



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

# INTRODUÇÃO À GEOMETRIA FRACTAL

Delano Vieira de Moura

Teresina  
2016

**Delano Vieira de Moura**

**Dissertação de Mestrado:**

**INTRODUÇÃO À GEOMETRIA FRACTAL**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa

**Teresina**

**2016**

FICHA CATALOGRÁFICA  
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí  
Biblioteca Setorial do CCN

M929i Moura, Delano Vieira de.  
Introdução à geometria fractal / Delano Vieira de Moura –  
Teresina, 2016.  
42f.: il.color

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade  
Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-  
Graduação em Matemática, 2016.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa.

1. Geometria Não Euclidiana. 2. Geometria Fractal. I.  
Título

CDD 516.9



PROFMAT



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

---

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada: Introdução à Geometria Fractal, defendida por Delano Vieira de Moura em 28/03/2016 e aprovada pela banca constituída pelos professores:

*Paulo Alexandre Araújo Sousa*

Presidente da Banca Examinadora

---

Examinador

*Marcos Wildson Alves Nery*

---

Examinador Externo

*À minha esposa Kris e a minha filha Ayna, pelo apoio e amor incondicional, vocês são o motivo maior de toda alegria na minha vida.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus sem O qual nada seria possível.

À minha esposa Kris pelo companheirismo incondicional e pela força dada em todas as minhas decisões.

À minha filha Ayna por ser minha alegria de todas as horas.

Aos meus tios “pais”, Isabel e Martinho, sem vocês eu não teria chegado até aqui.

Ao Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa, pelas orientações, pela cordialidade, pela atenção, pela paciência e pela competência em ensinar.

Aos professores do PROFMAT-UFPI pelo compromisso, seriedade e competência com que tratam a educação.

Aos queridos amigos Marcos Nery e Waldemir Jucá, pelo grande incentivo e ajuda para conclusão desse mestrado.

Aos amigos de turma do PROFMAT, em particular meus irmãos de curso Bruno, Gideone, Gilson, Huerllen, Jerson, Pedro, Raimundo, Renné, Rubens e Samuel pelos momentos compartilhados de angústias, alegrias, descontração, e principalmente pelas manhãs e tardes de estudos, sem vocês essa jornada teria sido muito mais difícil.

À CAPES pelo apoio financeiro que possibilitou a concretização deste Mestrado.

*“É muito melhor lançar-se em busca de conquistas grandiosas, mesmo expondo-se ao fracasso, do que alinhar-se com os pobres de espírito, que nem gozam muito nem sofrem muito, porque vivem numa penumbra cinzenta, onde não conhecem nem vitória, nem derrota.”*

Theodore Roosevelt

# Resumo

Este trabalho tem como objetivo fazer uma introdução ao estudo da geometria fractal, com suas principais características e propriedades. Nos primeiros capítulos falaremos sobre autossimilaridade, complexidade infinita e dimensão fractal, mostraremos como calcular a dimensão de fractais naturais e suas diferenças com um fractal matemático. Em seguida, construiremos os principais fractais clássicos de forma recursiva, calcularemos comprimento, área e volume de alguns e suas respectivas dimensões. O conceito de transformações autossimilantes, transformações afim e sistemas de funções iterativas também serão tratados mais a frente nessa dissertação, abrindo mão do aprofundamento de pesquisa científica que o tema requeria, pois este não é objetivo deste trabalho, mas sim, dar um norte para o estudo da geometria fractal como ferramenta de análise do nosso mundo de uma forma mais ampla, algo que a geometria euclidiana tão estudada em todos os níveis de ensino não consegue passar de forma total com suas linhas retas, polígonos e círculos. Dessa forma, procuramos no decorrer desta dissertação apresentar a geometria fractal e suas formas complexas como um complemento ao estudo da geometria euclidiana e procurar representações mais próximas das formas naturais encontradas à nossa volta.

**Palavras-chave:** Fractais, Geometria Fractal, Fractais Clássicos.

# Abstract

This paper aims to introduce the study of fractal geometry, with its main features and properties. In the first chapters we will talk about selfsimilarity, infinite complexity and fractal dimension, we will show how to calculate the size of natural fractals and their differences with a mathematical fractal. Then, we will build the main fractals classic in a recursive way, calculate length, area and volume of a few of them and their dimensions. The concept of selfsimilarity transformations, transformations related to them and iterative function systems will also be treated forward in this dissertation, giving up the scientific research required by the topic as this is not the objective of this work, but to give a route to the study of fractal geometry as an analysis tool in our world in a broader way, something that Euclidean geometry so studied at all educational levels cannot exceed the overall shape with its straight lines, polygons and circles. Thus we seek in the course of this dissertation presenting the fractal geometry and their complex forms as a complement to the study of Euclidean geometry and seeking closer representations of natural forms found around us.

**Keywords:** Fractals, Fractal geometry, Classic Fractals.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>1 Fractais: Propriedades, Características e Dimensão</b>	<b>15</b>
1.1 Propriedades e Características . . . . .	15
1.2 Dimensão Fractal . . . . .	16
1.3 Dimensões de Objetos Naturais . . . . .	19
<b>2 Fractais Clássicos</b>	<b>22</b>
2.1 Conjunto de Cantor . . . . .	22
2.2 Curva de Peano . . . . .	28
2.3 Curva de Hilbert . . . . .	30
2.4 Curva e Floco de Neve de Koch . . . . .	32
2.4.1 A Curva de Koch . . . . .	32
2.4.2 O Floco de Neve de Koch . . . . .	33
2.5 Curva, Triângulo e Tapete de Sierpinski . . . . .	36
2.5.1 Curva de Sierpinski . . . . .	36
2.5.2 Triângulo de Sierpinski . . . . .	37
2.5.3 Tapete de Sierspinski . . . . .	40
2.6 Esponja de Menger . . . . .	41
2.7 Tetraedro de Sierpinski . . . . .	44
2.8 Samambaia de Barnsley . . . . .	45
<b>3 Transformações Autossemelhantes e Afins</b>	<b>47</b>
3.1 Transformações Autossemelhantes . . . . .	47
3.2 Transformações Afim . . . . .	49
3.3 Autossemelhança e Afinidades . . . . .	52

<b>Sumário</b>	<b>9</b>
<hr/>	
<b>4 Fractais Iterativos</b>	<b>56</b>
4.1 Sistemas de Funções Iterativas . . . . .	56
4.2 Conjunto de Julia . . . . .	59
4.3 Conjunto de Mandelbroat . . . . .	62
<b>5 Geometria Fractal e Arte</b>	<b>65</b>
<b>Considerações Finais</b>	<b>67</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>69</b>

# Lista de Figuras

1.1	Autossemelhança . . . . .	16
1.2	Floco de Neve de Koch . . . . .	17
1.3	Divisão do Segmento de Reta . . . . .	18
1.4	Divisão do Quadrado . . . . .	18
1.5	Divisão do Cubo . . . . .	19
1.6	Trecho do Rio Amazonas . . . . .	20
1.7	Gráfico $\log n$ x $\log 1/s$ . . . . .	21
2.1	Conjunto de Cantor . . . . .	23
2.2	Conjunto de Cantor - primeiras etapas . . . . .	23
2.3	Curva de Peano . . . . .	29
2.4	Etapa 1 da construção da Curva de Hilbert . . . . .	31
2.5	Etapa 2 da construção da Curva de Hilbert . . . . .	31
2.6	Curva de Koch . . . . .	33
2.7	Floco de Neve de Koch . . . . .	34
2.8	Curva de Sierpinski . . . . .	37
2.9	Triângulo de Sierpinski . . . . .	38
2.10	Codificação para o Triângulo de Sierpinski . . . . .	39
2.11	Codificação para o Triângulo de Sierpinski . . . . .	40
2.12	Tapete de Sierpinski . . . . .	40
2.13	Esponja de Menger . . . . .	42
2.14	Parte removida da esponja de Menger . . . . .	42
2.15	Tetraedro de Sierpinski . . . . .	44
2.16	Samambaia de Barnsley . . . . .	46
3.1	Transformações Afins . . . . .	50

---

3.2	Transformação afim . . . . .	51
3.3	Transformação Linear . . . . .	52
3.4	Autossemelhança na Curva de Koch . . . . .	53
3.5	Fractal 1 . . . . .	54
3.6	Fractal 2 . . . . .	54
3.7	Samambaia de Barnsley . . . . .	54
4.1	Imagem Atratora . . . . .	57
4.2	Conjuntos de Julia . . . . .	61
4.3	Conj. de Mandelbroat 1 . . . . .	63
4.4	Conj. de Mandelbroat 2 . . . . .	63
4.5	Conj. de Mandelbroat 3 . . . . .	64
4.6	Conj. de Mandelbroat 4 . . . . .	64
4.7	Conjuntos de Julia no Conjunto de Mandelbroat . . . . .	64
5.1	Fractais e Arte 1 . . . . .	66
5.2	Fractais e Arte 2 . . . . .	66
5.3	Fractais e Arte 3 . . . . .	66
5.4	Fractais e Arte 4 . . . . .	66

# Introdução

Desde a antiguidade as pessoas buscam explicar as formas da natureza através da Matemática, alguns matemáticos famosos como Galileu e Descartes buscavam em suas pesquisas figuras geométricas perfeitas como o círculo, a elipse e a parábola. Acreditava-se, segundo Ricieri [10], que desde os *Elementos* de Euclides que a natureza não tinha escolha a não ser usar figuras geométricas perfeitas, muito se vê nos livros matemáticos de hoje essas lindas representações da natureza e suas formas perfeitas, como os alvéolos hexagonais criados pelas abelhas em suas colmeias, a forma quase circular da Terra, as órbitas elípticas dos planetas ao redor do Sol.

Mas, há algum tempo os cientistas perceberam que nem todas as formas do universo poderiam ser descritos pela geometria tradicional, pois as formas de um litoral quando se observa um mapa, o curso de um rio, as formas das dunas em uma praia, entre outros objetos não são perfeitos na sua forma, não são linhas retas, círculos ou esferas. Segundo Mandelbrot[7] (1977 aput Stewart, 1991, pág. 232) em *The Fractal Geometry of Nature*: “Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, litorais não são círculos, a casca de uma árvore não é lisa e tampouco a luz viajava em linha reta”.

No fim do século passado percebeu-se a necessidade de uma geometria que explicasse essas “imperfeições” da natureza, e em 1975, Benoit Mandelbrot, em seus estudos sobre essa nova geometria criou o termo *fractal*, palavra que deriva do latim *fractus*, adjetivo do verbo *frangere*, que significa quebrar: criar fragmentos irregulares, fragmentar. O estudo dos fractais tenta explicar esses objetos complexos derivados da imprevisibilidade dos fenômenos naturais e desempenham importante papel em áreas bem distintas da Matemática, como topologia, sistemas dinâmicos e teoria dos números. Essa nova geometria está ligada a uma ciência chamada de Caos, que busca padrões onde antes não parecia existir nenhum, procura ordenar o que parecia ser aleatório, dar regularidade ao que parecia possuir formas totalmente irregulares, estudando fenômenos atmosféricos, variação

de populações, dentre tantos outros.

A Geometria Fractal refere-se ao estudo destes fractais, buscando explicar suas características, propriedades e aplicações do mundo real. Fractal é uma forma na qual as partes se assemelham ao todo sob alguns aspectos, ou seja, é um objeto que apresenta invariância na sua forma à medida que a escala na qual é analisado, é alterada, mantendo-se a forma idêntica a original. Essa propriedade é conhecida como autossemelhança. O objetivo desta dissertação é introduzir o estudo da Geometria Fractal, apresentar as propriedades e características dos fractais, passando pelos fractais clássicos que foram precursores e base para a construção dessa geometria, veremos, através de suas iterações a sua construção, o cálculo de suas dimensões, áreas e volumes. Apesar da geometria desse objetos ser muito complexa, tentaremos explicá-la de forma simples, exigindo poucos requisitos, mas oferecendo exemplos muito valiosos e interessantes. Também passaremos pelo estudo das transformações autossemelhantes, transformações afins e sistemas de funções iterativas, finalmente chegando na construção do Conjunto de Julia e no Conjunto de Mandelbroat.

Os fractais e suas propriedades básicas foram estudados nos últimos séculos por vários matemáticos em diversas partes do mundo. Dentre os mais conhecidos estão George Cantor, Giuseppe Peano, David Hilbert, Helge Von Koch, Waclaw Sierpinski, Gaston Julia, entre muitos outros. Estes matemáticos descreveram em seus trabalhos figuras estranhas que em muito diferem da geometria euclidiana, sendo considerados “casos patológicos” e conhecidos como “monstros matemáticos”. Segundo Stewart [12], a pesquisas destes casos, às vezes sem nenhum vínculo aparente, algumas vezes em campos diferentes da ciência se fundiram na imaginação de Benoit Mandelbroat, dando origem a esse novo modelo de geometria para explicar a natureza.

## **Benoit Mandelbroat - Algumas notas históricas**

Considerado como pai da Geometria Fractal, Benoit Mandelbroat, nasceu em Varsóvia (1924), de família judia, da Lituânia. Em 1936 sua família mudou-se para Paris. Na época havia o movimento do grupo Bourbaki (ou “clube” Bourbaki), do qual participava um determinado número fixo de jovens matemáticos, que buscavam a reconstrução da matemática francesa e entre eles encontrava-se seu tio Szolem Mandelbroat. Segundo Barbosa [2], o grupo Bourbaki visava uma matemática formal e pura, sem influências

possivelmente enganosas do visual geométrico. As ideias se propagaram por vários países, atingindo inclusive os Estados Unidos. A Matemática tornou-se mais rigorosa, pautando-se pelo método axiomático. Entretanto, mesmo diante das ideias de seu tio, Mandelbrot não suportou o predomínio da abstração imposta por Bourbaki e deixou a França em 1948, indo estudar Ciência Aeroespacial nos Estados Unidos, tendo conseguido posteriormente um cargo na IBM - Centro de Pesquisas Thomas Watson, que na época prestigiava projetos de pesquisa.

Na IBM deparou-se com questões de ruídos nas linhas telefônicas utilizadas em rede de computadores. Mandelbrot soube dos engenheiros que alguns ruídos não podiam ser eliminados e interferiam nos sinais, e a irregularidade e aleatoriedade dos ruídos afastavam os engenheiros da busca de soluções. Resolveu o problema aplicando um antigo trabalho de Georg Cantor chamado de Poeira de Cantor, pensando nos erros de transmissão como um desses conjuntos de Cantor. A modelagem de problemas como esse usando o auxílio de recursos computacionais, culminou no livro *Les objets fractals, forme, hasard et dimension*, em 1975, onde analisa esses fenômenos irregulares. Benoit Mandelbrot chegou à fama e obteve honrarias, passando a ocupar vários cargos acadêmicos, desde de professor em Havard ou professor de Fisiologia na Faculdade Einstein de Medicina. Sua vasta gama de trabalhos publicados inclui os seguintes livros: *Les objets fractals, forme, hasard et dimension*, Paris, Flammarion, 1975, *Fractals: form, chance and dimension*, San Francisco, Freeman, 1977, e sua obra reformulada e mais famosa: *The Fractal Geometry of Nature*, New York, 1977.

# Capítulo 1

## Fractais: Propriedades, Características e Dimensão

### 1.1 Propriedades e Características

De forma técnica, fractal é um objeto que apresenta invariância na sua forma à medida em que a escala na qual o mesmo é analisado, é alterada, mantendo a sua estrutura idêntica ao original. Segundo Mandelbrot [7], fractal é, por definição um conjunto para o qual a dimensão de Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica e cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos.

As principais propriedades que caracterizam os fractais são a autossimilaridade, a complexidade infinita e a sua dimensão. A autossimilaridade é identificada quando uma porção de uma figura ou de um contorno pode ser vista como uma réplica do todo, numa escala menor. A complexidade infinita refere-se ao fato de que o processo de geração de uma figura, definida como sendo um fractal, é recursivo. Isto é, quando realizamos um determinado procedimento, ele é repetido na próxima etapa de construção desse fractal e vale ressaltar que na construção de um fractal dispõem-se de um número infinito de procedimentos a serem executados, gerando assim uma estrutura infinitamente complexa. Finalmente, a dimensão fractal, ao contrário do que acontece na Geometria Euclidiana, não é necessariamente um valor inteiro. Nela, um ponto possui dimensão zero, uma linha dimensão um, uma superfície dimensão dois e um corpo dimensão três. No caso da dimensão fractal, ela é uma quantidade fracionária, representando o grau de ocupação da estrutura no espaço que a contém. Como exemplos, pode-se citar a dimensão fractal da

bacia fluvial do rio Amazonas que é 1,85, dos relâmpagos no espaço tridimensional 1,51, dentre outros.

