Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Poliedros de Newton e C^ℓ-G-trivialidade.

Hercules de Carvalho Bezerra

Teresina - 2017

Hercules de Carvalho Bezerra

Dissertação de Mestrado:

Poliedros de Newton e C^ℓ-G-trivialidade.

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Carlos Humberto Soares Junior

Teresina - 2017

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco
Divisão de Processos Técnicos

B574p Bezerra, Hercules de Carvalho.
Poliedros de Newton e C^{ℓ} – G - trivialidade . / Hercules de Carvalho Bezerra – 2018.
59 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Mestre em Matemática, Teresina, 2018.
“Orientação: Prof. Dr.” Carlos Humberto Soares Júnior ”

1. Poliedro de Newton. 2. Filtração de Newton. 3. Gripos de Mather. I. Título.

CDD 516.15

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Poliedros de Newton e C^ℓ-G-trivialidade

HERCULES DE CARVALHO BEZERRA

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 28 de Julho de 2017.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Carlos Humberto Soares Junior - orientador

Newton L. Santos

Prof. Dr. Newton Luís Santos - membro interno

Edvalter da Silva Sena Filho

Prof. Dr. Edvalter da Silva Sena Filho - membro externo

Agradecimentos

A maior virtude do homem é a gratidão. Devo portanto agradecer primeiramente a deus por ter me dado força de chegar onde cheguei e abençoar meus passos.

Agradeço à minha mãe Ana Lúcia de Carvalho Bezerra e ao meu pai Mario Alberto Mendes Bezerra por me proporcionarem uma ótima educação desde criança e me darem todo o apoio financeiro que precisei na minha vida acadêmica. Só tenho a agradecer o esforço, o carinho e o zelo que doaram a mim sem pedir nada em troca, apenas torcendo pelo meu sucesso, de perto ou de longe, rezando pela minha saúde. Muito obrigado por tudo!

Agradeço aos meus demais familiares, em especial a minha querida avó Amarilhes (carinhosamente iaia), que agora observa minhas lutas e me abençoa ao lado de Deus, a minha irmã Cleres, aos meus tios Renato e Ana Paula que me deram muita assistência em Teresina, assim como minha prima Laissa. Muito obrigado!

Agradeço em especial a minha noiva Thamires Miranda Pontes que esteve comigo durante todo este processo me incentivando, mesmo de longe, para lutar pelos meus objetivos. Perdi as contas de quantas vezes me senti cansado e com vontade de desistir e uma simples ligação servia para recuperar todo o meu ânimo. Esta conquista é nossa meu amor, muito obrigado!

Agradeço a todos os professores que já tive na vida, não apenas os de matemática. Em especial ao professor Carlos Humberto, meu orientador, pela paciencia e dedicação ao trabalho, mesmo em outra cidade. Ao professor Cleyton Nathanael que me incentivou bastante a ingressar no mestrado durante minha graduação e é um grande amigo. A professora (tia) Iracema, minha professora particular durante toda a minha vida escolar, a mulher mais paciente que já conheci. A todos que me ensinaram a ensinar e aprender, muito obrigado!

Agradeço aos meus amigos do mestrado, que entendem muito bem como é difícil e prazerosa essa luta diária, os estudos nas salinhas, as aulas, as provas... Não consigo neste parágrafo agradecer ninguém em especial pois todos me proporcionaram um dos melhores períodos da minha vida. Muito obrigado!

Agradeço a todos os meus alunos que me ensinaram mais do que aprenderam, que me proporcionaram amadurecimento profissional. É sempre um prazer me encontrar com qualquer um deles, sem distinção. Muito obrigado!

Agradeço (a CAPES, ao CNPq, a FAPEPI) pelo apoio financeiro.

"*O segredo da existência não consiste somente em viver, mas em saber para que se vive.*".

Fiódor Dostoiévski.

Resumo

Neste trabalho estudamos a C^ℓ-G-trivialidade de famílias de germes de aplicação, onde G representa um dos grupos de Mather $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{K}$. Para isto, obtemos estimativas para o valor da fitração de Newton de um germe de aplicação $\theta : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ que garantem que uma família do tipo $f_t = f + t\theta$ seja C^ℓ-G-trivial, onde $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ é um germe de aplicação polinomial que satisfaz uma condição específica associada a algum poliedro de Newton.

Palavras-chave:

Poliedro de Newton, Filtração de Newton, Grupos de Mather.

Abstract

In this work we study the C^ℓ-G-triviality of families of application germs, where G represents one of the groups of Mather $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$ or $\mathcal{K}$. For this, we obtain estimates for the Newton filtration value of an application germ $\theta : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$, which guarantee That a family of type $f_t = f + t\theta$ is C^ℓ-G-trivial, where $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ is a polynomial application germ satisfying a specific condition associated with some polyhedron of newton.

Keywords:

Newton Polyhedra, Newton Filtration, Mather Groups.

Conteúdo

Introdução

O objetivo principal deste trabalho é estudar condições necessárias para a C^ℓ-G-trivialidade de uma família de germes de aplicação. Este é um dos principais tópicos de pesquisa em Teoria de Singularidades. Maria Aparecida Ruas e Marcelo Saia fazem em [3] este estudo para germes de polinômios quase homogêneos, o que aqui é generalizado para germes A-homogêneos, para alguma matriz A fixada.

O primeiro capítulo visa apresentar definições e notações básicas de álgebra comutativa que serão utilizadas no trabalho. Nele se encontram as definições de grupo, anel e anel de polinômios.

O segundo capítulo trata de uma introdução à teoria de singularidades onde definimos os conceitos de germes e jatos de aplicações suaves e polinômios quase homogêneos. Definimos também o que são ações de grupo e o que vêm a ser as G-equivalências onde G representa um dos grupos de Mather $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{K}$. Por fim definimos o número de Milnor associado a um germe de função, que é utilizado para obter uma condição necessária para a C^0-$\mathcal{R}$-trivialidade.

O terceiro capítulo traz os conceitos de poliedro de Newton de um germe de aplicação analítica da forma

$$f : \mathbb{R}^k, 0 \to \mathbb{R}, 0$$

definido por

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^k} a_n x^n \text{ com } x^n = x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}$$

Definimos também a função controle ρ associada a f e o conceito de filtração de Newton que terá papel central. Este capítulo é de fundamental importância por conter lemas que serão utilizados diretamente na demonstração dos resultados principais deste trabalho.

Por último apresentamos e demonstramos os teoremas principais que tem por objetivo estabelecer sob quais condições uma família de germes de aplicação é C^ℓ-G-trivial, onde $G = \mathcal{R}$,$\mathcal{C}$ ou $\mathcal{K}$. Para isto definimos o que significa uma família da forma $f_t = f + t\theta$ ser C^ℓ-G-trivial. Ao final de cada teorema, apresentamos exemplos para fazer notar como são essenciais as hipóteses e a importância dos resultados.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

1.1 Grupos, Aneis e Aneis de polinômios

Definição 1.1.1. *Um grupo* $(G, *)$ *é um conjunto* G*, munido de uma operação que satisfaz as seguintes condições:*

G.1) A operação é associativa;

G.2) Existe um elemento neutro com respeito à operação;

G.3) Todo elemento possui um elemento inverso.

Dizemos que um grupo é comutativo quando, além de satisfazer as condições acima, a operação também é comutativa.

Observamos que é fácil provar que o elemento neutro é único, assim como que para cada elemento de $(G, *)$ existe um único elemento inverso com respeito à operação do grupo.

Definição 1.1.2. *Um Anel* $(A, +, \cdot)$ *é um conjunto com pelo menos dois elementos, munido de duas operações, as quais são chamadas de adição e multiplicação, que satisfazem as seguintes condições:*

A.1) A adição é associativa;

A.2) Existe um elemento neutro com respeito à adição;

A.3) Todo elemento de A *possui um inverso com respeito à adição;*

A.4) A adição é comutativa;

M.1) A multiplicação é associativa;

M.2) Existe um elemento neutro com respeito à multiplicação;

M.3) A multiplicação é comutativa;

AM) A multiplicação é distributiva relativamente à adição.

Se todas as condições acima forem satisfeitas com exceção de M.3), então $(A, +, \cdot)$ é chamado de anel não comutativo.

Observamos ainda que é fácil provar que os elementos neutros com respeito à adição e à multiplicação são únicos, assim como que para cada elemento de $(A, +, \cdot)$ existe um único elemento inverso com respeito à adição.

Definição 1.1.3. *Um anel $(D, +, \cdot)$ é chamado de domínio ou domínio de integridade se o produto de quaisquer dois elementos não nulos de D é um elemento não nulo, isto é,*

$$\forall x, y \in D \backslash \{0\}, \quad x \cdot y \neq 0$$

Definição 1.1.4. *Um anel $(K, +, \cdot)$ é chamado corpo se todo elemento diferente de zero de K possui um inverso com respeito à multiplicação, isto é,*

$$\forall x \in \backslash \{0\}, \quad \exists y \in K \text{ tal que } x \cdot y = 1$$

Definição 1.1.5. *Seja $(K, +.\cdot)$ um corpo. Uma K-álgebra é um anel A com unidade que possui estrutura de K-espaço vetorial e satisfaz:*

$$\alpha(a \cdot b) = (\alpha \cdot a)b = a(\alpha \cdot b) = (a \cdot b)\alpha$$

$\forall a, b \in A$ e $\alpha \in K$

Definição 1.1.6. *Seja $(A, +, \cdot)$ um anel e I um subconjunto não vazio de A. Dizemos que I é um ideal de A se*

- *$x + y \in I$, $\forall x, y \in I$*
- *$ax \in I$, $\forall x \in I$, $\forall a \in A$.*

Definição 1.1.7. *Um ideal M de A é dito ideal maximal se $M \subset A$, $M \neq A$ e se não existe ideal J tal que $M \subset J \subset A$ com $J \neq M$ e $J \neq A$.*

Considere A um anel e I ideal de A. Sobre A, definimos a relação de congruência módulo I da seguinte forma

$$a \equiv b(modI) \Leftrightarrow a - b \in I$$

É de fácil verificação que esta relação é uma relação de equivalência. Se $a \in I$, então sua classe de equivalência módulo I consiste no subconjunto

$$\overline{a} = \{b \in A; b \equiv a(modI)\} = \{a + c; c \in I\}$$

Por isto denotamos a classe de equivalência por $\overline{a}$ ou $a + I$. Denotamos por A/I o conjuntos das classe de equivalência módulo I. Sobre o conjunto A/I definimos duas operações $\oplus_I$ e $\odot_I$ da seguinte maneira: para $\overline{x}, \overline{y} \in A/I$,

$$\overline{x} \oplus_I \overline{y} := \overline{x + y} \quad \text{e} \quad \overline{x} \odot_I \overline{y} := \overline{x \cdot y}$$

É fácil verificar que as operações $\oplus_I$ e $\odot_I$ estão bem definidas, além de que $(A/I, \oplus_I, \odot_I)$ é um anel. Este anel é chamado *anel quociente de A módulo I*.

Definição 1.1.8. *Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Uma sequência $(a_0, a_1, ..., a_n, ...)$, onde $a_i \in A$ para todo índice e onde $a_i \neq 0$ somente para um número finito de índices, é chamada de um polinômio numa variável sobre A.*

Considere agora $(A, +, \cdot)$ um anel qualquer. Um polinômio numa variável sobre A é uma sequência $(a_0, a_1, ..., a_n, ...)$ onde $a_i \in A$ para todo índice e onde apenas um número finito dos elementos desta sequência é diferente de zero.

Seja $\mathcal{A}$ = { polinômios numa variável sobre A }. Definimos em $\mathcal{A}$ as seguintes operações:

$\oplus : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

$(a_0, a_1, \ldots), (b_0, b_1, \ldots) \mapsto (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots)$

$\odot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

$(a_0, a_1, \ldots), (b_0, b_1, \ldots) \mapsto (c_0, c_1, \ldots)$

onde

$$\begin{cases} c_0 = a_0 b_0 \\ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 \\ \vdots \\ c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 \\ \vdots \end{cases}$$

A verificação de que $(\mathcal{A}, \oplus, \odot)$ é um anel é feita facilmente e será deixada a cargo do leitor, enfatizamos apenas que:

- O elemento neutro de $\oplus$ é o elemento $(0, 0, 0, \ldots)$
- O elemento neutro de $\odot$ é o elemento $(1, 0, 0, \ldots)$
- O inverso de $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ com respeito à operação $\oplus$ é o elemento $(-a_0, -a_1, \ldots, -a_n, \ldots)$
- $A_0 = \{(a_0, 0, 0, \ldots), a \in A\}$ é subanel de A, isomorfo a A.

Note que a operação $\odot$ é comutativa pois a operação de multiplicação do anel A é comutativa.

Se $(a_0, a_1, \ldots)$ é um elemento de $\mathcal{A}$, então o símbolo $(a_0, a_1, \ldots)^n$ denota o elemento

$$\underbrace{(a_0, a_1, \ldots) \odot (a_0, a_1, \ldots) \odot \ldots \odot (a_0, a_1, \ldots)}_{n \quad vezes}$$

Usando as definiões de $\oplus$ e $\odot$, podemos ver que

$$\begin{aligned}(0, \ldots, 0, a_n, 0, \ldots) &= (a_n, 0, 0, \ldots) \odot (0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots) \\ &= (a_n, 0, 0, \ldots) \odot (0, 1, 0, 0, \ldots)^n\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) = {}& (a_0, 0, 0, \ldots) \\ & \oplus [(a_1, 0, 0, \ldots) \odot (0, 1, 0, 0, \ldots)] \\ & \oplus [(a_2, 0, 0, \ldots) \odot (0, 1, 0, 0, \ldots)^2] \\ & \oplus \ldots \\ & \oplus [(a_n, 0, 0, \ldots) \odot (0, 1, 0, 0, \ldots)^n]\end{aligned}$$

Vamos utilizar o símbolo X para designar o elemento $(0, 1, 0, \ldots)$. Também, no lugar de escrever $(a_i, 0, 0, \ldots)$ vamos escrever a_i. Finalmente, no lugar de escrever $\oplus$ e $\odot$, vamos escrever $+$ e $\cdot$, respectivamente. Convencionando desta forma temos que:

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots) = a_0 + a_1 \cdot X + \ldots + a_n \cdot X^n$$

Esta nova notação será mais conveniente daqui em diante, então

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i ; n \in \mathbb{N} \quad e \quad a_i \in A \right\}$$

e as operações são as usuais. O anel $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ agora será denotado por $A[X]$ e chamado de anel de polinômios numa variável sobre A.

Definição 1.1.9. *Seja A um anel e $A[X]$ o anel dos polinômios numa variável sobre A. Considere $f(X) := a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in A[X]$, com $a_n \neq 0$. Definimos o grau de $f(X)$ como sendo o número inteiro n. O coeficiente a_n se chama o coeficiente líder de $f(X)$. Quando $a_n = 1$ dizemos que o polinômio $f(X)$ é mônico.*

Observe que não definimos a noção de grau para o polinômio nulo.

