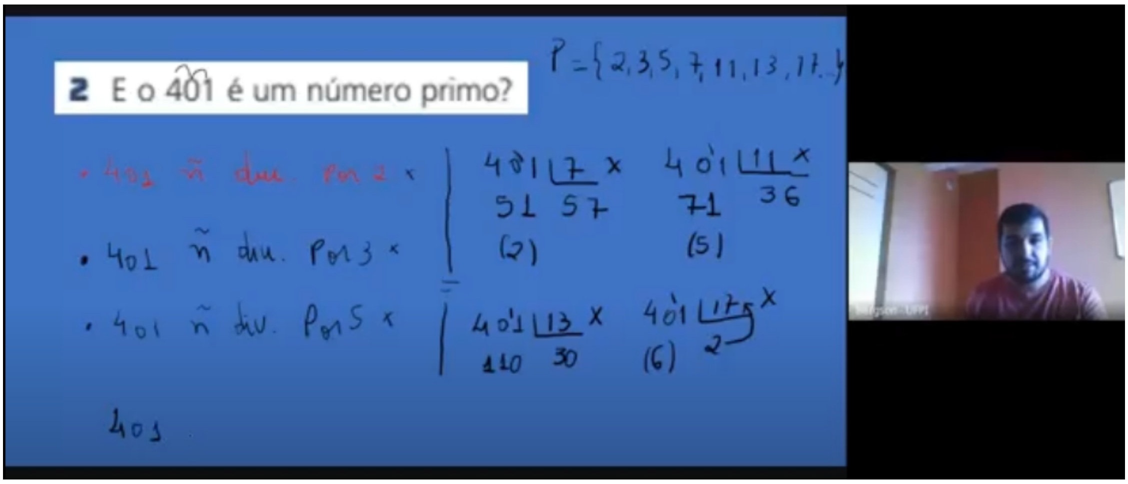
$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots.$$

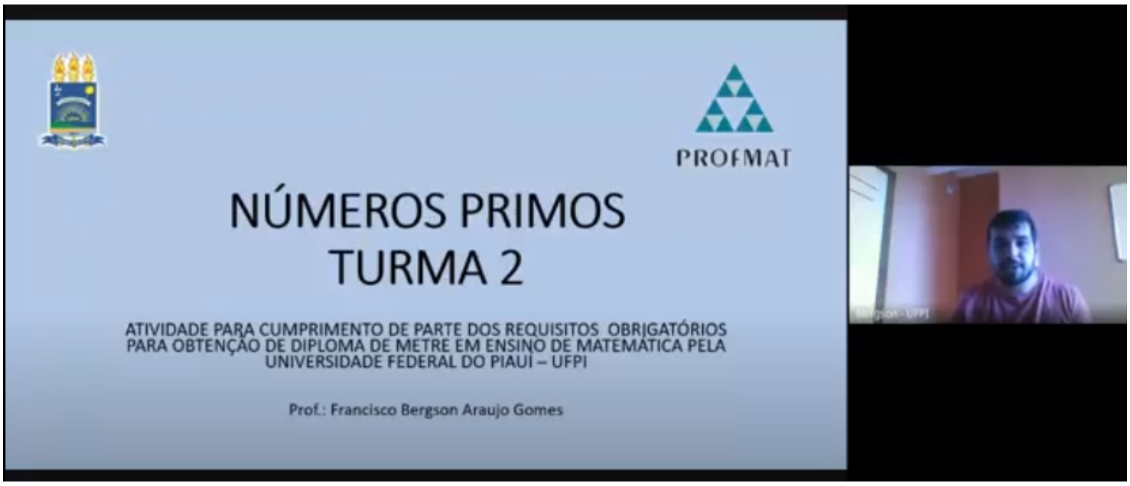
Demonstre que, para cada natural c, existe um natural n tal que

