Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

A Matemática na Cartografia e o Uso de Mapas no Ensino de Matemática na Educação Básica

Kim Carlos Santos

Teresina
2018

Kim Carlos Santos

Dissertação de Mestrado:

A Matemática na Cartografia e o Uso de Mapas no Ensino de Matemática na Educação Básica

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Manoel Vieira de Matos Neto

Teresina

2018

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco
Divisão de Processos Técnicos

S237m Santos, Kim Carlos.
A Matemática na cartografia e o uso de mapas no ensino de matemática na educação básica / Kim Carlos Santos. -- 2018.
44 f. : il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Mestrado Profissional em Matemática, Teresina, 2018.
"Orientação: Prof. Dr. Manoel Vieira de Matos Neto."

1. Cartografia. 2. Matemática - Estudo e ensino. I. Título.

CDD 526

Elaborado por Thais Vieira de Sousa Trindade - CRB-3/1282

Dedico este trabalho à minha mãe, à minha esposa,
aos meus irmãos e aos meus amigos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha mãe Regina Elisete, por ter me ensinado desde cedo a importância dos estudos.

À minha esposa Iris Santos pelo amor, insistência, motivação, companheirismo e força dada em todas as minhas decisões.

Ao Prof. Manoel Vieira de Matos Neto pelas orientações, encorajamento, amizade, compromisso, competência e apoio para a conclusão deste trabalho.

Aos professores Antônio Kelson e Pitágoras Pinheiro, por aceitarem o convite para compor a banca.

Aos meus irmãos Jim Carlos e Tandy Alef pela torçida.

Aos meus amigos, e em especial a Aristides Oliveira, Meire Fernandes, Juscelino Clairton, Pollyana, João Paulo, Jordana, Tia Hérida e Narcísio, pela amizade, preocupação, apoio e momentos de descontrações.

Aos professores do PROFMAT-UFPI pelo compromisso, seriedade e competência com que tratam a educação.

Aos amigos de turma do PROFMAT, Anna Karla, Cledes, Daissy, Diego, Nelson, Paulo Roberto e Ronny pelos momentos compartilhados de angústias, alegrias, descontração, e principalmente pelas manhãs e tardes de estudos. Sem vocês essa jornada teria sido muito mais difícil.

"Na matemática do meu desejo
Eu sempre quero mais um mais um mais um beijo
E assim vou vivendo na natureza
Selvagem dessa paixão
Que é o império da beleza
Que é ferro e é fogo
E é barra pesada pro meu coração".

Matemática do Desejo, Jorge Mautner

Resumo

Neste trabalho apresentamos, de forma sintética, os mais amplos conteúdos Matemáticos abordados na Cartografia, desde tópicos elementares aos mais sofisticados. Tais conteúdos são utilizados não só na elaboração de mapas, mas também na codificação de informações e na sua interpretação. Neste sentido, ressaltamos aqui a relevância do uso de mapas no ensino de matemática, destacando-o como um instrumento motivador da aprendizagem e de auxílio para assimilação de conceitos matemáticos, além de opção para abordagens interdisciplinares no Ensino Fundamental e Médio.

Palavras-chave: Cartografia, Projeção cilíndrica, Projeção Estereografica, interdisciplinaridade.

Abstract

In this work we present, in a synthetic way, the broader Mathematical contents covered in Cartography, from elementary to more sophisticated topics. Such content is used not only in the preparation of maps, but also in the codification of information and its interpretation. In this sense, we emphasize here the relevance of the use of maps in the teaching of mathematics, highlighting it as a motivating instrument of learning and aid for assimilation of mathematical concepts, as well as the option for interdisciplinary approaches in Elementary and Middle School.

Keywords: Cartography, Cylindrical Projection, Stereographic Projection, interdisciplinarity.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Desde a sua origem, a Cartografia teve uma ligação muito íntima com a ciência geográfica e ao mesmo tempo com a Matemática. A cartografia constituiu uma forma de representar os dados da superfície da terra, dos objetos geográficos físicos e humanos, além de constituir um grande instrumento de comunicação. As cartas cartográficas constituem uma forma de linguagem comum à Geografia e a todos os profissionais que se atêm da dimensão espacial. E, nesse contexto, os produtos cartográficos, as carta e os mapas, sempre foram expressões de um conjunto de procedimentos matemáticos. A representação dos objetos geográficos é, sobretudo, uma consequência de estudos de formas e medidas por conseguir-se utilizar as ferramentas disponíveis para a Matemática. Em sua essência, a Cartografia é uma expressão da ciência Matemática. Assim, a cartografia se configura em um instrumento essencial no ensino não só da Geografia, mas também na História, na Geologia e por que não dizer também na Matemática. Elementos Matemáticos utilizados na cartografia podem tornar-se importantes aliados do professor de Matemática para trabalhar a interdisciplinaridade na escola. É importante este elo de ligação das disciplinas para que o aluno possa atender às necessidades que aparecerão no seu cotidiano.

Desde a origem da Cartografia, a Matemática sempre constituiu a base para a formulação e construção do conteúdo desse campo do conhecimento científico e de representação gráfica da superfície terrestre e dos objetos geográficos construídos pelo homem ao longo de sua história. O cartógrafo para elaborar um mapa ou uma carta precisará de conhecimentos matemáticos já que a representação gráfica constitui uma operação de transposição de dados esféricos existentes no mundo real para o plano. No sentido do que foi exposto acima, o presente trabalho propôe destacar os principais tópicos de Matemática relacionados a Cartografia, desde os básicos aos mais sofisticados, e expor as mais variadas possibilidades de se trabalhar a Matemática no Ensino Fundamental e Médio.

Capítulo 1

Contextualizando a Matemática e a Cartografia

O mapa não é uma simples ilustração. Ele é um meio de comunicação, uma fonte de conhecimento sobre determinada realidade. Segundo o geógrafo françês Yves Lacoste, ler uma carta geográfica ou mapa significa "saber agir sobre o terreno".

Tendo como objetivo de estudo o espaço geográfico, os mapas são de fundamental importância para a geografia, pois armazenam e trabalham uma diversificada documentação espacial. A **cartografia** surgiu da exploração dessa documentação ou de observações diretas na superfície terrestre, por meio de estudos e operações científicas, artísticas e técnicas.

A cartografia engloba atividades que se iniciam com o estudo de campo ou a pesquisa bibliográfica, passam pelas confecções dos mapas e terminam em sua impressão definitiva e publicação. Dessa forma pode ser considerada ao mesmo tempo uma ciência, uma arte e uma técnica.

Desde os primórdios de sua presença na Terra, o ser humano procurou registrar suas impressões a respeito do espaço que conhecia. Os primeiros mapas eram confecçionadas em placas de argila. O mapa mais antigo que se tem conhecimento data da metade do século IX a.C., e representa um trecho do norte da Mesopotâmia (atual Iraque). Nele estão registrada cenas de caça e algumas linhas onduladas, que provavelmente representam cursos de rios.

Desde os primeiros registros cartográficos, a necessidade sempre ditou as regras sobre as formas de desenhar mapas ou cartas cartográficas. Os mapas chineses, por exemplo, serviam tanto para orientação espacial como para que os administradores pudessem fixar impostos e estabelecer fronteiras.

Com os gregos na Antiguidade, a cartografia verificou uma expressiva evolução. Hiparco (século II a.C.), astrônomo da escola da ilha de Rodes, dividiu pela primeira vez a circunferência da Terra em 360° e traçou sobre a esfera terrestre paralelos e meridianos equidistantes.

Um dos trabalhos cartográficos mais importantes, por sua precisão e complexidade, foi o de Cláudio Ptolomeu (90-168 d.C.). Nos oito livros de sua obra *Geografia*, ele procurou representar de forma abrangente a superfície terrestre conhecida na época: quase toda Europa, grande parte da Ásia e parte da África.

Os cálculos matemáticos de Ptolomeu foram extremamente oportunos para os navegantes e cartógrafos do século XV, época em que a obra Geografia tornou-se conhecida pelos europeus.

