



Carlos Henrique da Silva Vieira

Trajетórias exóticas e experimentos de interferência com ondas de matéria

Teresina - PI
28 de Fevereiro de 2019

Carlos Henrique da Silva Vieira

Trajетórias exóticas e experimentos de interferência com ondas de matéria

Dissertação de mestrado apresentada ao departamento de Física da Universidade Federal do Piauí, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Irismar Gonçalves da Paz

Universidade Federal do Piauí - Departamento de Física

Teresina - PI
28 de Fevereiro de 2019

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial de Ciências da Natureza - CCN

V657t Vieira, Carlos Henrique da Silva.
 Trajetórias exóticas e experimentos de interferência com
 ondas de matéria / Carlos Henrique da Silva Vieira. –
 Teresina: 2019.
 81 f.: il. color

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí,
Centro de Ciências da Natureza, Pós-graduação em Física,
2019.

Orientador: Prof. Dr. Irismar Gonçalves da Paz.

1. Física. 2. Matéria Condensada. 3. Experimento de
Fenda Tripla e Dupla. 4. Trajetórias Exóticas. I. Título.

CDD 530.41

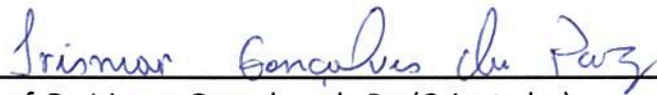
Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes CRB3-1461

“Trajetórias exóticas e experimentos de interferência com ondas de matéria”

Carlos Henrique da Silva Vieira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Natureza - CCN/UFPI.

Comissão Julgadora:



Prof. Dr. Irismar Gonçalves da Paz (Orientador)



Prof. Dr. José Pimentel de Lima/UFPI



Prof. Dr. José Geraldo Gonçalves de Oliveira Júnior-UESC-Ba

Aprovada em 28/02/2019

“ O todo sem a parte não é todo, a parte sem o todo não é parte, mas se a parte o faz todo, sendo parte, não se diga, que é parte, sendo todo.”

Gregório de Matos

Agradecimentos

Assim como no poema de Gregório de Matos, gostaria de agradecer à Deus por ser a parte fundamental em tudo na minha vida. Em segundo, não poderia deixar de destacar os sinceros agradecimentos ao meu orientador Prof. Dr. Irismar Gonçalves da Paz, por todos os ensinamentos, oportunidades e amizade durante minha graduação e mestrado. Agradeço à toda minha família, meus avós, minhas irmãs e primos, por sempre me apoiarem. Não poderia deixar de exaltar, os incontáveis esforços de minha mãe Suêly Maria, meu padrasto Newton Rios, e do meu pai Carlos Bedson, para que eu continuasse sempre no caminho do bem, e poder me dedicar o que amo fazer. Agradecer à minha namorada, Railine Ferry, por todo carinho, incentivo e compreensão durante todo o tempo. Manifesto minha gratidão a todos os professores do departamento de física da UFPI. Em especial, ao Prof. Dr. José Pimental de Lima, por excelentes aulas ministradas além do seu profundo comprometimento com o laboratório de iniciação científica (LIC), o qual fui integrante durante 3 anos. Saliento meus agradecimentos ao Prof. Miguel Arcanjo Costa, pelos primeiros ensinamentos na academia de física. Frequentemente é dito que são nas dificuldades que encontramos os verdadeiros amigos. Durante esses anos no departamento de física, a história não foi diferente. Serei eternamente grato aos leais amigos, que fizeram parte dessa árdua jornada onde passamos por dias de lutas e glórias. Dentre muitos, Fabrício Lustosa, Lucas Marinho, Oziel Ribeiro e João Carlos. Agradeço à secretária e os funcionários da pós-graduação em Física, por sempre estarem dispostos a nos ajudar no que fosse necessário. Agradeço à UFPI pelo espaço físico e a CAPES pelo imprescindível apoio financeiro e logístico. Portanto, de forma geral agradeço a todos que direto ou indiretamente me ajudaram e compartilham das minhas conquistas.

Resumo

Nesse trabalho, estudamos aspectos teóricos da inclusão de caminhos menos prováveis, trajetórias exóticas, em experimentos de interferência com ondas de matéria. Diante disso, revisamos a literatura das integrais de caminho de Feynman que fornecem o suporte para a existência desse tipo de amplitude de probabilidade em processos de interferometria. Inicialmente, propomos um modelo simples para estudar os efeitos da fase de Gouy no experimento de fenda tripla quando caminhos exóticos são considerados. Nessas perspectivas, demonstramos que no padrão de interferência da fenda tripla, a diferença de fase de Gouy é imprescindível na determinação do parâmetro de Sorkin, esse que é utilizado para quantificar os efeitos físicos de caminhos menos prováveis. De posse das funções de onda, calculamos o parâmetro de Sorkin κ e revelamos que num estudo onde caminhos exóticos são incluídos no princípio da superposição, a diferença de fase de Gouy não pode ser negligenciada. Partindo da definição do parâmetro de Sorkin da literatura, que foi inicialmente definido na fenda tripla, seria impossível utilizar essa grandeza para indicar o efeito de caminhos exóticos na fenda dupla. Por outro lado, em nosso trabalho mostramos que é possível utilizar as intensidades, bem como as franjas de visibilidade, em pontos específicos da tela de detecção para evidenciar os efeitos de caminhos exóticos no experimento de fenda dupla. Nesse caso, consideramos a intensidade relativa, na posição $x = 0$, como função da distância da fenda ao anteparo, foi possível definir uma visibilidade totalmente oriunda de caminhos exóticos. Nessa posição, fomos capazes de escrever o parâmetro de Sorkin em função da visibilidade e das fases axiais, que incluem a fase de Gouy. Diante disso, temos a possibilidade de atestar a existência de caminhos menos prováveis na fenda dupla, medindo desvios da unidade das na visibilidade das franjas. Em busca de aumentar o efeito da contribuição de caminhos exóticos, nós mostramos que no regime de Fresnel, ou regime intermediário, escolhendo adequadamente um conjunto de parâmetros, a fenda dupla pode servir como um experimento capaz de produzir uma significativa amplificação do parâmetro de Sorkin κ .