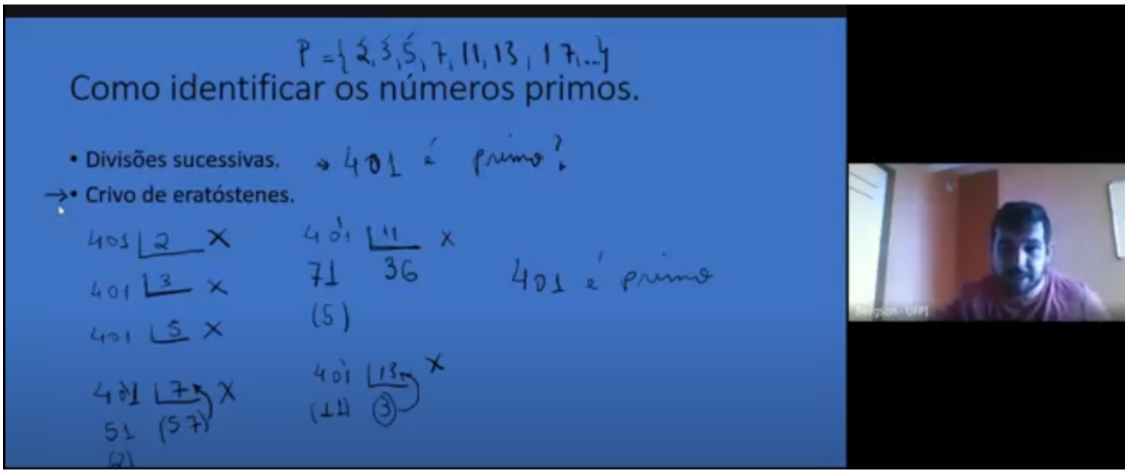
$$a_{n+1} - a_n > c.$$

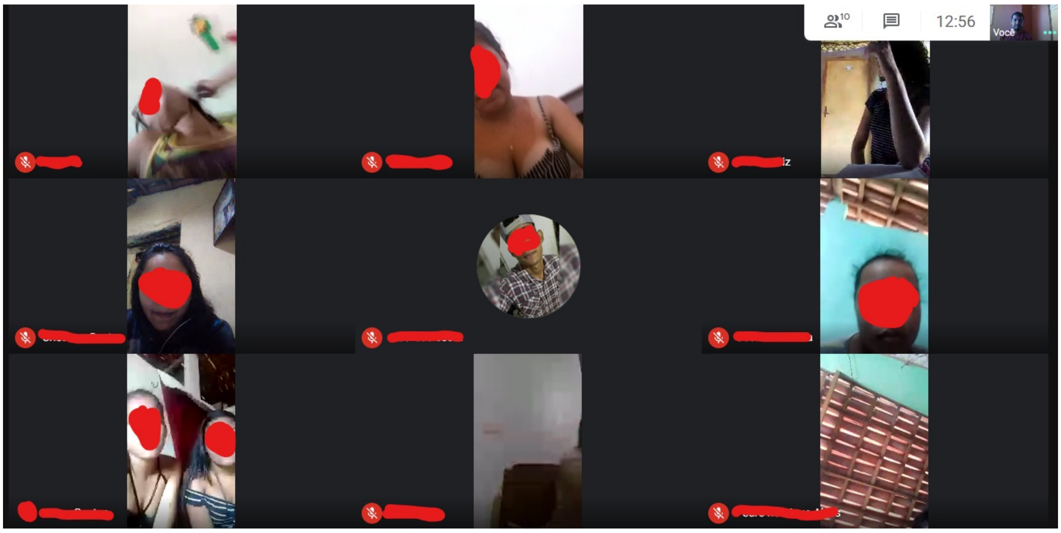
A APÊNDICE

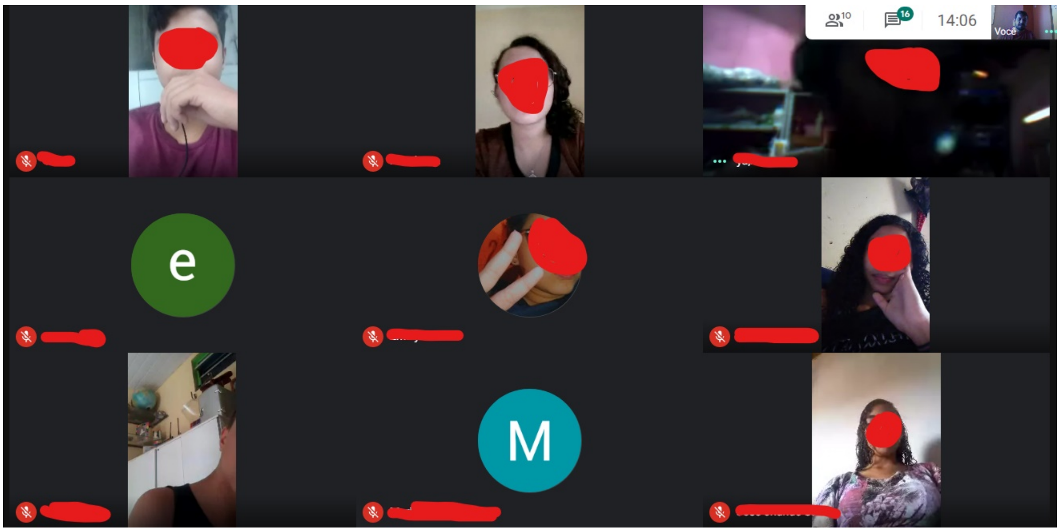

PROFMAT
NÚMEROS PRIMOS
TURMA 1
ATIVIDADE PARA CUMPRIMENTO DE PARTE DOS REQUISITOS OBRIGATÓRIOS PARA OBTENÇÃO DE DIPLOMA DE METRE EM ENSINO DE MATEMÁTICA PELA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ – UFPI
Prof.: Francisco Bergson Araujo Gomes

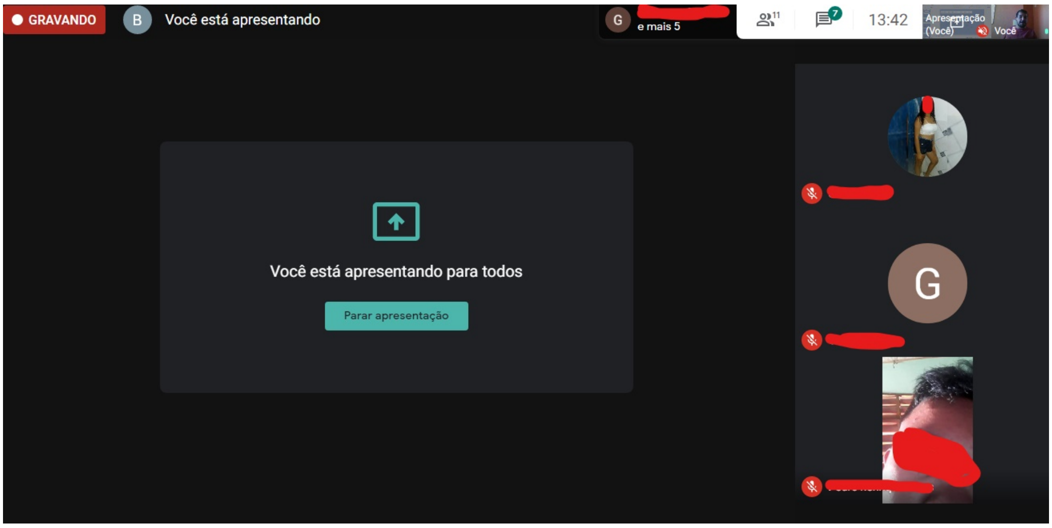

2 E o 401 é um número primo?

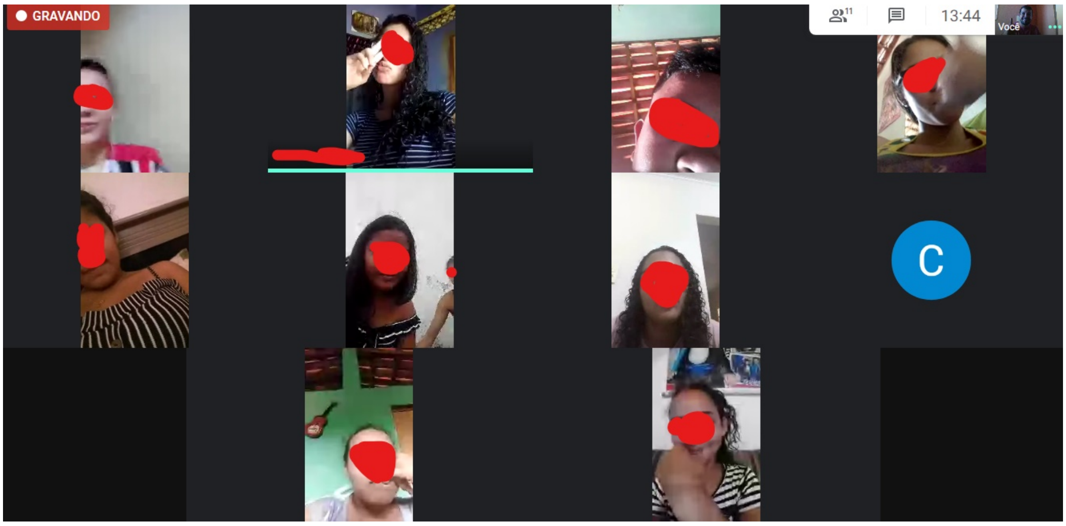

PROFMAT
NÚMEROS PRIMOS
TURMA 2
ATIVIDADE PARA CUMPRIMENTO DE PARTE DOS REQUISITOS OBRIGATÓRIOS PARA OBTENÇÃO DE DIPLOMA DE METRE EM ENSINO DE MATEMÁTICA PELA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ – UFPI
Prof.: Francisco Bergson Araujo Gomes


P = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17...}
Como identificar os números primos.
• Divisões sucessivas.
401 é primo?
• Crivo de eratóstenes.
401 é primo

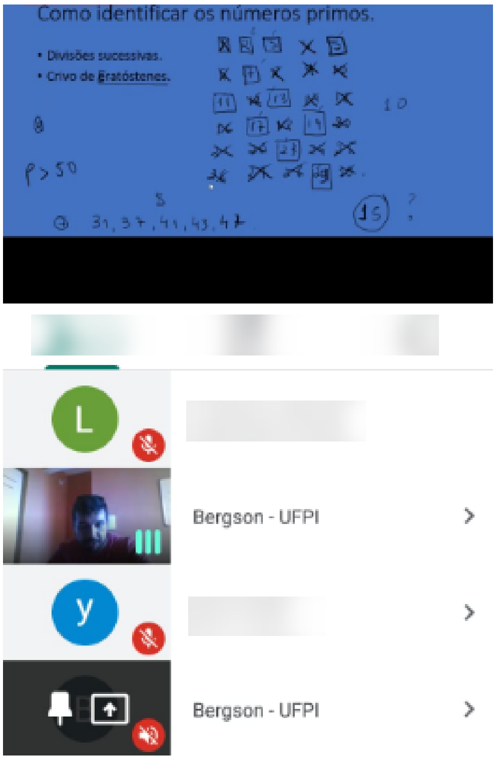

12:56
Você

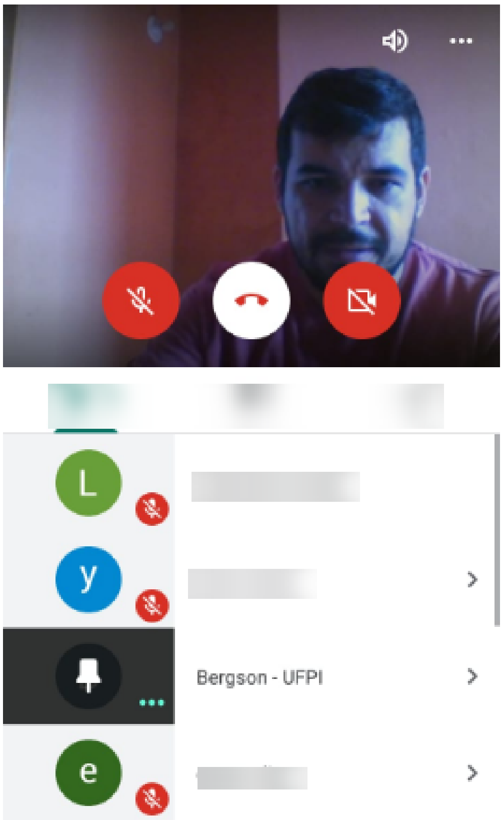

14:06
Você
e
M

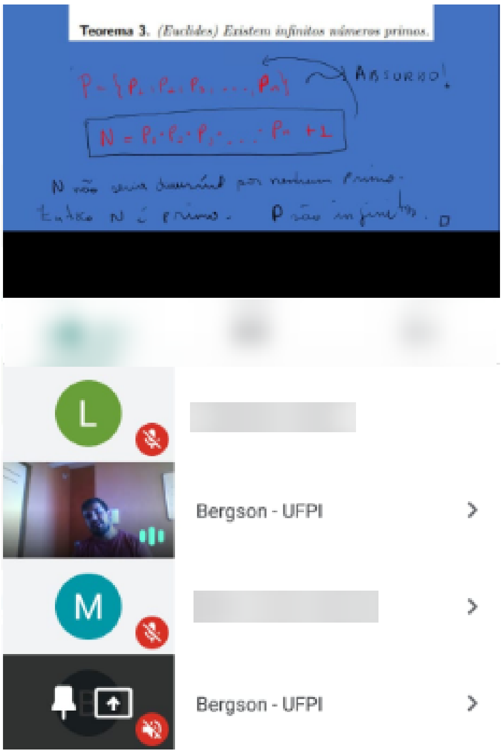

GRAVANDO
B
Você está apresentando
G
e mais 5
13:42
Apresentação (Você)
Você
Você está apresentando para todos
Parar apresentação
G

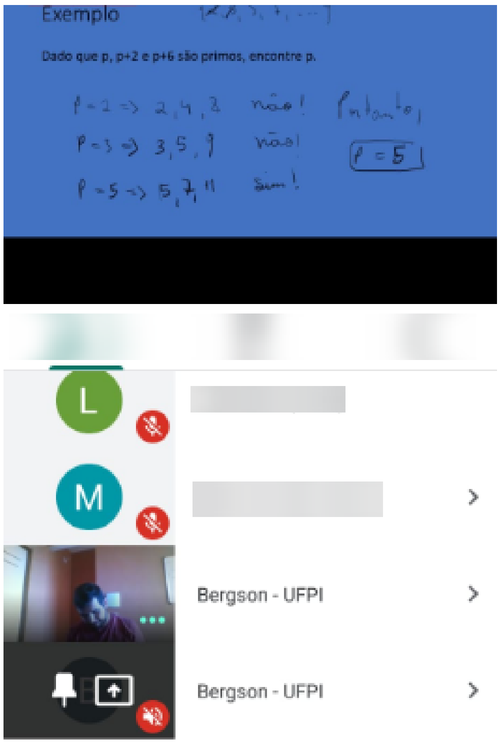

GRAVANDO
13:44
Você
C

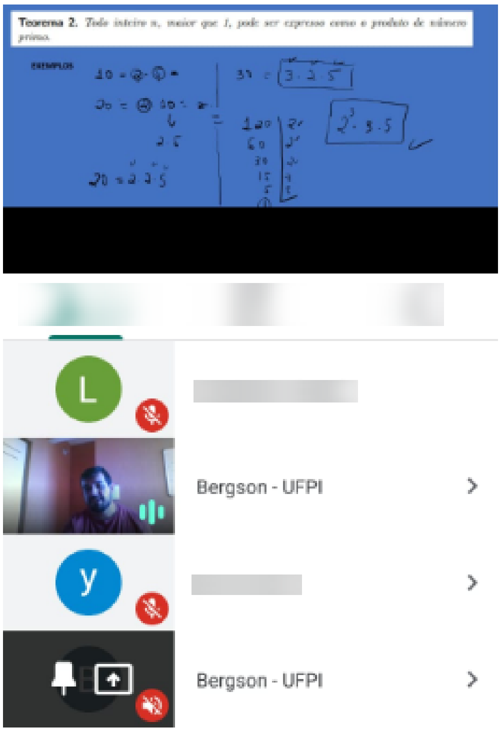

Exemplo
Mostre que todo primo é da forma 6k + 1 ou 6k + 5, para algum k inteiro.
L
Bergson - UFPI
M
Bergson - UFPI