Podemos definir o anel de polinômios em k variáveis sobre o anel A, por indução, do seguinte modo:

$$A[X_1, \ldots, X_k] = (A[X_1, \ldots, X_{k-1}])[X_k]$$

.

Capítulo 2

Elementos de teoria de singularidades

2.1 Germes e jatos de aplicações

Considere Y um conjunto qualquer, X um espaço topológico, $x \in X$ e C o conjunto dos pares (U, f) tais que U é uma vizinhança de x em X e $f : U \to Y$ é uma função. Definimos em C a seguinte relação de equivalência: $(U, f) \simeq_x (V, g)$ se, e somente se, existe uma vizinhança $U_0 \subset U \cap V$ de x tal que $f|_{U_0} = g|_{U_0}$.

Definição 2.1.1. *Um germe de aplicação de X em Y no ponto x é uma classe de equivalência de uma aplicação $f : X \to Y$ pela relação $\simeq_x$.*

As notações utilizadas para representar o germe de uma aplicação são várias: simplesmente f, ou (f, x), ou $f : (X, x) \to Y$, ou (U, f), dentre outras.

Definição 2.1.2. *Sejam $a \in \mathbb{R}^n$ e $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, onde U e vizinhana de a e f é de classe C^∞. Denotamos por $\epsilon^a_{n,p}$ o conjunto de todos os germes $f : (U, a) \to \mathbb{R}^p$.*

Quando $a = 0$ a notação será $\epsilon_{n,p}$ e quando $p = 1$ escreveremos ϵ^a_n ou ϵ_n. Observamos ainda que

Observação 2.1.1. *O conjunto ϵ^a_n munido das seguintes operações:*

$$+ : \epsilon^a_n \times \epsilon^a_n \to \epsilon^a_n \quad e \quad \cdot : \epsilon^a_n \times \epsilon^a_n \to \epsilon^a_n$$

definidas respectivamente por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, é um anel comutativo com unidade. A demonstração deste fato é simples e será deixada a cargo do *leitor. Além disso, temos um bom motivo para considerar apenas germes na origem de* $\mathbb{R}^n$*, pois a aplicação* $T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *definida por* $T_a(x) = x + a$ *induz um isomorfismo de anéis* $T_a^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*.*

Considere agora $m_n = \{f \in \epsilon_n; f(0) = 0\}$. Claramente m_n é ideal de ϵ_n.

Proposição 2.1.1. *m_n é o único ideal maximal de ϵ_n.*

Demonstração. Mostraremos primeiramente que m_n é um ideal maximal. De fato, se $f \in \epsilon_n \backslash m_n$ então $f(0) \neq 0$ e portanto $\frac{1}{f}$ é um germe em ϵ_n, logo f é uma unidade, o que prova que m_n é maximal. Agora, se $I \subsetneq \epsilon_n$ é um ideal qualquer, diferente de ϵ_n, então I não contem unidades. Logo $I \subset m_n$. Portanto m_n é o único ideal maximal de ϵ_n. □

Proposição 2.1.2. *m_n é o ideal de ϵ_n gerado pelos germes das funções $f_i(x) = x_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$.*

Demonstração. Note inicialmente que $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle_{\epsilon_n} \subset m_n$. De fato, dado $h(x) = x_1 h_1(x) + \ldots + x_n h_n(x) \in \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle_{\epsilon_n}$ verifica-se facilmente que $h_0 = 0$. Logo $h \in m_n$ o que prova a afirmação.

Agora, se $f \in m_n$ então existe uma bola aberta $B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < r\}$ e um representante da classe de equivalência f , também denotado aqui por f , definido nesta bola.

Note que, para $x \in B(0, r)$ tem-se que

$$f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f(tx))dt = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$$

Onde $g_i(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt$. Assim f define um germe em ϵ_n. Logo $f \in \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle_{\epsilon_n}$ □

Voltemos ao conjunto $\epsilon^0_{n,p} = \{f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0\}$ onde f é suave. Observe que $\epsilon^0_{n,p} = m_n \cdot \epsilon_{n,p}$.

Definição 2.1.3. *O conjunto formado pelas aplicações polinomiais $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ cujas componentes tem grau no máximo k será denotado por $J^k(n, p)$.*

Definição 2.1.4. *Dado $f \in \epsilon^0_{n,p}$, chamamos de k-jato de f o polinômio obtido truncando-se na potência k a expansão de Taylor de f na origem. Denotaremos o k-jato de f por $j^k f$.*

2.2 Polinômio quase homogêneos

Seja $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ o anel de polinômios nas indeterminadas $x_1, \ldots, x_n$ com coeficientes no corpo $\mathbb{R}$.

Definição 2.2.1. *O polinômio*

$$f(x) = \sum_{a \in I} \alpha_a x_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n}$$

É definido como homogêneo de grau d se todos os seus monômios têm grau d, ou seja, se

$$a_1 + \ldots + a_n = d$$

$\forall a \in I$ *, com* $\alpha_a \neq 0$.

Exemplo 2.2.1. *O polinômio* $f(x, y, z) = x^6 + x^3y^2z + y^5z + x^2z^4$ *é homogêneo de grau* 6.

Definição 2.2.2. *Um polinômio dado por*

$$f(x) = \sum_{a \in I} \alpha_a x_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n} \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

É dito quase homogêneo de grau d com relação a $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, *com* $w_i \in \mathbb{Z}$ *não negativos, se*

$$w \cdot a := w_1a_1 + \ldots + w_na_n = d, \quad \forall a = (a_1, \ldots, a_n) \in I$$

Neste caso, os números inteiros $w_1, \ldots, w_n$ *são chamados de pesos e o número d é chamado de grau pesado de f. Dizemos então que f é quase homogêneo do tipo* $(w_1, \ldots, w_n; d)$.

Exemplo 2.2.2. *O polinômio*

$$f(x, y, z) = xy^3z + x^4z + yz^3$$

é quase homogêneo do tipo $(2, 2, 3; 11)$

Observação 2.2.1. *Considere $f(x)$ um polinômio quase homogêneo do tipo $(w_1, \dots, w_n; d)$ e $w' = m.d.c.\{w_1, \dots, w_n\}$. Note que $f(x)$ é quase homogêneo do tipo $(\frac{w_1}{w'}, \dots, \frac{w_n}{w'}, \frac{d}{w'})$ pois*

$$a_1 w_1 + \ldots + a_n w_n = d \Leftrightarrow a_1 \frac{w_1}{w'} + \ldots + a_n \frac{w_n}{w'} = \frac{d}{w'}$$

Portanto podemos sempre assumir que os pesos são primos entre si. Note ainda que todo polinômio homogêneo é quase homogêneo com pesos $w_1 = w_2 = \ldots = w_n = 1$

Proposição 2.2.1. *$f(x) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ é quase homogêneo do tipo $(w_1, \dots, w_n; d)$ se, e somente se, $f(tx) = f(t^{w_1}x_1, \dots, t^{w_n}x_n) = t^d f(x)$, onde $tx = (t^{w_1}x_1, \dots, t^{w_n}x_n)$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Se f é quase homogêneo do tipo $(w_1, \dots, w_n; d)$ então

$$a_1 w_1 + \ldots + a_n w_n = d, \quad \forall a \in I$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
f_{tx} &= f(t^{w_1}x_1, \dots, t^{w_n}x_n) \\
&= \sum \alpha_a (t^{w_1}x_1)^{a_1} \cdot \ldots \cdot (t^{w_n}x_n)^{a_n} \\
&= \sum \alpha_a t^{a_1 w_1 + \ldots + a_n w_n} x_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n} \\
&= t^d \sum \alpha_a x_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n} \\
&= t^d f(x)
\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ agora suponha que $f(tx) = t^d f(x)$. Daí temos que:

$$\sum \alpha_a (t^{w_1}x_1)^{a_1} \cdot \ldots \cdot (t^{w_n}x_n)^{a_n} = t^d \sum \alpha_a x_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n}$$

Logo,

$$\sum \alpha_a t^{a_1 w_1 + \ldots + a_n w_n} x_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n} = t^d \sum \alpha_a x_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n}$$

Assim, $t^{a_1 w_1 + \ldots + a_n w_n} = t^d$, $\forall t$. Portanto $a_1 w_1 + \ldots + a_n w_n = d$, $\forall a \in I$. Desta forma f é quase homogêneo do tipo $(w_1, \dots, w_n; d)$.

□

2.3 Grupos de Mather

Definição 2.3.1. *Sejam $(G, *)$ um grupo e C um conjunto. Uma ação do grupo G no conjunto C é uma função*

$$\varphi : G \times C \to C$$

tal que:

1. $\varphi(e, x) = x$, $\forall x \in C$

2. $\varphi(g_1, \varphi(g_2, x)) = \varphi(g_1 \cdot g_2, x)$, $\forall x \in C$ *e* $\forall g_1, g_2 \in G$

Observação 2.3.1. *Alguns autores preferem denotar* $\varphi(g, x)$ *simplesmente por* $g \cdot x$.

Definição 2.3.2. *Sejam* $x \in C$ *fixado e* $\phi : G \times C \to C$ *uma ação de* G *em* C

1. *O subconjunto de* C *definido por*

$$Gx = \{\varphi(g, x) \in C; g \in G\}$$

.

É chamado de órbita de x.

2. *Definimos também o estabilizador de* x *em* G *como sendo o subgrupo de* G *dado por*

$$G_x = \{g \in G; \varphi(g, x) = x\}$$

Uma ação de um grupo G em um conjunto C induz uma relação de equivalência em C da seguinte forma

$$x \sim y \text{ se, e somente se, existe } g \in G \text{ tal que } \varphi(g, x) = y$$

Note que esta relação é de fato uma relação de equivalência pois:

a) $\varphi(e, x) = x$, $\forall x \in C$

b) Se $x \sim y$ então existe $g \in G$ tal que $\varphi(g, x) = y$. Considere então g^{-1} elemento inverso de g, e note que $\varphi(g^{-1}, y) = \varphi(g^{-1}, \varphi(g, x)) = \varphi(g^{-1} \cdot g, x) = \varphi(e, x) = x$, logo concluimos que $y \sim x$.

c) Se $x \sim y$ e $y \sim z$ então existem $g_1, g_2 \in G$ tais que $\varphi(g_1, x) = y$ e $\varphi(g_2, y) = z$. Considere então $g = g_1 \cdot g_2 \in G$ e note que $\varphi(g, x) = \varphi(g_1 \cdot g_2, x) = \varphi(g_2 \cdot g_1, x) = \varphi(g_2, \varphi(g_1, x)) = \varphi(g_2, y) = z$

Definição 2.3.3. *O conjunto de todos os germes de aplicação* $h : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^n, 0$, *tal que* h *é um difeomorfismo, munido da operação de composição, é um grupo. Denotaremos este grupo por* D_n.

Consideremos a ação do grupo D_n em $\epsilon^0_{n,p}$ dada por

$$r : D_n \times \epsilon^0_{n,p} \to \epsilon^0_{n,p}$$
$$(h, f) \mapsto f \circ h^{-1}$$

Definição 2.3.4. *Dois germes de aplicações $f, g : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ são $\mathcal{R}$-equivalentes (ou estão na mesma $\mathcal{R}$-órbita) se existe um germe de difeomorfismo $h \in D_n$ tal que $g = f \circ h^{-1}$.*

Exemplo 2.3.1. *Dada uma aplicação $f : \mathbb{R}^{n+k}, 0 \to \mathbb{R}^n, 0$ tal que $f'(0)$ é sobrejetiva, segue da forma local das submersões que existe $h \in D_{n+k}$ tal que $(f \circ h)(x, y) = x$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{n+k}$, desta forma a aplicação projeção é $\mathcal{R}$-equivalente a f*

Definição 2.3.5. *O conjunto formado pelos germes de difeomorfismos*

$$H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0$$

tais que $\pi_1(H(x, y)) = x$ e $\pi_2(H(x, 0)) = 0$, munido da operação de composição, é um grupo. Denotaremos este grupo por $\mathcal{C}$. De forma mais clara:

$\mathcal{C} = \{H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0; H(x, y) = (x, \varphi(x, y))$ é um difeomorfismo e $\varphi(x, 0) = 0\}$

O grupo $\mathcal{C}$ age no conjunto $\mathbb{R}^n \times \epsilon^0_{n,p}$ da seguinte forma

$$c : \mathcal{C} \times (\mathbb{R}^n \times \epsilon^0_{n,p}) \to \mathbb{R}^n \times \epsilon^0_{n,p}$$
$$(H, (x, f)) \mapsto H(x, f) = (x, \varphi(x, f))$$

Definição 2.3.6. *Dois germes de aplicações $f, g : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ são $\mathcal{C}$-equivalentes quando existir $H \in \mathcal{C}$ tal que*

$$H(x, f(x)) = (x, \varphi(x, f(x))) = (x, g(x))$$

Definição 2.3.7. *O conjunto formado pelos germes de difeomorfismos $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0$ tais que $h = (\pi_1 \circ H)(\cdot, y) : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^n, 0$ é um difeomorfismo para cara $y \in \mathbb{R}^p$ e $\pi_2(H(x, 0)) = 0$, munido da operação de composição, é um grupo. Denotaremos este grupo por $\mathcal{K}$. De forma mais clara:*

$\mathcal{K} = \{H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0; H(x, y) = (h(x), \varphi(x, y))$,$h(x)$ são difeomorfismos e $\varphi(x, 0) = 0\}$

O grupo $\mathcal{K}$ age em $\mathbb{R}^n \times \epsilon^0_{n,p}$ da seguinte forma:

$$k : \mathcal{K} \times (\mathbb{R}^n \times \epsilon^0_{n,p}) \to \mathbb{R}^n \times \epsilon^0_{n,p}$$
$$(H,(x,f)) \mapsto H(x,f) = (h(x), \varphi(x,f))$$

Definição 2.3.8. *Dois germes de aplicações $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ e g são $\mathcal{K}$-equivalentes quando existir $H \in \mathcal{K}$ tal que*

$$H(x, f(x)) = (h(x), \varphi(x, f(x))) = (h(x), g \circ h(x))$$

Definição 2.3.9. *Os grupos $C^l - G$, para $G = \mathcal{R}, \mathcal{C}$ ou $\mathcal{K}$, com $0 \leq l < \infty$ são definidos da mesma forma que os grupos $G = \mathcal{R}, \mathcal{C}$ e $\mathcal{K}$, com a única diferença de que os difeomorfismos são de classe C^l se $l \geq 1$ ou homeomorfismos quando $l = 0$.*

Nosso interesse neste trabalho, no entanto, é mais na relação de equivalência induzida, a C^l-G-equivalência, no espaço dos germes de aplicações analíticas $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$.