Palavras-Chave: Experimentos de fenda tripla e dupla, trajetórias exóticas, fase de Gouy, parâmetro de Sorkin, visibilidade das franjas.

Abstract

In this work, we studied the theoretical aspects of less plausible paths, exotic trajectories, on interference experiments with matter waves. Therefore, we reviewed Feynman's integral pathway literature which provides all support for the existence of this type of probability amplitude in interferometry procedures. Initially, we propose a simple model to study the effects of Gouy's phase in a triple slit experiment considering non-classical paths. Under these perspectives, we demonstrated that in a standard interference triple slit, the difference on the Gouy's phase is crucial to determinate Sorkin's parameter, which is used to quantify the physical effects of exotic trajectories. Possessing the function waves, we calculated Sorkin's parameter κ and unveiled that in a study where exotic trajectories are included in a superposition principle, the difference on Gouy's phase can't be ignored. As for the definition of Sorkin's parameter literature, which was initially established on a triple slit, it would be impossible to use this magnitude to indicate the effects of exotic trajectories in a double slit. On the other hand, in this paper, we show that it is possible to use the intensity as well as fringe visibility at specific locations on the detection screen to highlight the effects of non-classical paths on a double slit experiment. In this case, we consider the relative intensity, in the position $x = 0$, as a function of the distance from the slit to the screen, it was possible to define a visibility exclusively originated from non-classical paths. In this position, we were able to write Sorkin's parameter as a visibility function and axial phases, which include Gouy's phase. Consequently, we have the possibility to verify the existence of exotic trajectories on a double slit, measuring a value different from 1 for the fringe visibility. In a quest of increasing the contribution of exotic trajectories, we showed that on a Fresnel regime, or intermediate regime, choosing a set of parameters properly, a double slit can count for an experiment capable of producing a substantial amplification in Sorkin's parameter κ .

Keywords : double and triple slits, exotic trajectories, Gouy's phase, Sorkin's parameter, fringe of visibility.

Sumário

Sumário	vii
Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
2 A fase de Gouy	4
2.1 Introdução	4
2.2 Origem física da fase de Gouy	4
3 Integrais de caminho de Feynman	7
3.1 Introdução	7
3.2 Ação clássica e o princípio de Hamilton	8
3.2.1 Cálculo da ação para uma partícula livre	10
3.2.2 Cálculo da ação para o Oscilador harmônico	11
3.3 Formalismo da Integral de caminho	12
3.3.1 Trajetórias não clássicas	13
3.3.2 A soma sobre todos os caminhos	13
3.3.3 Eventos que ocorrem em sucessão	16
3.3.4 Propagador da partícula livre via integral de caminho	17
3.4 Fenda dupla via integrais de caminho de Feynman	18
3.4.1 Fenda dupla com aberturas do tipo janela	21
3.4.2 Fenda dupla com aberturas do tipo Gaussianas	23
4 Fase de Gouy e trajetórias exóticas no experimento de fenda tripla	27
4.1 Introdução	27
4.2 Trajetórias exóticas no experimento de fenda tripla	28
4.3 Princípio da superposição e trajetórias exóticas	30

4.4	Quantificando o efeito de trajetórias exóticas via parâmetro de Sorkin	32
4.5	Resultados e discussões considerando ondas de elétrons na fenda tripla	33
5	Trajetoórias exóticas no experimento de fenda dupla com ondas de matéria	37
5.1	Introdu�o	37
5.2	Experimento de fenda dupla com trajetórias exóticas	38
5.3	Parâmetro de Sorkin na fenda dupla	41
5.4	Visibilidade das franjas de interferência e parâmetro de Sorkin	44
5.5	Regime de Fresnel e trajetórias exóticas	47
5.6	Amplifica�o do parâmetro de Sorkin no regime de Fresnel	48
6	Conclusão	50
7	Perspectivas	51
A	Integrais Gaussianas, a fórmula de Parseval e produto infinito de Euler	53
B	Propagador do oscilador harmônico via integral de caminho	55
C	Constantes físicas do experimento de fenda tripla	58
D	Constantes físicas do experimento de fenda dupla	62
	Referências Bibliográficas	66