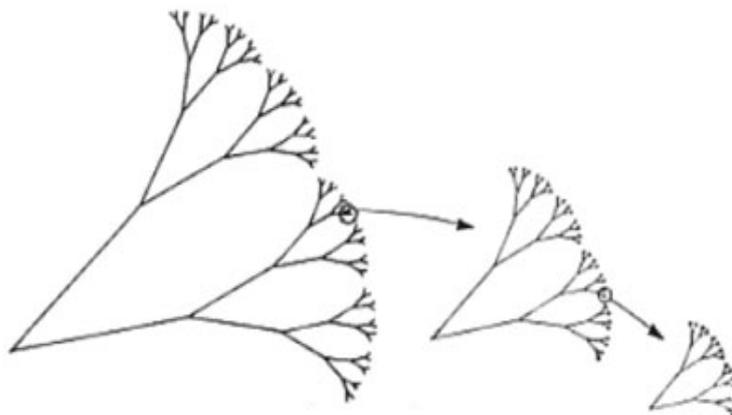


Figura 1.1: Autossemelhança

Outra característica associada aos fractais gerados por sistema de funções iterativas é a autossimilaridade exata, ou seja, a variação do comprimento de escada sob o qual o fractal é analisado, o que leva sucessivamente a configurações idênticas à configuração inicial. Existem, contudo fractais que são igualmente formados por minicópias, mas essas são anisotrópicas, ou seja, não são mantidas fixas às proporções originais em todas as direções. Nesse caso os fractais são chamados de auto-afins.

## 1.2 Dimensão Fractal

A dimensão que estamos acostumados a trabalhar é a dimensão euclidiana na qual um objeto está inserido. De acordo com Andrade [1], ela representa o número de coordenadas necessárias para descrever esse objeto. Dessa forma, a dimensão de um ponto é zero, de uma reta é um, de uma superfície é dois e de um corpo no espaço é três. Essas dimensões são sempre representadas por valores inteiros que caracterizam comprimento, área e volume e podem ser ampliadas por indução para qualquer valor  $n$  inteiro.

Quando trabalhamos com fractais, o termo dimensão adquire um sentido mais amplo, devido a complexidade infinita desses elementos com seus infinitos detalhamentos, os quais seriam quase impossíveis de se atribuir um valor. Desse modo, o termo dimensão de um fractal está relacionado com o grau de ocupação da figura no espaço que a contém, medindo seu grau de irregularidade, caracterizando a superfície de contato com o objeto

e com o meio.

A atual dimensão fractal foi chamada no princípio de dimensão de Hausdorff-Besicovith, pois foram os matemáticos Felix Hausdorff e A. S. Besicovith que a inventaram e desenvolveram, e não necessariamente essa dimensão representa um número inteiro. Para entendermos o conceito dessa dimensão vamos observar os infinitos detalhamentos do Floco de Neve de Koch (que será apresentado mais a frente) ocuparem mais espaço que uma reta convencional, sem no entanto preencher todo o plano, tendo portanto uma dimensão maior que um, mas, menor que dois.

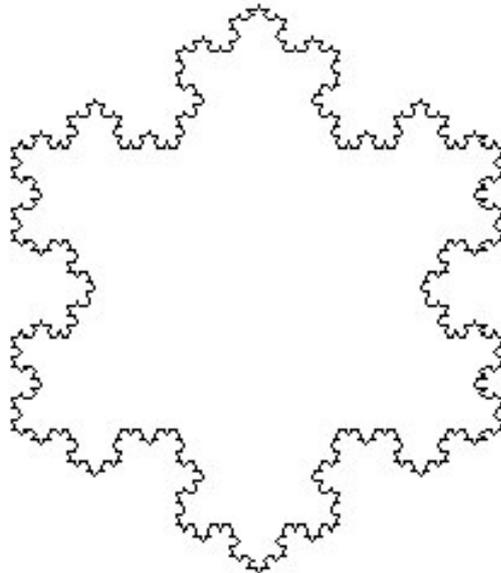


Figura 1.2: Floco de Neve de Koch

De uma forma geométrica, ter uma dimensão entre um e dois se baseia no fato de que para qualquer objeto geométrico, a medição usando uma dimensão abaixo será infinita e usando uma dimensão acima será zero. Isso decorre do fato que se quiséssemos calcular a medida da dimensão de uma superfície, por exemplo, utilizando unidades de medidas de dimensão um, como comprimento, obteríamos um resultado infinito, pois ao fazermos esse cálculo usaríamos uma quantidade infinita de linha horizontais e verticais para recobrir todo o plano e somaríamos todos os seus comprimentos. De forma semelhante se fossemos medir o volume de uma superfície obteríamos como resultado zero.

Vamos agora calcular a dimensão de conjuntos autossemelhantes. Analisemos o fato dos objetos de Euclides possuírem a propriedade de autossemelhança e consideremos um segmento de reta, um quadrado e um cubo de dimensões um, dois e três respectivamente.

1 - Divida o segmento de reta em duas partes iguais

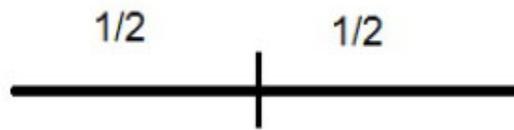


Figura 1.3: Divisão do Segmento de Reta

Observe que cada parte do subsegmento gerado é autossimilar à peça original e para que cada nova subdivisão fique igual ao todo devemos ampliá-la por um fator de aumento (coeficiente de proporcionalidade) igual a  $2 = 2^1$ .

2 - Note que ao dividirmos o quadrado a seguir em quatro peças quadrangulares congruentes, repartindo seu lado em dois, obtemos um fator de aumento igual a  $4 = 2^2$

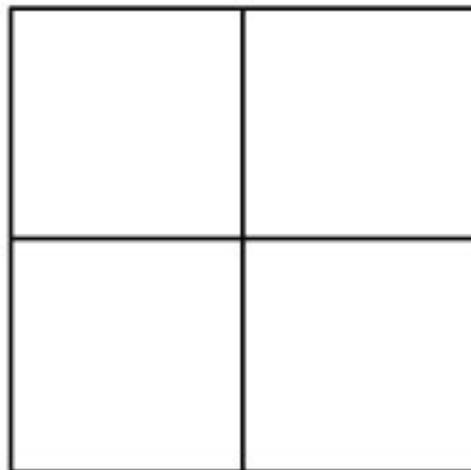


Figura 1.4: Divisão do Quadrado

3 - Realizando o mesmo procedimento no cubo, dividindo em 8 cubinho menores, termos um fator de aumento de  $8 = 2^3$ , como mostra a figura abaixo.

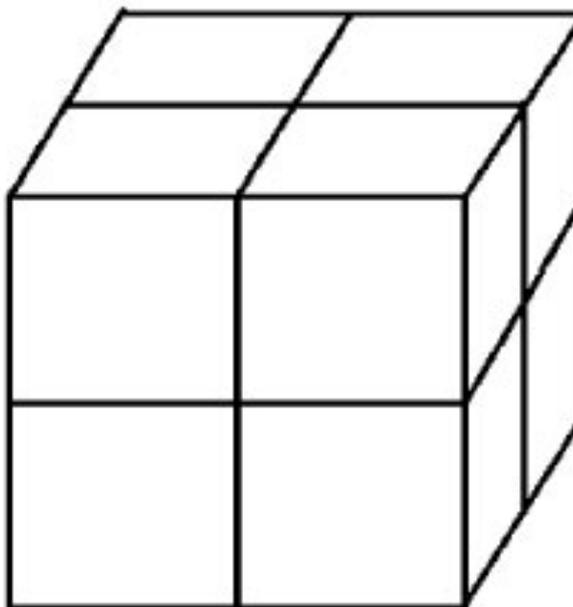


Figura 1.5: Divisão do Cubo

De forma geral, se  $n$  é o número de peças depois de uma etapa,  $m$  o fator de aumento depois desta mesma etapa, e  $D$  dimensão, então teremos que  $n = m^D$ . Desse modo temos que

$$\log n = \log m^D \Rightarrow D \cdot \log m = \log n \Rightarrow D = \frac{\log n}{\log m}.$$

Logo, a dimensão  $D$  de objetos autossemelhantes será dada por

$$D = \frac{\log n}{\log m}$$

e é conhecida como dimensão fractal. Veremos mais a frente nos exemplos de fractais clássicos o cálculo de algumas dimensões fractais e algumas características destes.

### 1.3 Dimensões de Objetos Naturais

Segundo Janos [6], diferentes dos fractais matemáticos, os fractais naturais não são autossemelhantes. Eles são auto-afins, ou seja, são cópias reduzidas distorcidas de si próprios. Dizemos então que em média, estatisticamente, esse objetos exibem um caráter autossemelhante. Dessa forma, as dimensões dos fractais naturais são medidas como valores médios. Para observar como isso funciona, tomemos o exemplo dado em Janos [6], para calcular a dimensão do Rio Amazonas entre as cidades de Macapá e Manaus. Se

o Rio Amazonas fosse um fractal matemático poderíamos simplesmente identificar cópias reduzidas exatas de seu todo ao longo de seu curso e assim determinar sua dimensão usando a equação de dimensão citada anteriormente. Mas, o Rio Amazonas é um fractal natural e, portanto, seus trechos são cópias estatisticamente semelhantes do todo. Para determinarmos a dimensão do trecho do Rio Amazonas usaremos o processo chamado de “contagem de quadrados”. Sabemos que a dimensão é dada por

$$D = \frac{\log n}{\log m}.$$

Para contar os quadrados devemos inserir o objeto que queremos calcular a dimensão, no caso o Rio Amazonas, em uma retícula formada por quadrados de lado igual a  $s$ . A escolha do tamanho de  $s$  depende do uso do bom senso, nesse caso do mapa de nosso objeto. Escolhemos então, um tamanho  $s_1$ , e contamos quantos quadrados  $n_1$  da retícula forem necessários para cobrir todo o objeto.

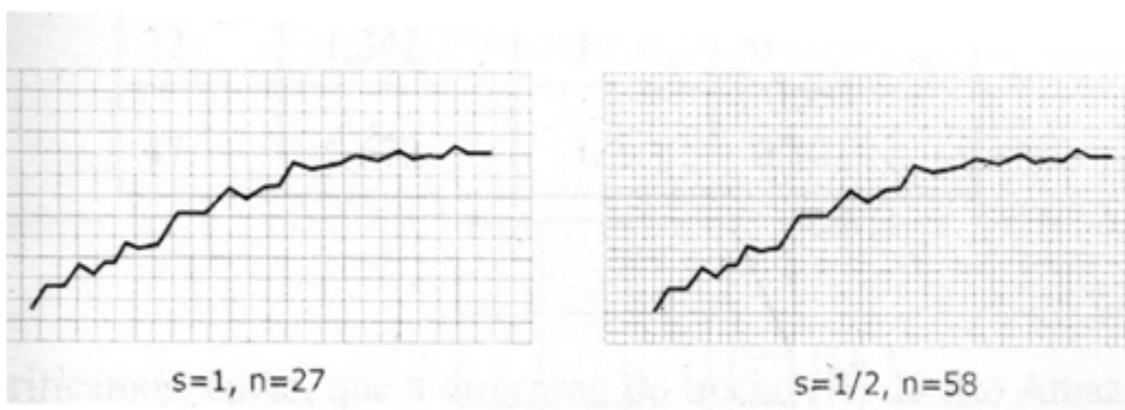


Figura 1.6: Trecho do Rio Amazonas

Depois, vamos diminuindo o tamanho dos quadrados ( $s_2, s_3, s_4, \dots$ ), e contamos os respectivos números de quadrados ( $n_2, n_3, n_4, \dots$ ).

Podemos, então, traçar um gráfico

$$\log n \times \log \left( \frac{1}{s} \right)$$

Linearizando os trechos entre os pontos, obtemos uma linha reta de inclinação  $D$ , igual a

$$D = \frac{\log n_2 - \log n_1}{\log \frac{1}{s_2} - \log \frac{1}{s_1}}$$

que é a dimensão do objeto.

Aplicando esse procedimento a nosso exemplo do Rio Amazonas e usando somente os valores de  $s_1$  e  $s_2$ , obtemos para o trecho.

n	log n	s	log 1/s
27	1,431	1	0
58	1,763	1/2	0,301

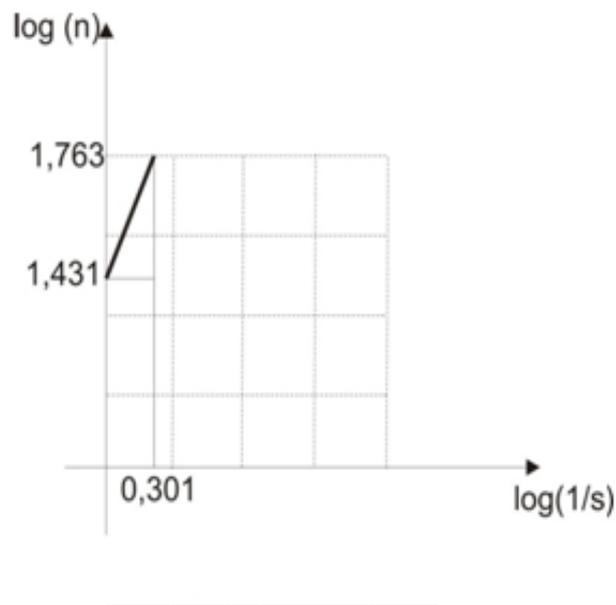


Figura 1.7: Gráfico log n x log 1/s

Verificamos, então que a inclinação da reta, ou a dimensão desse trecho do Rio Amazonas é

$$D = \frac{1,763 - 1,431}{0,301 - 0} \simeq 1,1029.$$

# Capítulo 2

## Fractais Clássicos

Parte das referências históricas apresentadas neste capítulo encontram-se em Boyer [4] e alguns dos resultados aqui obtidos foram retirados de Edgar [5], Negri [9] e Sallum [11].

### 2.1 Conjunto de Cantor

Georg Cantor (1845-1918) descendente de portugueses nascido na Rússia, adotou nacionalidade alemã. Foi professor na Universidade de Halle e dedicou muito do seu trabalho em pesquisas relativas a fundamentação da Matemática, principalmente à Teoria dos Conjuntos. Foi Cantor o primeiro matemático a estudar, no fim do século XIX, essa teoria.

O Conjunto de Cantor ou como também é conhecido Poeira de Cantor ou Polvo de Cantor, talvez seja o primeiro objeto reconhecido como fractal embora não possua o apelo visual da maioria dos fractais. Para sua construção, são realizadas as etapas a seguir:

- Etapa 0 - Considerar um segmento de reta unitário  $[0, 1]$ <sup>1</sup>.
- Etapa 1 - Dividimos o segmento em três partes iguais e eliminamos a parte central, processo conhecido como “remoção do terço médio”.
- Etapa 2 - Repetimos esse processo em cada segmento, e assim sucessivamente e indefinidamente.

---

<sup>1</sup>Para uma melhor visualização demos uma certa espessura ao segmento.

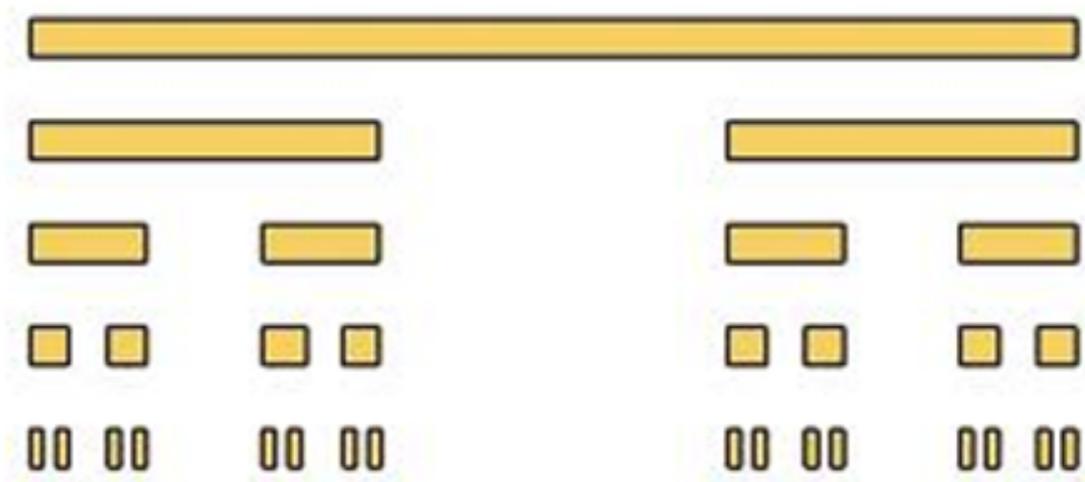


Figura 2.1: Conjunto de Cantor

Consideremos o segmento inicial com extremos 0 e 1, isto é o conjunto de pontos correspondente ao intervalo fechado  $I_0 = [0, 1]$ . Na Etapa 1, teremos a união disjunta de dois intervalos fechados  $I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$  de comprimento  $\frac{1}{3}$  cada. Na Etapa 2, teremos a união disjunta de quatro intervalos  $I_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$  e assim, sucessivamente.