2.4 Determinação finita e número de Milnor

Definição 2.4.1. *Um k-jato $j^k f$ de um germe $f \in \epsilon^0_{n,p}$ é dito $\mathcal{R}$-suficiente se qualquer germe $g \in \epsilon^0_{n,p}$ com $j^k f = j^k g$ é $\mathcal{R}$-equivalente ao germe f.*

Definição 2.4.2. *Diremos que $f \in \epsilon^0_{n,p}$ é dito $\mathcal{R}$-finitamente determinado quando existir um inteiro positivo k tal que f é k-$\mathcal{R}$-determinado.*

Introduzimos agora um numeral importante para todo germe de função f finitamente determinado.

Definição 2.4.3. *Seja $f; \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}, 0$ um germe de função finitamente determinado. A $\mathbb{R}$-álgebra $M(f) = \epsilon_n / J_f$, onde $J_f = \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle$, é chamada de álgebra de Milnor do germe f. Sua dimensão*

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{R}} M(f)$$

É chamada de número de Milnor do germe f.

Exemplo 2.4.1. *Determinar o número de Milnor de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1(x_1^2 + x_2^3) + x_3^2 + \ldots + x_n^2$$

Observe que $J_f = \langle 3x_1^2 + x_2^3, x_1x_2^2, x_3^2, \ldots, x_n^2 \rangle$. portanto, como $\mathbb{R}\{x_1, \ldots, x_n\}/J_f$ é isomorfo a $\mathbb{R}\{x, y\}/\langle 3x^2 + y^3, xy^2 \rangle$, nosso trabalho se resume em calcular a dimensão de $\epsilon_2/\langle 3x^2 + y^3, xy^2 \rangle$.

Perceba que

$x^3 = \frac{1}{3}[x \cdot (3x^2 + y^3) - y \cdot (xy^2)] \in \langle 3x^2 + y^3, xy^2 \rangle$ e

$y^5 = y^2(3x^2 + y^3) - 3x(xy^2) \in \langle 3x^2 + y^3, xy^2 \rangle$

Portanto nos restam verificar os monômios abaixo:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & x & & y & & \\ & x^2 & & xy & & y^2 & \\ & & x^2y & & & & y^3 \\ & & & & & & & y^4 \end{array}$$

Mostraremos apenas que y^4, $x^2y \notin J_f$. O restante segue de imediato.

- Suponha, por contradição, que $y^4 \in J_f$, então existem $h, g \in \epsilon_2$ tais que

$$y^4 = h(x, y)(3x^2 + y^3) + g(x, y)(xy^2), \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

Tomemos

$$h(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + H(x, y)$$

onde $H(x, y)$ tem ordem maior ou igual a 3.

Tomando $y = 0$ na equação (2.1) temos que $h(x, 0)3x^2 = 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow h(x, 0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Portanto, $h(x, 0) = a_0 + a_1x + a_3x^2 + H(x, 0)$. Ou seja, $a_0 = a_1 = a_3 = 0$ e $H(x, 0) = 0$. Logo, $h(x, y) = a_2y + a_4xy + a_5y^2 + H(x, y)$.

Agora, substituindo $y = x^2$ na equação (2.1), obtemos:

$$\begin{aligned} x^8 &= h(x, x^2)(3x^2 + x^6) + g(x, x^2)(x^5) \\ &= (a_2x^2 + a_4x^3 + a_5x^4)(3x^2 + x^6) + H(x, x^2)(3x^2 + x^6) + g(x, x^2)(x^5) \end{aligned}$$

Donde tiramos que $a_2 = a_4 = 0$. Logo $h(x, y) = a_5y^2 + H(x, y)$. Substituindo $h(x, y)$ na equação (2.1) tem-se

$$y^4 = (a_5y^2 + H(x, y))(3x^2 + y^3) + g(x, y)(xy^2), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Agora tomando $x = 0$, obtemos

$$y^4 = a_5 y^5 + H(x,0)y^3$$

.

Onde a ordem de $\{H(0,x)y^3\}$ é maior ou igual a 6, o que é uma contradição. Portanto $y^4 \notin J_f$.

- Suponha agora que $x^2 y \in J_f$. Então, existem $h, s \in \epsilon_2$ tais que

$$x^2 y = h(x,y)(3x^2 + y^3) + s(x,y)(xy^2), \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

De maneira analoga ao caso anterior, escrevemos

$$h(x,y) = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 xy + b_5 y^2 + T(x,y)$$

onde $T(x,y)$ tem ordem maior ou igual a 3.

Tomando $y = 0$, segue da equação (2.2), que $h(x,0)3x^2 = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow h(x,0) = 0$. Portanto $h(x,0) = b_0 + b_1 x + b_3 x^2 + T(x,0)$. Ou seja, $b_0 = b_1 = b_3 = 0$ e $T(x,0) = 0$.

Logo $h(x,y) = b_2 y + b_4 xy + b_5 y^2 + T(x,y)$.

Tomando agora $x = 0$ em (2.2), tem-se que $0 = h(0,y)y^3 \Rightarrow h(0,y) = 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, donde tiramos que $b_2 = b_5 = T(0,y) = 0$. Logo $h(x,y) = b_4 xy + T(x,y)$. Substituindo na equação (2.2), temos que

$$x^2 y = b_4 xy(3x^2 + y^3) + T(x,y)(3x^2 + y^3) + s(x,y)(xy^2)$$

Para finalizar tome $x = y$, logo

$$x^3 = b_4 x^2(3x^2 + x^3) + T(x,x)(3x^2 + x^3) + s(x,x)(x^3)$$

O que é uma contradição, pois a ordem de $\{T(x,x)(3x^2 + x^3)\}$ é maior ou igual a 5 e a ordem de $s(x,x)(x^3)$ é maior ou igual a 4. Portanto, $x^2 y \notin J_f$.

Ora,

i) $y^4 \notin J_f \Rightarrow 1, y, y^2, y^3 \notin J_f$

ii) $y^3 \notin J_f \Rightarrow x^2 \notin J_f$, pois caso contrário teríamos $y^3 - (3x^2 + y^3) = 3x^2 \in J_f$

iii) $x^2y \notin J_f \Rightarrow x, x^2, xy \notin J_f$

Como $3x^2 + y^3 \in J_f$ temos que $[3x^2]$ e $[y^3]$ são linearmente dependentes em $\frac{\epsilon_2}{J_f}$. De modo análogo, temos $[x^2y]$ e $[y^4]$ são linearmente dependentes em $\frac{\epsilon_2}{J_f}$.

Portanto $\mu(f) = 7$.

Capítulo 3

Poliedro de Newton e Filtração de Newton

3.1 Poliedro de Newton

Definição 3.1.1. *Fixado $k \in \mathbb{N}$, seja $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^k}^{\infty} a_n x^n$ uma função analítica onde $x^n = x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}$ e $a_n \in \mathbb{R}$. O suporte da função f é o conjunto definido por $supp(f) = \{n \in \mathbb{N}^k; a_n \neq 0\}$.*

Definição 3.1.2. *$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^k}^{\infty} a_n x^n$ é dito cômodo, se para qualquer $i = 1, \ldots, k$ o monômio $x_i^{n_i}$ aparece em f com coeficiente não nulo.*

Observação 3.1.1. *Neste trabalho iremos abordar apenas o caso em que f é cômodo pois, como veremos mais a frente, isto nos garantirá que as faces de dimensão máxima do poliedro de Newton, associado à função f, interceptem os eixos coordenados.*

Exemplo 3.1.1. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada a função $f(x, y) = x^8 + x^3 y + y^7$, então $supp(f) = \{(8, 0), (3, 1), (0, 7)\}$. Note ainda que f é cômodo, ao contrário, por exemplo, da função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x, y, z) = x^5 + x^3 y + xyz + y^7$.*

Definição 3.1.3. *Seja $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^k}^{\infty} a_n x^n$ um elemento de $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_k]$, o poliedro de Newton de f é o fecho convexo em $\mathbb{R}_+^k$ do conjunto*

$$\bigcup_{n \in supp(f)} (n + \mathbb{R}_+^k).$$

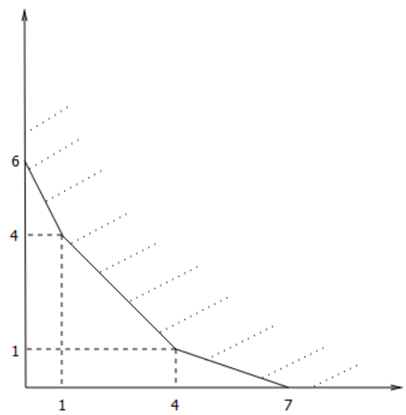
onde $n \in supp(f)\backslash\{0\}$.

A notação utilizada para o poliedro de Newton associado à uma função f *é dada por* $\Gamma_+(f)$.

O símbolo $\mathbb{R}^k_+ = \{(x_1, \dots, x_k); x_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}\}$ *é usado para caracterizar o octante positivo de* $\mathbb{R}^k$.

Definição 3.1.4. *Definimos a fronteira de Newton, ou polígono de Newton, da série* f *na origem como sendo a união das faces compactas do poliedro* $\Gamma_+(f)$*, denotada por* $\Gamma(f)$.

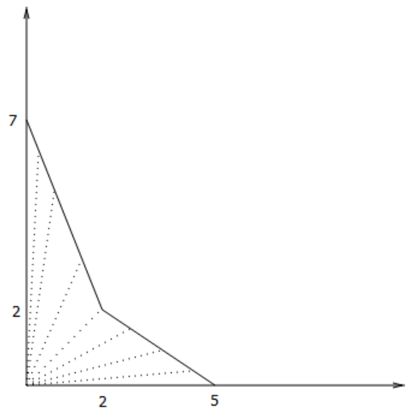
Exemplo 3.1.2. *Considere* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x, y) = x^7 + x^4y + xy^4 + y^6$. *Note que* $supp(f) = \{(7, 0), (4, 1), (1, 4), (0, 6)\}$. *Desta forma, o poliedro de Newton de* f *é representado como abaixo.*



Definição 3.1.5. *Definimos a parte principal Newtoniana, ou parte principal do polinômio* f*, pelo polinômio* $f_0(x) = \sum_{n \in \Gamma(f)} a_n x^n$

Exemplo 3.1.3. *Seja* f *a mesma função adotada no exemplo anterior. A parte Newtoniana neste caso é a própria função. Agora considere* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $g(x, y) = x^5 + xy^2 + x^2y^3 + y^6$. *Neste caso a parte Newtoniana é dada por* $g_o(x, y) = x^5 + xy^2 + y^6$.

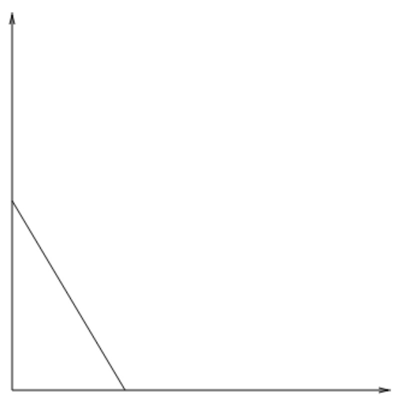
Observação 3.1.2. *Observamos que a união de todos os segmentos de origem em* $0 \in \mathbb{R}$ *e extremo em* $\Gamma(f)$ *será denotada pela notação* $\Gamma_-(f)$. *Por exemplo, se* $f(x, y) = x^5 + x^2y^2 + y^7$*, representamos* $\Gamma_-(f)$ *da seguinte forma*



Definição 3.1.6. *Uma face do poliedro* $\Gamma_+(f)$ *é um subconjunto da forma* $\Delta(v) = \{x \in \Gamma_+(f); \langle v, x\rangle = l(v)$ *para algum* $v \in \mathbb{R}^k_+$ *com* $v \neq 0\}$ *onde* $l(v) = min\{\langle x, v\rangle; x \in \Gamma_+\}$.

Definição 3.1.7. *Dizemos que* $v \in \mathbb{Z}^k_+ \backslash \{0\}$ *é primitivo quando* v *é o vetor de menor comprimento entre os vetores do conjunto* $\{\lambda v; \lambda \in \mathbb{R}_+\} \cap \{\mathbb{Z}^k_+ \backslash \{0\}\}$.*Dizemos também que uma face tem dimensão* d, *com* $0 \leq d \leq k-1$ *quando o menor subspaço afim que contem* $\Delta(v)$ *tem dimensão* d. *Note que as faces podem ter dimensões distintas.*

Observação 3.1.3. *Primeiramente veja que* $\langle x, v\rangle = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n = l(v)$ *é equação do hiperplano perpendicular a* v. *Observe ainda que no caso em que* f *é um polinômio quase homogêneo do tipo* $(\omega_1, \ldots, \omega_n; d)$ *com* $\omega_i \in \mathbb{Z}_+$, *temos que* $\omega_1a_1 + \ldots + \omega_na_n = d$, $\forall a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in I$ *onde* $f(x) = \sum_{a \in I} \alpha_a x^a$. *Agora, como* $\omega_1X_1 + \ldots + \omega_nX_n = d$ *é a equação de um hiperplano que contem os elementos* $a \in I$ *então o poliedro de Newton de* f *terá a seguinte forma:*



Um vetor normal a este hiperplano é o vetor $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$. *De forma geral, cada face compacta de dimensão máxima de um poliedro de Newton é associada a um polinômio quase homogêneo.*

Definição 3.1.8. *Dada uma face* Δ *de um poliedro de Newton, a união de todas as semiretas de* $\mathbb{R}^k$ *partindo da origem que passam por* Δ *é definida como sendo o cone convexo de vértice* 0 *e de base* Δ. *A notação utilizada será* $C(\Delta)$.

Iremos agora introduzir a noção de Matriz de Newton que irá facilitar a notação utilizada até agora e oferecer uma maneira alternativa de enxergar o suporte de uma aplicação f.

Definição 3.1.9. *Seja* $A = (a_i^j), i = 1, \ldots, n$ *e* $j = 1, \ldots, m$ *uma matriz de inteiros não negativos. Denotaremos as linhas e as colunas da matriz* A *respectivamente por* $a_i = (a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^m)$ *e* $a^j = (a_1^j, a_2^j, \ldots, a_n^j)$, *isto é:*

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^m \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}$$

Uma matriz A assim definida é denominada matriz de vértices do suporte de f quando cada coluna de A pertence a $supp(f)$.

Definição 3.1.10. *Chamaremos uma matriz* A, *dada como anteriormente, de matriz de Newton de* f *quando* A *é uma matriz de vértices do suporte que gera o poliedro de Newton de* f.