Lista de Figuras

2.1	Desvio de fase de Gouy, em função da distância de propagação, para uma onda eletromagnética se propagando de $-\infty$ a $+\infty$. Sendo, $z_R = \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}$, o comprimento de Rayleigh, que depende exclusivamente da largura do feixe ω_0 e do comprimento da onda utilizada λ	5
2.2	Interpretação geométrica da fase de Gouy. Frentes de onda, a) uma onda plana; b) uma onda esférica; c) um feixe gaussiano. Ref.[17].	6
3.1	Possíveis caminhos para o deslocamento de a até b	7
3.2	A função $\bar{x}(t)$ é o caminho que torna o funcional S um extremo. As funções vizinhas $x(t, \alpha)$ anulam-se nos extremos e podem estar próximas de $\bar{x}(t)$, mas não são caminhos extremos.	9
3.3	$\bar{x}(t)$ é a trajetória clássica para qual a ação é mínima. Uma pequena variação $\delta^1 x(t)$ não altera a ação em primeira ordem e ainda contribuem de forma significativa. Porém, a medida que as variações são mais distantes da trajetória clássica, isto é, $\delta^2 x(t)$ e $\delta^3 x(t)$, tais contribuições tornam-se cada vez mais desprezíveis.	13
3.4	Soma de Riemann para uma função $f(x)$, onde h representa o espaçamento entre duas abscissas x_i e x_{i+1}	14
3.5	Discretização da trajetória entre o ponto $\vec{x}_0(t_0)$ e $\vec{x}_N(t_N)$. Em cada caminho intermediário gasta um tempo ϵ para ir de um ponto $\vec{x}_i(t_i)$ ao seu sucessor $\vec{x}_{i+1}(t_{i+1})$	14
3.6	Eventos que ocorrem em sucessão temporal.	16
3.7	Descrição experimental da fenda dupla. Considerando uma fonte coerente de baixa intensidade, as partículas se propagam por uma distância D e L , antes e depois da fenda respectivamente. Já as fendas possuem uma largura $2a$, e estão separadas centro a centro por um distância $2b$. As curvas vermelhas, representam a amplitude de probabilidade da partícula que sai da fonte e chega no anteparo.	19

3.8	Curvas de interferência em função da distância na dela de detecção em unidades da largura da fenda a . Escolhendo os seguintes valores para o numero de Fresnel (a) $N_F = 0.001$, (b) $N_F = 0.0015$, (c) $N_F = 0.12$, (d) $N_F = 6$ [25].	22
3.9	A largura efetiva dessa função está relacionada com a distância a . Para esse tipo de função, aproximadamente dois terços da área abaixo da curva estão entre $2a$ e $4a$. A probabilidade de determinar o elétron em uma posição x é proporcional à $[F(\beta)]^2$	23
3.10	Representação da difração de um elétron através de uma fenda Gaussiana. Sendo $2a$ a largura da fenda, e b sua posição em relação a origem, ver Fig.3.7.	24
3.11	Representação do padrão de interferência normalizada, isto é, dividida pelo valor em $x = 0$ de um elétron através de uma fenda dupla descrita por funções Gaussianas. Sendo $2a$ a largura de cada fenda, e $2b$ a distância centro a centro das fendas, ver Fig.3.7.	25
4.1	Experimento de fenda tripla com pacote de onda Gaussiano, de comprimento inicial transversal σ_0 produzido por uma fonte S totalmente coerente, sendo t o tempo de propagação até a fenda tripla, e τ o tempo da fenda ao detector D . As fendas são funções Gaussianas que possuem a meia largura transversal β . . .	28
4.2	Princípio da superposição na fenda dupla e diferentes configurações experimentais	31
4.3	Possíveis caminhos exóticos na fenda dupla.	31
4.4	(a) Intensidade normalizada como função de x . (b) Influência da fase de Gouy no parâmetro de Sorkin em função de x . Na curva vermelha nós consideramos e na curva preta negligenciamos a fase de Gouy. (c) Comportamento simétrico de κ após a inclusão do caminho simétrico Ψ_{321}	34
4.5	Parâmetro de Sorkin κ multiplicado por uma potência de 10^8 em função de x e τ com t com o tempo pré-fenda t fixo. Existe um máximo em torno de $x = 0$. . .	35
4.6	(a) Fase de Gouy em função de τ , para t fixo.(b) Valor de κ em função de τ para $x = 0$. Na linha sólida consideramos e linha pontilhada desconsideramos a diferença de fase de Gouy.	36
5.1	Trajetória exótica no experimento de fenda dupla. Partículas são emitidas de uma fonte coerente S , t e τ representam os tempos de propagação antes e depois das fendas, respectivamente, e as fendas são funções Gaussianas de largura β separadas por uma distância d . A linha verde descreve uma trajetória exótica e a linha preta os caminhos não exóticos.	39

5.2	(a) Intensidade relativa, (b) Parâmetro de Sorkin como função de x . A magnitude do parâmetro de Sorkin é da ordem de 10^{-6}	43
5.3	(a) Parâmetro de Sorkin e (b) franjas de visibilidade como uma função de z_{τ} . A magnitude do parâmetro de Sorkin é 10^{-6} , semelhante quando em função de x . .	46
5.4	Comportamento do parâmetro de Sorkin, de nosso modelo, em função da distância da fenda dupla ao anteparo, considerando nêutrons submetidos aos parâmetros de fenda tripla utilizados para o fóton na Fig.4 da Referência [33].	47
5.5	(a) Parâmetro de Sorkin e (b) franjas de visibilidade como função de z_{τ} . Observamos um aumento no parâmetro de Sorkin e nas franjas de visibilidade, de pelo menos três ordens de grandeza para alguns valores de z_{τ}	48