Com as grandes navegações, aos poucos o planeta foi sendo mapeado: os navegantes forneciam dados sobre as "novas terras"aos cartógrafos e estes, por sua vez, elaboravam mapas que facilitavam o trabalho dos navegantes. Essa relação de reciprocidade levou, no século XVIII, a um conhecimento quase total do globo terrestre, especialmente dos contornos continentais e de boa parte das ilhas.

Alguns mapas daquela época, assim como determinados tipos de mapas atuais (por exemplo, de instalações militares), eram guardados como segredo de Estado. Afinal, com eles atingiam-se terras que continham fortunas em ouro e prata, áreas agricultáveis, de produção de especiarias etc.

Até o século XVIII, um dos principais objetivos da cartografia era fornecer uma imagem da superfície terrestre mais próxima do real, principalmente em relaçao aos contornos. A partir de então, surgiram mapas mais detalhados de regiões menores, de áreas do interior dos continentes, que antes eram preenchidas com figuras ilustrativas do país ou continente mapeado.

A cartografia observou grande evolução quando o ser humano pôde realizar fotografias aéreas: em 1860, fotos tiradas de um balão foram usadas para fazer mapas. Atualmente, computadores, aviões, satélites artificiais e radares permitem maior grau de precisão e de atualização e mais rapidez na confecção de mapas. A associação satélite-radar-computador possibilita a produção de imagens tridimensionais da superfície terrestre.

Figura 1.1: Mapa Mundi: Clássico exemplo de Carta Geográfica.

O conjunto de técnicas utilizadas utilizadas para estudar a superfície terrestre e a atmosfera, por meio da análise de imagens fornecidas por satélite ou feitas por aviões, recebe o nome de **sensoriamento remoto**. Entretanto, apenas a interpretação das imagens ou fotografias aéreas não é suficiente para elaboração de mapas detalhados e precisos. É necessária também a realização de levantamentos a partir do trabalho de campo, para sanar dúvidas e acrescentar informações precisas.

Desde a sua origem, a cartografia teve uma ligação muito íntima com a ciência geográfica e ao mesmo tempo com a Matemática. A cartografia constituiu uma forma de representar os dados da superfície da terra, dos objetos geográficos físicos e humanos, além de constituir um grande instrumento de comunicação. Uma forma mesma de linguagem comum à Geografia e a todos os profissionais que se atêm da dimensão espacial. E, nesse contexto, os produtos cartográficos: a carta, o mapa, sempre foram expressões de um conjunto de procedimentos matemáticos. A representação dos objetos geográficos é, sobretudo, uma consequência de estudos de formas e medidas por conseguir-se utilizar as ferramentas disponíveis para a Matemática. Em sua essência, a Cartografia é uma expressão da ciência Matemática. A cartografia é um instrumento essencial no ensino não só da Geografia, mas também na História, na Geologia e por que não dizer também na Matemática. Elementos Matemáticos utilizados na cartografia tornam-se importantes aliados do professor para trabalhar a interdisciplinaridade na escola. É importante este elo de ligação das disciplinas para que o aluno possa atender às necessidades que aparecerão no seu cotidiano. Desde a origem da Cartografia, a Matemática sempre constituiu a base para a formulação e construção do conteúdo desse campo do conhecimento científico e de representação gráfica da superfície terrestre e dos objetos geográficos construídos pelo homem ao longo de sua história. O cartógrafo para elaborar um mapa ou uma carta precisa dos conhecimentos matemáticos já que a representação gráfica constitui uma operação de transposição de dados esféricos existentes no mundo real para o plano.

Os mapas produzidos ao longo do tempo sempre expressaram ideias ou visões próprias de determinadas sociedades ou períodos históricos.

Um grande nome da cartografia moderna é, sem dúvidas, o flamengo Gerard Mercator (1512-1594). Na época em que desenvolveu seu trabalho, a Europa havia conquistado os mares e dominado diversas terras. Do continente europeu partiram navios para África, a América e a Ásia. O planisfério de Mercator, de 1569, expressa esse contexto: a Europa situa-se no centro e na parte superior.

Como no planisfério de Mercator os meridianos estão traçados paralelamente de um pólo a outro e as distâncias entre os paralelos aumentam conforme se aproximam dos pólos, as áreas mais distantes do Equador aumentam exageradamente. A Groelândia, por exemplo, parece ter a mesma área da América do Sul, quando, na verdade, é quatro vezes menor que o Brasil. Isso reforçaria ainda mais a ideia de superioridade do continente europeu, já que a maior parte de suas terras estão mais próximas do pólo Norte que da linha do Equador. Não podemos afirmar que essa era a intenção de Mercator. Na verdade, ele priorizou a representação da forma e dos contornos das massas continentais, levando em consideração a utilização de seus mapas pelos navegadores.

Após a Segunda Guerra Mundial e a independência de várias colonias européias na África e na Ásia, ficaram ainda mais em evidência as enormes diferenças socioeconômicas entre os países. Diversos intelectuais de todas as partes do mundo passaram a desenvolver a tese de que a exploração de Estados-Nação do hemisfério Sul pelos do hemisfério Norte levou os primeiros a uma situação de pobreza, dependência e submissão.

Capítulo 2

Conteúdo Matemáticos que Fundamentam a Cartografia

Muitos conteúdos matemáticos tratados nos Ensino Fundamental, Médio e Superior são utilizados na Cartografia na elaboração e interpretação de mapas. Alguns deles são bem específicos e outros de natureza bem ampla. A abordagem de tais conteúdos via manipulação e interpretação de mapas pode propiciar uma assimilação eficaz de conceitos e propriedades. No que segue, elencamos alguns destes tópicos, :

- Razão e proporção
- Regra de três
- Segmentos proporcionais
- Semelhança
- Escala
- Notação Científica
- Fração
- Transformação de Unidades
- Potência
- Números decimais

- Dízimas periódicas
- Movimento de rotação, translação e reflexão (isometria)
- Homotetia
- Porcentagem
- Áreas de contornos existentes no mapa
- Elementos de Geometria plana
- Teorema de Pitágoras
- Figuras semelhantes
- Coordenadas cartográficas
- Plano cartesiano
- Transformações de unidades
- Transformações de graus, minutos e segundos
- Operações sexagessimais ou sistema de base
- Fusos horários
- Projeções cartográficas
- Funções
- Logaritmo
- Geometria espacial
- Cálculo diferencial e Integral
- Cálculo de variações
- Geometria Analítica e descritiva.
- Espaços vetoriais e Álgebra Linear
- Relações trigonométricas
- Trigonometria plana e esférica.

Dos tópicos listados acima, faremos menção a alguns intrisicamente relacionados a geografia.

Escala

Para reproduzir a superfície da Terra ou parte dela num mapa, seja numa folha de papel ou numa tela de computador, é preciso representar o espaço de forma reduzida. É possível manter as reais proporções dos elementos de um mapa utilizando uma **escala**, que é a relação existente entre as dimensões da área na superfície terrestre e sua representação numa superfície plana menor, como uma folha de papel. As escalas podem ser **numéricas** ou **gráficas**.

O estudo de escala mostra-se uma grande ferramenta para o professor de Matemática quando quer trabalhar vários conteúdos, como: razão, proporção, fração, transformação de unidades de medidas, números decimais, dízimas periódicas, retas paralelas, movimento de rotação e de translação, regra de três, funções, etc. Além disso, o estudo de escala, auxilia a aprendizagem em questões relacionadas Geografia, quando propostas em sala de aula.

Escala Numérica

A escala numérica (ou aritmética) pode ser representada por uma fração ordinária $\left(\frac{1}{500.000}\right)$ ou sob a forma de uma razão (1:500.000).

Na escala 1:500.000, a área representada foi reduzida 500 mil vezes. Em toda escala numérica, as unidades indicadas no numerador e no denominador devem ser lidas em centímetros. Isso significa que 1 cm no mapa representa 500.000 cm no terreno, ou seja, 1 cm representa 5 km. Assim, com o auxílio da régua, pode-se calcular a distância real entre dois pontos num mapa.