Exemplo 3.1.4. *A matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

É a matriz de Newton de $f(x, y) = x^{11} + x^2y^3 + x^3y^4 + y^8$

3.2 Filtração de Newton

Definição 3.2.1. *Seja* R *um anel comutativo com unidade. Uma filtração sobre* R *é uma função* $d : R \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ *tal que:*

a. $d(1_A) \geq 0, d(0) = +\infty$;

b. $d(x + y) \geq min\{d(x), d(y)\}, \forall x, \in R$

c. $d(x \cdot y) \geq d(x) + d(y), \forall x, y \in R$

Definição 3.2.2. *Uma filtração d é dita homogênea quando $d(x^q) = qd(x), \forall x \in R$ e para qualquer $q \in \mathbb{N}$.*

Proposição 3.2.1. *Seja $\Gamma_+(f)$ o poliedro de Newton de f. Para cada face de dimensão máxima Δ existe um único vetor primitivo v tal que $\Delta(v) = \Delta$*

Demonstração. Seja $\Gamma_+(f)$ um poliedro de Newton. Uma face de dimensão máxima deste poliedro está contida em um hiperplano $H \subset \mathbb{R}^n$ além de que cada face de dimensão máxima tem no mínimo n vértices.

Dessa forma, podemos considerar $n-1$ vetores linearmente independentes em H, com entradas em $\mathbb{Z}$, e tomar v produto vetorial destes vetores, de modo que v é ortogonal a H. O vetor que desejamos será dado por λv onde λ é o máximo divisor comum das entradas de v.

□

Considere então $v_1, v_2, \ldots, v_r$ os vetores primitivos associados às faces de dimensão máxima do poliedro $\Gamma_+(f)$, definido em $\mathbb{R}^k_+$, tais que $l(v_j) \neq 0, \forall j = 1, \ldots, r$. Seja $M = m.m.c.(l(v_1), \ldots, l(v_r))$. Considere ainda, para cada $\forall j = 1, \ldots, r$ a aplicação linear:

$$\phi_{\Delta(v_j)} : \mathbb{R}^k_+ \to \mathbb{R}_+$$

Dada por

$$\phi_{\Delta(v_j)}(n) = \frac{M}{l(v_j)} \langle n, v_j \rangle$$

Definimos a aplicação filtrante associada a Γ_+ como a aplicação

$$\phi : \mathbb{R}^k_+ \to \mathbb{R}_+$$

Dada por $\phi(n) = min\{\phi_{\Delta(v_j)}; j = 1, \ldots, r\}$.

Note que $\phi|_{C(\Delta(v_j))}(n) = \phi_{\Delta(v_j)}(n)$

Definição 3.2.3. *Dado um poliedro de Newton Γ_+, chamamos de filtração de Newton induzida por Γ_+ a aplicação:*

$$d : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Definida por

$$d(h) = min\{\phi(n); n \in supp(h)\}$$

quando $h \neq 0$ *e* $d(0) = +\infty$

Afirmação 3.2.1. *A aplicação d acima definida é uma filtração.*

Demonstração. Por definição já temos que $d(0) = \infty$. Note agora que

$$\phi(0,\ldots,0) = \min\{\phi_{\Delta(v_j)}(0,\ldots,0)\} = \min\{\frac{M}{l(v_j)}\langle(0,\ldots,0),v_j\rangle\} = 0$$

Portanto $d(1) = \min\{\phi(n); n \in supp(1)\} = 0$.

Agora note que se $f(x) = \sum_i a_i x_1^{q_{1_i}} \cdot \ldots \cdot x_k^{q_{k_i}}$ e $g(x) = \sum_j a_j x_1^{m_{1_j}} \cdot \ldots \cdot x_k^{m_{k_j}}$ então $supp(f+g) \subset supp(f) + supp(g)$. Portanto, se $n \in supp(f)$ e $m \in supp(g)$ são tais que $d(f) = \phi(n)$ e $d(g) = \phi(m)$, temos que

$$\begin{aligned} d(f+g) &= \min\{\phi(\alpha); \alpha \in supp(f+g)\} \geq \min\{\phi(\alpha); \alpha \in supp(f) \ \ ou \ \ \alpha \in supp(g)\} \\ &= \min\{d(f), d(g)\} \end{aligned}$$

Por fim note que

$$f \cdot g = \left(\sum_i a_i x_1^{q_{1_i}} \cdot \ldots \cdot x_k^{q_{k_i}}\right) \cdot \left(\sum_j a_j x_1^{m_{1_j}} \cdot \ldots \cdot x_k^{m_{k_j}}\right)$$

Logo os elementos de $supp(f \cdot g)$ são elementos de $supp(f)$ somados com elementos de $supp(g)$. Portanto

$$\begin{aligned} d(f \cdot g) &= \min\{\phi(n); n \in supp(f \cdot g)\} = \min\{\phi(\alpha+\beta); \alpha \in supp(f) \ \ e \ \ \beta \in supp(g)\} \\ &\geq \min\{\phi(\alpha) + \phi(\beta); \alpha \in supp(f) \ \ e \ \ \beta \in supp(g)\} \\ &= \min\{\phi(\alpha); \alpha \in supp(f)\} + \min\{\phi(\beta); \beta \in supp(g)\} = d(f) + d(g) \end{aligned}$$

□

Definição 3.2.4. *Dado um poliedro de newton* $\Gamma_+(f)$, *definimos a função controle* $\rho(x)$ *associada a este poliedro por:*

$$\rho(x) = (\sum_{j=1}^{m} x^{2p^j})^{\frac{1}{2p}} = (\sum_{j=1}^{m} x_1^{2p_1^j} \cdot x_2^{2p_2^j} \ldots x_n^{2p_n^j})^{\frac{1}{2p}} \tag{3.1}$$

Onde p é tomado grande o suficiente para que os números p_i^j *sejam todos inteiros. Perceba que* ρ^{2p} *é uma função polinomial.*

Definição 3.2.5. *Sejam $f \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ um polinômio, $d \in \mathbb{Q}^+$ e A a matriz de Newton associada a f. Definimos*

$$\Gamma_+(\rho^d) = \Gamma_+(dA) \tag{3.2}$$

Definição 3.2.6. *Dizemos que um germe de função analítica da forma $f(x) = \sum_v c_v x^v$, onde $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, é uma A-forma de grau d se $v \in \Gamma_+(\rho^d)$ para todo $c_v \neq 0$.*

Definição 3.2.7. *Seja $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}, 0$ um germe de função analítica dado por*

$$f(x) = H_d(x) + \ldots + H_{d+l}(x) + \ldots \tag{3.3}$$

Onde $H_i(x)$ são A-formas de grau i. Dizemos que 0 é um ponto $\Gamma_+(\rho^d)$-isolado de f, se para cada face compacta Δ de $\Gamma(\rho^d)$, a equação

$$f_\Delta(x) = 0 \tag{3.4}$$

Não tem solução em $(\mathbb{R} - \{0\})^n$.

Lema 3.2.1. *Sejam U e V conjuntos. Se $0 \in \overline{U \cap V}$, então existe uma curva analítica real $\lambda : [0, \epsilon) \to \mathbb{R}^m$ com $\lambda(0) = 0$ e $\lambda(t) \in U \cap V$, $\forall t \in [0, \epsilon)$.*

Demonstração. Vide [9], página 97, resultado 2.6.19. □

Lema 3.2.2. *Seja $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}, 0$ um germe de função analítica. Se $supp(f) \subset \Gamma_+(\rho^d)$ então existem $c_1 > 0$ e uma vizinhança V_1 da origem tais que:*

$$\|f(x)\| \leq c_1 \rho^d(x), \forall x \in V_1$$

Isto é, $\frac{f}{\rho^d}$ é limitada nesta vizinhança.

Demonstração. É suficiente provar que para todo $a \in \Gamma_+(\rho^d)$, existe $c > 0$ tal que $c\|x^a\| \leq \rho^d(x)$, quando $x \to 0$. Suponha, por absurdo, que para todo $c > 0$ e para toda vizinhança V da origem, existe $x \in V$ tal que:

$$\rho^d(x) < c\|x^a\| \tag{3.5}$$

Temos então que $0 \in \overline{X}$ onde $X = \{x \in \mathbb{R}^n; \rho^d(x) < c\|x^a\|\}$. Pelo lema **3.2.1** existe uma curva analítica $\lambda : [0, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ com $\lambda(0) = 0$ e $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_n(t)) \in X$. Cada λ_i é uma função analítica dada por $\lambda_i(t) = t^{\alpha_i} + o(\alpha_i)$. Consideraremos então que

λ_i é equivalente a t^{α_i} e denotaremos da seguinte forma: $\lambda_1(t) \simeq t^{\alpha_1}$, $\lambda_2(t) \simeq t^{\alpha_2}$, ..., $\lambda_n(t) \simeq t^{\alpha_n}$. Logo, por (3.5), vemos que:

$$\begin{aligned}\rho^d(\lambda(t)) < c|\lambda^a(t)| &\Rightarrow (\sum_j t^{2p\alpha_1 a_1^j} \cdot \ldots \cdot t^{2p\alpha_n a_n^j})^{\frac{d}{2p}} < c|t^{\alpha_1 a_1} \cdot \ldots \cdot t^{\alpha_n a_n}| \\ &\Rightarrow (\sum_j t^{2p\langle \alpha, a^j\rangle})^{\frac{d}{2p}} < ct^{\langle \alpha, a\rangle} < t^{\langle \alpha, a\rangle}\end{aligned}$$

Note que

$$(t^{2p\langle \alpha, a^j\rangle})^{\frac{d}{2p}} \leq (\sum_j t^{2p\langle \alpha, a^j\rangle})^{\frac{d}{2p}} \Rightarrow t^{\langle \alpha, da^j\rangle} < t^{\langle \alpha, a\rangle}, \forall 1 \leq j \leq m \tag{3.6}$$

Desta forma, de (3.6) concluimos que $\langle \alpha, a\rangle < inf\langle \alpha, da^j\rangle$. Por outro lado, $\Delta(\alpha) = \{b \in \Gamma_+(\rho^d); \langle b, \alpha\rangle = l(\alpha)\}$ é uma face de $\Gamma_+(\rho^d)$ com $l(\alpha) = min\{\langle c, \alpha\rangle; c \in \Gamma_+(\rho^d)\}$. Como da^j é um dos vértices de $\Delta(\alpha)$, então $\langle da^j, \alpha\rangle = l(\alpha)$, portanto $\langle a, \alpha\rangle < \langle da^j, \alpha\rangle = l(\alpha)$ o que é absurdo pois $a \in \Gamma_+(\rho^d)$.

□

Lema 3.2.3. *Considere o germe $h(x) = \sum a_\gamma x^\gamma$ com $\gamma \in int(\Gamma_+(\rho^d))$, $\forall a_\gamma \neq 0$. Temos que:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{\rho^d(x)} = 0$$

Demonstração. É suficiente provar que para todo $a = (a_1, \ldots, a_n) \in int(\Gamma_+(\rho^d))$, tem-se $\lim_{x\to 0} \frac{x^a}{\rho^d(x)} = 0$.

Suponha que existe um monômio x^a com $a \in int(\Gamma_+(\rho^d))$ e $\lim_{x\to 0} \frac{x^a}{\rho^d(x)} \neq 0$, então para cada vizinhança V da origem, existe uma constante $c > 0$ tal que $\|\frac{x^a}{\rho^d(x)}\| \geq c$, para algum $x \in V$. Desta forma $0 \in \overline{X}$ onde $X = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x^a\| \geq c\rho^d(x)\}$. Como X é semi analítico, do lema de seleção de curvas concluimos que existe uma curva analítica $\lambda : [0, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ com $\lambda(0) = 0$ e $\lambda_1(t) \simeq t^{\alpha_1}$, ..., $\lambda_n(t) \simeq t^{\alpha_n}$. Note que:

$$\rho^d(\lambda(t)) \leq \frac{1}{c}\|\lambda^a(t)\| \Rightarrow \inf_j\{\langle da^j, \alpha\rangle\} \geq \langle a, \alpha\rangle$$

O que se demonstra de modo totalmente análogo ao feito no lema anterior. Vemos porem que, como $d \cdot a^j$ é um dos vértices de $\Delta(\alpha)$ então $\langle da^j, \alpha\rangle = l(\alpha)$, entretanto note que:

$$\langle a, \alpha\rangle \leq \langle da^j, \alpha\rangle = l(\alpha),$$

de onde concluimos que $a \in \Gamma(\rho^d)$, o que é absurdo pois supomos que $a \in int(\Gamma_+(\rho^d))$

□

Lema 3.2.4. *Seja* $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}, 0$ *um germe de função analítica definido por*

$$f(x) = H_d(x) + \ldots + H_{d+l}(x) + \ldots$$

Se f *admite* 0 *como um ponto* $\Gamma_+(\rho^d)$*-isolado, então existe uma constante real positiva* c_2 *tal que* $\|f(x)\| \geq c_2\rho^d(x)$ *em uma vizinhança da origem de* $\mathbb{R}^n$*.*

Demonstração. Vide [2] □

Agora considere fixado um poliedro de Newton $\Gamma_+(A)$. Para cada face compacta de dimensão máxima Δ_k de $\Gamma(A)$ denotamos $v_k = (v_k^1, \ldots, v_k^n)$ o seu vetor primitivo associado. Definimos então

$$R = \max_j \max_i \left\{ \frac{M}{l(v_k)} v_k^i \right\}, \; r = \min_j \min_i \left\{ \frac{M}{l(v_k)} v_k^i \right\}$$

E lembramos que para um germe $f(x) = \sum a_\beta x^\beta$ temos que

$$fil(f) = \inf\{fil(x^\beta); a_\beta \neq 0\}, \text{ onde } fil(x^\beta) = \min_k \left\{ \frac{M}{l(v_k)} \langle \beta, v_k \rangle \right\}$$

Lema 3.2.5. *Seja* $h : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}, 0$ *um germe de função analítica satisfazendo:*

$$fil(h) \geq fil(\rho^d) + \ell R + 1$$

Então $\frac{h}{\rho^d}$ *é diferenciável de classe* C^ℓ*.*

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre ℓ. Primeiramente suponha que

$$fil(h) \geq fil(\rho^d) + R + 1 \tag{3.7}$$

Devemos mostrar que $\frac{h}{\rho^d}$ é de classe C^1, ou seja, que $\nabla(\frac{h}{\rho^d})$ é contínua. Note que:

$$\nabla(\frac{h}{\rho^d}) = \frac{\nabla h \cdot \rho^d - h \cdot \nabla(\rho^d)}{\rho^{2d}}$$

Afirmamos que $fil(\rho^d \frac{\partial h}{\partial x_i} - h \frac{\partial \rho^d}{\partial x_i}) > fil(\rho^{2d})$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. De fato, da definição de filtração e da proposição **5.0.1** do apêndice, temos que :

- $fil(\rho^d \frac{\partial h}{\partial x_i}) \geq fil(\rho^d) + fil(\frac{\partial h}{\partial x_i})$
- $fil(h \frac{\partial \rho^d}{\partial x_i}) \geq fil(h) + fil(\frac{\partial \rho^d}{\partial x_i})$
- $fil(\frac{\partial h}{\partial x_i}) \geq fil(h) - R$

