Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

Rodolfo Soares Teixeira

Preparação Olímpica: Uma intervenção através do Portal da Matemática

Teresina - 2021

PROFMAT

Rodolfo Soares Teixeira

Dissertação de Mestrado:

Preparação Olímpica: Uma intervenção através do Portal da Matemática

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - Profmat, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática na modalidade profissional.

Orientador:
Prof. Dr. Carlos Humberto Soares Júnior.

Teresina - 2021

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial de Ciências da Natureza – CCN
Serviço de Processamento Técnico

T266p Teixeira, Rodolfo Soares.
Preparação olímpica: uma intervenção através do Portal da Matemática / Rodolfo Soares Teixeira. – 2021.
154 f. : il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT, Teresina, 2021.
"Orientador: Prof. Dr. Carlos Humberto Soares Júnior. "

1. Recursos Didáticos. 2. Olimpíadas Matemáticas - OBMEP. 3. Ensino Médio. I. Soares Júnior, Carlos Humberto. II. Titulo.

CDD 371.3

Bibliotecária (o): Caryne Maria da Silva Gomes – CRB3/1461

Rodolfo Soares Teixeira

Preparação Olímpica: Uma intervenção através do Portal da Matemática

Dissertação submetida à banca examinadora abaixo discriminada em defesa pública e aprovada em 11/05/2021.

BANCA EXAMINADORA

Carlos Humberto Soares Júnior

Prof. Dr. Carlos Humberto Soares Júnior (Orientador)

Universidade Federal do Piauí - UFPI

Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite

Universidade Federal do Piauí - UFPI

Maria José Araújo Souza

Profª. Dra. Maria José Araújo Souza

Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA

Antonio Marcelo Ferreira Aguiar

Prof. Me. Antonio Marcelo Ferreira Aguiar

Secretaria da Educação do Estado do Ceará - SEDUC

Teresina - 2021

Dedico este trabalho aos meus pais, Maria Zélia Soares Teixeira e José Antonio Teixeira (in memoriam) por sempre se fazerem presentes em minha vida e nunca me deixarem desanimar em meio as dificuldades.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço à Deus, que com sua onipotência me permitiu ter saúde e possibilidade de adentrar e concluir este curso de mestrado. Somente Ele detém todo o poder. Aquele quem me guardou durante todas estas viagens ao Piauí e que com sua característica onipresente, também cuidava da minha família que por ora eu havia deixado no Ceará, cheia de saudades e preocupações. Ele, onisciente, me permitiu conhecimento para alcançar meus objetivos.

À Maria Santíssima, mãe do Filho Unigênito, que sempre me protegeu com seu manto sagrado e intercedeu por mim junto à Deus Pai, abrindo estradas e caminhos, para que meus objetivos fossem alcançados. Tu foste sabedoria em meio a minha ignorância.

À meus pais, que me deram a vida e me ensinaram a vivê-la com dignidade, e que sempre foram uma fonte de inspiração para lutar com todas as forças por aquilo em que acredito.

À minha irmã, Fabiana, pela parceria de toda uma vida, sempre sendo meio apoio, desde criança ao segurar minha mão para dormir, até os dias atuais, como um porto seguro no cais. Ela tornou-se uma inspiração profissional.

À minha filha, Áurea Maria, que chegou em meio as turbulências dos estudos e fez o meu coração se transformar em calmaria ao estar ao seu lado. Sem perceber, ela é a minha maior motivação e fonte de inspiração. Foi por ela que eu me transformei na minha melhor versão – ser Pai.

À minha esposa e companheira de vida, Deyviane, que me proporcionou a alegria de ser Pai, pelo apoio e pelas orações para que tudo ocorresse conforme a vontade de Deus.

Às minhas sobrinhas, Marya e Maria Luiza, pela compreensão com a ausência do tio/padrinho, nos momentos em que elas queriam a minha proximidade em suas vidas. Vocês foram enviadas por Deus para alegrar a minha vida.

Ao meu cunhado, Luiz Carlos, pela presteza em me acompanhar na maioria das longas viagens à procura do conhecimento.

Aos amigos companheiros de estudo, em nome do Daniel (*in memoriam*), que me acolheu em solo piauiense e nunca mediu esforços pela turma. Sempre se fez sol em meio à tempestade; sempre nos arrancou sorrisos e por fim, nos fez chorar com a sua tão precoce partida. Essa conquista também é por você. Minha eterna gratidão.

Aos coordenadores João Carlos e Ítalo, pelo acolhimento e suporte à turma.

Aos professores, Roger, Valmária, Jurandir, Liane, Aurineide, Isaías e em especial, ao Professor Carlos Humberto, meu conterrâneo, que me apoiou em todas as decisões durante a construção deste trabalho e por toda a minha jornada na UFPI. À vocês, todo o meu respeito e admiração.

À CAPES, pelo suporte financeiro durante a realização deste Mestrado e a SBM pela oportunidade do PROFMAT.

"Tudo o que fizerem façam de todo o coração, como para o Senhor, e não para os homens".

Colossenses 3:23.

Resumo

Este trabalho aborda o ambiente virtual Portal da Matemática (OBMEP) como subsídio de preparação olímpica, visando ascensão dos rendimentos educacionais e causando impacto positivo na vida estudantil. A intervenção dá-se por meio de uma sequência de aulas via plataforma Google Meet utilizando-se da Engenharia Didática, enquanto metodologia de pesquisa e da Sequência Fedathi, a qual baseia-se na linha de sequenciações de experiências para dar aprofundamento ao aluno e favorecimento as investigações matemáticas; tendo como sujeitos da pesquisa alunos de 1º ano do ensino médio da E.E.E.P. Antonio Tarcísio Aragão, situada em Ipu – CE. Os resultados deste trabalho mostram que as metodologias aplicadas foram eficazes no auxílio da exposição dos assuntos escolhidos para trabalhar como sendo os principais e mais contemplados na primeira fase da OBMEP, além de possibilitarem o desenvolvimento de habilidades para trabalhar com questões olímpicas através do Portal da Matemática.

Palavras-chave: Intervenção; Portal da Matemática (OBMEP); Olimpíadas; Sequência Fedathi; Engenharia Didática.

Abstract

This work addresses the virtual environment Mathematics Portal (OBMEP) as a subsidy for Olympic preparation, aiming at increasing educational performance and causing a positive impact on student life. The intervention takes place through a sequence of classes via the Google Meet platform using Didactic Engineering, as a research methodology and the Fedathi Sequence, which is based on the line of sequencing of experiences to deepen the student and favor it mathematical investigations; having as research subjects 1st year high school students from E.E.E.P. Antonio Tarcísio Aragão, located in Ipu - CE. The results of this work show that the applied methodologies were effective in helping to expose the subjects chosen to work as being the main and most contemplated in the first phase of OBMEP, in addition to enabling the development of skills to work with Olympic issues through the Mathematics Portal .

Key words : Intervention; Mathematics Portal (OBMEP); Olympics; Fedathi string; Didactic Engineering.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

Habitualmente, a disciplina de matemática é vista pelos estudantes como uma vilã. Além disso, os professores da disciplina tentam de diversas formas transformar essa situação e fazer que a disciplina seja bem aceita pelos alunos e para isso, usufrui-se bastante das olimpíadas para que a partir de incentivos, essa seja uma das portas de entrada para o mundo matemático.

As olimpíadas de matemática são ações tidas como instrumentos que difundem e propagam por si só a própria disciplina, além de serem atraentes aos alunos, pois desafiam-se e tentam alcançar ano após ano um melhor desempenho.

Visando uma ascensão dos rendimentos educacionais do aluno e pensando na preparação olímpica como geradora de impacto positivo na vida estudantil, atrelamos uma preparação olímpica com subsídio do Portal da Matemática, na perspectiva de tornar o aluno mais autônomo e protagonista de sua própria evolução educacional.

Além disso, está disposto nos PCNs (1998, p.56)[5] que

> [...] a Matemática pode e deve estar ao alcance de todos e a garantia de sua aprendizagem deve ser meta prioritária do trabalho docente; a atividade matemática escolar não é 'olhar para coisas prontas e definitivas', mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade.

A relevância desse estudo se justifica na possibilidade e necessidade de buscar estratégias que contemplem não somente alunos que tenham facilidade com os conteúdos matemáticos abordados pela Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), mas em oportunizar todos aqueles que buscam além de se tornarem medalhistas, um aprofundamento nos assuntos matemáticos, uma forma de ser atraído pela disciplina e elevar seus rendimentos independente do resultado final do processo, tornando-se um medalhista ou não, e, com isso, conscientizar-se que o mais importante na finalização do projeto será o conjunto dos saberes adquiridos e as novas ferramentas para resolução de questões olímpicas que terá agregado ao seu conhecimento.

Juntando a experiência que o professor orientador já possui com olimpíadas e visando que a Escola Campo de Pesquisa já possui preparações olímpicas baseadas no Programa OBMEP na Escola, desde 2016, em aulas ministradas aos sábados pela manhã, com alunos tendo notória "facilidade" para a matemática, este presente projeto visou a atender a qualquer aluno de primeiro ano do ensino médio da Escola Campo de Estudo, mediante uma inscrição apresentada através de um formulário online no Google Forms, apresentando o desejo de aprofundar seus conhecimentos matemáticos de forma simplificada e significativa, desafiar-se com questões olímpicas e também buscar a realização do sonho de ser um medalhista, dentro de seus próprios horários de estudos estabelecidos pela escola, oportunizando a participação de todos.

Visando uma preparação que contemplasse um melhor afunilamento da elaboração, da construção e da aquisição de conceitos e de propriedades matemáticas exigidas pela OBMEP e uma especificidade dos assunto-problemas abordados, foi possível visionar o Portal da Matemática - por ser um recurso gratuito e disponível através da internet com ferramentas eficazes de aprofundamento em determinados assuntos didático-matemáticos - como possibilitador dos alunos caminharem rumo ao seu próprio conhecimento, tendo o professor não como detentor dos conhecimentos e saberes, mas sim como um mediador destes.

Mesmo no hodierno tempo de isolamento social, em virtude da pandemia do COVID – 19, o referido portal é bastante estruturado, capaz de dar suporte aos alunos em relação às videoaulas, fornecer materiais teóricos, listas de exercícios, testes, avaliações geradoras de certificados e aplicativos que funcionam como jogos. Logo, é percebido pela variedade de opções tecnológicas que vão de encontro ao que o aluno dos dias atuais interessam-se. Agregado às aulas mediadoras, que ocorreram de forma remota, onde são realizadas transmissões virtuais em tempo real, tendo interações nos mesmos horários que deveriam ocorrer de maneira presencial, os encontros destinados para este projeto e a estes alunos, via Plataforma do Google Meet, tornando possível buscar a preparação ora almejada.

Tendo em vista o mérito dessa pesquisa, buscaremos verificar os principais assuntos abordados na primeira fase da OBMEP e com isso temos como objetivo principal, elaborar estratégias auxiliadoras pretendendo a evolução dos alunos nos conhecimentos a respeito destes assuntos mais debatidos para que ao final do processo seja vista a evolução individual e a evolução do grupo perante aos demais alunos da mesma série que não participaram do projeto, para verificar se houve uma colaboração deste projeto no desempenho dos alunos.

Como objetivos específicos buscamos três vertentes: desafiar os alunos com questões olímpicas; melhorar os conhecimentos dos alunos tanto dentro de sua série de estudo, quanto no potencial de interpretar e solucionar problemas mais abordados pela OBMEP e como consequência, uma possibilidade de tornarem-se medalhistas e colaborar para o aluno alcançar seus objetivos estudantis ao final do ensino médio.

Com esta pesquisa, esperamos evoluir os conhecimentos dos alunos e atraí-los para a disciplina, tornando-os capazes de serem inspiradores para outras pessoas, com o fito destas, também, usufruírem de uma plataforma estruturada como o Portal da Matemática. Além disso, através da aplicação das metodologias como a Sequência FEDATHI e a Engenharia Didática colaborar para os discentes criarem uma possível autonomia em seus estudos, melhorando e aprofundando seus conhecimentos por meio de seus protagonismos, sendo acompanhados em seus progressos e evoluções. Portanto, este trabalho pode tornar-se um material experimental de subsídios para os professores da disciplina de Matemática que queiram fazer preparação ou elevar os rendimentos de seus alunos, com o propósito de olimpíada ou como auxílio em suas aulas.

Capítulo 2

As Olimpíadas de Matemática

Estudos revelam que desde o século XVI existiam competições não oficiais de matemática. De acordo com Maciel (2009)[13], naquele tempo alguns matemáticos faziam competições entre si, apostando cátedras em universidades, reputações e até mesmo dinheiro. Eles apostavam e se esforçavam na resolução de problemas matemáticos com intuito de serem bem acolhidos ou adquirir admiração por parte da sociedade.

Essas competições aconteciam no formato de duelo, no qual um competidor desafiava o outro, com problemas matemáticos a fim de que fossem resolvidos e vencia, enfim, o competidor que respondesse corretamente um maior número de problemas. Suas intenções com estes duelos eram reconhecimentos pela aptidão matemática, o que muitas vezes exigia dedicação intensa e contínua. Assim, outros competidores dedicavam-se na solução de problemas que fossem capazes de serem usados em outros duelos, o que lhes abonava dinheiro, fama e reconhecimento (MACIEL, 2009)[13].

Em 1894, na Hungria, ocorreu a primeira Olimpíada de Matemática, destinada a estudantes concluintes da segunda etapa do ensino regular do país em homenagem a um famoso professor de matemática húngaro Jósef Kürschák, membro da Academia de Ciências da Hungria e do Instituto Politécnico da Universidade de Budapeste, que se tornou ministro de educação do país (FERNANDES, s.d.)[10].

E assim, surgiu o "pontapé inicial" para outras competições oficiais mundo a fora.

Ainda hoje, essas competições internacionais existem. Um exemplo é a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) que

> É a mais importante competição internacional, realizada desde 1959. Participam dessa competição cerca de 100 países de todo o mundo, representados por equipes de até 6 estudantes secundários ou que não tenham ingressado na Universidade ou equivalente na data da celebração da Olimpíada. Em 2017, foi organizada, no Rio de Janeiro (RJ), a 58th International Mathematical Olympiad (IMO) (OBM, s.d)[16].

A IMO acontece anualmente e neste ano de 2020, a 61ª edição aconteceria em São Petersburgo, na Rússia. Todavia, por conta da pandemia, aconteceu de forma remota em 130 centros de aplicação nos mais de 100 países participantes. Nesta edição, a equipe brasileira atingiu a 10ª colocação, conquistando uma medalha de ouro e cinco medalhas de prata.

2.1 As Olimpíadas de Matemática no Brasil

2.1.1 Breve Histórico da Olimpíada Brasileira de Matemática - OBM

Em 1979 a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) organizou a primeira Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e com o passar dos anos a mesma sofreu algumas mudanças, porém, continua com o mesmo objetivo de aguçar o estudante ao estudo de matemática, efetuar e aprimorar a formação de professores, além de inspirar a melhoria do ensino e revelar jovens talentos (OBM, s.d.)[15].

De acordo com o site da OBM (s.d.)[15], a competição passou por diversas mudanças de ajustamento para seus participantes, foram elas:

• A prova da OBM, em 1991, constava de dois níveis, sendo eles: Júnior, para alunos com no máximo 15 anos e Sênior, para alunos do ensino médio;

• Em 1992, constavam duas fases da prova, sendo a primeira com 25 questões de múltipla escolha e a segunda fase executada em dois dias, contendo três problemas matemáticos abertos e dissertativos em cada dia. Além disso, neste mesmo ano o nível Júnior passou a ser representado por alunos cursando até a oitava série;

• No ano subsequente, o nível Júnior voltou a ter sua segunda fase realizada em apenas um dia, contendo cinco problemas matemáticos. Dois anos depois, em 1995, o mesmo nível voltou a ter como competidores, estudantes de até 15 anos;

• Somente em 1998, a olimpíada foi dividida em três níveis. O nível I era destinado para estudantes de quinta e sexta séries do ensino fundamental; O nível II destinava-se para alunos de sétima e oitava séries do ensino fundamental e o nível três era para alunos de ensino médio. Além disso, a prova foi dividida em três fases. A primeira: de múltipla escolha dispondo de 20 ou 25 questões; a segunda: uma prova aberta com 6 questões à disposição; e a terceira, e última fase, para os níveis I e II constava de 5 questões e para o nível III, 6 questões em dois dias. No mais, as provas das duas primeiras fases aconteciam nas respectivas escolas cadastradas;

• No ano seguinte, em 1999, as provas da competição do nível II passaram a ser em dois dias na fase final;

• Dois anos depois, em 2001, foi criado o nível universitário da competição, com duas fases;

• Em 2017 a OBM se integrou à Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e passou a realizar apenas a fase única para os níveis I, II e III, no entanto, o nível universitário continuou sendo realizado em duas fases.

2.1.2 A Olimpíada Brasileira de Matemática - OBM

A OBM é uma competição olímpica destinada a estudantes de Instituições Públicas e Privadas de todo o Brasil, sendo possível participar a partir do sexto ano do Ensino Fundamental, Ensino Médio e Nível Universitário. (OBM, s.d.)[14]. Tal olimpíada é executada numa parceria entre o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). A Comissão Gestora e a Comissão Nacional de Olimpíadas de Matemática da SBM são responsáveis pela coordenação desta olimpíada. Já a preparação das provas e suas soluções são de responsabilidade da Comissão Nacional de Olimpíadas de Matemática da SBM, além da definição dos critérios de correção e de premiação.

Com sua última mudança, em 2017, a OBM passou a contar com o nível universitário composto por duas fases, porém, a inscrição na competição é individual e de responsabilidade do estudante de graduação. Já para os níveis I, II e III, a olimpíada é composta apenas por uma fase, com realização sempre no segundo semestre de cada ano, apenas para estudantes convidados.

Os objetivos da Olimpíada Brasileira de Matemática são

> Interferir decisivamente em prol da melhoria do ensino de Matemática no Brasil, estimulando alunos e professores a um aprimoramento maior propiciado pela participação em olimpíadas.
> Descobrir jovens com talento matemático excepcional e coloca-los em contato com matemáticos profissionais e instituições de pesquisa de alto nível, propiciando condições favoráveis para a formação e o desenvolvimento de uma carreira de pesquisa.
> Selecionar os estudantes que representarão o Brasil em competições internacionais de Matemática a partir do seu desempenho na OBM, realizando o seu devido treinamento.
> Apoiar as competições regionais de Matemática em todo o Brasil.
> Organizar as diversas competições internacionais de Matemática, quando realizadas no Brasil (OBM, s.d.)[14].

Além disso, atualmente, os alunos são premiados com medalhas de ouro, de prata e de bronze, numa proporção aproximada de 1:2:3 (ex.: sendo x medalhas de ouro, serão

2x de prata e 3x de bronze), com classificação em ordem decrescente de pontuação. A critério da banca examinadora, as menções honrosas são oferecidas.

A cerimônia de premiação acontece durante a semana olímpica, nesta todos os medalhistas são convidados a participar, caso não possam comparecer, receberão suas medalhas em casa, via correios. Os alunos agraciados com menções honrosas podem baixar o certificado diretamente do sistema oficial da OBM. Esta semana realiza-se anualmente, envolvendo os medalhistas da OBM, e em seu transcorrer, os alunos medalhistas são contemplados com palestras de orientação acadêmica e com participações em treinamentos para outras olimpíadas.

2.2 Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas foi criada em 2005 e é realizada numa parceria entre o Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA e a Sociedade Brasileira de Matemática – SBM. Além disso, é promovida pelo Ministério da Educação e pelo Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações – MCTIC.

Os principais objetivos da OBMEP são

> • Estimular e promover o estudo da Matemática;
> • Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade;
> • Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas;
> • Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional;
> • Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas;
> • Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento (OBMEP, s.d.)[17].

Essa olimpíada atende alunos inscritos desde o sexto ano do Ensino Fundamental até a série final do Ensino Médio, sendo de escolas públicas municipais, estaduais e federais, assim como escolas da rede privada brasileira, porém, a inscrição só pode ser feita pela escola, indicando o número total de inscritos para a primeira fase. No entanto, para participações da rede privada, é necessário realizar o pagamento de uma taxa, conforme o número de inscritos.

Dividida em três níveis. A saber: o nível 1 da modalidade - para os alunos de sexto e sétimo ano do ensino fundamental; o nível 2 para alunos de oitavo e nono ano também do ensino fundamental; e para o nível 3 - os alunos do ensino médio. O que se aplica de igual maneira para os alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA).

A Olimpíada também é dividida em duas fases. Na primeira, as provas são aplicadas em todas as escolas inscritas e dispõe de vinte questões objetivas, diferenciadas por seus respectivos níveis para todos os alunos inscritos, com duração de duas horas e trinta minutos, sendo reservados mais quinze minutos para a leitura das instruções pelo professor antes do início da prova; entretanto, para os alunos com necessidades especiais, a prova dispõe de uma hora adicional de duração, inclusive para os alunos que farão a prova em braille ou ampliada. Os professores das escolas inscritas são responsáveis pela correção, de acordo com as orientações e os gabaritos fornecidos pela OBMEP.

Já na segunda fase, as provas acontecem em centros escolhidos pela coordenação da OBMEP e contém 6 questões discursivas, de acordo com os níveis, destinadas aos alunos classificados. A aplicação é feita por uma equipe designada pela OBMEP. Os alunos sabatistas realizam a prova, da segunda fase, em horário especial, após o pôr do sol, contudo, devem adentrar ao centro de aplicação no mesmo horário dos demais alunos. A correção regional fica a cargo de uma equipe escolhida pela OBMEP. Por fim, é feita a correção nacional - uma espécie de recorreção das provas possíveis de serem premiadas - assim como descreve a OBMEP (s.d.)[18].

> As provas são corrigidas, em suas regiões de origem, por comitês escolhidos pelas coordenações regionais da OBMEP. Esses comitês são compostos por professores de Matemática, em sua maioria universitários, e muitos com experiência na correção de provas de Olimpíadas. Após ser traçada uma nota de corte, parte dessas provas são novamente corrigidas em uma correção nacional, unificada, de onde são estabelecidos os premiados.

A premiação dos alunos acontece de acordo com cada mérito de premiação. As medalhas de ouro são entregues em cerimônias nacionais organizadas pela Coordenação Nacional da própria OBMEP. A entrega das medalhas de prata e bronze são realizadas pela Coordenação Regional da OBMEP no ano posterior da premiação. E por fim, os certificados de menção honrosa são enviados via correios para a escola, juntamente com os materiais da primeira fase da edição posterior, porém, antes disso ficam disponíveis para download na página da OBMEP.

Segundo o regulamento da olimpíada (s.d.)[18] as premiações são organizadas da seguinte forma:

• 500 (quinhentos) alunos de escolas públicas e 75 (setenta e cinco) alunos de escolas privadas com medalhas de ouro;
• 1.500 (mil e quinhentos) alunos de escolas públicas e 225 (duzentos e vinte e cinco) alunos de escolas privadas com medalhas de prata;
• 4.500 (quatro mil e quinhentos) alunos de escolas públicas e 675 (seiscentos e setenta e cinco) alunos de escolas privadas com medalhas de bronze.
• Até 46.200 (quarenta e seis mil e duzentos) alunos de escolas públicas e 5.700 (cinco mil e setecentos) alunos de escolas privadas com Certificados de menção honrosa.

Além dos prêmios para alunos, a OBMEP também vem premiando professores ao longo de suas quinze edições. Quem concorre a premiação é o professor de matemática dos alunos que participaram da segunda fase da olimpíada, desde que seja indicado como professor destes alunos pela escola após a divulgação dos alunos classificados para segunda fase e que esteja com pelo menos dois alunos na segunda fase. Sendo um total de no máximo novecentos e sessenta e nove professores premiados. Neste caso, a premiação dos professores está diretamente ligada à premiação de seus alunos (OBMEP, s.d.)[18].

Além de premiar alunos e professores, a olimpíada também premia as escolas participantes num total de quinhentos e quarenta escolas entre públicas e privadas e as Secretarias Municipais de Educação, tendo um total de cinquenta e duas premiadas.

Desta maneira, podemos compreendê-la como elo de canalização do saber matemático entre os estudantes que dispõem do prazer sobre a disciplina.

2.3 Olimpíada Cearense de Matemática - OCM

Em 1981, foi criada a Olimpíada Cearense de Matemática, tendo como responsáveis pela sua realização, Marcondes Cavalcante França, Guilherme Lincoln Aguiar Ellery, João Marques Pereira e Raimundo Thompson Gonçalves (in memorian), por intermédio da Universidade Federal do Ceará, pelo Departamento de Matemática.

Esses mesmos quatro professores, anteriormente, pensaram na Coluna Olimpíada de Matemática publicada por meio de uma associação público-privada entre o Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará (UFC) e o Jornal O Povo como um meio de mobilização e de preparação de estudantes para a Olimpíada Cearense de Matemática.

Depois de 11 anos, em 1992, o Coordenador da Olimpíada Cearense de Matemática, Prof. Marcondes Cavalcante França, um dos quatro autores da Coluna Olimpíada de Matemática, foi convidado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) a integrar a Coordenação Geral de Olimpíadas de Matemática no Brasil.

A partir da iniciativa desses professores e de outros de gerações seguintes que o Ceará se tornou tradicionalmente conhecido pelos excelentes resultados de seus estudantes na OBM e em diversas olimpíadas internacionais.

A OCM é uma competição olímpica, realizada anualmente, que revela alunos, professores e escolas com bom desempenho na assimilação e na transmissão de conhecimentos matemáticos. As provas desta competição são destinadas a alunos de Ensinos Fundamentais e Médio, elaboradas pelos professores da Comissão de Olimpíadas do Departamento de Matemática. Vale ressaltar que grande parte dos problemas propostos da olimpíada são de própria autoria dos professores elaboradores.

Para a aplicação da prova, os estudantes são divididos em três níveis de dificuldade, de acordo com o ano de estudo, em que o aluno recebe sua respectiva prova:

- Nível 1: 6^o e 7^o anos de estudo do ensino fundamental;
- Nível 2: 8^o e 9^o anos de estudo do ensino fundamental;
- Nível 3: 1^o, 2^o e 3^o anos de estudo do ensino médio.

Em geral, a Olimpíada Cearense de Matemática tem como objetivos

> a) Descobrir, despertar e estimular talentos e vocações para o estudo da matemática;
> b) Incentivar a participação de estudantes cearenses do ensino médio na Olimpíada Brasileira de matemática de abrangência Internacional/Regional e Mundial (Olimpíada de Matemática do cone sul, Olimpíada Ibero-americana de Matemática e Olimpíada Internacional de Matemática);
> c) Contribuir para a melhoria do ensino de Matemática nos ensinos fundamentais e médio;
> d) Promover a integração da escola de ensino fundamental e médio com a Universidade, através do ensino de Matemática. (GOMES, 2019. p. 40)[9]

As provas tem duração de 04 horas, constam de 05 problemas abertos e dissertativos, cada um deles vale 10 pontos. A aplicação das provas ocorre nas dependências do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, no Campus do Pici.

Os alunos são premiados com medalhas de ouro, de prata e de bronze, numa proporção aproximada de 1:2:3 (ex.: sendo x medalhas de ouro, serão 2x de prata e 3x de bronze), com classificação de até no máximo 20 alunos de cada nível para estas premiações. Os demais alunos classificados não premiados com medalhas, recebem certificado de menção honrosa.

Capítulo 3

Concepções Metodológicas de Elaboração da Proposta de Ensino

De acordo com a linha de raciocínio de Artigue (1996)[1] e Brousseau (1996)[6], é importante que o professor mediador utilize a construção do conhecimento fazendo uso da empregabilidade de casos problemáticos de aprendizagem, permitindo que os estudantes sejam colocados frente a situações-problemas por meio de atividades ou jogos. Dessa forma, torna-se fácil, o professor traçar métodos fundamentais e usufruir dos conhecimentos e dos conceitos prévios adquiridos pelos alunos, na empregabilidade de casos problemáticos, permitindo que estes possuam habilidades para efetivar procedimentos e ações para selecionar, organizar e interpretar as informações, retratando-as de diversas formas e tomando decisões. Desta forma, a elaboração do conhecimento ocorre de maneira eficaz, mostrando sentido e aquisição de conhecimento significativo para o aluno.

Neste capítulo, apresentamos os fundamentos metodológicos que nortearam nossa pesquisa, como: a Engenharia Didática, enquanto metodologia de pesquisa; e a Sequência Fedathi, a qual baseia-se na linha de sequenciações de experiências para dar aprofundamento ao aluno e favorecimento as investigações matemáticas.

3.1 Engenharia Didática

Fizemos uso da Engenharia Didática no percurso do nosso estudo, pois, enquanto metodologia de pesquisa, é baseada em execuções didáticas, em ambientes de sala de aula, que neste caso, foram online, e de seguirem as fases de análises preliminares, concepção e análise a priori, experimentação e análise a posteriori e validação para comparar os dados colhidos no início do projeto e os resultados obtidos em sua finalização.

A Engenharia Didática busca idealizar, produzir, refletir e apresentar a construção do conhecimento didático, assim, caracterizando-se em sugerir

> [...] uma seqüência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma constante, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor (MACHADO, 2002, p. 198, apud DOUADY, 1993, p. 2)[12].

Assim, serviu de norteamento programático para o andamento do projeto, visando o conhecimento do aluno como principal condutor e norteador dos seguimentos, havendo trocas de experiências e reorganização de ideias conforme as necessidades apresentadas pelos envolvidos.

Enquanto metodologia de pesquisa, a Engenharia Didática assume quatro fases: a primeira: *Análises Preliminares*- estas são executadas por meio de reflexões a respeito de conteúdos programáticos teóricos obtidos e assimilados previamente. Segundo Artigue (1996 p. 198)[1], majoritariamente são:

> • a análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
> • a análise do ensino habitual e dos seus efeitos;
> • a análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução;
> • a análise do campo de constrangimento no qual virá a situar-se a realização didática efetiva;
> • e, naturalmente, tendo em conta os objetivos específicos da investigação.

É nesta primeira fase que estudamos as prováveis finalidades do problema em questão, assim como as maneiras que podemos solucioná-lo. Conforme Machado (1999)[12], as análises preliminares são desenvolvidas essencialmente para estabelecer a concepção da engenharia. Obviamente, cada uma delas ocorrerá, ou não, de acordo com o objetivo da pesquisa, e este estabelecerá o grau de aprofundamento dessas análises preliminares.

A segunda fase: *Concepção e Análise a Priori* - Posterior a realização das Análises Preliminares, e conforme o que foi colhido, o pesquisador/professor decide a ação sobre as variações, considerando o que julga mais importante ao problema pesquisado para a condução dos caminhos de solucionar o problema.

De acordo com Artigue (1996, p. 205)[1] na Análise a Priori é que

> • descrevem-se as escolhas efectuadas ao nível local (remetendo-se, eventualmente, para escolhas globais), e as características da situação adidática que delas decorrem,
> • analisa-se o peso que o investimento nesta situação pode ter para o aluno, particularmente em função das possibilidades de ação, de escolha, de decisão, de controle e de validação de que ele dispõe, uma vez operada a devolução, num funcionamento quase isolado do professor,
> • prevêem-se os campos de comportamentos possíveis e procura-se mostrar de que forma a análise efectuada permite controlar o sentido desses campos e assumir, em particular, que os comportamentos esperados, se intervierem, resultarão claramente da aplicação do conhecimento visado pela aprendizagem.

Desta maneira, é nesta fase que se prevê as ações futuras e, também, o comportamento dos alunos perante as ações da sequência didática, tomando, por base, as hipóteses construídas.

A terceira fase: *Experimentação* - nesta há a realização dos processos vivenciados anteriormente, ou seja, na fase anterior. Para Machado (1999 p. 206)[12], ela supõe:

> • a explicitação dos objetos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação;
> • o estabelecimento do contrato didático;
> • a aplicação dos instrumentos de pesquisa;
> • o registro das observações feitas durante a experimentação (observação cuidadosa descrita em relatório, transcrição dos registros audiovisuais, etc.).

Este é o momento da maior interação dos alunos com o objeto estudado. É a fase que o aluno está diretamente ligado ao problema pesquisado e buscando soluções para este.

A quarta fase: *Análise a Posteriori e Validação* - nesta, que se analisa a produção dos alunos e as soluções que encontraram para os problemas apresentados, além de todos os dados coletados no processo da sequência didática.

Artigue (1996 p. 209)[1] aponta algumas dificuldades encontradas nesta fase:

> • Uma análise a priori é, em conseqüência da sua extensão, a fortiori quando se trata de um trabalho de micro-engenharia, praticamente incomunicável in extenso. Aquilo que é publicado e é visível do exterior, não é, pois, salvo se for um exercício escolar, um produto conforme à descrição teórica que dele se faz aqui, mas um condensado desse produto. São tomadas decisões e o possível controle exterior da comunidade sobre o procedimento de validação é necessariamente afectado por elas.
> • Na maior parte dos textos publicados relativos a engenharias, o confronto das duas análises, a priori e a posteriori, exibe distorções. Elas estão longe de ser sempre analisadas em termos de validação, a saber, investigando aquilo que, nas hipóteses consideradas, as distorções constatadas invalidam. Com grande freqüência, os autores limitam-se a propor modificações da engenharia, visando a sua redução, sem se envolverem, pois, verdadeiramente, num procedimento de validação.
> • As próprias hipóteses explicitamente envolvidas nos trabalhos de engenharia são, com grande freqüência, hipóteses relativamente globais, que põem em jogo processos de aprendizagem a longo prazo, que a amplitude da engenharia não permite necessariamente fazer entrar, de facto, no procedimento de validação.

É nesta fase que verificamos se as expectativas criadas na fase de Análises a Priori - segunda fase - foram cumpridas. É o resultado de todo o processo.

3.2 Sequência Fedathi

A Sequência Fedathi institui uma proposta metodológica idealizada por um grupo de matemáticos educadores do Estado do Ceará.

Fazendo elo com a Engenharia Didática, utilizamos a Sequência Fedathi para dar ainda mais significado a mediação desta pesquisa, pois, também baseia-se na linha de sequenciações de experiências para dar aprofundamento ao aluno.

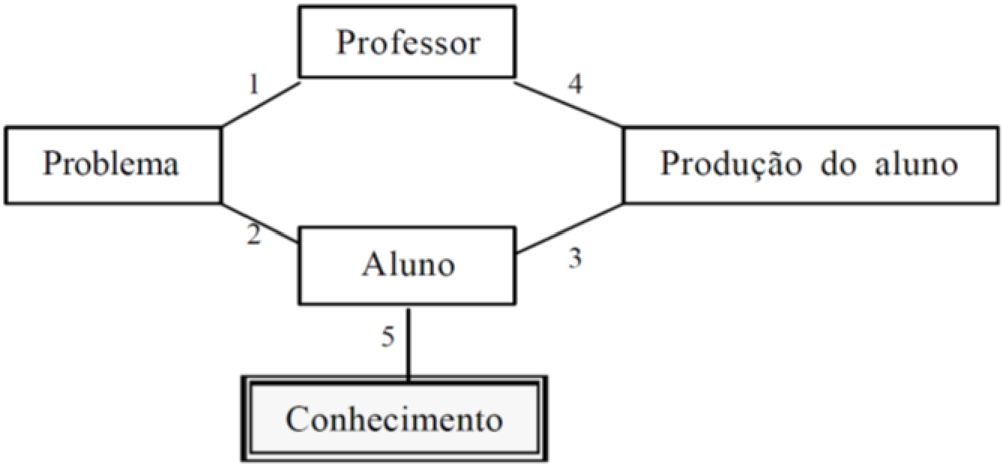
É uma sequência didática de uso do professor/mediador, tendo como fundamento as experiências matemáticas, possibilitando a criação de situações problemas, possibilitando aos alunos experiências significativas dos conhecimentos matemáticos, tendo como foco a autonomia do aluno.

Para Borges Neto e Dias (1999)[4], o aluno reproduz ativamente os estágios que a humanidade percorreu para compreender os ensinamentos matemáticos, sem que, para isso, necessite dos mesmos milênios que a história consumiu para chegar ao momento atual.

Compreendemos a relevância de reproduzir esse cenário nas aulas, pois é daí que o aluno faz a construção dos conceitos a partir das etapas que são conduzidas pelo professor mediador, levando em conta os conhecimentos já adquiridos previamente e as experiências vivenciadas.

A figura abaixo busca resumir as relações professor – aluno no contínuo processo de construção do conhecimento.

Figura 3.1: Relações da Sequência Fedathi



Fonte: Grupo Fedathi.

Conforme a estrutura de relações proposta na figura acima, é o professor quem inicia o processo, pesquisando e selecionando um problema relacionado ao conteúdo que deseja que os alunos aprendam (1). Posterior a isso, o professor apresentará o problema selecionado para os alunos por meio de uma linguagem oportuna (2). Depois do contato dos alunos com a apresentação do problema, estes deverão explorar o problema e, então, investigá-lo na busca por solucioná-lo (3). Com a solução encontrada, o professor analisará esta juntamente com os alunos (4). De maneira alterna, os passos 3 e 4 ocorrerão até que o aluno chegue ao conhecimento (5) - este é o momento correspondente a mediação professor – aluno.

De acordo com a Sequência Fedathi, o professor deve nortear suas ações didáticas objetivando que o aluno supere as situações de conteúdos e conceitos, apresentando suas soluções diante as mais diversas situações problemas. (BORGES NETO et al., 2013)[3].

Assim como a Engenharia Didática, a Sequência Fedathi também se utiliza de quatro fases. São elas: Tomada de posição - Apresentação do problema; Maturação - Compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema; Solução - Representação e organização de esquemas/modelos que visem a solução do problema e por fim, Prova - apresentação e formalização do modelo matemático a ser ensinado.

- 1ª etapa: *Tomada de posição: apresentação do problema.*

Nesta primeira etapa, o aluno é apresentado ao problema, por meio do professor. O problema deve está diretamente relacionado ao conteúdo que o docente deseja que seja adquirido pelo discente. A apresentação do problema pode acontecer por diversas maneiras, ficando a critério do professor fazê-la da maneira que for mais oportuna para a situação, como um apresentação escrita ou verbal, por meio de jogos, uso de material concreto, utilização de softwares, ou a cargo do professor mediador, havendo a possibilidade de ser trabalhado o problema de maneira individual ou grupal.

De acordo com BORGES NETO et al. (2000)[2],

> Para apresentar o problema, o professor já deve ter realizado antes, um diagnóstico inicial a fim de identificar o nível de conhecimento do grupo, principalmente no que diz respeito aos pré-requisitos necessários para o conhecimento que pretende ensinar. Ele será um investigador de sua própria sala de aula. Deverá levantar questionamentos a fim de apreender as possíveis deficiências dos alunos em relação aos conhecimentos anteriores que deveriam possuir.

O professor mediador deverá apresentar algumas regras que serão utilizadas no decorrer do processo de construção do conhecimento.

> Essas regras devem ir desde as realizações desejadas frente ao problema proposto, como também, em relação ao tipo de relações permitidas entre os alunos. O professor deverá esclarecer as dúvidas que venham surgir e observar o trabalho individual, ao passo que deverá estimular os alunos ao trabalho interativo, de formas colaborativas e cooperativas entre os membros de um grupo e entre os grupos como um todo (BORGES NETO et al., 2000)[2].

Neste instante, é importante o professor utilizar-se de uma linguagem acessível aos alunos, para que seja compreendido da maneira correta e consiga atingir os objetivos da sua fala. Desta maneira, o professor mediador é responsável por pesquisar, orientar, e preparar os seus alunos, ficando claro, a importância do planejamento e a flexibilização de algumas ações para garantir a participação e a compreensão dos alunos mediante as explicações para garantir o alcance dos objetivos.

• 2ª etapa: *Maturação: Compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema.*

Nesta etapa, professor e aluno fazem suas discussões a cerca do problema levantado. Aqui, os alunos devem buscar compreender os dados do problema e tudo que mais for pertinente, já traçando a identificação de possíveis caminhos para tentar solucionar o problema.

Para BORGES NETO et al. (2000)[2],

> Nesse estágio, os alunos devem levantar hipóteses a respeito de suas análises. Quando não houver a iniciativa por parte dos mesmos, o professor deverá incitá-los a estabelecerem relações do problema estudado com outros já conhecidos por eles, a fim de que possam utilizar os conhecimentos aprendidos anteriormente, como ferramentas auxiliares na busca de elaboração da solução.

No processo de maturação, o professor deve estar atento aos alunos, tentando observar e identificar seus medos, interesses, comportamentos, raciocínios, opiniões e estratégias traçadas para que enquanto mediador, possa ser suporte frente às realizações dos alunos, fazendo, quando necessário, intervenções e mediações nesta busca.

• 3ª etapa: *Solução: Representação e organização de esquemas/modelos que visem a solução do problema.*

Nesta terceira etapa, os alunos devem organizar e apresentar protótipos ou modelos que possam ajudá-los a compreender e organizar o pensamento para o que solicita o problema, podendo ser apresentado de forma: oral, escrita, por meio de desenhos, ou até mesmo, esquemas - fazendo uso de linguagem formal matemática ou não.

Durante a realização desta etapa, é necessário que aconteçam as trocas de experiências e opiniões frente ao problema abordado. O professor deverá estimular os alunos e solicitar que expliquem seus modelos e pensamentos, justificando o caminho pelo qual caminha para a solução do problema e indagando-os sobre as suficiências deste, para o encontro da resposta procurada.

Aqui, faz-se uso de tempo, para que os alunos analisem e reflitam sobre suas realizações e ensaiem tentativas e/ou erros para a validação de suas hipóteses/modelos criados. Este é um momento importante de exercício da autonomia pelos alunos.

> No processo de busca da solução por parte dos alunos, o professor tem um papel fundamental como mediador, pois, deverá discutir junto com o grupo as resoluções encontradas, a fim de juntos, concluírem qual delas é mais adequada para representar e responder o problema proposto. É essencial que nessas discussões fique claro para o grupo quais são as lacunas e falhas dos modelos que não foram adequados para satisfazer o problema, pois, identificando e reconhecendo os erros, os alunos se tornarão capazes de evitá-los em situações posteriores (BORGES NETO et al., 2000)[2].

Sobre os possíveis modelos inadequados de solução do problema, BORGES NETO et al. (2000)[2] destaca que

> É importante que o professor motive os alunos a buscarem formas de verificação dos resultados encontrados. A refutação dos modelos inadequados poderá ser realizada através de contra-exemplos. O professor deverá mostrar para os alunos que a solução ideal deve satisfazer não só o problema em questão ou somente determinadas situações, mas sim, o número maior possível de situações que necessitem desse conhecimento para serem resolvidas. Assim, é interessante que apresente situações problemas diferentes da inicial para mostrar a limitação dos modelos que se mostraram inadequados ou insuficientes.

É natural que poucos alunos, apenas alunos com maior domínio, ou os mais adeptos a disciplina, encontrem respostas corretas nesta etapa, ainda que utilizando modelos desconectados com o que se pretende ensinar, porém, o objetivo é construir um conhecimento novo, que ainda é desconhecido pelos alunos, e este, será o momento do professor delinear o conhecimento científico que será apresentado na próxima etapa.

• 4ª etapa: *Prova: apresentação e formalização do modelo matemático a ser ensinado.*

Posteriormente, as discussões sobre as resoluções apresentadas pelos alunos - é a vez do professor apresentar o novo conhecimento como meio prático e otimizado como caminho de resolução do problema abordado.

> Nessa fase, a didática do professor será determinante para aquisição do conhecimento por parte dos alunos, pois, além de ter que manter a atenção e motivação do grupo, o professor precisará fazer uma conexão entre os modelos apresentados pelos alunos e o modelo científico já existente; deverá introduzir o novo saber através de sua notação simbólica em linguagem matemática, juntamente com as novas regras inerentes a esse conhecimento. É nessa etapa final, referente a prova que o novo conhecimento, deverá ser compreendido e assimilado pelo aluno, levando-o a perceber que à partir deste, será possível deduzir outros modelos simples e específicos, para serem aplicados a situações também específicas (BORGES NETO et al., 2000)[2].

Nesta etapa, o aluno deve visualizar e perceber a importância do trabalho com modelos gerais, que lhes instrumentalizarão para outras situações e problemas que lhes forem propostos, contribuindo para o seu raciocínio lógico-dedutivo.

Capítulo 4

O Portal da Matemática

O Portal da Matemática (OBMEP)[1] criado em Maio de 2015, apresenta-se como um ambiente virtual de aprendizagem de matemática que oferta, gratuitamente, videoaulas, exercícios resolvidos, material teórico, caderno de exercícios, aplicativos interativos, testes e avaliações que geram certificados, para estudantes, professores e todos aqueles que desejem buscar o conhecimento matemático de maneira organizada e dinâmica, cobrindo todo o currículo do 6º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio, além de disponibilizar tópicos adicionais para complementação e aprofundamento dos estudos.

Atualmente, o Portal da Matemática encontra-se dentro do Portal da OBMEP criado em Julho de 2018, juntamente com o Portal da Física (OBMEP) criado em Fevereiro de 2018, e Quebra-cabeças de Matemática (OBMEP) criado em Setembro de 2018, voltado para o ensino fundamental. Para localizar aquele, deve-se acessar o site da OBMEP, acionar a aba Programas e Portais e clicar em Portal do Saber. Em seguida, já será redirecionado para o Portal da OBMEP. Vejamos as apresentações dos ambientes do Portal da OBMEP e Portal da Matemática.

Figura 4.1: Portal da OBMEP e Portal da Matemática

Fonte: Portal da Matemática.

[1]Disponível em: http://www.obmep.org.br/

4.1 Registro ou Cadastro

Para realizar o registro no Portal, é necessário clicar em uma aba destinada a este cadastro e preencher com as seguintes informações: primeiro nome, último nome, e-mail, criar uma senha e repeti-la na próxima caixa. Após essa etapa, uma mensagem de confirmação de cadastro será enviada para o e-mail informado, bastando apenas confirmar para o registro ser concluído com sucesso. Esse procedimento é o mesmo para alunos, professores, responsáveis ou qualquer pessoa que deseje efetuar o cadastro no Portal.

Vale ressaltar que o Portal pode ser usado sem a necessidade de um cadastro, apenas não sendo possível fazer uso dos testes e avaliações gerais, além disso, as videoaulas são disponibilizadas no youtube através do canal do Portal da Matemática OBMEP.

Professores que desejam acompanhar o progresso dos seus alunos ou responsáveis que queiram verificar o desempenho de seus filhos, devem clicar em painel do aluno e tornarem-se um orientador, através de um código gerado que os alunos podem fazer uso para adicionarem um professor (orientador) e/ou responsável, possibilitando a visualização do progresso dos estudantes dentro do Portal.

Figura 4.2: Passos para o Registro no Portal

Fonte: Portal da Matemática.

Os passos apresentados, indicam desde o registro dos dados pessoais e cadastro do e-mail, passando pelo acesso e terminando na recuperação ou atualização da senha de acesso.

4.2 Anos de Ensino Contemplados pelo Portal

O Portal da Matemática possui uma estrutura que abarca todos os anos finais do ensino fundamental e do ensino médio, sendo os assuntos organizados por módulo, de acordo com o que é proposto pelo currículo de matemática para cada ano de ensino.

Além disso, existem tópicos adicionais, os quais contemplam conteúdos extras aos da educação básica, com temas olímpicos e universitários, tais como: tópicos para professores, problemas resolvidos e introdução ao cálculo.