Fusos Horários

Os Fusos Horários, também chamados de zonas horárias, são cada um dos 24 fusos traçados por uma linha imaginária de um polo ao outro, de modo a padronizar o cálculo de tempo em todo o planeta Terra.

Como a Terra é quase esférica e leva aproximadamente 24 horas para completar uma rotação de 360°, temos $360 \div 24 = 15$, o que significa que cada faixa de 15° de longitude está para uma hora e equivale a um fuso horário.

Essas linhas imaginárias, chamadas Meridianos, são as semicircunferências que ligam os polos e dividem o globo terrestre em dois hemisférios, o ocidental (a Oeste do GMT) e o oriental (a Leste do GMT).

As zonas horárias se tornam mais largas a medida em que se aproxima da Linha do Equador. Nessas linhas imaginárias nós teremos um mesmo horário vigorando de Norte a Sul.

O Meridiano de Greenwich é o marco longitudinal para determinar o "Greenwich Mean Time" (GMT). Portanto, A longitude 0° passaria sobre Greenwich, nas proximidades de Londres. A Leste desse marco, conta-se até 180° positivos e, para Oeste dele, até 180° negativos. Esta metodologia leva em consideração o movimento de rotação da Terra, em sentido anti-horário para o Leste. Assim, adiantamos as horas dos fusos a Leste e atrasamos as horas à Oeste do GMT.

Dentre os fundamentos matemáticos relacionados a fuso horário, pode-se destacar a utilização de operações matemáticas utilizando graus, minutos, segundos e ângulos complementares. No caso da latitude e a colatitude, fazendo com que o conceito dos alunos em relação às diferenças horárias existentes de um lugar para o outro seja ampliada.

Além dos três temas mencionados acima, vários outros listados anteriormente podem ser abordados no ensino da Matemática. A forma como a Matemática é ensinada em sala de aula, utilizando apenas fórmulas, números e contas, sempre da mesma forma, visando apenas à teoria, leva à mecanização e a difícil compreensão, gerando desinteresse em grande parte dos alunos que não conseguem enxergar sentido no que está sendo proposto. Nesse sentido, o professor de Matemática poderá fazer uso da relação Matemática-Cartografia para atrair a atenção e o interesse do aluno em sala de aula e propiciar uma efitiva aprendizagem de conteúdos.

Capítulo 3

Projeções Cartográficas

Para a prática da ciência cartográfica é de fundamental importância a utilização de recursos técnicos, e o principal deles é a projeção cartográfica. A projeção cartográfica é definida como um traçado sistemático de linhas numa superfície plana, destinado à representação de paralelos de latitude e meridianos de longitude da Terra ou de parte dela, sendo a base para a construção dos mapas. Ou seja, tal projeção é a representação de uma superfície esférica num plano (o mapa), ou seja, trata-se de um "sistema plano de meridianos e paralelos sobre os quais pode ser desenhado um mapa".

O grande problema da cartografia consiste em ter de representar uma superfície esférica num plano, pois, como é sabido, a esfera é um sólido não-desenvolvível, isto é, não planificável. Assim, sempre que achatarmos uma esfera, necessariamente ela sofrerá alterações ou deformações. Experimente, por exemplo, cortar uma laranja ao meio e depois pressionar uma dessas partes sobre uma superfície plana. Isso quer dizer que todas as projeções apresentam deformações, que podem ser em relação às distâncias, às áreas ou aos ângulos. A representação da superfície terrestre em mapas, nunca será isenta de distorções. Deste modo, todos os mapas são representações aproximadas da superfície terrestre. São aproximadas porque a Terra, esférica, é desenhada em uma superfície plana. A elaboração de uma mapa consiste em um método segundo o qual se faz corresponder a cada ponto da Terra, em coordenadas geográficas, um ponto no mapa, em coordenadas planas. Para se obter essa correspondência utilizam-se os sistemas de projeções cartográficas. No entanto, nenhuma das projeções evitará a totalidade das deformações, elas irão valorizar alguns aspectos da superfície representada e fazer com que essas distorções sejam conhecidas. Assim, cabe ao cartógrafo escolher o tipo de projeção que melhor atenda aos objetivos do mapa. Nesse sentido, as projeções cartográficas são desenvolvidas para minimizarem as imperfeições dos mapas e proporcionarem maior rigor científico à cartografia.

3.1 Classificação das Projeções Conforme as Propriedades

Os sistemas de projeções cartográficas podem ser analisadas pelo tipo de superfície adotada e grau de deformação. Quanto ao tipo de superfície de projeção adotada, temos que as projeções classificam-se em: planas ou azimutais, cilíndricas e cônicas, segundo se represente a superfície curva da Terra sobre um plano, um cilindro ou um cone tangente ou secante à esfera terrestre. A maior parte das projeções hoje existentes deriva dos três tipos ou métodos originais, a saber: cilíndricas, cônicas e planas ou azimutais.

Classificação quanto à superficie de projeção

Dependendo da superficie na qual é projetada, temos os seguintes tipos de projeções:

a) Planas - este tipo de superfície pode assumir três posições básicas em relação a superfície de referência: polar, equatorial e oblíqua (ou horizontal)

b) Cônicas - embora esta não seja uma superfície plana, já que a superfície de projeção é o cone, ela pode ser desenvolvida em um plano sem que haja distorções e funciona como superfície auxiliar na obtenção de uma representação. A sua posição em relação à superfície de referência pode ser normal, transversal e oblíqua (ou horizontal)

c) Cilíndricas - tal qual a superfície cônica, a superfície de projeção que utiliza o cilindro pode ser desenvolvida em um plano e suas possíveis posições em relação a superfície de referência podem ser: equatorial, transversal e oblíqua (ou horizontal)

Classificação quanto ao tipo de contato entre as superfícies de Projeção e de referência

a) Tangentes - a superfície de projeção é tangente à de referência (plano- um ponto; cone e cilindro- uma linha).

b) Secantes - a superfície de projeção secciona a superfície de referência (plano- uma linha; cone- duas linhas desiguais; cilindro- duas linhas iguais).

Através da composição das diferentes características apresentadas nesta classificação das projeções cartográficas, podemos especificar representações cartográficas cujas propriedades atendam as nossas necessidades em cada caso específico.

As superfícies de projeção secantes podem ser:

a) Equidistantes - É a projeção cartográfica que não apresenta deformações lineares para algumas linhas em especial, isto é, os comprimentos são representados em escala uniforme ao longo de determinadas linhas. Uma Projeção é azimutal equidistante quando as distâncias são conservadas ao longo dos círculos máximos que passam pelo centro; equidistante meridiana, quando a distância é conservada ao longo dos meridianos; e equidistante transversal, quando a distância é conservada ao longo dos paralelos.

b) Conformes - Projeção em que a forma de figuras da superfície cartográfica e os ângulos em torno dos pontos são corretamente representados. Deste modo, representam sem deformação, todos os ângulos em torno de quaisquer pontos, e decorrentes dessa propriedade, não deformam pequenas regiões.

c) Equivalentes - Projeção cartográfica em que a proporção das áreas de todos os objetos representados é conservada, ou seja, têm a propriedade de não alterarem as áreas, conservando assim, uma relação constante com as suas correspondentes na superfície da Terra. Seja qual for a porção representada num mapa, ela conserva a mesma relação com a área de todo o mapa.

d) Afiláticas - Não possui nenhuma das propriedades dos outros tipos, isto é, equivalência, conformidade e equidistância, ou seja, as projeções em que as áreas, os ângulos e os comprimentos não são conservados.

As propriedades acima descritas são básicas e mutuamente exclusivas. Elas ressaltam mais uma vez que não existe uma representação ideal, mas apenas a melhor representação para um determinado propósito.

3.2 Tipos de Projeção

Existem diferentes projeções cartográficas, uma vez que há uma variedade de modos de projetar sobre um plano os objetos geográficos que caracterizam a superfície terrestre.