Capítulo 1

Introdução

A teoria quântica, embora repleta de postulados que são contraintuitivos e que não possuem analogias com o mundo clássico, tem se mostrado ser uma das áreas mais bem sucedidas da física. Seja na descrição de aspectos fundamentais da natureza, bem como no suporte teórico para o desenvolvimento de modernos dispositivos tecnológicos, regidos por leis da Mecânica Quântica. Se o estado quântico de uma partícula é descrito por uma função de onda $\Psi(r, t)$, a regra de Born nos diz que a densidade de probabilidade de determinar a posição r em um instante de tempo t , será dada pelo módulo quadrado da função de onda $\Psi(r, t) = |\Psi(r, t)|^2$ [1].

Ainda que seja um pilar da física quântica, poucos eram os experimentos que buscassem testar a violação da regra de Born. Somente em 2010, Sinha e colaboradores mediram o parâmetro de Sorkin [2], que quantifica a interferência não vinda de pares em um experimento de fenda tripla [3]. Em outras palavras, encontrar um valor não nulo para o parâmetro de Sorkin poderia indicar uma violação na regra de Born. No experimento de Sinha, assim como em outros experimentos, foram encontrados um resultado nulo para o parâmetro de Sorkin dentro do erro experimental, e foi concluído que não existe violação.

No entanto, simulações numéricas das equações de Maxwell usando a técnica de diferenciais finitas no domínio do tempo (FDTD), mostraram que a hipótese de assumir que a função de onda de multifendas é simplesmente a superposição de funções oriundas das configurações com somente uma fenda, é apenas aproximada [4]. De outra forma, o princípio da superposição deveria ser corrigido. A forma de corrigir esse postulado fundamental da física, seria utilizar a teoria das integrais de caminho de Feynman para incluir mais caminhos na superposição.

Nesse formalismo, existe a contribuição de funções de ondas que podem passar mais de uma vez em uma fenda, antes de irem para a tela de detecção. Esses caminhos são conhecidos como, trajetórias exóticas, e embora sejam menos prováveis, ainda contribuem de forma finita para a intensidade do padrão de interferência em experimentos de interferometria [5]. Um dos

objetivos desse trabalho foi estudar aspectos teóricos da inclusão de caminhos menos prováveis, trajetórias exóticas, em experimentos de interferência com ondas de matéria.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: No capítulo.2, discutimos a origem, a interpretação geométrica, e as aplicações físicas da fase de Gouy. No capítulo.3, tratamos sobre o formalismo das integrais de caminho de Feynman, sobre a dedução dos propagadores da partícula livre e do oscilador harmônico por meio do cálculo da ação clássica. Apresentamos as propriedades matemáticas dos propagadores, também discutimos quais as diferenças entre os processos de interferência na fenda dupla, quando tratamos as fendas por funções do tipo Heaviside e Gaussianas.

No capítulo 4, propomos um modelo simples para estudar os efeitos da fase de Gouy no experimento de fenda tripla quando caminhos exóticos são considerados. Nessas perspectivas, demonstramos que no padrão de interferência da fenda tripla, a diferença de fase de Gouy é imprescindível na determinação do parâmetro de Sorkin, esse que é utilizado para quantificar os efeitos físicos de caminhos menos prováveis. Por meio dos propagadores de Feynman, realizamos a evolução temporal de um pacote Gaussiano de ondas de matéria produzido por uma fonte totalmente coerente. No cálculo das evoluções através das fendas, aqui também tratadas por funções Gaussianas, desconsideramos a interação das partículas com o ambiente, ou seja, consideramos o problema livre dos efeitos de decoerência. Encontramos de forma inteiramente analítica as expressões que descrevem as funções de ondas de caminhos exóticos e não exóticos Ψ_{et} , $\Psi_{1,2,3}$ na fenda tripla, respectivamente. De posse das funções de ondas calculamos o parâmetro de Sorkin κ e revelamos que num estudo onde caminhos exóticos são incluídos no princípio da superposição, a diferença de fase de Gouy não pode ser negligenciada.

No capítulo 5, utilizamos o experimento de Young para indicar a existência de trajetórias exóticas na fenda dupla. Mostramos que é possível utilizar as intensidades, bem como as franjas de visibilidade, em pontos específicos da tela de detecção para evidenciar os efeitos de caminhos exóticos. Para esse propósito, consideramos a intensidade relativa na posição $x = 0$, como função da distância da fenda ao anteparo, e foi possível definir uma visibilidade totalmente oriunda de caminhos exóticos. Nessa posição, fomos capazes de escrever o parâmetro de Sorkin em função da visibilidade e das fases axiais, que incluem a fase de Gouy. Diante disso, temos a possibilidade de atestar a existência de caminhos menos prováveis na fenda dupla, medindo desvios da unidade das franjas de visibilidade.