Figura 4.3: Disposição dos Assuntos Propostos para o 1ºano do Ensino Médio

Fonte: Portal da Matemática.

4.3 Módulos do Portal

Iremos definir um Módulo do Portal, como sendo um grupo de materiais de um mesmo assunto, organizados o mais próximo possível, do conteúdo curricular proposto pelas escolas de nosso país. Assim definido, pode-se afirmar que cada módulo oferta uma variedade de recursos possíveis de serem explorados como: videoaulas, exercícios resolvidos, material teórico, cadernos de exercícios, aplicativos interativo, teste e a avaliação geral.

Mostraremos a seguir, como modelo, todos os módulos com seus respectivos anos de ensino que foram trabalhados com os alunos.

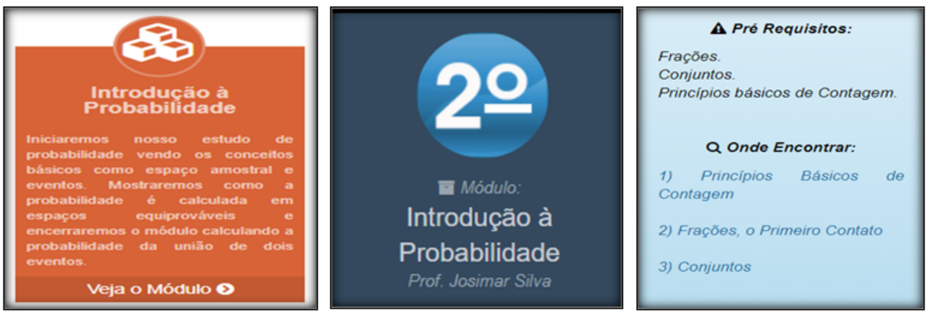
Figura 4.4: Módulos Trabalhados com os Alunos

Fonte: Portal da Matemática.

Alguns fatos relevantes de serem acrescentados, é que cada módulo possui uma descrição detalhada de todos os assuntos que serão tratados no grupo de assuntos e apresentam os conteúdos que são usados de pré-requisitos para o estudo daquele tema, indicando o módulo e ano de ensino onde estão inseridos.

Um exemplo do que estamos comentando, podemos notar a seguir.

Figura 4.5: Descrição e Pré-Requisitos de um Módulo

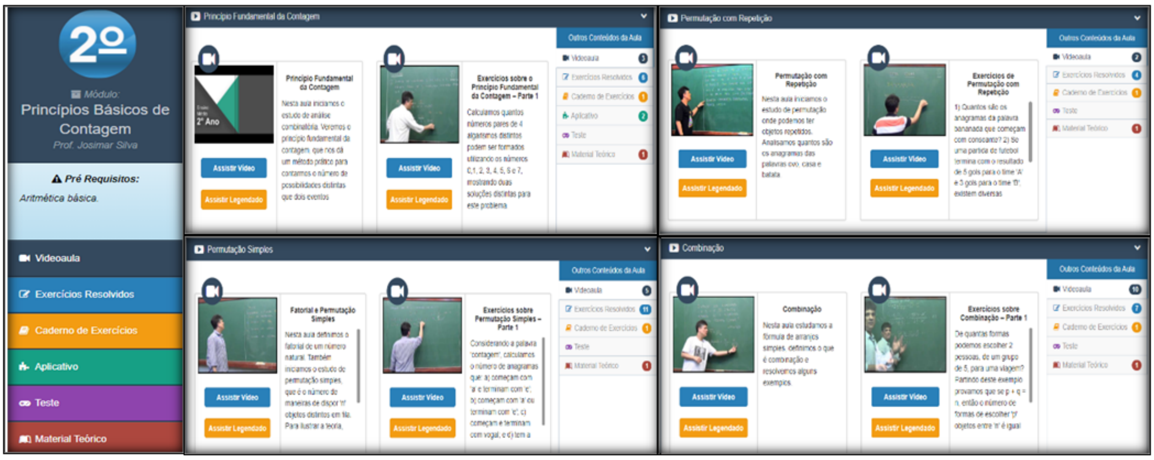


Fonte: Portal da Matemática.

4.4 Aulas de um Módulo

Cada módulo estudado é dividido em seções, nestas os conteúdos são organizados e apresentados por meio de aulas, repassadas em videoaulas, exercícios resolvidos e complementados através dos materiais teóricos, cadernos de exercícios, aplicativos interativos, testes e avaliação geral, que ajudam no aprofundamento dos assuntos estudados e possibilitam o aluno revisar quantas vezes forem necessárias.

Figura 4.6: Seções das Aulas do Módulo: Princípios Básicos de Contagem



Fonte: Portal da Matemática.

4.5 Conteúdos da Aula

Os conteúdos que ajudam a compor cada seção ou aula de um módulo, dependendo se o acesso ao Portal da Matemática é feito por meio de um celular ou computador, pode apresentar uma disposição na tela de maneira diferente.

Tomando como exemplo a forma que visualizamos em um computador, temos do lado esquerdo do módulo, todas as videoaulas, exercícios resolvidos, cadernos de exercícios, aplicativos, materiais teóricos, testes e avaliação geral do módulo. Já do lado direito, notamos essas mesmas ferramentas a disposição, apenas separadas conforme a seção de estudo.

É importante informar que nem todos os módulos do Portal apresentarão todas essas ferramentas de estudo disponíveis, pelo fato de alguns módulos ainda estarem em fase de construção. É válido ressaltar que para cada conteúdo apresentado, um ícone é associado, facilitando a localização pelo aluno.

Vejamos exemplos destes conteúdos com seus respectivos ícones.

Figura 4.7: Ícones dos Conteúdos da Aula

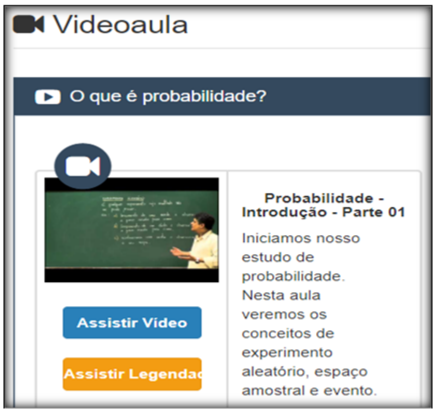
Fonte: Portal da Matemática.

4.5.1 Videoaula dos Conteúdos

Dentre os conteúdos apresentados dentro de um módulo, a videoaula é considerado o principal, pois é a porta de entrada para os temas estudados, nela a teoria e exercícios são expostos por meio de vídeos com duração geralmente entre 0 a 15 minutos. Cada uma oferece as opções para o aluno assistir o vídeo legendado ou não, o que mostra a preocupação da OBMEP em atender as necessidades daqueles alunos portadores de deficiência auditiva.

Lembrando, ainda, que as videoaulas são organizadas em conformidade com o material teórico e outros conteúdos que venham a ser ofertados pelo módulo de estudado.

Figura 4.8: Exemplo de Videoaula: Probabilidade - Introdução Parte 01



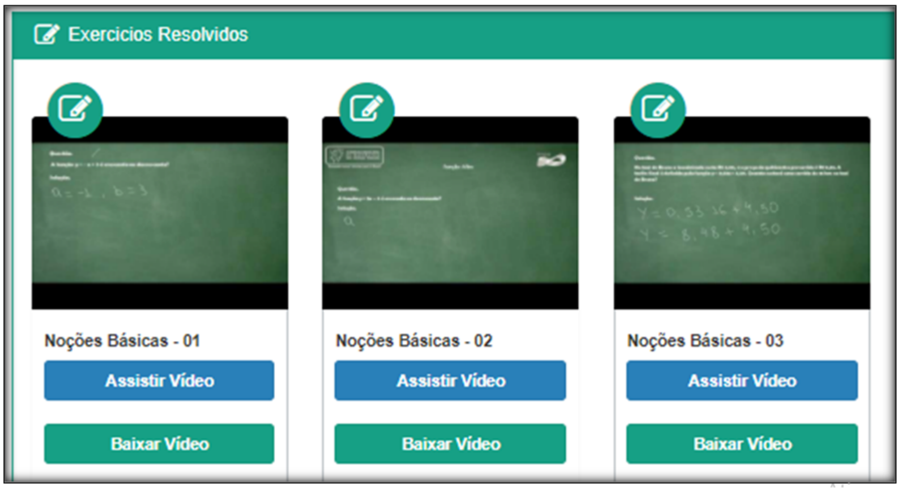
Fonte: Portal da Matemática.

4.5.2 Exercícios Resolvidos dos Conteúdos

Os exercícios resolvidos são vídeos menores que os das videoaulas, com duração entre 2 a 5 minutos. Esses funcionam como um complemento ao conteúdo estudado, no qual um exercício é solucionado passo a passo, além de apresentar a opção de baixar o vídeo.

Recomenda-se a utilização dos exercícios resolvidos após as videoaulas teóricas e antes da realização dos testes, como forma do aluno, sempre que possível ,está revendo os conteúdos e observar os conceitos sendo aplicados.

Figura 4.9: Exemplo de Exercícios Resolvidos: Noções Básicas - Módulo: Função Afim



Fonte: Portal da Matemática.

Por fim, os exercícios resolvidos são distribuídos em 3 níveis de dificuldade, sendo esses diferenciados através da cor do seu ícone na parte superior e organizados da seguinte forma- Fácil (verde), Intermediário (laranja) e Difícil (vermelha).

Figura 4.10: Grau de Dificuldade dos Exercícios Resolvidos

Fonte: Portal da Matemática.

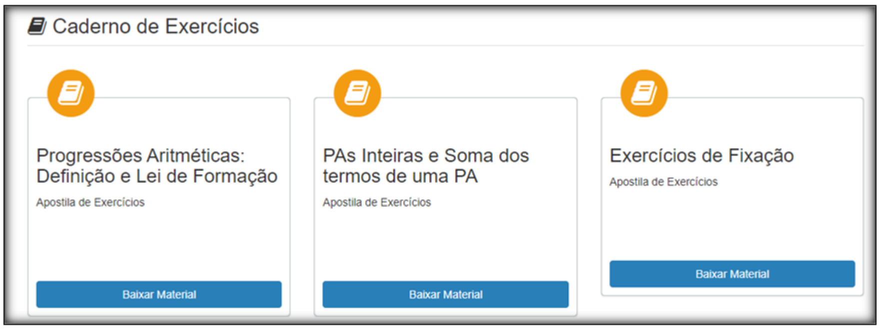
4.5.3 Caderno de Exercícios dos Conteúdos

Cada seção de um módulo tem disponível na aba dos conteúdos o caderno de exercícios - um material em PDF, possível do aluno baixar, organizado com as questões em 3 níveis: Exercícios Introdutórios, Exercícios de Fixação e Exercícios de Aprofundamento e de Exames. Geralmente, o caderno é composto de 2 a 5 páginas de exercícios e na parte final do material sempre vem acompanhada a solução ou dicas para os problemas propostos.

Esse recurso do caderno de exercícios é uma excelente fonte de banco de questões possíveis do professor utilizar em suas aulas e/ou avaliações.

Para o desenvolvimento do projeto ora exposto por este trabalho, os cadernos de exercícios foram fundamentais para a montagem dos testes aplicados e para obtenção / construção dos conhecimentos e estudos realizados.

Figura 4.11: Exemplo dos Cadernos de Exercícios - Módulo: Progressões Aritméticas



Fonte: Portal da Matemática.

4.5.4 Material Teórico dos Conteúdos

Semelhante ao caderno de exercícios, o material teórico pode, também, ser possível do aluno baixar em PDF. O material aborda a teoria dos conteúdos por meio de tópicos, sempre apresentando um situação-problema antes de iniciar os estudos e enriquecendo os conceitos com bastante exemplos.

Ao final de cada material, apresenta-se "Dicas para o Professor" que são orientações de como conduzir os assuntos da melhor forma possível nas aulas repassadas, e "Sugestões de Leitura Complementar"- as quais são materiais extras ligados aos conteúdos estudados.

O material teórico também serve de base para as videoaulas que são disponíveis nos módulos, assim como serviu de sustentação na construção das aulas ministradas no projeto desenvolvido neste trabalho.

Figura 4.12: Exemplo de Material Teórico - Módulo: Princípioc Básicos de Contagem

Fonte: Portal da Matemática.

4.5.5 Aplicativos dos Conteúdos

Os aplicativos são problemas propostos para os alunos de uma maneira diferente, possibilitando o aluno manipular as ferramentas apresentadas pelo problema de forma dinâmica e construir suas hipóteses a partir de cliques ou deslocamentos realizados.

Alguns módulos ou seções não apresentam aplicativos, no entanto aqueles que apresentam, sempre iniciam com um título para o problema sugerido, em seguida fornecem as instruções de uso, intitulado de "Como usar?", nestas explica-se o que se busca encontrar no problema e como manipular a imagem interativa. Ao final, informa a fonte que deu origem ao aplicativo e traz uma caixa nomeada de "Mostrar explicação", que apresenta a solução ou demonstração para o problema de maneira formal e embasadas no material teórico do módulo estudado.

Figura 4.13: Exemplo de Aplicativos - Módulo: Áreas de Figuras Planas

Fonte: Portal da Matemática.

4.5.6 Testes

Presente na aba esquerda dos conteúdos de cada módulo ou na aba direita de cada seção apresentada, os testes são maneiras de o aluno verificar seus conhecimentos e do professor avaliar o desempenho dos estudantes e fazer bom uso desses resultados.

Existem 2 tipos de testes: o teste da aula e a avaliação geral. Nesta seção, iremos comentar sobre o teste da aula, que consiste em um ambiente onde o aluno pode participar quantas vezes quiser, sendo aprovado ou não, apenas necessitando acertar 6 perguntas em sequência sobre o assunto do módulo estudado para alcançar a aprovação do teste da aula, sendo informado ao final de cada questão feita, se houve acerto ou erro da mesma, acompanhada da solução, além disso, é contabilizado apenas para efeito de informar, o tempo gasto e caso o aluno erre uma questão, o sistema reinicia a contagem do total de questões acertadas em sequência.

As questões apresentam níveis diferentes de dificuldade e são exibidas de duas formas: múltipla escolha, com 5 alternativas de respostas, ou dissertativas, nas quais o aluno deve digitar a sua solução encontrada.

Cada seção do módulo indicará através de um texto e por um ícone (troféu) se o aluno já foi aprovado naquele teste ou se ainda não participou do mesmo.

Figura 4.14: Exemplo dos Testes da Aula - Módulo: Função Afim

Fonte: Portal da Matemática.

4.5.7 Avaliação Geral

A avaliação geral está presente dentro da aba teste e contempla todos os assuntos apresentados no módulo de estudo, sendo formada por 12 questões, exibidas de duas formas: múltipla escolha, com 5 alternativas de respostas, ou dissertativas, nessas o aluno deve digitar a sua solução encontrada, selecionadas aleatoriamente e que se diferenciam o seu nível de dificuldade conforme a cor da faixa da pergunta e são distribuídas da seguinte maneira: da 1ª a 6ª questão, nível fácil (verde), da 7ª a 10ª questão, nível intermediário (amarela) e da 11ª a 12ª questão, nível difícil (vermelha).

Diferente do teste da aula, no qual ao final de cada questão é informado se houve acerto ou erro da mesma - acompanhada da solução- na avaliação geral, isso não ocorre, sendo exposto o percentual de acertos apenas ao final das 12 questões.

Caso ao final da avaliação seja atingida uma porcentagem de acertos igual ou superior a 70% é gerado um certificado do módulo concluído, apresentando a porcentagem de desempenho na avaliação geral realizada.

Assim como no testes da aula, é possível o aluno realizar quantas vezes achar necessário a avaliação geral, atingindo um desempenho acima de 70% ou não, além disso, sempre antes de iniciá-la, é apresentado através de mensagens e de ícones (troféu), como se encontra a situação da mesma, podendo aguardar o seu início, iniciada mas sem aprovação ou com a aprovação já atingida.

Figura 4.15: Exemplo de Avaliação Geral - Módulo: Progressões Aritméticas

Fonte: Portal da Matemática.

4.6 Certificado

Como citado na avaliação geral, o certificado é gerado quando se atinge um desempenho de acertos igual ou superior a 70%. Automaticamente, aquele é emitido constando a data em que foi concluída a avaliação geral, o nome cadastrado no ato do registro no Portal, o módulo que em esta avaliação foi realizada e apresentando a porcentagem de acertos obtida. E, além disso, pode ser baixado e impresso, informado no canto inferior direito, um código de validação, juntamente com um QRCode, o que garantirá a autenticidade do certificado.

Conquistar o reconhecimento através de um certificado representa: o alcance, dentro daquele módulo de estudo, do mínimo de conhecimentos exigidos, credenciando o aluno a possuir ferramentas básicas para solucionar problemas da natureza dos conteúdos ministrados.

O projeto desenvolvido neste trabalho foi implementado com alunos de 1ºano do ensino médio e a preparação fez uso de 2 módulos que coincidiram com os assuntos que constavam no currículo da disciplina de matemática proposto para o ano de estudo citado.

Dessa forma, em parceria com o núcleo gestor da escola campo de pesquisa, os alunos que ao final desses módulos estudados atingiram um bom desempenho na avaliação geral e foram premiados com um certificado do módulo, foram isentos de participarem de uma das avaliações realizada pela escola, como forma de reconhecimento e valorização pelo mérito atingido.

Figura 4.16: Exemplo de Certificado - Módulo: Progressões Aritméticas

Fonte: Portal da Matemática.

4.7 Acompanhamento do Progresso no Portal

O Portal da Matemática possibilita para o aluno e para o professor cadastrados, a ferramenta de poder acompanhar o progresso de uma pessoa, grupo ou turma, por meio do código do professor orientador.

Feito este processo, o professor pode formar turmas e adicionar alunos através deste código, podendo visualizar o perfil do aluno, verificar o progresso no portal, enviar mensagens dentro do próprio ambiente, dentre outros recursos disponíveis para o professor orientador.

Este auxílio foi fundamental na execução do projeto ora desenvolvido, pois os módulos eram iniciados em encontros realizados por web conferências e suas continuidades ficavam a cargo da utilização do Portal. Logo, o aluno deveria exercer o seu protagonismo e autonomia para dar prosseguimento aos estudos e exploração dos módulos apresentados nos encontros. Quanto aos benefícios ao professor aplicador do projeto: um meio de acompanhar todas as ações feitas pelos alunos dentro do Portal, como - quantos módulos foram iniciados os estudos ou concluídos com certificados; quantos minutos de videoaulas foram assistidos; quais as últimas atividades acessadas recentemente; quantos testes e/ou avaliações gerais foram iniciadas ou concluídas; dentre outros suportes possíveis - ou seja, um excelente instrumento para apoiar o acompanhamento necessário à aplicação do projeto.

A seguir, apresentaremos alguns dos exemplos citados, vejamos:

Figura 4.17: Acompanhamento do Progresso no Portal

Fonte: Portal da Matemática.

Capítulo 5

A Intervenção da Preparação Olímpica

5.1 Caracterização da Cidade Campo de Pesquisa

O município de Ipu está localizado à 295 km de distância da capital cearense, Fortaleza. De acordo com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE, s.d)[11], possui população estimada em 42.058 habitantes no ano de 2020.

A cidade é conhecida pela famosa Bica de Ipu - uma cachoeira de 130 metros. Também foi citada no livro Iracema, de José de Alencar, que conta a história de uma índia que se deslocava da capital cearense para banhar–se na Bica.

5.2 Caracterização da Escola Campo de Pesquisa

A Escola Estadual de Educação Profissional Antônio Tarcísio Aragão é situada à Rua Bernardo Afonso de Farias, 2011, Bairro Pereiros, no município de Ipu- Ceará.

Esta escola oferece à comunidade Ipuense e circunvizinhança, a oportunidade de inserir-se em uma escola de ensino médio integrado à educação profissional oferecendo atualmente cursos técnicos em Administração, Agronegócio, Contabilidade, Enfermagem, Informática e Redes de Computadores.

A articulação entre o Ensino Médio e a Educação Profissional viabiliza a consolidação de uma proposta pedagógica que leva em consideração a preparação básica para o trabalho, oferecendo possibilidades aos jovens de construirem competências laborais para o exercício profissional, prepará-los para a conquista de sua própria subsistência, autonomia e reconhecimento social, como ser produtivo e cidadão.

5.3 A Idealização da Proposta de Projeto

Quando se pensa na criação de uma preparação olímpica, algumas indagações surgem na mente. Como: quais níveis de alunos seriam melhores para serem trabalhados/preparados? Qual o horário mais adequado para realizar a preparação? - durante o horário de aula ou no contra turno - Existe algum material preparado ou plataforma estruturada para desenvolver tal ação? Dentro de todos os conhecimentos que abrangem uma Olimpíada de Matemática, existem assuntos que sempre são contemplados nas provas e com uma quantidade de questões expressivas? E, a melhor estratégia para trabalhar os assuntos seria a resolução das provas anteriores ou existem metodologias que possam colaborar na qualidade do repasse desses conteúdos?

Dessa forma, este projeto buscou responder estas questões e então, sanar estas e outras dúvidas que também nos afligiam, tratando destas e de outras facetas provenientes de preparações olímpicas.

Ainda, tentando compreender as Olimpíadas Matemáticas como forma de ascensão da autonomia do aluno, temos que

> a prática pedagógica proposta pelos novos pesquisadores defende que o indivíduo procure adaptar-se aos tempos da informação e tecnologia, aos desafios cada vez maiores e mais complexos da sociedade contemporânea, que têm influenciado de alguma maneira no desenvolvimento cognitivo dos alunos. É necessário, pois, que se busque moldar a uma nova postura e forma de trabalhar com Olimpíada de Matemática. (SANTOS, 2018,p.7)[19].

Visto isso, buscaremos desenvolver em nossos alunos a autonomia necessária para que sejam capazes de desenvolverem-se tanto em conhecimentos matemáticos, quanto para que busquem suas próprias estratégias facilitadoras, a fim de sanarem qualquer dúvidas oriundas de seus estudos.

5.4 Montagem do Material Prepraratório

O ponto de partida foi decidir se iríamos montar um material preparatório ou se já havia algum local/material que disponibilizasse uma estrutura de apoio para preparação olímpica. Após algumas pesquisas e pôr o Programa OBMEP na Escola fazer uso da plataforma do Portal da Matemática - que atualmente encontra-se dentro do Portal da OBME - achamos por bem estudarmos com mais profundidade este ambiente e observar se o mesmo oferecia tudo que seria necessário para desempenhar o projeto com excelência.

Para nossa grata surpresa, a plataforma do Portal da Matemática é um ambiente bastante preparado e organizado para desenvolver tanto estudos com grupos ou turmas de alunos, como é possível um estudante fazer uso para aprofundar seus conhecimentos de maneira autônoma. Dessa maneira, o ambiente consta de conteúdos organizados por séries de ensino e estes arranjados dentro de módulos, onde nestes módulos os assuntos estudados são apresentados através de videosaulas com abordagem teórica e exercícios resolvidos, além de disponibilizar materiais teóricos e cadernos de exercícios, que podem ser baixados quando quiser; além do mais, consta de aplicativos - que funcionam com jogos envolvendo os temas trabalhados, que trazem interação e dinamismo para quem estiver estudando - e por fim, são apresentados testes e avaliação geral, onde é possível verificar os conhecimentos adquiridos no decorrer do módulo e ainda ser agraciado com um certificado ao final do módulo estudado.

Diante disso, vimos que estava em nossas mãos a fonte que iria alimentar a condução do nosso projeto, mas que ainda se fazia necessário filtrar os assuntos, pois não era viável trabalhar todos os assuntos que a OBMEP cobra em suas provas, sendo assim, quais conteúdos nos últimos anos apareceram com maior frequência na 1^a FASE da OBMEP?

Para responder esta pergunta, antes é preciso observar uma outra preocupação do projeto, que é tentar elevar o número de alunos de 1^o ano avançando para a 2^a FASE da OBMEP. Logo foi feito um estudo na Escola Campo de Pesquisa a respeito de quantas vagas a escola tem a sua disposição para classificar alunos para 2^a FASE da OBMEP.

Notamos que a partir do ano de 2014, a escola se manteve com o quantitativo de 31 alunos avançando para 2^a FASE da OBMEP. Fizemos um levantamento de como essas vagas foram distribuídas entre os alunos de 1^o ano, 2^o ano e 3^o ano, entre os anos de 2014 a 2019. Vejamos na tabela da figura abaixo o número de alunos de 1^o ano selecionados para 2^a FASE da OBMEP, no decorrer destes anos:

Figura 5.1: Quantitativo de Alunos de 1^o ano Selecionados para 2^a Fase da OBMEP 2014 - 2019

ANO	2014	2015	2016	2017	2018	2019	Média de Alunos
Nº de Alunos	6	8	6	8	10	5	7

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Com esses dados em mãos, iniciamos um levantamento de quais assuntos foram abordados nas 120 questões de 1^a FASE da OBMEP aplicadas entre os anos de 2014 a 2019, e chegamos as seguintes conclusões:

Figura 5.2: Questões por Assuntos - 1^a Fase da OBMEP (2014 - 2019)

ÁREA DE CONHECIMENTO	QUANT.	ASSUNTOS	PORCENTAGEM (%)
ARITMÉTICA	48	MATEMÁTICA BÁSICA	40%
		FUNÇÕES E GRÁFICOS	20%
		SEQUÊNCIAS	13%
		OUTROS	27%
GEOMETRIA	46	ÁREAS DE FIGURAS PLANAS	46%
		PERÍMETRO E TEOREMA DE PITÁGORAS	20%
		OUTROS	34%
CONTAGEM	26	PRINCÍPIOS BÁSICOS DE CONTAGEM	65%
		PROBABILIDADE	19%
		OUTROS	16%

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Analisando os dados coletados e percebendo a grande presença de alguns assuntos na prova da 1^a fase, achamos viável trabalhar durante o projeto os seguintes módulos do Portal da Matemática: os primeiros módulos escolhidos foram: Função Afim e Progressões Aritméticas - dentro da área de conhecimento de Aritmética - visto que o assunto de Matemática Básica percorre por vários módulos do Portal da Matemática, achamos por bem, contemplar o estudo da Matemática Básica através de questões que pudessem ser lançadas dentro de um grupo de WhastsApp feito para o projeto, sempre no início da semana e discutidas as possíveis soluções e conceitos aos finais de semana. Os próximos módulos selecionados foram: Princípios Básicos de Contagem e Introdução à Probabilidade - dentro da área de conhecimento de Contagem - e por fim, o módulo de Áreas de Figuras Planas - dentro da área de conhecimento de Geometria - que também contemplaria os assuntos de Perímetro e Teorema de Pitágoras.

Sabendo dos módulos que seriam trabalhados com os alunos, iniciou-se o processo de organização do melhor horário para desenvolver as aulas e a quantidade de horas/aulas semanais possíveis de a escola disponibilizar para a aplicação do projeto.

5.5 Horário das Aulas Preparatórias

Pelo fato de a Escola Campo de Pesquisa ser de tempo integral e dos alunos em sua grande maioria serem residentes na zona rural do município, ficava inviável a aplicação do projeto no contra turno. Por outro lado, até já ocorreram preparações em anos anteriores aos finais de semana (sábado), porém sempre foi notório que bons alunos, com potencial e com raciocínio bem desenvolvido para resolução de questões olímpicas, encontravam dificuldades em participar dos encontros do projeto, caso fossem aos finais de semana, visto a dificuldade financeira para arcar com as despesas do transporte no deslocamento, os afazeres domésticos, dentre outros motivos.

Sendo assim, para solucionar este problema, juntamente com a coordenação da Escola Campo de Pesquisa, foi pensando na criação das aulas de laboratório de Matemática - onde seriam destinadas duas aulas semanais de 50 minutos cada - dentro do horário de aula de cada turma, para serem desenvolvidos encontros do projeto, visto que a escola por ser de tempo integral, disponibilizava de aulas de projetos interdisciplinares que foram substituídas pelas de laboratório, com isso os alunos que desejassem participar do projeto, no horário destinado ao laboratório de matemática, adentrariam a esta aula, enquanto os demais participariam da aula de Horário de Estudo (H.E.), aula presente na grade curricular do ensino médio das Escolas Profissionais de Tempo Integral do Estado do Ceará, onde o aluno tem o acompanhamento de um professor, que supervisiona os alunos na realização de tarefas, trabalhos, pesquisas ou outra ação ligada aos seus estudos.

Com a paralisação das aulas presenciais, devido a pandemia da COVID-19 e início das aulas remotas, houveram apenas os ajustes necessários de como seriam desenvolvidos os encontros e a necessidade dos alunos que desejassem participar do projeto possuir algum aparelho com acesso à internet para acompanhar as aulas; todavia, o formato do horário semanal combinado com a Escola Campo de Pesquisa se manteve, tendo a possibilidade de sua aplicação.

5.6 Cronograma do Projeto

Após a decisão dos módulos que seriam explorados no projeto e os horários de funcionamento do mesmo, organizamos o tempo que seria destinado a cada módulo e a previsão de duração do projeto, dessa forma, achamos conveniente destinar um período de duas semanas (15 dias) para o estudo de cada módulo, sempre explorando na primeira semana questões motivadoras, através das metodologias ofertadas pela Engenharia Didática e Sequência Fedathi, para introduzir os assuntos e posteriormente formalizar os conceitos teóricos. Já na segunda semana, o propósito seria o aprofundamento dos conteúdos, através da resolução das questões dos cadernos de exercícios e de questões de provas anteriores de 1ª FASE, que contemplassem o tema trabalhado. Além de entre uma semana de aula e outra, ser proposto a exploração do Portal da Matemática dentro do módulo em estudo, por meio das videoaulas, cadernos de exercícios, materiais teóricos, aplicativos, testes e avaliação geral.

Por fim, tanto no início do projeto, antes de iniciarem os encontros, e ao final, após o encerramento das aulas de preparação, buscamos aplicar um teste com todos os alunos de 1ºano da Escola Campo de Pesquisa, que se dispuseram à contribuir com este trabalho, para que ao final dos estudos desta dissertação, possamos averiguar se houve uma qualificação dos conhecimentos que os alunos já possuíam e/ou ganhos de novos saberes, diante daqueles temas trabalhados com os mesmos.

Com as aplicações dos testes e o estudo dos módulos, projetamos um período de duração do projeto de 3 meses, com previsão de início para Agosto de 2020 e término em Novembro de 2020.

5.7 Apresentação e Inscrições no Projeto

De posse dessas informações, foi apresentado o projeto para o núcleo gestor da Escola Campo de Pesquisa e elaboramos uma apresentação para os alunos de 1ºano do ensino médio da mesma, através de uma web conferência, pela plataforma Google Meet, como forma dos mesmos conhecerem a proposta, esclarecerem dúvidas e tomarem conhecimento das orientações que deveriam seguir para participarem do projeto.

Após a apresentação, foi disponibilizado para os alunos um formulário de inscrição, através da plataforma Google Forms, que se encontra no apêndice B deste trabalho, o qual requeria que os candidatos preenchessem o nome completo, curso técnico que participa na escola e telefone para contato, além disso foram propostas algumas perguntas. Tais como:

O que lhe faz ter interesse em participar deste projeto? A mesma apresentava as seguintes opções de respostas como forma de escolha:

- Aperfeiçoar e aprofundar meus conhecimentos;
- Desejo tornar-me um medalhista ou
- As questões desafiadoras me motivam.

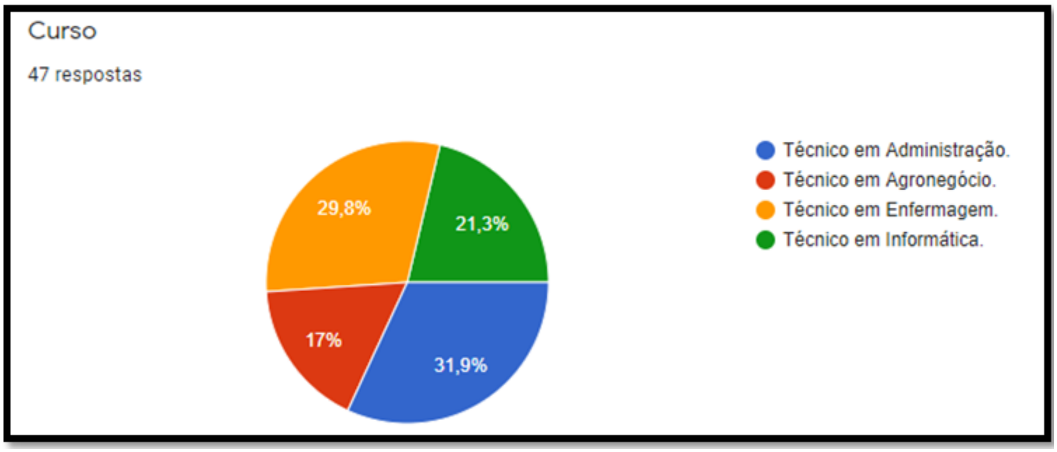
Uma segunda pergunta, dizia o seguinte: Qual meio tecnológico você usará para acompanhar as aulas? A mesma apresentava as seguintes opções de respostas como forma de escolha:

- Celular:
- Notebook ou Computador;
- Tenho acesso as duas ferramentas ou
- Outros.

E numa última pergunta, os alunos eram indagados: Por qual motivo você deve ser selecionado para participar deste projeto?

Foi dado um prazo de uma semana para que fossem feitas as inscrições e ao final deste período coletou-se a quantidade de 47 inscrições, o que podemos ver em alguns dados que foram obtidos através do gráfico da figura abaixo:

Figura 5.3: Distribuição dos Alunos Conforme o Curso Técnico que Estudam

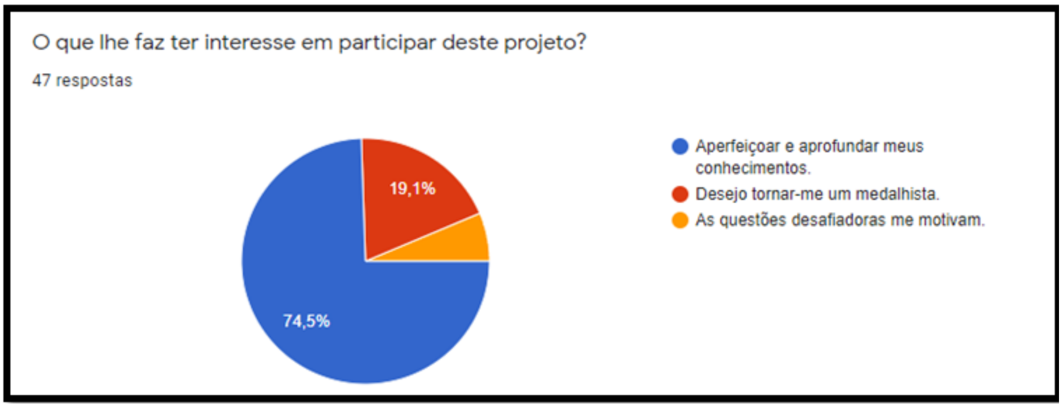


Fonte: Google Forms.

A partir da leitura deste gráfico da figura, podemos notar que o maior número de inscritos foi da turma de técnico em administração, com um percentual de 31,9%, o que corresponde a 15 alunos inscritos, seguida pela turma de técnico em enfermagem com 29,8% de inscritos, correspondendo a 14 alunos, subsequentemente a turma de informática, com 21,3%, com 10 alunos inscritos e por fim, e com o menor número de inscritos, a turma de técnico em agronegócio com 17% das inscrições, correspondendo a 8 alunos que desejavam participar do projeto. É válido ressaltar que neste período de inscrições é realização do projeto, ainda não havia a turma de técnico em Contabilidade na Escola Campo de Pesquisa. Assim como, a turma técnico em Redes de Computadores, que estava disponível somente a partir do 2º ano do ensino médio.

Na pergunta que requeria os anseios em participar do projeto, obtivemos os seguintes dados:

Figura 5.4: Opinião dos Alunos a Respeito de seus Interesses em Participar do Projeto



Fonte: Google Forms.

74,5% dos alunos inscritos, optou pela resposta de que o seu anseio ao participar do projeto era aperfeiçoar e aprofundar seus conhecimentos, o que resulta num total de 35 alunos. Outros 19,1%, sendo 9 alunos, afirmaram que desejavam participar do projeto com a intenção de tornarem-se medalhistas, e ainda 6,4%, sendo 3 alunos, desejavam participar do projeto pois as questões desafiadoras os motivavam.

Na pergunta que contemplava o meio tecnológico que os alunos usariam para acompanhar as aulas do projeto, obtivemos as seguintes conclusões:

Figura 5.5: Meio Tecnológico Disponível para Acompanhar as Aulas

Fonte: Google Forms.

Visualizamos que 72,3%, representando 34 alunos, afirmaram que dispunham somente de aparelho celular para o acompanhamento das aulas, enquanto 23,4%, representando 11 dos alunos, afirmaram dispor tanto de celular, quanto de notebook ou computador para este uso e por fim, 4,3%, sendo 2 alunos, afirmaram que possuíam somente notebook ou computador para usar com esta finalidade.

Com a turma do projeto formada, foi gerado um grupo de WhatsApp para facilitar o repasse das informações acerca do projeto, esclarecer dúvidas dos conteúdos repassados e sobre o funcionamento do Portal da Matemática, além das postagens e discursões a respeito das questões sobre Matemática Básica.

Em cumprimento ao Artigo 247 da Lei nº 8.069 de 13 de Julho de 1990 do Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA), os alunos que participaram desse projeto tiveram suas identidades preservadas. Desta maneira, associamos aos pseudônimos dos discentes de aluno A1, aluno A2, aluno A3, ..., aluno A47, subsequentemente, conforme sua posição de inscrição no projeto.

> Art. 247. Divulgar, total ou parcialmente, sem autorização devida, por qualquer meio de comunicação, nome, ato ou documento de procedimento policial, administrativo ou judicial relativo a criança ou adolescente a que se atribua ato infracional (FEDERAL, 1990, p.35)[8].

Na pergunta “por qual motivo você deve ser selecionado para participar deste projeto?”, o formulário aceitava respostas subjetivas dos estudantes que destacamos a seguir algumas delas:

Segundo o aluno A5,

> A OBMEP foi a primeira olimpíada de matemática que fiz e adorei participar, sempre quis ser medalhista mas não sei como me organizar para os estudos nela, acredito que com essas aulas posso ter uma ideia de organização e me aprofundar ainda mais nessa olimpíada.

O aluno A8 comentou que

> eu creio que nós só vencemos na vida passando por desafios e enfrentando obstáculos ,e participar desse projeto é realmente muito importante pra mim tanto agora como no futuro ,claro que o sonho é ser medalhista e quero correr atrás disso ,não sou ótima em matemática é certo que tenho minhas dificuldades e é meio a isso que eu tento cada vez melhorar mais ,eu sei que não é impossível e que eu posso sim de alguma maneira virar uma medalhista basta eu me esforçar bastante ,porém se eu não conseguir isso vai ser mais um desafio que eu consegui passar mesmo ganhando medalha ou não,porque se eu não ganhar medalha eu vou está ganhando mais conhecimento então eu não sairei perdendo ,eu acho que sim eu devo ser uma das selecionadas e espero muito por isso ,porém se eu não for selecionada vou estar feliz pelos que foram e vou torcer muito por eles,é isso.

Já o aluno A27 destacou que

> Sempre gostei da matéria, e queria me aprofundar mais, tenho facilidade, porém nunca quis aprofundar meus conhecimentos, mas agora estou interessada nos projetos que a escola tem a oferecer, mas minha maior intensão é aprofundar meus conhecimentos para que no futuro eu consiga entrar em uma universidade, não sei bem qual o "curso" que quero ainda, mas estudar nunca é de mais!

O aluno A31 buscou enfatizar que

> Tenho um pouco de dificuldade com matemática, quero melhorar e consegui tirar uma nota ótima na prova

Com base nestas respostas, podemos verificar que o projeto visa atender as nossas perspectivas e também as dos estudantes, que por ora, alguns possuem até anseios diferentes dentro da mesma proposta.

5.8 Elaboração e Aplicação do Teste Inicial

Antes que os encontros do Projeto dessem início, elaboramos um Teste Inicial para ser aplicado com todos os alunos de 1ºano do ensino médio da Escola Campo de Pesquisa, que se dispuseram à contribuir com este trabalho, com o intuito de verificar o nível de conhecimento que os estudantes apresentavam com relação a questões que abordavam os assuntos tratados pelos módulos e com caráter olímpico.

O Teste consta no apêndice C deste trabalho e foi estruturado na Plataforma Google Forms da seguinte maneira: Organizamos um total de 9 questões, sendo 3 de cada área de conhecimento (Aritmética, Contagem e Geometria), divididas em 1 questão dissertativa e 2 questões objetivas de múltipla escolha.

As questões foram selecionadas dos cadernos de exercícios dos módulos que seriam trabalhados com os alunos. Como os mesmos são divididos em questões classificadas como exercícios introdutórios, exercícios de fixação e exercícios de aprofundamento e de exames, organizamos para que as questões dissertativas do teste fossem as questões de nível introdutório, para que os alunos mesmo não tendo conhecimentos sobre aquele assunto, pudessem apresentar suas ideias e organizar o seu raciocínio perante o problema sugerido. As outras duas questões por área de conhecimento de caráter objetiva e de múltipla escolha, foram extraídas do bloco de questões denominadas de exercícios de fixação e/ou exercícios de aprofundamento e de exames.

Assim, as questões ficaram distribuídas da seguinte forma:

Figura 5.6: Disposição das Questões - Teste Inicial

QUESTÃO	MÓDULO	TIPO	NÍVEL
01	PROGRESSÕES ARITMÉTICAS	DISSERTATIVA	INTRODUTÓRIO
02	ÁREAS DE FIGURAS PLANAS	DISSERTATIVA	INTRODUTÓRIO
03	PRINCÍPIOS BÁSICOS DE CONTAGEM	DISSERTATIVA	INTRODUTÓRIO
04	FUNÇÃO AFIM	OBJETIVA	FIXAÇÃO
05	ÁREAS DE FIGURAS PLANAS	OBJETIVA	APROFUNDAMENTO
06	INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE	OBJETIVA	APROFUNDAMENTO
07	FUNÇÃO AFIM	OBJETIVA	APROFUNDAMENTO
08	ÁREAS DE FIGURAS PLANAS	OBJETIVA	FIXAÇÃO
09	PRINCÍPIOS BÁSICOS DE CONTAGEM	OBJETIVA	FIXAÇÃO

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

No dia e horário reservado para os alunos realizarem o teste, o link de acesso ao mesmo foi postado no ambiente de estudo da escola, sendo este a Plataforma Google Classroom (Google Sala de Aula). Foi disponibilizado para a aplicação do Teste Inicial o tempo de 1 hora e 30 minutos, onde os alunos deveriam anexar os seus argumentos, cálculos ou ideias para a resolução das 3 questões dissertativas e assinalar a alternativa que fosse ao seu ver correta, para as 6 questões objetivas, conforme o seu raciocínio e solução encontradas para os problemas apresentados.

5.9 Dinâmica das Aulas

Após a aplicação do Teste Inicial, iniciamos o projeto em sua aula inaugural, repassando orientações de como os 47 alunos inscritos deveriam proceder para realizarem o seu cadastro no Portal da Matemática, preenchimento do perfil com seus dados pessoais, envio da solicitação para adesão do Professor Orientador e esclarecimento de dúvidas a respeito de como poderiam explorar o Portal, seja pelo computador ou celular.

Além disso, foi esclarecido os dias e horários em que as aulas iriam acontecer, o critério adotado na seleção dos assuntos das aulas, bem como a divisão dos mesmos de acordo com as áreas de conhecimento (Aritmética, Geometria e Contagem). Também informamos a quantidade de módulos que seriam estudados por área e o período destinado a exploração de cada um.

Na continuidade, apresentamos aos alunos as metodologias que ajudariam na condução dos módulos, sempre na 1ª aula com um problema motivador na introdução dos assuntos, oportunizando que os alunos tivessem um tempo para compreensão do problema, organização e estruturação das ideias e/ou resolução, para ao final do prazo estipulado, todos ou aqueles que desejassem, pudessem expor seus modelos de resolução – podendo ser apresentado de forma: oral, escrita, por meio de desenhos, gráficos, ou até mesmo, esquemas - sempre havendo a possibilidade dos outros colegas ou o professor colaborar com o modelo apresentado ao final de cada exposição.

Num segundo momento (2ª aula), ficaria destinado a solução do problema pelo professor e consequentemente a formalização dos assuntos.

E na semana seguinte, visto que o projeto funcionou com duas aulas semanais, a resolução de problemas dos cadernos de exercícios do módulo de estudo, seriam discutidas em uma aula e complementadas na aula posterior, com a resolução das questões de provas da 1ª FASE da OBMEP de anos anteriores, mais precisamente entre os anos de 2014 a 2019.

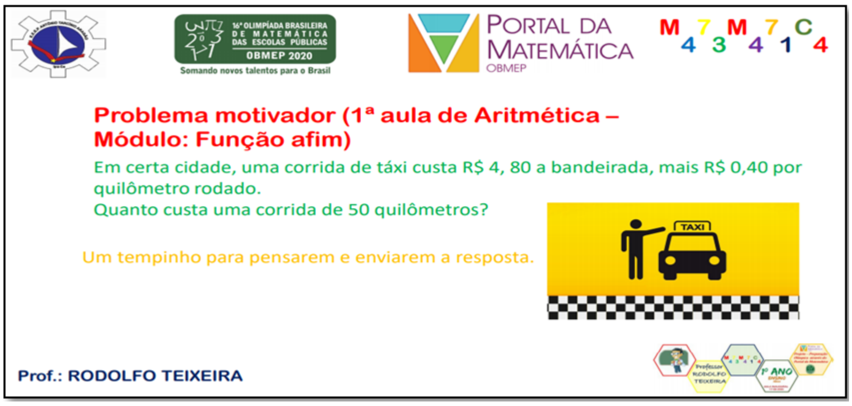
Ressaltando que sempre entre uma semana e outra, ficariam sugestões de vídeos para assistirem, materiais para baixarem, teste para realizarem, dentre outras opções de estudos dentro do módulo que estivesse sendo estudado.

5.9.1 Módulo: Função Afim

Após todas essas orientações repassadas, na aula seguinte os alunos foram recebidos na plataforma Google Meet com uma mensagem acolhedora - como também aconteceu nos demais encontros deste módulo - e em seguida foi dado início ao módulo de Função Afim, que se encontra localizado dentro do Portal da Matemática na série do 9º ano do ensino fundamental II.

Como introdução ao assunto, foi apresentado o seguinte problema motivador - extraído do caderno de exercícios da seção noções básicas deste módulo:

Figura 5.7: Problema Motivador - Módulo: Função Afim



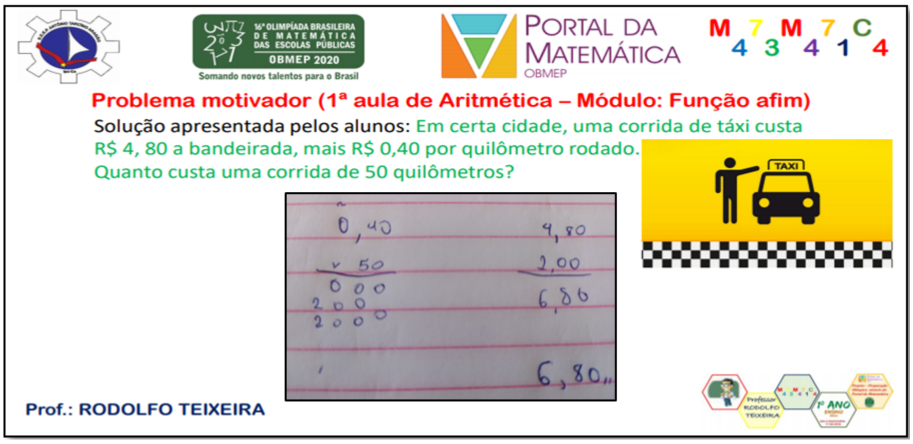
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Conforme os alunos iam concluindo, era sugerido que fossem anexando as suas soluções no formulário produzido para o problema na plataforma Google Forms.