Consequentemente, torna-se necessário classificá-las sob seus diversos aspectos, a fim de melhor estudá-las. Na impossibilidade de se desenvolver uma superfície esférica sobre um plano sem deformações, na prática, buscam-se projeções tais que permitam diminuir ou eliminar parte das deformações conforme a aplicação desejada. Assim, podemos destacar os seguintes tipos de projeções cartográficas:

3.2.1 Projeção Cilíndrica:

Um dos métodos de construir mapas é projetar tudo aquilo que está na superfície esférica da Terra sobre a superfície plana do cilindro. Neste processo é realizada a projeção dos paralelos e meridianos do globo para o cilindro, este é aberto ao longo de um meridiano, tornando-se um plano sobre o qual será desenhado o mapa. No cilindro que se abre, ficam então projetados todos os oceanos, mares e continentes da superfície da Terra. Assim, toda a superfície esférica da Terra fica projetada na superfície plana do cilindro. Por esse motivo, esta maneira de construir mapas é chamada de Projeção Cilíndrica.

A projeção cilíndrica pode ser subclassificada ainda como:

Projeção de Mercator ou Projeção Cilíndrica Conforme

Nessa projeção, os paralelos e os meridianos são linhas retas que se cruzam formando ângulos retos, não havendo a deformação dos ângulos. Em compensação, as áreas extensas ou situadas em latitudes elevadas aparecem nos mapas com dimensões exageradamente ampliadas. Idealizada no século XVI, a projeção cilíndrica de Mercator tornou-se a preferida dos navegantes por ser a única em que as direções podiam ser traçadas em linha reta sobre o mapa. Além da navegação marítima, via cartas náuticas, e na navegação aeronáutica, é muito utilizada em cartas geológicas e magnéticas.

Projeção de Peters ou Projeção Cilíndrica Equivalente

Não mantém as formas, direções e ângulos, conserva a proporcionalidade das áreas, preservando as superfícies representadas. Utilizada em mapas em escalas pequenas e em trabalhos computacionais.

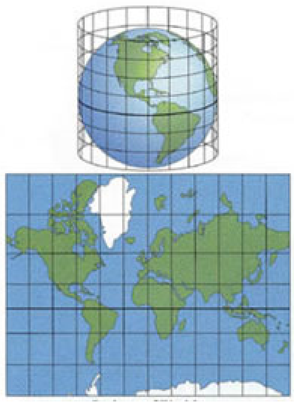

Figura 3.1: Projeção Cilíndrica

3.2.2 Projeção Cônica

A projeção cônica é muito utilizada para representar partes da superfície terrestre. Ela resulta da projeção do globo terrestre sobre um cone imaginário envolvendo a esfera terrestre, que posteriormente é planificado. Esse tipo de projeção apresenta paralelos circulares e meridianos radiais, isto é, os paralelos formam círculos concêntricos e os meridianos são linhas retas convergentes para os polos. Nessa projeção, as distorções aumentam conforme se afasta do paralelo de contato com o cone. É usado principalmente para a representação de países ou regiões de latitudes intermediárias, embora possa ser utilizado para outras latitudes.

Figura 3.2: Projeção Cônica

3.2.3 Projeção Plana ou Azimutal

A projeção azimutal resulta da projeção da superfície terrestre sobre um plano tangente à esfera terrestre a partir de um determinado ponto. Os paralelos são círculos concêntricos e os meridianos, retos que se irradiam do polo. As deformações aumentam com o distanciamento do ponto de tangência. Em geral, o polo norte é o centro do mapa, e a partir dele as distâncias estão em escala verdadeira, bem como os ângulos azimutais. Ela pode ser classificada em três tipos: polar, equatorial e oblíqua. Elas são utilizadas para confeccionar mapas especiais, como aqueles que representam as regiões polares e a localização de países na posição central, e principalmente os mapas náuticos e aeronáuticos.

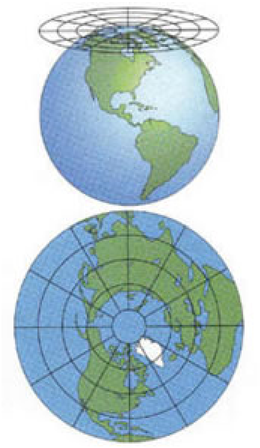

Figura 3.3: Projeção Plana ou Azimutal

3.2.4 Projeção Senoidal

É executada por Mercator, Sanson e Flamsteed, tem os paralelos horizontais e equidistantes. Trata-se de um tipo de projeção que procura manter as dimensões superficiais reais, deformando a fisionomia. Esta deformação intensifica-se na periferia do mapa.

3.2.5 Projeção de Hölzel

Apresenta contorno em elipse, proporcionando uma ideia aproximada da forma esférica da Terra com achatamento dos polos.

3.2.6 Projeção de Mollweide e Aitoff

Essas projeções são do tipo equivalente, isto é, conservam a proporção ou equivalência das áreas representadas em detrimento da forma. Nelas, os paralelos são horizontais e estão de tal modo espaçados que cada área limitadas por dois deles conserva a mesma proporção da área real, embora possa variar muito no tocante à forma. Elas têm formato elíptico e são muito utilizadas para a confecção de mapas-múndi.

3.2.7 Projeção de Robinson

É uma representação global da Terra. Os meridianos são linhas curvas (elipses) e os paralelos são linhas retas.

3.2.8 Projeção de Albers

Cônica equivalente. Usada para mapeamentos temáticos. Serve para mapear áreas com extensão predominante leste-oeste. Preserva áreas. Substitui com vantagens todas as outras cônicas equivalentes.

3.2.9 Projeção Bipolar

É uma projeção cônica e conforme. Indicada para base cartográfica, confiável dos continentes americanos. É uma adaptação da cônica de Lambert.

3.2.10 Projeção Policônica

É a projeção cujas superfícies de representação são diversos cones. Não é conforme nem equivalente (só tem essas características próxima ao Meridiano Central). Deste modo, altera áreas e ângulos. O Meridiano Central e o Equador são as únicas retas da projeção. O meridiano central é dividido em partes iguais pelos paralelos e não apresenta deformações. Os paralelos são círculos não concêntricos (cada cone tem seu próprio ápice) e não apresentam deformações. Os meridianos são curvas que cortam os paralelos em partes iguais. Ocorre pequena deformação em pontos próximos ao centro do sistema, mas aumenta esta deformação rapidamente para pontos na periferia. É apropriada para representar países ou regiões de extensão predominantemente Norte-Sul e reduzida extensão este-oeste. É muito popular devido à simplicidade de seu cálculo pois existem tabelas completas para sua construção. Usado em mapeamento temático em escalas pequenas. É amplamente utilizada nos EUA. No BRASIL é utilizada em mapas da série Brasil, regionais, estaduais e temáticos.

3.3 Síntese das Projeções de Mercator e de Lambert

Por serem umas das projeções mais conhecidas e de maior interesse, expomos aqui um resumo das propriedades das projeções de Mercator e de Lambert:

PROJEÇÃO CILÍNDRICA TRANSVERSA DE MERCATOR

- Cilíndrica.
- Conforme.
- Analítica.
- Tangente a um meridiano.
- Os meridianos e paralelos não são linhas retas, com exceção do meridiano de tangência e do Equador.
- Indicada para regiões onde há predominância na extensão Norte-Sul. É muito utilizada em cartas destinadas à navegação.

PROJEÇÃO CÔNICA NORMAL DE LAMBERT

- Cônica.
- Conforme.
- Analítica.
- Secante.
- Os meridianos são linhas retas convergentes.
- Os paralelos são círculos concêntricos com centro no ponto de interseção dos meridianos.

- Usadas na elaboração de cartas geográficas gerais, de cartas militares e de cartas aeronáuticas. A existência de duas linhas de contato com a superfície (dois paralelos padrão) nos fornece uma área maior com um baixo nível de deformação. Isto faz com que esta projeção seja bastante útil para regiões que se estendam na direção este-oeste, porém pode ser utilizada em quaisquer latitudes. A partir de 1962, foi adotada para a Carta Internacional do Mundo, ao Milionésimo.