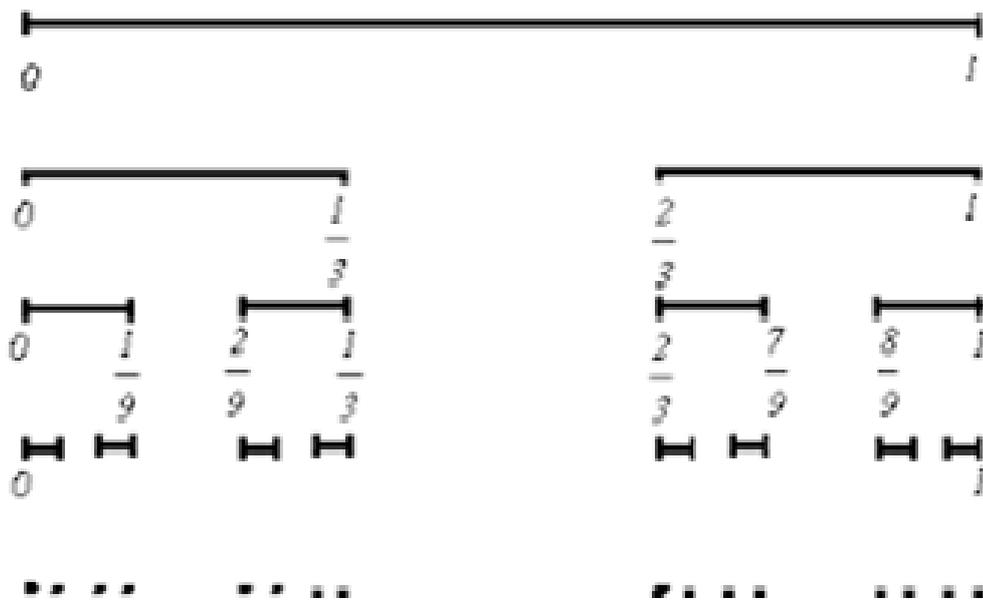


Figura 2.2: Conjunto de Cantor - primeiras etapas

Note que, na fase  $n$ , obtemos  $2^n$  intervalos de comprimento  $\left(\frac{1}{3}\right)^n$  cada, seguindo esse

raciocínio, o Conjunto de Cantor  $K$ , pode ser definido por:

$$K = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n.$$

E daí, temos que o número de intervalos que compõem o Conjunto de Cantor é infinito, pois  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$ , e o comprimento de cada segmento quando  $n \rightarrow \infty$ , tende a zero,

$$\text{pois } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0.$$

Para calcularmos o comprimento  $L$  do Conjunto de Cantor, devemos multiplicar o número de intervalos pelo comprimento de cada um deles. Assim, quando  $n \rightarrow \infty$ , temos:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 2^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] = 0.$$

Daí, o comprimento do Conjunto de Cantor (quando  $n$  tende ao infinito) tende a zero.

Outra forma de chegarmos a essa mesma conclusão seria supor que o total de terços médios removidos após  $n$  etapas seria dado por:

$$\begin{aligned} T &= 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \dots \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left[ 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots \right] \\ T &= \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 \end{aligned}$$

Como nosso segmento tinha comprimento 1 e foram removidos um total de terços médios igual a 1, o que sobra tende a zero. O que nos leva a pensar que depois de infinitas etapas só sobrariam os extremos iniciais, algo que numa análise mais a fundo percebemos não ser correto, pois a cada vez que removemos um intervalo, ficamos com dois outros intervalos, um na esquerda (E) e outro na direita (D).

Logo se um ponto pertence ao Conjunto de Cantor, podemos identificá-lo como uma sequência de posições à esquerda (E) e à direita (D), que indicam a que intervalo esse ponto pertence, associando a cada ponto uma sucessão de símbolos E(de esquerda) e D(de direita).



Exemplos:

- Pontos extremos dos dois segmentos terços iniciais.

1. Ponto  $\frac{1}{3}$

O termo da sucessão de ordem zero será E desde que o ponto pertença ao segmento da esquerda na fase inicial (zero). O segundo termo da sucessão será D, pois o ponto pertence ao segmento da direita na fase 1. O mesmo acontece para o termo da sucessão de ordem 2, e assim, sucessivamente a sucessão continua com símbolos D.

Sucessão EDDDD... ou  $E\bar{D}$ , em notação análoga à das dizimas periódicas.

2. Ponto  $\frac{2}{3}$

Sucessão codificada: DEEE... ou  $D\bar{E}$

- Outros pontos extremos

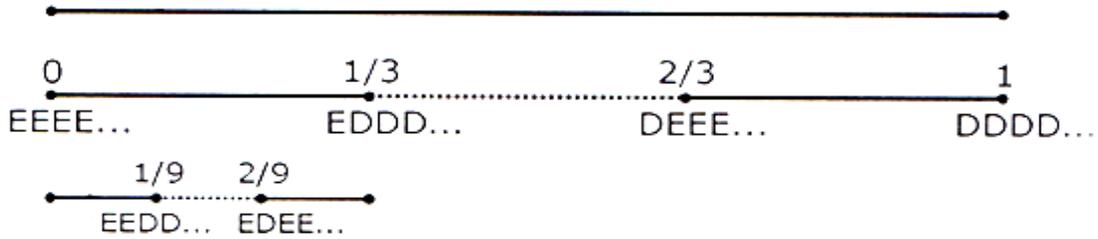
– Ponto  $\frac{1}{9}$  - Sucessão codificada:  $EE\bar{D}$

– Ponto  $\frac{2}{9}$  - Sucessão codificada:  $ED\bar{E}$

– Ponto  $\frac{7}{9}$  - Sucessão codificada:  $DE\bar{D}$

Observando as sucessões codificadas de pontos extremos, verifica-se que todas terminam com um só símbolo repetido indefinidamente.

Reciprocamente, verificar que uma sucessão codificada com uma cadeia de símbolos repetidos indefinidamente endereça um só ponto extremo.



Mas, é claro que nem todas as sucessões possuem uma cadeia final com um só símbolo repetido indefinidamente, o que tentaremos elucidar, exibindo alguns exemplos desse tipo:

EDEDED... ( $\overline{ED}$ ) e DEDEDE... ( $\overline{DE}$ ), que obviamente não representam pontos extremos, desde de que sucessiva e alternadamente conduzem a ponto de segmentos da esquerda e da direita.

Mostraremos a seguir como decodificar essas sucessões substituindo equivalentemente por endereçamentos numéricos. Para isso, reescreveremos os pontos extremos dos intervalos de diversas etapas ou fases. Porém, simplesmente só com os numeradores, desde que seus denominadores sejam potências de 3.

Fase	Extremos (Numeradores)	Denominador
0	0 ----- 1	$3^0 = 1$
1	0 ----- 1      2 ----- 3	3
2	0 ----- 1      2 ----- 3      6 ----- 7      8 ----- 9	$3^2$
3	0 --- 1   2 --- 3   6 --- 7   8 --- 9   18 --- 19   0 --- 21   24 --- 25   26 --- 27	$3^3$

Para tornar mais simples a explicação, vamos considerar sucessões codificadas mas apenas até o terceiro símbolo (e indicaremos com Q a cadeia a partir do quarto termo); e analisaremos como passar ao endereçamento numérico.

Lembramos que inicialmente os valores ficam no intervalo inicial que é entre 0 e 1 ( $0 \leq x \leq 1$ )

- Seja a sucessão DEDQ

Temos que D fornece o valor numérico  $x$  do intervalo  $\frac{2}{3} \leq x \leq 1$ , ou que D aumenta ao extremo inferior do intervalo de valor  $\frac{2}{3}$ .

O símbolo E fornece o valor  $x$  do intervalo  $\frac{6}{9} \leq x \leq \frac{7}{9}$  ou que E não modifica o extremo inferior do intervalo anterior.

- b) Seja a sucessão EEDQ

O símbolo E localiza o valor  $x$  entre  $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ , ou que E não acrescenta valor ao extremo inferior do intervalo. O segundo símbolo E localiza  $x$  em  $0 \leq x \leq \frac{1}{9}$ , ou que E novamente não acrescenta valor ao extremo inferior do intervalo anterior. Agora, o símbolo D localiza o valor  $x$  em  $\frac{2}{27} \leq x \leq \frac{3}{27}$ , ou que D acrescenta ao extremo inferior do intervalo o valor  $\frac{2}{27}$ .

Desses exemplos, e de qualquer outro, tiramos as seguintes conclusões para interpretação das substituições dos símbolos por valores numéricos:

- o símbolo E nada acrescenta ao extremos inferior do intervalo anterior, mas, reduz o extremo superior na escala de  $\frac{1}{3}$ .
- o símbolo D acrescenta ao extremo inferior do intervalo anterior o valor 2 dividido pela potência de 3 correspondente ao seu lugar na sucessão codificada, e não altera o extremo superior.

Daí, podemos substituir uma sucessão codificada por uma adição, onde cada parcela:

- tem o denominador igual à potência de 3 correspondente a ordem do símbolo na sucessão;
- tem o numerador nulo se o símbolo é E ou numerador 2 se o símbolo é D.

Exemplos:

- Sucessão da primeira espécie: EDD $\overline{ED}$

Endereçamento numérico:  $\frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{0}{3^4} + \frac{2}{3^5} + \frac{2}{3^6} + \frac{2}{3^7} + \dots$

Ponto Extremo:  $\left(\frac{2}{9} + \frac{2}{27}\right) + \frac{2}{3^5} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots\right) = \frac{8}{27} + \frac{2}{3^5} + \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}}\right) + \frac{8}{27} +$

$$\frac{1}{81} = \frac{25}{81}$$

- Sucessão da primeira espécie: DDE $\overline{DE}$

Endereçamento numérico:  $\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^6} + \frac{2}{3^8} + \dots$

Ponto Extremo:  $\frac{74}{81}$

- Sucessão de segunda espécie:  $\overline{ED}$

$$\text{Endereçamento numérico: } 0 + \frac{2}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{0}{3^4} + \frac{2}{3^5} + \dots$$

$$\text{Ponto não extremo: } \frac{1}{4}$$

- Sucessão de segunda espécie:  $\overline{DEE}$

$$\text{Endereçamento numérico: } \frac{2}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{0}{3^5} + \frac{0}{3^6} + \frac{2}{3^7} + \dots$$

$$\text{Ponto não extremo: } \frac{9}{13}$$

Nos dois últimos exemplos, podemos observar que os pontos não são pontos extremos, pois não possuem em seus denominadores apenas potências de 3. O que ainda nos sugere de modo intuitivo que o Conjunto de Cantor não é enumerável. O Conjunto de Cantor é um precursor de fractal, pois nele existe a autossimilaridade, sempre que fixamos em um seguimento de suas extremidades, podemos interpretá-lo como o segmento inicial unitário e, aplicando o seu processo de construção de maneira sucessiva termos novamente o Conjunto de Cantor em uma escala menor, preservando todas as suas características.

Podemos também a partir da fórmula dada na seção 1.3 de dimensão de um fractal encontramos a dimensão do Conjunto de Cantor, e ela será dada por:

$$D = \frac{\log 2}{\log 3} = \log_3 2 \simeq 0,63092.$$

## 2.2 Curva de Peano

Segundo Barbosa [2], Giuseppe Peano nasceu na Itália, em Cuneo (1858), e faleceu em Turim (1932), foi professor da Academia Militar de Turim, com enorme contribuição à matemática. Suas principais realizações foram nas áreas de análise matemática, lógica, teoria dos conjuntos, equações diferenciais e análise vetorial e entre as mais famosas estão com certeza a sua axiomatização do números inteiros.

Em 1890, tratando do aprofundamento das idéias de continuidade e dimensão, publica sua famosa curva, ou monstro matemático, proposta como uma forma de cobrir totalmente uma superfície plana e quadrangular. - “Sur une courbe qui remplit toute une aire plaine”, *Mathematiche Annalen* 36, 1890, p. 157-160.

A Curva de Peano, como dito anteriormente, preenche todo o plano, passando por todos os pontos de uma superfície plana e sua construção da mesma forma que o Con-

junto de Cantor, parte um processo iterativo. Esse processo possui uma regra fixa de substituição geométrica, seguindo os seguintes passos:

- Etapa 0 - Iniciamos com um segmento de reta, de comprimento 1.
- Etapa 1 - Substituímos por uma curva de nove segmentos, portanto em escala  $\frac{1}{3}$ .
- Etapa 2 - Substituímos cada segmento anterior pela curva de nove segmentos, e assim sucessivamente.

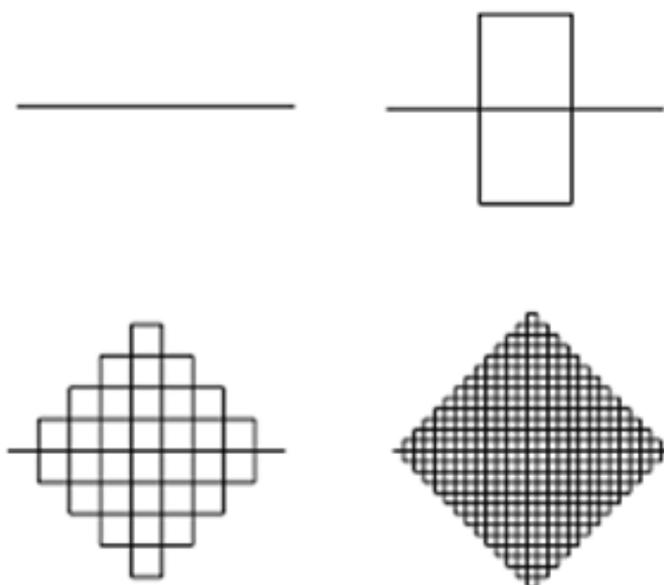


Figura 2.3: Curva de Peano

Observando a figura verifica-se que a curva vai preenchendo uma região quadrada, cuja diagonal é o segmento inicial. A área dessa região quadrada será dada por:

$$A = l^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Para calcularmos o comprimento da Curva de Peano temos de início o próprio segmento de medida 1. Na etapa 1 o comprimento será dado pela soma das medidas dos nove segmentos. Isto é,  $9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = 3$ . Na etapa 2 cada segmento se transforma em outros nove segmentos, teremos portanto  $81 \cdot \left(\frac{1}{9}\right) = 9 = 3^2$ . E assim sucessivamente até a  $n$ -ésima etapa que será dada por:  $9^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ .

Assim o comprimento da Curva de Peano tende para o infinito, quando  $n \rightarrow \infty$ .

Agora para calcularmos a dimensão, utilizando a fórmula de dimensão dada no capítulo 2 e notando que na primeira etapa o fator de aumento é  $m = 3$  e o número de peças é  $n = 9$ , obtemos:

$$D = \frac{\log 9}{\log 3} = \log_3 9 = 2$$

Logo a dimensão da Curva de Peano é igual a 2, o que já era de se esperar, pois é mesma dimensão do plano.

## 2.3 Curva de Hilbert

David Hilbert nasceu próximo a Königsberg (a cidade das sete pontes do problema de Euler, da antiga Prússia) em 1862, e faleceu em 1943. Obteve seu doutorado em 1885 e convidado por Félix Klein, transferiu-se para a Universidade de Göttingen, onde trabalhou até 1930 encerrando suas atividades acadêmicas. Dentre suas contribuições à matemática, sem dúvida a de maior relevância foi relativa a abordagem axiomática da geometria euclidiana, tornando o principal representante do formalismo que procurava retirar da matemática qualquer conotação intuitiva, nas quais suas asserções formais não têm qualquer significado até que seus termos são dadas interpretações no mundo real.