Em seguida, foi oportunizado o momento para que pudessem explicar suas ideias e o caminho que construíram na elaboração de suas soluções, sempre ao final sendo possível que outros colegas tivessem a oportunidade de colaborarem com aquela solução, expressarem se fizeram algo parecido ou apresentar uma outra forma de resolver.

A seguir, vejamos alguns exemplos de solução apresentadas pelos alunos:

Figura 5.8: Problema Motivador (1º Exemplo de Solução Apresentada pelos Alunos) - Módulo: Função Afim



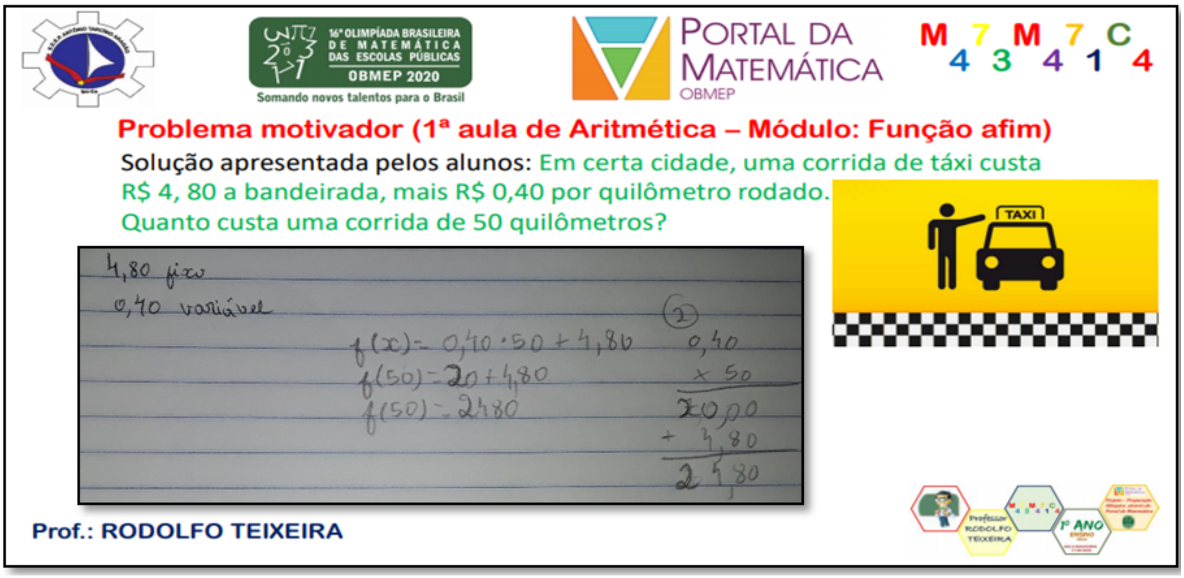
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Podemos notar na solução do aluno A6, que este conseguiu compreender o problema, organizou corretamente a sequência de operações matemáticas que necessitaria realizar e fica notório que o aluno tem domínio sobre as operações de multiplicação e adição; todavia, por mais que demonstre saber estruturar operações com números decimais, apresenta dificuldades em efetuar a manipulação da vírgula de maneira correta, o que comprometeu a continuidade da sua solução.

Outro ponto percebido neste primeiro problema motivador, tanto na solução deste aluno, quanto na da maioria dos outros alunos, é a falta da redação matemática, que poderia deixar mais claro o caminho que o mesmo percorreu dentro da sua solução, discriminando o que cada informação se refere no decorrer das etapas da solução. Porém, no decorrer dos encontros tentamos sanar algumas dessas dificuldades.

Na próxima figura, temos a solução do aluno A24 - que já tentou apresentar uma maior quantidade de informações dentro da sua solução - determinando os valores fixo e variável do problema, além de demonstrar um certo domínio na estruturação de uma função afim.

Figura 5.9: Problema Motivador (2º Exemplo de Solução Apresentada pelos Alunos) - Módulo: Função Afim



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

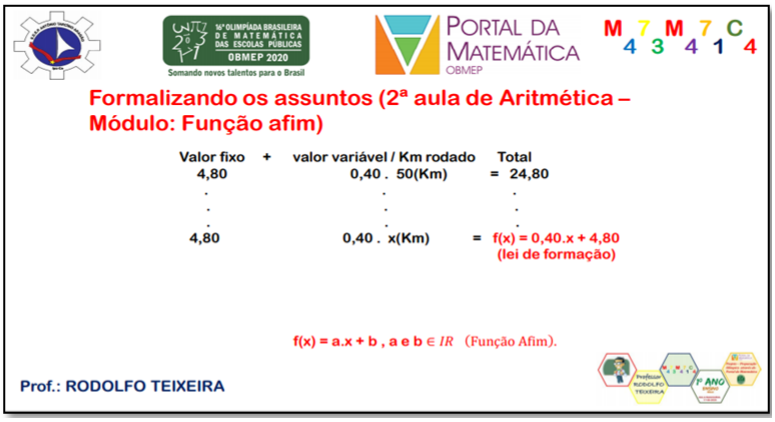
Esses dois exemplos representaram bem o perfil dos alunos que compuseram a turma formada para desenvolver o projeto - composta por aqueles que apresentam dificuldades, mas demonstravam a vontade e curiosidade em aprender mais e sanar suas deficiências, e também por alunos talentosos, que buscavam a qualificação de seus conhecimentos e lapidação de seu potencial. Além disso, essa mescla de níveis gera a possibilidade de ajudas mútuas entre os alunos, que eleva não só aqueles que precisam de apoio, mas quem apoia também.

Com a exploração do problema motivador concluída, realizamos a solução formal do problema e de maneira gradativa o início da implementação dos conceitos de função afim.

Figura 5.10: Problema Motivador - Solução Formal - Módulo: Função Afim

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

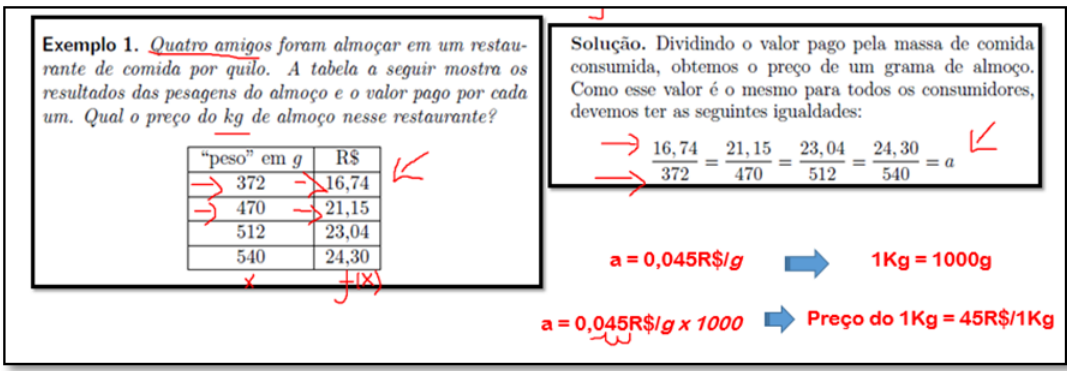
Figura 5.11: Problema Motivador (Formalização dos Conceitos) - Módulo: Função Afim



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Continuamos a formalização do conteúdo por meio do exemplo 1, extraído do material teórico da seção noções básicas deste módulo.

Figura 5.12: Exemplo 1 - Módulo: Função Afim



Exemplo 1. *Quatro amigos foram almoçar em um restaurante de comida por quilo. A tabela a seguir mostra os resultados das pesagens do almoço e o valor pago por cada um. Qual o preço do kg de almoço nesse restaurante?*

"peso" em g	R$
372	16,74
470	21,15
512	23,04
540	24,30

x f(x)

Solução. Dividindo o valor pago pela massa de comida consumida, obtemos o preço de um grama de almoço. Como esse valor é o mesmo para todos os consumidores, devemos ter as seguintes igualdades:

$$\frac{16,74}{372} = \frac{21,15}{470} = \frac{23,04}{512} = \frac{24,30}{540} = a$$

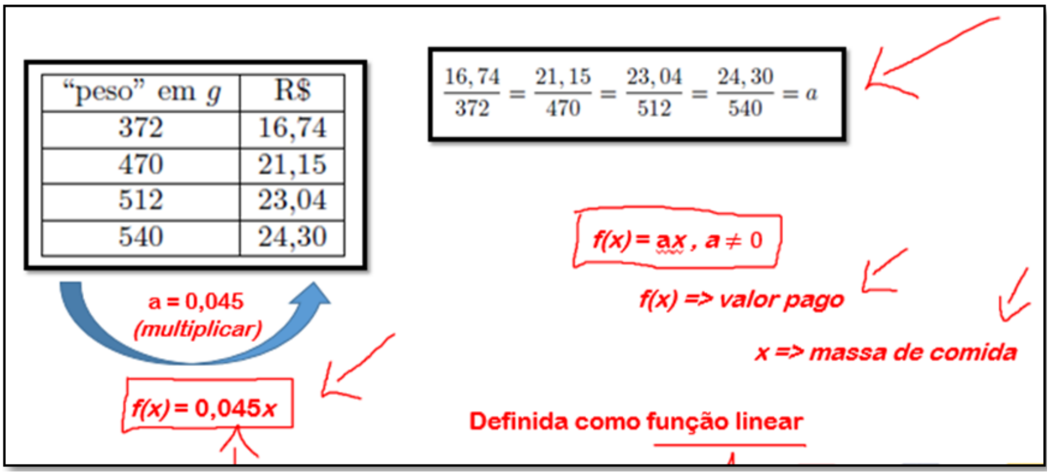
a = 0,045R$/g → 1Kg = 1000g

a = 0,045R$/g x 1000 → Preço do 1Kg = 45R$/1Kg

Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Utilizando o mesmo exemplo, é possível conceituar a definição de função linear. Observemos a figura a seguir:

Figura 5.13: Exemplo de Função Linear - Módulo: Função Afim

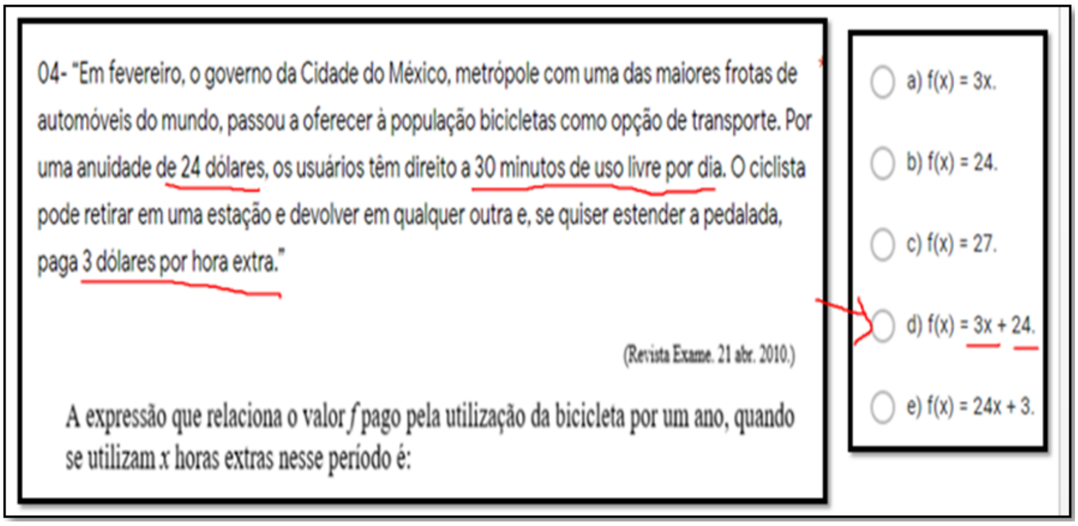


Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Explorando mais exemplos envolvendo os conceitos de função afim, escolhemos o problema 4 apresentado no Teste Inicial, para complementar os conhecimentos.

Vejamos a seguir:

Figura 5.14: Problema 4 - Teste Inicial



04- "Em fevereiro, o governo da Cidade do México, metrópole com uma das maiores frotas de automóveis do mundo, passou a oferecer à população bicicletas como opção de transporte. Por uma anuidade de 24 dólares, os usuários têm direito a 30 minutos de uso livre por dia. O ciclista pode retirar em uma estação e devolver em qualquer outra e, se quiser estender a pedalada, paga 3 dólares por hora extra."

(Revista Exame. 21 abr. 2010.)

A expressão que relaciona o valor f pago pela utilização da bicicleta por um ano, quando se utilizam x horas extras nesse período é:

a) f(x) = 3x.

b) f(x) = 24.

c) f(x) = 27.

d) f(x) = 3x + 24.

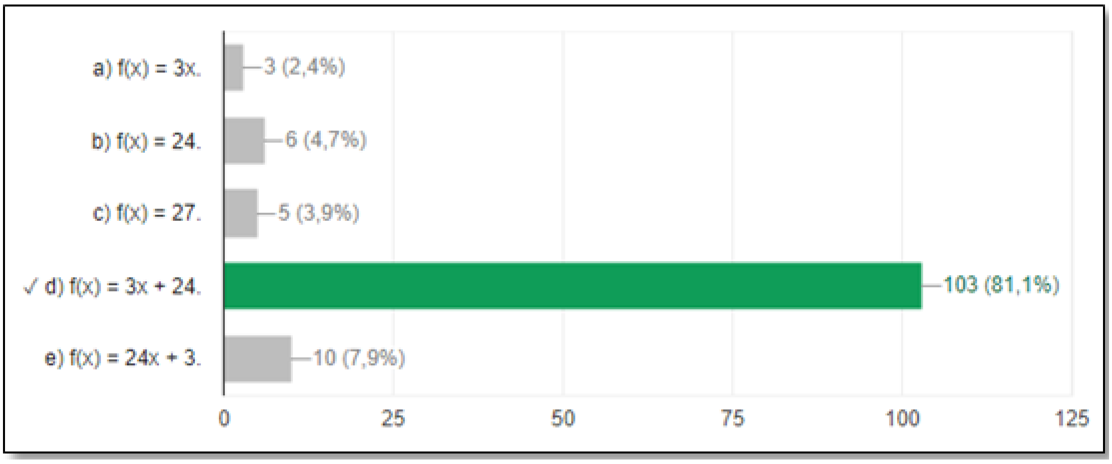
e) f(x) = 24x + 3.

Fonte: Caderno de Exercícios - Portal da Matemática.

Este problema exige do aluno apenas a interpretação correta do enunciado para a aplicação do conceito de função afim, sendo possível notar que o valor de 24 dólares da anuidade será fixo e o valor de 3 dólares por hora extra variará conforme o tempo. Dessa maneira, o item d apresenta a forma mais coerente de representar a função afim exposta no problema.

Observemos as respostas apresentadas pelos alunos que participaram do teste inicial.

Figura 5.15: Resultado do Teste Inicial - Problema 4



Fonte: Google Forms.

É possível notar que a maioria (81,1%) dos alunos conseguiram acertar este problema, mas uma parcela destes encontram dificuldades em assimilar o conteúdo, por mais que a questão não exija de cálculos extensos.

Algumas propriedades das funções afins foram apresentadas e são muito importantes na construção e ligação das etapas de uma solução. Observem as mesmas com atenção:

Figura 5.16: Propriedades - Módulo: Função Afim

Uma função linear $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem as seguintes propriedades:

(i) $f(x + x') = f(x) + f(x')$, para quaisquer $x, x' \in \mathbb{R}$.

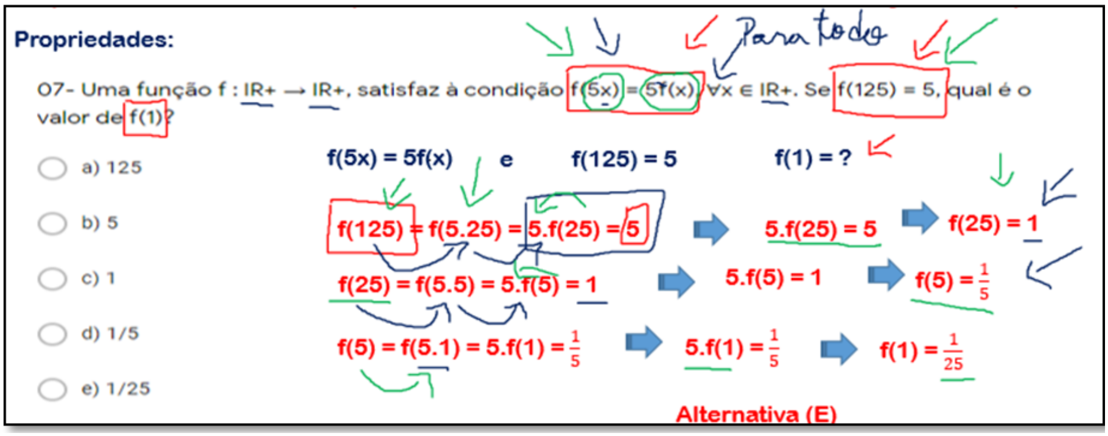
(ii) Para cada $c \in \mathbb{R}$ constante, tem-se $f(cx) = c \cdot f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

De fato, se $x, x' \in \mathbb{R}$, então $f(x + x') = a(x + x') = ax + ax' = f(x) + f(x')$, e isso justifica a afirmação (i). Por outro lado, se $c \in \mathbb{R}$, então $f(cx) = a(cx) = c(ax) = cf(x)$, o que justifica a afirmação (ii).

Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Um problema que necessitou da aplicação das propriedades foi a questão 7 do teste inicial, que traz o seguinte texto.

Figura 5.17: Problema 7 - Teste Inicial

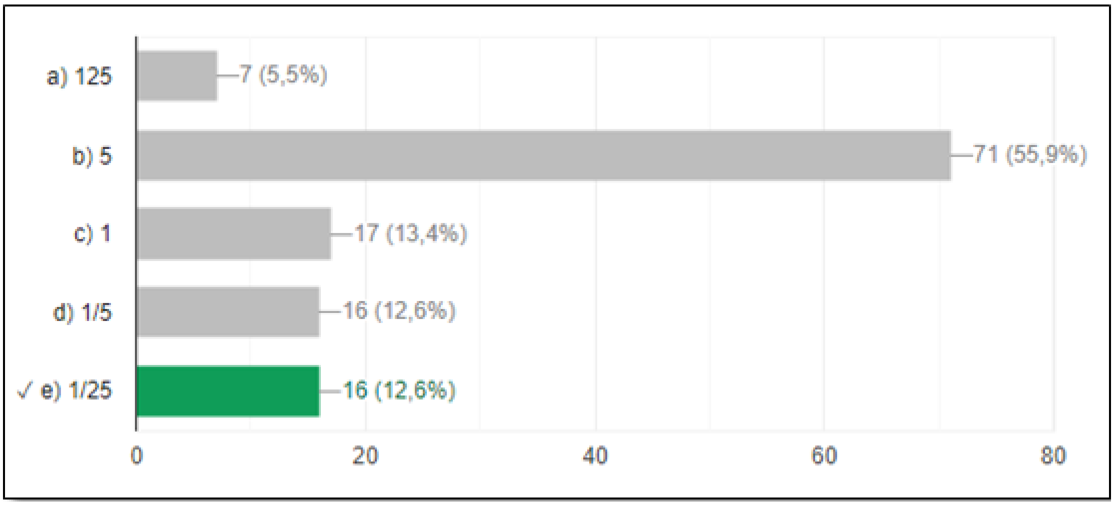


Fonte: Caderno de Exercícios - Portal da Matemática.

Para solucionar este problema, o aluno deveria aplicar a propriedade (ii), apresentada na figura anterior e seguir as orientações dadas no enunciado.

Vejamos como ficou a distribuição das respostas dos alunos para este problema.

Figura 5.18: Resultado do Teste Inicial - Problema 7



Fonte: Google Forms.

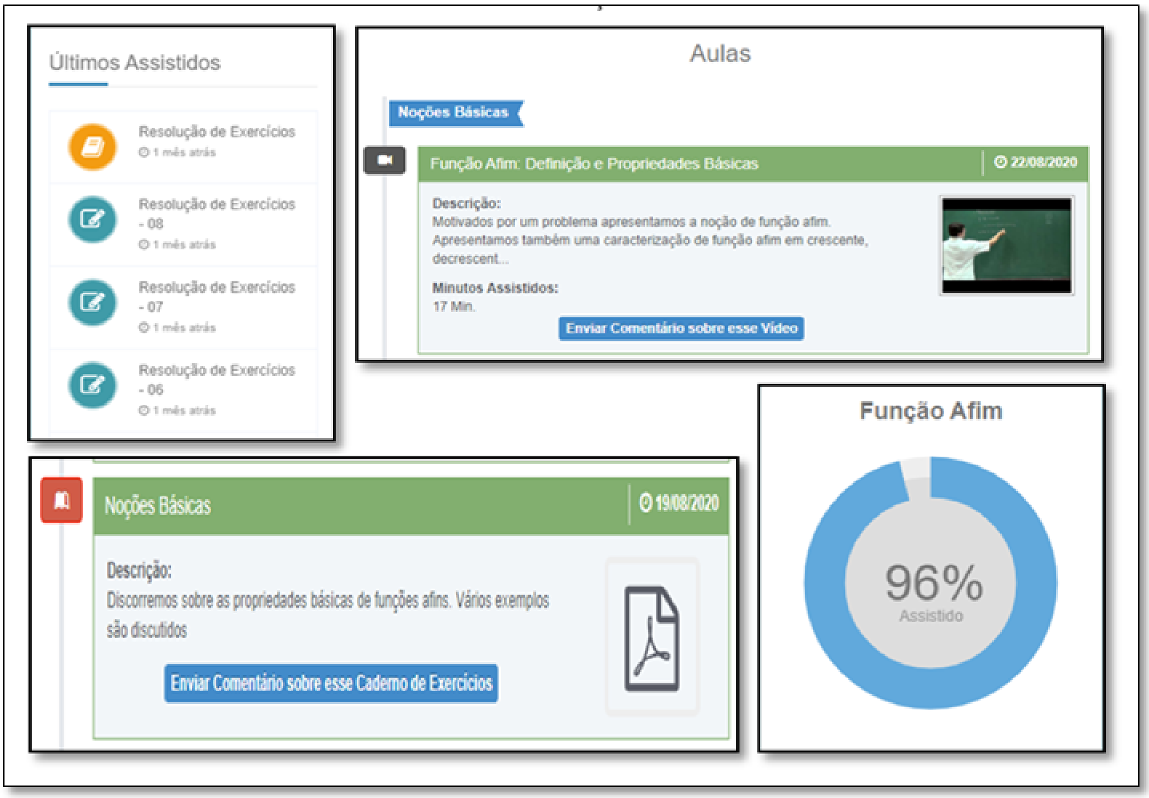
Note que os alunos encontraram grande dificuldade em compreender o problema e fazer uso da propriedade para interligar as informações repassadas no enunciado - apenas 12,6% dos alunos assinalaram a alternativa correta.

Foi apresentado também a caraterização de uma função afim, podendo esta ser: função linear, função identidade ou função constante, bem como possuir características de uma função crescente ou função decrescente. Além disso, foi explorada a construção dos gráficos de uma função afim, além da raiz da função, coeficiente angular e linear.

Encerrada a 1ª semana do projeto, ficaram como sugestões de aprofundamento e complementação dos estudos para o Módulo – Função Afim (9ºANO), vídeo aulas (3 vídeos), exercícios resolvidos (8 vídeos) e o Material Teórico, presentes na seção Noções Básicas.

Foi possível acompanhar a realização de todas essas sugestões através do progresso de cada aluno, que o Professor Orientador tem acesso aos relatórios. Como podemos observar no exemplo a seguir.

Figura 5.19: Acompanhamento do Progresso dos Alunos 1ª Etapa - Módulo: Função Afim

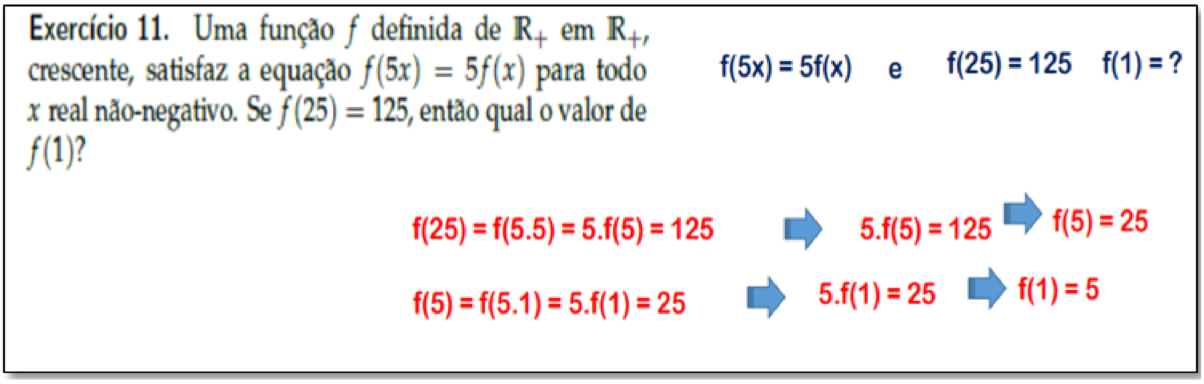


Fonte: Progresso no Módulo - Portal da Matemática.

Para finalizar o módulo e fixar os conhecimentos adquiridos até o momento, foram propostos, debatidos e solucionados uma série de problemas dos cadernos de exercícios e algumas questões da 1ª fase da OBMEP, entre os anos de 2014 a 2019 que abordavam o assunto de função afim. Dessa forma, selecionamos duas delas para serem analisadas neste trabalho.

Podemos notar, que esta questão do Caderno de Exercícios apresenta características

Figura 5.20: Resolução de Questões - Módulo: Função Afim



Exercício 11. Uma função f definida de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}_+$, crescente, satisfaz a equação $f(5x) = 5f(x)$ para todo x real não-negativo. Se $f(25) = 125$, então qual o valor de $f(1)$?

f(5x) = 5f(x) e f(25) = 125 f(1) = ?

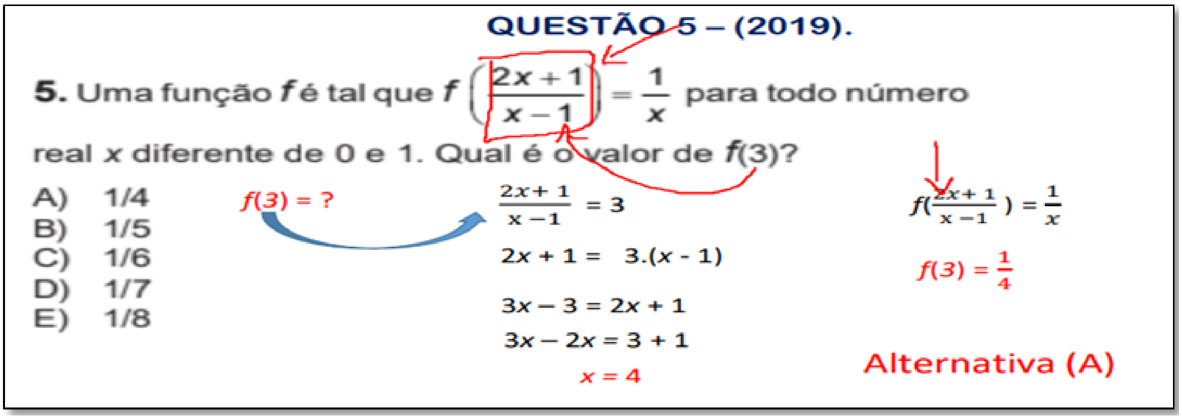
f(25) = f(5.5) = 5.f(5) = 125 ➡ 5.f(5) = 125 ➡ f(5) = 25

f(5) = f(5.1) = 5.f(1) = 25 ➡ 5.f(1) = 25 ➡ f(1) = 5

Fonte: Caderno de Exercícios - Portal da Matemática.

semelhantes ao Problema 7 presente no Teste Inicial, reforçando os conceitos de Função Afim trabalhados durante este módulo.

Figura 5.21: Resolução de Questões - 1^a Fase OBMEP



QUESTÃO 5 – (2019).

5. Uma função f é tal que $f\left(\boxed{\frac{2x+1}{x-1}}\right) = \frac{1}{x}$ para todo número real x diferente de 0 e 1. Qual é o valor de $f(3)$?

A) 1/4
B) 1/5
C) 1/6
D) 1/7
E) 1/8

$f(3) = ?$

$\frac{2x+1}{x-1} = 3$

$2x + 1 = 3.(x - 1)$

$3x - 3 = 2x + 1$

$3x - 2x = 3 + 1$

$x = 4$

$f(\frac{2x+1}{x-1}) = \frac{1}{x}$

$f(3) = \frac{1}{4}$

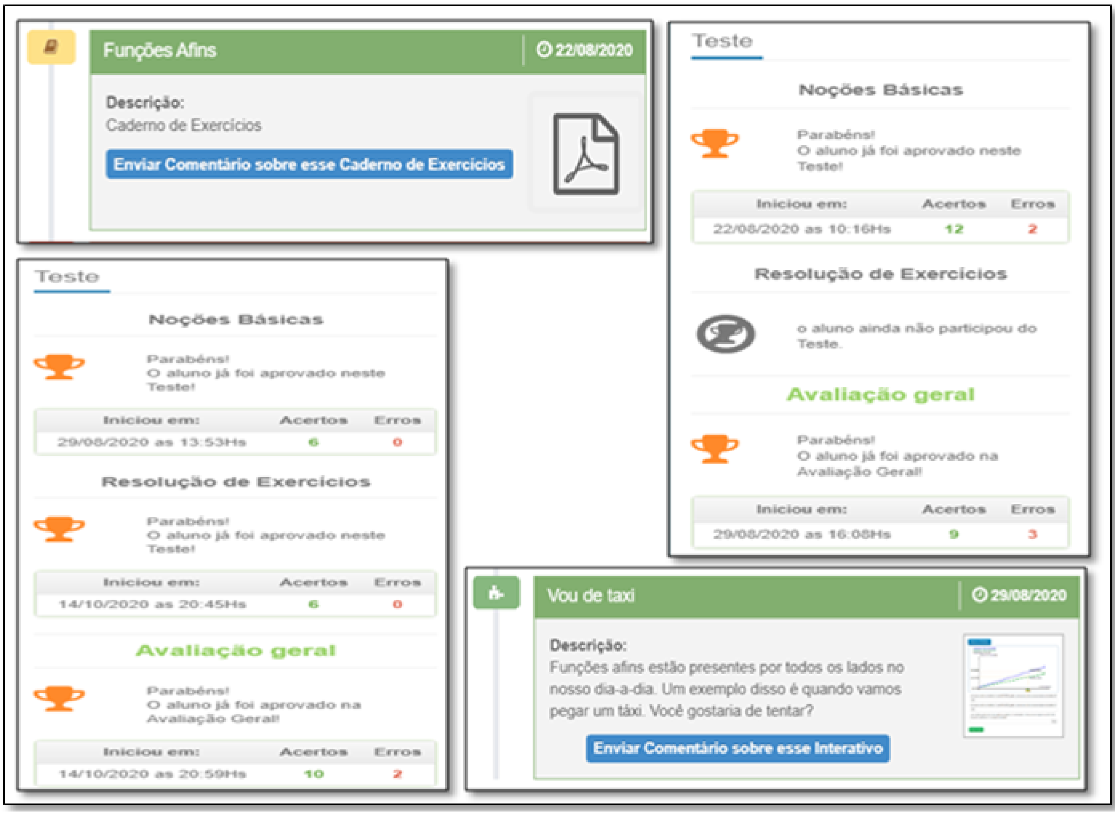
Alternativa (A)

Fonte: Provas e Soluções - OBMEP.

Da mesma forma, nesta questão extraída das provas anteriores da OBMEP, observamos a utilização também de alguns conceitos estudados neste módulo, que serviram de base para a construção de sua solução.

Assim como ao final da 1^a semana de estudos, nesta 2^a semana, ficaram as sugestões de estudos para o Módulo – Função Afim (9ºANO), os cadernos de exercícios, os aplicativos de jogos envolvendo o assunto estudado, além do Testes e Avaliação Geral que possibilitam o aluno obter um certificado, caso atinja 6 acertos seguidos nas questões dos Testes e acima de 70% de aproveitamento na Avaliação Geral. O que pode ser notado na próxima figura.

Figura 5.22: Acompanhamento do Progresso dos Alunos 2ª Etapa - Módulo: Função Afim



Fonte: Progresso no Módulo - Portal da Matemática.

Duas coisas são importantes ressaltar na figura anterior: a primeira é que caso o aluno tenha consciência que os conhecimentos adquiridos nas vídeo aulas, nos vídeos de exercícios resolvidos e no material teórico foram o suficientes para fixar bem o que foi repassado, pode pular a etapa dos testes e realizar logo a Avaliação Geral; no entanto, caso não obtenha sucesso na primeira tentativa deve reiniciar a Avaliação do início novamente, diferente do que acontece nos testes que automaticamente oferece feedbacks instantâneos sobre erros e acertos e agrega conhecimentos a partir das resoluções apresentadas como respostas corretas, quando se marca um ítem incorreto. Uma segunda observação na imagem apresentada é a possibilidade de flexibilização do andamento das aulas e realização do que era proposto para ser explorado no portal da matemática dentro do projeto. Na figura anterior podemos ver o desempenho de um outro aluno que foi exemplificado na figura, que realizou o primeiro teste no prazo programado, porém retornou um tempo depois para concluir o segundo teste, consequentemente realizar também a Avaliação Geral e obter o certificado deste módulo.

5.9.2 Módulo: Progressões Aritméticas

Assim como no módulo anterior, os alunos foram recebidos na plataforma Google Meet com uma mensagem acolhedora e em seguida foi dado início ao módulo de Progressões Aritméticas, que se encontra localizado dentro do Portal da Matemática na série do 1º ano do ensino médio.

Para introduzir o assunto, foi apresentado o seguinte problema motivador - extraído do caderno de exercícios da seção definição e lei de formação de uma P.A. - deste módulo e presente também no Teste Inicial, através do problema 1:

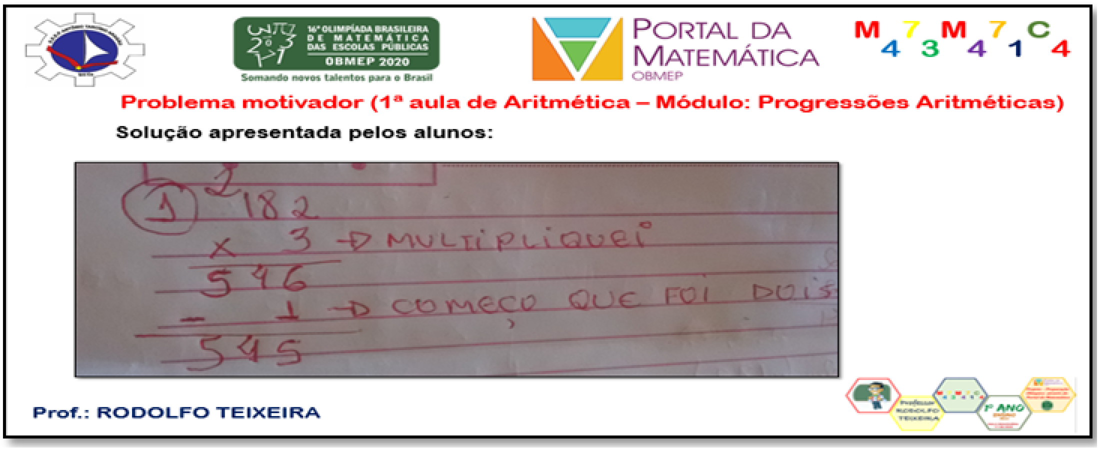
Figura 5.23: Problema Motivador - Módulo: Progressões Aritméticas

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Por tratar-se de um problema que constava no Teste Inicial, alguns alunos recordaram da questão e não necessitaram do tempo disponível para desenvolverem a sua resolução do problema - apenas recorreram as suas anotações e aguardaram os colegas concluírem ou refizeram o caminho das suas soluções - enquanto os demais que não lembraram de como haviam raciocinado o problema, buscaram novamente compreendê-lo e construir o raciocínio e caminho de suas soluções.

Após este momento, iniciamos as exposições das soluções e justificativas do que os levaram a pensar o problema daquela maneira. Separamos 3 soluções para serem apresentadas que chamaram a atenção pelos métodos de resolução adotados. Vejamos:

Figura 5.24: Problema Motivador - 1º Exemplo de Solução Apresentada pelos Alunos - Módulo: Progressões Aritméticas

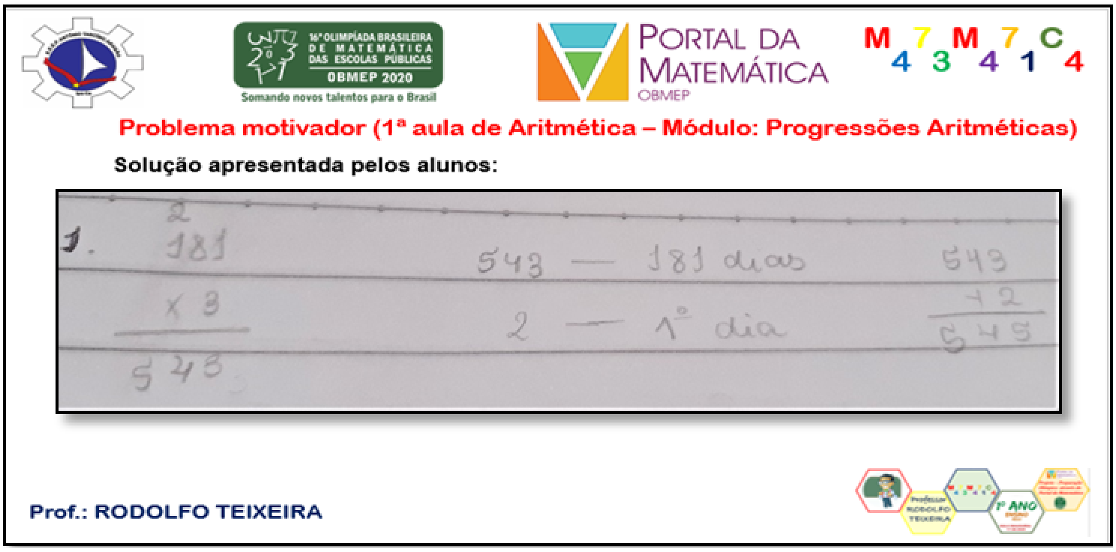


Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Observando a solução apresentada pelo aluno A19, notamos que o método de raciocínio adotado foi bem direto. O mesmo argumentou verbalmente que, de início, pelo fato do problema buscar o quanto de dinheiro Maria teria ao final de 182 dias e que a cada dia juntava mais 3 reais, multiplicou 182 por 3, no entanto, como o primeiro dia ela só possuía 2 reais, percebeu que deveria subtrair 1 real, totalizando 545 reais, visto que sua quantia inicial não era no valor de 3 reais.

Embora a solução sozinha sem o acompanhamento da explicação verbal não tenha esclarecido o caminho que foi seguido, é interessante notar que o aluno tentou esboçar a linha de ideia que seguiria.

Figura 5.25: Problema Motivador - 2º Exemplo de Solução Apresentada pelos Alunos - Módulo: Progressões Aritméticas



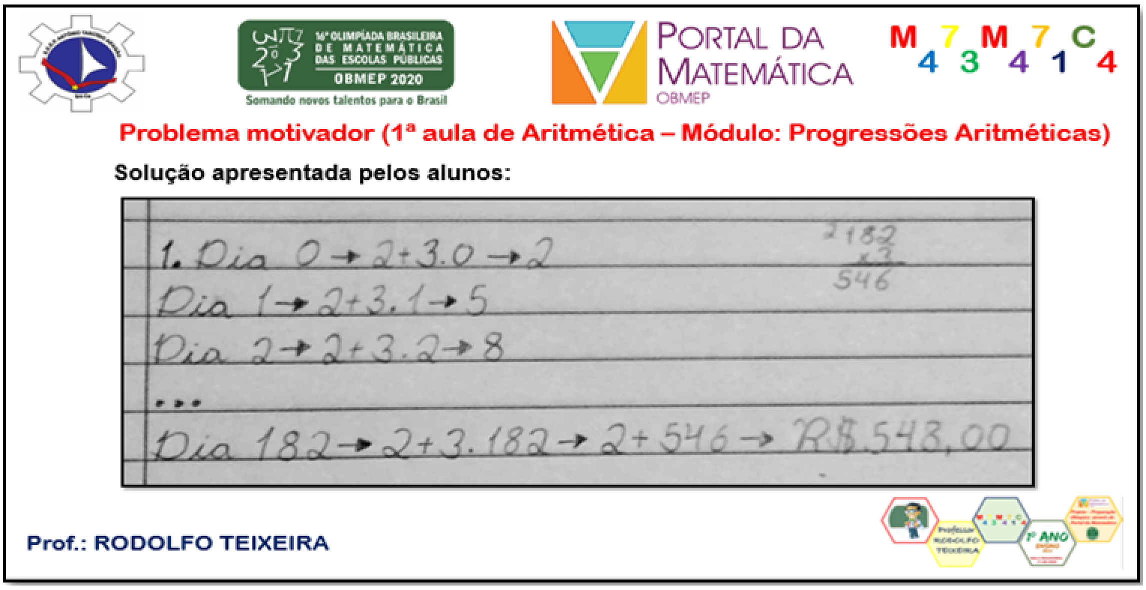
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Esta solução do aluno A43 seguiu um modelo de resolução bem próximo do aluno anterior. O mesmo argumentou que, percebendo antes que no primeiro dia Maria teria 2 reais e que nos próximos dias sempre aumentaria de 3 em 3 reais, multiplicou 181 por 3 e ao final adicionou os 2 reais referentes ao primeiro dia, totalizando os 182 dias e uma quantia de 545 reais.

O mais interessante em observar essas duas primeiras soluções é a percepção de que em um mesmo problema existem inúmeras formas diferentes de construir uma resolução.

Na última solução apresentaremos, o aluno A32 cometeu um pequeno equívoco de interpretação; no entanto, o seu método de resolução apresentou um conceito de lei de formação bem apurado. Observemos:

Figura 5.26: Problema Motivador - 3º Exemplo de Solução Apresentada pelos Alunos - Módulo: Progressões Aritméticas



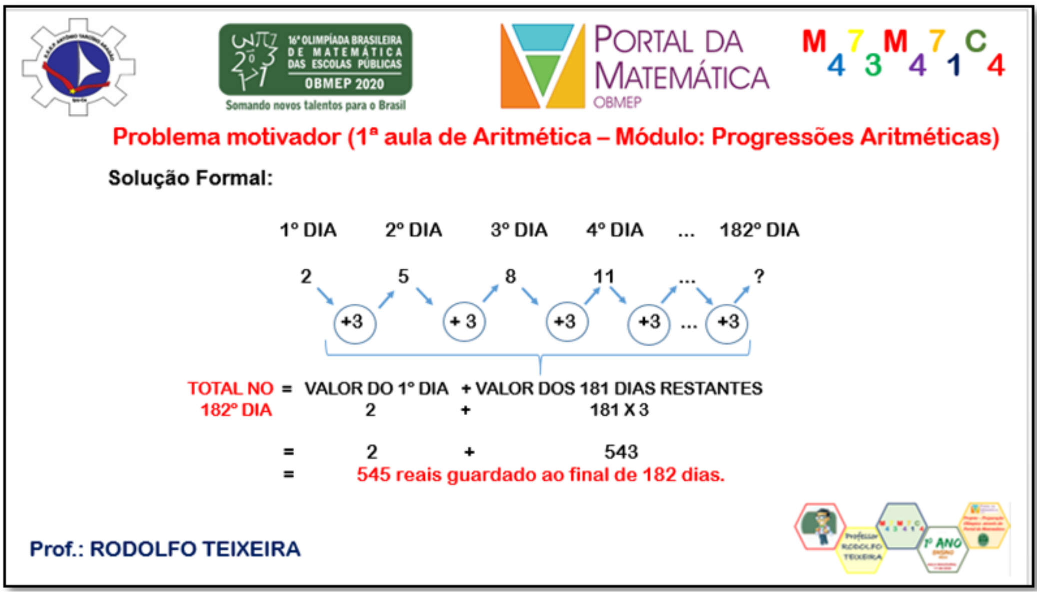
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

O aluno argumentou que buscou montar a sua solução associando aos conceitos de função afim, onde os 2 reais do primeiro dia seria o valor fixo e a quantia de 3 reais iria variar conforme o número de dias, chegando ao valor total guardado de 548 reais.

Sua ideia de resolução foi bem elaborada, apenas cometeu o equívoco de não considerar os dias restantes após o primeiro dia ao invés de todos os 182 dias, visto que ao fixar o valor de 2 reais, deveria utilizar para a sequência da solução apenas os 181 dias restantes, ou pelo fato de iniciar o seu método de resolução a partir do dia 0, só necessitaria ir até o dia 181 os seus estudos.

Dando continuidade aos estudos, após a conclusão da exposição das soluções e métodos de resolução elaborados pelos alunos, desenvolvemos a solução formal do problema motivador a partir das ideias apresentadas pelos estudantes. Acompanhe a figura a seguir:

Figura 5.27: Problema Motivador - Solução Formal - Módulo: Progressões Aritméticas

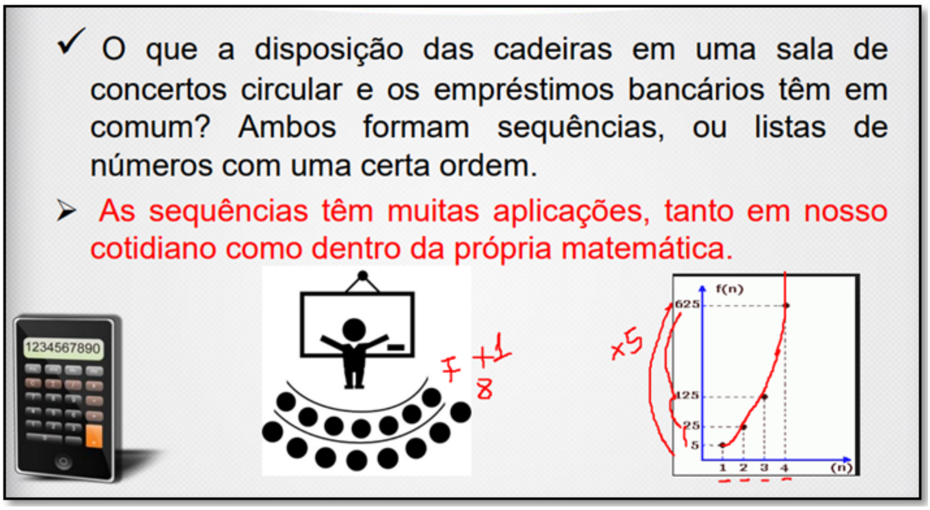


Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Podemos notar que a sequência formada pelo problema motivador possui características que nos ajudarão mais à frente na conceituação e definição de Progressão Aritmética (P.A.).