Em busca de aumentar o efeito da contribuição de caminhos exóticos, nós mostramos que no regime de Fresnel (regime intermediário), escolhendo adequadamente um conjunto de parâmetros, a fenda dupla pode servir como um experimento capaz de produzir uma significativa amplificação do parâmetro de Sorkin κ .

No capítulo 6, ordenamos nossa principais conclusões. No capítulo 7, esboçamos nossas perspectivas para trabalhos futuros, considerando o efeito de trajetórias exóticas e experimentos de interferência com ondas de matéria.

Capítulo 2

A fase de Gouy

2.1 Introdução

O desvio de fase adquirido por uma onda de luz convergente ao ser focalizada, foi descoberto teoricamente e comprovado experimentalmente por L. Gouy na década de 1890 [6]-[7]. Na literatura, o desvio de fase de Gouy também é conhecida como uma anomalia de fase. A Fig. 2.1, mostra o desvio adicional de π adquirido por uma onda eletromagnética após passar por um processo de focalização em uma propagação de $-\infty$ a $+\infty$.

Aplicações da fase de Gouy em ondas eletromagnéticas, abrem as possibilidades de analisar sistemas físicos interessantes. Por exemplo, a fase de Gouy deve ser levada em conta na determinação da frequência de ressonância em cavidades laser [8], na geração de harmônicos de alta ordem (HHG) [9]. Além disso, tal fase desempenha um papel importante na evolução de feixes vortex de luz [10] bem como em feixes de elétrons que adquirem uma fase de Gouy adicional dependente do valor absoluto do momento angular orbital [11].

2.2 Origem física da fase de Gouy

Apesar da fase de Gouy ter sido comprovada experimentalmente a mais de um século, aproximadamente 128 anos, ainda hoje diversas são as teorias para explicar sua origem física. Alguns autores, atribuem sua origem como uma consequência do princípio da incerteza de Heisenberg [12]-[13], outros com a fase geométrica de Berry [14]-[15], alguns ainda interpretam essa fase como um propriedade intrínseca dos feixes gaussianos [16].

A fase de Gouy, pode ser interpretada como sendo a fase relativa entre um estado que sofreu um confinamento espacial transversal, por focalização ou por difração através de pequenas aberturas, e um dado estado de referência, ambos se propagando na mesma direção. Na Fig.

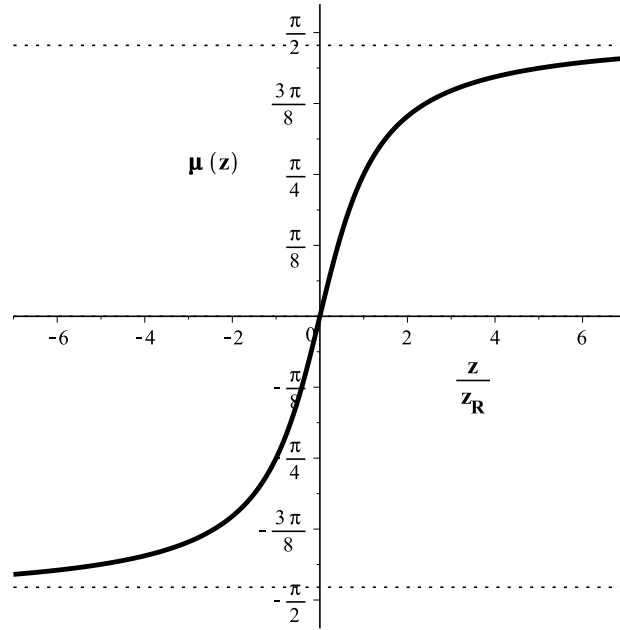


Fig. 2.1: Desvio de fase de Gouy, em função da distância de propagação, para uma onda eletromagnética se propagando de $-\infty$ a $+\infty$. Sendo, $z_R = \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda}$, o comprimento de Rayleigh, que depende exclusivamente da largura do feixe ω_0 e do comprimento da onda utilizada λ .

2.2, podemos ver uma interpretação geométrica para o deslocamento de fase de Gouy. Temos as representações das frentes de onda, a) uma onda plana; b) uma onda esférica; c) um feixe gaussiano. As linhas tracejadas, mostram um adiantamento de fase do feixe gaussiano em comparação com uma onda plana ou uma onda esférica. Este adiantamento de fase, ao longo da direção de propagação, é a fase de Gouy, que uma das frentes de onda (estado gaussiano) ganha em relação à frente de onda plana [17].

Embora o efeito da fase de Gouy seja rotineiramente apresentado como uma propriedade dos feixes gaussianos [16], segundo Feng e colaboradores [13] o deslocamento de fase de Gouy está presente em todo e qualquer tipo de onda que sofra um confinamento espacial transversal, seja ele por focalização ou por difração em pequenas aberturas. Quando uma onda é focalizada, o desvio de fase de Gouy associada com a propagação de $-\infty$ a ∞ é igual a $\pi/2$ para ondas cilíndricas (focalização em uma dimensão), e π para ondas esféricas (focalização bidimensional), Fig.2.1.