Em 1891, coloca sua curva de cobertura da superfície de um quadrado, apresentada preliminarmente num encontro em Bremen: *“Ueber Stetide Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück”*, *Mathematische Annalen*, 38 (1891) 459-460.

A Curva de Hilbert é gerada continuando indefinidamente o processo recursivo abaixo:

- Etapa 0 - Considerar um quadrado de lado  $l$ .
- Etapa 1 - Dividi-lo em quatro quadrados centrais de mesma área, dando início à curva com 3 segmentos consecutivos com extremos nos seus pontos centrais, como mostra a figura a seguir:

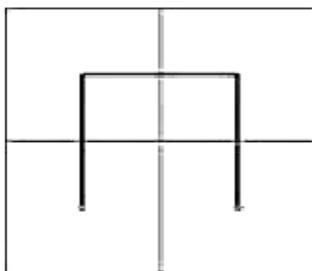


Figura 2.4: Etapa 1 da construção da Curva de Hilbert

- Etapa 2 - Substituir cada quadrado por novos 4 quadrados com a mesma construção da curva iniciadora, conectando cada curva parcial com um segmento na mesma ordem dos anteriores, e proceder assim sucessivamente.

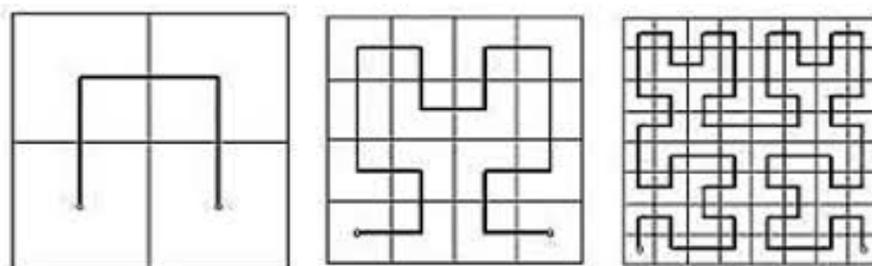


Figura 2.5: Etapa 2 da construção da Curva de Hilbert

Note que devemos fazer as conexões de modo que as 4 curvas parciais anteriores fiquem conectadas na mesma disposição inicial. O que obriga que no quadrado do canto esquerdo inferior se tenha sempre uma rotação da curva do nível anterior de  $90^\circ$  para a direita e ao passar para o quadrado de cima rotacione de  $90^\circ$  para esquerda o de baixo, faça uma simetria reflexional dos quadrados da esquerda.

A autossemelhança pode ser observada de maneira simples em que qualquer dos quatro quadrados, em qualquer estágio, onde a curva é semelhante à curva total reduzida de um fator igual a  $\frac{1}{4}$ .

Para calcularmos o comprimento da Curva de Hilbert devemos observar que a quantidade de sub-segmentos na  $n$ ésima etapa é dada por  $4^n - 1$  e que o comprimento de cada segmento na  $n$ ésima etapa será dado por  $\frac{l}{2^n}$  (sendo  $l$  o lado do quadrado inicial) , daí o comprimento total na  $n$ ésima etapa será dado por:

$$(4^n - 1) \left( \frac{l}{2^n} \right)$$

Assim, o comprimento da curva quando o número  $n$  de etapas tender para o infinito, será:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4^n - 1)l}{2^n} = l \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{2^n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l}{2^n} \right) = l \cdot \infty = \infty.$$

Para calcularmos a dimensão da Curva de Hilbert, vejamos que o fator de aumento de cada parte da curva está diretamente relacionado com o comprimento dos subquadrados de cada etapa. Desta forma o coeficiente de proporcionalidade do quadro é o mesmo da curva, e portanto o fator de aumento  $m$  é igual a 2, e ainda o número de peças obtidas em uma fase é 4 vezes o número de peças da etapa anterior, logo  $n$  é igual a 4. Deste modo, a dimensão deste fractal será dado por

$$D = \frac{\log 4}{\log 2} = \log_2 4 = 2$$

assim como na Curva de Peano, como já era algo a ser esperado visto que estas curvas recobrem todo o plano, logo tem dimensão iguais ao do plano.

## 2.4 Curva e Floco de Neve de Koch

Pouco se sabe sobre a vida de Helge Von Koch, matemático polonês, que em 1904 e 1906, introduziu uma curva que hoje recebeu seu nome.

Todavia, essa curva é um belo exemplo de curva onde não é possível fazer tangente em nenhum de seus pontos, daí ser considerada uma curva “patológica”, e além disso ela pode ser modificada com outras construções análogas gerando outros fractais e deve ter influenciado bastante Mandelbrot, pois tem muito de uma linha costeira.

### 2.4.1 A Curva de Koch

A Curva de Koch é obtida realizando-se os seguintes procedimentos:

- Etapa 0 - Considere um segmento de comprimento  $l$ .
- Etapa 1 - Divida o segmento em três partes iguais, e substitua o seu terço médio por um triângulo equilátero sem sua base.
- Etapa 2 - Repita o processo nos quatro segmentos restantes.

Repita o processo indefinidamente, obtendo etapas semelhantes às encontradas na figura a seguir.



Figura 2.6: Curva de Koch

Para calcularmos o comprimento dessa curva vamos analisar o que acontece depois de cada  $n$  etapas. Inicialmente temos 1 segmento na etapa 0, 4 segmentos na etapa 1, 16 segmentos na etapa 2. É fácil verificarmos que depois de  $n$  etapas teremos  $4^n$  segmentos. O comprimento de cada um desses segmentos em cada etapa é de  $\frac{1}{3}$  do comprimento da etapa anterior, logo teremos depois de  $n$  etapas segmentos medindo  $\left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot l$ . E comprimento total da curva depois de  $n$  etapas será de  $4^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot l = \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot l$ .

Assim, o comprimento total da curva é dado por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot l = \infty.$$

### 2.4.2 O Floco de Neve de Koch

Uma versão da Curva de Koch é o Floco de Neve de Koch (ou Ilha de Koch), onde ao invés de começarmos com um segmento de reta, começaremos com um triângulo equilátero de lado  $l$ , e realizaremos as mesmas etapas sobre os lados do triângulo, como mostra a figura abaixo.

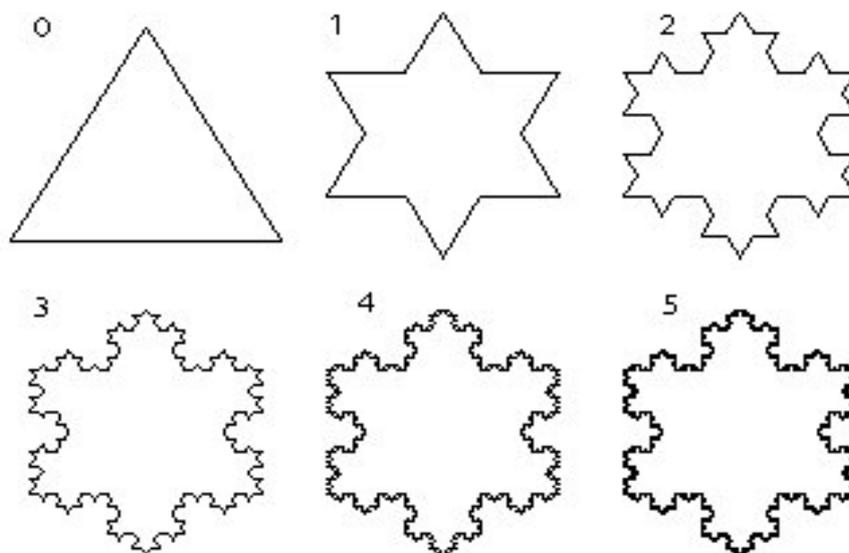


Figura 2.7: Floco de Neve de Koch

Embora essa curva não seja idêntica a um floco de neve real, pois é perfeitamente simétrica, podemos considerá-la como floco de neve “ideal”. Outros fractais semelhantes a esse podem ser construídos colocando-se no lugar do triângulo equilátero outro polígono regular. E do mesmo modo que a Curva de Koch, a curva fechada Floco de Neve também possui comprimento infinito. E podemos mostrar isso da seguinte forma, seja  $N_k$  o número de lados desta curva depois da  $k$ -ésima etapa, então

$$\begin{aligned}
 N_0 &= 3 \\
 N_1 &= 4 \cdot 3 = 12 \\
 N_2 &= 4 \cdot 12 = 4^2 \cdot 3 \\
 N_3 &= 4^3 \cdot 3 \\
 &\vdots \\
 N_k &= 4^k \cdot 3.
 \end{aligned}$$

Observemos que a quantidade de lados aumenta de forma muito rápida, e tende ao infinito quando há infinitas iterações

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N_k = \lim_{k \rightarrow \infty} 4^k \cdot 3 = 3 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} 4^k = 3 \cdot \infty = \infty.$$

Agora seja  $P_k$ , o comprimento da curva depois da  $k$ -ésima etapa, então como foi dito anteriormente na Curva de Koch,  $P_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot l$ . Dessa forma, temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot l = l \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = l \cdot 0 = 0$$

Logo o comprimento de cada lado tende a 0 (zero) quando a quantidade de lados tende ao infinito.

Para calcularmos a área do Floco de Neve de Koch, devemos lembrar que partimos de um triângulo equilátero de lado  $l$ , logo a área inicial que chamaremos de  $A_0 = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ . (Etapa 0)

Devemos notar que na próxima etapa acrescenta-se 3 novos triângulos de lado  $\frac{l}{3}$ . Logo na Etapa 1, teremos a área  $A_1 = A_0 + \frac{\left(\frac{l}{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = A_0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = A_0 + \frac{A_0}{3} = \frac{4 \cdot A_0}{3}$ . Na etapa 2, serão acrescentados 12 novos triângulos de lado  $\frac{l}{9} = \frac{l}{3^2}$ , daí teremos que

$$A_2 = A_1 + 12 \cdot \frac{\left(\frac{l}{9}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = A_1 + \frac{4}{9} \cdot \frac{A_0}{3}.$$

Na etapa 3, serão acrescentados 48 novos triângulos de lado  $\frac{l}{27} = \frac{l}{3^3}$ , daí teremos agora

$$A_3 = A_2 + 48 \cdot \frac{\left(\frac{l}{27}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = A_2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \frac{A_0}{3}.$$

Daí até a etapa 3 temos que

$$A_3 = A_1 + \frac{4}{9} \cdot \frac{A_0}{3} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \frac{A_0}{3} = A_0 + \frac{A_0}{3} + \frac{4}{9} \cdot \frac{A_0}{3} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \frac{A_0}{3} = A_0 + \frac{A_0}{3}.$$

Então podemos generalizar da seguinte forma

$$A_k = A_0 + \frac{A_0}{3} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{4}{9}\right)^i.$$

E fazendo infinitas iterações para a área  $A_k$ , temos que o somatório acima será a soma de uma progressão geométrica infinita de primeiro termo igual a 1 e razão igual a  $\frac{4}{9}$ .

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^i = \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{9}{5}$$

Portanto a área da curva Floco de Neve será:

$$A = A_0 + \frac{A_0}{3} \cdot \frac{9}{5} = A_0 + \frac{3 \cdot A_0}{5} = \frac{8 \cdot A_0}{5} = \frac{8}{5} \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{2l^2 \sqrt{3}}{5}$$

Notemos que apesar do comprimento da curva Floco de Neve ser infinito sua área é finita.

Agora para calcularmos a dimensão da Curva de Koch e do Floco de Neve de Koch, notemos que ambos tem número de peças  $n = 4$ , visto que em cada etapa de sua construção é a união de 4 cópias reduzidas de sua etapa anterior e ambas as curvas tem fator de aumento  $m = 3$ , pois o comprimento de cada segmento é  $\frac{1}{3}$  do comprimento do segmento anterior. Logo a dimensão desses fractais será dada por

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} = \log_3 4 \simeq 1,262$$

## 2.5 Curva, Triângulo e Tapete de Sierpinski

Waclaw Sierpinski (1882-1969), matemático polonês, foi professor em Lvov e Wariaw. Teve grande reputação na década de 1920-1930, a ponto de uma das crateras lunares ter o seu nome.

Em 1916 Sierpinski apresentou um dos famosos “monstros” em seu trabalho, baseado em processos recursivos. Vamos apresentar a seguir alguns de seus famosos fractais.

### 2.5.1 Curva de Sierpinski

A Curva de Sierpinski é construída segundo o seguinte processo recursivo:

- Etapa 0 - Considerar um segmento de reta e um triângulo equilátero tendo esse segmento por lado;
- Etapa 1 - Substituir o segmento por uma poligonal de 3 segmentos formando os 3 lados de trapézio isósceles com vértices nos extremos do segmento inicial e nos pontos médios dos outros dois lados do triângulo;
- Etapa 2 - Substituir cada segmento anterior por outros 3 segmentos conforme a etapa 2, em cada um dos 4 triângulos equiláteros de vértices nos pontos médios, com exceção do central;

Repetir sucessivamente a etapa 2.

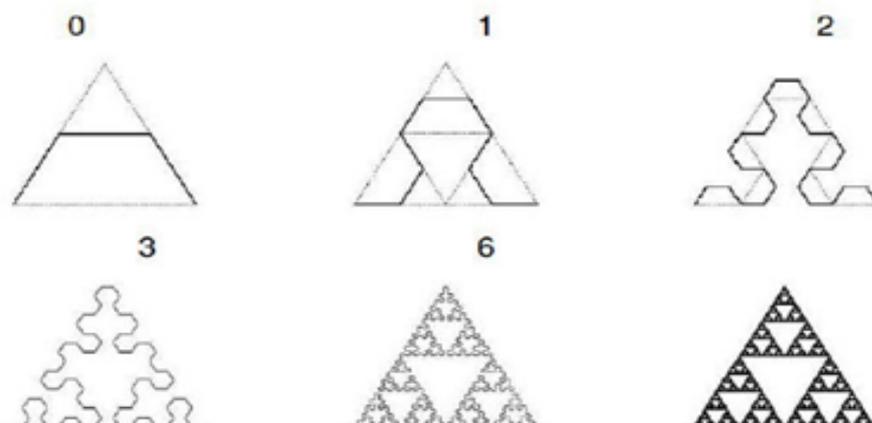


Figura 2.8: Curva de Sierpinski

Note que a cada etapa os segmentos tem um fator de redução igual a  $\frac{1}{2}$ , pois partimos da base média de um triângulo equilátero. Logo o fator de aumento  $m$  é igual a 2, e o número de peças de aumento em cada etapa é  $n$  igual a 3. Portanto, a dimensão da Curva de Sierpinski é dado por

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} \simeq 1,5849.$$

### 2.5.2 Triângulo de Sierpinski

Continuando a construção da Curva de Sierpinski com novos estágios, nota-se que vão sendo cobertos triângulos equiláteros nos sucessivos 3 cantos, excetuando-se os triângulos equiláteros centrais; segue, então o que é denominado de Triângulo de Sierpinski.

Para construirmos o Triângulo de Sierpinski devemos realizar o seguinte procedimento:

- Etapa 0 - Considerar inicialmente um triângulo equilátero de lado 1.
- Etapa 1 - Marcar os segmentos dos pontos médios, formando assim 4 triângulos equiláteros.
- Etapa 2 - Eliminar (remover) o central, o que pode ser codificado por exemplo, com cor branca e os outros com uma cor preta.

- Etapa 3 - Repetir em cada um dos triângulos não eliminados as construções da etapa 1 e 2.

Repetir a etapa 3 sucessivamente



Figura 2.9: Triângulo de Sierpinski

Para determinação do perímetro e da área do Triângulo de Sierpinski considere a área  $A_0$  área da Etapa 0, e  $P_0$  o perímetro da etapa 0, logo

$$A_0 = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \text{ e } P_0 = 3l$$

Note que a cada novo triângulo a medida do lado é a metade da medida do lado na etapa anterior e

$$A_1 = A_0 + \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4}A_0$$

E ainda que

$$A_2 = A_1 - \frac{A_1}{4} = \frac{3}{4}A_0 - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}A_0\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 A_0$$

Por recorrência notaremos que  $A_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 A_0$ ,  $A_4 = \left(\frac{3}{4}\right)^4 A_0$  daí, para qualquer  $k$  natural teremos que,  $A_k = \left(\frac{3}{4}\right)^k A_0$ . Portanto, a cada nova iteração a área diminui e quando a quantidade de iterações tende ao infinito a área desse fractal tende a 0 (zero).