Iniciamos a formalização dos assuntos apresentando algumas aplicações de situações onde encontramos o estudo de sequências inserido.

Figura 5.28: Sequências (Aplicações) - Módulo: Progressões Aritméticas



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Em seguida, conceituamos o assunto de sequências da seguinte maneira.

Figura 5.29: Sequências (Formalização dos Conceitos) - Módulo: Progressões Aritméticas

Uma **sequência infinita** de números reais é uma lista ordenada infinita $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, em que cada $a_k \in \mathbb{R}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. De outro modo, podemos definir uma sequência infinita de números reais como uma função $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Denotando $a_k = a(k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$, temos que as duas definições dadas acima coincidem. Doravante, denotaremos uma sequência infinita qualquer de números reais por $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ou $(a_k)_{k\geq 1}$.

Uma **sequência finita** de números reais é uma lista ordenada finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Nesse caso, n é denominado o **número de termos** da sequência. Se denotamos por I_n o conjunto $I_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, também podemos definir uma sequência finita de n termos reais como uma função $a : I_n \longrightarrow \mathbb{R}$, em que $a(k) = a_k$ para cada $k \in I_n$.

Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Figura 5.30: Sequências (Lei de Formação) - Módulo: Progressões Aritméticas

a_k é um termo da sequência, por vezes denominado o k-ésimo termo (em alusão ao fato de que ele é o termo que ocupa a posição k).

Uma sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ é dada por uma fórmula posicional se a_k for dado por uma fórmula em k.

Exemplo: (Múltiplos de 3).

Dada a sequência (3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...), os termos são encontrados a partir da Lei de Formação ($a_k = 3k$).

Logo, $a_1 = 3.1 = 3$, $a_2 = 3.2 = 6$, $a_3 = 3.3 = 9$, $a_4 = 3.4 = 12$, ...

Observação: o 1° termo representamos por a_1 (lê-se a índice um, ou a um), assim por diante, até o termo de ordem k (a_k: lê-se a índice k).

Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Como forma de fixar os conceitos repassados sobre o estudo de sequências, foi proposto o exercício 5 - extraído do caderno de exercícios da seção definição e lei de formação de uma P.A. - deste módulo.

Figura 5.31: Exercício 5 - Módulo: Progressões Aritméticas

Exercício 5. A sequência dos números pentagonais está ilustrada na figura abaixo:

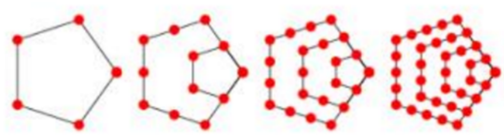


Figura: http://mathworld.wolfram.com/PentagonalNumber.html

Fazendo apenas a contagem de pontos em cada borda externa (perímetro) em cada pentágono chegaremos a:

$$a_1 = 5$$
$$a_2 = 10$$
$$a_3 = 15$$
$$a_4 = 20.$$

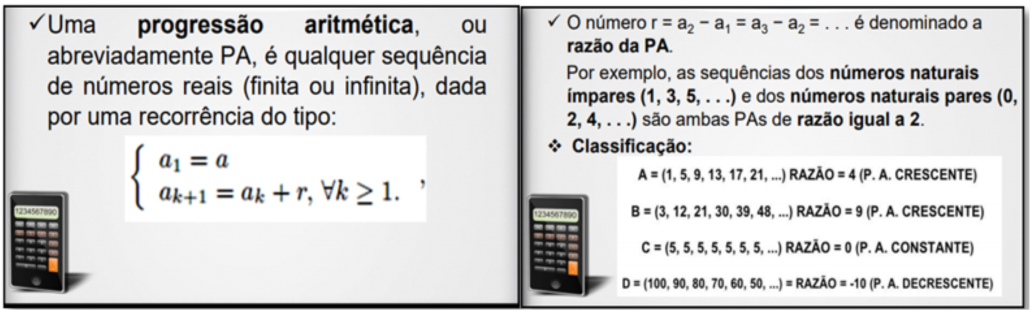
Sendo assim, qual o valor de a_{20}?

Fonte: Caderno de Exercícios - Portal da Matemática.

Para a solução deste exercício, foi usada a mesma metodologia aplicada no problema motivador, em que os alunos tiveram um momento de entendimento do enunciado e posteriormente a construção e exposição de suas ideias de resolução.

Com o conceito de sequências bem definido, chegou a vez de tratarmos de um tipo específico de sequência, que são as progressões aritméticas. Vejamos a sua definição:

Figura 5.32: Definição de Progressão Aritmética - Módulo: Progressões Aritméticas



Fonte: Material Teórico (adaptado) - Portal da Matemática.

Buscando uma melhor compreensão e entendimento dos conceitos iniciais sobre progressões aritméticas, utilizamos o exemplo 4 - presente no material teórico da seção definição e lei de formação de uma P.A.- deste módulo como forma de esclarecer dúvidas ainda pertinentes sobre o assunto.

Figura 5.33: Exemplo 4 - Módulo: Progressões Aritméticas

Exemplo 4. *Encontre todas as PAs crescentes, formadas por três termos tais que sua soma seja* 24 *e o seu produto seja* 440.

Solução. Geralmente, utilizamos a notação $(x-r, x, x+r)$ para denotar uma PA de três termos e com razão r. Como a soma desses termos é igual a 24, obtemos:

$$(x - \cancel{r}) + x + (x + \cancel{r}) = 24 \Longrightarrow 3x = 24 \Longrightarrow x = 8.$$

Agora, como o produto dos três termos é igual a 440, temos:

$$\begin{aligned} (8-r)\cdot 8\cdot(8+r) = 440 &\Longrightarrow (8-r)\cdot(8+r) = \frac{440}{8} \\ &\Longrightarrow 64 - r^2 = 55 \\ &\Longrightarrow r^2 = 9 \\ &\Longrightarrow r = 3. \end{aligned}$$

Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Feito o exemplo, finalizando a 1ª semana do módulo de Progressões Aritméticas, construímos juntamente com os alunos a fórmula do termo geral de uma P.A., conforme a proposição 9 do material teórico da seção definição e lei de formação de uma P.A., deste módulo. Acompanhemos o passo a passo deste estudo.

Figura 5.34: Fórmula do Termo Geral de uma P.A. - Módulo: Progressões Aritméticas

Proposição 9. *Se $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma PA de razão r, então:*

$$a_k = a_1 + (k-1)r, \forall k \geq 1.$$

Prova. Observe as $k-1$ igualdades abaixo, que ocorrem porque $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma PA:

$$\begin{cases} a_2 - a_1 = r \\ a_3 - a_2 = r \\ a_4 - a_3 = r \\ \quad\vdots \\ a_{k-1} - a_{k-2} = r \\ a_k - a_{k-1} = r. \end{cases}$$

Adicionando-as membro a membro, obtemos

$$(a_2 + \cdots + a_{k-1} + a_k) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}) =$$

$$= \underbrace{r + r + \cdots + r}_{n-1 \text{ vezes}}.$$

Em seguida, cancelando no primeiro membro a soma $a_2 + \cdots + a_{k-1}$ (que aparece duas vezes, com sinais opostos), e observando que

$$\underbrace{r + r + \cdots + r}_{n-1 \text{ vezes}} = (n-1)r,$$

obtemos

$$a_k - a_1 = (k-1)r,$$

conforme desejado. □

Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Através do exemplo 10 do material teórico da seção definição e lei de formação de uma P.A., deste módulo foi possível observar a aplicação desta fórmula na prática. Vejamos o que ele nos diz:

Calcule o vigésimo termo da P.A. cujo primeiro termo é 5 e cuja razão é 3.

Solução. *Utilizando a fórmula da Proposição 9, temos:*

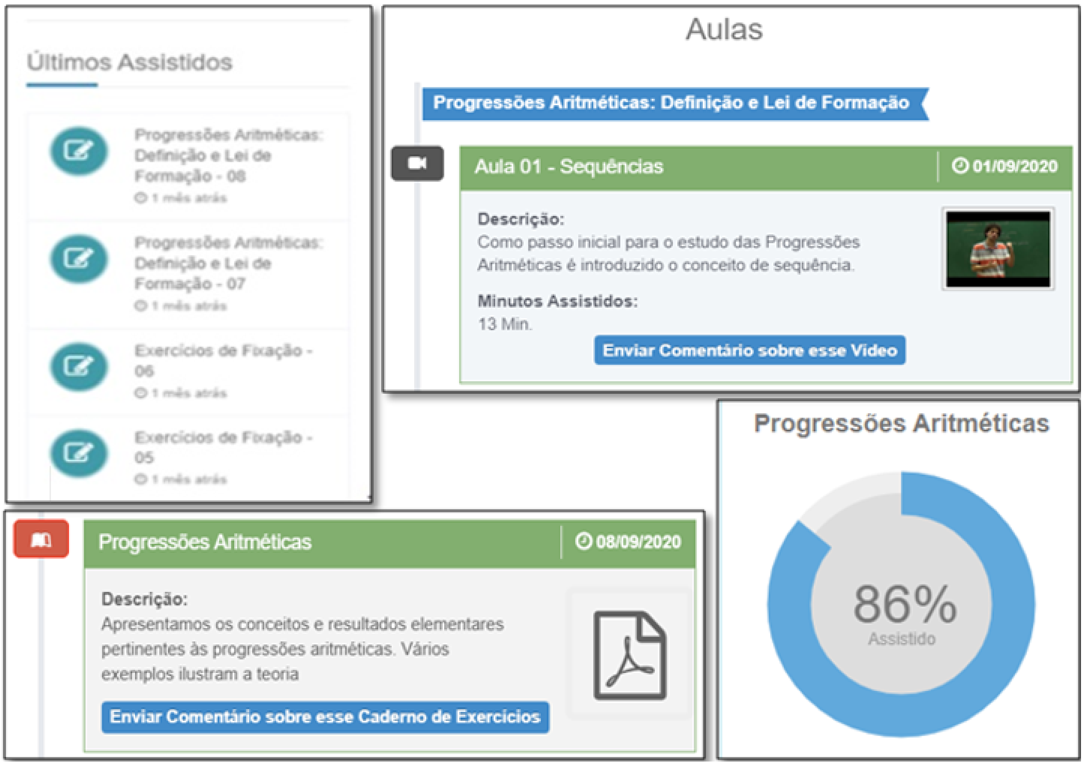
$$a_{20} = a_1 + (20-1) \cdot 3 = 5 + 19 \cdot 3 = 5 + 57 = 62$$

. □

Além dessa aplicação, algumas variações da fórmula foram apresentadas, a função que cada variável presente na fórmula representa dentro do estudo e ficaram algumas sugestões de aprofundamento e complementação dos conteúdos no Portal da Matemática, sendo estas: vídeo aulas (3 vídeos), exercícios resolvidos (9 vídeos) e o Material Teórico, presentes na seção definição e lei de formação de uma P.A. do Módulo – Progressões Aritméticas.

Verificamos o acompanhamento da realização do que foi proposto nas sugestões, através do professor orientador e exemplificamos a seguir o progresso atingido pelos alunos nesta 1^a seção do módulo.

Figura 5.35: Acompanhamento do Progresso dos Alunos 1ª Etapa - Módulo: Progressões Aritméticas

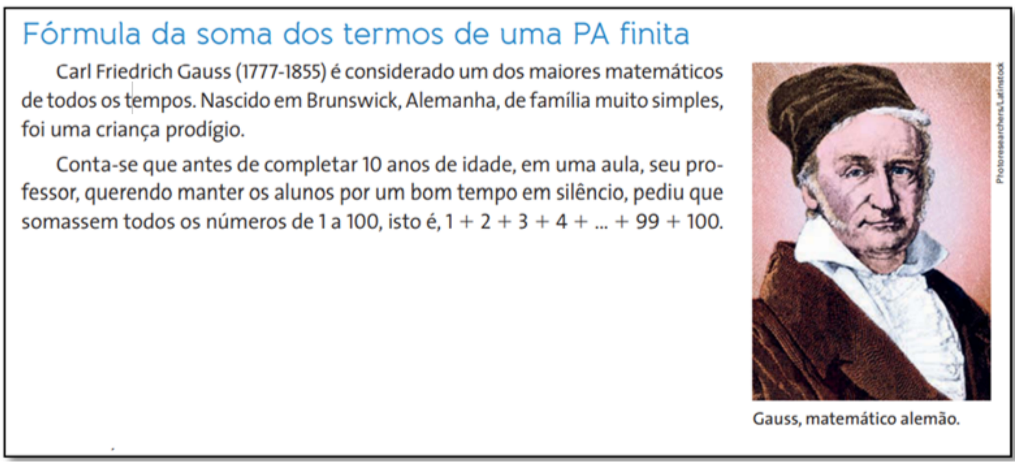


Fonte: Progresso no Módulo - Portal da Matemática.

Iniciando a 2ª semana de estudos e dando continuidade para o Módulo Progressões Aritméticas, exploramos a seção P.As. Inteiras e Soma dos Termos de uma P.A.

Como introdução ao assunto e servindo de problema motivador para os alunos, extraímos um trecho do livro de 1º ano Matemática Contexto & Aplicações - adotado pela escola campo de pesquisa - do autor Luiz Roberto Dante[7]. Vejamos:

Figura 5.36: Gauss e as Somas dos Termos de uma P.A. - Módulo: Progressões Aritméticas



Fórmula da soma dos termos de uma PA finita

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Nascido em Brunswick, Alemanha, de família muito simples, foi uma criança prodígio.

Conta-se que antes de completar 10 anos de idade, em uma aula, seu professor, querendo manter os alunos por um bom tempo em silêncio, pediu que somassem todos os números de 1 a 100, isto é, $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 99 + 100$.

Gauss, matemático alemão.

Fonte: Livro Matemática: Contexto & Aplicações - Luiz Roberto Dante.

Após uma apresentação do problema motivador - originado do problema proposto pelo professor de Gauss - foi dado um tempo para os alunos analisarem e construírem seus métodos de resolução, depois disso, iniciamos as exposições das ideias, e todos os alunos afirmaram encontrar apenas a forma de ir somando número por número na ordem crescente de sua apresentação.

Para a solução formal do problema motivador, apresentamos a solução elaborada por Gauss ao seu professor, e todos os alunos ficaram bastante surpresos com o raciocínio criado por uma criança naquela época. Apreciemos na figura a seguir:

Figura 5.37: Solução de Gauss para a Soma de 1 a 100 - Módulo: Progressões Aritméticas

Para surpresa do professor, depois de alguns minutos Gauss disse que a soma era 5 050. Acompanhe seu raciocínio:

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100}_{\text{50 parcelas de 101}} \quad (1 + 100 = 101;\ 2 + 99 = 101, \text{etc.})$$

$50 \cdot 101 = 5050$

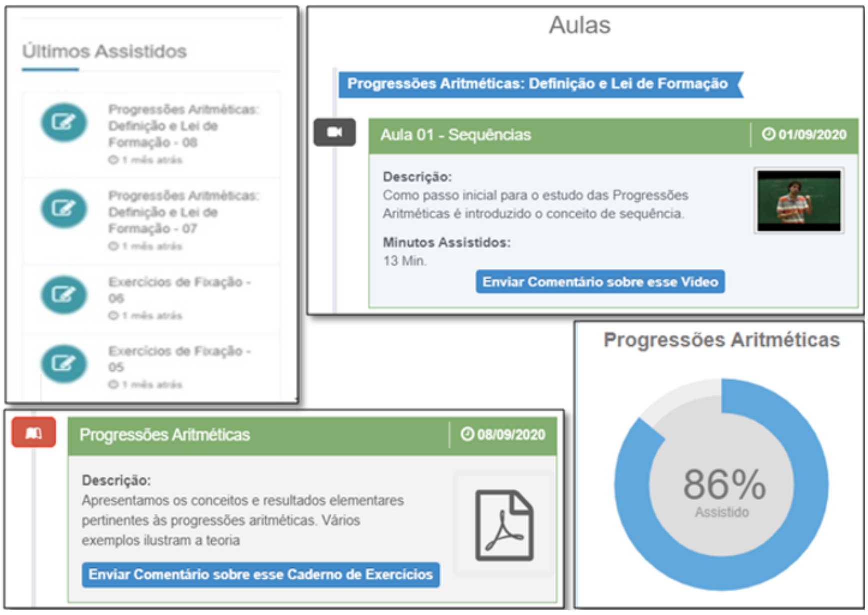
Assim, $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 99 + 100 = 5\,050$.

Verdadeira ou não, essa história ilustra uma característica muito importante das PAs, que usaremos a seguir na demonstração da fórmula geral da soma dos termos de uma PA.

Fonte: Livro Matemática: Contexto & Aplicações - Luiz Roberto Dante.

Antes de adentrarmos a demonstração da fórmula da soma dos termos de uma P.A., precisaremos compreender a proposição 8 - presente na seção definição e lei de formação de uma P.A. - que servirá de apoio para construção da fórmula que traremos na sequência.

Figura 5.38: Proposição 8 - Módulo: Progressões Aritméticas



Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Através da solução apresentada por Gauss, foi possível construir uma fórmula que calculasse qualquer soma dos termos de uma P.A.

A seguir mostraremos a demonstração desta fórmula, extraída do material teórico da seção P.As. Inteiras e Soma dos Termos de uma P.A., deste módulo.

Figura 5.39: Demonstração - Fórmula da Soma dos Termos de uma P.A. - Módulo: Progressões Aritméticas

Começamos este material calculando a soma dos termos de uma PA finita. Nesse sentido, a fórmula colecionada na proposição abaixo é conhecida como a **fórmula da soma dos k primeiros termos** de uma PA.

Para seu enunciado, é conveniente introduzirmos a notação

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (1)$$

para denotar a soma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ (ou simplesmente a_1, quando $n = 1$). Aqui, a letra grega maiúscula Σ (lê-se *sigma*) corresponde ao nosso S (de *soma*), de sorte que (1) denota a soma dos termos a_k, com k variando de 1 a n.

Proposição 1. *Se $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma PA de razão r, então:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}, \forall n \geq 1.$$

Prova. Se $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Por outro lado, escrevendo os mesmos termos na ordem inversa, temos:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1.$$

Agora, utilizando o resultado da Proposição 8 do material teórico da aula anterior, obtemos (quer seja n par ou ímpar):

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ vezes}}$$

$$\Longrightarrow 2S_n = n(a_1 + a_n)$$

$$\Longrightarrow S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

□

Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Visando uma melhor compreensão do assunto repassado, utilizamos o exemplo 2 do material teórico da seção P.As. Inteiras e Soma dos Termos de uma PA, deste módulo, como uma aplicação da fórmula apresentada. Acompanhemos atentamente:

Calcule a soma dos quinze primeiros termos da P.A. (3, 7, 11, ...).

Solução. Observe que $a_1 = 3, r = 7 - 3 = 4$ e como desejamos encontrar a soma dos quinze primeiros termos n será igual a 15. Daí, pela proposição 9 da seção definição e lei de formação de uma P.A. e a proposição, temos:

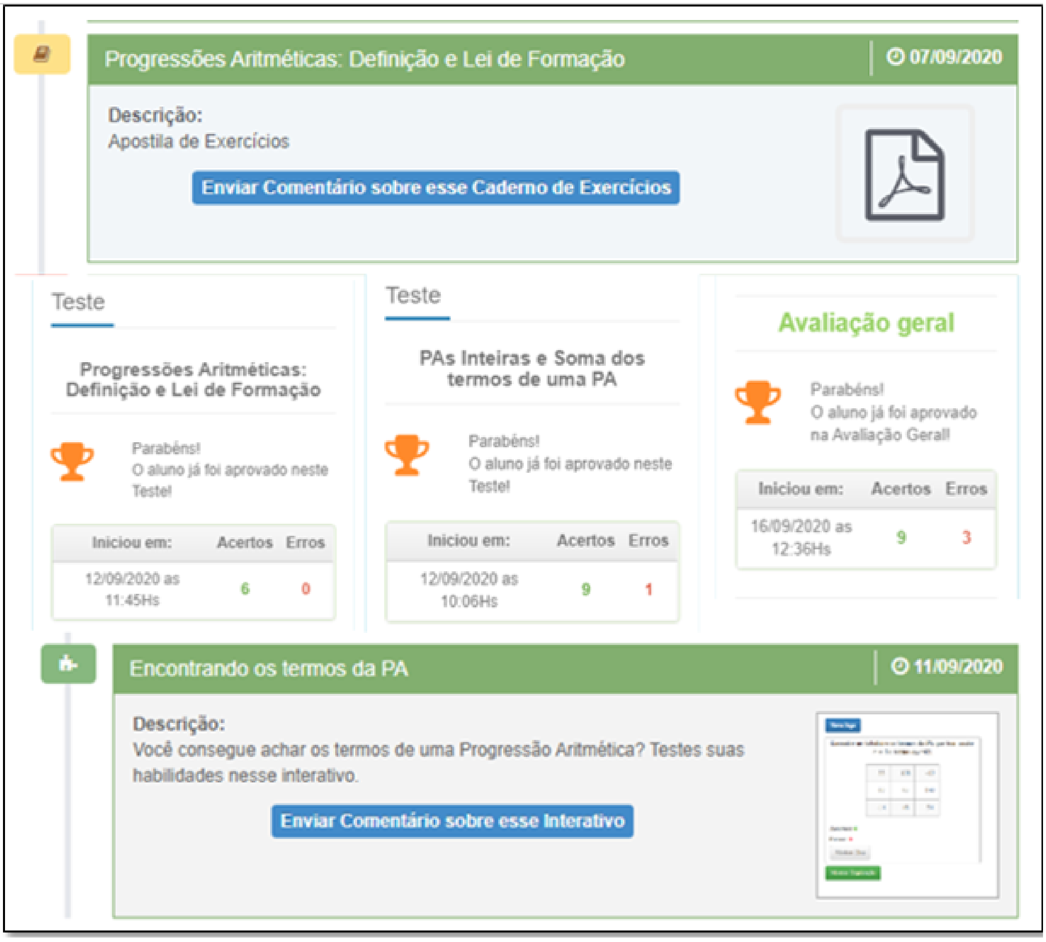
$$\begin{aligned} a_{15} &= a_1 + (15 - 1) \cdot 4 \\ &= 3 + 14 \cdot 4 \\ &= 3 + 56 \\ &= 59 \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} S_{15} &= \frac{15 \cdot (a_1 + a_{15})}{2} \\ &= \frac{15 \cdot (3 + 59)}{2} \\ &= \frac{15 \cdot 62}{2} \\ &= 15 \cdot 31 = 465 \end{aligned}$$

□

Além do exemplo anterior, outras aplicações também foram trabalhadas no encontro e para finalizar o Módulo de Progressões Aritméticas, ficaram mais sugestões de estudos e aprofundamentos no Portal da Matemática, como: os cadernos de exercícios para baixarem e praticarem, os aplicativos para visualizarem os assuntos dentro de um ambiente interativo, além dos testes e avaliação geral para verificarem o seu nível de aprendizagem. Por fim, desde o início do Módulo, a seção Exercícios de Fixação também foi apresentada como forma de apoio e treinamento para os estudantes.

Vejamos a seguir um pouco do que foi registrado no progresso dos alunos.

Figura 5.40: Acompanhamento do Progresso dos Alunos 2ª Etapa - Módulo: Progressões Aritméticas



Fonte: Progresso no Módulo - Portal da Matemática.

5.9.3 Módulo: Princípios Básicos de Contagem

A partir deste módulo, iniciamos os estudos dentro da área de conhecimento de Contagem, mais uma vez conduzindo os encontros por meio da plataforma Google Meet e recebendo os alunos com uma mensagem acolhedora.

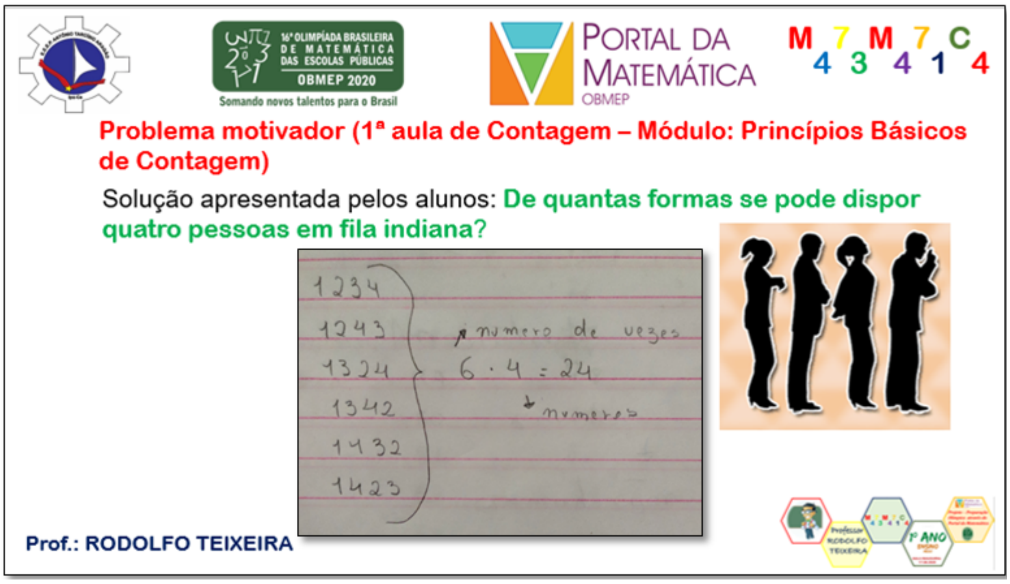
Para uma abordagem introdutória, buscamos apresentar o problema motivador a seguir, retirado do exercício 4 do caderno de exercícios - da seção Princípio Fundamental de Contagem - deste módulo de estudo.

Figura 5.41: Problema Motivador I - Módulo: Princípios Básicos de Contagem

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Dado um tempo para os alunos montarem seus métodos de resolução e anexarem suas soluções no formulário elaborado para este problema na plataforma Google Forms, iniciamos as exposições das ideias construídas pelos alunos. Apresentaremos duas delas a seguir, para analisarmos as linhas de raciocínio aplicadas.

Figura 5.42: Problema Motivador I - (1º Exemplo de Solução Apresentada pelos Alunos) Módulo: Princípios Básicos de Contagem



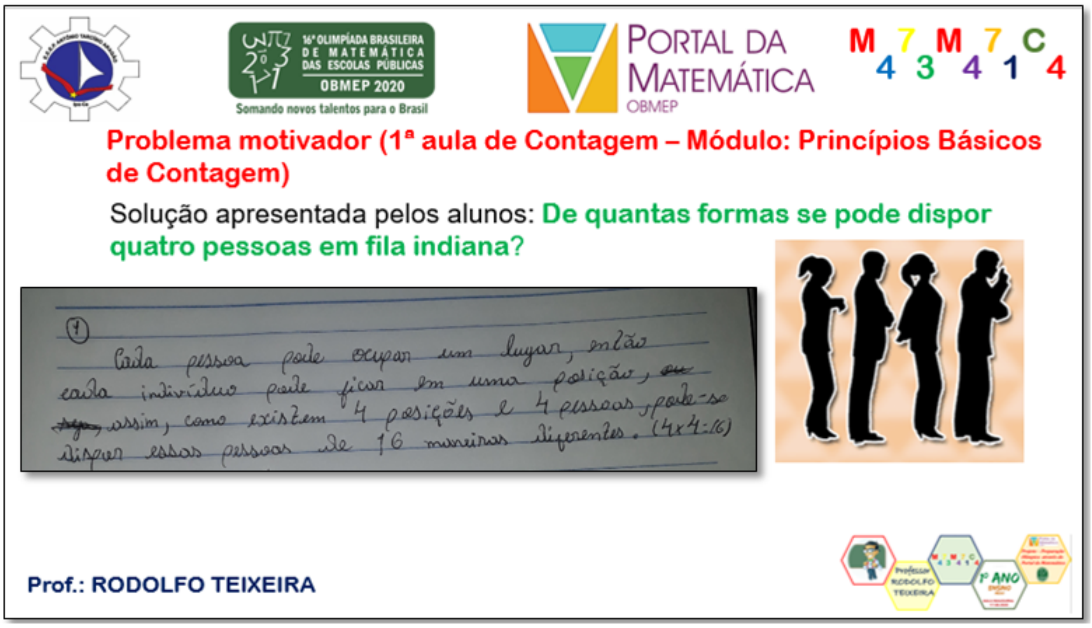
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Ao apresentar a sua solução, o aluno A6 argumentou verbalmente que organizou o seu raciocínio inicialmente associando cada pessoa a um número, na sequência tentou fixar o número 1 na 1ª posição e variar os outros valores nas demais posições. Feito isso, percebeu que foi possível construir 6 formações de filas diferentes e que o mesmo ocorreria fixando os números 2, 3 ou 4 na 1ª posição e variando os valores restantes nas outras posições. Concluiu justificando que foram gerados 4 grupos de 6 filas distintas, o que poderia representar um total de $6 \times 4 = 24$ filas distintas.

Podemos notar que embora o aluno não tenha transmitido clareza em sua resolução, assim como a sua linha de raciocínio; tentou complementar e justificar através da argumentação verbal.

Vejamos agora, a solução apresentada pelo o aluno A2.

Figura 5.43: Problema Motivador I - (2º Exemplo de Solução Apresentada pelos Alunos) Módulo: Princípios Básicos de Contagem



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Nesta solução notamos que o aluno buscou deixar claro suas ideias e o caminho que realizou dentro de sua resolução. Observamos que o discente identifica que existem 4 posições disponíveis e 4 pessoas para serem acomodadas nestes lugares e consequentemente executa a multiplicação dessas duas quantidades, encontrando $4 \times 4 = 16$ maneiras distintas da fila ser formada; todavia, as informações posições e pessoas, exercem papéis distintos dentro do Princípio Fundamental da Contagem, o que acarretou em um resultado diferente do correto, encontrado pelo aluno.

Concluído o momento de exposição das soluções, a partir das ideias apresentadas iniciamos a construção de uma solução formal para o problema motivador. Acompanhemos a seguir:

Figura 5.44: Problema Motivador I (Solução Formal) Módulo: Princípios Básicos de Contagem

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Através da solução do aluno A6 iniciamos associando cada pessoa a uma letra do alfabeto e fixando essas letras uma de cada vez na primeira posição, variando as demais posições, o que acarretou na mesma conclusão do aluno, que seria possível a formação de 24 filas distintas.

Mas, após chegarmos a esta solução, os alunos foram indagados sobre a seguinte situação: e se agora no lugar de dispor 4 pessoas em fila indiana fosse preciso dispor de uma quantidade muito grande de pessoas, seria prático tentar encontrar cada um dos resultados?

Os estudantes ficaram refletindo por um tempo e logo em seguida afirmaram que seria bem demorado para encontrar esse resultado e muito propício a erro. Daí, a apresentação do Princípio Fundamental da Contagem entrou como um auxílio seguro para determinar o número de filas distintas para qualquer número de pessoas participantes.

Complementamos a solução formal construindo 4 traços que representavam as posições das pessoas na fila e explicando as condições que seriam analisadas para a acomodação das pessoas nas posições, sendo possível qualquer uma das 4 pessoas ficarem na 1ª posição da fila, na sequência uma delas ocupando uma vaga restariam 3 pessoas para concorrerem a 2ª posição e, da mesma forma, teríamos duas maneiras de alocarmos a 3ª posição e uma pessoa para a 4ª posição.

Essas quantidades de opções para cada posição se interligam através da multiplicação, gerando o resultado $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras distintas, o que remete ao Princípio Multiplicativo - outro nome dado ao Princípio Fundamental da Contagem.

Continuamos os estudos formalizando o Princípio Fundamental da Contagem (PFC), segundo o material teórico da 1ª seção deste módulo. Acompanhemos:

Figura 5.45: Formalização do Conteúdo - Módulo: Princípios Básicos de Contagem

1 O Princípio Fundamental da Contagem

Frequentemente estamos interessados em contar o número de maneiras em que determinadas ações podem ser executadas. De quantas maneiras podemos nos vestir? De quantas formas podemos viajar de uma cidade para outra? De quantas formas podemos combinar as opções de comida para montar o cardápio de um jantar? Uma maneira simples de contar é fazer uma lista com todas as possibilidades e contá-las uma a uma. Contudo, isso é pouco eficiente e é muito comum que o número de possibilidades seja tão grande que isso se torna até impossível. Por exemplo, de quantas formas podemos escolher as três letras e os quatro números para montar uma placa de carro? Ou como calcular o número de maneiras de preencher um cartão da Mega-Sena?

Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Note quantas aplicações deste estudo foram citadas e quantas outras podemos nos deparar. De maneira resumida, visualize a seguir os métodos que podemos usar tanto para determinar o número de possibilidades de uma situação-problema, quanto para alguns casos, apresentar cada um dos resultados encontrados.

Figura 5.46: Apresentação dos Métodos - Módulo: Princípios Básicos de Contagem

Formalizando o assunto:

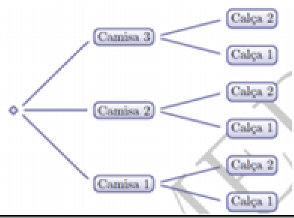
Para calcular o número de possibilidades de uma determinada situação iremos utilizar alguns métodos:

I - Princípio Multiplicativo **II – Tabela de Dupla Entrada** **III – Árvore das Possibilidades**

Exemplo: Digamos que você possui 3 camisas e 2 calças sociais. De quantas maneiras diferentes você pode se vestir (escolhendo exatamente uma das camisas e uma das calças)?

$\underset{c}{\underline{\ 3\ }} \times \underset{cs}{\underline{\ 2\ }} = 6$ possibilidades

C \ CS	CS1	CS2
C1	C1CS1	C1CS2
C2	C2CS1	C2CS2
C3	C3CS1	C3CS2

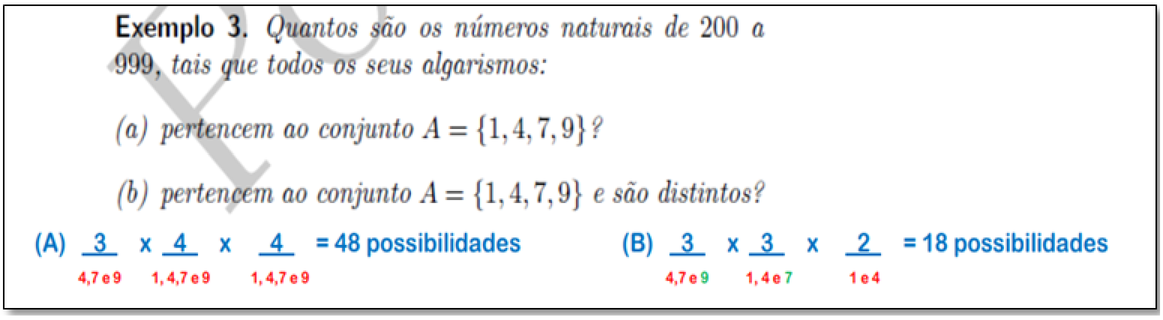


Fonte: Material Teórico (adaptado) - Portal da Matemática.

Os métodos apresentados oportunizaram aos alunos adquirirem mais opções e ferramentas possíveis de serem usadas no cálculo do número de possibilidades para os problemas propostos na continuidade dos estudos, como também identificar se utilizou alguns dos métodos citados em suas soluções, mesmo que de forma involuntária.

Observe agora, dois exemplos extraídos do material teórico e um exercício do caderno de exercícios deste módulo, que foram selecionados, apresentados e comentados juntamente com os alunos.

Figura 5.47: Exemplo 3 - Módulo: Princípios Básicos de Contagem

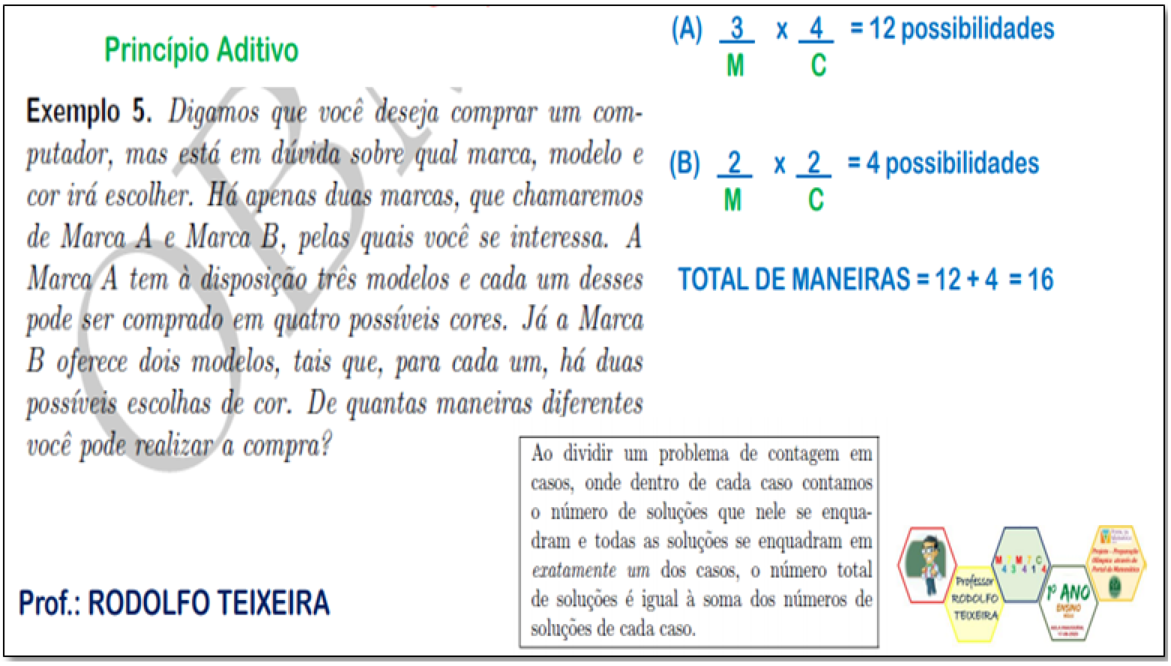


Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Neste primeiro exemplo, buscamos tratar o caso de Princípio Fundamental da Contagem que envolve formação de números, que os alunos costumam encontrar bastante dificuldades, pois não conseguem diferenciar um número quando representa valor absoluto e quanto representa quantidade de opções distintas para uma posição.

Uma dica que foi repassada para facilitar nesses casos é informar embaixo de cada posição as opções possíveis para aquele local e na parte de cima o número de opções - isso poderá ajudar na diferenciação no momento da construção da solução.

Figura 5.48: Exemplo 5 - Módulo: Princípios Básicos de Contagem

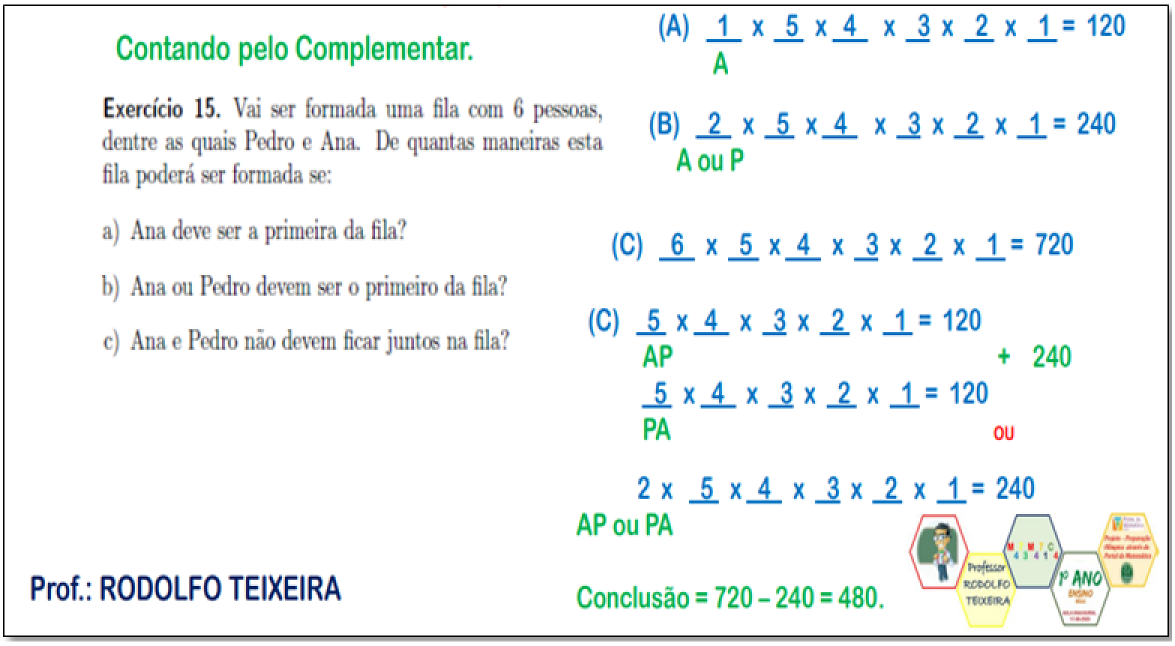


Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

O próximo exemplo trabalhado aborda um problema onde somente o princípio multiplicativo não será suficiente, pois necessita separar o problema em casos. Especificamente para o nosso problema em questão os casos serão a quantidade de maneiras de comprar um computador da marca A ou da marca B, pois não é possível calcular de uma vez só o que se pede, sendo necessário calcular primeiramente uma marca e posteriormente, outra.

Para esses tipos de situação é dado o nome de princípio aditivo, que consiste em separar o problema em casos, calcular o número de maneiras isoladamente e por fim somar todos os resultados encontrados.

Figura 5.49: Exercícios 15 - Módulo: Princípios Básicos de Contagem



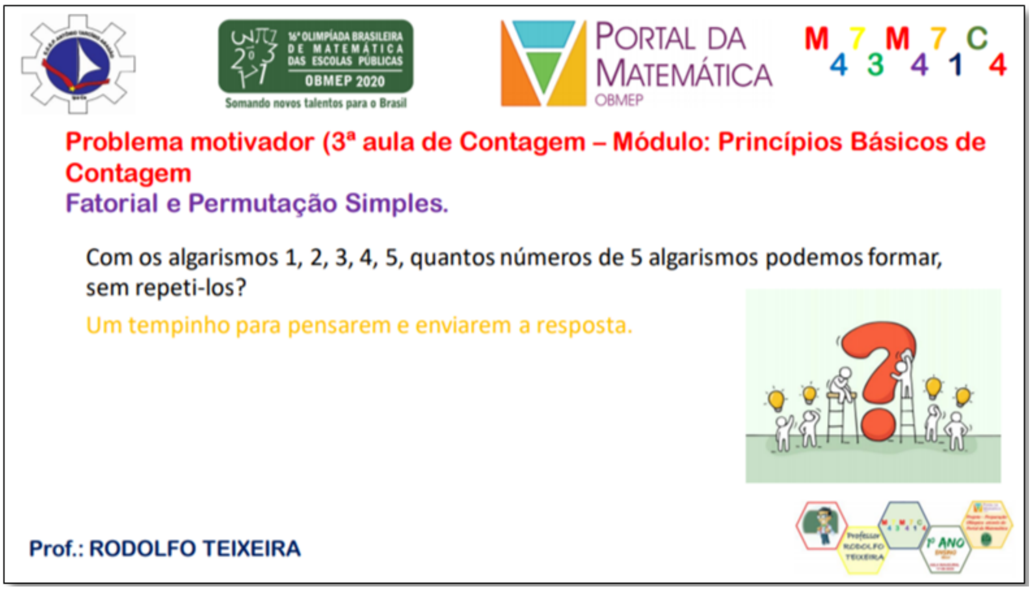
Fonte: Caderno de Exercícios - Portal da Matemática.

Por fim, para concluir a seção de Princípio Fundamental da Contagem e reforçar os conhecimentos trabalhados, o exercício 15 do caderno de exercícios foi apresentado, comentada as possibilidades de resolução com os alunos e construída a solução para cada item exposto.

Algumas sugestões de aprofundamento e complementação dos estudos no portal da matemática foram repassadas, como: vídeo aulas (3 vídeos), exercícios resolvidos (6 vídeos) e o material teórico para ser baixado, presentes nesta seção trabalhada.

Na 2ª semana do Módulo Princípios Básicos de Contagem, continuamos os estudos agora na seção Permutação Simples, onde assim como em aulas anteriores foi apresentado um problema motivador como introdução ao assunto.

Figura 5.50: Problema Motivador II - Módulo: Princípios Básicos de Contagem



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Após dado um tempo para os alunos organizarem e construírem as suas soluções, iniciamos as exposições dos métodos de resolução e apresentaremos uma das ideias que foram argumentadas. Vejamos a seguir a solução apresentada pelo o aluno A11 através do chat da plataforma Google Meet.

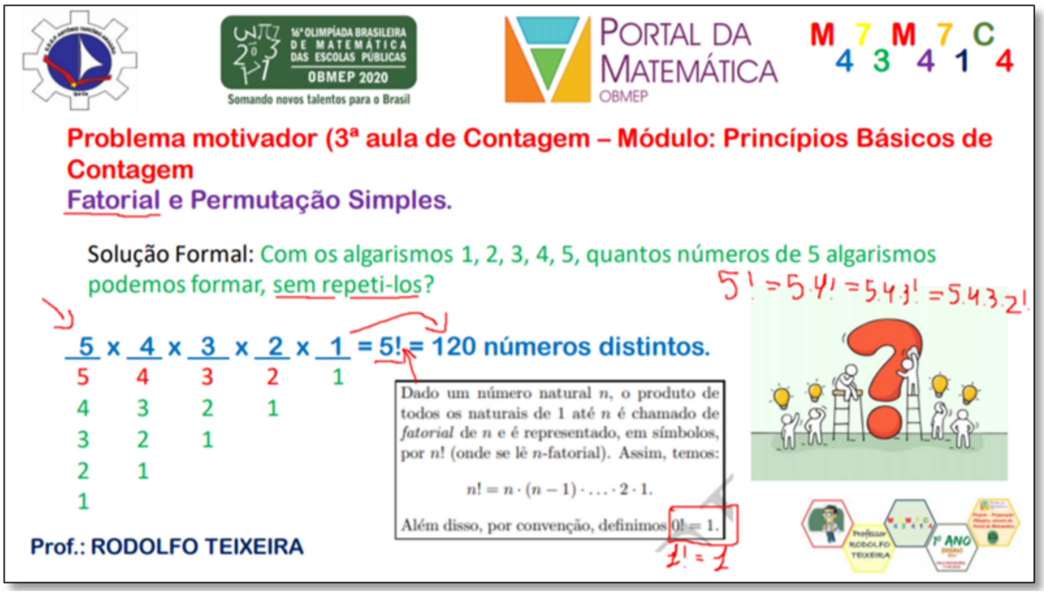
Figura 5.51: Problema Motivador II (Solução Apresentada pelos Alunos) - Módulo: Princípios Básicos de Contagem

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Podemos notar que este aluno embora ainda não tendo adquirido conhecimentos sobre fatorial e permutação simples, conseguiu solucionar o problema motivador usando seus conhecimentos sobre Princípio Fundamental da Contagem visto na aula anterior, e respeitando os critérios apresentados no enunciado.