Como identificar os números primos.
• Divisões sucessivas.
• Crivo de Eratóstenes.
Bergson - UFPI
Bergson - UFPI


Bergson - UFPI


Teorema 3. (Euclides) Existem infinitos números primos.
P = {p1, p2, p3, ..., pn}
ABSURDO!
N = p1 · p2 · p3 · ... · pn + 1
L
Bergson - UFPI
M
Bergson - UFPI


Exemplo
Dado que p, p+2 e p+6 são primos, encontre p.
p = 2 => 2, 4, 8 não!
p = 3 => 3, 5, 9 não!
p = 5 => 5, 7, 11 sim!
Portanto,
p = 5
L
M
Bergson - UFPI
Bergson - UFPI


Teorema 2.
Bergson - UFPI
Bergson - UFPI

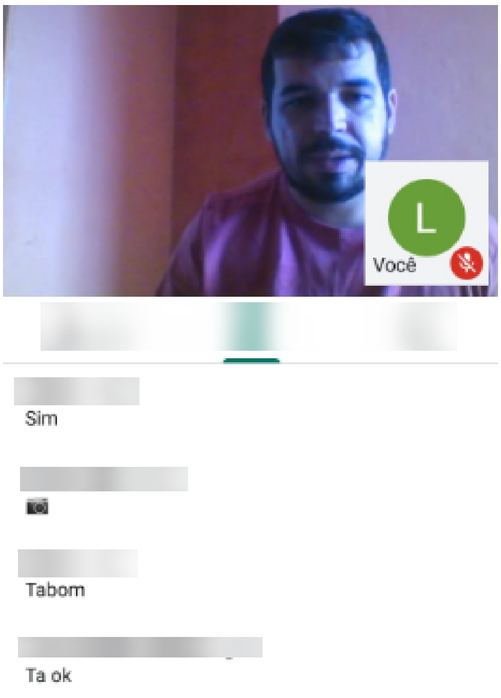

Você
Sim
Tabom
Ta ok

Figura A.1: Planilha com Resultados Gerais
FONTE: Construído pelo autor

Carimbo de data/hora	Pontuação	NOME COMPLETO	QUAL SUA IDADE?	SEXO	QUAL SÉRIE VOCÊ CUR	QUAL TURMA VOCÊ SE	Este teste faz parte dos r	QUESTÃO 1: Defina o qu	QUESTÃO 2: Explique pc	QUESTÃO 3: (JÚNIOR; C	QUESTÃO 4: (JÚNIOR; C	QUESTÃO 5:	QUESTÃO 6: (PINHEIRO	QUESTÃO 7: (PINHEIRO	QUESTÃO 8: (PINHEIRO et al.,2012) Encontre os inteiros que, na divisão por 7, deixam um quociente igual ao resto.
29/05/2020 14:26:37		Pedro Henrique da Silva A	16	MASCULINO	9º ANO	TURMA 1	Sim aceito.	2.3.5.7.11.13.17.19.23.29	Por que o 51 e maio que	49	2^3 x 5^3	357	2578764243	Primo possui apenas um	Apenas o 8.
29/05/2020 14:32:23		Francisco jonas farias ma	14	MASCULINO	9º ANO	TURMA 1	Sim aceito.	São os números menos q	Pq ele não ser encaixe nc	16	2^3 x 5^3	10	14	Não pode ser 6k+5 estão	8, 16 e 32.
29/05/2020 14:55:58		Larissa da silva Rodrigue	14	FEMININO	9º ANO	TURMA 1	Sim aceito.	O número primo possue a	Porque para ser primo el	15	2^3 x 5^3	20	-7	20	8, 16, 24, 32, 40 e 48.
29/05/2020 14:58:45		Larissa	14	FEMININO	9º ANO	TURMA 1	Sim aceito.	O número primo ele poss	Porque para ser primo el	15	2^3 x 5^3	20	13	20	8, 16, 24, 32, 40 e 48.
29/05/2020 15:03:50		Larissa	14	FEMININO	9º ANO	TURMA 1	Sim aceito.	O número primo possue a	Para ser primo ele so pod	15	2^3 x 3 x 5^3	20	13	20	8, 16 e 32.
29/05/2020 15:08:31		Larissa	14	FEMININO	9º ANO	TURMA 1	Sim aceito.	O número primo possue a	Para ser primo ele so po	15	2^3 x 5^3	20	13	20	8, 16, 24, 32, 40 e 48.
29/05/2020 15:10:53		Francisco Cauê Souza de	14	MASCULINO	8º ANO	TURMA 2	Sim aceito.	Números primos são aqu	Por que ele e divisível po	15	2^2 x 3 x 5 x 7	30	7	3 não pode ser maior que	Todo múltiplo de 8.
29/05/2020 15:25:31		Kariny Maria de Souza Da	13	FEMININO	8º ANO	TURMA 1	Sim aceito.	Quaquer número divisível	Porque ele não é divisível	25	2^3 x 3 x 5^3	200	42	7k e 11k	8, 16, 24, 32, 40 e 48.
29/05/2020 15:25:49		Enzon gabriel gomes barr	14	MASCULINO	9º ANO	TURMA 2	Sim aceito.	Numero que tem apenas	Porque tem tres divisores	15	2^3 x 5^3	412	4	6k+2 par 6k+3 dividido po	Apenas o 8.
29/05/2020 15:31:12		Victor Raul Martins Matos	13	MASCULINO	8º ANO	TURMA 2	Sim aceito.	Um número divisível por u	Pois tem mais de dois div	15	2^3 x 5^3	44	3	Se n = 6k, então n é múlti Se n = 6k + 1, então n po Se n = 6k + 2 = 2(3k + 1), Se n = 6k + 3 = 3(2k + 1), Se n = 6k + 4 = 2(3k + 2), Se n = 6k + 5, então n po Portanto, n pode ser da fo	8, 16, 24, 32, 40 e 48.
29/05/2020 15:41:16		Ana Nicole Pereira Dos S	13	FEMININO	8º ANO	TURMA 2	Sim aceito.	E o número que possui do	Pq e divisível por 3	15	2^3 x 5^3	7	1	6k+5	8, 16, 24, 32, 40 e 48.
29/05/2020 15:48:33		Francisca Vitória Sales da	13	FEMININO	8º ANO	TURMA 1	Sim aceito.	E o número Que se divic	Por e divisível por 3	15	2^3 x 5^3	7	7	Todo número primo e da f	Apenas o 8.
29/05/2020 15:56:46		Emilly Martins dos Santos	14	FEMININO	8º ANO	TURMA 2	Sim aceito.	Possui apenas dois divisc	Pois os números primos s	15	2^3 x 5^3	7	5	6K+3	Todo múltiplo de 8.
29/05/2020 15:58:32		Yan Souza De Paiva	15	MASCULINO	9º ANO	TURMA 2	Sim aceito.	Número primo e quando e	Pois ele e divido por 3 por	15	2^3 x 3 x 5^3	412	3	6K+1 ou 6K+5 são pares	Todo múltiplo de 8.
29/05/2020 17:46:20		Sergiana Santos Ribeiro	14	FEMININO	8º ANO	TURMA 1	Sim aceito.	E um número que possue	Podemos afirmar que 51	15	2^3 x 5^3	7	2	6k , 6k+1,6k+2,6k+3,6k+4	8, 16 e 32.
29/05/2020 18:39:53		Bruna Sousa dos Santos	14	FEMININO	9º ANO	TURMA 1	Sim aceito.	Número primo e apenas c	Pós são divisíveis por 3	1	2^2 x 3 x 5 x 7	5	1	(6k,6k+1,6k+2,6k+3,6k+4	Todo múltiplo de 8.