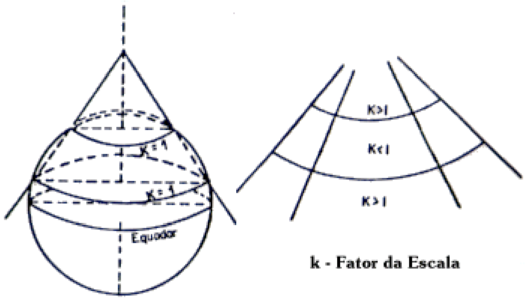

Figura 3.4: Projeção Cônica Normal de Lambert

Capítulo 4

Projeção Cilíndrica e Estereografica

No que segue, destacamos os aspéctos matemáticos relativos as projeções cilíndricas e estereográficas. Alguns conceitos serão apresentados sem o rigor formal. Além de remetermos a questões geométricas, evidenciaremos o caráter analítico destas projeções. A ideia aqui é verificar o que fundamenta a inviabilidade de se representar com precisão o globo terrestre em um plano.

4.1 Noções de Topologia abordados na Cartografia

Em Geometria há o conceito de Espaços topológicos, que são objetos geométricos que permitem formalizar as ideias de convergência de pontos, conexidade e continuidade.

Dois espaços topológicos são ditos homeomorfos se existir uma aplicação que seja contínua, invertível e cuja inversa também seja contínua.

Um homeomorfismo transforma pontos de um objeto geométrico em pontos de outro objeto geométrico provocando uma deformação espacial, mas preservando algumas propriedades geométricas.

4.2 Projeção Estereográfica

A projeção estereográfica projeta pontos de uma esfera sobre um plano tangente a esta esfera. Podemos obter um efeito similar fazendo uma projeção da esfera no plano, como se um foco de luz no pólo norte projetasse a sombra do mapa na esfera sobre o plano.

Faremos agora uma abordagem matemática deste conceito. Para isso, determinaremos inicialmente a expressão matemática que caracteriza esta projeção.

Sem perda de generalidade, consideremos a esfera unitária

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

e o plano

$$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = -1\}$$

tangente a S^2 em $S = (0, 0, -1)$.

Dado um ponto $p = (a, b, c) \in S^2$, definamos a reta

$$r := \{(0, 0, 1) + t(a, b, c - 1)/t \in \mathbb{R}\} = \{(ta, tb, t(c - 1) + 1)/t \in \mathbb{R}\}.$$

partindo do polo norte $N = (0, 0, 1)$ da esfera S^2 e passando pelo ponto p da esfera.

O ponto pertencente a interseção $r \cap \Pi = \{(x, y, z) \in r/z = -1\}$ representará a projeção de $p \in S^2$ sobre o plano Π.

Assim, $1 + t(c - 1) = -1$, o que é equivalente a $t = \frac{2}{1-c}$, e podemos definir a projeção $\varphi : S^2 - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\varphi(a, b, c) = \left(\frac{2a}{1 - c}, \frac{2b}{1 - c} \right).$$

Esta aplicação será injetiva e sobrejetiva, admitindo a inversa

$$\varphi^{-1}(x, y) = \left(\frac{4x}{x^2 + y^2 + 4}, \frac{4y}{x^2 + y^2 + 4}, \frac{x^2 + y^2 - 4}{x^2 + y^2 + 4} \right).$$

Verifica-se facilmente que $\varphi^{-1}(x, y) \in S^2$.

Como cada componente das coordenadas de φ e φ^{-1} são funções contínuas, conclue-se que φ é um homeomorfismo.

Destacamos que a escala na projeção estereográfica aumenta com a distância de p do ponto de tangência $S = (0, 0, -1)$.

Tal projeção possui maior aplicação na cartografia náutica, principalmente na construção de cartas marítimas de regiões polares.

Uma caracteristica relevante da projeção estereográfica é que ela permite observar toda esfera, exceto em um de seus pontos, no plano. Isso é bastante interessante, haja visto que a esfera pertence ao espaço tridimensional,espaço no qual percebemos o globo terrestre. Nesse sentido, obtemos uma maneira com a qual podemos fazer uma representação da esfera, salvo um ponto, sobre o plano. Ou seja, podemos considerar no plano a imagem da esfera S^2 excetuando um ponto.

A projeção estereográfica é de grande importancia dentro da teoria dos gráficos, pois mostra que a esfera realmente é muito parecida com o plano, ou formalmente, é localmente o plano.

O homeomorfismo entre a esfera menos um ponto $S^2 - \{N\}$ e o plano mostra a impossibilidade de se representar o globo terrestre no plano bidimensional.

4.3 Conformidade

Como vimos no capítulo anterior, a propriedade de conformidade está relacionada a preservação do ângulo entre duas retas ou vetores. Assim, é necessário entendermos como é feito o cálculo do ângulo formado por dois vetores tangentes a uma superfície. No que segue, faremos algumas definições que nos permitará fazer uma ligeira abordagem matemática de conformidade.

Definição: Dados dois vetores $X = (x_1, x_2, x_3)$ e $Y = (y_1, y_2, y_3)$ pertencentes ao espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$, definimos o produto interno de X e Y como a aplicação
$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

A norma do vetor X induzida por este produto interno será denotada por

$$\|X\| := \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

A partir das definições de produto interno e de norma podemos determinar o ângulo θ formado pelos vetores X e Y como sendo aquele que obedece a relação

$$\cos\theta = \frac{\langle X, Y \rangle}{\|X\| \cdot \|Y\|}.$$

Agora, devemos ter em mente a existência de uma aplicação entre dois espaços vetoriais ou dois espaços tangentes que rementem vetores de um espaço para vetores do outro espaço.

Consideremos uma função $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)),$$

onde f_1 e f_2 são as funções coordenadas de f. A aplicação entre os espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ que desempenha o papel mencionado acima é a aplicação df denotada deferencial de f. Definimos a diferencial df de f como a aplicação $df : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que leva vetores tangentes de $\mathbb{R}^3$ a vetores tangentes de $\mathbb{R}^2$ e cuja matriz da aplicação é dada por

$$[df] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Aplicar a diferencial df sobre o vetor X pertencente a $\mathbb{R}^3$ obtendo o vetor $df(X)$ pertencente a $\mathbb{R}^2$ equivale a multiplicar a matriz $[df]$ pela matriz coluna de X, ou seja,

$$[df] \cdot [X] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y} x_2 + \frac{\partial f_1}{\partial z} x_3, \frac{\partial f_2}{\partial x} x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y} x_2 + \frac{\partial f_2}{\partial z} x_3 \right),$$

obtendo assim um vetor de $\mathbb{R}^2$.

Considerando a projeção estereográfica $\varphi : S^2 - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ da esfera sobre o plano, dado por

$$\varphi(x, y, z) = \left(\frac{2x}{1 - z}, \frac{2y}{1 - z} \right).$$

Temos que a matriz de sua aplicação diferencial $d\varphi : T_pS^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde T_pS^2 representa o espaço tangente a S^2 no ponto $p \in S^2$, será dada por

$$[df] = \begin{bmatrix} \frac{2}{1 - z} & 0 & \frac{2x}{(1 - z)^2} \\ 0 & \frac{2}{1 - z} & \frac{2y}{(1 - z)^2} \end{bmatrix}.$$

Calculando o quadrado da norma do vetor $df(X)$ temos

$$\|df(X)\|^2 = \left\langle \left(\frac{2}{1 - z} dx + \frac{2x}{(1 - z)^2} dz, \frac{2}{1 - z} dy + \frac{2y}{(1 - z)^2} dz \right), \left(\frac{2}{1 - z} dx + \frac{2x}{(1 - z)^2} dz, \frac{2}{1 - z} dy + \frac{2y}{(1 - z)^2} dz \right) \right\rangle$$

$$= \left(\frac{2}{1 - z} dx + \frac{2x}{(1 - z)^2} dz \right)^2 + \left(\frac{2}{1 - z} dy + \frac{2y}{(1 - z)^2} dz \right)^2$$

$$= \frac{4}{(1-z)^2}dx^2 + \frac{4xdxdz}{(1-3)^3} + \frac{4x^2}{(1-z)^4}dz^2 + \frac{4}{(1-z)^2}dy^2 + \frac{4ydydz}{(1-z)^3} + \frac{4y^2}{(1-z)^4}dz^2$$

$$= \frac{4}{(1-z)^2}(dx^2+dy^2) + \frac{4}{(1-z)^3}(xdx+ydy)dz + \frac{4(x^2+y^2)}{(1-z)^4}dz^2$$

Sendo $(x, y, z) \in S^2$, tal ponto satisfaz a condição

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

que caracteriza os pontos de uma esfera unitária, e a equação diferencial

$$2xdx + 2ydy + 2zdz = 0,$$

obtida diferenciando a equação da esfera.