Diante dessa solução e outras semelhantes apresentadas, iniciou-se a construção da solução formal do problema motivador. Observemos a seguir:

Figura 5.52: Problema Motivador II (Solução Formal) - Módulo: Princípios Básicos de Contagem

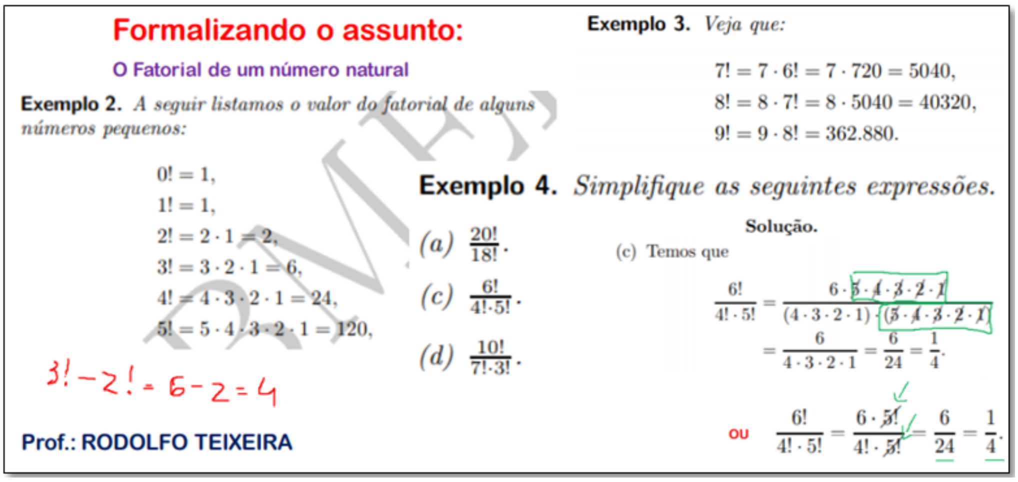


Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

A partir do princípio multiplicativo (PFC) e da restrição de não poder permutar algarismos iguais imposta pelo problema, foi desenvolvida a solução; além disso a mesma apresentou-se nos moldes da definição para o fatorial de um número natural, sendo possível abordar o seu conceito, variações e casos particulares.

Alguns exemplos extraídos da seção permutação simples foram usados para melhor compreensão do assunto. Observemos:

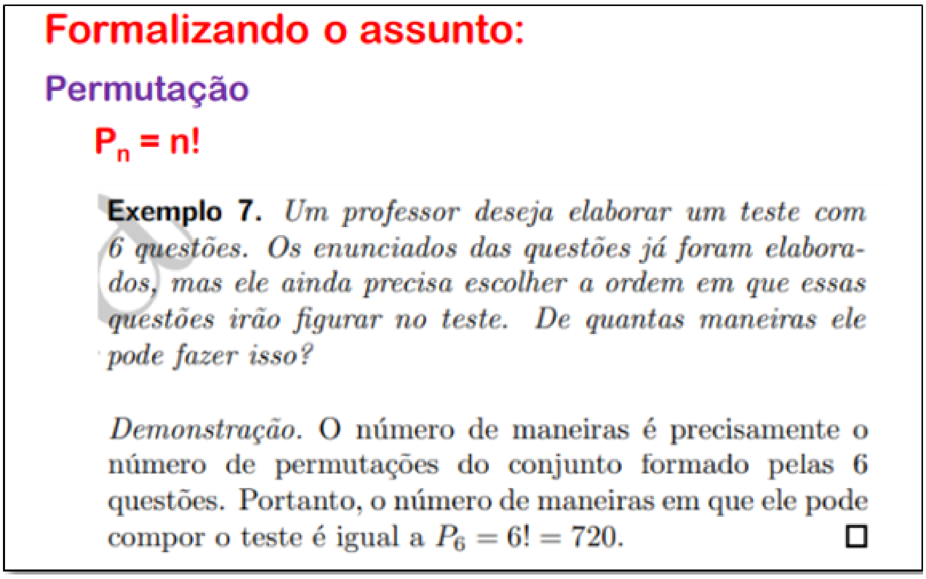
Figura 5.53: Fatorial (Exemplos) - Módulo: Princípios Básicos de Contagem



Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Com o conceito de fatorial bem definido e compreendido, foi possível complementar os estudos apresentando a ideia de permutação. Para isso, fizemos uso do exemplo a seguir retirado da seção permutação simples deste módulo.

Figura 5.54: Permutação (Problema Motivador) - Módulo: Princípios Básicos de Contagem



Formalizando o assunto:

Permutação

$P_n = n!$

Exemplo 7. *Um professor deseja elaborar um teste com 6 questões. Os enunciados das questões já foram elaborados, mas ele ainda precisa escolher a ordem em que essas questões irão figurar no teste. De quantas maneiras ele pode fazer isso?*

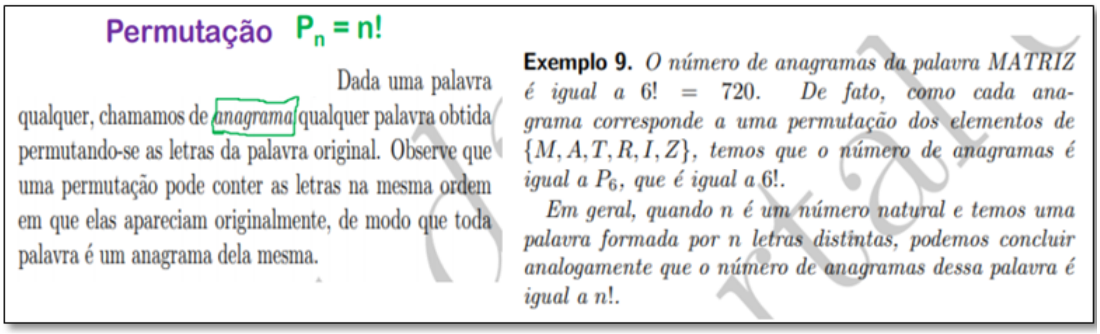
Demonstração. O número de maneiras é precisamente o número de permutações do conjunto formado pelas 6 questões. Portanto, o número de maneiras em que ele pode compor o teste é igual a $P_6 = 6! = 720$. □

Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

O estudo de Permutação nos permitiu aumentar o rol de situações onde podemos explorar o assunto, uma delas foi trabalhar com problemas que envolvessem anagramas.

Observemos a partir do material teórico desta seção, o conceito e um problema motivador, apresentados para o estudo de anagramas.

Figura 5.55: Anagramas (Conceito e Exemplo) - Módulo: Princípios Básicos de Contagem



Permutação $P_n = n!$

Dada uma palavra qualquer, chamamos de *anagrama* qualquer palavra obtida permutando-se as letras da palavra original. Observe que uma permutação pode conter as letras na mesma ordem em que elas apareciam originalmente, de modo que toda palavra é um anagrama dela mesma.

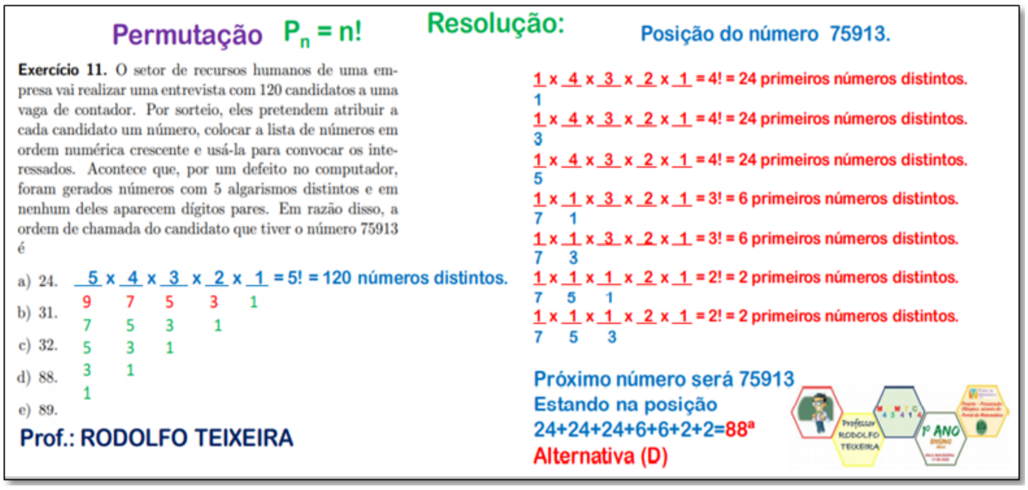
Exemplo 9. *O número de anagramas da palavra MATRIZ é igual a $6! = 720$. De fato, como cada anagrama corresponde a uma permutação dos elementos de $\{M, A, T, R, I, Z\}$, temos que o número de anagramas é igual a P_6, que é igual a $6!$.*

Em geral, quando n é um número natural e temos uma palavra formada por n letras distintas, podemos concluir analogamente que o número de anagramas dessa palavra é igual a $n!$.

Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Além do exemplo apresentado sobre anagramas, outros também foram trabalhados, explorando casos com restrições, bem como alguns exercícios envolvendo posicionamento, como podemos acompanhar a seguir:

Figura 5.56: Permutação (Exercícios) - Módulo: Princípios Básicos de Contagem

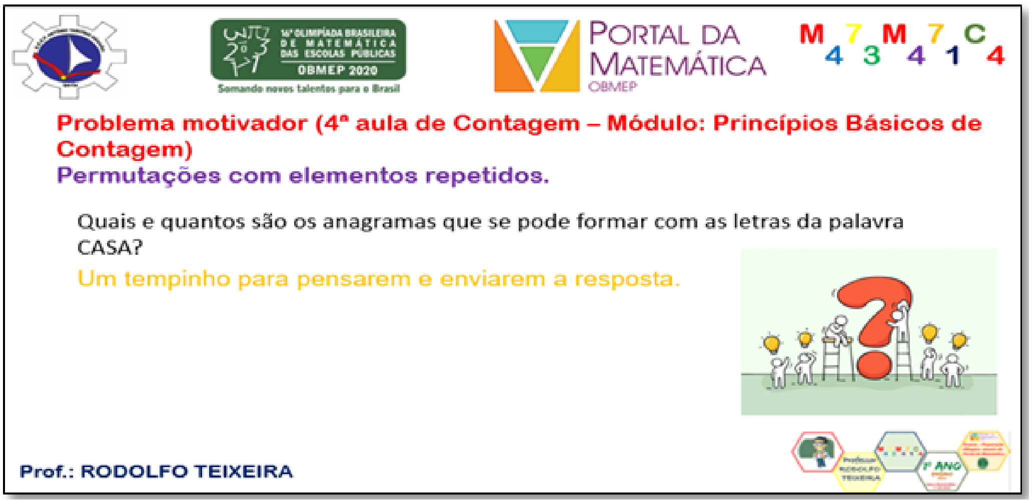


Fonte: Caderno de Exercícios - Portal da Matemática.

Para finalizar a seção ficaram mais algumas sugestões de aprofundamento do assunto no Portal da Matemática através de: vídeo aulas (5 vídeos), exercícios resolvidos (11 vídeos) e material teórico.

Dando continuidade ao módulo de Princípios Básicos de Contagem, iniciamos a seção Permutação com Repetição. Assim como nos encontros até aqui, abordamos um problema motivador extraído do material teórico desta seção, para introduzir o assunto.

Figura 5.57: Problema Motivador III - Módulo: Princípios Básicos de Contagem

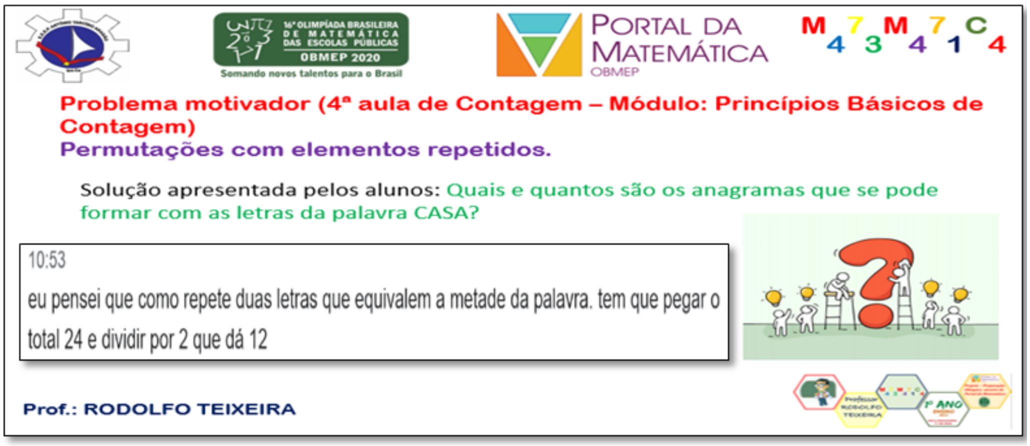


Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Semelhante aos encontros anteriores, os alunos tiveram um tempo disponível para elaborarem suas estratégias e métodos de resolução e na sequência iniciamos as exposições das ideias construídas.

Acompanhemos uma das soluções apresentadas pelos alunos:

Figura 5.58: Problema Motivador III (Solução Apresentada pelos Alunos) - Módulo: Princípios Básicos de Contagem



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Após o aluno A20 apresentar a sua solução, argumentou verbalmente que de maneira inicial considerou a permutação das 4 letras da palavra CASA e notou que como haviam duas letras repetidas, teria a possibilidade de serem formados anagramas repetidos, em que o número de letras repetidas representava a metade do número total de letras, e então, efetuou a divisão do resultado da permutação de 4 letras por 2.

Analisando o que foi apresentado por escrito e verbalmente, verificamos que embora o aluno não tendo conhecimentos sobre o assunto de Permutação com Repetição foi capaz de expor uma linha de resolução e raciocínio bastante coerente com o que deveria ser apresentado para o problema motivador.

Dando andamento aos estudos, construímos a solução formal para o problema proposto.

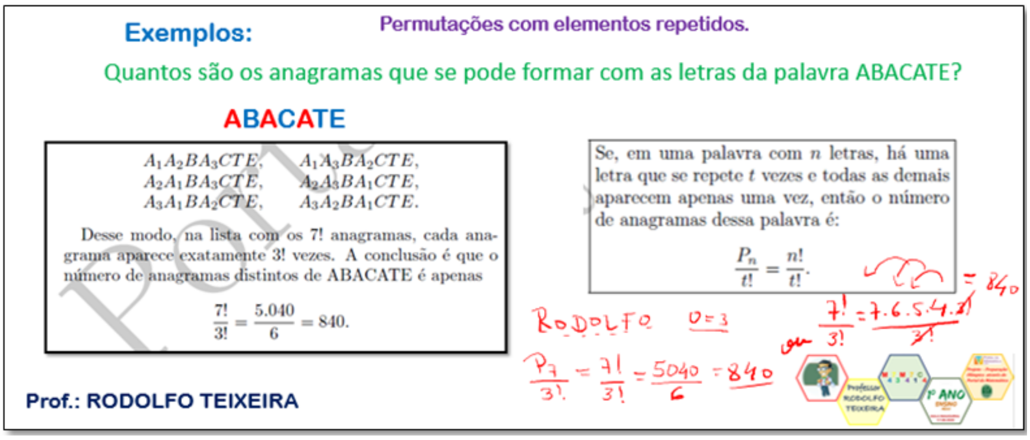
Figura 5.59: Problema Motivador III (Solução Formal) - Módulo: Princípios Básicos de Contagem

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Como o problema pedia quais e quantos eram os anagramas que se podia formar com as letras da palavra CASA, de início construímos cada um dos 12 anagramas possíveis de serem formados. Todavia, em seguida, foi indagado aos alunos que caso a palavra usada possuísse muitas letras, seria viável e seguro tentar encontrar cada um dos anagramas?

Rapidamente chegaram à conclusão que necessitariam de um maior tempo e atenção para verificar todos os casos possíveis. Com isso, formalizamos o conceito de Permutação com Repetição através de mais alguns exemplos retirados do material teórico desta seção de estudo.

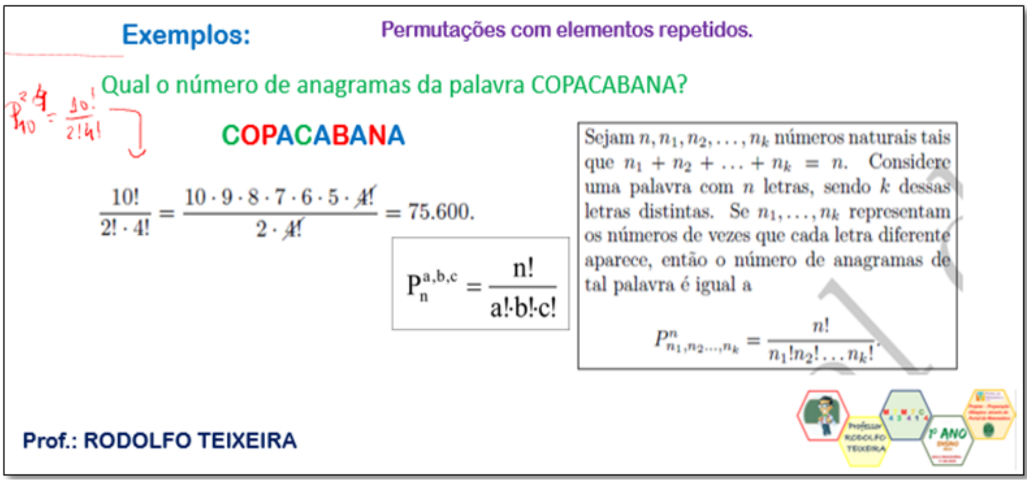
Figura 5.60: Permutação com Repetição (Exemplos e Conceitos I) - Módulo: Princípios Básicos de Contagem



Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Por meio deste exemplo observamos a formalização de uma Permutação com Repetição de uma letra da palavra. Mas, também podemos abordar os casos onde teremos mais de uma letra se repetindo, acompanhemos atentamente o próximo exemplo:

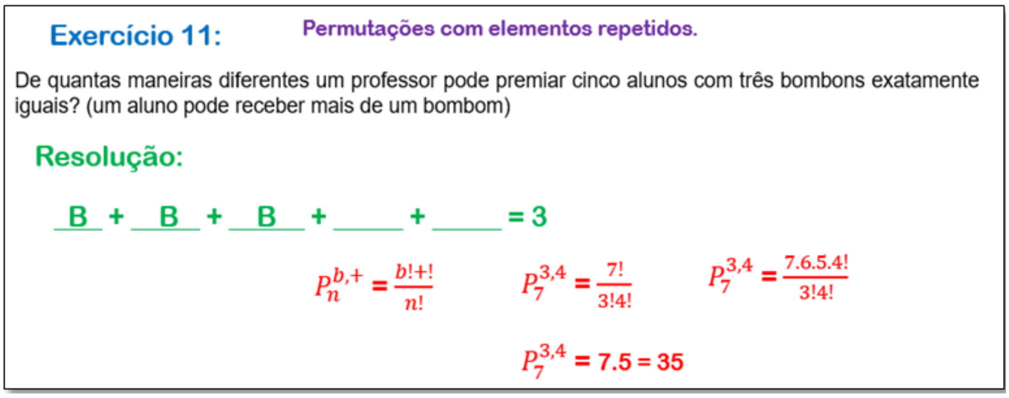
Figura 5.61: Permutação com Repetição (Exemplos e Conceitos II) - Módulo: Princípios Básicos de Contagem



Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Como forma de complementar o assunto e sanar as dúvidas presentes, trabalhamos alguns exercícios capitados do caderno de exercícios desta seção e selecionamos um dos que foram utilizados para ser analisado.

Figura 5.62: Permutação com Repetição (Exercícios) - Módulo: Princípios Básicos de Contagem



Fonte: Caderno de Exercícios - Portal da Matemática.

Finalizando esta seção, algumas sugestões de complementação e aprofundamento de estudos foram propostas no Portal da Matemática, entre elas: vídeoaulas (2 vídeos), exercícios resolvidos (4 vídeos) e material teórico para baixar e reforçar o que foi discutido.

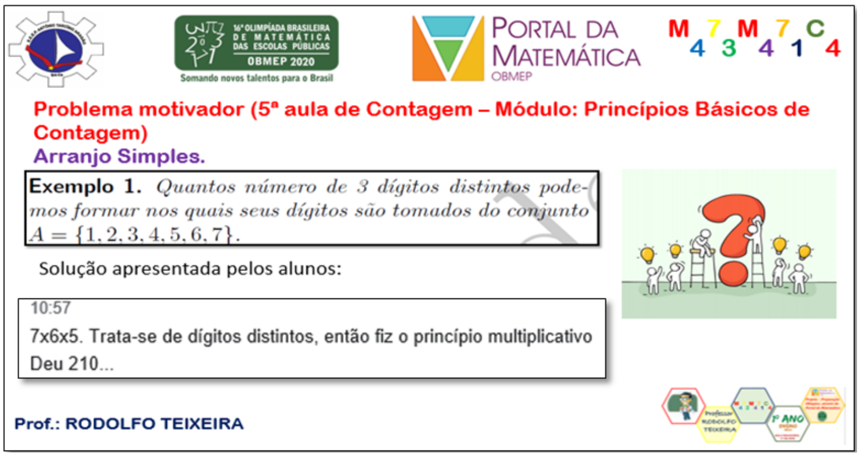
Excepcionalmente para este módulo Princípios Básicos de Contagem, houve a necessidade de ser utilizada uma 3ª semana. Assim, iniciamos a exploração da seção Combinação propondo o seguinte problema motivador - retirado do material teórico desta seção:

Figura 5.63: Problema Motivador IV - Módulo: Princípios Básicos de Contagem

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Depois de um tempo para os alunos montarem suas ideias de resolução, começamos a discutir as possíveis formas de solucionar o problema apresentado. Algumas soluções chamaram bastante a atenção, principalmente as que os estudantes buscaram fazer uso de recursos já vistos neste módulo de estudo. Uma dessas soluções iremos analisar a seguir:

Figura 5.64: Problema Motivador IV (Solução Apresentada pelos Alunos) - Módulo: Princípios Básicos de Contagem

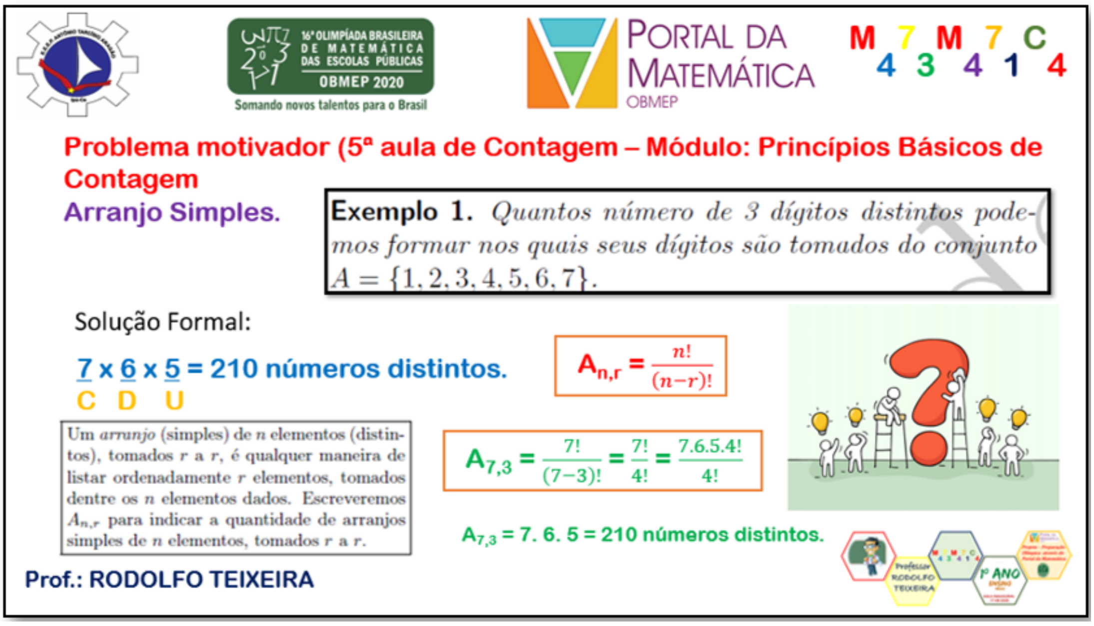


Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Observando a solução apresentada pelo o aluno A36, verificamos que sua resolução foi estruturada a partir do princípio multiplicativo - um assunto visto em seção anterior - o que possibilita ao estudante não só aprender informações novas, mas também solucionar o problema com os conhecimentos já adquiridos.

Na sequência do encontro buscamos formalizar os conceitos de arranjo simples. Vejamos:

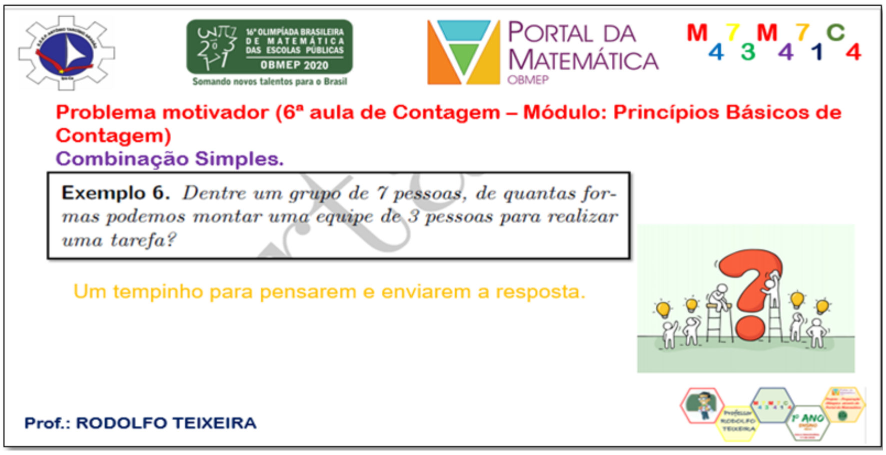
Figura 5.65: Problema Motivador IV (Solução Formal) - Módulo: Princípios Básicos de Contagem



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Mais alguns exemplos foram debatidos com os alunos e, no encontro seguinte, o estudo da seção teve continuidade abordando o assunto de Combinação por meio do problema motivador a seguir - extraído do material teórico desta seção.

Figura 5.66: Problema Motivador V - Módulo: Princípios Básicos de Contagem

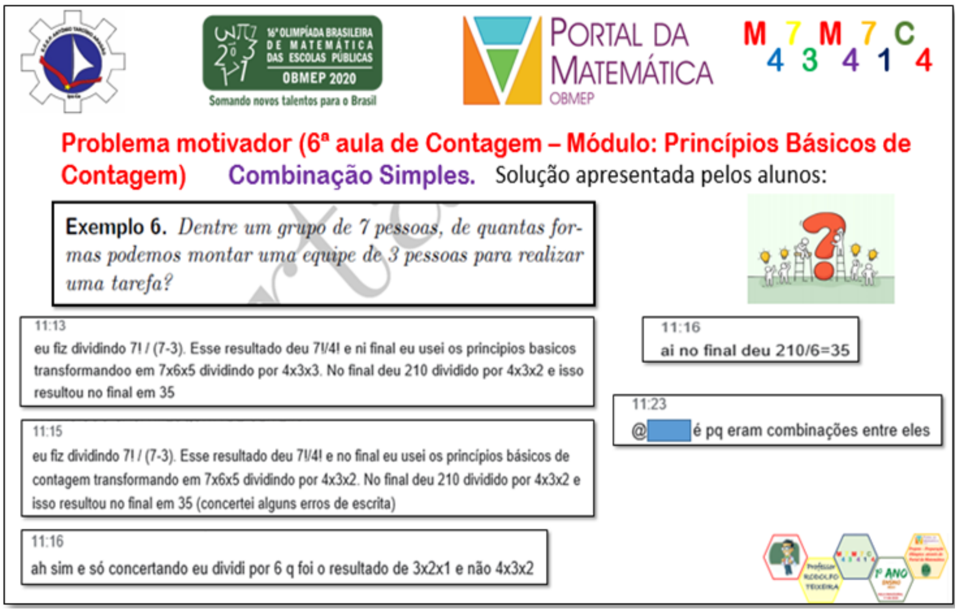


Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Conforme em outros momentos, os alunos tiveram um tempo para organizarem suas ideias e construírem seus modelos de resolução; logo após, o espaço foi aberto para que pudessem explanar a linha de raciocínio que seguiram em suas soluções.

Observemos a solução apresentada pelo o aluno A20:

Figura 5.67: Problema Motivador V (Solução Apresentada pelos Alunos) - Módulo: Princípios Básicos de Contagem



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Analisando a solução apresentada pelo aluno, observamos que embora existam alguns pequenos erros presentes, o mesmo teve o cuidado de justificar e argumentar bem,

- através de sua escrita - rever a sua solução e buscar corrigir alguns erros; não somente aplicando os conceitos vistos anteriormente sobre arranjo simples, mas também notando que ocorreriam combinações entre as 3 pessoas que formariam a equipe, sendo necessário desconsiderar esses resultados, daí justificando o porque de ter dividido 210 por 6, chegando na conclusão de 35 maneiras distintas de formar uma equipe.

Foi interessante acompanhar nesta solução, o cuidado que este aluno teve em esclarecer bem para seus colegas a linha de raciocínio que foi montando ao longo da sua solução.

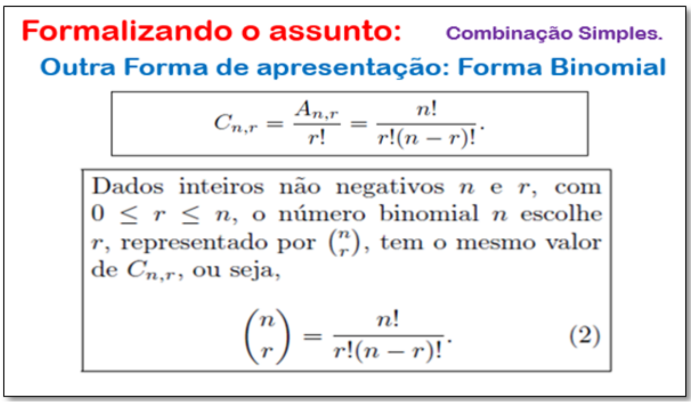
Visto isso, deu-se início a construção da solução formal do problema motivador.

Figura 5.68: Problema Motivador V (Solução Formal) - Módulo: Princípios Básicos de Contagem

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Como complementação da formalização do assunto de Combinação mostramos a forma binomial - outro meio de organizar uma Combinação. Observemos a seguir o trecho retirado do material teórico da seção de estudo:

Figura 5.69: Combinação (Formal Binomial) - Módulo: Princípios Básicos de Contagem

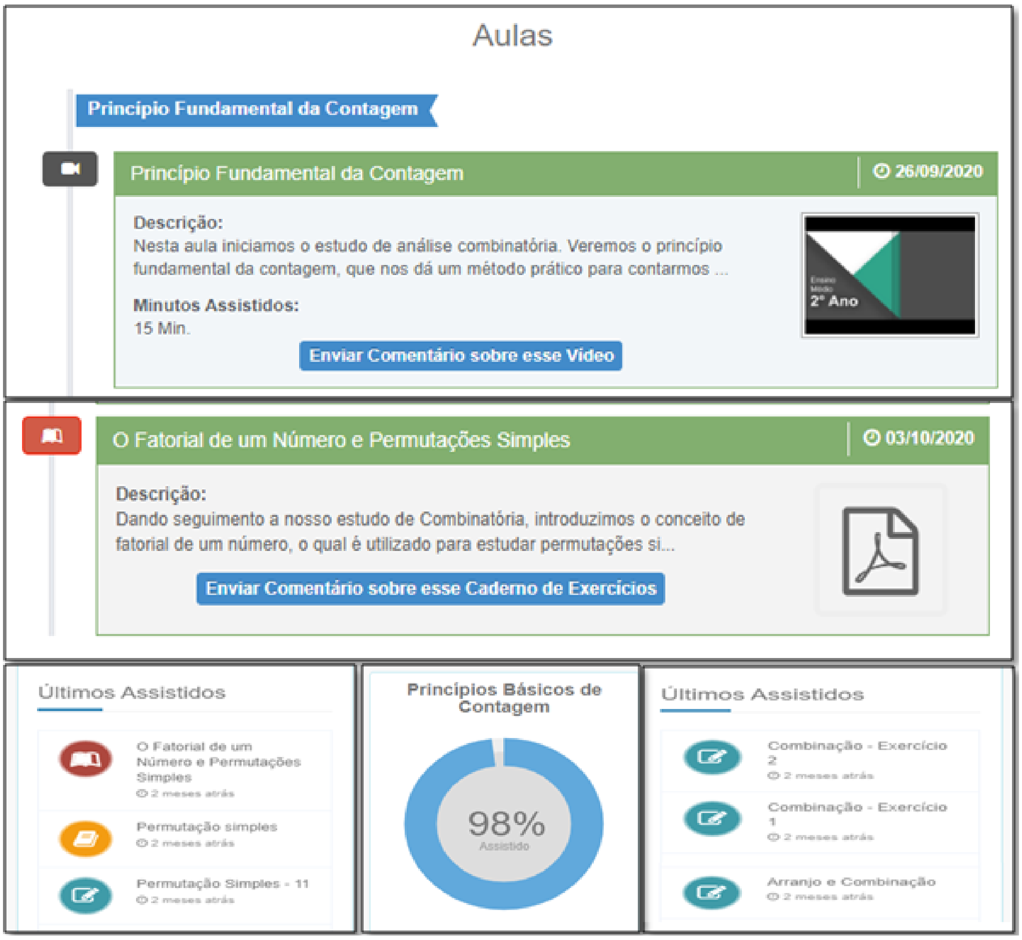


Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

No decorrer do encontro outros exemplos e exercícios foram propostos, debatidos e solucionados, além de ao final desta seção ficarem algumas sugestões para aprofundamento e complementação dos estudos, como: vídeoaulas (10 vídeos), exercícios resolvidos (7 vídeos) e o material teórico para ser baixado, contendo na íntegra tudo que foi apresentado no encontro.

Vejamos o acompanhamento da 1ª etapa do progresso dos alunos no Portal da Matemática neste módulo de Princípios Básicos de Contagem:

Figura 5.70: Acompanhamento do Progresso dos Alunos 1ª Etapa - Módulo: Princípios Básicos de Contagem

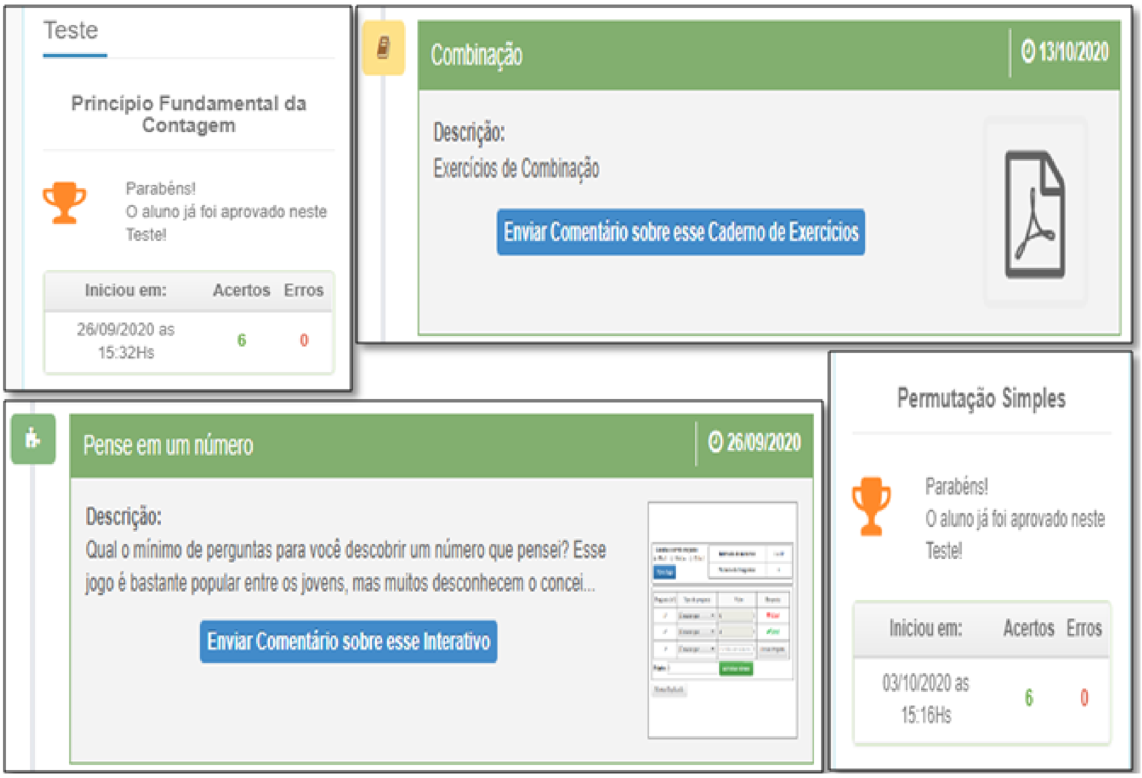


Fonte: Progresso no Módulo - Portal da Matemática.

Com a conclusão das seções deste módulo de estudo, os alunos puderam disfrutar também dos aplicativos, cadernos de exercícios e testes que cada uma das seções possui, servindo para reforço e prática de seus conhecimentos, além da avaliação geral, que propiciava a aquisição de um certificado, caso obtivessem um bom desempenho.

Acompanhemos a 2ª etapa do progresso dos alunos no Portal da Matemática neste módulo de Princípios Básicos de Contagem:

Figura 5.71: Acompanhamento do Progresso dos Alunos 2ª Etapa - Módulo: Princípios Básicos de Contagem



Fonte: Progresso no Módulo - Portal da Matemática.

5.9.4 Módulo: Introdução à Probabilidade

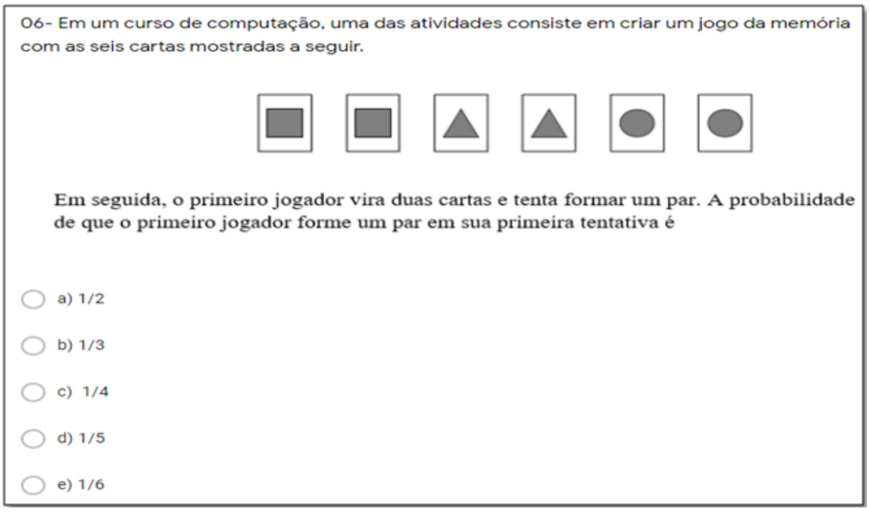
Iniciamos este último módulo trabalhado da área de Contagem semelhante aos demais, acolhendo os alunos na plataforma Google Meet com uma mensagem de otimismo e receptividade.

O módulo Introdução à Probabilidade se encontra localizado no Portal da Matemática na série do 2º ano do ensino médio.

Para introduzir o assunto, selecionamos a questão 6 do teste inicial - aplicado com os alunos - como sendo o nosso problema motivador.

Vejamos a seguir:

Figura 5.72: Problema Motivador - Módulo: Introdução à Probabilidade


06- Em um curso de computação, uma das atividades consiste em criar um jogo da memória com as seis cartas mostradas a seguir.

Em seguida, o primeiro jogador vira duas cartas e tenta formar um par. A probabilidade de que o primeiro jogador forme um par em sua primeira tentativa é

a) 1/2

b) 1/3

c) 1/4

d) 1/5

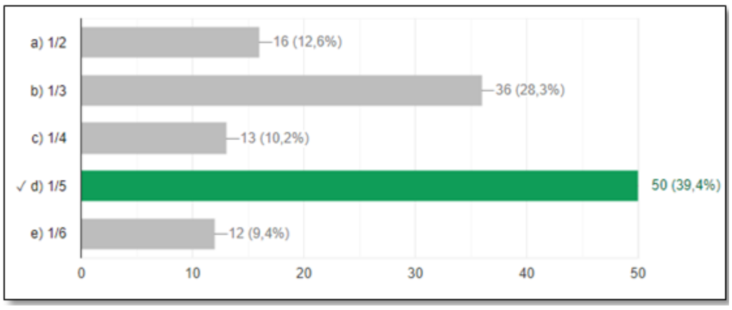
e) 1/6

Fonte: Caderno de Exercícios - Portal da Matemática.

Assim como ocorreu em um módulo já trabalhado anteriormente, por tratar-se de um problema que constava no Teste Inicial, alguns alunos recordaram da questão e não necessitaram do tempo disponível para desenvolverem a sua resolução do problema, apenas recorreram as suas anotações e aguardaram os colegas concluírem ou refizeram o caminho das suas soluções, enquanto que os demais que não lembraram de como haviam raciocinado o problema, buscaram novamente compreendê-lo e construir o raciocínio e caminho de suas soluções.

Após o tempo destinado para organizarem suas ideias, iniciamos mostrando como ficou a distribuição das respostas de todos os alunos que participaram do teste inicial. Acompanhemos:

Figura 5.73: Problema Motivador (Resultado do Teste Inicial - Problema 6) - Módulo: Introdução à Probabilidade



Fonte: Google Forms.

Podemos observar que embora a alternativa correta tenha sido a opção mais marcada pelos alunos que participaram do teste, a porcentagem de acertos deste problema não chegou a 40% dos alunos que realizaram o teste, o que mostra o nível de dificuldade que os mesmos encontraram para compreender o enunciado e aplicar corretamente alguma linha de raciocínio.

Analisaremos a seguir duas soluções apresentadas no chat do encontro pelos alunos e suas respectivas argumentações.

Figura 5.74: Problema Motivador (Solução Apresentada pelos Alunos) - Módulo: Introdução à Probabilidade

Problema Motivador - Solução apresentada pelos alunos

Solução apresentada pelo o aluno A41.

11:14
eu coloquei 1/5 pq são 6 cartas de seis e ao revelar 1 carta vc tem 5 chances de tirar a mesma

Solução apresentada pelo o aluno A20.

11:12
1/3 pq de 6 cartas ao todo existe apenas um par correspondente

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Observemos que a diferença entre o aluno que acertou e o que errou está na interpretação do problema, algo muito importante dentro de questões olímpicas. Neste caso, virar a primeira carta não influenciaria na probabilidade, mas retirar a próxima carta semelhante a primeira, essa sim nos induz a buscar esta probabilidade. Vejamos a solução formal apresentada para o problema motivador - extraída do caderno de exercícios da seção "o que é probabilidade?" - deste módulo de estudo.

Figura 5.75: Problema Motivador (Solução Formal) - Módulo: Introdução à Probabilidade

06- Em um curso de computação, uma das atividades consiste em criar um jogo da memória com as seis cartas mostradas a seguir.

Em seguida, o primeiro jogador vira duas cartas e tenta formar um par. A probabilidade de que o primeiro jogador forme um par em sua primeira tentativa é

a) 1/2
b) 1/3
c) 1/4
d) 1/5
e) 1/6

Após virar a primeira carta virada, o primeiro jogador precisa formar um par entre as cinco cartas restantes. A probabilidade disso é $\frac{1}{5}$, e a resposta está na letra **D**.

Fonte: Caderno de Exercícios - Portal da Matemática.

Dando continuidade ao assunto, formalizamos os conceitos de probabilidade abordando inicialmente o que seria um experimento aleatório, e alguns exemplos retirados do material teórico desta seção.

Figura 5.76: Probabilidade - Conceitos I - Módulo: Introdução à Probabilidade

- **Experimento aleatório:** é qualquer experimento cujo resultado não se consegue prever.

✓ **Exemplos:**

(a) Lançar uma moeda e observar sua face virada para cima.

(b) Lançar um dado e observar sua face virada para cima.

(c) Sortear uma carta de baralho e observar o seu naipe.

Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Após uma explanação sobre experimento aleatório, seguimos o assunto apresentando o conceito de espaço amostral, o que podemos acompanhar a seguir:

Figura 5.77: Probabilidade - Conceitos II - Módulo: Introdução à Probabilidade

- **Espaço amostral** => **Representado pela letra grega Ω (lê-se ômega) :** é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

✓ **Exemplos:**

(a) $\Omega = \{K, C\}$ como espaço amostral relativo ao experimento aleatório de lançamento de uma moeda: Aqui usamos K para representar 'Cara', e C representar 'Coroa'.

(b) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ como espaço amostral para o lançamento de um dado de seis faces.

(c) $\Omega = \{\text{Ouros, Copas, Espadas, Paus}\}$ como espaço amostral relativo ao sorteio de uma carta de baralho.

Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Sendo o espaço amostral formado pelo conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, complementamos o conceito de probabilidade representando que dentro do espaço amostral é possível gerar o conjunto de todos os resultados favoráveis em um experimento aleatório, denominado de evento. Acompanhemos atentamente o conceito e exemplos, extraídos do material teórico da seção de estudo.

Figura 5.78: Probabilidade - Conceitos III - Módulo: Introdução à Probabilidade

- **Evento:** é um subconjunto qualquer do espaço amostral.

✓ **Exemplos:**

(a) Em relação ao lançamento da moeda, o evento 'ocorrer cara' corresponde ao conjunto $\{K\}$.

(b) Em relação ao lançamento de um dado de seis faces, o evento 'ocorrer um número primo' corresponde ao conjunto $\{2, 3, 5\}$.

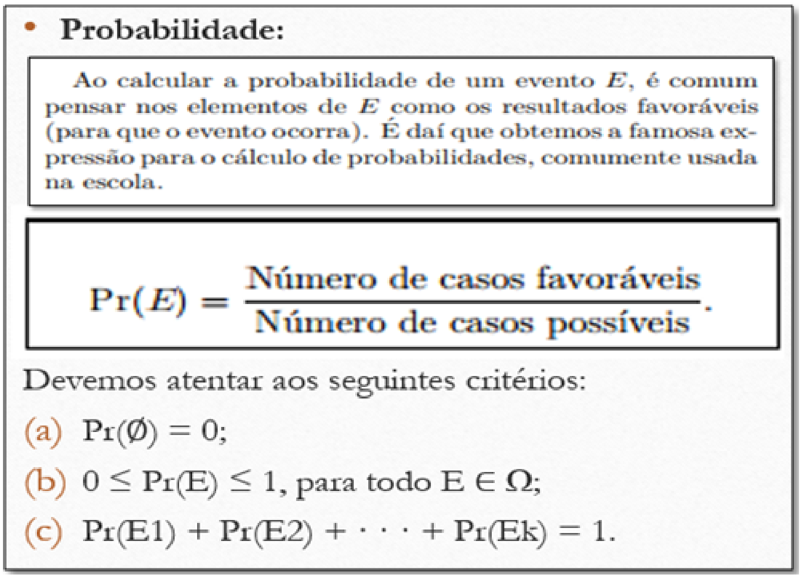
(c) Em relação sorteio de um a carta de baralho, o evento 'ocorrer um naipe vermelho' corresponde ao conjunto $\{\text{Ouros, Copas}\}$.

❖ **Obs:** Evento simples (ou unitário, ou elementar) é um evento formado por um único elemento do espaço amostral.

Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Tendo os conceitos bem claros a respeito de experimento aleatório, espaço amostral e evento, apresentamos a expressão usada para calcular a probabilidade de um determinado evento E, bem como os critérios que devem ser atentados. Observemos o trecho retirado do material teórico desta seção que trata sobre este assunto:

Figura 5.79: Probabilidade - Conceitos IV - Módulo: Introdução à Probabilidade



• **Probabilidade:**

Ao calcular a probabilidade de um evento E, é comum pensar nos elementos de E como os resultados favoráveis (para que o evento ocorra). É daí que obtemos a famosa expressão para o cálculo de probabilidades, comumente usada na escola.

$$\Pr(E) = \frac{\text{Número de casos favoráveis}}{\text{Número de casos possíveis}}.$$

Devemos atentar aos seguintes critérios:

(a) $\Pr(\emptyset) = 0$;

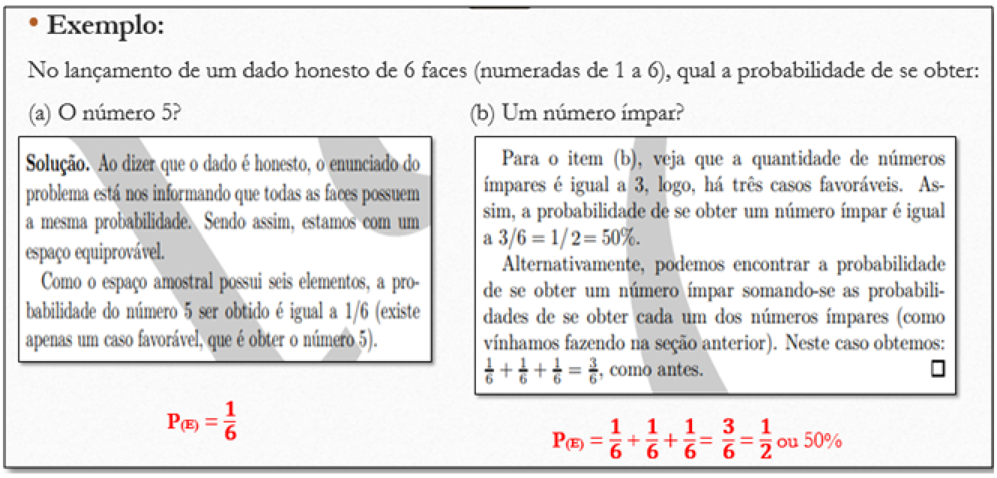
(b) $0 \leq \Pr(E) \leq 1$, para todo $E \in \Omega$;

(c) $\Pr(E1) + \Pr(E2) + \cdots + \Pr(Ek) = 1$.

Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Na continuidade do encontro alguns exemplos foram trabalhados e selecionamos um deles para ser apresentado. Vejamos:

Figura 5.80: Probabilidade (Exemplo) - Módulo: Introdução à Probabilidade



• **Exemplo:**

No lançamento de um dado honesto de 6 faces (numeradas de 1 a 6), qual a probabilidade de se obter:

(a) O número 5?

Solução. Ao dizer que o dado é honesto, o enunciado do problema está nos informando que todas as faces possuem a mesma probabilidade. Sendo assim, estamos com um espaço equiprovável.

Como o espaço amostral possui seis elementos, a probabilidade do número 5 ser obtido é igual a 1/6 (existe apenas um caso favorável, que é obter o número 5).

$P_{(E)} = \frac{1}{6}$

(b) Um número ímpar?

Para o item (b), veja que a quantidade de números ímpares é igual a 3, logo, há três casos favoráveis. Assim, a probabilidade de se obter um número ímpar é igual a $3/6 = 1/2 = 50\%$.

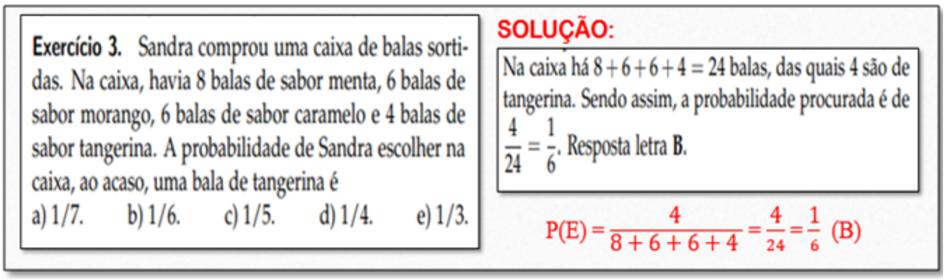
Alternativamente, podemos encontrar a probabilidade de se obter um número ímpar somando-se as probabilidades de se obter cada um dos números ímpares (como vínhamos fazendo na seção anterior). Neste caso obtemos: $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$, como antes. □

$P_{(E)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ou 50%

Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Além dos exemplos trabalhados, exercícios presentes no caderno de exercícios desta seção também foram usados para complementar a explicação do assunto e sanar dúvidas ainda existentes. Separamos o exercício 3 desta seção de estudo para analisarmos:

Figura 5.81: Probabilidade (Exercício) - Módulo: Introdução à Probabilidade



Exercício 3. Sandra comprou uma caixa de balas sortidas. Na caixa, havia 8 balas de sabor menta, 6 balas de sabor morango, 6 balas de sabor caramelo e 4 balas de sabor tangerina. A probabilidade de Sandra escolher na caixa, ao acaso, uma bala de tangerina é

a) 1/7. b) 1/6. c) 1/5. d) 1/4. e) 1/3.

SOLUÇÃO:

Na caixa há $8+6+6+4=24$ balas, das quais 4 são de tangerina. Sendo assim, a probabilidade procurada é de $\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$. Resposta letra **B**.

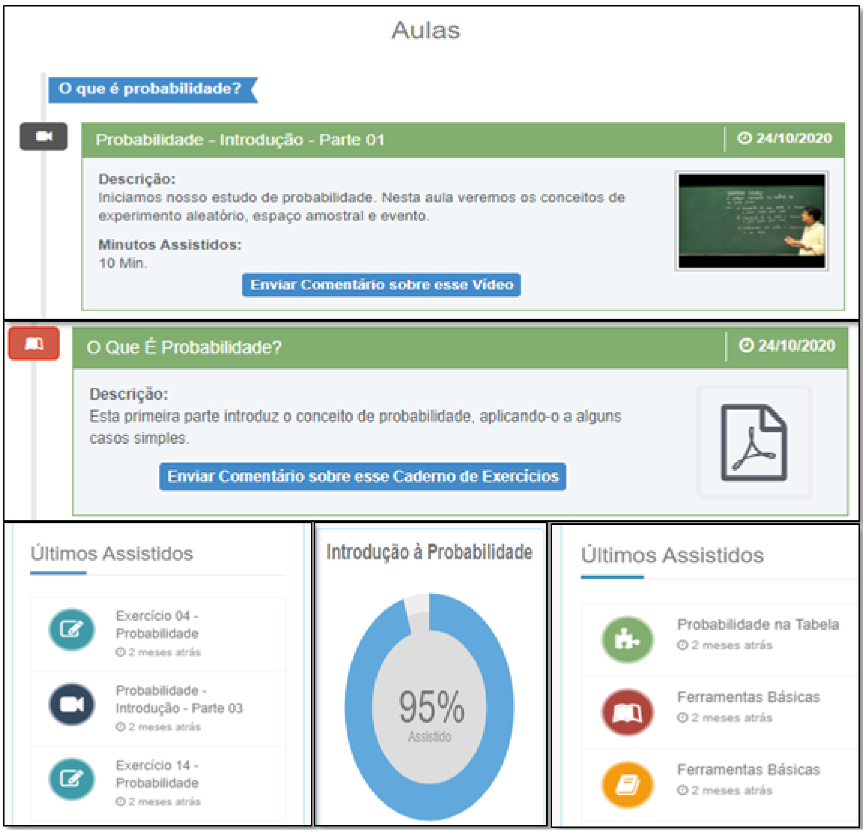
$$P(E)=\frac{4}{8+6+6+4}=\frac{4}{24}=\frac{1}{6} \text{ (B)}$$

Fonte: Caderno de Exercícios - Portal da Matemática.

Concluída a exposição dos conceitos, exemplos e exercícios sobre o módulo Introdução à Probabilidade - como forma de complementação dos estudos e aprofundamento dos assuntos trabalhados - algumas sugestões foram propostas no Portal da Matemática na seção O que é Probabilidade?, tais como: vídeo aulas (7 vídeos), material teórico e caderno de exercícios para baixar, aplicativos para jogarem, além dos testes e avaliação geral para avaliarem seus conhecimentos adquiridos.

Podemos acompanhar a seguir exemplos do progresso dos alunos neste módulo estudado.

Figura 5.82: Acompanhamento do Progresso dos Alunos 1ª Etapa - Módulo: Introdução à Probabilidade



Fonte: Progresso no Módulo - Portal da Matemática.

Neste primeiro acompanhamento, notamos a variedade de ambientes que os alunos puderam usufruir e qualificar seus conhecimentos adquiridos durante os encontros.

Figura 5.83: Acompanhamento do Progresso dos Alunos 2ª Etapa - Módulo: Introdução à Probabilidade

Fonte: Progresso no Módulo - Portal da Matemática.

Observando a 2ª etapa de acompanhamento do progresso dos alunos, verificamos exemplos da exploração do restante dos ambientes disponíveis deste módulo, através dos aplicativos interativos, cadernos de exercícios, testes e avaliação geral.

Vale ressaltar que como a organização do projeto distribuiu um prazo de 1 mês para cada uma das áreas de conhecimentos (Aritmética, Contagem e Geometria), dentro dos estudos para a área de Contagem ficou distribuído o período de 3 semanas para o módulo de princípios básicos de contagem e 1 semana para o módulo introdução à probabilidade, sendo este trabalhado apenas a 1ª seção - O que é probabilidade? - e ficando a 2ª seção - Ferramentas básicas - como sugestão de estudos, sem a obrigatoriedade dos alunos explorarem os ambientes neste período do projeto e com uma possível continuidade desta preparação podermos contemplar este estudo futuramente.

No entanto, analisando a 1ª etapa do acompanhamento, observamos que tivemos alunos fazendo uso dos ambientes da seção Ferramentas Básicas, como também na 2ª etapa de acompanhamento notamos alunos concluindo a avaliação geral do módulo, e mesmo após o final do período do projeto, buscando conhecimentos para obter o certificado do módulo.

5.9.5 Módulo: Áreas de Figuras Planas

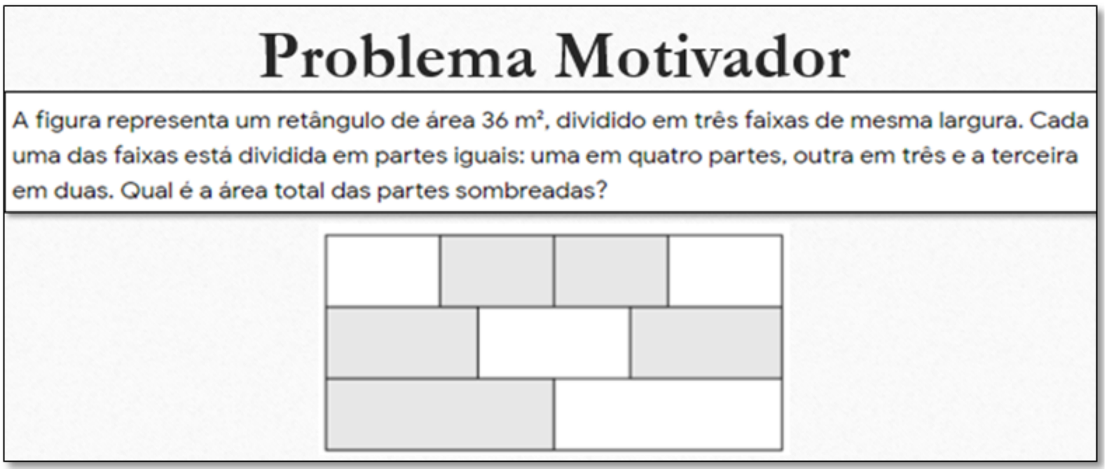
Iniciamos o último módulo do projeto acolhendo os alunos através da plataforma Google Meet com uma mensagem de agradecimento a cada aluno por continuar e abraçar esta preparação com dedicação e compromisso.

O módulo que iremos trabalhar é intitulado de Áreas de Figuras Planas e encontra-se localizado no Portal da Matemática na série do 9º ano do ensino fundamental II. É dividido em 3 seções, sendo as duas primeiras de teoria e a última de exercícios da OBMEP.

Tentaremos abordar os principais temas e os mais fundamentais dentro do estudo de Áreas, contemplados pelas seções deste módulo.

De maneira introdutória, apresentamos um problema motivador, utilizado no teste inicial do projeto e presente no material teórico da seção exercícios da OBMEP. Vejamos:

Figura 5.84: Problema Motivador I - Módulo: Áreas de Figuras Planas

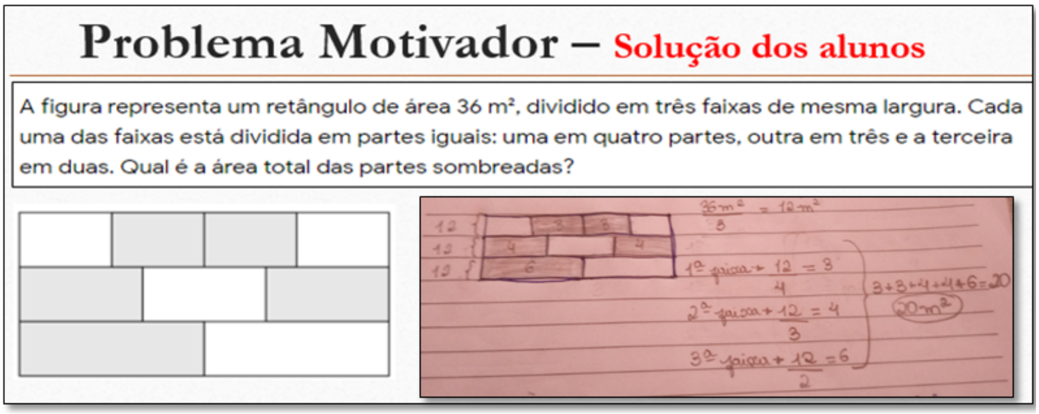


Fonte: Material Teórico (adaptado) - Portal da Matemática.

Semelhante ao ocorrido em outros módulos, por tratar-se de um problema que estava presente no Teste Inicial, alguns alunos recordaram da questão e não necessitaram do tempo disponível para desenvolverem a sua resolução do problema, apenas recorreram as suas anotações e aguardaram os colegas concluírem ou refizeram o caminho das suas soluções, enquanto que os demais que não lembraram de como haviam raciocinado o problema, buscaram novamente compreendê-lo e construir o raciocínio e caminho de suas soluções.

Passado o tempo destinado para organizarem suas ideias, possibilitamos os alunos comentarem as suas soluções e a construção do raciocínio que desenvolveram.

Figura 5.85: Problema Motivador I (Solução Apresentada pelos Alunos) - Módulo: Áreas de Figuras Planas



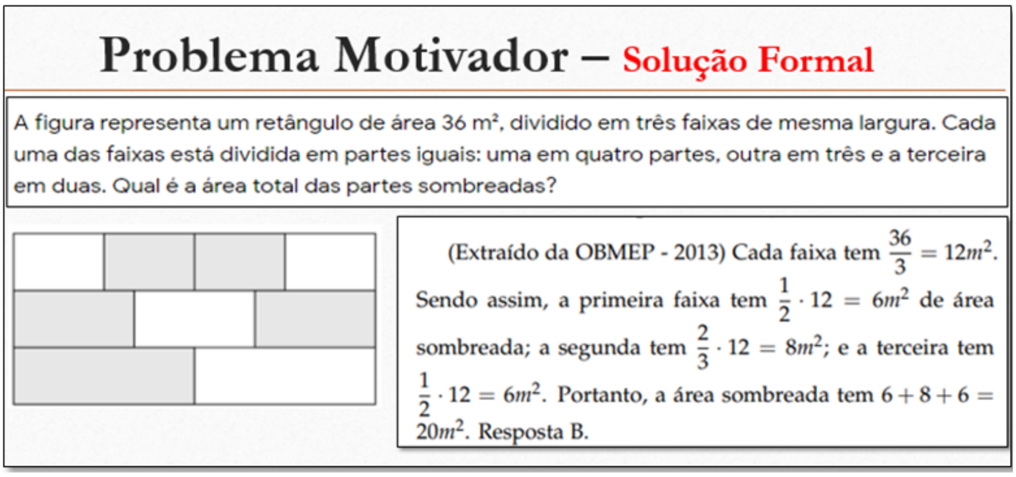
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

A solução que acabamos de ver foi apresentada pelo o aluno A28, que em sua argumentação verbal comentou que inicialmente como o retângulo de área $36m^2$ era dividido em três faixas de mesma largura, efetuou a divisão de 36 por 3, obtendo $12m^2$ para cada faixa. Em seguida, notou que a 1ª faixa foi dividida em quatro partes iguais, gerando $3m^2$ para cada parte, a 2ª faixa dividida em três partes iguais, gerando $4m^2$ para cada parte e por fim, a 3ª faixa dividida em duas partes iguais, gerando $6m^2$ para cada parte.

Como o problema buscava saber a área total das partes sombreadas, somou as áreas das duas partes sombreadas da 1ª faixa, com as áreas das duas partes sombreadas da 2ª faixa e mais a área da parte sombreada da 3ª faixa, concluindo um total de $20m^2$ de área total das partes sombreadas.

Na continuidade do encontro apresentamos a solução formal do problema motivador, relacionando com alguns conceitos de áreas e as soluções expostas pelos alunos.

Figura 5.86: Problema Motivador I (Solução Formal) - Módulo: Áreas de Figuras Planas

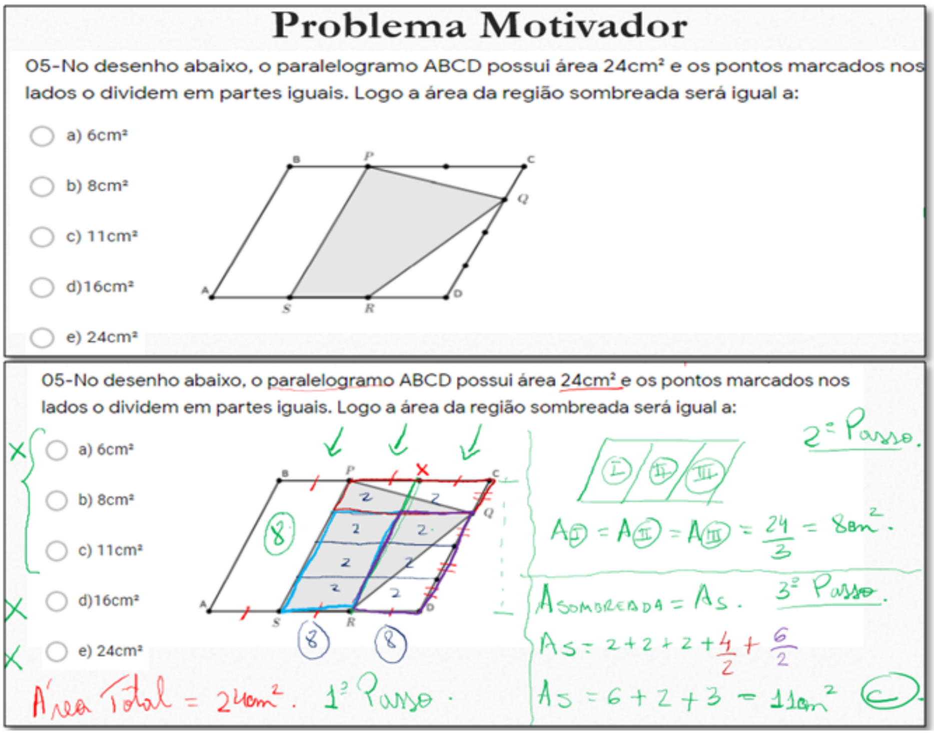


Fonte: Material Teórico (adaptado) - Portal da Matemática.

Complementando a introdução do módulo Áreas de Figuras Planas, mais um problema motivador foi apresentado aos alunos. Porém, dessa vez sua solução foi sendo construída juntamente com os alunos.

Acompanhemos o problema - presente no teste inicial - retirado do material teórico da seção Áreas de Figuras Planas: mais alguns resultados.

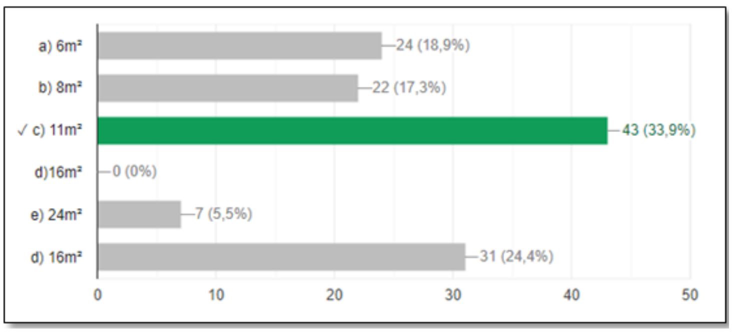
Figura 5.87: Problema Motivador II - Módulo: Áreas de Figuras Planas



Fonte: Material Teórico (adaptado)- Portal da Matemática.

Na continuidade dos estudos apresentamos as respostas marcadas pelos os alunos que participaram do teste inicial, para analisarmos as quantidades e porcentagens de cada item marcado.

Figura 5.88: Resultado do Teste Inicial - Problema 5 - Módulo: Áreas de Figuras Planas

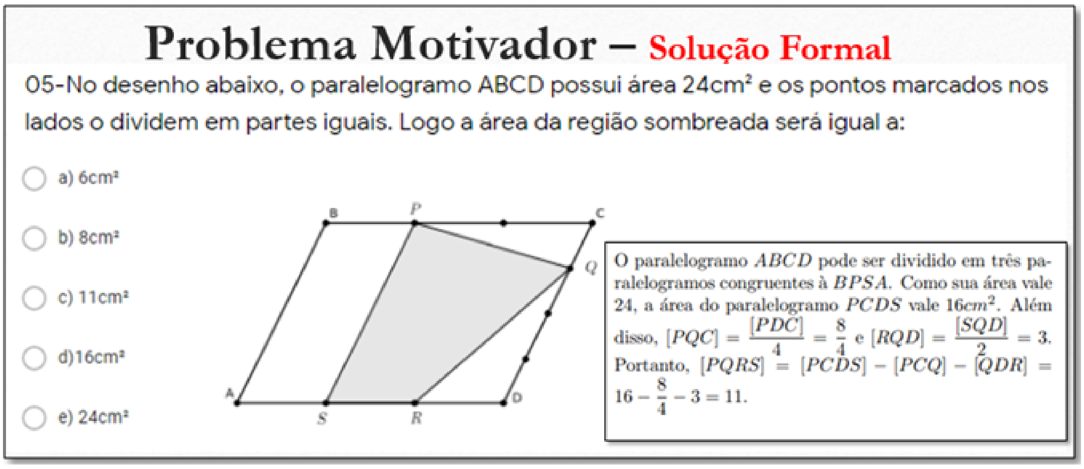


Fonte: Google Forms.

Observando os itens marcados pelos alunos neste problema do teste inicial, percebemos que embora o item correto tenha sido o mais marcado pelos alunos, o mesmo só representou um pouco mais de 30% de todos aqueles que participaram deste teste, e que as marcações ficaram bem distribuídas entre as alternativas, o que deixa perceptível que os estudantes encontraram dificuldades em interpretar e resolver este problema.

Para finalizar a introdução do módulo, apresentamos a solução formal para este problema trabalhado.

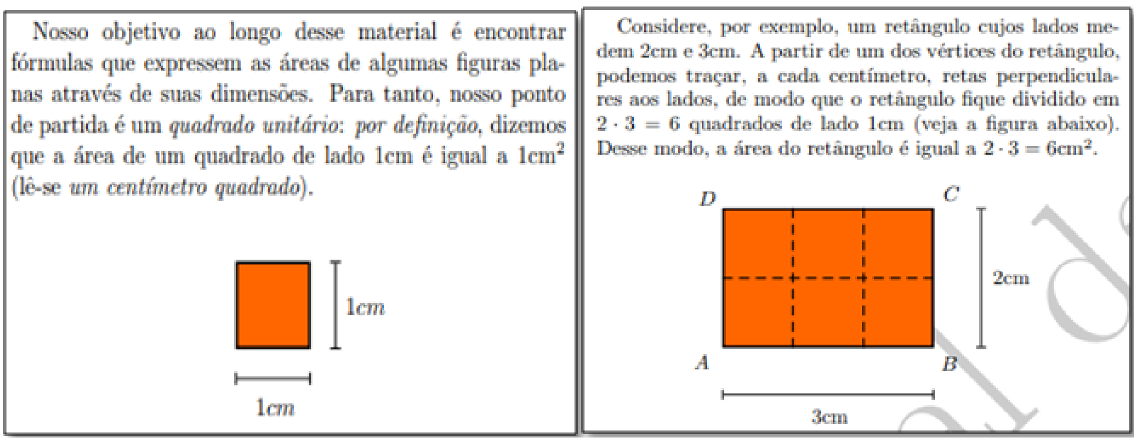
Figura 5.89: Problema Motivador II (Solução Formal) - Módulo: Áreas de Figuras Planas



Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Prosseguindo com os estudos, começamos a trabalhar e construir a formalização dos conceitos e ideias do cálculo das Áreas das principais Figuras Planas. Vejamos a seguir:

Figura 5.90: Área de um Quadrado Unitário - Módulo: Áreas de Figuras Planas



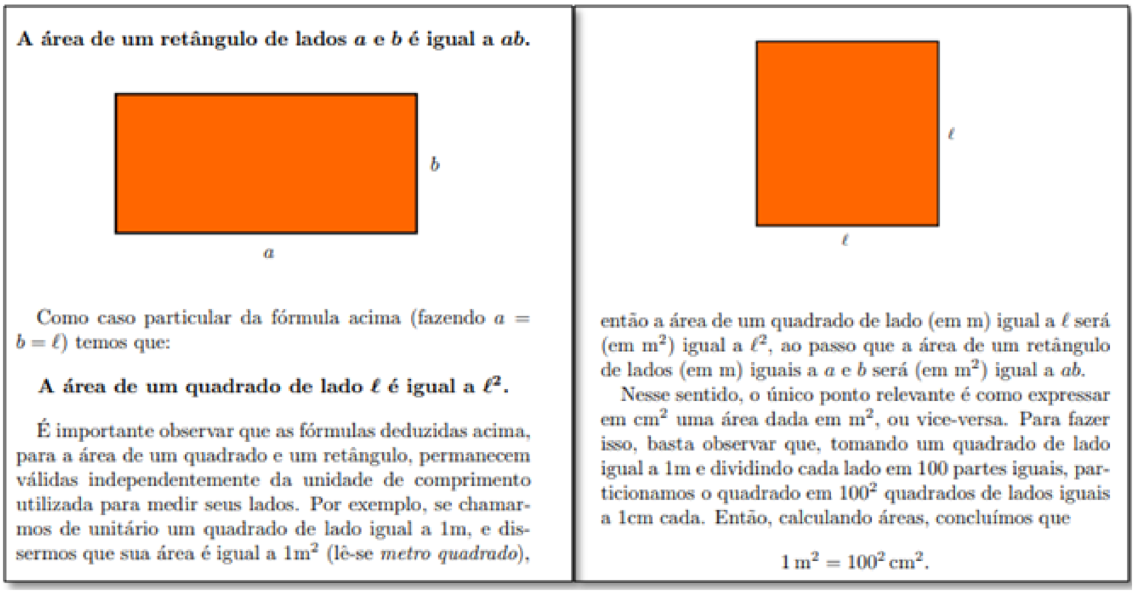
Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Vimos que o ponto de partida para os estudos de Áreas de Figuras Planas, gira em torno de tomar como definição a área de um quadrado unitário, ou seja, de lado 1cm igual a $1cm^2$. De forma geral, um quadrado unitário de lado $1u.c.$ (unidade de comprimento), valerá $1u.a.$ (unidade de área).

Em seguida notamos um exemplo que faz uso da área de um quadrado unitário para representar a área de um retângulo, dividindo o retângulo em vários quadrados. Mas, foi indagada a seguinte situação para os alunos: caso as medidas desses lados do retângulo não fossem inteiras, continuaria prático dividir o retângulo em quadrados?

Rapidamente responderam que não. Realmente seria um pouco mais trabalhoso; mas, é possível mesmo para medida racionais ou até mesmo irracionais fazer uso do método de dividir em quadrados, dividindo um quadradinho em novos quadradinhos e para os irracionais, trabalhando com aproximações. Visto isso, apresentamos a formalização para o cálculo da área de um retângulo e de um quadrado. Acompanhemos a seguir:

Figura 5.91: Área de um Retângulo e Área de um Quadrado - Módulo: Áreas de Figuras Planas



A área de um retângulo de lados a e b é igual a ab.

Como caso particular da fórmula acima (fazendo $a = b = \ell$) temos que:

A área de um quadrado de lado ℓ é igual a ℓ^2.

É importante observar que as fórmulas deduzidas acima, para a área de um quadrado e um retângulo, permanecem válidas independentemente da unidade de comprimento utilizada para medir seus lados. Por exemplo, se chamarmos de unitário um quadrado de lado igual a 1m, e dissermos que sua área é igual a 1m^2 (lê-se *metro quadrado*), então a área de um quadrado de lado (em m) igual a ℓ será (em m^2) igual a ℓ^2, ao passo que a área de um retângulo de lados (em m) iguais a a e b será (em m^2) igual a ab.

Nesse sentido, o único ponto relevante é como expressar em cm^2 uma área dada em m^2, ou vice-versa. Para fazer isso, basta observar que, tomando um quadrado de lado igual a 1m e dividindo cada lado em 100 partes iguais, particionamos o quadrado em 100^2 quadrados de lados iguais a 1cm cada. Então, calculando áreas, concluímos que

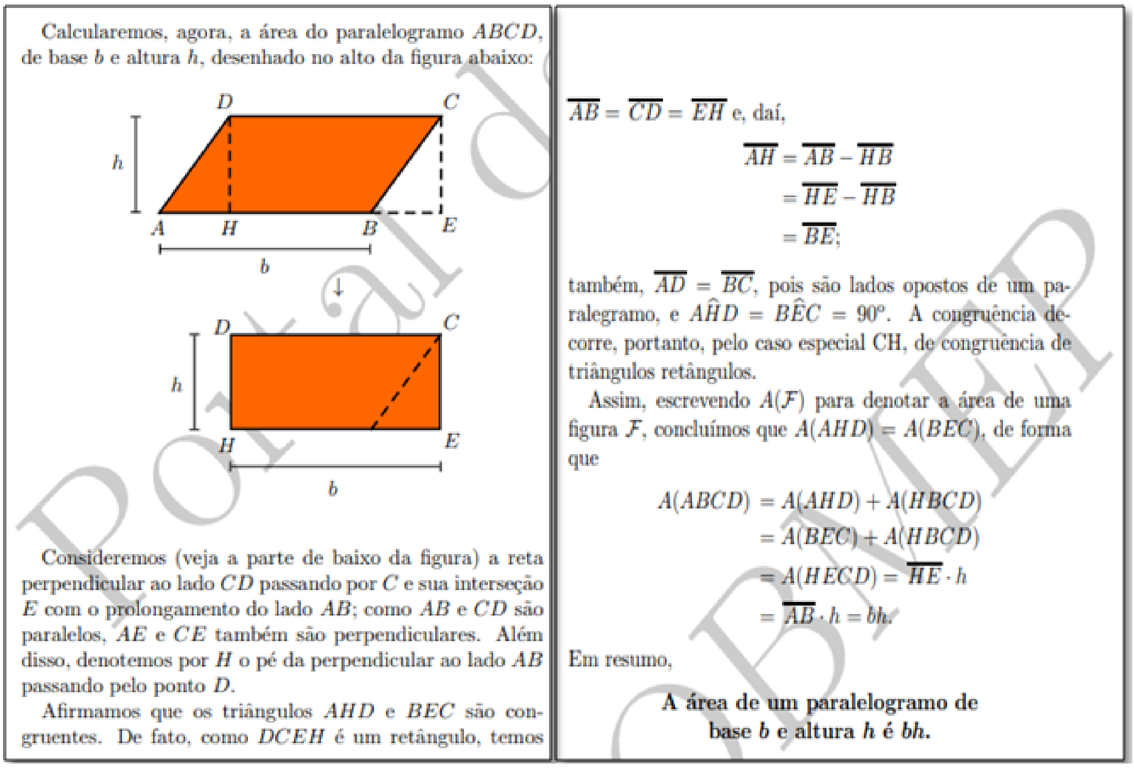
$$1\,\text{m}^2 = 100^2\,\text{cm}^2.$$

Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Compreendido os conceitos do cálculo da área de um retângulo e de um quadrado, foi dado continuidade os estudos de Áreas de Figuras Planas passando para a construção dos conceitos do cálculo da Área de um Paralelogramo.

Assim como nas figuras planas anteriores, tomamos como auxílio o material teórico da seção Áreas de Figuras Planas: resultados básicos – parte 1, por meio de alguns trechos que apresentam figuras, explicações e demonstrações.

Figura 5.92: Área de um Paralelogramo - Módulo: Áreas de Figuras Planas



Calcularemos, agora, a área do paralelogramo $ABCD$, de base b e altura h, desenhado no alto da figura abaixo:

Consideremos (veja a parte de baixo da figura) a reta perpendicular ao lado CD passando por C e sua interseção E com o prolongamento do lado AB; como AB e CD são paralelos, AE e CE também são perpendiculares. Além disso, denotemos por H o pé da perpendicular ao lado AB passando pelo ponto D.

Afirmamos que os triângulos AHD e BEC são congruentes. De fato, como $DCEH$ é um retângulo, temos $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EH}$ e, daí,

$$\begin{aligned}\overline{AH} &= \overline{AB} - \overline{HB}\\ &= \overline{HE} - \overline{HB}\\ &= \overline{BE};\end{aligned}$$

também, $\overline{AD} = \overline{BC}$, pois são lados opostos de um paralegramo, e $A\hat{H}D = B\hat{E}C = 90^\circ$. A congruência decorre, portanto, pelo caso especial CH, de congruência de triângulos retângulos.

Assim, escrevendo $A(\mathcal{F})$ para denotar a área de uma figura $\mathcal{F}$, concluímos que $A(AHD) = A(BEC)$, de forma que

$$\begin{aligned}A(ABCD) &= A(AHD) + A(HBCD)\\ &= A(BEC) + A(HBCD)\\ &= A(HECD) = \overline{HE} \cdot h\\ &= \overline{AB} \cdot h = bh.\end{aligned}$$

Em resumo,

A área de um paralelogramo de base b e altura h é bh.

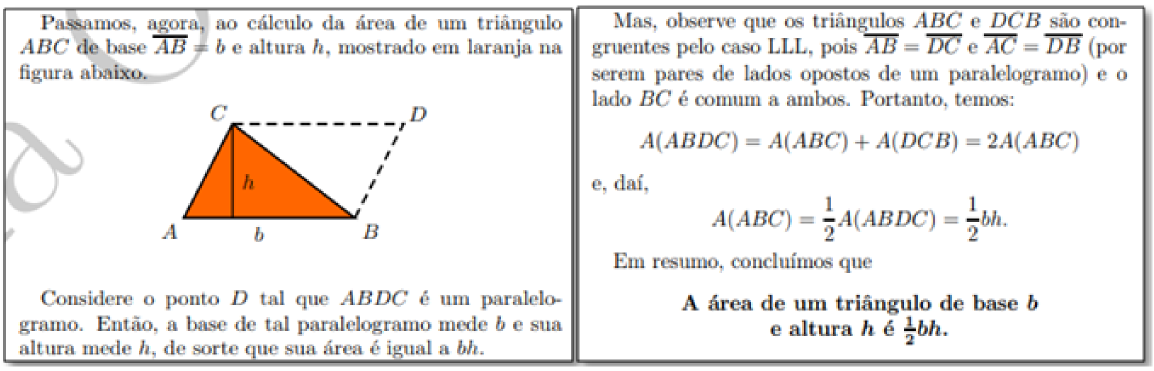
Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Esclarecida a fórmula do cálculo da área de um paralelogramo, partimos para uma outra figura plana bastante essencial dentro dos nossos estudos, que é o triângulo.

Dessa forma, procuramos organizar e deixar compreensível a construção do cálculo da área de um triângulo.

Observemos atentamente a demonstração:

Figura 5.93: Área de um Triângulo - Módulo: Áreas de Figuras Planas



Passamos, agora, ao cálculo da área de um triângulo ABC de base $\overline{AB} = b$ e altura h, mostrado em laranja na figura abaixo.

Considere o ponto D tal que $ABDC$ é um paralelogramo. Então, a base de tal paralelogramo mede b e sua altura mede h, de sorte que sua área é igual a bh.

Mas, observe que os triângulos ABC e DCB são congruentes pelo caso LLL, pois $\overline{AB} = \overline{DC}$ e $\overline{AC} = \overline{DB}$ (por serem pares de lados opostos de um paralelogramo) e o lado BC é comum a ambos. Portanto, temos:

$$A(ABDC) = A(ABC) + A(DCB) = 2A(ABC)$$

e, daí,

$$A(ABC) = \frac{1}{2}A(ABDC) = \frac{1}{2}bh.$$

Em resumo, concluímos que

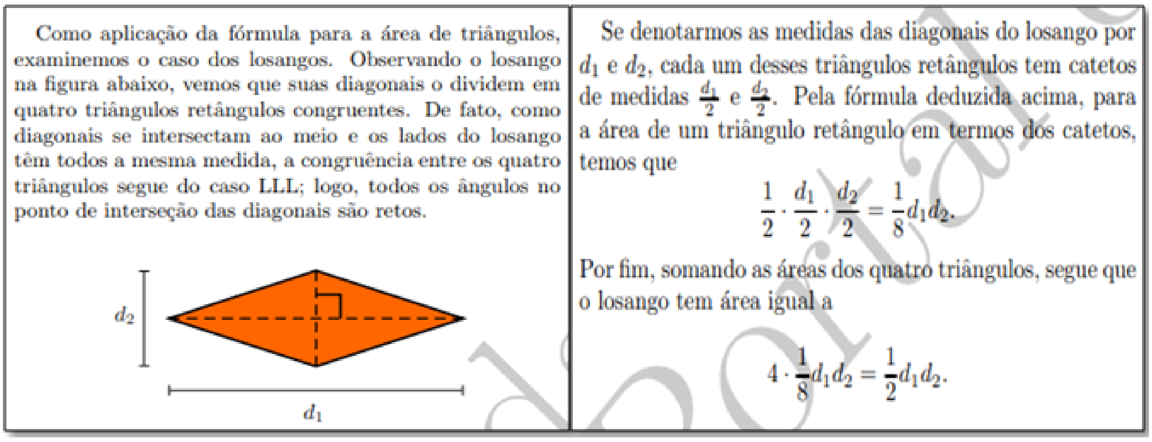
A área de um triângulo de base b e altura h é $\frac{1}{2}bh$.

Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Para o estudo da Área de um Triângulo, existem outros tipos de apresentação da fórmula, conforme o tipo do triângulo e os dados que são fornecidos sobre o mesmo. Esse estudo das variações da fórmula para calcular a área de um triângulo, ficam como sugestões de aprofundamento de estudo para os alunos ou para preparações futuras que possamos analisar cada uma dessas variações.

Mas, faremos uso da fórmula para calcular a área de um triângulo como base para estruturar o cálculo da Área de um Losango e em seguida, o cálculo da Área do Trapézio. Vejamos:

Figura 5.94: Área de um Losango - Módulo: Áreas de Figuras Planas



Como aplicação da fórmula para a área de triângulos, examinemos o caso dos losangos. Observando o losango na figura abaixo, vemos que suas diagonais o dividem em quatro triângulos retângulos congruentes. De fato, como diagonais se intersectam ao meio e os lados do losango têm todos a mesma medida, a congruência entre os quatro triângulos segue do caso LLL; logo, todos os ângulos no ponto de interseção das diagonais são retos.

Se denotarmos as medidas das diagonais do losango por d_1 e d_2, cada um desses triângulos retângulos tem catetos de medidas $\frac{d_1}{2}$ e $\frac{d_2}{2}$. Pela fórmula deduzida acima, para a área de um triângulo retângulo em termos dos catetos, temos que

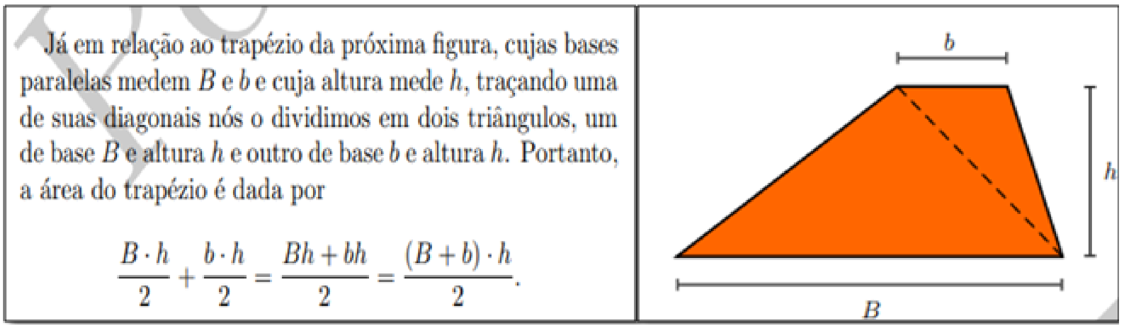
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} = \frac{1}{8} d_1 d_2.$$

Por fim, somando as áreas dos quatro triângulos, segue que o losango tem área igual a

$$4 \cdot \frac{1}{8} d_1 d_2 = \frac{1}{2} d_1 d_2.$$

Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Figura 5.95: Área de um Trapézio - Módulo: Áreas de Figuras Planas



Já em relação ao trapézio da próxima figura, cujas bases paralelas medem B e b e cuja altura mede h, traçando uma de suas diagonais nós o dividimos em dois triângulos, um de base B e altura h e outro de base b e altura h. Portanto, a área do trapézio é dada por

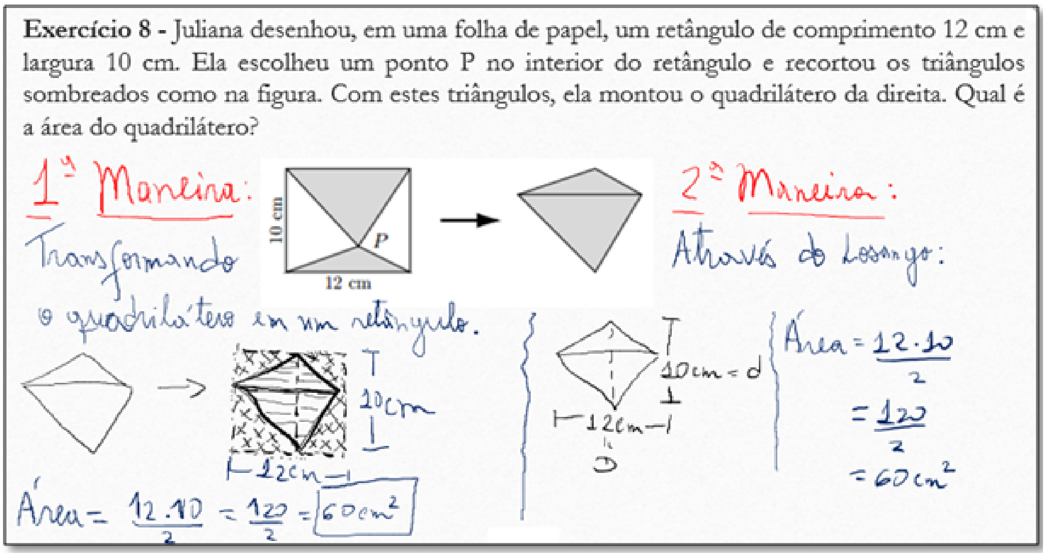
$$\frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{Bh + bh}{2} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}.$$

Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Como forma de consolidar a primeira semana de estudos sobre o módulo de Áreas de Figuras Planas, trabalhamos alguns exemplos e exercícios para uma melhor compreensão do tema, onde foram construídas as suas soluções juntamente com os alunos, e para isso, selecionamos um exercício presente na seção exercícios da OBMEP, que explorará algumas das figuras planas estudadas neste módulo.

Acompanhemos a seguir:

Figura 5.96: Exercício - Módulo: Áreas de Figuras Planas



Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

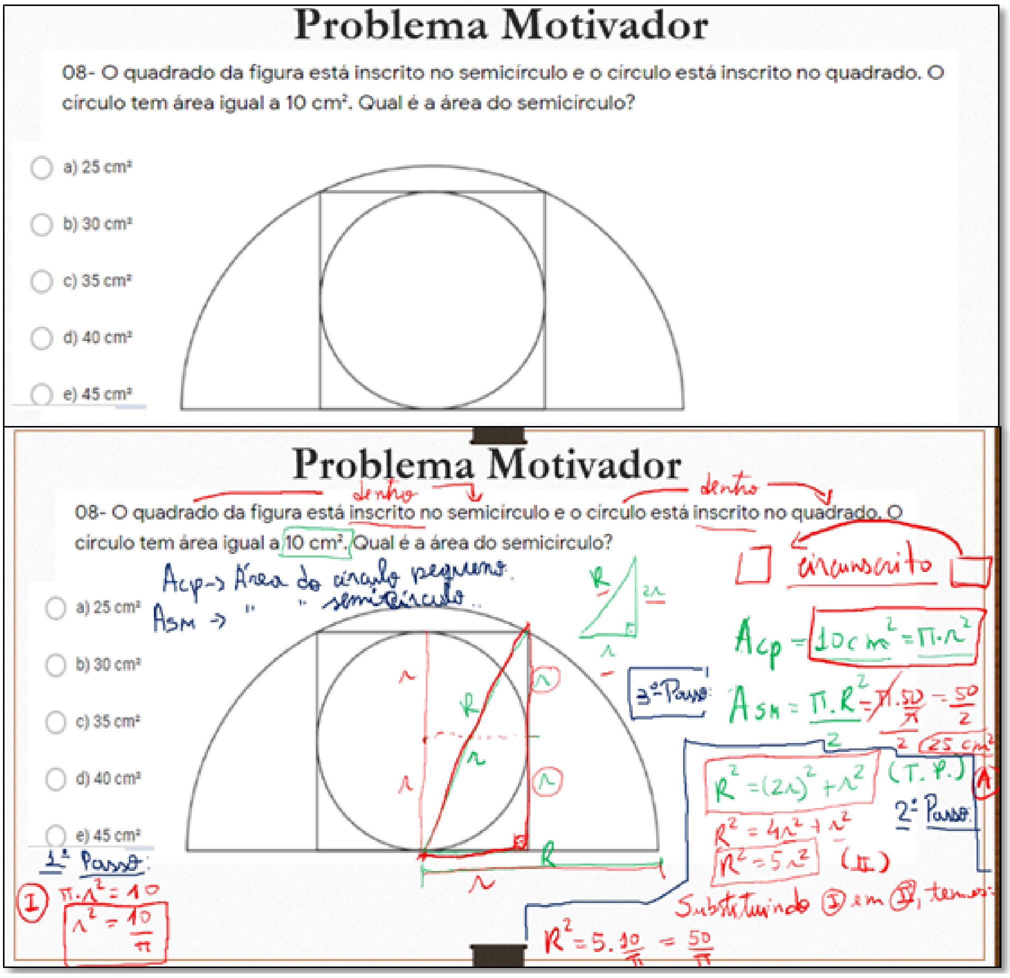
Além dos exemplos e exercícios trabalhados, ficaram algumas sugestões de aprofundamento e complementação dos estudos, como: videoaulas e exercícios resolvidos, para assistirem os vídeos, além do material teórico da seção para baixar e acompanhar o conteúdo com uma maior riqueza de detalhes.