29/05/2020 18:46:43		Mirian martins Sales	14	FEMININO	9º ANO	TURMA 1	Sim aceito.	O número que é dividido a	Porque ele tem mais de d	15	2^3 x 5^3	412	2	6k + 5 6(3) + 5 = 18 + 5 = 23 (é numero n	Apenas o 8.
29/05/2020 18:50:09		Maria Natanaely Souza M	14	FEMININO	9º ANO	TURMA 2	Sim aceito.	Divisível por 1 ou por ele	Porque é divisível por 3	15	2^3 x 5^3	1000	23	Se n=6k n é múltiplo de 6	8, 16, 24, 32, 40 e 48.
29/05/2020 18:50:27		Mirian martins Sales	14	FEMININO	9º ANO	TURMA 1	Sim aceito.	O número que é dividido a	Porque ele tem mais de d	15	2^3 x 3 x 5^3	412	2	6k + 5 6(3) + 5 = 18 + 5 = 23 (é numero n	Todo múltiplo de 8.
29/05/2020 19:02:51		Mirian martins sales	14	FEMININO	9º ANO	TURMA 1	Sim aceito.	Um número que é dividido	porque ele tem 3 divisore	15	2^3 x 3 x 5^3	412	2	Porque o resultado da co	Todo múltiplo de 8.
29/05/2020 20:39:11		Geovana Pereira Souza	13	FEMININO	8º ANO	TURMA 1	Sim aceito.	Número primo que tem ap	como pode ver 51 é divisi	47	2^3 x 5^3	7	3	Ele não tem número prim	Apenas o 8.
29/05/2020 21:46:24		Graziele Costa dos Santo	14	FEMININO	9º ANO	TURMA 1	Sim aceito.	Apenas 2 divisores	Não é número primo	2	2^3 x 5^3	2	3	6k,6k,+1,6k+3,6k+3,6k+3,	8, 16, 24, 32, 40 e 48.
29/05/2020 21:47:28		Ana Beatriz Rodrigues do	14	FEMININO	9º ANO	TURMA 1	Sim aceito.	Número primo e um núme	Por que ele e divisível po	15	2^3 x 5^3	2	3	Sabemos que um número 6k, 6k + 1, 6k + 2, 6k + 3,	8, 16, 24, 32, 40 e 48.
30/05/2020 08:31:17		Lara Kézia Martins	14	FEMININO	9º ANO	TURMA 2	Sim aceito.	Possui apenas dois divisc	Logo é divisível por 1,3,17	15	2^3 x 5^3	412	3	6k +3 é múltiplo de 3. Logo, todo primo é 6k + 1	8, 16, 24, 32, 40 e 48.
30/05/2020 15:21:13		Luísa Larah Lopes Miranc	13	FEMININO	8º ANO	TURMA 2	Sim aceito.	Número que só pode ser	Porque ele pode ser divid	15	2^3 x 5^3	7	7	Não sei.	8, 16 e 32.
30/05/2020 15:29:15		Anna Cecilia Rodrigues F	13	FEMININO	8º ANO	TURMA 2	Sim aceito.	Todo número que é dividi	Por que ele é divisivel por	14	2^3 x 5^3	7	14		8, 16 e 32.
30/05/2020 15:36:22		Marisa Almeida Lima	13	FEMININO	9º ANO	TURMA 2	Sim aceito.	Um número primo é um n	Sabe-se que para um núr	15	2^3 x 5^3	10	3	Primeiramente, sabe-se q n=6k, então n é multiplo d n=6k+1, n pode ser primo n=6k+2 ou n= 2(3k+1), log n=6k+3 ou n=3(2k+1), log n=6k+4 ou n=2(3k+2), log n=6k+5, n pode ser primo	8, 16, 24, 32, 40 e 48.
30/05/2020 15:38:53		João Bosco	13	MASCULINO	8º ANO	TURMA 2	Sim aceito.	Um número que só tem c	Por que é divisível pelo n	15	2^3 x 5^3	7	3	6k+1	8, 16, 24, 32, 40 e 48.
30/05/2020 15:41:00		Gabriel Arrascaeta Araújo	13	MASCULINO	8º ANO	TURMA 2	Sim aceito.	Número divisível por 1 e p	Porque é divisível por 3	15	2^3 x 5^3	10	3	4	Todo múltiplo de 8.
30/05/2020 15:41:47		Francisca Guilhermina Pi	14	FEMININO	8º ANO	TURMA 2	Sim aceito.	É um número que pode s	Porque 51 pode ser dividi	15	2^3 x 5^3	7	2	Pois os múltiplos de 6 são	Todo múltiplo de 8.
30/05/2020 16:35:54		Fernanda Silva Farias.	14.	FEMININO	8º ANO	TURMA 2	Sim aceito.	É um número divisível po	Pois ele não é divisível ap	15.	2^3 x 5^3	412.	3.	A forma não pode ser ess	8, 16, 24, 32, 40 e 48.
30/05/2020 18:11:03		Luiz Gustavo Fagundes N	13	MASCULINO	8º ANO	TURMA 2	Sim aceito.	Número divisíveis apenas	Pois ele é divisível por 3.	14	2^3 x 5^3	45	20	6 x 3 + 1= 19	8, 16 e 32.

E NIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ - UFPI
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

PROFMAT

TURMA 1 - PLANO DE AULA

1. Identificação

Disciplina
MATEMÁTICA

Assunto da Aula
NÚMEROS PRIMOS

Data da aula	Horário da aula	Escola	Cidade
30/05/2020	**13:00**	**EEF Manoel Bandeira de Moura**	**Guaraciaba do Norte/CE**

Professor(a)
FRANCISCO BERGSON ARAUJO GOMES

2. Plano

Objetivos

- Conhecer a definição de números primos.
- Identificar números primos e compostos.
- Compreender a infinidade dos números primos.
- Decompor números compostos em fatores primos.

Conteúdo Programático da Aula

- Números Naturais.
- Números Primos.
- Métodos de constatação de primalidade.
- Decomposição de números compostos em fatores primos.