No contexto de ondas de matéria não relativística, a fase de Gouy foi pioneiramente explorada teoricamente por I. G. da Paz e colaboradores [18]-[19], seguido por realizações experimentais dos condensados de Bose-Einstein [11], feixes vórtex de elétrons [10]. Recentemente, I. G. da Paz também mostrou que uma solução da equação de Klein-Gordon apresenta um termo

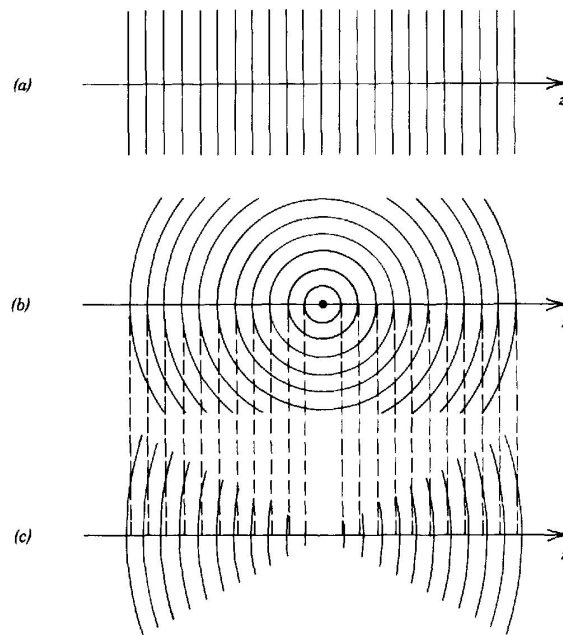


Fig. 2.2: Interpretação geométrica da fase de Gouy. Frentes de onda, a) uma onda plana; b) uma onda esférica; c) um feixe gaussiano. Ref.[17].

de fase de Gouy, o que abre o caminho para buscarmos efeitos relativísticos [20]. As antenas para detecção de ondas de gravidade, são baseadas em interferometria usando laser onde a fase de Gouy é essencial [21]. A fase de Gouy em ondas de matéria tem aplicações interessantes, por exemplo, ela funciona como um importante conversor de modo em informação quântica [19], dentre outras aplicações, a fase de Gouy influencia na mancha de Poisson para ondas de matéria como mostrado em [22].

No contexto de ondas de matéria, a determinação da fase de Gouy está condicionada ao fato de termos que tratar com o problema da incoerência do feixe inicial, evitado em ondas de luz pelo feixe de laser. Diante disso, para ondas de matéria, mostrou-se que a mudança de fase de Gouy é de $\pi/4$, e que esse desvio depende do comprimento da fenda assim como dos tempos de propagação antes e depois da fenda [18]. Nesse trabalho, iremos confinar ondas de matéria através de fendas e analisar os efeitos da fase de Gouy no padrão de interferência. Essa interferência, possui a contribuição de caminhos menos prováveis chamados de trajetórias exóticas mas que são inteiramente previstas pela teoria das integrais de caminho de Feynman.

Capítulo 3

Integrais de caminho de Feynman

3.1 Introdução

Nesse capítulo, iremos introduzir o arcabouço teórico das integrais de caminho de Feynman juntamente com o conceito das trajetórias não clássicas. Tal abordagem, nos proporciona uma análise alternativa da Mecânica Quântica além das já consolidadas teorias de Schrödinger e Heisenberg. Diante disso, é perspicaz relembramos alguns conceitos da Física Clássica. Em uma dimensão, o conceito de trajetória pode ser entendido como um função que especifica em cada instante de tempo a coordenada x da partícula, $x = x(t)$. Por exemplo, supondo que um partícula inicia seu movimento em t_a em um ponto x_a e se translada até o ponto x_b no instante t_b . Classicamente, poderíamos apenas dizer que o objeto se moveu do ponto a para o ponto b . Na Mecânica Quântica, uma vez que o princípio da incerteza nos impede de falar em trajetória, de que maneira podemos tratar o traslado de um objeto quântico entre os pontos a e b ?.

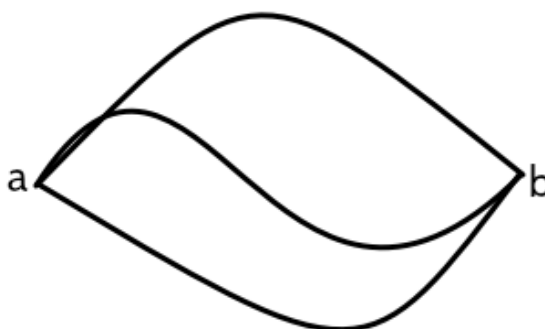


Fig. 3.1: Possíveis caminhos para o deslocamento de a até b .

Em contraste com a Física Clássica, na Mecânica Quântica o que existe são probabilidades

de a partícula sair do ponto a e chegar no ponto b , em um dado instante de tempo. Diversos são os caminhos, isto é, varias são as probabilidades dessa translação ocorrer Fig.3.1. Feynman atribuir para cada caminho uma amplitude de probabilidade, afirmando que a probabilidade de um evento ocorrer é dado pelo soma de todas as amplitudes de probabilidades, isto é, a soma de todos os caminhos. Esse procedimento dá origem ao propagador de Feynman $K(b, a)$ [5].