Figura 5.97: Acompanhamento do Progresso dos Alunos 1ª Etapa - Módulo: Áreas de Figuras Planas

Fonte: Progresso no Módulo - Portal da Matemática.

Complementando os estudos de Áreas de Figuras Planas, abordaremos agora, os conceitos do cálculo da Área de um Círculo; para isso, como forma de introduzir o assunto, fizemos uso de um problema motivador - que constava no teste inicial aplicado com os alunos - e foi construída a solução juntamente com os alunos. Vejamos:

Figura 5.98: Problema Motivador III - Módulo: Áreas de Figuras Planas

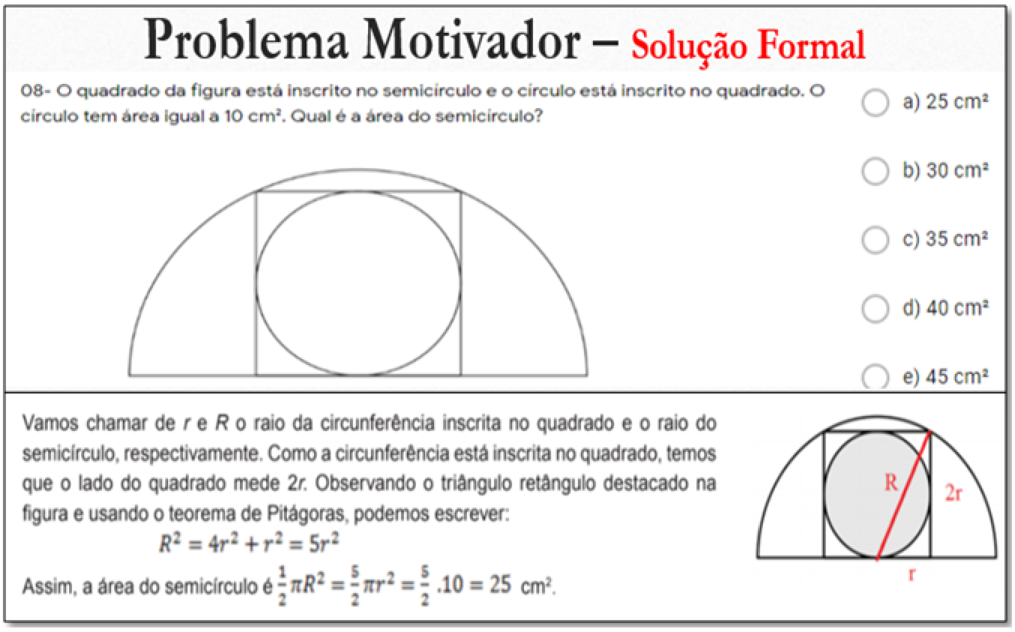


Fonte: Material Teórico (adaptado) - Portal da Matemática.

Analisando a solução desenvolvida, verificamos que algumas coisas são interessantes de serem comentadas: primeiro, o fato deste problema trazer o desenho complementando o enunciado, o que facilita a compreensão do aluno da ideia de inscrito ou circunscrito e, o segundo ponto relevante é o uso do Teorema de Pitágoras como ferramenta de ligação entre os raios do círculo e do semicírculo. Não só neste assunto, mas também em outros são comuns de aparecerem como apoio nos problemas de Áreas de Figuras Planas.

Visto isso, apresentamos a solução formal para o problema motivador que foi estudado.

Figura 5.99: Problema Motivador III (Solução Formal) - Módulo: Áreas de Figuras Planas

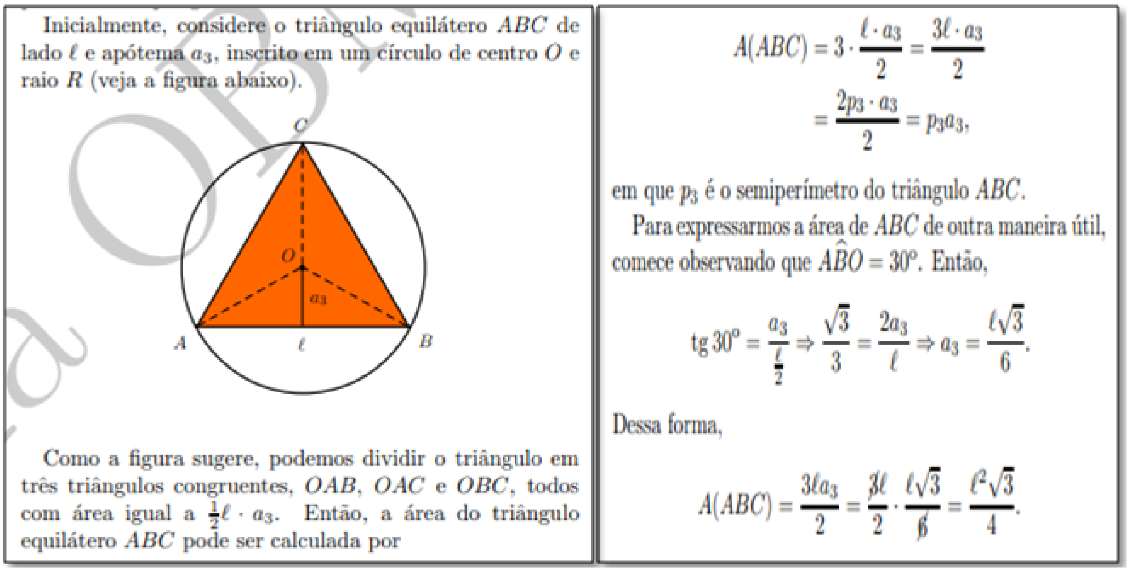


Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Com as discursões concluídas sobre o problema motivador, buscamos formalizar os conceitos para o cálculo da área de um círculo. Para isso, nos embasamos - mais uma vez - no material teórico da seção Áreas de Figuras Planas: resultados básicos – parte 1.

Dessa forma, vimos que para construirmos a fórmula da área de um círculo, antes é preciso observarmos o comportamento das Áreas de alguns Polígonos Regulares.

Figura 5.100: Área de um Triângulo Equilátero - Módulo: Áreas de Figuras Planas


Inicialmente, considere o triângulo equilátero ABC de lado ℓ e apótema a_3, inscrito em um círculo de centro O e raio R (veja a figura abaixo).

Como a figura sugere, podemos dividir o triângulo em três triângulos congruentes, OAB, OAC e OBC, todos com área igual a $\frac{1}{2}\ell \cdot a_3$. Então, a área do triângulo equilátero ABC pode ser calculada por

$$A(ABC) = 3 \cdot \frac{\ell \cdot a_3}{2} = \frac{3\ell \cdot a_3}{2} = \frac{2p_3 \cdot a_3}{2} = p_3 a_3,$$

em que p_3 é o semiperímetro do triângulo ABC.

Para expressarmos a área de ABC de outra maneira útil, comece observando que $A\hat{B}O = 30°$. Então,

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{a_3}{\frac{\ell}{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2a_3}{\ell} \Rightarrow a_3 = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}.$$

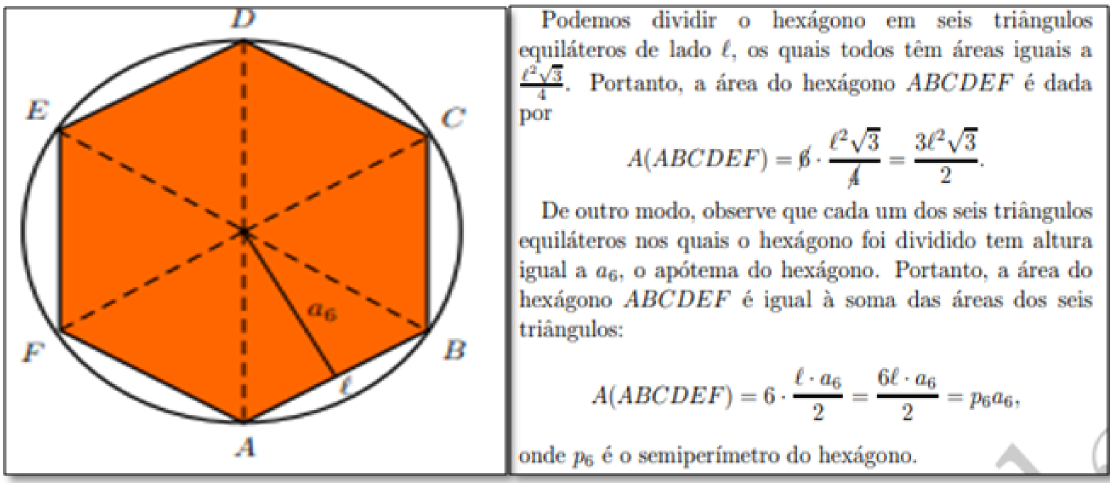
Dessa forma,

$$A(ABC) = \frac{3\ell a_3}{2} = \frac{\cancel{3}\ell}{2} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{\cancel{6}} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}.$$

Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Na figura plana a seguir, a fórmula da área de um triângulo equilátero foi de grande importância na construção dos conceitos para o cálculo da área de um hexágono regular.

Figura 5.101: Área de um Hexágono Regular - Módulo: Áreas de Figuras Planas



Podemos dividir o hexágono em seis triângulos equiláteros de lado ℓ, os quais todos têm áreas iguais a $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$. Portanto, a área do hexágono $ABCDEF$ é dada por

$$A(ABCDEF) = \cancel{6}\cdot\frac{\ell^2\sqrt{3}}{\cancel{4}} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}.$$

De outro modo, observe que cada um dos seis triângulos equiláteros nos quais o hexágono foi dividido tem altura igual a a_6, o apótema do hexágono. Portanto, a área do hexágono $ABCDEF$ é igual à soma das áreas dos seis triângulos:

$$A(ABCDEF) = 6\cdot\frac{\ell\cdot a_6}{2} = \frac{6\ell\cdot a_6}{2} = p_6 a_6,$$

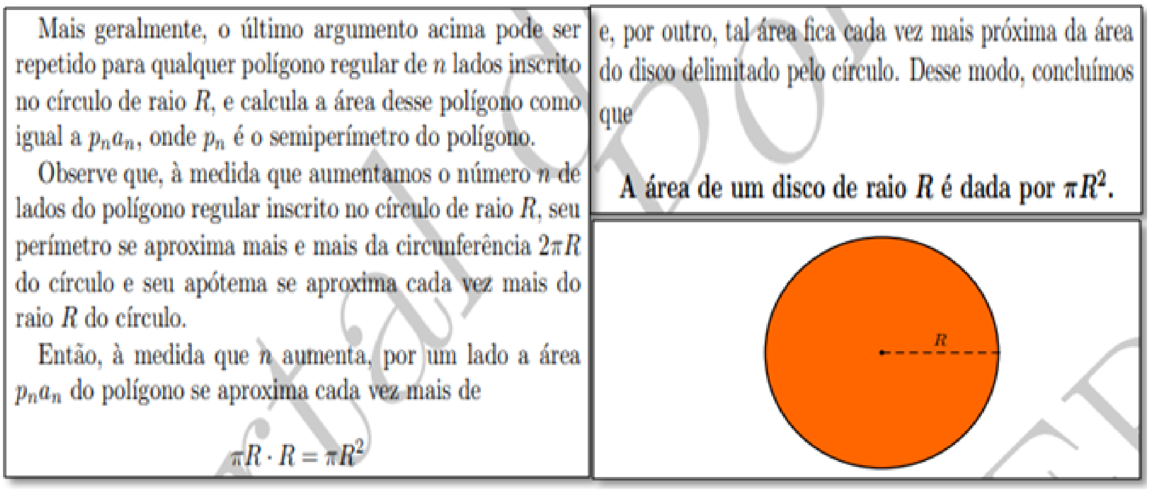
onde p_6 é o semiperímetro do hexágono.

Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

É possível notar que para as duas áreas trabalhadas, as fórmulas desenvolvidas relacionam a multiplicação do semiperímetro com o apótema da figura, em que o apótema é o segmento de reta que parte do centro de um polígono regular e forma um ângulo de 90º com o seu lado.

Logo, o que pode ocorrer para um polígono regular de n lados? Verificarem a seguir:

Figura 5.102: Área de um Círculo - Módulo: Áreas de Figuras Planas



Mais geralmente, o último argumento acima pode ser repetido para qualquer polígono regular de n lados inscrito no círculo de raio R, e calcula a área desse polígono como igual a $p_n a_n$, onde p_n é o semiperímetro do polígono.

Observe que, à medida que aumentamos o número n de lados do polígono regular inscrito no círculo de raio R, seu perímetro se aproxima mais e mais da circunferência $2\pi R$ do círculo e seu apótema se aproxima cada vez mais do raio R do círculo.

Então, à medida que n aumenta, por um lado a área $p_n a_n$ do polígono se aproxima cada vez mais de

$$\pi R\cdot R = \pi R^2$$

e, por outro, tal área fica cada vez mais próxima da área do disco delimitado pelo círculo. Desse modo, concluímos que

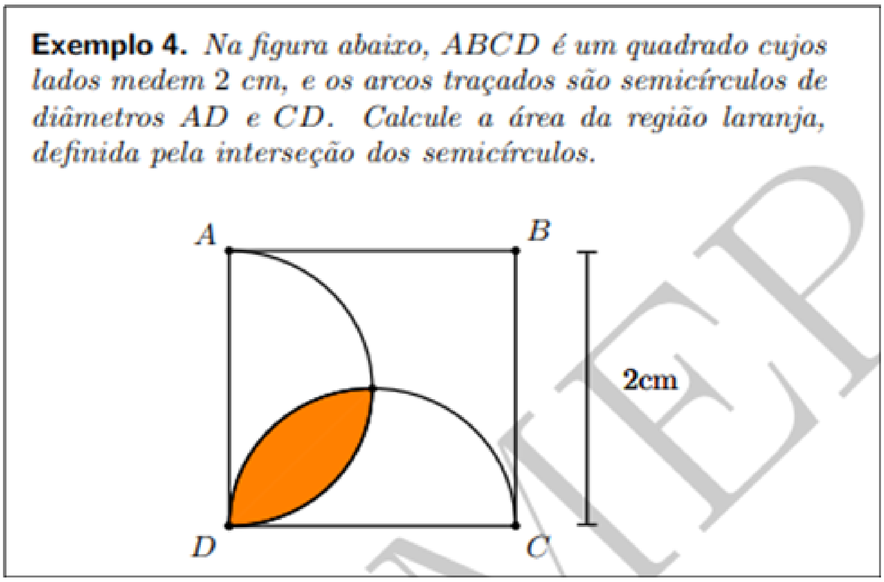
A área de um disco de raio R é dada por πR^2.

Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Realizada a formalização da fórmula para o cálculo da área de um círculo, alguns exemplos foram trabalhados e selecionamos um deles, extraído da seção Áreas de figuras Planas: resultados básicos – parte 2 para analisarmos.

Acompanhemos atentamente:

Figura 5.103: Área de um Círculo (Exemplo) - Módulo: Áreas de Figuras Planas

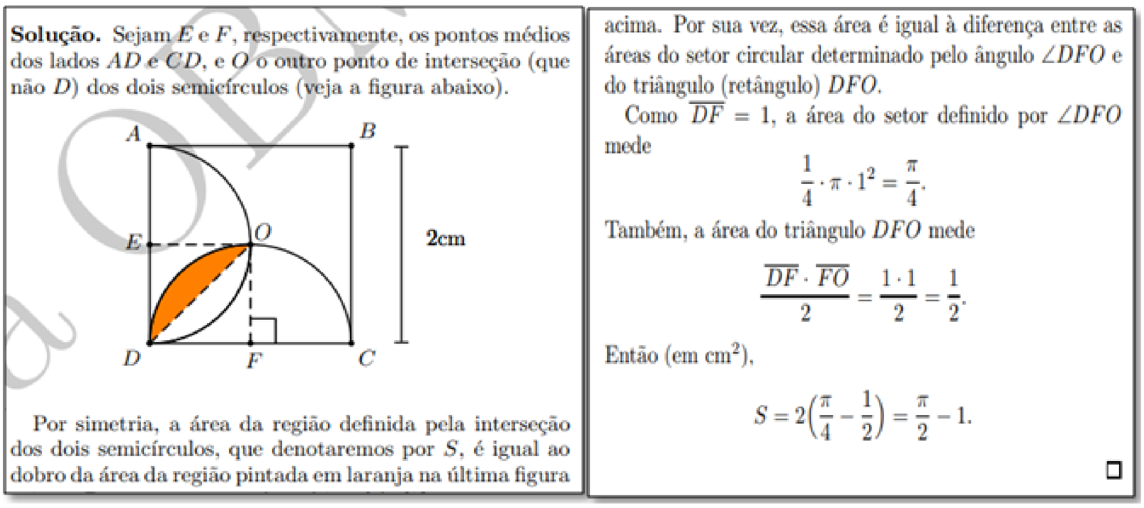


Exemplo 4. *Na figura abaixo, $ABCD$ é um quadrado cujos lados medem 2 cm, e os arcos traçados são semicírculos de diâmetros AD e CD. Calcule a área da região laranja, definida pela interseção dos semicírculos.*

Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Após a apresentação do exemplo, fizemos uma discursão das possibilidades de resolução e explicamos a solução formal para o problema proposto.

Figura 5.104: Área de um Círculo (Exemplo - Solução) - Módulo: Áreas de Figuras Planas



Solução. Sejam E e F, respectivamente, os pontos médios dos lados AD e CD, e O o outro ponto de interseção (que não D) dos dois semicírculos (veja a figura abaixo).

Por simetria, a área da região definida pela interseção dos dois semicírculos, que denotaremos por S, é igual ao dobro da área da região pintada em laranja na última figura acima. Por sua vez, essa área é igual à diferença entre as áreas do setor circular determinado pelo ângulo $\angle DFO$ e do triângulo (retângulo) DFO.

Como $\overline{DF} = 1$, a área do setor definido por $\angle DFO$ mede

$$\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Também, a área do triângulo DFO mede

$$\frac{\overline{DF} \cdot \overline{FO}}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Então (em cm^2),

$$S = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

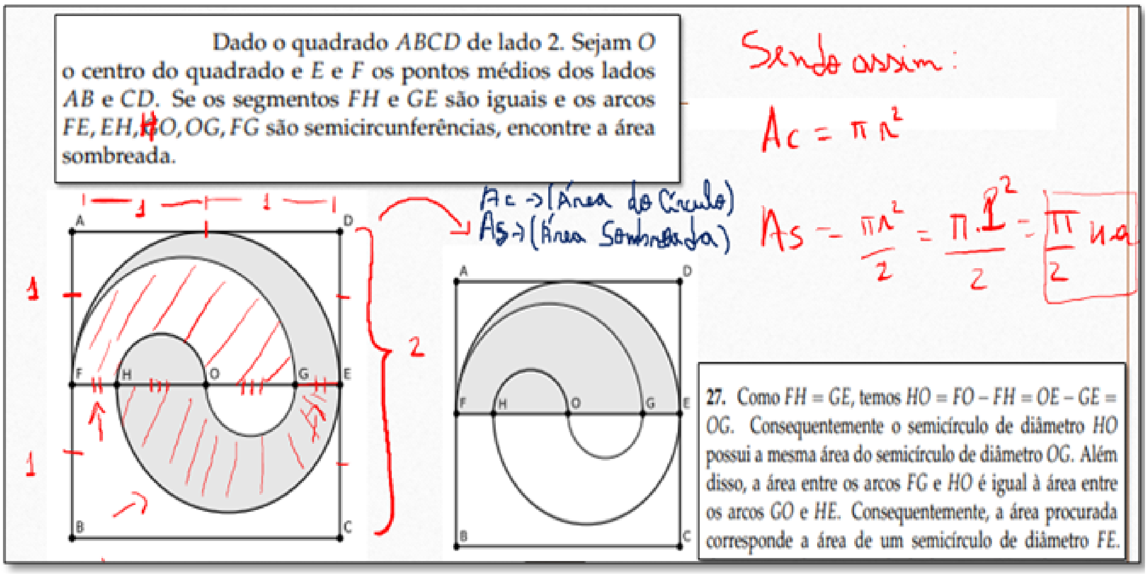
□

Fonte: Material Teórico - Portal da Matemática.

Podemos notar que neste exemplo foi possível abordar os conceitos da área de um setor círcular, e associar a área de um triângulo retângulo para determinar a área da região em laranja desejada.

Complementando os exemplos trabalhados, alguns exercícios foram propostos para os alunos. Apresentaremos um deles a seguir - retirado da seção Áreas de Figuras Planas: resultados básicos.

Figura 5.105: Área de um Círculo (Exercício) - Módulo: Áreas de Figuras Planas



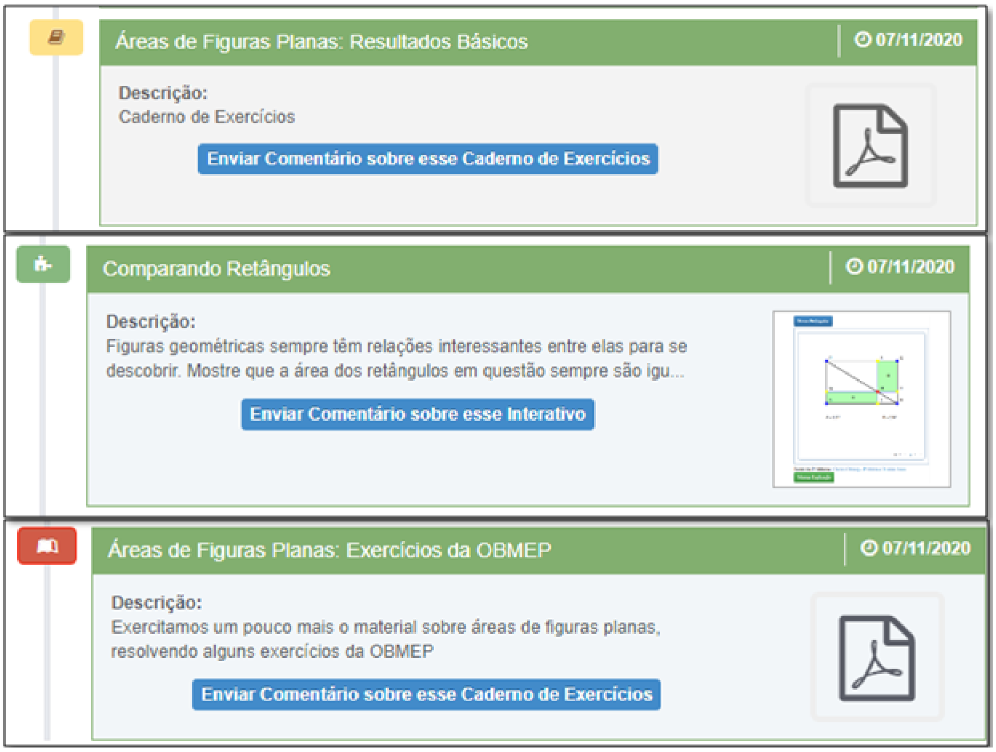
Fonte: Caderno de Exercícios (adaptado) - Portal da Matemática.

Após a leitura do exercício e dado um tempo para os alunos desenvolverem as suas resoluções, iniciamos a construção da solução do problema proposto em conjunto com os alunos e em seguida complementamos com uma parte da solução formal reservada para este exercício.

Para finalizar o módulo de Áreas de Figuras Planas, mais uma vez ficaram algumas sugestões de aprofundamento dos estudos no Portal da Matemática, por meio de: aplicativos interativos e cadernos de exercícios, para baixarem e praticarem ainda mais este assunto de áreas. Excepcionalmente, para este módulo estudado ainda não possui teste e avaliação geral disponíveis para os alunos testarem seus conhecimentos e almejarem um certificado. No entanto, a última seção exercícios da OBMEP traz um acervo de exercícios diversos para os alunos aperfeiçoarem suas habilidades.

A seguir, podemos observar alguns dos ambientes explorados pelos alunos no segundo acompanhamento do progresso no módulo: Áreas de Figuras Planas. Vejamos:

Figura 5.106: Acompanhamento do Progresso dos Alunos 2ª Etapa) - Módulo: Áreas de Figuras Planas



Fonte: Progresso no Módulo - Portal da Matemática.

Sendo este módulo o último a ser trabalhado no projeto, antes da aplicação do teste final, ficou reservada uma semana para os alunos colocarem em dias alguma pendência no Portal da Matemática e buscarem sanar dúvidas ainda presentes nos assuntos estudados.

5.10 Elaboração e Aplicação do Teste Final

Após a conclusão dos encontros do Projeto, buscamos elaborar um novo teste para ser aplicado com todos os alunos de 1ºano do ensino médio da escola campo de pesquisa, que se dispuseram à contribuir com este trabalho - intitulado de Teste Final - onde tínhamos os objetivos de averiguar se:

- no decorrer desses meses de preparação os alunos participantes conseguiram agregar conhecimentos através dos encontros e da utilização do Portal da Matemática, de forma a melhorarem o seu desempenho de um teste para o outro;

- os alunos presentes no projeto desenvolveram o hábito de argumentar um problema e redigir uma solução;

- de um modo geral, houve uma evolução no desempenho dos alunos de 1ºano do ensino médio da Escola Campo de Pesquisa, visto que muitos alunos mesmo não participando do projeto, tomaram conhecimento sobre o Portal da Matemática por meio dos seus colegas de sala e pela apresentação do projeto feita a priori.

Este Teste Final - semelhante ao outro teste aplicado - consta no apêndice E deste trabalho e foi estruturado na Plataforma Google Forms da seguinte maneira: organizamos um total de 9 questões, sendo 3 de cada área de conhecimento (Aritmética, Contagem e Geometria), divididas em 1 questão dissertativa e 2 questões objetivas de múltipla escolha.

Dessa vez, as questões utilizadas para aplicação deste teste foram uma mescla de exercícios extraídos dos cadernos de exercícios dos módulos estudados e questões presentes na prova da 1ª fase da OBMEP entre os anos de 2014 a 2019.

Escolhemos utilizar questões dos cadernos de exercícios para verificar se os alunos conseguiram assimilar os problemas propostos nesses cadernos; assim como decidimos também fazer uso de questões de 1ª fase da OBMEP, pelo fato do projeto ter sido estruturado a partir do estudo feito com esta fase da olimpíada.

Assim, as questões ficaram distribuídas da seguinte forma:

Figura 5.107: Disposição das Questões - Teste Final

QUESTÃO	MÓDULO/ASSUNTO	TIPO	ANO/QUESTÃO ou EXERCÍCIO/SEÇÃO
01	PROGRESSÕES ARITMÉTICAS	DISSERTATIVA	2014/Q8
02	ÁREAS DE FIGURAS PLANAS	DISSERTATIVA	2015/Q4
03	PRINCÍPIOS BÁSICOS DE CONTAGEM	DISSERTATIVA	E2/PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM
04	FUNÇÃO AFIM	OBJETIVA	E1/RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS
05	ÁREAS DE FIGURAS PLANAS	OBJETIVA	2017/Q1
06	INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE	OBJETIVA	2019/Q8
07	FUNÇÃO AFIM	OBJETIVA	2016/Q13
08	ÁREAS DE FIGURAS PLANAS	OBJETIVA	2017/Q8
09	PRINCÍPIOS BÁSICOS DE CONTAGEM	OBJETIVA	2018/Q10

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Nos mesmos moldes da aplicação do Teste Inicial, no dia e horário reservado para os alunos realizarem o Teste Final, o link de acesso ao mesmo foi postado no ambiente de estudo da escola - Plataforma Google Classroom (Google Sala de Aula). Foi disponibilizado para a aplicação do teste um horário de 1 hora e 30 minutos, onde os alunos deveriam anexar os seus argumentos, cálculos ou ideias para a resolução das 3 questões dissertativas e assinalar a alternativa que fosse ao seu ver correta, para as 6 questões objetivas, de acordo com o seu raciocínio e solução encontradas para os problemas propostos.

Capítulo 6

Análise dos Resultados Coletados

Para a devida verificação dos alcances dos objetivos traçados ao longo deste trabalho, demos início a uma análise apurada dos resultados que coletamos durante as aplicações de dois testes que foram realizados - comentados as suas elaborações e formato de aplicação no Capítulo 5.

O primeiro deles foi intitulado de Teste Inicial - presente no apêndice C deste trabalho - com o propósito de observar o nível de conhecimentos dos alunos perante os principais assuntos abordados na OBMEP 1ª fase. Da mesma forma, o segundo teste, nomeado de Teste Final - constando no apêndice E deste trabalho - buscou detectar os avanços no desempenho dos alunos, a qualificação nas resoluções dos problemas propostos e se houve por meio do Portal da Matemática uma colaboração na aprendizagem, agregando conhecimentos, tornando possível estes estudantes já no 1ºano do ensino médio adquirem confiança para obterem resultados equiparados a qualquer outro aluno indiferente de sua série no ensino médio e visualizarem as olimpíadas de matemática como algo acessível a todos e uma janela para grandes oportunidades.

Os testes aplicados foram separados em bloco de questões dissertativas e bloco de questões objetivas - observado no Capítulo 5 a distribuição e organização das mesmas. Ressaltamos que houve o cuidado de escolher problemas que localizados na mesma posição, fossem da mesma área de conhecimento, mesmo assunto do módulo trabalhado e o mais próximo possível os seus níveis, independentemente se sua origem seria do caderno de exercícios dos módulos ou das provas de 1ª fase de anos anteriores.

6.1 Questões Dissertativas

Foram aplicados em cada teste 3 questões dissertativas - distribuídos os assuntos conforme apresentados na tabela da figura 5.6 e tabela da figura 5.107 do Capítulo 5.

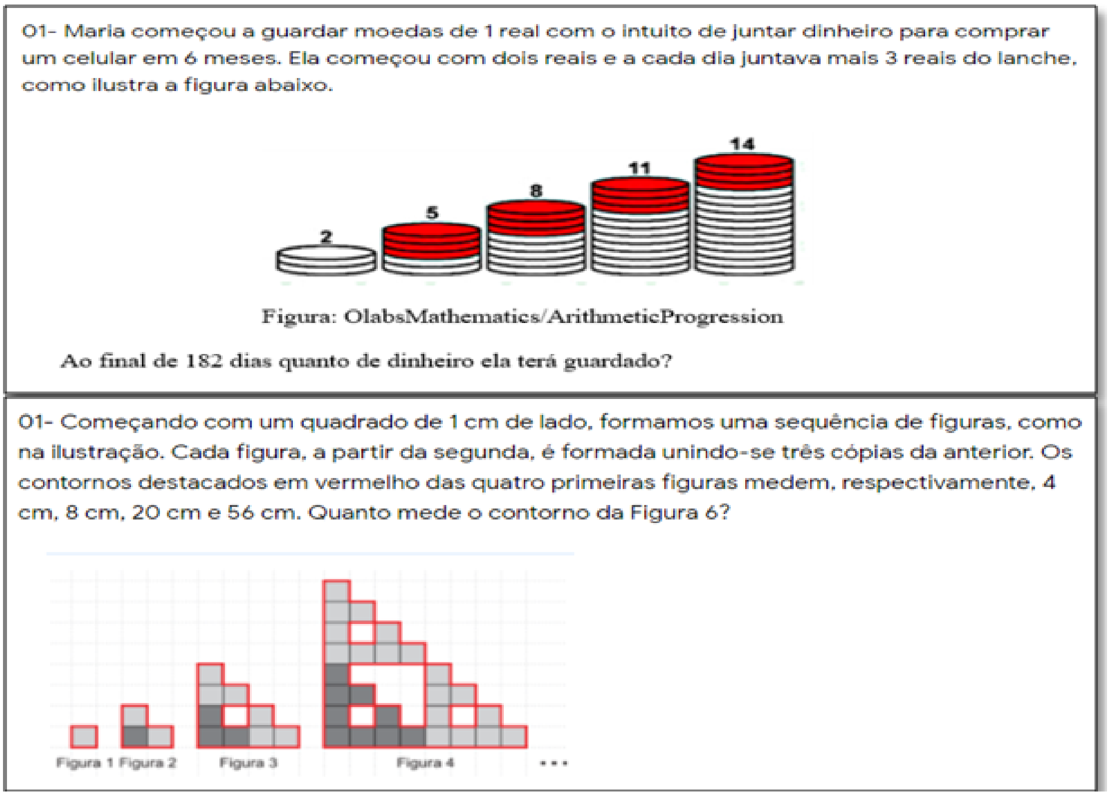
Para realizar a análise dos resultados coletados, selecionamos um aluno que participou do projeto e analisar as suas soluções apresentadas para a 1ª questão de cada um dos testes. O mesmo ocorrerá com um aluno selecionado que não participou do projeto. Este processo se repetirá com novos alunos selecionados para serem averiguadas suas soluções para 2ª e 3ª questões de cada teste aplicado.

Queremos com isso, verificar se houveram avanços para os alunos que participaram do projeto e se é possível detectar alguma disparidade entre as soluções apresentadas por aqueles que participaram da preparação e os que não participaram.

6.1.1 Área de Conhecimento: Aritmética - Módulo: Progressões Aritméticas

Iniciamos a análise da 1ª questão dissertativa de cada teste, onde foram abordados problemas envolvendo os assuntos do módulo de Progressões Aritméticas, apresentando as questões trabalhadas, retiradas do caderno de exercícios deste módulo e de provas anteriores da 1ª fase da OBMEP, respectivamente.

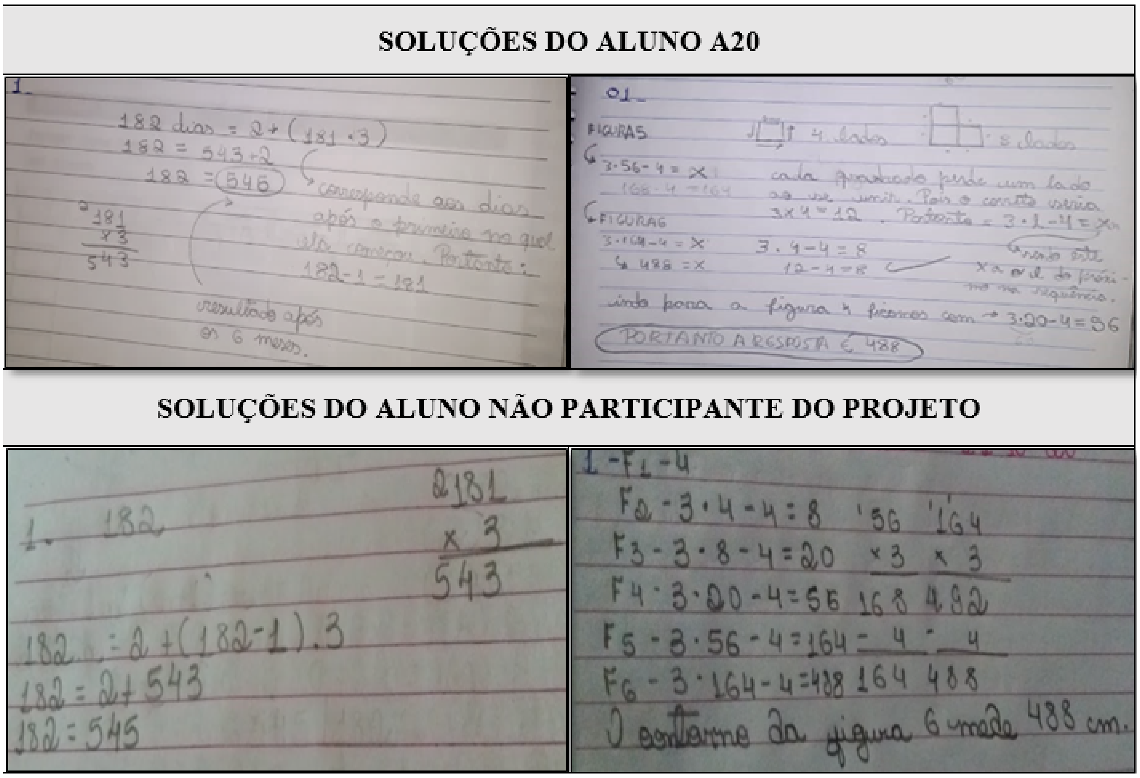
Figura 6.1: 1ª Questões Dissertativa - Teste Inicial e Teste Final



Fonte: Google Forms.

Para estas questões selecionamos as soluções do aluno A20, que participou do projeto e as de um outro aluno que não participou. Vejamos:

Figura 6.2: 1ª Questões Dissertativa (Soluções dos Alunos) - Teste Inicial e Teste Final



Fonte: Google Forms.

Analisando as soluções apresentadas pelos dois alunos, notamos que para a questão proposta no Teste Inicial, ambos buscaram inicialmente considerar o primeiro dia como sendo 2 reais e associar o restante dos dias ao aumento sucessivo de 3 reais, realizando os cálculos necessários.

Por outro lado, cometeram o mesmo deslize; ao invés de utilizar uma incógnita para representar os 182 dias, preferiram utilizar o número 182, gerando uma falsa igualdade de $182 = 545$ ao final da solução.

Diferenciaram suas soluções basicamente pelo fato do aluno A20 ter argumentado em alguns passos que realizou e o outro aluno não.

Partindo para o estudo das soluções apresentadas no problema lançado no Teste Final, já houve uma maior distinção nos caminhos adotados pelos alunos, sendo o A20 um pouco mais cuidadoso em apresentar desenhos, um maior número de argumentos do que no problema anterior, realizar a construção de uma lei de formação e concluir com o resultado que estava procurando, apesar de alguns deslizes que ainda foram presentes.

Tratando do segundo aluno, observamos que conseguiu realizar e apresentar os cálculos corretamente e os passos da solução de maneira certa; no entanto, carece de uma argumentação justificando o motivo pelo qual cada passo foi executado daquela maneira.

Por fim, é visível que para esta 1ª questão dissertativa apresentada, ocorreram maiores avanços para o aluno participante do projeto.

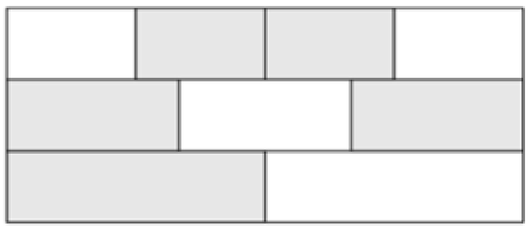
6.1.2 Área de Conhecimento: Geometria - Módulo: Áreas de Figuras Planas

Semelhante a análise feita para a 1ª questão dissertativa de cada teste, realizamos os estudos com a 2ª questão dissertativa dos testes aplicados, sendo abordados problemas envolvendo os assuntos do módulo de Áreas de Figuras Planas.

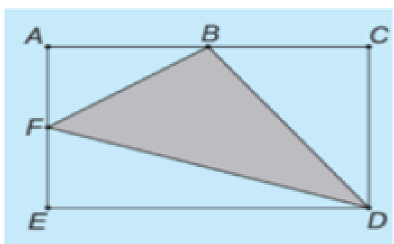
Vejamos a seguir, as questões trabalhadas, retiradas do caderno de exercícios deste módulo e de provas anteriores da 1ª fase da OBMEP, respectivamente.

Figura 6.3: 2ª Questões Dissertativa - Teste Inicial e Teste Final

02- A figura representa um retângulo de área 36 m², dividido em três faixas de mesma largura. Cada uma das faixas está dividida em partes iguais: uma em quatro partes, outra em três e a terceira em duas. Qual é a área total das partes sombreadas?



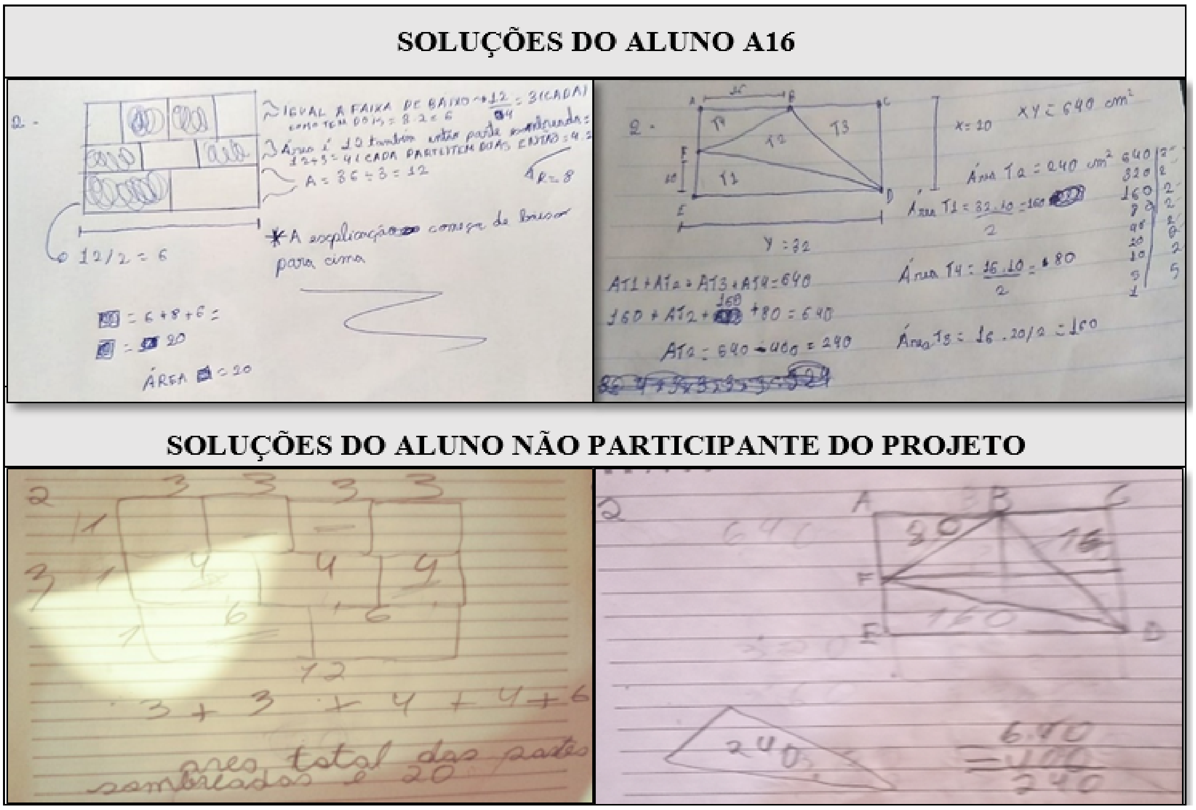
02- O retângulo da figura possui área igual a 640 cm². Os pontos B e F são pontos médios dos lados AC e AE, respectivamente. Qual é a área do triângulo BDF?



Fonte: Google Forms.

Nestas duas questões faremos uso das soluções do aluno A16, participante do projeto e das soluções de mais um aluno que não participou. Acompanhemos:

Figura 6.4: 2ª Questões Dissertativa (Soluções dos Alunos) - Teste Inicial e Teste Final



Fonte: Google Forms.

Nas soluções apresentadas na questão do Teste Inicial, visualizamos que o aluno A16, já consegue realizar alguma argumentação prévia, realiza os cálculos de maneira coerente e conclui o problema encontrando o resultado desejado; no entanto, peca na organização e nas notações matemáticas.

No problema do Teste Final, o aluno A16 continua recorrendo ao desenho para usar como suporte, ainda comete deslizes nas notações matemáticas e poderia ter recorrido a argumentação; todavia, evolui já tomando cuidado ao usar algumas notações matemáticas, melhora na organização e apresenta com maior clareza os cálculos realizados.

O segundo aluno, elabora e executa uma excelente metodologia de resolução - divisão da figura em partes de mesmo tamanho – o que facilita os cálculos mentais e evitam o uso de fórmulas; porém, mesmo para este tipo de método, é necessária a apresentação de argumentações, facilitando a sequência dos passos realizados e como as ideias foram construídas, além do uso das notações matemáticas para esclarecerem o que está sendo encontrado.

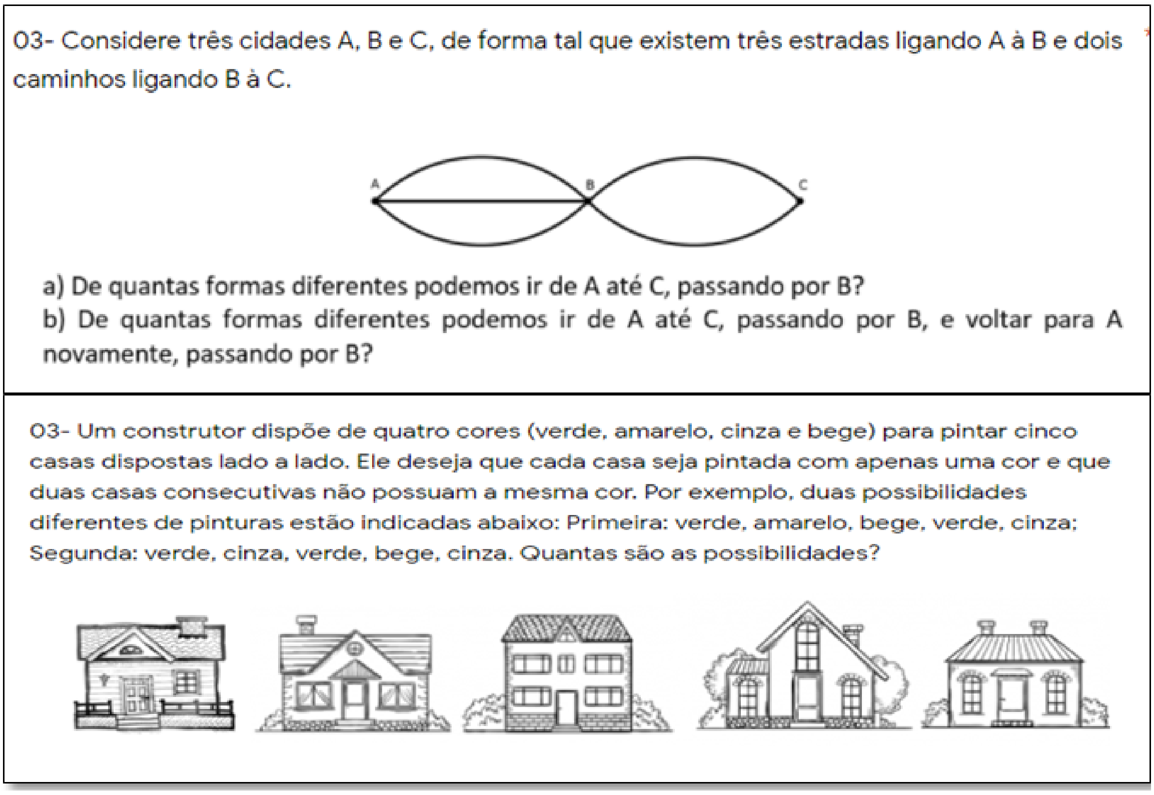
Para a questão do Teste Final, apesar de ter concluído com o resultado desejado e utilizado a mesma eficaz metodologia, não houve a percepção de nenhuma melhora nos pontos que ficaram a desejar na questão do Teste Inicial.