Recursos Utilizados na Aula

- Plataforma Google Hangouts Meet.
- Formulários do Google.
- Livro A conquista da matemática 6º ano.

3. Metodologia

A aula será disposta em 2 etapas, para melhor aproveitamento do tempo disponível.

- 1ª ETAPA: Apresentar de maneira expositiva o conteúdo em questão, proporcionando ao aluno o alcance dos objetivos desejados.

- 2ª ETAPA: Sanar todas as dúvidas possíveis dos alunos sobre o conteúdo recém apresentado.

4. Avaliação

Além da avaliação durante toda a aula, diagnosticando as dificuldades sobre o assunto e a absorção dos ensinamentos. Os alunos também se submeterão a um teste com questões abordando os conteúdos acima listados.

5. Indicações Bibliográficas

JÚNIOR, J. G.; CASTRUCCI, B.; GIOVANNI, J. A conquista da matemática.6ºano.São Paulo: FTD, 2018.

Francisco Bergson A. Gomes
Assinatura do Professor

TURMA 2 - PLANO DE AULA

1. Identificação

Disciplina
MATEMÁTICA

Assunto da Aula
NÚMEROS PRIMOS

Data da aula	Horário da aula	Escola	Cidade
30/05/2020	**15:00**	**EEF Manoel Bandeira de Moura**	**Guaraciaba do Norte/CE**

Professor(a)
FRANCISCO BERGSON ARAUJO GOMES

2. Plano

Objetivos

- Conhecer a definição de números primos.
- Identificar números primos e compostos.
- Compreender a infinidade dos números primos.
- Decompor números compostos em fatores primos.

Conteúdo Programático da Aula

- Números Naturais.
- Números Primos.
- Aplicação de teoremas associados aos números primos.
- Problemas olímpicos com números primos.

Recursos Utilizados na Aula

- Plataforma Google Hangouts Meet.
- Formulários do Google.
- Material do POTI (Polo Olímpico de Treinamento Intensivo).

3. Metodologia

A aula será disposta em 2 etapas, para melhor aproveitamento do tempo disponível.

- 1ª ETAPA: Apresentar de maneira expositiva o conteúdo em questão, proporcionando ao aluno o alcance dos objetivos desejados.

- 2ª ETAPA: Sanar todas as dúvidas possíveis dos alunos sobre o conteúdo recém apresentado.

4. Avaliação

Além da avaliação durante toda a aula, diagnosticando as dificuldades sobre o assunto e a absorção dos ensinamentos. Os alunos também se submeterão a um teste com questões abordando os conteúdos acima listados.

5. Indicações Bibliográficas

PINHEIRO, R. et al. Poti-material didático. 2012.

Francisco Bergson A. Gomes
Assinatura do Professor

EXPERIMENTO TESTE SOBRE NÚMEROS PRIMOS

Atividade complementar do Experimento sobre números Primos.
Por Francisco Bergson Araujo Gomes

*Obrigatório

NOME COMPLETO *

Sua resposta

QUAL SUA IDADE? *

Sua resposta

SEXO *

- MASCULINO
- FEMININO

QUAL SÉRIE VOCÊ CURSA? *

- 8º ANO
- 9º ANO

QUAL TURMA VOCÊ SE ENCONTRA? *

- TURMA 1
- TURMA 2

Este teste faz parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Piauí (UFPI), de autoria do professor FRANCISCO BERGSON ARAUJO GOMES, e aborda o ensino de números primos e suas aplicações. Ciente disso, você aceita participar da pesquisa? *

- Sim aceito.
- Não, não aceito.

TESTE - AVALIAÇÃO

Agora começam as questões sobre Números Primos.

QUESTÃO 1: Defina o que é um número primo. *

Sua resposta

QUESTÃO 2: Explique por que o 51 não é um número primo. *

Sua resposta

QUESTÃO 3: (JÚNIOR; CASTRUCCI; GIOVANNI, 2018) Quantos são os números primos menores que 50? *

Sua resposta

QUESTÃO 4: (JÚNIOR; CASTRUCCI; GIOVANNI, 2018) Qual é a forma fatorada completa do número natural 1000? *

- $2^3 \times 5^3$
- $2^3 \times 3 \times 5^3$
- $2^2 \times 3 \times 5 \times 7$
- $5^3 \times 11$

QUESTÃO 5: *

(JÚNIOR; CASTRUCCI; GIOVANNI, 2018) Uma fatoração do número 1200 é

$$2^a \times 3^b \times 5^c.$$

Qual é o valor de $a + b + c$?

Sua resposta

QUESTÃO 6: (PINHEIRO et al,2012) Dado que p, 2p + 1 e $4p^2 + 1$ são números primos, encontre p. *

Sua resposta

QUESTÃO 7: (PINHEIRO et al.,2012) Prove que todo primo maior que 3 é da forma 6k+1 ou 6k+5. *

Sua resposta

QUESTÃO 8: (PINHEIRO et al.,2012) Encontre os inteiros que, na divisão por 7, deixam um quociente igual ao resto. *

- ◯ Apenas o 8.
- ◯ 8, 16 e 32.
- ◯ 8, 16, 24, 32, 40 e 48.
- ◯ Todo múltiplo de 8.

OBRIGADO!
Sua participação foi muito importante.