Daí, prosseguindo ao desenvolvimento acima temos

$$= \frac{4}{(1-z)^2}(dx^2+dy^2) - \frac{4zdz}{(1-z)^3} + \frac{4(1-z^2)}{(1-z)^4}dz^2$$

$$= \frac{4}{(1-z)^2}(dx^2+dy^2) - \frac{4zdz}{(1-z)^3} + \frac{4(1+z)}{(1-z)^3}dz^2$$

$$= \frac{4}{(1-z)^2}(dx^2+dy^2) + \frac{4(1-z)}{(1-z)^3}dz^2$$

$$= \frac{4}{(1-z)^2}(dx^2+dy^2) + \frac{4}{(1-z)^2}dz^2$$

$$= \frac{4}{(1-z)^2}(dx^2+dy^2+dz^2)$$

$$= \frac{4}{(1-z)^2}\|x\|^2$$

Logo

$$\|df(x)\| = \frac{4}{1-z}\|x\|,$$

ou seja, $\|df(X)\| = \lambda\|X\|$ para $\lambda = \dfrac{4}{1-z}$.

Procedendo com cálculos semelhantes aos feitos acima, porém, um pouco mais elaborados, podemos deduzir a expressão

$$\|\langle df(x), df(Y)\rangle\| = \lambda\|\langle X, Y\rangle\|.$$

Assim, podemos concluir que

$$\cos\theta = \frac{\langle df(x), df(y)\rangle}{\|d(x)\| \cdot \|df(y)\|} = \frac{\lambda^2\langle x, y\rangle}{\lambda\|x\| \cdot \lambda\|y\|} = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Daí, deduzimos que o ângulo formado pelos vetores X e Y sobre a esfera S^2 é o mesmo formado pelos vetores $df(X)$ e $df(Y)$ sobre $\mathbb{R}^2$.

4.4 Projeção Cilindrica

Quando projetamos uma esfera sobre um cilindro que esteja em uma posição horizontal, ou seja, seu eixo seja perpendicular ao eixo de rotação da Terra, a projeção é a projeção cilíndrica transversa. Um caso importante de projeção cilíndrica transversa é a projeção Universal Transversa de Mercator, em que um cilindro transverso e secante a uma esfera é usado para projetar a Terra em uma projeção conforme. Fazendo uso de uma representação algébrica para esferas e planos podemos obter a expressão representativa desta projeção.

De fato, seja $S^2(R) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ uma esfera de raio R e $C(R) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/x^2 + y^2 = R^2\}$ o cilindro circunscrito a esfera $S^2(R)$.

Estamos interessados em determinar uma aplicação que projete cada ponto de $S^2(R)$ sobre $C(R)$. Ou seja, uma aplicação $\varphi : M = S^2(R) - \{N, S\} \longrightarrow C(R)$, onde $M = S^2(R) - \{N, S\}$ é a esfera menos o polo norte $N = (0, 0, 1)$ e o polo sul $S = (0, 0, -1)$.

Para isto, dado um ponto arbitrário $p = (x, y, z) \in M$, considermos a reta r passando por p e perpendicular ao eixo OZ no ponto $q = (0, 0, z)$. Tal reta encontra $S^2(R)$ em dois pontos, um pertence a semirreta $\overrightarrow{qp}$ de origem q e outro pertence a semirreta oposta a $\overrightarrow{qp}$.

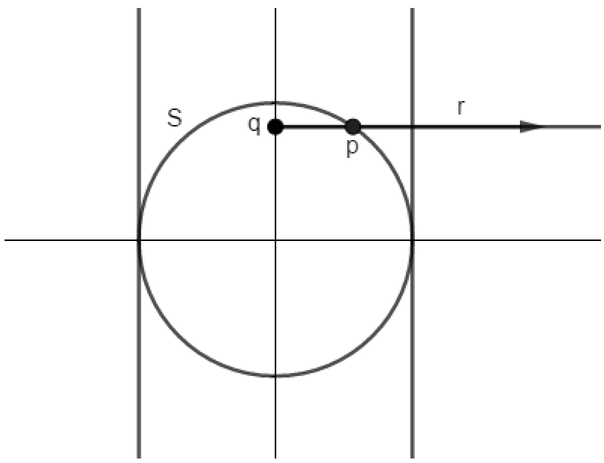

Figura 4.1: Projeção Cilíndrica

Deste modo, podemos definir φ por

$$\varphi(p) = q + t(p - q)$$

ou seja,

$$\varphi(x, y, z) = (0, 0, z) + t(x, y, 0) = (xt, yt, z).$$

Como queremos $\varphi(p) \in C(R)$, temos $(xt, yt, z) \in C(R)$. Daí $x^2t^2 + y^2t^2 = R^2$ e segue que $t = \dfrac{R}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ para $\varphi(p)$ pertencente a semirreta $\overrightarrow{qp}$. Logo, a aplicação φ será expressa por

$$\varphi(x, y, z) = (\frac{Rx}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{Ry}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z).$$

Uma outra projeção cilíndrica pode ser obtida considerando a semirreta $\overrightarrow{qp}$ com q posicionado no centro da esfera $S^2(R)$. Neste caso, φ será dada por

$$\varphi(x, y, z) = \frac{R}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, z).$$

Entretanto, esta projeção tem a desvantagem de deformar gradativamente os pontos projetados a medida que os pontos da esfera se aproximam dos polos.

Capítulo 5

Tópicos Avançados Abordados em Cartografia

Neste capítulo mencionamos alguns tópicos interessantes relacionados a confecção de mapas ou utilizados na sua compreensâo, os quais serão apresentados aqui sem adentrarmos em seus detalhes técnicos, quer seja por sua complexidade, ou pela inadequação aos objetivos deste trabalho. Entretanto,a exposição que fazemos aqui é apropriada para exemplificar a abrangência de teorias matemáticas na cartografia.

5.1 Teorema das Quatro cores e sua evolução histórica

O Problema das Quatro Cores trata da determinação do número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa, de países reais ou imaginários, de forma a que países com fronteira comum tenham cores diferentes. Em 1852, Francis Guthrie conjecturou que 4 era esse número mínimo. Mas, não obstante a aparente simplicidade, só ao cabo de mais de cem anos, em 1976, se conseguiu provar que realmente a conjectura estava certa, obtendo-se o chamado Teorema das Quatro Cores.

O Problema das Quatro Cores tem a fascinante característica de ser um problema matemático de formulação muito simples, entretanto, de enorme complexidade de resolução, o que fez com que permanecesse sem resolução durante mais de uma centena de anos. Muitos dos melhores matemáticos do século XX trabalharam seriamente neste problema. Este estudo teve um papel muito importante no desenvolvimento da Teoria dos Grafos, da qual falaremos mais a frente. Pelo caminho muitas questões foram postas e vários problemas relacionados foram resolvidos.