Dessa forma, mais uma vez, notamos um progresso nas soluções apresentadas pelo aluno A16 do projeto, não vista no aluno não participante da preparação.

6.1.3 Área de Conhecimento: Contagem - Módulo: Princípios Básicos de Contagem

Seguindo a mesma ideia de análise das questões anteriores, iniciamos os estudos com a 3ª questão dissertativa dos testes aplicados, contemplando problemas extraídos dos cadernos de exercícios do módulo Princípios Básicos de Contagem.

Figura 6.5: 3ª Questões Dissertativa - Teste Inicial e Teste Final


03- Considere três cidades A, B e C, de forma tal que existem três estradas ligando A à B e dois caminhos ligando B à C.

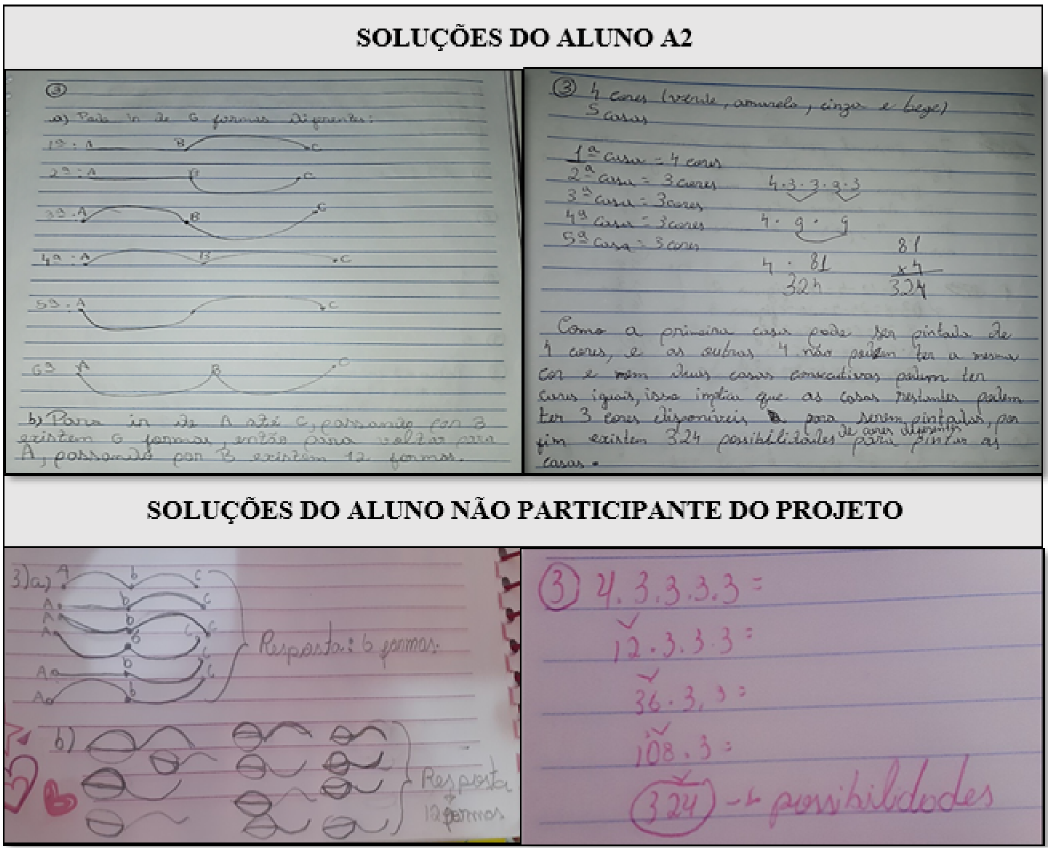
a) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B?
b) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B, e voltar para A novamente, passando por B?

03- Um construtor dispõe de quatro cores (verde, amarelo, cinza e bege) para pintar cinco casas dispostas lado a lado. Ele deseja que cada casa seja pintada com apenas uma cor e que duas casas consecutivas não possuam a mesma cor. Por exemplo, duas possibilidades diferentes de pinturas estão indicadas abaixo: Primeira: verde, amarelo, bege, verde, cinza; Segunda: verde, cinza, verde, bege, cinza. Quantas são as possibilidades?

Fonte: Google Forms.

Utilizaremos as soluções apresentadas pelo aluno participante do projeto A2, juntamente com as soluções de um aluno selecionado que não participou da preparação, para analisar estas últimas questões dissertativas. Observemos atentamente:

Figura 6.6: 3ª Questões Dissertativa (Soluções dos Alunos) - Teste Inicial e Teste Final



Fonte: Google Forms.

Na solução apresentada pelos alunos na questão proposta no Teste Inicial, notamos que para o item “a” ambos adotaram a mesma linha de raciocínio, buscando encontrar a quantidade de formas diferentes de ir da cidade A à C, passando por B, através de desenhos que representassem cada uma das possibilidades.

Para o item “b” da mesma questão, os alunos diferenciaram suas soluções da seguinte forma: o aluno A2 procurou argumentar - de forma escrita - que como haviam 6 formas para ir da cidade A à C, passando por B, existiriam mais 6 formas de realizar o caminho inverso, totalizando 12 formas diferentes de executar o percurso de ida e volta. Já o outro aluno, continuou preferindo apresentar cada uma das possibilidades por meio de desenhos, concluindo também 12 formas distintas de ir e voltar passando por essas cidades.

Analisando a questão proposta para o Teste Final, visualizamos que o aluno A2, além de fazer uso do Princípio Fundamental da Contagem, - visto que para encontrar o número de possibilidades através da apresentação de cada um dos casos, seria algo mais trabalhoso e propício de erros - buscou ter o cuidado de identificar cada casa com uma posição e sua respectiva quantidade de possibilidade de escolhas, argumentando todos os passos que foram realizados em sua solução.

Observando a solução apresentada pelo outro aluno, percebemos que há também a utilização do Princípio Fundamental da Contagem, concluindo com o resultado que era desejado pela questão, no entanto, não fica especificado claramente o que representa cada um dos fatores que participam da multiplicação realizada.

Chegamos ao consenso nestas últimas questões dissertativas, que o aluno A2 conseguiu demonstrar uma maior evolução na construção das suas ideias, organização da resolução e um cuidado em não deixar omitida nenhuma informação importante de sua solução, diferente do aluno não participante do projeto, que de um teste para o outro, apresentou pouco crescimento na qualidade de sua solução.

6.2 Questões Objetivas

Complementando os testes realizados, 6 questões objetivas foram usadas em cada aplicação, sendo os assuntos organizados de acordo com a disposição feita na tabela da figura 5.6 e tabela da figura 5.107 do Capítulo 5.

Dividimos a análise dos resultados coletados em duas etapas: a primeira delas observando o desempenho no Teste Inicial, - tanto dos alunos participantes do projeto, como também daqueles que não participaram mas realizaram o teste - verificando o nível de conhecimentos que os alunos possuíam perante os assuntos que seriam trabalhados nos módulos do Portal da Matemática antes do início dos encontros; numa segunda etapa, passaremos a estudar os resultados obtidos na aplicação do Teste Final, averiguando a evolução do desempenho dos alunos que participaram do projeto e dos alunos que realizaram o teste, mesmo não participando do projeto.

Pretendemos com isso, inicialmente observar através dos dados coletados pelo Teste Inicial se os alunos, independente de participarem do projeto ou não, possuíam um nível de conhecimentos próximos uns dos outros, com relação aos assuntos que seriam trabalhados dentro do projeto.

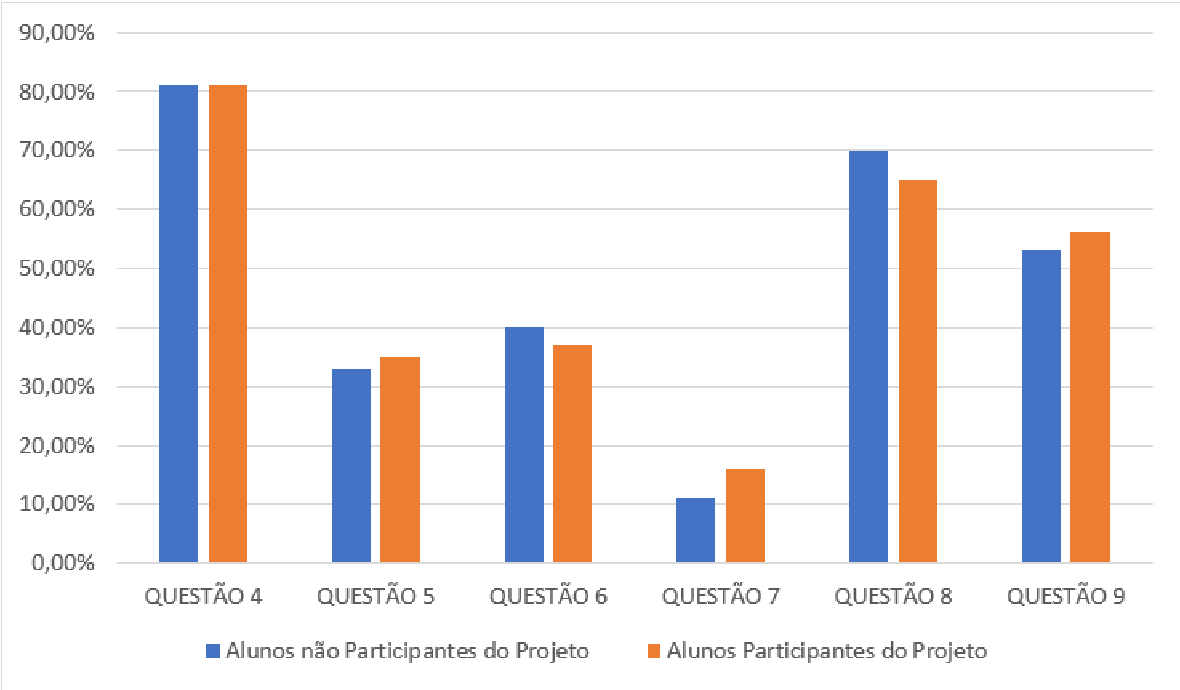
Além disso, por meio dos desempenhos apresentados no Teste Final, tentar analisar os possíveis avanços que os alunos participantes do projeto conseguiram atingir em comparação aos resultados vistos no Teste Inicial, como também analisar a evolução alcançada diante do desempenho mostrado pelos alunos que não participaram do projeto.

6.2.1 Estudo dos Resultados - Teste Inicial

Para facilitar o estudo dos resultados coletados, organizamos as porcentagens de acertos de cada uma das questões objetivas presentes no Teste Inicial em um gráfico de colunas, separando o desempenho apresentado pelos alunos inscritos no projeto, dos não participantes, mas que realizaram o teste.

Apreciemos a seguir, as informações apresentadas no gráfico da figura 6.7

Figura 6.7: Desempenho no Teste Inicial



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Podemos notar observando os dados do gráfico da figura 6.7, que em todas as questões apresentadas houve um equilíbrio no desempenho dos alunos, - sendo inscritos no projeto ou não - variando um baixo percentual, ora o desempenho dos alunos participantes do projeto um pouco melhor e em outros momentos, mostrando os alunos não participantes do projeto com uma pequena margem a frente no desempenho.

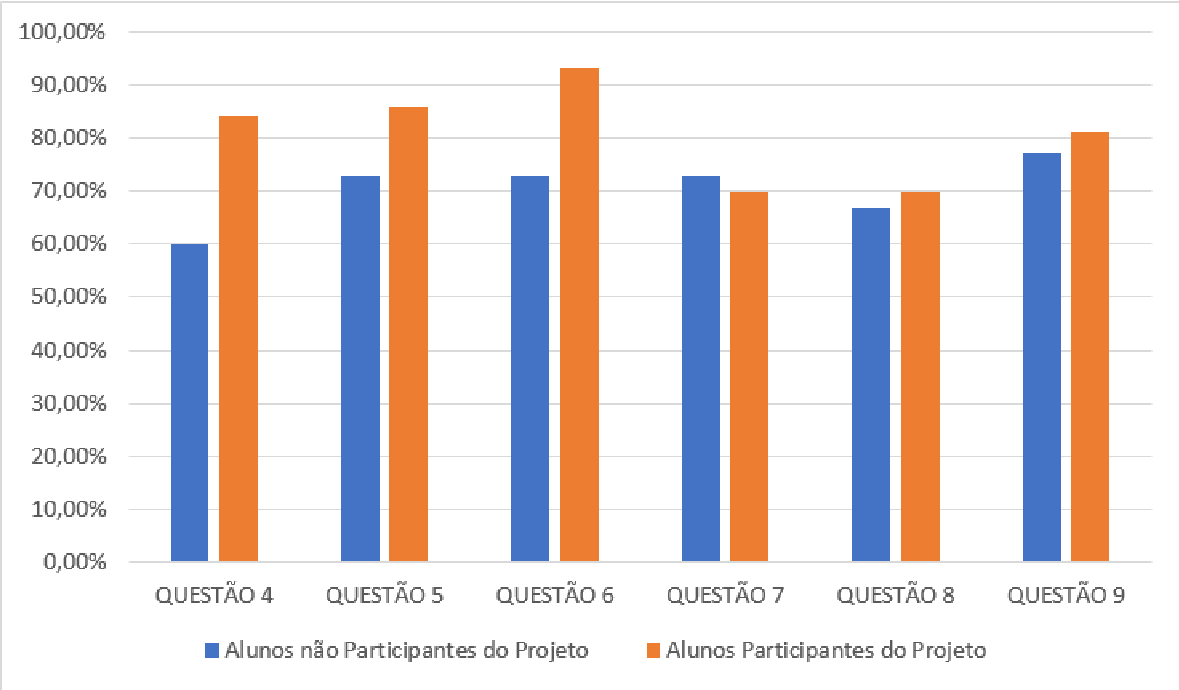
Pelas análises feitas, percebemos que antes dos encontros do projeto iniciarem, os alunos demonstraram possuir um nível de conhecimentos a respeito dos assuntos que seriam trabalhados ao longo da preparação bastante semelhantes, propiciando uma análise justa da evolução dos alunos ao final deste processo de estudos dos resultados.

6.2.2 Estudo dos Resultados - Teste Final

Seguindo a mesma ideia aplicada na seção anterior, iniciamos o estudo dos resultados obtidos por meio do Teste Final, buscando apresentar através de um gráfico de colunas, as porcentagens de acertos em cada uma das questões objetivas, tanto para os alunos participantes do projeto, como para aqueles que fizeram o teste, mesmo não participando do projeto.

Acompanhemos atentamente os dados presentes no gráfico da figura 6.8:

Figura 6.8: Desempenho no Teste Final



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Observando o gráfico da figura 6.8, percebemos a grande evolução ocorrida no desempenho dos alunos participantes do projeto, comparando com os resultados obtidos pelos alunos não participantes. Visualizamos um desempenho superior em 5 das 6 questões propostas, atingindo em uma delas uma diferença percentual de 24%.

Vale ressaltar, que apenas a questão 7 apresentou um desempenho inferior no comparativo feito anteriormente, questão esta que tratava do assunto de função afim - um tema trabalhado no 1ºano do ensino médio e que foi ministrado para todos os alunos deste ano de estudo, após a aplicação do teste inicial - o que deve ter colaborado para os alunos não participantes do projeto terem alcançado um desempenho um pouco melhor.

Fazendo agora um estudo envolvendo os gráficos das figuras 6.7 e 6.8, com ênfase no desempenho dos alunos participantes do projeto, verificamos que ocorreu um crescimento em todas as questões propostas, com destaque para a evolução de 56% no desempenho de um teste para o outro entre duas questões de mesma posição e assunto.

Além disso, por mais que nas questões 8 e 9 do gráfico da figura 6.8 apresentaram um equilíbrio no desempenho, relacionando essas questões presentes nos gráficos das figuras 6.7 e 6.8, notamos que para a questão 8 ocorreu uma queda no desempenho dos alunos não participantes do projeto, ao contrário dos alunos participantes, que houve uma evolução, e acompanhando a questão 9, o crescimento percebido para os alunos do projeto acabou sendo superior ao dos alunos que não participaram.

Dessa forma, por meio das questões dissertativas e das objetivas, foi possível construir através das argumentações, ideias de soluções apresentadas pelos alunos e por seus desempenhos realizados, o legado olímpico deixado a estes estudantes.

As análises executadas comprovaram um avanço não só de quem participou do projeto, mas todos aqueles que buscaram tomar conhecimento do que estava sendo ofertado para aquele ano de estudo.

Um dos propósitos lançados era colaborar com a evolução da qualidade dos conhecimentos olímpicos de matemática dos alunos de 1°ano do ensino médio da Escola Campo de Pesquisa, e este objetivo foi alcançado, cabendo aos participantes do projeto a partir de agora, levarem a mensagem repassada sobre o Portal da Matemática a outros estudantes que ainda desconhecem este ambiente e buscarem cada vez mais o aperfeiçoamento do que já possuem adquirido de conhecimentos.

Capítulo 7

Considerações Finais

Atendendo aos objetivos traçados para este estudo, conclui-se que foi possível nosso trabalho adequar-se dentro do horário das aulas - com aulas específicas - mesmo diante de um cenário pandêmico e alcançar a possibilidade de desenvolver de forma remota, o projeto que havia sido preparado para acontecer de forma presencial. Podendo perceber que em ambas formas (remota ou presencial) é viável a realização do mesmo.

Verificamos que as metodologias aplicadas foram eficazes no auxílio da exposição dos assuntos escolhidos para trabalhar como sendo os principais e mais contemplados nas provas de primeira fase da OBMEP.

Constatamos que os alunos adquiriram uma autonomia para que após as orientações recebidas, pudessem dar continuidade aos seus estudos no Portal da Matemática, reforçando o que foi orientado e com possibilidade de aprofundamento. Além de ter sido muito positivo e eficiente a possibilidade do acompanhamento do progresso dos alunos no Portal da Matemática, através de relatórios individuais com vastas informações à disposição - o que colaborou bastante para a análise da eficácia do projeto aplicado.

Conseguimos desenvolver nos alunos os objetivos que foram propostos, de já no primeiro ano do ensino médio, puderem desenvolver habilidades para trabalhar com questões olímpicas, que foi possível através das metodologias adotadas e do suporte dado pelo Portal da Matemática.

Pelos testes aplicados, concluímos que houve, de fato, uma qualificação nas apresentações das soluções dos problemas propostos, por meio de uma organização da sequência dos passos a serem realizados dentro da resolução, um maior cuidado na exposição das argumentações e notações matemáticas.

Também, percebemos que de um modo geral, ocorreu uma melhoria no desempenho dos alunos que participaram do projeto, seja nos testes aplicados, no interesse por questões desafiadoras/olímpicas e nos rendimentos escolares.

Infelizmente, por razão da Pandemia do vírus SARS-CoV-2, causador da doença

COVID-19, obtivemos perdas em relação a comprovação dessas evoluções por meio da OBMEP, a qual tínhamos a intenção de participar e alcançar um maior número de alunos do primeiro ano do ensino médio da Escola Campo de Pesquisa avançando para uma segunda fase, tomando por base os números apresentados na tabela da figura 5.1.

Pretende-se que este trabalho, mesmo de forma modesta, sirva de base para professores idealizarem alguma preparação olímpica da OBMEP no nível 3 e que com as devidas adequações, possa também ser utilizado para as demais olimpíadas de matemática que contemplam o ensino médio.

Esperamos que este estudo seja ampliado para as séries seguintes de ensino médio da Escola Campo de Pesquisa, outras escolas do município possam tomar conhecimento, usufruírem da metodologia aplicada e do suporte ofertado pelo Portal da Matemática, e que futuramente possamos estender este estudo para os níveis 1 e 2 da OBMEP que tratam do ensino fundamental, servindo de suporte também para demais preparações olímpicas.

Referências Bibliográficas

[1] ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap. 4. p. 193-217.

[2] BORGES NETO, H. et al. **A Sequência de Fedathi como Proposta Metodológica no Ensino aprendizagem de Matemática e sua Aplicação no Ensino de Retas Paralelas.** São Luiz/MA: XV Encontro de Pesquisa Educacional do Norte e Nordeste, 2000. Disponível em: http://www.multimeios.ufc.-br/arquivos/pc/fedathi/fedathi-a-sequencia-de-fedathi-como-proposta.pdf . Acesso em 04/12/2020.

[3] BORGES NETO, H. et al. (Org.). **Sequência fedathi:** uma proposta pedagógica para o ensino de matemática e ciências. Fortaleza: ed. UFC, 2013.

[4] BORGES NETO, H. & DIAS, A.M I. Desenvolvimento do raciocínio lógicomatemático no 1º Grau e Pré-Escola. Cadernos da Pós-Graduação em Educação: Inteligência–enfoques construtivistas para o ensino da leitura e da matemática. Fortaleza, UFC, 1999, v. 2.

[5] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC / SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf . Acesso em 04/11/2020.

[6] BROUSSEAU, G. Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996a. Cap. 1. p. 35-113.

[7] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** contexto & aplicações: ensino médio. 3.ed. São Paulo. Ática, 2016.

[8] FEDERAL, G. **Estatuto da criança e do adolescente.** Lei federal, v. 8, 1990, p. 35.

[9] GOMES, KEYSON GONDIM. **Olimpíada Cearense de Matemática (OCM): Laboratório de Oportunidades, Experiências e de Desenvolvimento da Matemática no Estado do Ceará.** 2019. 122 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2019.

[10] FERNANDES, José de Arimatéia; OLIVEIRA, Carlos Carneiro de. **Olimpíadas de Matemática:** Contextualizando o dia-a-dia. Campina Grande, PB. Sd.

[11] IBGE. **População.** Disponível em https://cidades.ibge.gov.br/brasil/ce/ipu/panorama. Acesso em 03/12/2020.

[12] MACHADO, S. **"Engenharia Didática"**. In: Educação Matemática – uma introdução. Machado, S. (Org.). São Paulo: Educ. 1999.

[13] MACIEL, Marcos, V. M. **Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP):** As Origens de um projeto de qualificação do ensino de matemática na educação básica. In: Anais. Encontro Gaúcho de Educação Matemática. Ijuí, RS. 2009. Disponível em: http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_19.pdf. Acesso em 04/11/2020.

[14] OBM. **A OBM**. Disponível em: https://www.obm.org.br/quem-somos/pagina-exemplo/ Acesso em 05/11/2020.

[15] ____. **HISTÓRICO**. Disponível em: https://www.obm.org.br/quem-somos/historico/ . Acesso em 05/11/2020.

[16] ____. **OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA (IMO)**. Disponível em: https://www.obm.org.br/olimpiada-internacional-de-matematica/ Acesso em 19/11/2020.

[17] OBMEP.**Apresentação**. Disponível em: http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm Acesso em 09/11/2020.

[18] ____. **Perguntas Frequentes**. Disponível em: http://www.obmep.org.br/faq.htm Acesso em 10/11/2020.

[19] SANTOS, Altemar José dos; BATISTA, Amanda Vieira; MELO, Fábia Santos. **A IMPORTÂNCIA DA OLIMPÍADA MUNICIPAL DE MATEMÁTICA NAS ESCOLAS PÚBLICAS DE ITABAIANINHA-SE (OMMEPI)**. Sergipe. 2018. Disponível em file:///C:/Users/rodol/Downloads/8927-34476-1-PB.pdf. Acesso em 03/09/2020.

Apêndice A

- Autorização Institucional do Projeto de Pesquisa

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ – UFPI
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA – CCN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT
ORIENTADOR: Prof. Dr. CARLOS HUMBERTO SOARES JÚNIOR
PESQUISADOR: Rodolfo Soares Teixeira

PROFMAT

Eu **JOÃO MARCONI PAZ FILHO**, abaixo assinado, responsável pela **E.E.E.P. ANTÔNIO TARCÍSIO ARAGÃO**, autorizo a realização do projeto *Preparação Olímpica: Uma intervenção através do Portal da Matemática*, a ser conduzido pelo pesquisador **Rodolfo Soares Teixeira**.

Fui informado, pelo responsável do projeto, sobre as características e objetivos da pesquisa, bem como das atividades remotas que serão realizadas na instituição a qual represento.

Esta instituição está ciente de suas responsabilidades como instituição co-participante do presente projeto de pesquisa e de seu compromisso no resguardo da segurança e bem-estar do sujeitos de pesquisa nela recrutados, dispondo de infra-estrutura tecnológica para a garantia de tal segurança e bem-estar.

Ipu-CE, 03 de agosto de 2020.

João Marconi Paz Filho
Diretor Escolar

João Marconi Paz Filho
Diretor Escolar
Mat: 305867-1-9
D.O.E Nº 116 - 22/06/17

Dados do pesquisador:
Rodolfo Soares Teixeira
Rua Félix Pereira Martins, 257, Canudos, Ipu – Ceará
Celular: (88) 999269498 email: rodolphost@gmail.com

Apêndice B

- Formulário de Inscrição

20/03/2021 Formulário de Inscrição - Preparação Olímpica: Uma intervenção através do Portal da Matemática.

Formulário de Inscrição - Preparação Olímpica: Uma intervenção através do Portal da Matemática.

Este formulário tem como propósito identificar alunos de 1º ANO do Ensino Médio da E.E.E.P. Antonio Tarcísio Aragão, localizada na cidade de Ipu - CE, que tenham interesse, disponibilidade e compromisso em aprofundar seus estudos nos conteúdos abordados pela OBMEP, através de aulas direcionadas utilizando como suporte paralelo o Portal da Matemática.

*Obrigatório

1. Nome (COMPLETO) *

____

2. Curso *

Marcar apenas uma oval.

- ◯ Técnico em Administração.
- ◯ Técnico em Agronegócio.
- ◯ Técnico em Enfermagem.
- ◯ Técnico em Informática.

3. Telefone para contato (WhatsApp) *

____

4. O que lhe faz ter interesse em participar deste projeto? *

Marcar apenas uma oval.

- ◯ Aperfeiçoar e aprofundar meus conhecimentos.
- ◯ Desejo tornar-me um medalhista.
- ◯ As questões desafiadoras me motivam.

https://docs.google.com/forms/d/14z3Lr1b84BFx5o-ljbgak7ZwvWJ4E3pMTRibOUrEmDQ/edit 1/2

5. Qual meio tecnológico você usará para acompanhar as aulas? *

Marcar apenas uma oval.

- Celular
- Notebook ou Computador.
- Tenho acesso as duas ferramentas.
- Outros.

6. Escreva por qual motivo você deve ser selecionado para participar deste projeto? *

7.

Este conteúdo não foi criado nem aprovado pelo Google.

Google Formulários

Apêndice C

- Teste Inicial

20/03/2021 Teste Inicial.

Teste Inicial.

Bom dia! Este teste tem como propósito verificar seus conhecimentos perante os assuntos abordados na OBMEP 1ª FASE. Você terá o prazo máximo de até 1 hora e 30 minutos para a conclusão deste teste, com previsão de realização das 10h às 11h30min do dia 11/08/2020.
Procure não realizar consultas ou pesquisas, qualquer dúvida entre em contato e desde já agradeço a sua participação.

*Obrigatório

1. Nome (COMPLETO) *

2. Curso *

Marcar apenas uma oval.

- ( ) Técnico em Administração.
- ( ) Técnico em Agronegócio.
- ( ) Técnico em Enfermagem.
- ( ) Técnico em Informática.

Bloco de questões dissertativas.

Responda com atenção, anexando os cálculos ou seu raciocínio, em cada uma dessas 3 primeiras questões, divirta-se!

https://docs.google.com/forms/d/1biWnzTquGK_Ux3TpAel27xRq-u9NtW71Js7DpbLaBl/edit 1/6

3. 01- Maria começou a guardar moedas de 1 real com o intuito de juntar dinheiro para comprar um celular em 6 meses. Ela começou com dois reais e a cada dia juntava mais 3 reais do lanche, como ilustra a figura abaixo. *

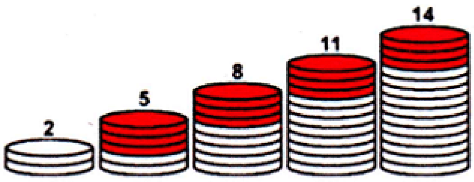
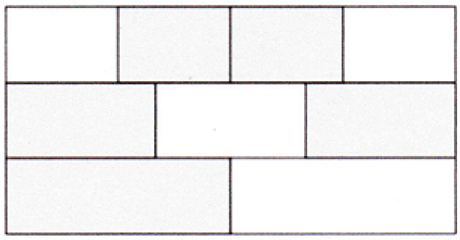


Figura: OlabsMathematics/ArithmeticProgression

Ao final de 182 dias quanto de dinheiro ela terá guardado?

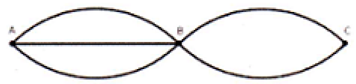
Arquivos enviados:

4. 02- A figura representa um retângulo de área 36 m², dividido em três faixas de mesma largura. Cada uma das faixas está dividida em partes iguais: uma em quatro partes, outra em três e a terceira em duas. Qual é a área total das partes sombreadas? *



Arquivos enviados:

5. 03- Considere três cidades A, B e C, de forma tal que existem três estradas ligando A à B e dois caminhos ligando B à C. *



a) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B?
b) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B, e voltar para A novamente, passando por B?

Arquivos enviados:

Bloco de questões objetivas.

Responda com atenção, cada uma das 6 próximas questões, divirta-se!

6. 04- "Em fevereiro, o governo da Cidade do México, metrópole com uma das maiores frotas de automóveis do mundo, passou a oferecer à população bicicletas como opção de transporte. Por uma anuidade de 24 dólares, os usuários têm direito a 30 minutos de uso livre por dia. O ciclista pode retirar em uma estação e devolver em qualquer outra e, se quiser estender a pedalada, paga 3 dólares por hora extra." * 1 ponto

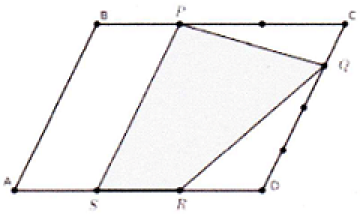
(Revista Exame. 21 abr. 2010.)

A expressão que relaciona o valor f pago pela utilização da bicicleta por um ano, quando se utilizam x horas extras nesse período é:

Marcar apenas uma oval.

- a) f(x) = 3x.
- b) f(x) = 24.
- c) f(x) = 27.
- d) f(x) = 3x + 24.
- e) f(x) = 24x + 3.

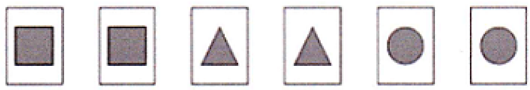
7. 05-No desenho abaixo, o paralelogramo ABCD possui área 24cm² e os pontos marcados nos lados o dividem em partes iguais. Logo a área da região sombreada será igual a: * 1 ponto



Marcar apenas uma oval.

- a) 6m²
- b) 8m²
- c) 11m²
- d)16m²
- e) 24m²

8. 06- Em um curso de computação, uma das atividades consiste em criar um jogo da memória com as seis cartas mostradas a seguir. * 1 ponto



Em seguida, o primeiro jogador vira duas cartas e tenta formar um par. A probabilidade de que o primeiro jogador forme um par em sua primeira tentativa é

Marcar apenas uma oval.

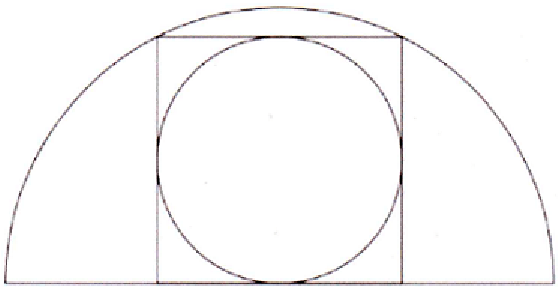
- a) 1/2
- b) 1/3
- c) 1/4
- d) 1/5
- e) 1/6

9. 07- Uma função f : IR+ → IR+, satisfaz à condição f(5x) = 5f(x), ∀x ∈ IR+. Se f(125) = 5, qual é o valor de f(1)? * 1 ponto

Marcar apenas uma oval.

- a) 125
- b) 5
- c) 1
- d) 1/5
- e) 1/25

10. 08- O quadrado da figura está inscrito no semicírculo e o círculo está inscrito no quadrado. O círculo tem área igual a 10 cm². Qual é a área do semicírculo? * 1 ponto



Marcar apenas uma oval.

- a) 25 cm²
- b) 30 cm²
- c) 35 cm²
- d) 40 cm²
- e) 45 cm²

11. 09- Um automóvel comporta dois passageiros nos bancos da frente e três no banco traseiro. Qualquer uma das 7 pessoas, dentre elas Pedro que tem 5 anos de idade e portanto não pode sentar na parte da frente do carro, pode ser escolhida para entrar no automóvel. Dessa forma, o número de maneiras distintas de lotar este automóvel será igual a: * — 1 ponto

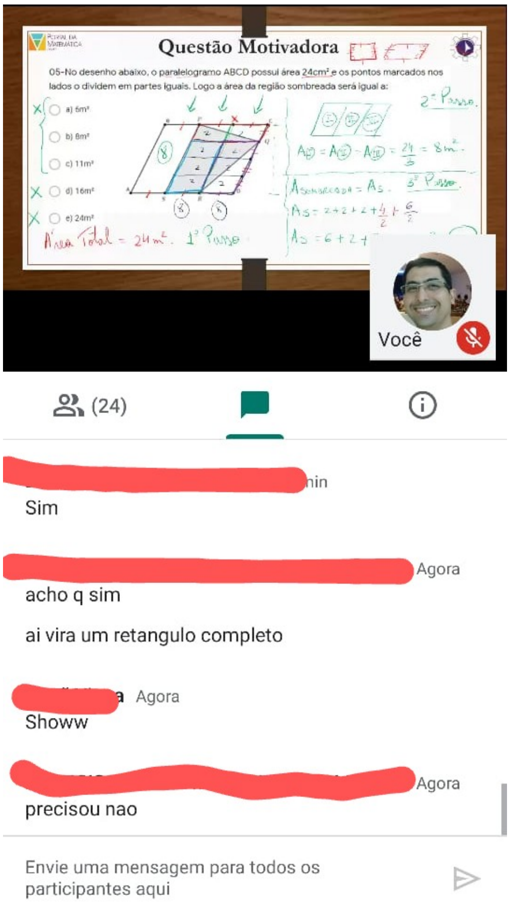
Marcar apenas uma oval.

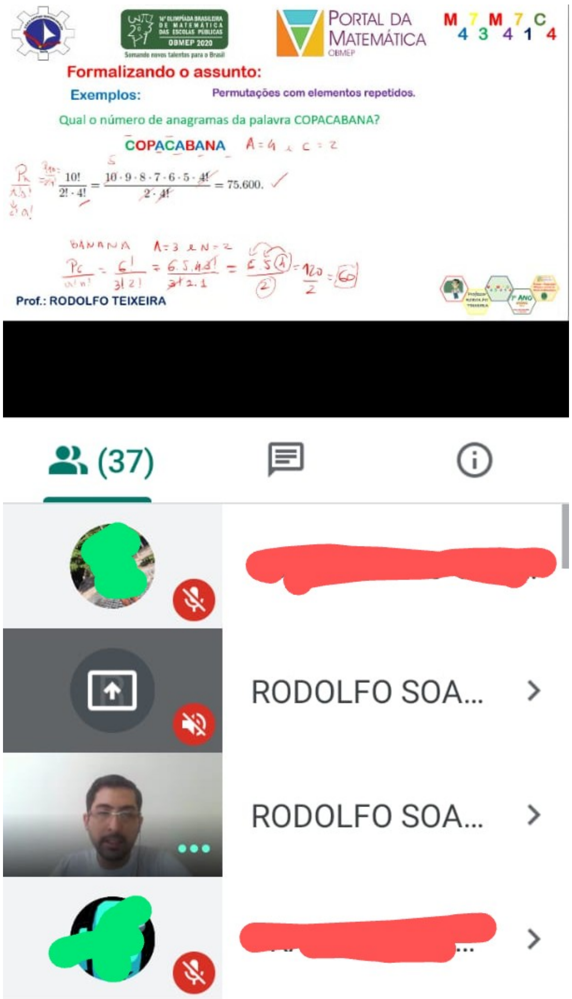
- a) 5040
- b) 2520
- c) 1800
- d) 1080
- e) 720

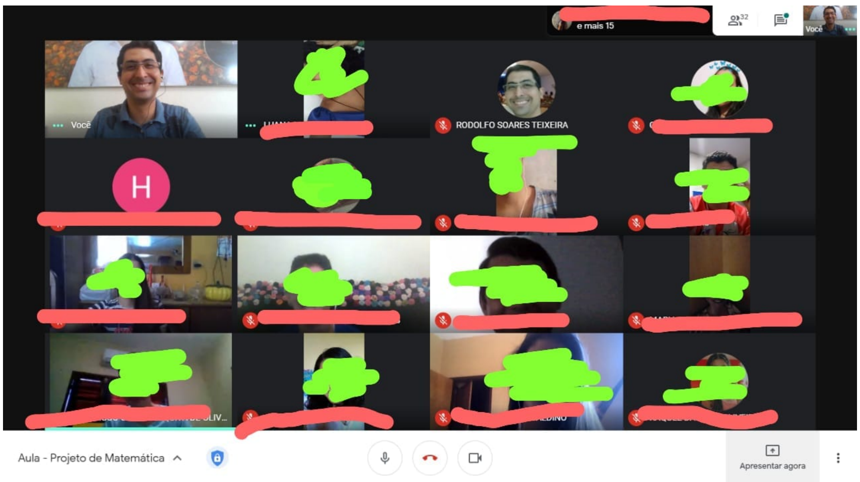
12.

Apêndice D

- Registros Fotográficos




PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP
Formalizando o assunto:
Exemplos:
Permutações com elementos repetidos.
Qual o número de anagramas da palavra COPACABANA?
COPACABANA
Prof.: RODOLFO TEIXEIRA
(37)
RODOLFO SOA...
RODOLFO SOA...


e mais 15
Você
RODOLFO SOARES TEIXEIRA
H
Aula - Projeto de Matemática
Apresentar agora

Apêndice E

- Teste Final

20/03/2021 Teste Final.

Teste Final.

Bom dia! Este teste tem como propósito verificar seus conhecimentos perante os assuntos abordados na OBMEP 1ª FASE. Você terá o prazo máximo de até 1 hora e 30 minutos para a conclusão deste teste, com previsão de realização das 10h10min às 11h40min do dia 11/11/2020.
Procure não realizar consultas ou pesquisas, qualquer dúvida entre em contato e desde já agradeço a sua participação.

*Obrigatório

1. Nome (COMPLETO). *

2. Curso. *

Marcar apenas uma oval.

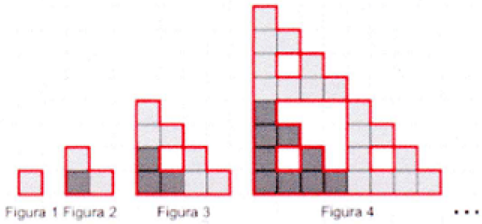
- ◯ Técnico em Administração.
- ◯ Técnico em Agronegócio.
- ◯ Técnico em Enfermagem.
- ◯ Técnico em Informática.

Bloco de questões dissertativas.

Responda com atenção, anexando os cálculos ou seu raciocínio, em cada uma dessas 3 primeiras questões, divirta-se!

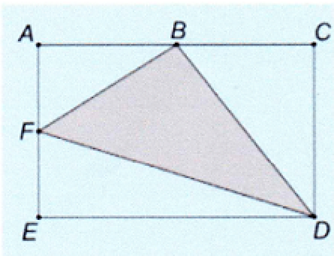
https://docs.google.com/forms/d/1N6tmqea97Rigzm_-XFT6hQ7uNfYf6ypl2gOOWBkvljg/edit 1/6

3. 01- Começando com um quadrado de 1 cm de lado, formamos uma sequência de figuras, como na ilustração. Cada figura, a partir da segunda, é formada unindo-se três cópias da anterior. Os contornos destacados em vermelho das quatro primeiras figuras medem, respectivamente, 4 cm, 8 cm, 20 cm e 56 cm. Quanto mede o contorno da Figura 6? *



Arquivos enviados:

4. 02- O retângulo da figura possui área igual a 640 cm². Os pontos B e F são pontos médios dos lados AC e AE, respectivamente. Qual é a área do triângulo BDF? *



Arquivos enviados:

5. 03- Um construtor dispõe de quatro cores (verde, amarelo, cinza e bege) para pintar cinco casas dispostas lado a lado. Ele deseja que cada casa seja pintada com apenas uma cor e que duas casas consecutivas não possuam a mesma cor. Por exemplo, duas possibilidades diferentes de pinturas estão indicadas abaixo: Primeira: verde, amarelo, bege, verde, cinza; Segunda: verde, cinza, verde, bege, cinza. Quantas são as possibilidades? *

Arquivos enviados:

Bloco de questões objetivas.

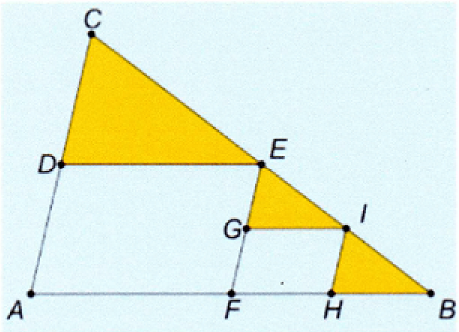
Responda com atenção, cada uma das 6 próximas questões, divirta-se!

6. 04- O salário de João é 500 reais mais 50% do valor de suas vendas. Sendo S o seu salário e x o valor de suas vendas, a função que representa essa situação é: *

Marcar apenas uma oval.

- (A) S(x) = 500x.
- (B) S(x) = 500 + x.
- (C) S(x) = 500 + x/2.
- (D) S(x) = 500 − x.
- (E) S(x) = 500 - x/2.

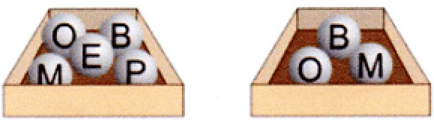
7. 05- Na figura abaixo, D, E e F são pontos médios dos lados do triângulo ABC, e G, H e I são pontos médios dos lados do triângulo FBE. A área do triângulo ABC é 48 cm². Qual é a área da região destacada em amarelo? *



Marcar apenas uma oval.

- (A) 24 cm²
- (B) 22 cm²
- (C) 20 cm²
- (D) 18 cm²
- (E) 16 cm²

8. 06- Em uma caixa há cinco bolas idênticas, com as letras O, B, M, E e P. Em uma segunda caixa há três bolas idênticas, com as letras O, B e M. Uma bola é sorteada da primeira caixa e, a seguir, outra bola é sorteada da segunda caixa. Qual é a probabilidade de que essas bolas tenham a mesma letra? *



Marcar apenas uma oval.

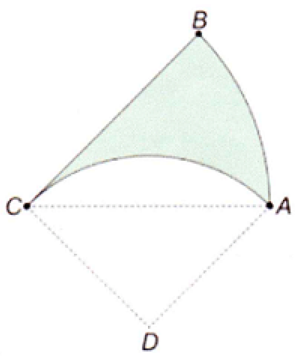
- (A) 1/2
- (B) 1/3
- (C) 1/4
- (D) 1/5
- (E) 1/6

9. 07- Uma função f é tal que f(1 - x) +2f(x) = 3x, para todo x real. Qual é o valor de f(0) ? *

Marcar apenas uma oval.

- (A) 2
- (B) 1
- (C) 0
- (D) - 1
- (E) - 2

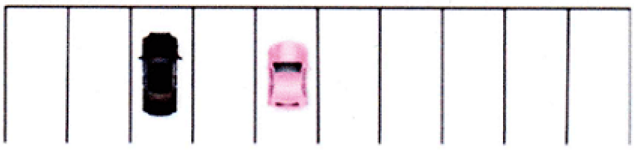
10. 08- Na figura, o arco AC é um quarto de uma circunferência de centro D e o arco AB é um oitavo de uma circunferência de centro C. O segmento AD mede 2 cm. Qual é a área em cm² da região verde? *



Marcar apenas uma oval.

- (A) 4π
- (B) 2π
- (C) 4
- (D) π
- (E) 2

11. 09- Um estacionamento tem 10 vagas, uma ao lado da outra, inicialmente todas livres. Um carro preto e um carro rosa chegam a esse estacionamento. De quantas maneiras diferentes esses carros podem ocupar duas vagas de forma que haja pelo menos uma vaga livre entre eles? *



Marcar apenas uma oval.

- (A) 80
- (B) 72
- (C) 71
- (D) 70
- (E) 56

12.

Apêndice F

- Frequência dos Alunos

Tabela F.1: Frequência dos Alunos por Encontro

*	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10
A1	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
A2	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
A3	P	P	F	P	P	P	F	P	P	P
A4	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
A5	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
A6	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
A7	P	P	P	F	P	P	P	F	P	P
A8	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
A9	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
A10	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
A11	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
A12	P	P	F	P	F	P	P	P	F	P
A13	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
A14	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
A15	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
A16	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
A17	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
A18	P	P	F	P	P	F	P	F	P	F
A19	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
A20	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
A21	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
A22	P	P	P	F	P	P	P	P	F	P
A23	P	P	F	P	P	P	F	P	P	P
A24	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
A25	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
A26	P	P	P	F	P	P	P	F	P	P
A27	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
A28	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
A29	P	P	P	P	F	P	P	P	P	P
A30	P	P	P	P	P	P	P	P	P	F
A31	P	P	P	P	P	P	P	P	F	P
A32	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
A33	P	P	P	P	F	P	P	P	P	P
A34	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
A35	P	P	P	P	P	F	P	P	P	P
A36	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
A37	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
A38	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
A39	P	P	P	F	P	P	P	P	P	P
A40	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
A41	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
A42	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
A43	P	P	P	P	P	P	P	P	F	P
A44	P	P	P	P	P	F	P	P	P	P
A45	P	P	P	P	P	P	P	P	F	P
A46	P	P	P	P	P	F	P	P	P	P
A47	P	P	F	P	P	P	P	P	P	P

*ALUNOS\ENCONTROS

*	E11	E12	E13	E14	E15	E16	E17	E18	E19	E20	%
A1	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
A2	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
A3	F	P	P	P	F	P	P	P	F	P	75
A4	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
A5	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
A6	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
A7	P	F	P	F	P	F	P	P	P	F	70
A8	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
A9	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
A10	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
A11	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
A12	P	P	F	P	P	P	P	P	P	P	80
A13	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
A14	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
A15	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
A16	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
A17	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
A18	P	P	F	P	P	P	F	P	P	F	65
A19	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
A20	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
A21	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
A22	F	P	P	P	P	F	P	F	P	P	75
A23	P	F	P	P	F	P	P	P	P	P	80
A24	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
A25	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
A26	P	P	P	F	P	P	F	P	F	P	75
A27	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
A28	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
A29	P	P	F	P	P	P	F	P	P	P	85
A30	P	P	P	F	P	P	P	F	P	F	80
A31	P	P	P	P	F	P	P	P	P	P	90
A32	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
A33	P	F	P	P	P	P	F	P	F	P	80
A34	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
A35	F	P	F	P	P	P	P	F	P	F	75
A36	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
A37	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
A38	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
A39	P	F	P	P	P	F	P	P	P	P	85
A40	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
A41	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
A42	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	100
A43	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	95
A44	F	P	P	P	F	P	P	F	F	P	75
A45	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	95
A46	F	P	F	P	F	P	F	P	F	P	70
A47	P	F	P	F	P	F	P	F	P	F	70

*ALUNOS\ENCONTROS