Página 1 de 1 Enviar

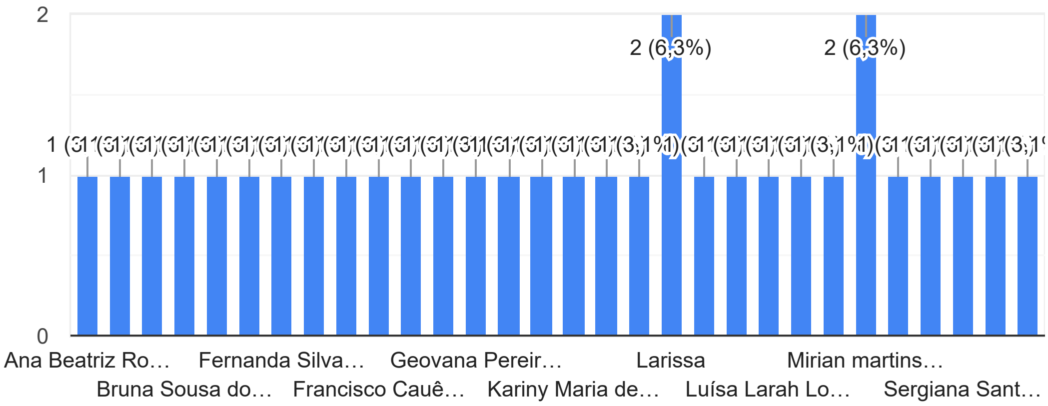
EXPERIMENTO TESTE SOBRE NÚMEROS PRIMOS

32 respostas

Publicar análise

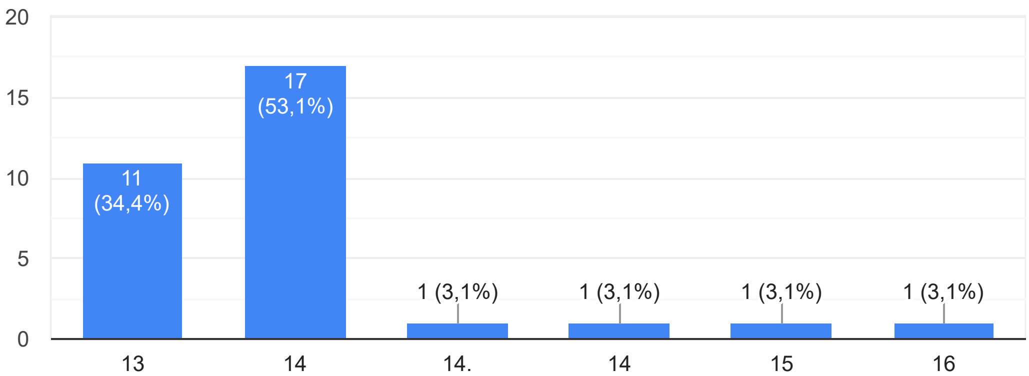
NOME COMPLETO

32 respostas



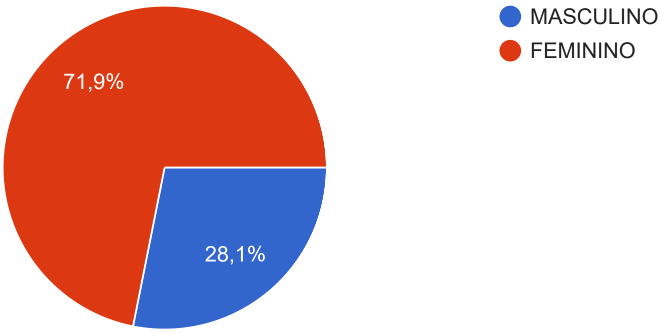
QUAL SUA IDADE?

32 respostas



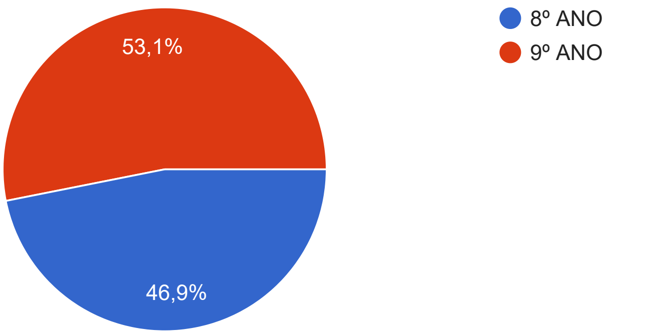
SEXO

32 respostas



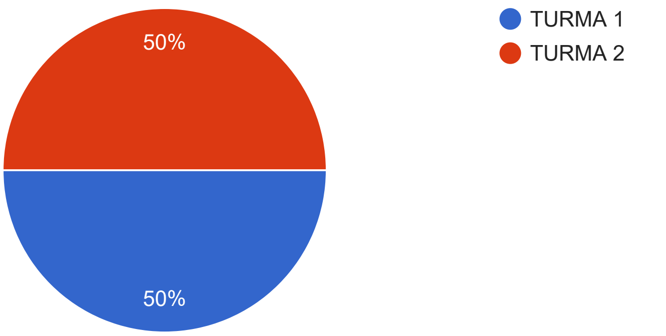
QUAL SÉRIE VOCÊ CURSA?

32 respostas



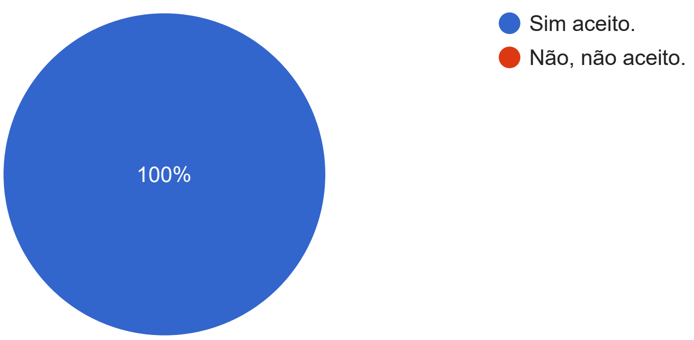
QUAL TURMA VOCÊ SE ENCONTRA?

32 respostas



Este teste faz parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Piauí (UFPI), de autoria do professor FRANCISCO BERGSON ARAUJO GOMES, e aborda o ensino de números primos e suas aplicações. Ciente disso, você aceita participar da pesquisa?

32 respostas



TESTE - AVALIAÇÃO

QUESTÃO 1: Defina o que é um número primo.

32 respostas

O número que é dividido apenas por um e por ele mesmo

Apenas 2 divisores

Todo número que é dividido apenas por um e por ele mesmo

Números primos são aqueles que só podem ser divididos por 2 números o 1 e o 2

Um número primo é um número que tem apenas 2 divisores o 1 e ele mesmo

Numero que tem apenas dois divisores

É um número divisível por 1 ou por ele mesmo,um número com somente dois divisores,ele próprio e outra unidade.

Divisível por 1 ou por ele mesmo

Quaquer número divisível por 2

QUESTÃO 2: Explique por que o 51 não é um número primo.

32 respostas

Porque ele tem mais de dois divisores

Porque é divisível por 3

Porque para ser primo ele só pode ser dividido por 3 o por ele mesmo

Não é número primo

Por que ele é divisivel por 3

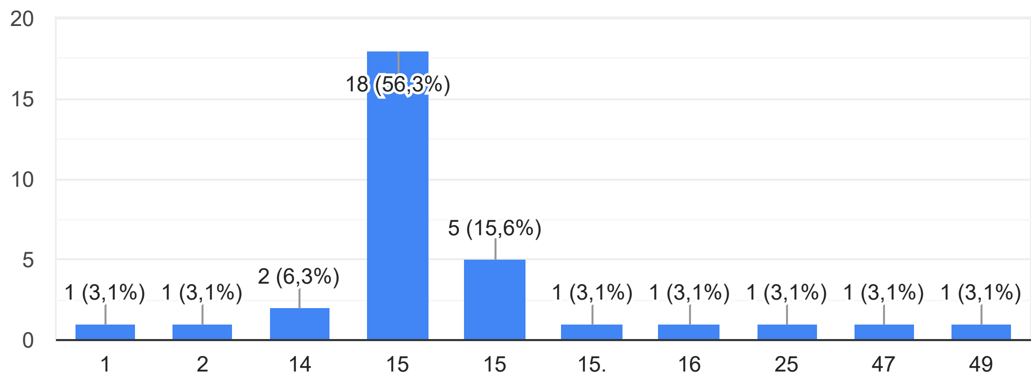
Por que ele e divisível por 1, 3, 17 e 51, então não é primo