- $fil(\frac{\partial \rho^d}{\partial x_i}) \geq fil(\rho^d) - R$

Daí

$$fil(\rho^d \frac{\partial h}{\partial x_i} - h\frac{\partial \rho^d}{\partial x_i}) \geq min\{fil(\rho^d \frac{\partial h}{\partial x_i}), fil(-h\frac{\partial \rho^d}{\partial x_i})\}$$

Se supormos que $fil(\rho^d \frac{\partial h}{\partial x_i}) \leq fil(-h\frac{\partial \rho^d}{\partial x_i})$ então:

$$fil(\rho^d \frac{\partial h}{\partial x_i} - h\frac{\partial \rho^d}{\partial x_i}) \geq fil(\rho^d \frac{\partial h}{\partial x_i}) \geq fil(\rho^d) + fil(\frac{\partial h}{\partial x_i}) \geq fil(\rho^d) + fil(h) - R$$

E chegamos na mesma desigualdade, de modo análogo, supondo que $fil(-h\frac{\partial \rho^d}{\partial x_i}) \leq fil(\rho^d \frac{\partial h}{\partial x_i})$. Portanto, de (3.7) temos:

$$\begin{aligned} fil(\rho^d \frac{\partial h}{\partial x_i} - h\frac{\partial \rho^d}{\partial x_i}) &\geq fil(\rho^d) + fil(h) - R \\ &\geq fil(\rho^d) + R + 1 + fil(\rho^d) - R = 2 \cdot fil(\rho^d) + 1 \\ &= fil(\rho^{2d}) + 1 > fil(\rho^{2d}) \end{aligned}$$

Notamos então que o suporte de $\rho^d \frac{\partial h}{\partial x_i} - h\frac{\partial \rho^d}{\partial x_i}$ está contido em $\Gamma_+(\rho^{2d})$. Portanto, pelo lema **3.2.3** concluimos que

$$\lim_{x \to 0} \nabla(\frac{h}{\rho^d})(x) = 0$$

Logo $\frac{h}{\rho^d}$ é C^1. Suponha agora que para qualquer germe h_1 com

$$fil(h_1) \geq fil(\rho^d) + (\ell - 1)R + 1$$

A função $\frac{h_1}{\rho^d}$ é de classe $C^{\ell-1}$. Devemos provar que se $fil(h) \geq fil(\rho^d) + \ell R + 1$ então $\frac{h}{\rho^d}$ é de classe C^ℓ. Note que:

$$\nabla(\frac{h}{\rho^d}) = \frac{H}{\rho^d}$$

onde $H = \frac{\rho^d \nabla h - h \nabla \rho^d}{\rho^d}$. Logo temos que:

$$\begin{aligned} fil(H) = fil(\frac{\rho^d \nabla h - h\nabla \rho^d}{\rho^d}) &\geq fil(\rho^{-d}) + fil(\rho^d \nabla h - h \nabla \rho^d) \\ &\geq -fil(\rho^d) + fil(h) + fil(\rho^d) - R \geq fil(\rho^d) + \ell R + 1 - R = fil(\rho^d) + (\ell - 1)R + 1 \end{aligned}$$

Logo, pela hipótese de indução, $\frac{H}{\rho^d}$ é de classe $C^{\ell-1}$. Portanto $\nabla(\frac{h}{\rho^d})$ é de classe $C^{\ell-1}$ o que implica que $\frac{h}{\rho^d}$ é de classe C^ℓ. □

Capítulo 4

Trivialidades

Os grupos C^l-G para $G = \mathcal{R}$, $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{K}$ com $0 \leq \ell \leq \infty$ são definidos como os grupos $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{K}$ tomando difeomorfismos de classe C^ℓ, se $\ell \geq 1$ ou homeomorfismos quando $\ell = 0$. Estes grupos agem no espaço dos germes de aplicações de classe C^ℓ. Nosso interesse neste trabalho entretanto, está na relação de equivalência induzida, a C^ℓ-G-equivalência, no espaço dos germes de aplicação analítica $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$.

Definição 4.0.8. *Para uma matriz fixada A, um germe f é dito A-homogêneo de grau d se* $f(x) = \sum\limits_{v \in \Gamma(\rho^d)} c_v x^v$.

Definição 4.0.9. *Um germe de aplicação analítica $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ com $f = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$ é A-homogêneo de grau $d = (d_1, d_2, \ldots, d_p)$ se cada f_i é A-homogêneo de grau d_i*

Definição 4.0.10. *Sejam $f, g : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ germes de aplicações diferenciáveis, então:*

1. *f e g são C^ℓ-$\mathcal{R}$-equivalentes se existir $h \in C^\ell$-$\mathcal{R}$ tal que $f(x) = g(h(x))$.*

2. *f e g são C^ℓ-$\mathcal{C}$-equivalentes se existir $H(x, y) = (x, \theta(x, y)) \in C^\ell$-$\mathcal{C}$ tal que $H(x, f(x)) = (x, \theta(x, f(x))) = (x, g(x))$.*

3. *f e g são C^ℓ-$\mathcal{K}$-equivalentes se existir $H(x, y) = (h(x), \theta(x, y)) \in C^\ell$-$\mathcal{K}$ tal que $H(x, f(x)) = (h(x), \theta(x, f(x))) = (h(x), g(h(x)))$.*

Um dos métodos mais aplicados para afirmar se dois germes de aplicações f e g são equivalentes é determinando uma família f_t, onde $f_0 = f$, $f_1 = g$ e f_{t_1} equivalente a f_{t_2}, para quaisquer $t_1 \neq t_2$. Dizemos desta forma que a família f_t é trivial para a relação abordada. Considere então uma família $f_t : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$, $t \in I \subset R$ de germes de aplicações suaves, ou seja, existe uma vizinhança U da origem e uma função $F : U \times I \to \mathbb{R}^p$ tal que $F(0,t) = 0$ e $f_t(x) = F(x,t)$, $\forall t \in I$ e $\forall x \in U$.

Definição 4.0.11. *Seja $F : \mathbb{R}^n \times I, 0 \to \mathbb{R}^p$ uma deformação de $f(x) = F(x,0)$.*

1. *A família F é C^ℓ-$\mathcal{R}$-trivial se existir um germe de aplicação $H : \mathbb{R}^n \times I, 0 \to \mathbb{R}^n$, $H_t \in C^\ell$-$\mathcal{R}$ tal que*

a) $H(x,0) = x$

b) $H(0,t) = 0$

c) $F(H(x,t),t) = f(x)$

2. *A família F é C^ℓ-$\mathcal{C}$-trivial se existir uma família de matrizes $M(x,t) = (a_{ij}(x,t))$ com coeficientes $a_{ij} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q, 0 \to \mathbb{R}^n$, $a_{ij} \in C^\ell$-$\mathcal{R}$, tal que*

a) $M(x,0) = I$

b) $f(x) = M(x,t)F(x,t)$

3. *A família F é C^ℓ-$\mathcal{K}$-trivial se existir uma família de matrizes $M(x,t) = (a_{ij}(x,t))$ com coeficientes $a_{ij} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q, 0 \to \mathbb{R}^n$, $a_{ij} \in C^\ell$-$\mathcal{R}$, e um germe de aplicação $H : \mathbb{R}^n \times I, 0 \to \mathbb{R}^n$, $H_t \in C^\ell$-$\mathcal{R}$, tal que:*

a) $H(x,0) = x$

b) $H(0,t) = 0$

c) $M(x,0) = I$ *(a matriz identidade $p \times p$)*

d) $f(x) = M(x,t)F(H(x,t),t)$

Observação 4.0.1. *Voltemos a atenção para a definição de C^ℓ-$\mathcal{R}$-trivialidade. A condição "c)"desta definição pode ser reescrita como:*

c') $f_t \circ H_t = f$, $\forall t \in I$.

Derivando "c)"em relação a t temos:

c") $$\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(H(x,t),t) \cdot \frac{\partial H_i}{\partial t}(x,t)\right] + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x,t),t) = 0$$

Afirmação 4.0.2. *Determinar H satisfazendo a), b) e c") é equivalente a resolver o problema de valor inicial (PVI):*

$$\begin{cases} d) \left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i(x,t)\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(x,t)\right] + \dfrac{\partial F}{\partial t}(x,t) = 0 \\ e) \quad \xi_i(0,t) = 0,\ \forall i = 1,\dots,n \end{cases}$$

De fato, seja $x' = \xi(x,t)$ em que $\xi(x,t) = (\xi_1(x,t),\dots,\xi_n(x,t))$ é um campo com $\xi(0,t) = 0$, consideramos o fluxo associado:

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 &\to \mathbb{R}^n \\ (x,t) &\mapsto H(x,t) \end{aligned}$$

tal que $H(x,0) = x$. Então:

$$\frac{\partial H}{\partial t}(x,t) = \xi(H(x,t),t)$$

.

Por d) segue-se que:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i(x,t)\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,t)\right] + \frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = 0 \Rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H_i}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,t)\right] + \frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = 0$$

Portanto valem a) e c"). Note agora que se $x = 0$ em $\dfrac{\partial H}{\partial t}(x,t) = \xi(H(x,t),t)$ obtemos:

$$\frac{\partial H}{\partial t}(0,t) = \xi(H(0,t),t) \text{ e } H(0,0) = 0$$

Por outro lado, a aplicação $x(t) = 0$ também é solução do PVI

$$\begin{cases} x' = \xi(x,t) \\ x(s) = 0 \end{cases}$$

Daí, pela unicidade de soluções, $H(0,t) = x(t) = 0$, provando b). O que prova a afirmação feita.

Afirmação 4.0.3. *a), b) e c) são equivalentes a a), b) e c").*

1. *Claramente a), b) e c) $\Rightarrow$ a), b) e c") pois c) $\Rightarrow$ c").*

2. *Suponhamos que valem a), b) e c"). De c") obtemos*

$$
\begin{aligned}
&\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}(H(x,t),t)\cdot\frac{\partial H_i}{\partial t}(x,t)\right]+\frac{\partial F}{\partial t}(H(x,t),t)=0\\
&\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(F\circ H)(x,t)=0\\
&\Rightarrow \int\frac{\partial}{\partial t}(F\circ H)=0\\
&\Rightarrow F\circ H(x,t)=c(x)\\
&\Rightarrow F(H(x,t),t)=c(x)
\end{aligned}
$$

Em particular tomando $t=0$, obtemos

$$F(H(x,0),0)=c(x)$$

e como por a) temos que $H(x,0)=x$, segue-se que $c(x)=F(x,0)$. Logo

$$F(H(x,t),t)=F(x,0)=f(x)$$

E portanto vale c), como afirmamos.

Desta forma, Dada uma família F de germes de aplicação, determinar se tal família é C^ℓ-$\mathcal{R}$-trivial é equivalente a achar uma solução para o PVI dado por:

$$
\begin{cases}
d)\ \left[\sum_{i=1}^{n}\xi_i(x,t)\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,t)\right]+\frac{\partial F}{\partial t}(x,t)=0\\
e)\ \ \xi_i(0,t)=0,\ \forall i=1,\dots,n
\end{cases}
$$

4.1 O grupo $\mathcal{R}$

Seja $f:\mathbb{R}^n,0\to\mathbb{R}^p,0$ um germe de aplicação polinomial com $n\geq p$ e, para cada $I=\{i_1,\dots,i_p\}\subset\{1,\dots,n\}$, denote por M_I o correspondente menor de ordem p da matriz jacobiana df.

Para uma matriz fixada A, denotamos $s_I := fil(M_I)$, $\alpha := m.m.c.\{s_I\}$ e definimos $N_{\mathcal{R}}f := \displaystyle\sum_I M_I^{2\alpha_I}$ onde $\alpha_I=\frac{\alpha}{s_I}$. Vamos ver, no resultado principal desta seção, que a condição de que o germe de função $N_{\mathcal{R}}f$ seja A-isolado é a ferramenta chave para estimar a C^ℓ-$\mathcal{R}$-trivialidade.

Escreva $N_{\mathcal{R}}f$ como a soma de suas partes A-homogêneas H_i de grau d, isto é:

$$N_{\mathcal{R}}f = H_D + \ldots + H_{D+e}$$

com $e > 0$ e cada germe de função H_i é A-homogêneo de grau i.

Pelo lema **3.2.2**, existem constantes $c_D, \ldots, c_{D+e}$ e uma vizinhança V_1 da origem tais que para todo $x \in V_1$:

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{R}}f(x) &\leq \|H_D(x)\| + \ldots + \|H_{D+e}(x)\| \\ &\leq c_D\rho^D(x) + \ldots + c_{D+e}\rho^{D+e}(x) \leq k\rho^D(x) \end{aligned}$$

Onde $k = c_D + \ldots + c_{D+e}$

Pelo lema **3.2.4**, se supormos que $N_{\mathcal{R}}f$ é A-isolado então existem constantes k_1,$k_2 > 0$ e uma vizinhança V da origem tais que para todo $x \in V$:

$$k_1\rho^D(x) \leq N_{\mathcal{R}}f(x) \leq k_2\rho^D(x)$$

.

Agora considere $f_t(x) = f(x) + t\theta(x)$ uma deformação do germe de aplicação $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$, onde $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p)$, e $\theta_i(x,t) = \displaystyle\sum_{s=1}^{l_s} \delta_s^i(t)\theta_s^i(x)$, com $\delta_s^i : \mathbb{R}, 0 \to \mathbb{R}, 0$ e $\theta_s^i : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}, 0$ são germes de funções polinomiais com $\delta_s^i \neq 0$

Definimos $N_{\mathcal{R}}f_t := \displaystyle\sum_I M_{t_I}^{2\alpha_I}$ onde M_{t_I} denota o menor de ordem p da matriz jacobiana df_t e α_I é dado como anteriormente.