A história do problema das quatro cores começou em 1852, quando Francis Guthrie tentava colorir os vários distritos do mapa de Inglaterra de tal modo que dois distritos vizinhos não tivessem a mesma cor. Depois de ter refletido sobre o problema, conjecturou que qualquer mapa poderia ser colorido com apenas quatro cores. Francis Guthrie, que foi advogado, botânico e, sobretudo, matemático, tinha um irmão mais novo, Frederick Guthrie, que era aluno de Augustus De Morgan (das conhecidas leis de De Morgan, na Lógica). Frederick apresentou a conjectura do seu irmão mais velho ao professor De Morgan. Este ficou muito entusiasmado e, no mesmo dia, escreveu uma carta a Sir William Rowan Hamilton na qual explicava o problema. Esta carta foi conservada e encontra-se hoje nos arquivos do Trinity College em Dublin. Contrastando com a animação de De Morgan, Hamilton não achou o problema interessante. Respondeu quatro dias mais tarde dizendo que tão cedo não tencionava debruçar-se sobre a questão. Assim, foi através de De Morgan que a comunidade científica tomou conhecimento da Conjectura das Quatro Cores. De Morgan escreveu algumas cartas para outros matemáticos conhecidos, o problema foi discutido e teve alguns desenvolvimentos. Por exemplo, De Morgan ocupou-se durante algum tempo com a questão de saber se quando 4 países têm dois a dois fronteiras comuns, um deles tem de estar dentro dos outros três.

Depois de 1860, por um período de cerca de 20 anos, o interesse dos matemáticos pelo Problema das Quatro Cores esmoreceu. Pelo menos, não aparece discutido na literatura matemática desse tempo. Mas não foi esquecido. Com efeito, em 13 de Julho de 1878, Arthur Cayley indagava na secção de Matemática da Royal Society se porventura alguém já submetera uma solução da Conjectura das Quatro Cores. O próprio Cayley publicou uma pequena análise do problema nos Proceedings of the Royal Geographical Society em 1879. Cayley era um advogado brilhante, mas aproveitava todo o tempo que podia para a Matemática. Entre outras áreas, contribuiu significativamente para o desenvolvimento da Geometria Algébrica. Em 1879, Alfred Bray Kempe, que era também um advogado e que tinha estudado no Trinity College de Cambridge, onde fora aluno de Cayley, publicou uma demonstração completa do Teorema das Quatro Cores no American Journal of Mathematics. A demonstração de Kempe foi estudada por vários matemáticos de renome, alguns deles tendo feito sugestões para melhorar a demonstração. Portanto, em 1879, considerava-se definitivamente estabelecido o Teorema das Quatro Cores. Mas, em

1890, Percy John Heawood provou que a demonstração de Kempe tinha um erro. No mesmo artigo, Heawood lamentava não ter sido capaz de obter nenhuma demonstração alternativa do teorema. Conseguiu no entanto dar mais um passo positivo, nomeadamente, provou o Teorema das Cinco Cores. Isto é, demonstrou que não são necessárias mais do que cinco cores para colorir um mapa plano onde países de fronteira comum têm cores diferentes. Heawood estudou também a questão do número de cores necessárias para colorir mapas sobre vários tipos de superfícies fechadas, para além da esfera, as chamadas superfícies esféricas com "asas". Estas questões também já tinham sido abordadas por Kempe. Heawood deu um contributo relevante no estudo destes problemas. E, surpreendentemente, eles foram resolvidos antes do Problema das Quatro Cores.

Durante 124 anos, muitos métodos foram desenvolvidos para atacar o Problema das Quatro Cores. Muito se produziu até o presente momento em Teoria de Grafos para abordar o Problema, bem como de vários outros problemas que foram sendo solucionados nesse percurso. Finalmente, em 1976, com a ajuda de um computador IBM 360, em Urbana, Illinois, Kenneth Appel e Wolfgang Haken apresentaram uma demonstração do Teorema das Quatro Cores. Quando a notícia do feito se espalhou, houve um enorme entusiasmo. Mas a euforia esfriou quando se soube que essa demonstração incluía mais de mil horas do uso de computadores de alta velocidade. A prova era demasiado longa para ser verificada à mão e havia sempre a possibilidade de os computadores terem cometido algum erro de difícil detecção. Hoje em dia a validade da demonstração é aceita pela comunidade matemática, mas continua a ser polémica devido a necessidade de se reconhecer uma argumentação baseada numa enorme quantidade de cálculos efetivados por computador e impossíveis de serem verificados detalhadamente por um ser humano.

Nunca é demais lembrar que muitos foram os matemáticos que contribuíram com o seu trabalho para o desfecho de 1976. Mas a história do Teorema das Quatro Cores não acaba aqui. A dificuldade em verificar todos os cálculos feitos na demonstração de Apple e Haken tem sido um incentivo para alguns matemáticos tentarem encontrar uma prova mais simples. Em Agosto de 1994, no Congresso Internacional de Matemática, em Zurique, Paul Seymour apresentou uma prova simplificada do Teorema das Quatro Cores, cuja formulação foi o resultado de trabalho conjunto com Neil Robertson, Daniel P. Sanders e Robin Thomas [RSST]. Entretanto, eles ainda não conseguiram dispensar o uso do computador, mas foram capazes de reduzir a quantidade de cálculos para um nível bastante mais tolerável. Assim, a questão de construir uma demonstração que não necessite o auxílio de computadores continua em aberto.

5.2 Grafos

Um ramo da Matemática, do qual Euler pode ser dito como um dos fundadores, é conhecido por Teoria dos Grafos, uma parte hoje adulta e independente da Topologia.

Esta é, grosseiramente, o estudo das formas das figuras geométricas e das propriedades qualitativas das transformações contínuas entre tais figuras. O século XVIII a conheceu como Geometria Situs e mais tarde a denominação Topologia Combinatória se disseminou até advir a enorme expansão do assunto no século XX. A resolução do famoso problema das sete pontes de Königsberg por Euler, em 1736, é considerada como sendo um dos primeiros resultados topológicos. Mais ainda, dentre as mais conhecidas descobertas de Euler está aquela contida na fórmula que relaciona o número de vértices, áreas e faces de um poliedro. Mais tarde, tal resultado serviu de base para a definição da "característica de Euler", que foi utilizada por H. Poincaré (1854-1912) para a classificação das superfícies, um dos principais invariantes da moderna Topologia.

As relações topológicas entre elementos geográficos (continência, pertinência, conectividade e proximidade) são utilizadas amplamente na representação e análise dos objetos geográficos e vetoriais, desde sua criação, na década de 1960, e sua vida profissional, a partir da década de 1980. Dentre elas estão a análise de rede e a roteirização, que se utilizam da conectividade entre elementos vetoriais, exemplos da apropriação da Teoria dos Grafos no geoprocessamento.

Quando um mapa é colorido, duas regiões com fronteira comum são associadas a cores diferentes, isto garante que duas regiões adjacentes nunca devem ter a mesma cor. Entretanto, um número mínimo de cores deve ser usado sempre que possível. Duas regiões com apenas um ponto em comum não são consideradas adjacentes.

Um dos problemas mais famosos e conhecidos de teoria dos grafos que desafiou muitos matemáticos por muito tempo e que ainda não foi resolvido, é um problema sobre grafos planares: O problema das quatro cores, mencionado anteriormente.

Cada mapa no plano pode ser representado por um grafo, onde cada região do mapa é representado por um vértice. As arestas conectam dois vértices se as regiões tiverem uma fronteira em comum. Desta forma, o grafo resultante é chamado grafo dual do mapa. Pela maneira na qual os grafos duais de mapas são construídos, qualquer mapa no plano tem um grafo dual planar. Colorir as regiões de um mapa é equivalente a colorir os vértices de um mapa dual, de modo que dois vértices adjacentes não tenham a mesma cor.

O problema demorou um século para ser resolvido. Em 1976, Appel, Haken e Koch, com o auxílio do computador mais rápido de sua época, trabalhando mais de 1000 horas e executando mais do que 10^{10} operações computacionais, provaram o teorema.

5.3 Relacionando Projeção Estereográfica e Grafos

Um conceito utilizado na Teoria dos Grafos é o de número cromático, que se refere ao menor número de cores necessárias para colorir todos os vértices de um grafo, de modo que vértices adjacentes tenham cores diferentes. O teorema das quatro cores se aplica apenas a grafos planares, pois grafos não planares podem ter números cromáticos arbitrariamente grandes. Deste modo,se considerarmos os pontos de fonteiras de três ou mais países como vértices de um grafo, podemos utilizar a projeção estereográfica para projetar sobre o plano os pontos do grafo formado na superfície esférica por todas as fronteiras dos países representados no globo e assim obter um grafo planar no qual pode-se aplicar o teorema das quatro cores.