Sabe-se que para um número ser divisível por três a soma do seus algarismo tem que ser múltiplo de 3. Logo, 5 +1 é 6 um múltiplo de 3. Dessa forma, observa-se que o 51 é divisível por 1, 3, 17, 51, e para um número ser primo tem que ter apenas 2 divisores o 1 e ele mesmo

Porque tem tres divisores

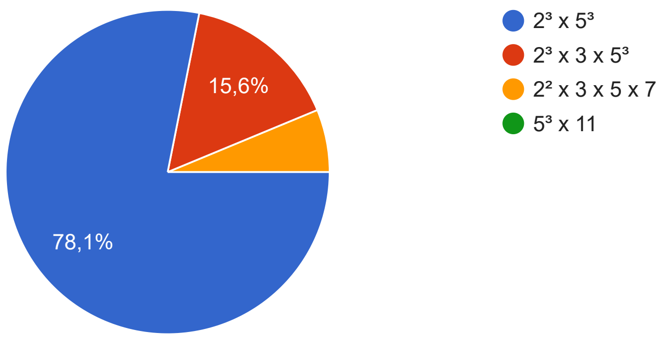
QUESTÃO 3: (JÚNIOR; CASTRUCCI; GIOVANNI, 2018) Quantos são os números primos menores que 50?

32 respostas



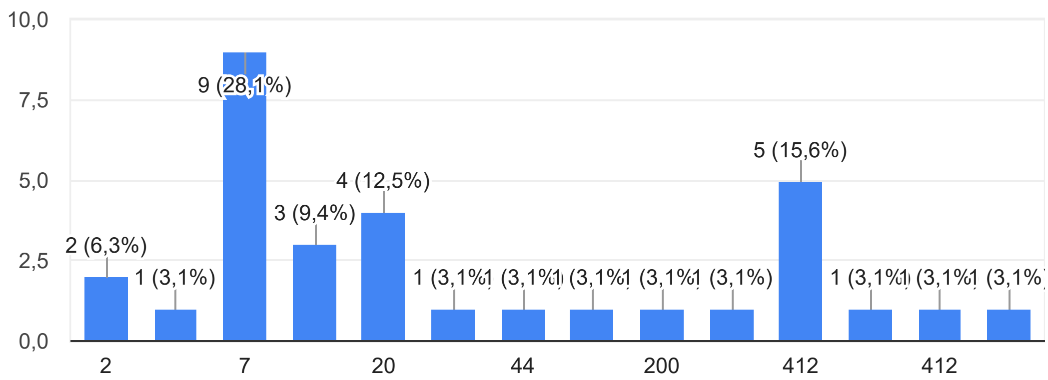
QUESTÃO 4: (JÚNIOR; CASTRUCCI; GIOVANNI, 2018) Qual é a forma fatorada completa do número natural 1000?

32 respostas



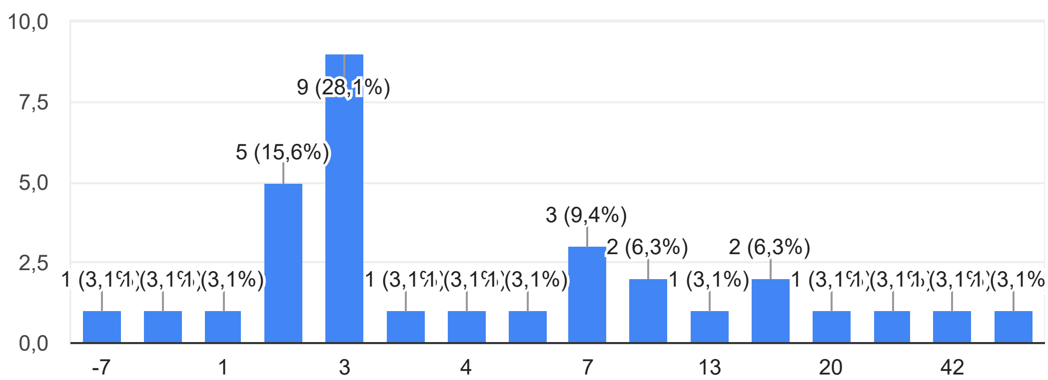
QUESTÃO 5:

32 respostas



QUESTÃO 6: (PINHEIRO et al,2012) Dado que p, 2p + 1 e 4p² + 1 são números primos, encontre p.

32 respostas



QUESTÃO 7: (PINHEIRO et al.,2012) Prove que todo primo maior que 3 é da forma 6k+1 ou 6k+5.

32 respostas

6K+1 ou 6K+5 são pares e 6K+3 e múltiplo

6k , 6k+1,6k+2,6k+3,6k+4 ou 6k+5....... Se não =6k+3(2k+1) então não e

Não pode ser 6k+5 estão não pode ser primo

Se n = 6k, então n é múltiplo de 6. Portanto, n não é primo.
Se n = 6k + 1, então n pode ser primo.
Se n = 6k + 2 = 2(3k + 1), então n é múltiplo de 2. Portanto, n não é primo.
Se n = 6k + 3 = 3(2k + 1), então n é múltiplo de 3. Portanto, n não é primo.
Se n = 6k + 4 = 2(3k + 2), então n é múltiplo de 2. Portanto, n não é primo.
Se n = 6k + 5, então n pode ser primo.
Portanto, n pode ser da forma 6k + 1 ou 6k + 5.

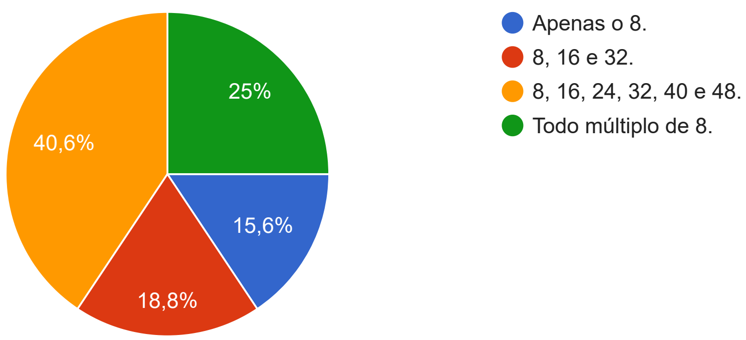
Todo número primo e da forma 6k mais 1 ou 6k mais 5 , onde k e um número natural

Porque o resultado da conta é 23 e 23 é um número natural

6k+1

QUESTÃO 8: (PINHEIRO et al.,2012) Encontre os inteiros que, na divisão por 7, deixam um quociente igual ao resto.

32 respostas



OBRIGADO!