Lema 4.1.1. *Suponha que para alguma matriz A, $N_{\mathcal{R}}f = \displaystyle\sum_I M_I^{2\alpha_I}$ é A-isolado. Se $fil(\theta_s^i) > fil(f_i)$, $\forall i = 1, \ldots, p$, então existem constantes $k_1, k_2 > 0$ e uma vizinhança V da origem tais que, para todo $x \in V$*

$$k_1\rho^D(x) \leq N_{\mathcal{R}}f_t(x) \leq k_2\rho^D(x)$$

Demonstração. Note que $f_t(x) = f(x) + t\theta(x) \Rightarrow Jac(f_t(x)) = Jac(f(x)) + tJac(\theta(x))$. Vemos então que para qualquer $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_p\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$

$$M_{t_I} = M_I + tM_{\theta_I}$$

Onde M_{θ_I} denota o menor de ordem p da jacobiana de θ. Portanto:

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{R}} f_t &= \sum_I M_{t_I}^{2\alpha_I} = \sum_I (M_I + t M_{\theta_I})^{2\alpha_I} \\ &= \sum_I M_I^{2\alpha_I} + t\Theta = N_{\mathcal{R}} f + t\Theta \end{aligned}$$

Onde $fil(\Theta) > fil(N_{\mathcal{R}} f)$. Agora note que :

$$\begin{aligned} \|N_{\mathcal{R}} f\| &= \|N_{\mathcal{R}} f_t + t\Theta\| \leq \|N_{\mathcal{R}} f_t\| + t\|\Theta\| \\ &\leq \|N_{\mathcal{R}} f_t\| + \|\Theta\|, \forall 0 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

Logo $N_{\mathcal{R}} f \leq N_{\mathcal{R}} f_t + \|\Theta\|$, $\forall 0 \leq t \leq 1$. Do lema **3.2.4** temos que existem uma constante $k_1 > 0$ e uma vizinhança V_1 da origem tais que para todo $x \in V$:

$$k_1 \rho^D(x) \leq N_{\mathcal{R}} f(x) \leq N_{\mathcal{R}} f_t(x) + \|\Theta(x,t)\|$$

Como $fil(\Theta) > fil(N_{\mathcal{R}} f)$ então $\lim_{x \to 0} \dfrac{\Theta(x,t)}{\rho^D(x)} = 0$, desta forma $k_1 \rho^D(x) \leq N_{\mathcal{R}} f_t(x)$. Por outro lado, lembramos que, pelo lema **3.2.2**, existem uma constante $c_2 > 0$ e uma vizinhança V_2 da origem tais que $N_{\mathcal{R}} f(x) \leq c_2 \rho^D$, $\forall x \in V_2$. Como $fil(\Theta) > fil(N_{\mathcal{R}} f)$, segue também do lema **3.2.2** que existem um constante $c_3 > 0$ e uma vizinhança V_3 da origem tais que $\|\Theta(x,t)\| \leq c_3 \rho^D(x)$, $\forall x \in V_3$. Portanto, se $k_2 = c_2 + c_3$, $\forall x \in V_2 \cap V_3$ temos:

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{R}} f_t(x) &\leq N_{\mathcal{R}} f(x) + \|\Theta(x,t)\| \leq c_2 \rho^D(x) + \|\Theta(x,t)\| \\ &\leq c_2 \rho^D(x) + c_3 \rho^D(x) = k_2 \rho^D(x) \end{aligned}$$

Logo $k_1 \rho^D(x) \leq N_{\mathcal{R}} f_t(x) \leq k_2 \rho^D(x)$ $\square$

A seguir temos um dos teoremas principais deste trabalho.

Teorema 4.1.1. *(Soares, Saia) Suponha que* $N_{\mathcal{R}} f := \sum_I M_I^{2\alpha_I}$ *é A-isolado para alguma matriz A.*

a) Se $fil(\theta_s^i) \geq fil(f_i) + \ell R - r + 1$, *então para* $\ell \geq 1$ *e* $t \in [0,1]$, f_t *é* C^ℓ-$\mathcal{R}$*-trivial.*

b) Se $fil(\theta_i^s) \geq fil(f_i)$, *então* f_t *é* C^0-$\mathcal{R}$*-trivial.*

Demonstração. a) A cada menor M_{t_I}, de ordem p, da matriz jacobiana df_t, associamos um campo de vetores W_I tal que

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} \cdot M_{t_I} = df_t(W_{t_I}) \tag{4.1}$$

Este campo é dado por:

$$W_I = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \text{ com } \begin{cases} w_i = 0, se \quad i \notin I \\ w_{i_m} = \sum_{j=1}^{p} N_{ji_m} (\frac{\partial f_t}{\partial t})_j, se \quad i_m \in I \end{cases}$$

Onde N_{ji_m} denota o cofator do menor $(p-1) \times (p-1)$ do elemento $\frac{\partial f_j}{\partial x_{i_m}}$ na matriz df e $(\frac{\partial f_t}{\partial t})_j$ é a j-ésima coordenada do germe de aplicação $\frac{\partial f_t}{\partial t}$.

Vamos verificar que realmente ocorre $\frac{\partial f_t}{\partial t} \cdot M_{t_I} = df_t(W_{t_I})$.

$$M_{t_I} \cdot \theta = M_{t_I} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_p \end{bmatrix}_{p\times 1} = M_{t_I} \cdot I_{p\times p} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_p \end{bmatrix}_{p\times 1}$$

Observe que M_{t_I} é o determinante de uma matriz menor de ordem $p \times p$ da matriz df_t. denotemos esta matriz por M_0. Lembramos tambem que $M_0 \cdot adj(M_0) = det(M_0) \cdot I_{p\times p}$, onde $adj(M_0)$ é a matriz adjunta e $det(M_0) = M_{t_I}$. Logo:

$$M_{t_I} \cdot \theta = M_{t_I} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_p \end{bmatrix}_{p\times 1} = M_0 \cdot adj(M_0) \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_p \end{bmatrix}_{p\times 1}$$

Como $adj(M_0)$ é a transposta da matriz dos cofatores de M_0, temos:

$$M_{t_I} \cdot \theta = M_0 \cdot adj(M_0) \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_p \end{bmatrix}_{p\times 1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{t_1}}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f_{t_1}}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial f_{t_1}}{\partial x_{i_p}} \\ \frac{\partial f_{t_2}}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f_{t_2}}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial f_{t_2}}{\partial x_{i_p}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{t_p}}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f_{t_p}}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial f_{t_p}}{\partial x_{i_p}} \end{bmatrix}_{p\times p} \begin{bmatrix} cof(\frac{\partial f_{t_1}}{\partial x_{i_1}}) & cof(\frac{\partial f_{t_2}}{\partial x_{i_1}}) & \cdots & cof(\frac{\partial f_{t_p}}{\partial x_{i_1}}) \\ cof(\frac{\partial f_{t_1}}{\partial x_{i_2}}) & cof(\frac{\partial f_{t_2}}{\partial x_{i_2}}) & \cdots & cof(\frac{\partial f_{t_p}}{\partial x_{i_2}}) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ cof(\frac{\partial f_{t_1}}{\partial x_{i_p}}) & cof(\frac{\partial f_{t_2}}{\partial x_{i_p}}) & \cdots & cof(\frac{\partial f_{t_p}}{\partial x_{i_p}}) \end{bmatrix}_{p\times p} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_p \end{bmatrix}_{p\times 1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{t_1}}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f_{t_1}}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial f_{t_1}}{\partial x_{i_p}} \\ \frac{\partial f_{t_2}}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f_{t_2}}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial f_{t_2}}{\partial x_{i_p}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{t_p}}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f_{t_p}}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial f_{t_p}}{\partial x_{i_p}} \end{bmatrix}_{p\times p} \begin{bmatrix} cof(\frac{\partial f_{t_1}}{\partial x_{i_1}})\theta_1 + cof(\frac{\partial f_{t_2}}{\partial x_{i_1}})\theta_2 + \cdots + cof(\frac{\partial f_{t_p}}{\partial x_{i_1}})\theta_p \\ cof(\frac{\partial f_{t_1}}{\partial x_{i_2}})\theta_1 + cof(\frac{\partial f_{t_2}}{\partial x_{i_2}})\theta_2 + \cdots + cof(\frac{\partial f_{t_p}}{\partial x_{i_2}})\theta_p \\ \vdots \\ cof(\frac{\partial f_{t_1}}{\partial x_{i_p}})\theta_1 + cof(\frac{\partial f_{t_2}}{\partial x_{i_p}})\theta_2 + \cdots + cof(\frac{\partial f_{t_p}}{\partial x_{i_p}})\theta_p \end{bmatrix}_{p\times 1}$$

.

Adicionando $n-p$ linhas nulas na matriz $adj(M_0)\cdot\theta$, de modo que a linhas de índice $k \neq i_m$ são nulas e as linhas de índice i_m são dadas por $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} cof(\frac{\partial f_{t_j}}{\partial x_{i_m}})\theta_j$, teremos uma matriz W_{t_I} tal que $M_{t_I}\cdot\theta = df_t \cdot W_{t_I}$.

Afirmamos agora que $(\frac{\partial f_t}{\partial t})N_{\mathcal{R}}f_t = df_t(W_R)$, onde W_R é o campo de vetores $W_R := \displaystyle\sum_I M_{t_I}^{2\alpha_I-1}W_{t_I}$. De fato:

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{R}}f_t(\frac{\partial f}{\partial t}) &= \sum_I M_{t_I}^{2\alpha_I}\frac{\partial f_t}{\partial t} = \sum_I M_{t_I}^{2\alpha_I-1}\cdot M_{t_I}\frac{\partial f_t}{\partial t} \\ &\overset{(4.1)}{=} \sum_I M_{t_I}^{2\alpha_I-1}\cdot df_t\cdot W_{t_I} \end{aligned}$$

Pela linearidade de df_t temos:

$$N_{\mathcal{R}}f_t(\frac{\partial f}{\partial t}) = df_t\sum_I M_{t_I}^{2\alpha_I-1}\cdot W_{t_I} = df_t\cdot W_R$$

Como afirmamos.

Note agora que:

$$\begin{aligned} fil(W_R) &\geq \min_I\{fil(M_{t_I}^{2\alpha_I-1}) + fil(W_{t_I})\} \\ &\geq \min_I\{fil(M_I^{2\alpha_I-1}) + fil(W_I)\} \\ &\geq \min_I\{(2\alpha_I-1)fil(M_I) + fil(W_I)\} \\ &= \min_I\{2\alpha - fil(M_I) + fil(W_I)\} \\ &\geq \min\{2\alpha - fil(M_I) + fil(N_{ji_m}) + fil(\theta_j)\} \\ &\geq \min\{2\alpha - fil(M_I) + fil(M_I) - fil\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_{i_m}}\right) + fil(\theta_j)\} \\ &\overset{(*)}{\geq} \min\{2\alpha + r - fil(f_j) + fil(\theta_j)\} \\ &\overset{Hip.}{\geq} \{2\alpha + r - fil(f_j) + fil(f_j) + \ell R - r + 1\} \\ &= 2\alpha + \ell R + 1 \end{aligned}$$

Veja mais detalhes sobre a desigualdade marcada com $(*)$ no apêndice.

Considere agora $V : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R},0 \to \mathbb{R}^p\times\mathbb{R},0$ o campo de vetores $V := \frac{W_R}{N_R f_t}$. Como $W_R = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(w_i\sum_I M_I^{2\alpha_I-1})\frac{\partial}{\partial x_i}$, segue da relação entre $N_R f_t$ e ρ^d dada pelo lema

4.0.6 que podemos aplicar o lema **3.2.5** para concluir que o campo de vetores V e de classe C^ℓ.

Logo, a C^ℓ-$\mathcal{R}$-trivialidade da família f_t, em uma vizinhança de $t = 0$, segue da equação

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}(x,t) = (df_t)_x(V(x,t))$$

Como o mesmo argumento vale em uma vizinhança de $t = t_0$, $\forall t_0 \in [0,1]$, o resultado segue.

b) Note que

$$\begin{aligned} fil(W_R) &\geq \min\{2\alpha - fil(M_I) + fil(M_I) - fil\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_m}}\right) + fil(\theta_j)\} \\ &\geq \min\{2\alpha - (fil(f_j) - r) + fil(f_j)\} \\ &= 2\alpha + r \\ &= fil(\rho^D) + r \end{aligned}$$

Agora veja que

$$\begin{aligned} \|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 &\Rightarrow fil(\|x\|^2) = \min\{fil(x_1^2), \ldots, fil(x_n^2)\} \\ &\Rightarrow 2fil(\|x\|) = 2 \cdot \min\{fil(x_1), \ldots, fil(x_n)\} \\ &\Rightarrow fil(\|x\|) = r \end{aligned}$$

Logo $fil(W_R) \geq fil(\rho^D) + r = fil(\rho^D\|x\|)$. Desta forma $\lim_{x\to 0} \frac{W_R}{\rho^D\|x\|} = 0$, o que implia que $\frac{W_R}{\rho^D\|x\|}$ é limitado em uma vizinhança da origem, isto é:

$$\left\| \frac{W_R}{N_{\mathcal{R}} f_t} \right\| \leq c \left\| \frac{W_R}{\rho} \right\| \leq c' \|x\|$$

Com isso temos que V é integrável, como queríamos demonstrar.

$\square$

Seguem agora alguns exemplos que deixam claro a importância de cada hipotese e do proprio resultado. Este primeiro exemplo mostra que é essencial a hipótese de $N_{\mathcal{R}} f$ ser A-isolado.

Exemplo 4.1.1. *Considere o germe de função polinomial* $f(x,y) = x^8 + y^6 + y^2x^4 - y^4x^2$ *e sua deformação* $f_t(x,y) = x^8 + y^6 + y^2x^4 - y^4x^2 + tx^ay^b$.

Aqui temos que $df = \begin{pmatrix} 8x^7 + 4x^3y^2 - 2xy^4 & 6y^5 + 2yx^4 - 4y^3x^2 \end{pmatrix}_{1\times 2}$. *Fixe agora a matriz* $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3}$. *Podemos verificar que* $N_{\mathcal{R}}f$ *não é A-isolado. Para isto, Considere o polinômio* $\xi(x,y) = x^7 + xy + y^5$, *associado à matriz A. Note que* $\xi_{\Delta_1}(x,y) = x^7 + xy$ *é quase homogêneo do tipo* $(1,6;7)$, *logo* $v_1 = (1,6)$ *e* $l(v_1) = 7$ *e* $\xi_{\Delta_2}(x,y) = xy + y^5$ *é quase homogêneo do tipo* $(4,1;5)$, *logo* $v_2 = (4,1)$ *e* $l(v_2) = 5$. *Portanto,* $M = m.m.c.(5,7) = 35$ *e concluimos que*

$$\begin{aligned} fil(x^ay^b) &= \min\{5\langle(a,b),(1,6)\rangle, 7\langle(a,b),(4,1)\rangle\} \\ &= \min\{5a + 30b, 28a + 7b\} \end{aligned}$$

Portanto, fazendo notar que $M_1 = 8x^7 + 4x^3y^2 - 2xy^4$ *e* $M_2 = 6y^5 + 2yx^4 - 4y^3x^2$ *são os menores da matriz* df, *temos que*

$$\begin{aligned} fil(M_1) &= \min\{fil(8x^7), fil(4x^3y^2), fil(-2xy^4)\} = 35 \text{ e} \\ fil(M_2) &= \min\{fil(6y^5), fil(2yx^4), fil(-4y^3x^2)\} = 35 \end{aligned}$$

Logo $\alpha = 35$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. *Obtemos então que*

$$N_{\mathcal{R}}f(x,y) = (8x^7 + 4x^3y^2 - 2xy^4)^2 + (6y^5 + 2yx^4 - 4y^3x^2)^2$$

Note que $N_{\mathcal{R}}f|_{\Delta_1} = 0$ *e* $N_{\mathcal{R}}f|_{\Delta_2} = 0$ *possuem solução em todo* $\mathbb{R}^n$. *Daí* $N_{\mathcal{R}}f$ *não é A-isolado.*

Fixemos por exemplo, $f_t(x,y) = f(x,y) + tx^4y^3$ *e considere a mesma matriz adotada anteriormente. Neste caso temos* $fil(x^4y^3) = \min\{5\cdot 4 + 30\cdot 3, 28\cdot 4 + 7\cdot 3\} = 110$ *e* $fil(f) = \min\{fil(x^8), fil(y^6), fil(y^2x^4), fil(-y^4x^2)\} = \min\{40,42,80,84\} = 40$. *Portanto* $fil(x^4y^3) > fil(f)$, *mas* f_t *não é* C^0-$\mathcal{R}$-*trivial pois para* $t \neq 0$ *o número de Milnor de* f_t *e menor que o número de Milnor de* f.