Para o perímetro temos que  $P_1 = P_0 + \frac{P_0}{2} = \frac{3}{2}P_0$ ,  $P_2 = P_1 + \frac{P_1}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 P_0$ , e pela recorrência temos que  $P_3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 P_0$ ,  $P_4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 P_0$ . Daí, para qualquer  $k$  natural teremos que  $P_k = \left(\frac{3}{2}\right)^k P_0$ , note que o quando a quantidade de iterações aumenta a área cresce na razão de  $\frac{3}{2}$ , logo quando a quantidade de iterações tende e ao infinito o perímetro da curva tende ao infinito.

### Codificação para o Triângulo de Sierpinski

É possível codificar cada subtriângulo do Triângulo de Sierpinski à imagem da codificação realizada no Conjunto de Cantor, associando uma sucessão com três códigos de endereçamento. E - subtriângulo da esquerda, D - subtriângulo da direita e S - subtriângulo superior.

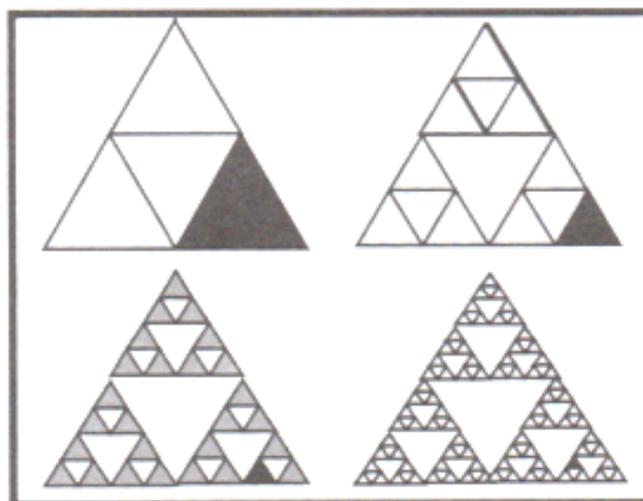


Figura 2.10: Codificação para o Triângulo de Sierpinski

Assim, a sucessão DDES endereça sucessivamente subtriângulos indicados com preto na figura acima, até a etapa 3.

Nota-se no entanto, que para vértices em geral a sucessão não é única, por exemplo para o vértice indicado na figura abaixo, teremos as sucessões  $S\overline{SD}$  ou  $S\overline{DS}$ .

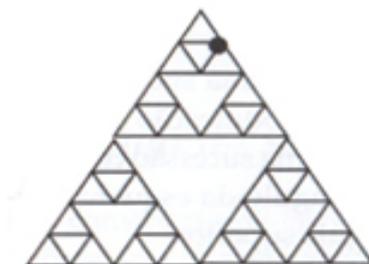


Figura 2.11: Codificação para o Triângulo de Sierpinski

### 2.5.3 Tapete de Sierpinski

Pode-se aplicar a mesma técnica de eliminação do Triângulo de Sierpinski, partindo-se de um quadrado, como visto nas etapas abaixo.

- Etapa 0 - Tome um quadrado de lado  $l$ .
- Etapa 1 - Divida-o em 9 quadrados congruentes, e elimine o quadrado central.
- Etapa 2 - Aplique o mesmo procedimento da etapa 1 em cada um dos 8 subquadrados restantes.

Repita o processo da etapa 2 sucessivamente como na figura abaixo

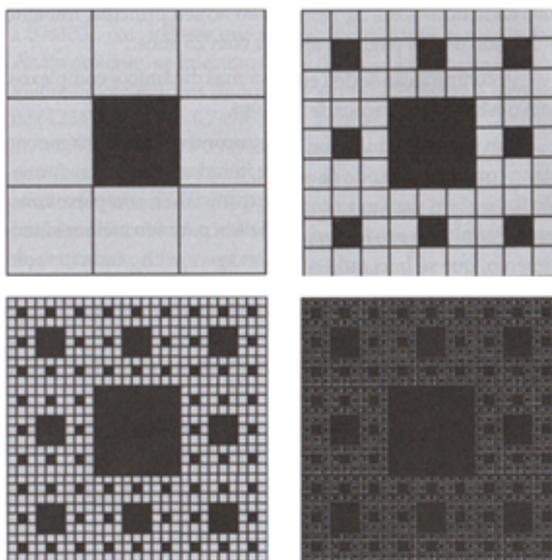


Figura 2.12: Tapete de Sierpinski

Da mesma forma que no Triângulo de Sierpinski, em cada etapa da construção, o lado do quadrado é reduzido, só que agora na razão de  $\frac{1}{3}$ . Dessa forma, o perímetro de

cada quadrado será  $\frac{1}{3}$  do perímetro do quadrado da etapa anterior. Seja  $P_k$  o perímetro do quadrado na  $k$ -ésima etapa do Tapete de Sierpinski. Então, temos que  $P_0 = 4l$  é o perímetro na etapa 0, e como na etapa 1 teremos 8 subquadrados de perímetro igual a  $\frac{P_0}{3}$ , então  $P_1 = 8 \cdot \frac{P_0}{3}$ , na etapa 2 teremos que  $P_2 = 8^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{P_0}{3} = \left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot \frac{P_0}{3}$ , e por recorrência teremos que na etapa 3 o perímetro será  $P_3 = \left(\frac{8}{3}\right)^3 \cdot \frac{P_0}{3}$ , e generalizando teremos na  $k$ -ésima etapa  $P_k = \left(\frac{8}{3}\right)^k \cdot \frac{P_0}{3}$ , assim após infinitas iterações teremos

$$P = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{3}\right)^k \cdot \frac{P_0}{3} = \frac{P_0}{3} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{3}\right)^k = \infty$$

Também de forma análoga ao Triângulo de Sierpinski, a área do Tapete de Sierpinski diminui a medida que as etapas vão se sucedendo. E seja  $A_k$  a área do Tapete na  $k$ -ésima etapa e  $A_0 = l^2$  a área na etapa 0, temos que  $A_1 = \left(\frac{l}{3}\right)^2 = \frac{l^2}{9} = \frac{A_0}{9}$ , de forma análoga teremos que  $A_2 = \frac{A_0}{9^2}$ ,  $A_3 = \frac{A_0}{9^3}$ , ...,  $A_k = \frac{A_0}{9^k}$ , ..., juntando esses dados com a quantidade de quadrados gerados em cada etapa obtemos que a área total em cada  $k$ -ésima etapa será dada por  $A_k = 8^k \cdot \frac{A_0}{9^k} = \left(\frac{8}{9}\right)^k \cdot A_0$ , fazendo a quantidade de iterações tenderem ao infinito temos que a área deste fractal tenderá a zero, pois

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^k \cdot A_0 = 0$$

## 2.6 Esponja de Menger

Karl Menger (1902-1985), matemático austríaco, conhecido pelo Teorema de Menger, trabalhou em álgebra matemática, teoria da curva e dimensão entre outras áreas e trabalhou no Instituto de Tecnologia de Illinois.

A construção da Esponja de Menger é baseada no mesmo princípio de remoção do Triângulo de Sierpinski. Mas o processo iterativo é feito com um Cubo, apresentando então uma versão tridimensional do Tapete de Sierpinski.

O processo de construção da Esponja de Menger é feito da seguinte forma:

- Etapa 0 - Vamos considerar um cubo de aresta  $l$ .

- Etapa 1 - Divida-o em 27 cubos menores e congruentes, cada um deles com aresta igual a  $\frac{1}{3}$  (aplique um processo similar ao Tapete de Sierpinski em cada face do cubo), remova o cubo central e os 6 cubos do meio de cada face do cubo maior.
- Etapa 2 - Repita o processo da etapa 1 nos 20 cubos restantes. Repita o procedimento de forma infinita.

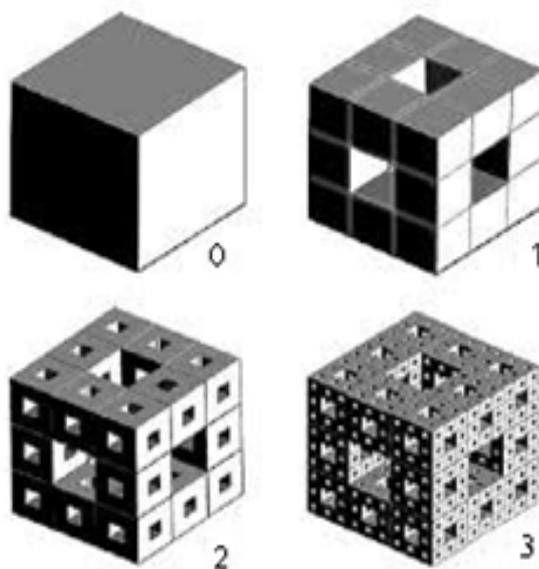


Figura 2.13: Esponja de Menger

A figura acima mostra as primeiras etapas da construção da Esponja de Menger.

Vamos agora calcular a área da superfície do cubo em cada uma das etapas da sua construção, consideremos  $F = l^2$  a área da superfície do cubo inicial e  $A_k$  a área da superfície total na  $k$ -ésima etapa de sua construção, então  $A_0 = 6F$ .

Na etapa 1 perde-se  $\frac{1}{9}F$ , logo nas 6 faces perde-se um total de  $6 \cdot \frac{1}{9}F$ , mas ganhamos 24 novos quadrados, cada um deles com aresta medindo  $\frac{1}{9}$  da aresta inicial, como mostra a figura abaixo



Figura 2.14: Parte removida da esponja de Menger

Assim a área  $A_1$  será encontrada da seguinte forma

$$A_1 = A_0 - 6 \cdot \left(\frac{1}{9}\right) \cdot F + 24 \cdot \left(\frac{1}{9}\right) \cdot F = A_0 + \left(\frac{1}{3}\right) A_0 = \left(\frac{4}{3}\right) A_0.$$

De forma análoga veremos que  $A_2 = \left(\frac{4}{3}\right) A_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 A_0$ , e por recorrência veremos que  $A_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 A_0$ ,  $A_4 = \left(\frac{4}{3}\right)^4 A_0, \dots, A_k = \left(\frac{4}{3}\right)^k A_0, \dots$ , dessa forma vemos que a cada nova iteração a superfície cresce na razão de  $\frac{4}{3}$ , e depois de infinitas iterações essa superfície tende ao infinito

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k \cdot A_0 = A_0 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k = A_0 \cdot \infty = \infty.$$

Agora vamos calcular o volume desse fractal. Seja  $V_k$  o volume da Esponja de Menger na  $k$ -ésima etapa. Como o cubo inicial tem aresta  $l$ , então temos que o volume  $V_0 = l^3$ , na etapa 1 remove-se 7 cubos de aresta  $\frac{l}{3}$ , logo teremos um total removido de  $7 \cdot \left(\frac{l}{3}\right)^3$ , e o volume da esponja na etapa 1 será de  $V_1 = V_0 - 7 \cdot \left(\frac{l}{3}\right)^3$ , na etapa 2 remove-se 7 cubos de cada um dos 20 subcubos restantes de aresta  $\frac{l}{3^2}$ , e portanto retira-se 7.20 cubinhos de volume  $\left(\frac{l}{3^2}\right)^3$  cada, logo o volume  $V_2 = V_1 - 7 \cdot 20 \cdot \left(\frac{l}{3^2}\right)^3$ , seguindo o mesmo raciocínio para etapa 3, remove-se 7 cubos dos 20.27-20.7 subcubos restantes, sendo cada um deles de aresta  $\frac{l}{3^3}$ , logo

$$\begin{aligned} V_3 &= V_2 - 7 \cdot 20^2 \cdot \left(\frac{l}{3^3}\right)^3 = V_1 - 7 \cdot 20 \cdot \left(\frac{l}{3^2}\right)^3 - 7 \cdot 20^2 \cdot \left(\frac{l}{3^3}\right)^3 = \\ &= V_0 - 7 \cdot \left(\frac{l}{3}\right)^3 - V_1 - 7 \cdot 20 \cdot \left(\frac{l}{3^2}\right)^3 - 7 \cdot 20^2 \cdot \left(\frac{l}{3^3}\right)^3 = V_0 - 7 \cdot l^3 \cdot \left(\frac{1}{3^3} + 20 \cdot \frac{1}{3^6} + 20^2 \cdot \frac{1}{3^9}\right). \end{aligned}$$

Generalizando,

$$\begin{aligned} V_k &= V_0 - 7 \cdot l^3 \sum_{i=0}^{k-1} 20^i \cdot \left(\frac{1}{3^3}\right)^{i+1} = \\ &= V_0 - 7 \cdot l^3 \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{20}{3^3}\right)^i \cdot \left(\frac{1}{3^3}\right) = V_0 - 7 \cdot \left(\frac{l}{3}\right)^3 \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{20}{27}\right)^i. \end{aligned}$$

Dessa forma, depois de infinitas iterações teremos que o volume da Esponja de Menger será dado por

$$\begin{aligned}
 V &= V_0 - 7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{20}{27}\right)^i = \\
 &= V_0 - 7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \frac{1}{1 - \frac{20}{27}} = V_0 - 1^3 = 1^3 - 1^3 = 0.
 \end{aligned}$$

Então depois de infinitas iterações o volume da Esponja de Menger tende a zero.

Calculando agora a dimensão desse fractal teremos que o fator de aumento a cada iteração é dado por  $m = 3$  e o número de cópias é  $n = 20$ , dessa forma a dimensão será dada por

$$D = \frac{\log 20}{\log 3} \simeq 2,7268$$

## 2.7 Tetraedro de Sierpinski

Um outro fractal tridimensional obtido da mesma forma que a Esponja de Menger, ou seja, por remoção, é o Tetraedro de Sierpinski e cuja construção é análoga. Divide-se o tetraedro sólido em 5 novos tetraedros a partir dos pontos médios de cada uma das arestas e em seguida removendo o tetraedro central. Repetindo esse processo de forma sucessiva como mostra a figura a seguir.

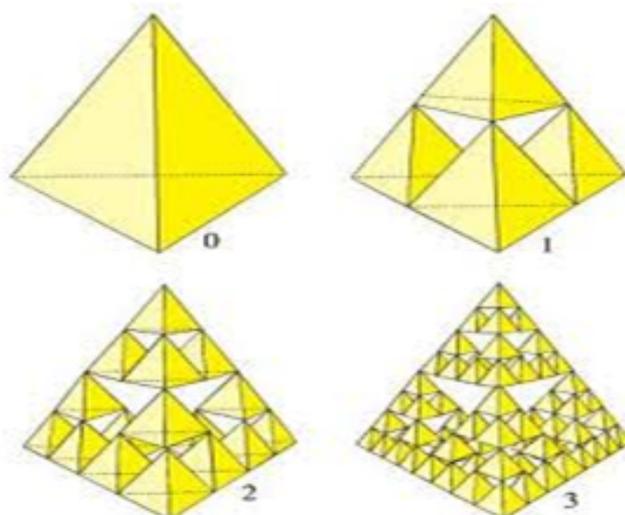


Figura 2.15: Tetraedro de Sierpinski

Devemos observar que a área da superfície desse fractal permanece inalterada nas várias etapas de sua construção, pois para cada triângulo retirado de uma face outro

triângulo aparecerá. Observe que na etapa 1 onde foram removidos 4 triângulos das faces do tetraedro original, cada um deles com área igual a  $\frac{1}{4}$  da área da face do tetraedro original, e são acrescentados triângulos com a mesma área dos que foram retirados. E isso acontece em cada etapa da construção desse fractal.

Agora, vejamos o que acontece com o volume desse fractal em cada etapa de sua construção. Chamemos de  $V_k$  o volume do Tetraedro de Sierpinski na  $k$ -ésima etapa de sua construção, logo  $V_0$  será o volume do tetraedro maciço original. Como na etapa 1 remove-se o tetraedro central, que é um dos 5 tetraedros gerados, então o volume  $V_1 = \frac{4}{5}V_0$ . Na etapa 2, cada um dos 4 tetraedros restantes são novamente divididos em outros 5 tetraedros congruentes e são removidos os 4 tetraedros centrais, logo

$$V_2 = V_1 - 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 V_0 = \frac{4}{5}V_0 - \frac{4}{25}V_0 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 V_0.$$

E pela recorrência temos que,

$$V_3 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 V_0, V_4 = \left(\frac{4}{5}\right)^4 V_0, \dots, V_k = \left(\frac{4}{5}\right)^k V_0, \dots$$

Portanto para infinitas iterações teremos que

$$V = \lim_{k \rightarrow \infty} V_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{5}\right)^k = 0.$$

Portanto quando a quantidade de iterações tende ao infinito a área da superfície do Tetraedro de Sierpinski permanece constante, enquanto seu volume tende a zero.