3.2 Ação clássica e o princípio de Hamilton

Diariamente, os físicos buscam explicar os fenômenos naturais utilizando uma quantidade mínima de princípios físicos. Dentre tais conceitos fundamentais existe o chamado princípio de Hamilton, também conhecido como princípio de mínima ação

1 (Princípio de Hamilton) *De todos os caminhos possíveis ao longo dos quais um sistema dinâmico pode mover-se de um ponto a outro dentro de um intervalo de tempo especificado, o caminho real seguido é aquele que minimiza a integral no tempo da diferença entre as energias cinética e potencial.*

Assim, a integral no tempo da Lagrangiana é chamada de ação clássica

$$S = \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L}(x, \dot{x}; t) dt, \quad (3.1)$$

onde a Lagrangiana é definida como a diferença entre a energia cinética e potencial do sistema $\mathcal{L} = T - U$. Por outro lado, em termos da ação clássica, o princípio de Hamilton pode ser reescrito na forma

$$\delta S = 0. \quad (3.2)$$

A equação (3.2) garante apenas que a integral da Lagrangiana no tempo possui um extremo, não necessariamente um mínimo. Contudo, em quase todas as aplicações importantes em dinâmica, a condição de mínimo se manifesta com maior frequência. A grandeza S deve ser calculada para todos os caminhos, porém somente a trajetória clássica produz uma ação mínima. Sob a ótica do princípio de mínima ação, é possível afirmar que dentre todos os caminhos possíveis (ver Fig.3.1) a trajetória escolhida $\bar{x}(t)$ será aquela em que a ação S tem um extremo, ou seja, S não varia em primeira ordem quando $\bar{x}(t)$ é modificado suavemente

$$\delta S|_{x=\bar{x}} = \delta \int \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t); t)|_{x=\bar{x}} = 0, \quad (3.3)$$

onde $\bar{x}(t)$ é a trajetória clássica e $\delta S|_{x=\bar{x}}$ é a variação do funcional em 1^a ordem de $\delta x(t)$ em torno do seu valor $S|_{x=\bar{x}}$. As variações da trajetória clássica

$$\delta x(t) = x(t) - \bar{x}(t), \quad (3.4)$$

devem estar condicionadas à imposição de extremos fixos, ver Fig.3.2

$$\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0. \quad (3.5)$$

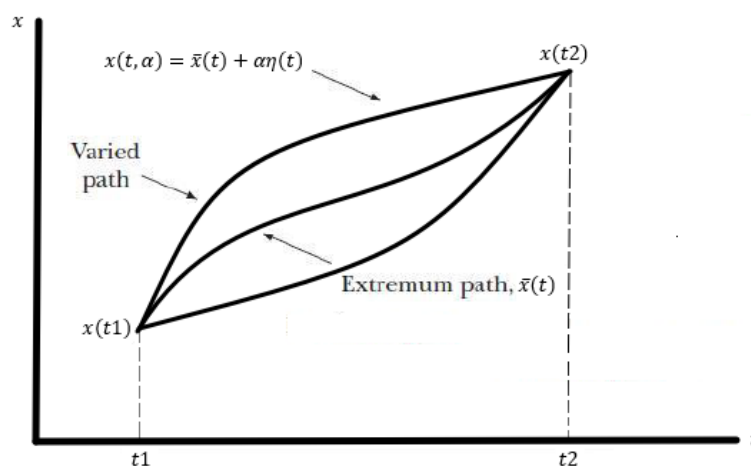


Fig. 3.2: A função $\bar{x}(t)$ é o caminho que torna o funcional S um extremo. As funções vizinhas $x(t, \alpha)$ anulam-se nos extremos e podem estar próximas de $\bar{x}(t)$, mas não são caminhos extremos.

O objetivo é mostrar que as trajetórias que tornam nula a variação em 1^a ordem da ação são justamente as que satisfazem a equação de Euler-Lagrange [5]. Uma vez que S tem um valor estacionário para a trajetória clássica em relação a quaisquer outras trajetórias vizinhas, a variação deve ser zero em relação a algum conjunto de caminhos vizinhos por um parâmetro infinitesimal α . O conjunto de tais caminhos pode ser denotado por $x(t, \alpha)$, onde temos que $x(t, 0) = \bar{x}(t)$ representa a trajetória clássica

$$x(t, \alpha) = \bar{x}(t) + \alpha\eta(t), \quad (3.6)$$

sendo α o parâmetro a ser variado a fim de criar variações em torno da trajetória clássica e $\eta(t)$ uma função contínua e sem singularidades dentro do intervalo t_1 e t_2 , além de obedecer a relação $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$. Utilizando a representação paramétrica para o caminho clássico, é possível tratar a ação clássica como uma função ordinária do parâmetro α

$$S(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x(t, \alpha), \dot{x}(t, \alpha); t) dt, \quad (3.7)$$

lembrando que S deve ser um extremo para $\alpha = 0$, uma vez que $x(t, 0) = \bar{x}(t)$. Essa condição é expressa matematicamente por

$$\left. \frac{\partial S(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}. \quad (3.8)$$

Calculando-se as derivadas em relação ao parâmetro α , obtém-se

$$\frac{\partial S(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha} \right) dt, \quad (3.9)$$

integrando por partes o 2º termo do lado direito da equação (3.9), temos que

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha} dt = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \frac{\partial x}{\partial \alpha} dt, \quad (3.10)$$

a condição de extremos fixos, elimina o 1º termo do lado direito da equação (3.10), pois

$$\left. \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{t=t_1, t_2} = \eta(t) \Big|_{t=t_1, t_2} = 0,$$

portanto, substituindo a equação (3.10) na equação (3.9) encontra-se

$$\frac{\partial S(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \eta(t) \right] dt, \quad (3.11)$$

e finalmente, utilizando a condição (3.8) juntamente com a arbitrariedade das funções $\eta(t)$ mostramos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = 0, \quad (3.12)$$

essa, é a equação de Euler-Lagrange como nós havíamos comentado anteriormente.