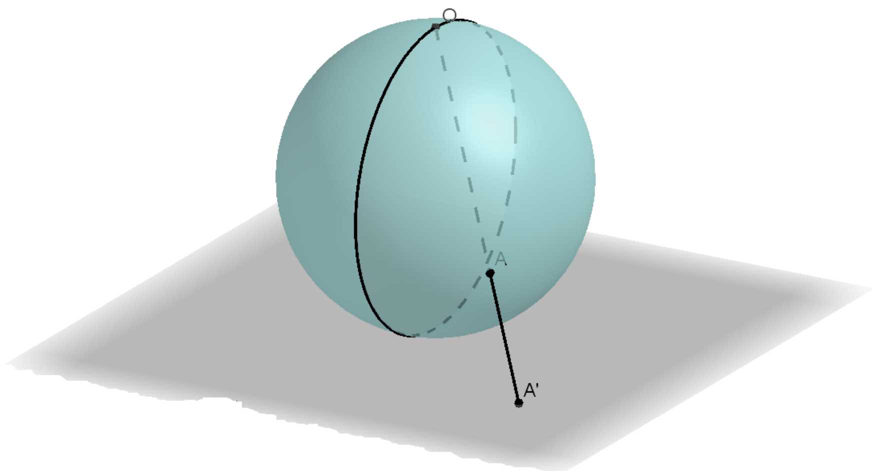

Figura 5.1: Projeção estereográfica

5.4 Geometria Esférica

A Geometria Esférica tem como ambiente de trabalho a superfície de uma esfera, diferente da euclidiana, que é desenvolvida no plano. Ela é um tema de grande abrangência e importância para a representação da superfície terrestre. Temos, assim, um "novo mundo", onde retas são circunferências e a soma dos ângulos internos de um triângulo é diferente de 180°. Vale citar mais alguns pontos importantes onde a Geometria Esférica difere da Geometria Euclidiana: a reta (circunferência máxima) tem comprimento finito, mas é ilimitada, pois podemos percorrer indefinidamente uma circunferência máxima e sempre retornamos ao ponto de partida; não existe semelhança de triângulos, apenas congruência; a soma dos ângulos internos do triângulo esférico na verdade é superior a 180° e inferior a 540°; a área dos triângulos esféricos é proporcional ao excesso da soma de seus ângulos internos relativo ao ângulo de 180° e a distância entre dois pontos é dada pela medida de um arco de circunferência.

As coordenadas geográficas são dadas por um sistema de linhas imaginárias (paralelos e meridianos)traçadas sobre o globo terrestre a partir das quais a posição de um ponto qualquer sobre a superfície da Terra é determinada. Elas equivalem ao sistema de coordenadas cartesianas aplicadas ao plano. Esse sistema começoou a ser idealizado na Grécia Antiga, onde surgiram os primeiros conceitos de paralelos e meridianos incorporados a mapas, bem como a ideia de um sistema de coordenadas geográficas referido a essas linhas imaginárias: **Sistema Longitude- Latitude**.

No sistema de coordenadas geográficas, todo ponto P da superfície do globo terrestre será localizado a partir do par ordenado (ϕ, θ), onde:

- **A coordenada** ϕ do ponto P, chamada de **longitude de P**, é a medida do arco de paralelo compreendido entre o meridiano de Greenwich e o meridiano que passa por P. As medições vão de 0° a 180° leste (E) e de 0° a 180° para oeste (W), tendo como referencia o meridiano de Greenwich.

- **A coordenada** θ do ponto P, chamada **latitude de P**, é a medida do arco de meridiano compreendido entre o Equador e o paralelo q passa po P. As medições vão de 0° a 90° para Norte (N) e de 0° a 90° para Sul (S), tendo como referencial a linha do Equador.

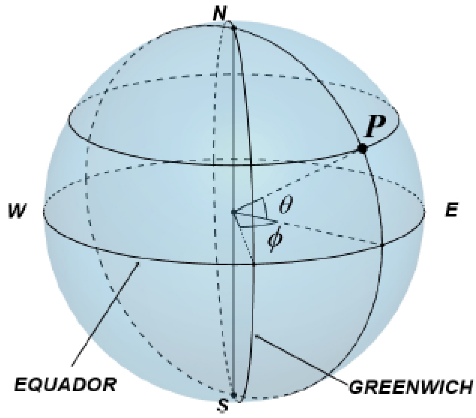

Figura 5.2: Coordenadas Geograficas

Longitude (ϕ) e Latitude (θ) do ponto P.

Considerações Finais

No decorrer deste trabalho elencamos diversos tópicos matemáticos dos quais se faz uso a cartografia para a elaboração de cartas geográfica e para compreensão das informações contidas em um mapa. Apresentarmos os diferentes tipos de projeção da superfície esférica sobre o plano e as propriedades de cada um. Vimos que cada uma destas diferentes formas de projeção proporcionam benefícios e prejuízos particulares na transposição da esfera ao plano. Além disso, expusemos alguns conceitos e demonstrações matemáticas que fundamentam as propriedades verificadas. A partir do exposto, verificamos que é possível investigar e interpretar, simultaneamente, dados geográficos e propriedades matemáticas. Para efeito de incitação e curiosidade, mencionamos algumas teorias matemáticas avançadas abrangidas na cartografia, as vezes fazendo uma contextualização histórica das mesmas, no sentido de destacar a evolução do processo científico. Podemos destacar ainda que as habilidades e competências das quais o aluno se apropria para interpretar mapas podem ser as mesmas usadas na interpretação de gráficos e planilhas, e que os mecanismos de compreensão de cartas geográficas se aplica a compreensão do espaço real terrestre. De modo equivalente, o senso de localização de uma coordenada sobre o mapa se estende ao da localização no espaço que o circunda. Percebemos que, por envolver questões estratégicas, políticas e sociais, muitas escolhas e adequações para o uso da matemática se fazem necessárias. Isso também evidencia a aplicabilidade da matemática às ciências humanas, mostrando a matemática como instrumento de modelagem para várias questões das ciências sociais. Por fim, constatamos que, trabalhada adequadamente, a cartografia constitui-se em elemento lúdico, motivador e enriquecedor para a efetivação do processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos dos mais diversos níveis de ensino, em especial para o Ensino Básico, além de significar uma interessante opção para a abordagem interdisciplinar, abrangendo desde a matemática e a geografia, diretamente relacionados, até história e informática.

Referências Bibliográficas

[1] **BAIMA, Edem Assunção.** *Projeção de Mercator.* 2014. 46f. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2014.

[2] **BRITO, Gilmar Alves.** *A geometria do globo terrestre: uma proposta de trabalho interdisciplinar entre matemática e geográfia.* 2017.83f. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2017.

[3] **CARMO, Manfredo Perdigão do**. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*/Manfredo Perdigão do Carmo. –4. ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[4] **IBGE, Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.** Disponível em:<https://ww2.ibge.gov.br/home/geociencias/cartografia/manual_nocoes/representacao.html>. Acesso em 20 de Outubro de 2018.

[5] **LIMA, Elon Lages.** *Alguns problemas clássicos sobre grafos.* Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 12, p. 36-42, 1988.

[6] **LIMA, Elon Lages.** *Curso de Análise vol.2*/ Elon Lages Lima. 11.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[7] **ROCHA, Maria Lúcia Pessoa Chaves.** *Matemática e Cartografia: Como a Cartografia pode Contribuir no Processo de Ensino-Aprendizagem da Matemática?*. 2004. 128f. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Pará, Belém, 2004.

[8] **SOUSA, Lurdes**. *O Teorema das Quatro Cores.* Disponível em: http://www.ipv.pt/millenium/Millenium24/12.pdf. Acesso em 20 de Outubro de 2018.

[9] **TEIXEIRA DE FREITAS, Jeferson.** *Projeções, Mapas e GPS: algumas aplicações na educação básica.* 2017. 81f. Dissertação de Mastrado – Universidade de Brasília, 2017.