Observemos que neste fractal o fator de aumento será  $m = 2$  e o número de cópias a cada etapa será  $n = 4$ . Logo sua dimensão será dada por

$$D = \frac{\log 4}{\log 2} = \log_2 4 = 2.$$

## 2.8 Samambaia de Barnsley

Ao observarmos a figura a seguir, podemos confundí-la com uma folha de samambaia, mas na verdade é um fractal criado por Barnsley [3], construído nos moldes dos que foram citados anteriormente.

Se nos atentarmos aos ramos que se originam no caule, podemos observar que são cópias reduzidas da samambaia grande. Os ramos da direita e da esquerda têm no caule

uma espécie de eixo e vão reduzindo de tamanho no sentido vertical do caule. Mais uma vez a figura foi construída como repetição de algumas regras.



Figura 2.16: Samambaia de Barnsley

É importante ressaltar que figuras como o floco de neve e a samambaia encontrados na natureza não são evidentemente cópias reduzidas exatas de si mesmas. O que existe na natureza é uma autossemelhança aproximada em diferentes escalas. Essa autossemelhança aproximada é chamada de autossemelhança estatística, porque, em diferentes escalas, essa autossemelhança existe em média.

Nos fractais matemáticos as partes são cópias exatas do todo, mas, nos fractais naturais as partes são apenas cópias aproximadas do todo.

## Capítulo 3

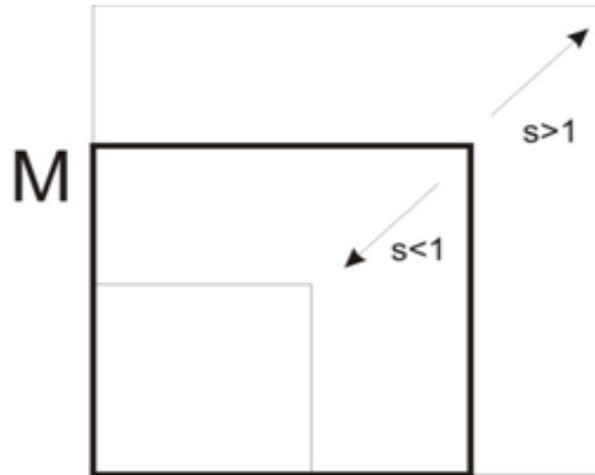
# Transformações Autossemelhantes e Afins

### 3.1 Transformações Autossemelhantes

Segundo Janos [6], objetos que possuem mesma forma, independente de seu tamanho, são chamados de autossemelhantes. Isto significa que, no plano, ângulos correspondentes devem ser sempre iguais e segmentos de reta devem todos ter o mesmo fator de redução (ou ampliação).

Além de terem o mesmo fator de redução ou ampliação (fator de escala), outras transformações autossemelhantes são a rotação e a translação.

Considere um objeto  $M$  no plano. A aplicação de um fator de escala  $s$  a um objeto reduz ou amplia o perímetro de um fator  $s$  e a área de um fator de  $s^2$ , ou seja, os pontos  $P(x, y)$  são transformados para os pontos  $P'(x', y')$ , tais que

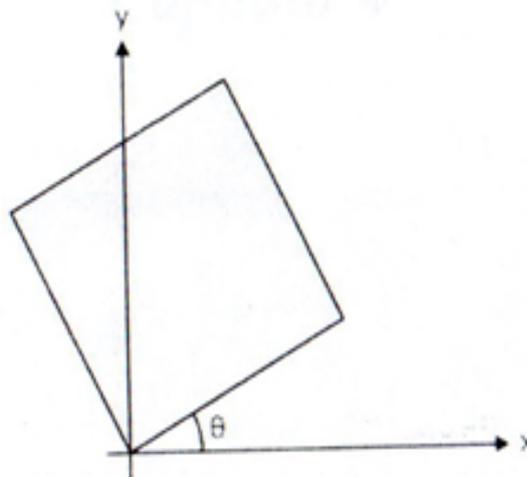


$$x' = sx \text{ e } y' = sy$$

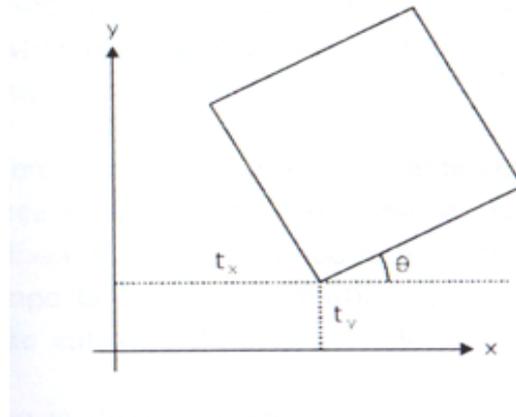
1. Se  $0 < s < 1$  M será reduzido, se  $s > 1$ , M será aumentado.
2. Se aplicarmos uma rotação de um ângulo  $\theta$  (sendo o sentido positivo o sentido anti-horário), obtemos para cada ponto  $P(x, y)$  de M um ponto  $P'(x', y')$ , tal que:

$$x' = x.\cos\theta - y.\text{sen}\theta;$$

$$y' = x.\text{sen}\theta + y.\cos\theta.$$



3. Finalmente, se aplicarmos uma translação  $(t_x, t_y)$ , obtemos para cada ponto de  $P'(x', y')$ , um ponto  $P''(x'', y'')$ , tal que:



$$x'' = x' + t_x;$$

$$y'' = y' + t_y.$$

Podemos então escrever

$$x'' = sx \cdot \cos\theta - sy \cdot \sin\theta + t_x;$$

$$y'' = sx \cdot \sin\theta + sy \cdot \cos\theta + t_y.$$

## 3.2 Transformações Afim

Na geometria fractal, as transformações que são possíveis e permitidas de serem feitas são chamadas de transformações afim. Essas são as transformações lineares, que compreendem, entre outras, as de autossemelhança. Uma transformação afim sempre transforma uma linha reta em outra linha reta, assim como preserva a colinearidade, isto é, todos os pontos pertencem inicialmente a uma linha, permaneceram em linha após a transformação.

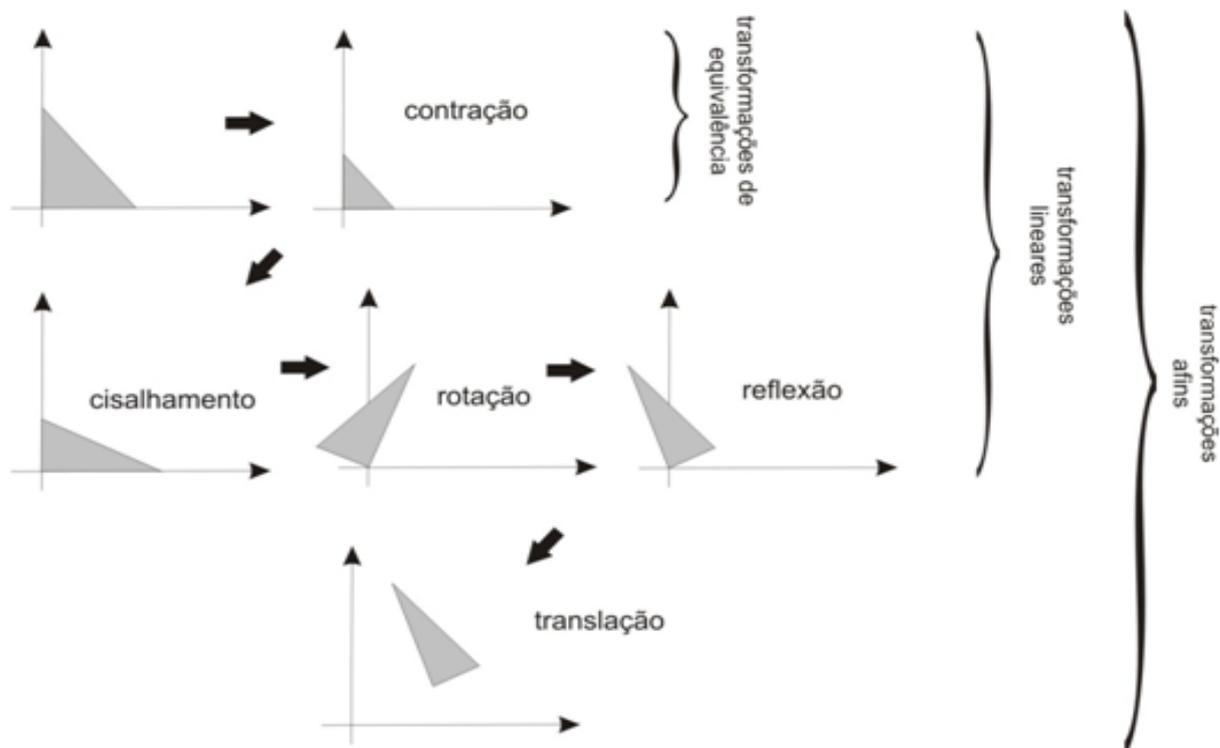


Figura 3.1: Transformações Afins

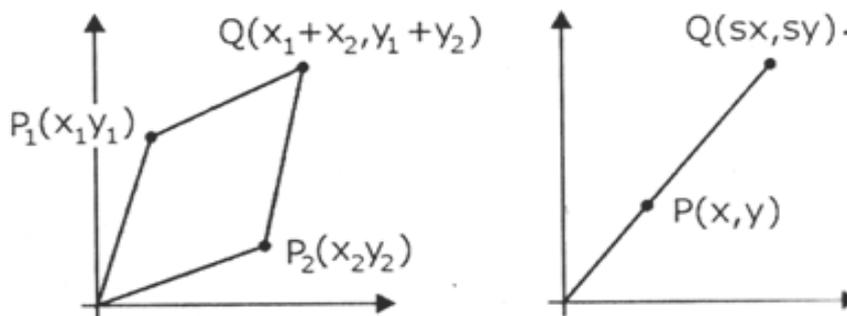
Em uma transformação linear no plano podemos somar os pontos ou multiplicá-los por números reais. Por exemplo se  $P_1(x_1, y_1)$  e  $P_2(x_2, y_2)$ , então

$$P_1(x_1, y_1) + P_2(x_2, y_2) = Q(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

ou

$$sP = Q(sx, sy)$$

onde  $Q$  é um novo ponto do plano e  $s$  é o fator de escala.



Os pontos  $Q'(x', y')$  de uma transformação linear são obtidos através dos pontos  $P(x, y)$

$$x' = ax + by$$

$$y' = cx + dy$$

Ou seja, uma transformação linear é determinada por 4 coeficientes reais  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ .

Uma transformação afim é uma transformação linear seguida de uma translação, portanto devemos acrescentar mais dois parâmetros  $e$  e  $f$  que representam a translação:

$$x' = ax + by + e;$$

$$y' = cx + dy + f.$$

Abaixo segue um exemplo de uma transformação linear seguida de uma translação. Observe o quadrado abaixo ao aplicarmos uma transformação linear usando  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $c = 2$  e  $d = 1$ .

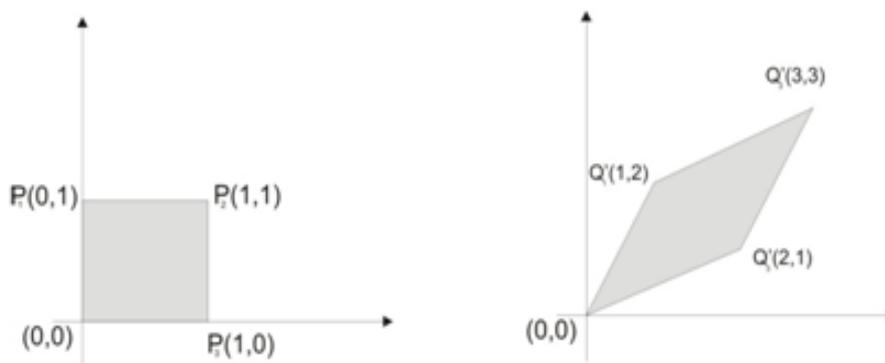


Figura 3.2: Transformação afim

Obtemos para  $P_1(0, 1)$

$$x'_1 = 2x + 1y = 0 + 1 = 1$$

$$y'_1 = 1x + 2y = 0 + 2.1 = 2$$

Então  $Q'_1(1, 2)$ , de modo análogo, teremos os pontos  $Q'_2(3, 3)$  e  $Q'_3(2, 1)$ .

E procedemos do mesmo modo para os outros pontos. Agora fazendo uma translação, usando  $e = 3$  e  $f = 2$ .

$$x''_1 = x'_1 + 3 = 1 + 3 = 4$$

$$y''_1 = y'_1 + 2 = 2 + 2 = 4$$

Devemos fazer isso para todos os pontos obtendo assim os pontos  $(3,2)$ ;  $(6,5)$  e  $(5,3)$ .

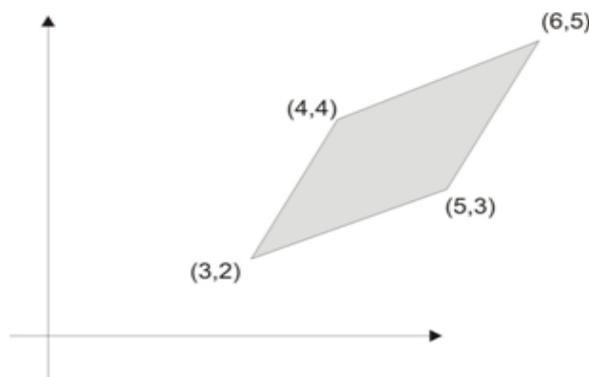


Figura 3.3: Transformação Linear

E os pontos invariantes numa transformação afim podem ser encontrados da seguinte forma

$$x = ax + by + e;$$

$$y = cx + dy + f;$$

resultando

$$x = \frac{-e(d-1) + bf}{(a-1)(d-1) - bc};$$

$$y = \frac{-f(a-1) + ce}{(a-1)(d-1) - bc}.$$

### 3.3 Autossemelhança e Afinidades

Tomemos um fractal matemático como a Curva de Koch. De uma forma bem clara é possível perceber que neste fractal existe a autossemelhança. Se tomarmos, por exemplo, o ramo esquerdo desta curva e o aumentarmos com um fator de escala igual a 3, surge uma nova curva idêntica à curva inicial. Portanto, a Curva de Koch é autossemelhante na mais precisa expressão do termo.

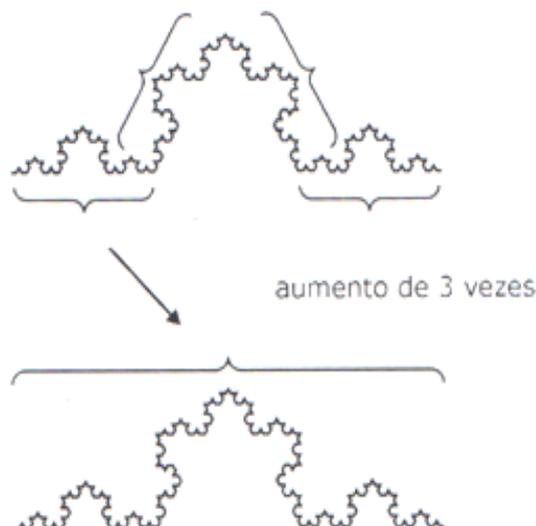


Figura 3.4: Autossemelhança na Curva de Koch

De certo modo, podemos dizer ser algo fácil criar um fractal matemático conhecendo suas regras de construção.

Agora vamos considerar o caso de criar um fractal natural.

Existe um algoritmo que gera um conjunto de transformações que pode ser usado para gerar um fractal natural, a partir, por exemplo de foto deste objeto? Seria possível criar árvores, montanhas, conchas, etc., com alto grau de realismo, através de aplicações matemáticas.

A resposta para essa pergunta acima é afirmativa e deriva de um teorema provado por Barnsley [3], chamado de *Teorema da Colagem*.

Nesse estudo sobre fractais não iremos provar o teorema acima citado, mas tentar explicar a ideia.

“Começando com qualquer figura, não necessariamente um fractal matemático, e usando somente cópias reduzidas do original, sob as quais aplicamos transformações como, por exemplo, reduções, translações, rotações, etc., podemos reproduzir a figura original como uma colagem destas pequenas cópias.”