*Utilizamos neste exemplo um resultado provado em [**?**] que nos diz que uma condição necessária para a* C^0-$\mathcal{R}$-*trivialidade é que o número de Milnor de* f_t *seja constante para valores pequenos de* t.

O segundo exemplo tem como intenção mostrar que as estimativas não podem ser melhoradas.

Exemplo 4.1.2. *Seja* $f_t(x,y) = (x^2+y^2)^2+tx^a y^b$. *Consideremos a matrix* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Neste caso o polinômio* $g(x,y) = x+y$, *associado à matriz* A, *é quase homogêneo do tipo* $(1,1;1)$ *portanto o poliedro de Newton tem uma única face compacta de dimensão máxima. O vetor primitivo associado a esta face é* $v = (1,1)$ *e* $l(v) = 1$. *Desta forma note que* $fil(f_0) = \min\{fil(x^4), fil(x^2y^2), fil(y^4)\} = 4$, *além de que* $R = r = 1$.

Do teorema **4.1.1** *temos que* f_t *é* C^ℓ-$\mathcal{R}$-*trivial se*

$$fil(x^a y^b) = a+b \geq fil(f_0) + \ell R - r + 1 = 4 + \ell$$

Ganhamos então que $f_t(x,y) = (x^2+y^2)^2 + tx^{p+5}$ *é* C^{p+1}-$\mathcal{R}$-*trivial já que*

$$p+5 \geq 4+\ell \Leftrightarrow \ell \leq p+1$$

Kuiper provou no teorema $[5B]$ *de [8] que as funções* $(x^2+y^2)^2 + x^{5+p}$ *e* $(x^2+y^2)^2$, $p \geq 0$, *não são* C^{p+2}-*difeomorfas, portanto* f_t *não pode ser* C^{p+2}-$\mathcal{R}$-*trivial, o que comprova que, em geral, a estimativa não pode ser melhorada.*

No exemplo seguinte vamos mostrar com detalhe que o germe de função dado é C^1-$\mathcal{R}$-trivial

Exemplo 4.1.3. *Seja* $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}, 0$ *definido por* $f(x,y) = x^9+x^4y+y^7$ *e consideremos fixada a matriz* $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$. *Inicialmente vamos verificar se* $N_{\mathcal{R}} f = \sum_I M_I^{2\alpha_I}$ *é A-isolado. Para isto, temos que*

$$df = \begin{pmatrix} 9x^8 + 4x^3y & 7y^6 + x^4 \end{pmatrix}_{1\times 2}$$

onde $M_1 = 9x^8 + 4x^3$ *e* $M_2 = 7y^6 + x^4$. *Note que cada face compacta de dimensão máxima do poliedro de Newton associado à matriz* A *é representada por um polinômio quase homogêneo, sendo estes* $\xi_1(x,y) = x^4 + x^3y$, *quase homogêneo do tipo* $(1,1;4)$, *e* $\xi_2(x,y) = x^3y + y^6$, *quase homogêneo do tipo* $(5,3;18)$. *Logo, associados às faces temos os vetores primitivos* $v_1 = (1,1)$, *onde* $l(v_1) = 4$ *e* $v_2 = (5,3)$, *onde* $l(v_2) = 18$.

Portanto $M = m.m.c\{l(v_1), l(v_2)\} = 36$, $\frac{M}{l(v_1)} v_1^1 = \frac{M}{l(v_1)} v_1^2 = 9$, $\frac{M}{l(v_2)} v_2^1 = 10$ *e* $\frac{M}{l(v_2)} v_2^2 =$

6, de onde tiramos que $R = 10$ e $r = 6$. Agora calculemos $fil(M_1)$ e $fil(M_2)$ com detalhes.

$$\begin{aligned}
fil(M_1) &= \min\{fil(9x^8), fil(4x^3y)\} \\
&= \min\{\min\{\frac{M}{l(v_1)}\langle(8,0),v_1\rangle, \frac{M}{l(v_2)}\langle(8,0),v_2\rangle\}, \min\{\frac{M}{l(v_1)}\langle(3,1),v_1\rangle, \frac{M}{l(v_2)}\langle(3,1),v_2\rangle\}\} \\
&= \min\{\min\{36,80\}, \min\{36,36\}\} = 36 \\
fil(M_2) &= \min\{fil(x^4), fil(7y^6)\} \\
&= \min\{\min\{\frac{M}{l(v_1)}\langle(4,0),v_1\rangle, \frac{M}{l(v_2)}\langle(4,0),v_2\rangle\}, \min\{\frac{M}{l(v_1)}\langle(0,6),v_1\rangle, \frac{M}{l(v_2)}\langle(0,6),v_2\rangle\ \}\} \\
&= \min\{\min\{36,40\}, \min\{54,36\}\} = 36
\end{aligned}$$

Portanto $fil(M_1) = fil(M_2) = 36$ e temos que

$$N_{\mathcal{R}}f = (9x^8 + 4x^3)^2 + (7y^6 + x^4)^2$$

Note que se $\rho^2(x,y) = y^{12} + x^6y^2 + x^8$ é a função controle associada à matriz A e se denotamos por Δ_1 e Δ_2 as faces compactas de dimensão 1 de $\Gamma_+(\rho^2)$, então

$$N_{\mathcal{R}}f|_{\Delta_1(x,y)} = (4x^3y)^2 + (7y^6)^2$$

e

$$N_{\mathcal{R}}f|_{\Delta_2(x,y)} = (4x^3y)^2 + (x^4)^2$$

Não possuem solução em $(\mathbb{R}\backslash\{0\})^2$. Logo $N_{\mathcal{R}}f$ é A-isolado. Agora note que para algum monômio x^ay^b temos $fil(x^ay^b) = \min\{9(a+b), 2(5a+3b)\}$ além de que $fil(f) = 42$.

Considere por exemplo $f_t(x,y) = y^7 + x^4y + x^9 + tx^2y^5$ onde

$$fil(x^2y^5) = \min\{9\langle(2,5),(1,1)\rangle, 2\langle(2,5),(5,3)\rangle\} = 50$$

e note que

$$fil(f) + \ell R - r + 1 = 42 + \ell \cdot 10 - 6 + 1 = 37 + 10\ell$$

Logo podemos afirmar, de acordo com o teorema **4.1.1***, que f_t é C^1-$\mathcal{R}$-trivial, já que $50 > 37 + 10 \cdot 1 = 47$.*

Faremos agora um exemplo com um germe de aplicação.

Exemplo 4.1.4. *Seja $f : \mathbb{R}^2, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ um germe de aplicação definido por*

$$f(x,y) = (xy, x^{2b+2} - y^{2b} + x^{2r}y^{2s})$$

com $r+s=b$, $r+2s=b+1$ e $r>s$. Defina tambem:

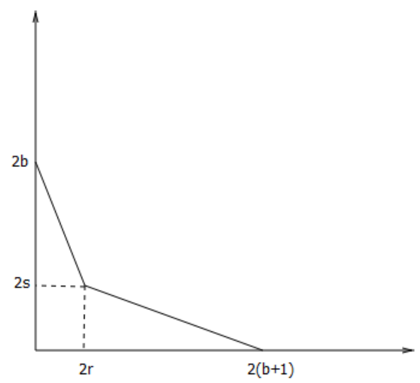
$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{b} & 0 & \frac{r}{(b+1)b} \\ 0 & \frac{1}{b+1} & \frac{s}{(b+1)b} \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Agora observe que $df=\begin{pmatrix} y & x \\ (2b+2)x^{2b+1}+2rx^{2r-1}y^{2s} & -2by^{2b-1}+2sx^{2r}y^{2s-1} \end{pmatrix}_{2\times 2}$

Logo teremos apenas um menor 2×2 de df dado por:

$$M=-2[(b+1)x^{2b+2}+by^{2b}+(r-s)x^{2r}y^{2s}]$$

Note que se $br+(b+1)s<(b+1)b$ é satisfeito (o que e fácil verificar que ocorre) então o poliedro de Newton de $\Gamma_+(\rho^{2b(b+1)})=\Gamma_+(2b(b+1)A)$ tem duas faces compactas como na figura abaixo



onde

$$\rho^d(x,y)=[x^{2(b+1)}+x^{2r}y^{2s}+y^{2b}]^{\frac{d}{2b(b+1)}}\Rightarrow \rho^{2b(b+1)}(x,y)=x^{2(b+1)}+x^{2r}y^{2s}+y^{2b}$$

Se fizermos $\xi_1(x,y)=x^{2r}y^{2s}+y^{2b}$ e $\xi_2(x,y)=x^{2(b+1)}+x^{2r}y^{2s}$, temos que ξ_1 é quase homogêneo do tipo $(1,1;2b)$, de onde tiramos que $v_1=(1,1)$ e $l(v_1)=2b$, e ξ_2 é quase homogêneo do tipo $(1,2;2b+2)$, de onde tiramos que $v_2=(1,2)$ e $l(v_2)=2b+2$. Como m.m.c$\{l(v_1),l(v_2)\}=2b(b+1)$, temos que $fil(xy)=2b+2$, $fil(y^{2b})=2b(b+1)$, $fil(x^{2r}y^{2s})=2b(b+1)$ e $fil(x^{2b+2})=2b(b+1)$, com $R=2b$ e $r=b$.

Agora, dada uma deformação $f_t=f+t\theta$, para que $fil(\theta_i)$ satisfaça a condição do teorema é preciso que

$$fil(\theta_i)\geq fil(f_i)+\ell 2b-b+1$$

ou seja,

$$fil(\theta_1) \geq b + 2b\ell + 1 \ e$$
$$fil(\theta_2) \geq 2b^2 + b + 2b\ell + 1$$

Por exemplo, para $(\theta_1, \theta_2) = (x^5y^9, y^{4(b+1)})$ *temos que* $fil(\theta_1) = 14b + 14$ *e* $fil(\theta_2) = 4b^2 + 18b + 4$ *e portanto, quando* $b \geq 3$, $\ell = 6$ *satisfaz as desiguadades anteriores o que conclui que a família* $f_t(x, y) = f(x, y) + t(\theta_1, \theta_2)$ *é* C^6*-*$\mathcal{R}$*-trivial.*

4.2 O grupo $\mathcal{C}$

Considere um germe de aplicação $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ com $f = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$ e uma matriz fixada A. Definimos

$$N_{\mathcal{C}}f := \sum_{i=1}^{p} (f_i)^{2\beta_i}$$

Onde $\beta_i = \frac{m.m.c.\{fil(f_j); j=1,\ldots,p\}}{fil(f_i)}$. A condição de que $N_{\mathcal{C}}f$ seja A-isolado é a chave para a C^ℓ-$\mathcal{C}$-trivialidade.

Escrevemos $N_{\mathcal{C}}f := H_D + \ldots + H_{D+e}$ com $e > 0$ e do lema **3.2.2** concluimos que existem constantes $C_D, \ldots, C_{D+e}$ e uma vizinhança V da origem tais que

$$N_{\mathcal{C}}f(x) = C_D\rho^D(x) + \ldots + C_{D+e}\rho^{D+e}(x) \leq (C_D + \ldots + C_{D+e})\rho^D$$

Agora, supondo que $N_{\mathcal{C}}f$ é A-isolado, pelo lema **3.2.4** existem constantes $k_1, k_2 > 0$ tais que

$$k_1\rho^D \leq N_{\mathcal{C}}f \leq k_2\rho^D$$

em uma vizinhança da origem.

Considere uma deformação $f_t := f + t\theta$ de f com $fil(\theta_s^i) > fil(f_i)$ e defina $N_{\mathcal{C}}f_t := \sum_{i=1}^{p} (f_{t_1})^{2\beta_i}$.

Lema 4.2.1. *Suponha que* $N_{\mathcal{C}}f$ *é* A*-isolado para alguma matriz* A*. Se* $f_t = f + t\theta$ *é uma deformação de* f *com* $fil(\theta_s^i) > fil(f_i)$*, existem constantes* $k_1, k_2 > 0$ *e uma vizinhança* V *da origem tais que para todo* $x \in V$*:*

$$k_1\rho^D(x) \leq N_{\mathcal{C}}f_t(x) \leq k_2\rho^D(x) \tag{4.2}$$

A demonstração do lema acima é análoga a demonstração do lema **4.1.1**.

Teorema 4.2.1. *(Soares, Saia) Seja* $f_t(x) = f(x)+t\theta(x)$ *uma deformação de um germe de aplicação polinomial* $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$*. Suponha que* $N_{\mathcal{C}}f$ *é* A*-isolado para alguma matriz* A*. Então, se* $fil(\theta_i) > d + \ell R + 1$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$ *e* $\ell \geq 0$*, com* $d = \max\{fil(f_i)\}$*, a família* f_t *é* C^ℓ*-*$\mathcal{C}$*-trivial* $\forall t \in [0, 1]$*.*

Demonstração. Para mostrar a C^ℓ-$\mathcal{C}$-trivialidade de f_t consideramos germes de campos de vetores $V_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, 0$, $V_i = (V_{i_1}, \ldots, V_{i_p})$ de classe C^ℓ, onde $V_{ij}(x, 0) = \delta_{ij}(x)$ de tal maneira que

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}(x,t) = \sum_{i=1}^{p} V_i(x,t)(f_{t_i})$$

Escrevemos para isto

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \frac{\partial f_t}{\partial t} \cdot \left(\sum_{i=1}^{p} f_{t_i}^{2\beta_i - 1} f_{t_i} / N_{\mathcal{C}} f_t \right)$$

E definimos o campo $W_i(x,t) = \frac{\partial f_t}{\partial t} \cdot f_{t_i}^{2\beta_i - 1}$. Então:

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \sum_{i=1}^{p} \frac{W_i(x,t)}{N_{\mathcal{C}} f_t} \cdot f_{t_i}$$

Note que, se $B = m.m.c.\{fil(f_j), j = 1, \ldots, p\}$, então obtemos:

$$\begin{aligned}
fil(W_i) &\geq \min_j \{fil(f_i^{2\beta_i - 1}) + fil(\theta_j)\} \\
&= \min_j \{2\beta_i fil(f_i) - fil(f_i) + fil(\theta_j)\} \\
&\geq \min_j \{2\beta_i fil(f_i) - fil(f_i) + d + \ell R + 1\} \\
&= 2B - d + d + \ell R + 1 \\
&= 2B + \ell R + 1, \quad \forall i
\end{aligned}$$

Seja agora $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, 0 \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, 0$ o campo de vetores definido por $(0, V_p, 0)$, onde

$$V_p(x,y,t) = \sum_{i=1}^{p} \frac{W_i(x,t)}{N_{\mathcal{C}} f_t} y_i$$

Desta forma, pelas desigualdades dadas pelo lema **4.0.7** e aplicando o lema **3.2.5** concluimos que V é de classe C^ℓ e o resultado segue por integração do campo de vetores V.