A seguir alguns exemplos de fractais gerados usando esse teorema:

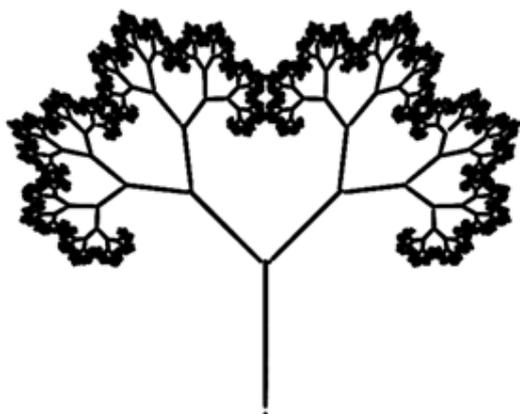


Figura 3.5: Fractal 1

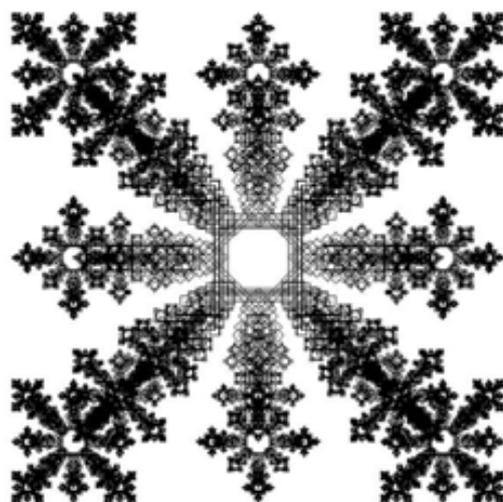


Figura 3.6: Fractal 2

Outro exemplo é a Samambaia de Barnsley citada anteriormente nos fractais clássicos.



Figura 3.7: Samambaia de Barnsley

Então, não somente “monstros matemáticos” podem ser construídos usando a geometria fractal, mas estruturas muitas vezes próximas às formas encontradas na natureza (fractais naturais).

Para gerar essas figuras, usamos um conjunto de transformações denominadas de transformações afim.

# Capítulo 4

## Fractais Iterativos

### 4.1 Sistemas de Funções Iterativas

Sistemas de Funções Iterativas, conhecido também pela sigla IFS (do inglês *Iterated Function Systems*) é uma técnica utilizada para construir fractais, através da repetição em escala de uma mesma figura. Apesar de podermos aplicar tal técnica em qualquer dimensão, é mais comum pela praticidade e simplicidade aplicá-la em superfícies.

A técnica consiste em partindo-se de uma figura inicial, aplicar a ela uma série de transformações afins, em geral reduzindo a escala, que geram “cópias” menores dessa mesma figura. Esse processo é repetido infinitas vezes até gerar uma imagem fractal com cópias cada vez menores dessa figura.

Abaixo temos um exemplo da construção de um fractal usando a IFS, observe que depois de algum tempo a imagem não muda mais, dizemos que chegamos a “resolução máxima”. Essa imagem final é chamada de *imagem atratora*.

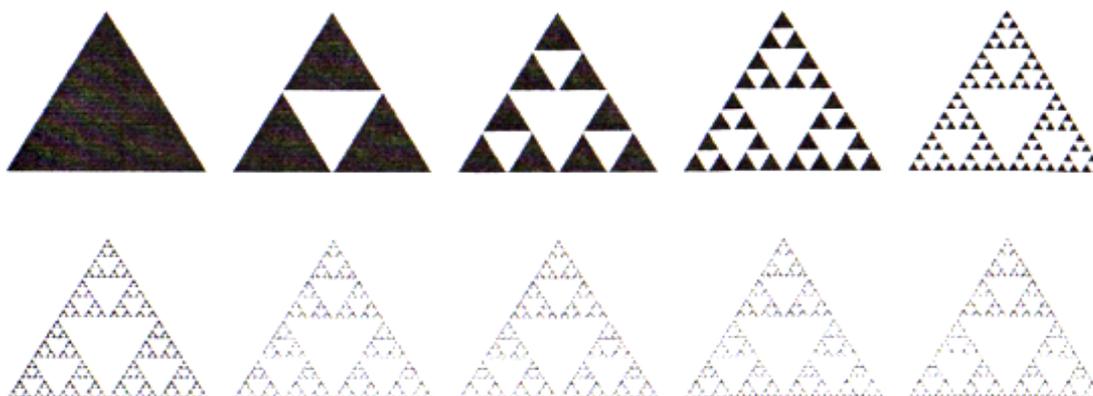


Figura 4.1: Imagem Atratora

Segundo Janos [6], um importante teorema da Geometria Fractal é:

“Qualquer figura sendo “copiada” por uma função iterativa tem uma única imagem atratora.”

Uma forma matemática de ver essa função é lembramos da composição de funções. Calcularmos  $f(x)$ , e depois aplicarmos  $f$  novamente para encontrarmos um novo valor  $f(f(x))$ , depois repete-se o processo novamente encontrando  $f(f(f(x)))$ , e assim por diante.

### Notas Complementares sobre iteração

Como vemos em Barbosa [2], para tentar esclarecer um pouco o leitor menos familiarizado com processos iterativos, discorreremos, a seguir um pouco sobre iterações de funções de variável real, tentando dotá-lo de uma pequena ideia quando se trata de variável complexa.

#### Iteração, órbita, ponto fixo, atrator e repulsor

1. Seja para exemplificar a função  $f(x) = \sqrt{x} (x \geq 0)$

Tomando o valor inicial  $x_0 = 81$  teremos  $f(81) = \sqrt{81} = 9$ ; e calculando a imagem do resultado de 81 encontramos  $f^2(81) = f(f(81)) = f(9) = 3$ , e sucessivamente  $f^3(81) = f(f(f(81))) = f(3) = 1,732050\dots$ . Continuando essa iteração (processo repetitivo) teremos sucessivamente  $f^4(81) = 1,316074\dots, f^5(81) = 1,147202\dots, f^6(81) = 1,071075\dots$ etc., valores que se aproximam cada vez mais de 1. Analogamente, se iniciarmos com 0,1 por exemplo, teremos os valores das iterações dadas por  $f(0,1) = 0,316227\dots, f^2(0,1) = 0,5611234\dots, f^3(0,1) = 0,749893\dots, \dots, f^{10}(0,1) = 0,997753\dots$ , etc., aproximando-se também de 1. Desde que  $f(1) = \sqrt{1} = 1$ , dizemos que  $x = 1$  é

o ponto fixo, e pelos resultados anteriores que é ponto fixo *atrator*. O ponto  $x = 0$  é também outro ponto fixo. As duas sucessões de valores recebem o nome de *órbitas* respectivamente de 81 e de 0,1.

2. Função  $g(x) = 2x - 1, (x \in \mathbb{R})$

Para ponto fixo devemos ter necessariamente  $2x - 1 = x$ , de onde a existência do ponto fixo  $x = 1$ . Consideremos então o valor inicial  $x = 1,1$ , perto e maior que o ponto fixo. Teremos  $g(1,1) = 1,2, g^2(1,1) = 1,4, g^3(1,1) = 1,8, g^4(1,1) = 2,6, g^5(1,1) = 4,2, \dots, g^8(1,1) = 26,6, \dots$ , que nos mostra que  $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(1,1) = \infty$ , dizemos então que o ponto fixo 1 é repulsor para  $x > 1$ .

Analogamente, teremos  $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(0,9) = -\infty$ , ou que novamente o ponto fixo é repulsor para  $x < 1$ .

3. Função  $h(x) = \frac{x+1}{2}, (x \in \mathbb{R})$

Encontra-se novamente o ponto fixo único  $x = 1$ , entretanto agora será atrator.

4. Função quadrática  $w(x) = x^2 + c, (x \in \mathbb{R} \text{ e } c \text{ constante})$

Devemos ter para ponto fixo  $x^2 - x + c = 0$ , de onde o discriminante  $\Delta = 1 - 4c$

(a) Ora, se  $c > \frac{1}{4}$  então  $\Delta < 0$ , logo não terá ponto fixo, o que significa que a parábola fica inteiramente acima da reta  $y = x$ .

(b) Caso  $c = \frac{1}{4} = 0,25$ , então  $\Delta = 0$ , ou que  $w(x)$  tem um único ponto fixo  $x = \frac{1}{2} = 0,5$ . Seja, por exemplo, então  $w(x) = x^2 + 0,25$ . Tomemos valores iniciais  $x = 0,8 > 0,5$ . Teremos sucessivamente  $w(0,8) = 0,89, w^2(0,8) = 1,0421, w^3(0,8) = 1,33\dots, w^4(0,8) = 2,03\dots, w^5(0,8) = 4,46$ , que nos indica ser  $\lim_{n \rightarrow \infty} w^n(0,8) = \infty$ , ou seja que o ponto fixo é repulsor para  $x > 0,5$ , o mesmo acontece para  $x < 0,5$ .

(c) Seja finalmente o caso que  $c < \frac{1}{4}$ , quando  $\Delta > 0$ , que nos dá dois pontos fixos. Consideremos para exemplificar  $w(x) = x^2 - 2$ , de raízes  $-\sqrt{2}$  e  $\sqrt{2}$ .

Necessariamente devemos ter para ponto fixo  $x^2 - x - 2 = 0$ , de onde a existência de dois pontos fixos  $x = -1$  e  $x = 2$ . Tomemos, o valor inicial  $x = 2,1 > 2$ . Teremos sucessivamente  $w(2,1) = 2,41, w^2(2,1) = 3,8081, w^3(2,1) = 9,48\dots$ , que nos mostra ser  $\lim_{n \rightarrow \infty} w^n(2,1) = \infty$ , portanto  $x > 2$  é repulsor.

Tomemos agora um valor inicial  $x < 2$ , por exemplo  $x = 1,5$ , teremos sucessivamente  $w(1,5) = 0,25$ ,  $w^2(1,5) = -1,93\dots$ ,  $w^3(1,5) = 1,72\dots$ ,  $w^4(1,5) = 0,95\dots$ ,  $w^5(1,5) = -1,09\dots$ ,  $w^6(1,5) = -0,81\dots$ ,  $w^7(1,5) = -1,34\dots$ , contudo, agora não fica simples tirar alguma conclusão. Sugerimos, representar essa sucessão de valores no gráfico cartesiano, acrescentando também o gráfico de  $y = x$ . Para cada ponto  $x$  representar o ponto em  $w$ , em seguida com a horizontal na reta  $y = x$  o ponto correspondente  $x = y$ . Observamos que a sucessão alternada de pontos na parábola e reta  $y = x$  rodeiam o ponto fixo  $(-1,1)$ , como o redemoinho de um sifão; ficando claro que esse ponto fixo é *atrator*. Analogamente, com o inicial  $x = -1,8$  teremos o mesmo ponto fixo  $(-1,1)$  como um redemoinho sifão. É importante observar que as órbitas para pontos do intervalo  $-2 < x < 2$  estão nele inteiramente contidas, de onde se pode dizer que as órbitas são *prisioneiras*.

Para um ponto inicial  $x = -2$  temos que  $w(-2) = 2$  e sucessivamente  $w^i(-2) = 2$  ( $i > 1$ ), ou que  $x = -2$  é *aparentemente fixo* ou *eventualmente fixo*.

Para  $x < -2$ , por exemplo  $x = -2,2$ , teremos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} w^n(-2,2) = \infty$ . Diz-se que para pontos  $x < -2$  as órbitas são fugitivas, elas fogem, escapam para o infinito.

## 4.2 Conjunto de Julia

No período da Primeira Guerra Mundial, os matemáticos franceses Pierre Fatou (1878 - 1929) e Gastou Julia (1893 - 1978) publicaram vários trabalhos sobre o estudo de propriedades iterativas envolvendo números complexos, é claro que nessa época não puderam ter auxílio de um computador. Dessa forma surgiu o Conjunto de Julia, dado pela fronteira do conjunto dos pontos de escape e o conjunto dos pontos prisioneiros da recorrência

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

onde  $z_n$  e  $c$  são números complexos

De modo grosseiro, a órbita de um ponto ou número, segundo Miranda [8], é a lista de sucessivas iterações deste ponto. Por exemplo, a órbita de  $z_0 = 2$  da recursão  $z_{n+1} = z_n^2$  será dada por 2, 4, 16, 256,... . Um conjunto de escape de  $c$  é formado por todos os

pontos  $z_0$  cujas órbitas são atraídas para o infinito, e o conjunto prisioneiro é formado por todos os pontos  $z_0$  cujas órbitas são atraídas para um círculo de centro na origem e raio  $c$ . Portanto, o Conjunto de Julia associado a  $c$  é dado pela fronteira destes dois conjuntos.

Apresentaremos agora um algoritmo para computar o conjunto de Julia de  $Q_c$  (definida abaixo) que trabalha bem quando  $Q_c$  tem uma órbita periódica (ou ciclo) de atração. Porém, nem sempre é verdade que  $Q_c$  tem um ciclo de atração. Além do mais é difícil prever quais valores de  $c$  admitem um sistema dinâmico que tem um ciclo de atração.

Faremos um estudo da seguinte função quadrática:

$$Q_c(z) = z^2 + c$$

onde  $c = c_1 + ic_2$  é uma constante complexa.

Aqui é considerado somente valores  $c$ , com  $|z| \leq 2$ , ou seja, estamos tomando aqueles valores de  $c$ , que permanecem no interior do círculo de raio 2 no plano complexo. O motivo para essa escolha, está no teorema abaixo.

**Teorema. (Teste de Convergência para  $Q_c(z)$ )** Se para algum  $n \in \mathbb{N}$ , for satisfeita a expressão

$$|Q_c^n(z)| > 2$$

então a órbita de  $z$  tende para o infinito.

**Demonstração:** Vamos fixar valores pequenos para  $c$ . Seja  $Q_c(z) = z^2 + c$ , com  $|c| \leq 2$ . Se  $|z| > 2$  então  $|z| > |c|$ , logo

$$|Q_c(z)| = |z^2 + c| \geq |z^2| - |c| > |z^2| - |z|.$$

Assim,

$$|Q_c(z)| > (|z| - 1)|z|.$$

Mas,

$$|z| - 1 = 1 + k, k \in \mathbb{R}_+.$$

Então

$$|Q_c(z)| > (1 + k)|z| > |z| > 2.$$

Na segunda iteração temos,

$$|Q_c^2(z)| = |Q_c(Q_c(z))| > (1 + k)Q_c(z) > (1 + k)^2|z|.$$

E assim,

$$|Q_c^n(z)| > (1 + k)^n |z|.$$

Como

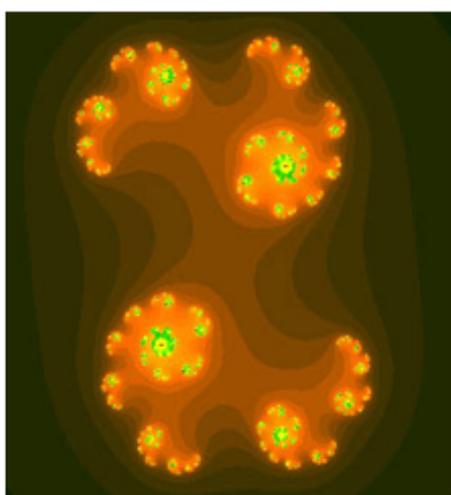
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + k)^n = \infty,$$

temos que

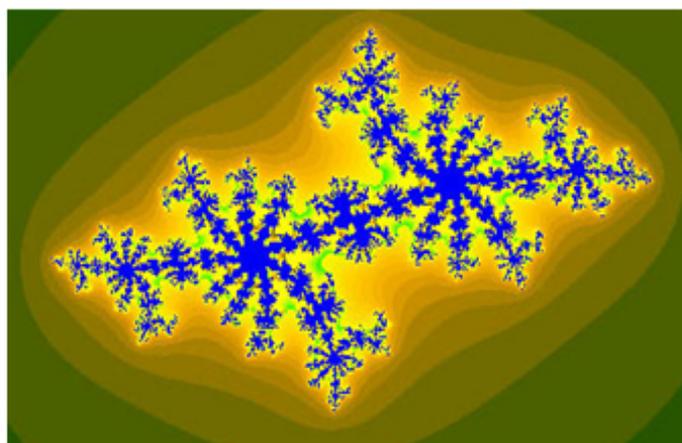
$$\lim_{n \rightarrow \infty} |Q_c^n(z)| = \infty.$$

Portanto, a órbita de  $z$  tende ao infinito se  $|z| > 2$

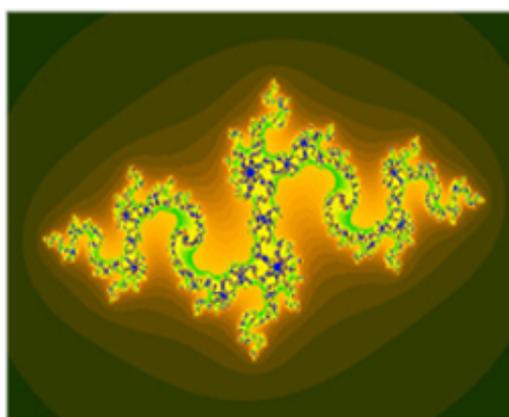
Para construí-lo fixa a constante  $c$  ao longo de todo processo de iteração e varia-se o valor de  $z_0$ . Devido a sua enorme complexidade, não seria possível desenhá-lo manualmente. Um método para plotá-lo, é colorir de uma cor os pontos de escape e de outra cor os pontos prisioneiros. Associado a cada  $c$  temos um Conjunto de Julia diferente e alguns exemplos destes estão representados a seguir



$c = -0,70176 - 0,842i$



$c = 0,45 + 0,1428i$



$c = 0,835 - 0,2321i$

Figura 4.2: Conjuntos de Julia

Uma outra forma de escrevermos o Conjunto de Julia é tomarmos  $z_0 = x_0 + iy_0$ , assim se  $z_n = x_n + iy_n$  e  $c = a + bi$ , então

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n^2 + c = (x_n + iy_n)^2 + (a + bi) = x_n^2 + 2ix_ny_n + i^2y_n + a + bi \\ &= (x_n^2 - y_n^2 + a) + (2x_ny_n + b)i. \end{aligned}$$

### 4.3 Conjunto de Mandelbrot

No fim da década de 70, Mandelbrot quis generalizar o Conjunto de Julia no caso de funções quadráticas com um parâmetro variável, ou seja, é o conjunto de valores do parâmetro  $c$  da equação de recorrência  $z_{n+1} = z_n^2 + c$ , para o qual a órbita crítica (órbita de  $z_0 = 0$ ) não tende para o infinito. Chamaremos esse conjunto de valores de  $M$ .

Segundo Miranda [8], o Conjunto de Mandelbrot é uma figura no plano dos valores de  $c$ , e não no plano dos números complexos  $z$ , onde estão os Conjuntos de Julia.

Para entender o que aparenta o conjunto  $M$ , precisamos entender quais valores de  $c$  tem órbita crítica que tende para o infinito.

É verdade que se  $|c| > 2$ , então a órbita crítica de 0 escapa imediatamente. De fato, se escrevermos  $|c| = 2 + k$ , com  $k > 0$ , revidicamos que algum ponto  $|z| \geq |c|$  escapa sob iterações para  $Q_c$  (chamaremos o algoritmo para computar o Conjunto de Julia de  $Q_c$ ), pois

$$|Q_c(z)| = |z^2 + c| \geq |z^2| - |c| \geq |z^2| - |z| = |z|(|z| - 1) = |z|(1 + k).$$

Portanto,

$$|Q_c(z)| > |z|.$$

Ou seja, se  $|z| > 2$  então  $|Q_c(z)|$  cai fora do círculo de raio 2 no plano complexo. Se continuarmos iterando e calculando o módulo, teremos que:

$$|Q_c^n(z)| \geq (1 + k)^n |z|.$$

Dai,

$$Q_c^n(z) \rightarrow \infty \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Como consequência o Conjunto de Mandelbrot pertence ao interior do círculo de raio 2 no plano complexo.

Vamos agora construir o Fractal de Mandelbroat, como feito em Janos [6], usando as equações mencionadas no Conjunto de Julia

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a$$

$$y_{n+1} = 2x_n y_n + b$$

1. Desenhe um círculo de raio 2, com centro na origem do plano  $(x, y)$ ,
2. Selecione um valor para  $a$  e um valor para  $b$ ,
3. Com estes valores de  $a$  e  $b$ , calcule os pontos  $x_n$  e  $y_n$  e faça  $n = 100$  por exemplo,
4. Se o ponto pertence ao círculo pinte-o de preto, caso contrário, pinte-o de outra cor,
5. Selecione outros valores para  $a$  e  $b$  e volte para (3).

O Fractal de Mandelbroat é a figura formada pelos pontos pretos que sobraram após  $k$  seleções de  $a$  e  $b$ .

A medida que o número de iterações aumenta, mais pontos escapam para o infinito e a figura da imagem atratora vai aparecendo claramente depois de cerca de 50 iterações. O Fractal de Mandelbroat já foi chamado de o mais complexo objeto da matemática. Em seu interior, infinitas regiões podem ser observadas. As imagens a seguir mostram este fractal, do qual plotamos também pontos que escapam para o infinito. As cores dependem do número de iterações que o ponto levou para escapar para o infinito.

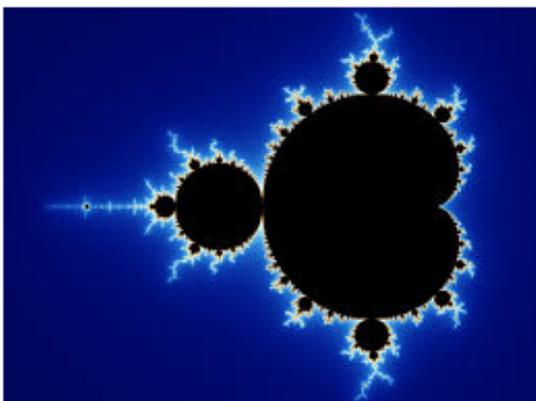


Figura 4.3: Conj. de Mandelbroat 1

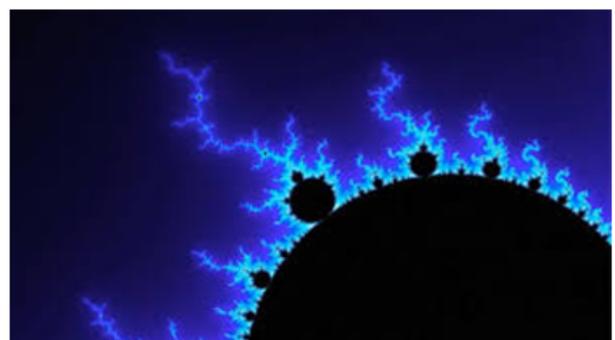


Figura 4.4: Conj. de Mandelbroat 2

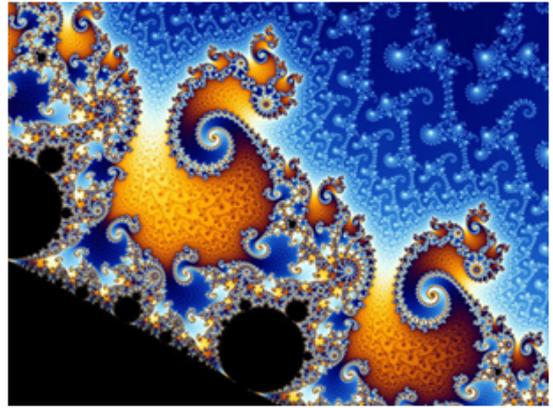
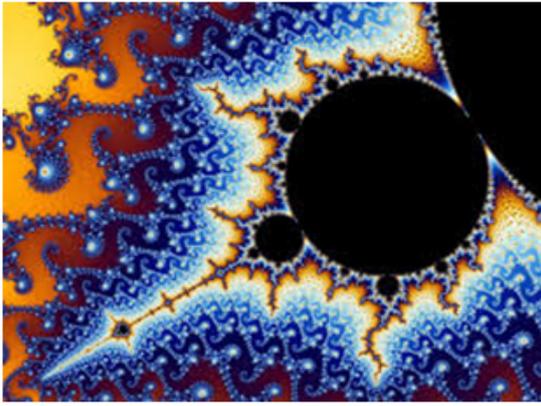


Figura 4.5: Conj. de Mandelbroat 3

Figura 4.6: Conj. de Mandelbroat 4

Outra característica desse fractal é que para cada valor de  $c$  encontramos o Conjunto de Julia correspondente a este parâmetro na sua borda. Assim, dentro do Conjunto de Mandelbroat, estão todos os possíveis Conjuntos de Julia como mostra a figura a seguir. E ainda, o bordo fractal de Mandelbroat possui dimensão 2.

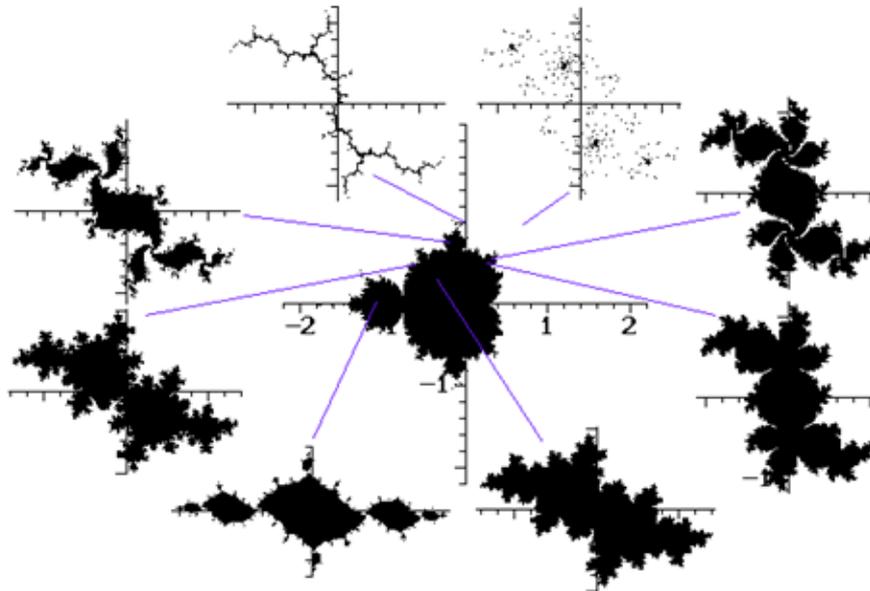


Figura 4.7: Conjuntos de Julia no Conjunto de Mandelbroat

## Capítulo 5

# Geometria Fractal e Arte

Na tentativa de obter belas formas, qualquer um pode inventar uma equação como as usadas para construir os conjuntos de Julia e Mandelbrot, aplicar a iteração e criar suas próprias imagens.

Descobrir que uma simples equação pode resultar as mais surpreendentes imagens, que podem ser produzidas através de recursos computacionais mesmo de computadores pessoais chamou a atenção de vários artistas nos últimos anos. Segundo Janos [6], é fato que a maioria das equações produzem imagem banais, sendo geralmente necessário um número muito grande de tentativas para se chegar a algo interessante.

Para facilitar esse processo, existem programas de computador, como o Fractint e o Ultrafractal, que sem requerer qualquer conhecimento de Matemática, possibilitam gerar imagens de grande apelo visual.

Se estas imagens produzidas por computadores, nas quais o elemento humano participa de forma apenas na seleção da equação é arte é uma discussão filosófica que não cabe neste trabalho, deixamos a cargo do leitor decidir.

Abaixo segue uma série de imagens geradas por computador para exemplificar e deixar a mente se perder em suas formas.



Figura 5.1: Fractais e Arte 1

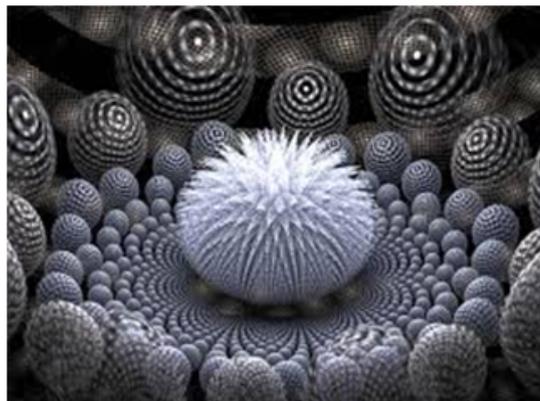


Figura 5.2: Fractais e Arte 2



Figura 5.3: Fractais e Arte 3

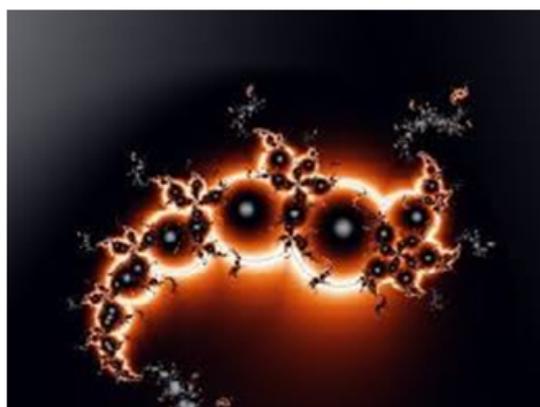


Figura 5.4: Fractais e Arte 4

# Considerações Finais

A criação de novas ferramentas para explicar o mundo que nos cerca é algo sempre necessário para a evolução humana. Nesse contexto, a geometria fractal é importante aliada na construção de formas de entender objetos da natureza que antes não podiam ser descritos com a geometria euclidiana.

O estudo dos fractais com suas propriedades, construções recursivas e medidas (dimensão, perímetro, área e volume), é de fundamental importância para se aprofundar cada vez mais no entendimento de uma Matemática que possa explicar nosso mundo, as formas naturais e objetos que nos cercam. Observar a beleza desses objetos incentiva a curiosidade humana e trazem uma nova perspectiva ao pensar em geometria de uma forma mais abrangente e no seu uso.

A geometria fractal mostra diversas aplicações em vários ramos da Matemática e em outros campos como ciências, tecnologias e até mesmo a arte. Além de poder ter alguns de seus conceitos explorados em sala de aula, como sequências infinitas, áreas e volumes de alguns fractais clássicos como a Curva de Koch, a Esponja de Menger, o Tetraedro de Sierpinski dentre outros. Mas segundo Stewart [12], “a aplicabilidade dos fractais é ampla, mas não é universal”, revelam algumas partes da natureza e uma nova forma de entendê-las com suas irregularidades e complexidade.

Dessa forma apresentamos aqui uma breve introdução à Geometria Fractal, com o intuito de instigar a curiosidade sobre esses objetos, visando não um estudo definitivo sobre o tema, mas sim como uma plataforma de onde se possa aprofundar o estudo sobre suas características e propriedades, enxergando as coisas sob novas perspectivas e mudando um pouco os conceitos da geometria tradicional que nos é apresentada durante toda nossa vivência como estudante, desde o ensino fundamental até o ensino superior.

Desse modo, esse trabalho procurou mostrar de uma forma simples mais geral, essas estruturas matemáticas ligadas às formas naturais que antes pareciam não possuir ne-

---

nhuma ordem pela suas irregularidades. Enfim, esse é apenas um começo que pode servir de base para possíveis e valiosos estudos sobre esse tema.

# Referências Bibliográficas

- [1] **ANDRADE. F. F., T.A.,CASTILHO, C.MC.C, MIRANDA, J.G.V.,MOTA, F.B.** *Geometria Fractal, propriedades e características de fractais ideias*, Revista do Ensino de Física, vol. 30 (2008), p.1-10
- [2] **BARBOSA, R.M.** *Descobrimdo a Geometria Fractal para sala de aula*. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- [3] **BARNSELEY, M.** *Fractals Everywhere*. New York: Academic Press, 1988.
- [4] **BOYER, C.B.** *História da Matemática*, tradução: Elza F. Gomide. 1.ed. São Paulo: Edgar Blucher, 1974.
- [5] **EDGAR, R.R.** *Measure, Topology and Fractal Geometry*. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [6] **JANOS, M.** *Geometria Fractal*. 1.ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2008.
- [7] **MANDELBROAT, B.B.**, *The Fractal Geometry of Nature*, New York: Freeman, 1982.
- [8] **MIRANDA, A.J.** *Conjunto de Julia e Conjunto de Mandelbroat*, Sigmae, Alfenas, MG - Universidade Federal de Alfenas, vol. 1 (2012), p.110-117.
- [9] **NEGRI, M.G.** *Introdução ao Estudo dos Fractais*.2014.33f. Dissertação de Mestrado em Matemática - Universidade Federal de Goiás, 2014.
- [10] **RICIERI, A.P.** *Fractais e Caos, a matemática de hoje*. 1.ed. São Paulo: Editora Pradiano, 1990.

- 
- [11] **SALLUM, E.M.** *Fractais no Ensino Médio*, Revista do Professor de Matemática, SBM, vol. 57 (2005), p.1-8.
- [12] **STEWART, I.** *Será que Deus Joga Dados? A nova matemática do caos*. Tradução: Maria Luiza X. de A. Borges. 1.ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1991.