□

Seguem alguns exemplos

Exemplo 4.2.1. *Seja* $f : \mathbb{R}^2, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ *definido por* $f(x,y) = (xy + x^2y^2, x^{2(c+1)} + xy - y^{2c})$ *com* $c \geq 2$. *Fixemos* $A = \begin{pmatrix} 2(c+1) & 0 & 1 \\ 0 & 2c & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3}$. *Se* $\xi(x,y) = x^{2(c+1)} + xy + y^{2c}$ *é o polinômio associado à matriz* A *e denotando por* Δ_1 *e* Δ_2 *as faces compactas de dimensão máxima do poliedro de Newton gerado pela matriz* A*, associamos a essas faces respectivamente,* $\xi_{\Delta_1}(x,y) = x^{2(c+1)} + xy$ *quase homogêneo do tipo* $(1, 2c+1; 2(c+1))$ *e* $\xi_{\Delta_2}(x,y) = y^{2c} + xy$ *quase homogêneo do tipo* $(2c-1, 1; 2c)$. *Desta forma os vetores primitivos associados as faces* Δ_1 *e* Δ_2 *são, respectivamente,* $v_1 = (1, 2c+1)$ *e* $v_2 = (2c-1, 1)$, *onde* $l(v_1) = 2(c+1)$ *e* $l(v_2) = 2c$.

Portanto, $M = m.m.c.\{l(v_1), l(v_2)\} = 2c(c+1)$. *Concluimos daí que* $R = 2c^2 + 2c$. *Além disso, como* $fil(f_1) = fil(f_2) = 2c^2 + 2c$*, temos que*

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{C}}f(x,y) &= f_1^{2\beta_1}(x,y) + f_2^{2\beta_2}(x,y) \\ &= (xy + x^2y^2)^2 + (x^{2(c+1)} + xy - y^{2c})^2 \end{aligned}$$

É A-isolado.

Agora, dado um monômio $x^a y^b$, temos que

$$fil(x^a y^b) = \min\{c\langle(a,b),(1,2c+1)\rangle, (c+1)\langle(a,b),(2c-1,1)\rangle\}$$

Considere então $f_t(x,y) = f(x,y) + t(xy^{2c+1}, 0)$. Note que $fil(xy^{2c+1}) = 4c^2 + 4c$, $d = \max\{fil(f_1), fil(f_2)\} = 2c^2 + 2c$ e $fil(0) = \infty$. Portanto para $c \geq 2$ é fácil verificar que f_t é C^1-$\mathcal{C}$-trivial.

4.3 O grupo $\mathcal{K}$

Para definir o germe de aplicação $N_{\mathcal{K}}f$ com respeito ao grupo $\mathcal{K}$, fixamos uma matriz A e consideramos os menores números inteiros a e b tais que $[N_{\mathcal{R}}f]^a = [N_{\mathcal{C}}f]^b$. Definimos então:

$$N_{\mathcal{K}}f := [N_{\mathcal{R}}f]^a + [N_{\mathcal{C}}f]^b$$

Seguimos então com o teorema principal desta seção.

Teorema 4.3.1. *(Soares, Saia) Seja $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ um germe de aplicação polinomial. Suponha que $N_{\mathcal{K}} f$ é A - isolado para alguma matriz A. Então deformações $f_t = f + t\theta$ de f, onde $\theta : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ é um germe de aplicação polinomial com $fil(\theta_i) \geq d + \ell R + 1$, são C^ℓ-$\mathcal{K}$-triviais para todo $t \in [0, 1]$.*

Demonstração. Inicialmente defina $N_{\mathcal{K}f_t} := [N_{\mathcal{R}} f_t]^a + [N_{\mathcal{C}} f_t]^b$ e note que se W_R e W_i são os campos de vetores definidos, respectivamente, para os casos do grupo $\mathcal{R}$ e do grupo $\mathcal{C}$, então :

$$\begin{aligned}
N_{\mathcal{K}f_t} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} &= [N_{\mathcal{R}f_t}]^a \frac{\partial f}{\partial t} + [N_{\mathcal{C}f_t}]^b \frac{\partial f}{\partial t} \\
&= [N_{\mathcal{R}f_t}]^{a-1} [N_{\mathcal{R}f_t}] \frac{\partial f}{\partial t} + [N_{\mathcal{C}f_t}]^{b-1} [N_{\mathcal{C}f_t}] \frac{\partial f}{\partial t} \\
&= [N_{\mathcal{R}f_t}]^{a-1} ([df_t]_x (W_R)) + [N_{\mathcal{C}f_t}]^{b-1} \sum W_i(x,t)(f_{t_i}) \\
&= [df_t]_x ([N_{\mathcal{R}f_t}]^{a-1} W_R) + \sum ([N_{\mathcal{C}f_t}]^{b-1} W_i)(f_{t_i})
\end{aligned}$$

Portanto $\frac{\partial f}{\partial t} = [df_t]_x(\xi) + \sum (\eta_i)(f_{t_i})$, onde: $\xi := ([N_{\mathcal{R}f_t}]^{a-1} / N_{\mathcal{K}} f_t) W_R$ e $\eta_i := ([N_{\mathcal{C}} f_t]^{b-1} / N_{\mathcal{K}} f_t) W_i$

Agora, como

$$\begin{aligned}
fil([N_{\mathcal{R}}f_t]^{a-1}W_R) &\geq fil([N_{\mathcal{R}}f_t]^{a-1}) + fil(W_R)\\
&\geq (a-1)\cdot fil([N_{\mathcal{R}}f_t]) + fil\left(\sum_I M_I^{2\alpha_I-1}W_I\right)\\
&\geq (a-1)fil\left(\sum_I M_I^{2\alpha_I}\right) + fil\left(\sum_I M_I^{2\alpha_I-1}W_I\right)\\
&\geq (a-1)\min_I\{fil(M_I^{2\alpha_I})\} + fil(\sum_I M_I^{2\alpha_I-1}W_I)\\
&\geq (a-1)\min_I\{2\alpha_I fil(M_I)\} + fil(\sum_I M_I^{2\alpha_I-1}W_I)\\
&= (a-1)2\alpha + fil(\sum_I M_I^{2\alpha_I-1}W_I)\\
&\geq (a-1)2\alpha + 2\alpha + \ell R + 1 = 2\alpha a + \ell R + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
fil([N_{\mathcal{C}}f_t]^{b-1}W_i) &\geq fil([N_{\mathcal{C}}f_t]^{b-1}) + fil(W_i)\\
&\geq (b-1)fil(N_{\mathcal{C}}f_t) + 2B + \ell R + 1\\
&= (b-1)fil(\sum_{i=1}^{p}(f_{t_i})^{2\beta_i}) + 2B + \ell R + 1\\
&\geq (b-1)\min_i\{fil(f_{t_i})^{2\beta_i}\} + 2B + \ell R + 1\\
&\geq (b-1)\min_i\{2\beta_i fil(f_{t_i})\} + 2B + \ell R + 1\\
&= (b-1)2B + 2B + \ell R + 1 = 2Bb + \ell R + 1
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
fil(N_{\mathcal{K}}f_t) &= fil([N_{\mathcal{R}}f_t]^a) = fil([N_{\mathcal{C}}f_t]^b)\\
&= 2\alpha a = 2Bb
\end{aligned}$$

Então obtemos pelo lema **3.2.5** que os campos de vetores ξ e η são de classe C^ℓ. Desta forma $f_t = f + t\theta$ é C^ℓ-$\mathcal{K}$-trivial.

$\square$

Exemplo 4.3.1. *Seja $f : \mathbb{R}^3, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ o germe de aplicação definido por $f(x,y,z) = (3x^6 + 2y^6 + xz^4, x^6 + y^6 + yz^3)$. Temos então que*

$$df = \begin{pmatrix} 18x^5 + z^4 & 12y^5 & 4xz^3 \\ 6x^5 & 6y^5 + z^3 & 3yz^2 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Com menores

$$M_{12}(x,y,z) = 36x^5y^5 + 18x^5z^3 + 6y^5z^4 + z^7$$
$$M_{13}(x,y,z) = 54x^5yz^2 + 3yz^6 - 24x^6z^3$$
$$M_{23}(x,y,z) = 36y^6z^2 - 24xy^5z^3 - 4xz^6$$

Aqui $N_{\mathcal{R}}f$ e $N_{\mathcal{C}}f$ não são A-isolados, qualquer que seja a matriz A, entretanto $N_{\mathcal{K}}f$ é A-isolado onde $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 5}$. *Note que $R = 288$ e $fil(f_1) = fil(f_2) = 504$.*

Considere agora a deformação $f_t(x,y,z) = f(x,y,z) + t(0, y^5z^3)$. Como $fil(y^5z^3) = 840$, concluimos que f_t é C^1-$\mathcal{K}$-trivial.

Capítulo 5

Apêndice

Proposição 5.0.1. *Considere uma filtração de Newton fixada e induzida pelo poliedro de Newton $\Gamma_+(A)$. Afirmamos que para germes de funções polinomias com domínio em $\mathbb{R}^k$ vale*

$$fil(\frac{\partial f}{\partial x_i}) \geq fil(f) - R$$

e

$$fil(\frac{\partial f}{\partial x_i}) \leq fil(f) - r$$

Onde R e r são definidos como na página 22 deste documento.

Demonstração. Basta provarmos que esta desigualdade vale no caso em que f é um monômio. Suponhamos então f da forma

$$f(x) = a_n x^n$$

onde $x^n = x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}$. Note então que:

$$fil(a_n x^n) = \sum_{i=1}^{k} w_i n_i \tag{5.1}$$

De modo que $R \geq \min\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ e $r \leq \min\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$.

Veja agora que $\frac{\partial(a_n x^n)}{\partial x_i} = a_n \cdot (n_i) \cdot x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_i^{n_i - 1} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}$, portanto

$$\begin{aligned} fil\left(\frac{\partial(a_n x^n)}{\partial x_i}\right) &= w_1 n_1 + \ldots + w_i(n_i - 1) + \ldots + w_k n_k \\ &= \sum_{i=1}^{k} (w_i n_i) - w_i = fil(a_n x^n) - w_i \end{aligned}$$

Como $R \geq w_i$ e $r \leq w_i$, $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$, então $-R \leq -w_i$ e $-r \geq -w_i$. De onde tiramos que

$$fil\left(\frac{\partial(a_n x^n)}{\partial x_i}\right) \geq fil(a_n x^n) - R$$

e

$$fil\left(\frac{\partial(a_n x^n)}{\partial x_i}\right) \leq fil(a_n x^n) - r$$

Como queriamos demonstrar.

□

Afirmação 5.0.1. *$fil(N_{\mathcal{R}} f_t) = 2\alpha$ e $fil(N_{\mathcal{C}} f_t) = 2B$.*

Note que $N_{\mathcal{R}} f_t = N_{\mathcal{R}} f + t\Theta$ com $fil(\Theta) \geq fil(N_{\mathcal{R}} f)$. Logo $fil(N_{\mathcal{R}} f_t) = fil(N_{\mathcal{R}} f)$. Por outro lado, sabemos que $N_{\mathcal{R}} f = \sum_I M_I^{2\alpha_I}$ e $\alpha_I = \frac{\alpha}{fil(M_I)}$. Desta forma

$$\begin{aligned} fil(N_{\mathcal{R}} f) &= fil(\sum_I M_I^{2\alpha_I}) \\ &= \min_I \{fil(M_I^{2\alpha_I}))\} \\ &= 2\alpha_I fil(M_I) \\ &= 2\alpha \end{aligned}$$

Como afirmamos.

Afirmação 5.0.2. *$fil\left(N_{ji_m}\right) \geq fil\ M_I - fil\ \frac{\partial f_j}{\partial x_{i_m}}$*

De fato, analisando a expansão de M_I pela linha ∂f_j, temos:

$$M_I = \begin{vmatrix} \cdots & & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_m}} & & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_j}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial f_j}{\partial x_{i_m}} & \cdots & \frac{\partial f_j}{\partial x_{i_p}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & & \frac{\partial f_p}{\partial x_{i_m}} & & \cdots \end{vmatrix}$$
$$= \frac{\partial f_j}{\partial x_{i_1}} \operatorname{cof}(ji_1) + \cdots + \frac{\partial f_j}{\partial x_{i_m}} N_{ji_m} + \cdots + \frac{\partial f_j}{\partial x_{i_p}} \operatorname{cof}(ji_p)$$

Desta forma vemos que:

$$fil\ M_{t_I} - fil\ \frac{\partial f_{t_j}}{\partial x_{i_m}} \leq fil\,(N_{ji_m})$$

Como afirmamos.

Bibliografia

[1] Arnaldo Garcia & Y. Lequain, *Elementos de álgebra* , Projeto Euclides, IMPA-SBM. (2008)

[2] Abderrahmane O.M., *Polyèdre de Newton et trivialité en Famille.* J. Math. Soc. Japan (3) **54** (2002), 513-550.

[3] Ruas M.A.S. and Saia M.J., *C^ℓ-determinancy of weighted homogeneous germs.* Hokkaido Math. J. **26** (1997), 89-99

[4] H.Soares, *Poliedros de Newton e trivialidade em famílias de aplicações.* Tese de doutorado. ICMC-USP (2003).

[5] Ruas M.A.S., *C^ℓ-determinação finita e aplicações, Tese de doutorado*, UFSCar, São Carlos.(1983)

[6] Saia M.J. and H.Soares, *C^ℓ-G-triviality of map germs and Newton Polyhedra, $G = \mathcal{R}$, $\mathcal{C}$ and $\mathcal{K}$*, Hokkaido Mathematical Journal Vol. XXXVII No.2.(2008)

[7] J.Martinet, *Singularities of Smooth Functions and Maps*, London Mathematical Society Lecture Notes Series(58).

[8] Kuiper N., *C^1-equivalence of functions near isolated critical points.* Ann. of Math Studies **69** (1972), 199-217

[9] J.J. Risler & R. Benedetti , *Real algebraic and semi-algebraic sets.* Hermann Paris. (1990)

[10] E.L.Lima, *Curso de análise, vol II.* IMPA-SBM, Quarta edição.(1991)