3.2.1 Cálculo da ação para uma partícula livre

Com objetivo de proporcionar um melhor entendimento, calcularemos a ação sobre uma trajetória clássica $x_a(t_a)$ e $x_b(t_b)$ para uma partícula livre. A Lagrangeana da partícula livre possui somente o termo da energia cinética

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{x}^2, \quad (3.13)$$

utilizando a equação (3.1) e substituindo nela a Lagrangeana dada por (3.13), obtemos

$$S = \int_{t_a}^{t_b} \frac{m}{2} \dot{x}^2 dt = \frac{m}{2} \int_{t_a}^{t_b} \dot{x}^2 dt = \frac{m}{2} \left(\frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} \right)^2 \int_{t_a}^{t_b} dt = \frac{m}{2} \frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a}. \quad (3.14)$$

A equação (3.14) mostra a expressão para a ação de uma partícula livre. Utilizaremos tal equação para deduzir o propagador de uma partícula livre de forças através do formalismo das integrais de caminho.

3.2.2 Cálculo da ação para o Oscilador harmônico

A Lagrangeana do oscilador harmônico possui tanto o termo da energia cinética quanto o da energia potencial, com isso temos

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 - \omega^2 x^2), \quad (3.15)$$

da literatura é conhecido que a solução do oscilador harmônico pode ser dada como

$$x(t) = A \sin(\omega t), \quad (3.16)$$

e

$$\dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t), \quad (3.17)$$

a Lagrangeana, pode ser escrita em função da energia na forma

$$\mathcal{L} = \dot{x}p - E = m\dot{x}^2 - \frac{A^2 m \omega^2}{2} = mA^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) - \frac{A^2 m \omega^2}{2}, \quad (3.18)$$

nesse sentido, a ação pode ser escrita como

$$S = m\omega^2 A^2 \int_{t_a}^{t_b} \left(\cos^2(\omega t) - \frac{1}{2} \right) dt = \frac{A^2 m \omega}{2} (\sin(\omega t_b) \cos(\omega t_b) - \sin(\omega t_a) \cos(\omega t_a)), \quad (3.19)$$

multiplicando o numerador e o denominador da equação (3.19) por

$$\sin(\omega T) = \sin[\omega(t_b - t_a)] = \sin(\omega t_b) \cos(\omega t_a) - \sin(\omega t_a) \cos(\omega t_b), \quad (3.20)$$

e assumindo que $x_a = A \sin(\omega t_a)$ e $x_b = A \sin(\omega t_b)$, é possível mostrar que

$$S = \frac{m\omega}{2 \sin(\omega T)} [(x_a^2 + x_b^2) \cos(\omega T) - 2x_a x_b]. \quad (3.21)$$

A ação descrita através da equação (3.21), será útil para encontrarmos um propagador que descreve o movimento de uma partícula sujeita a um potencial do tipo do o oscilador harmônico (ver Apêndice B).

3.3 Formalismo da Integral de caminho

A motivação de Feynman foi explorar o princípio de Huygens da ótica ondulatória para construir um propagador quântico [5]. Nesse sentido, o método da integral de caminho baseia-se em descreve-se o propagador $K(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0)$, como uma soma de todas as amplitudes de probabilidade e para cada trajetória que liga os pontos (\vec{x}_0, t_0) e (\vec{x}, t) existe uma fase que esta diretamente relacionada com a ação clássica, isto é

$$K(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) = \sum_{\substack{\text{todos} \\ \text{caminhos}}} \Phi[x(t)], \quad (3.22)$$

onde $\Phi[x(t)]$ é a amplitude associada com a trajetória $x(t)$. A contribuição de cada trajetória tem uma fase proporcional a ação S . Todos as trajetórias contribuem para a amplitude total, não somente aquela cuja ação é um extremo, porém com fases distintas

$$\Phi[x(t)] = C \cdot e^{(i/\hbar)S[x(t)]}, \quad (3.23)$$

a constante C é escolhida de tal forma que K seja normalizado. A probabilidade $P(\vec{x}, \vec{x}_0)$ de irmos do ponto \vec{x}_0 ao ponto \vec{x} em um tempo t_0 a t será descrita por

$$P(\vec{x}, \vec{x}_0) = |K(\vec{x}, t, \vec{x}_0, t_0)|^2. \quad (3.24)$$

A expressão (3.22) que representa o propagador, é comumente escrita na forma na forma

$$K(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) = \int \mathcal{D}[x(t)] e^{(i/\hbar)S[x(t)]}, \quad (3.25)$$

em que $\mathcal{D}[x(t)]$ tem um caráter puramente formal, e significa integrar sobre todas as trajetórias $x(t)$ e com S sendo calculada ao longo de cada caminho $x(t)$, daremos mais detalhes dessa equação na próxima secção.

3.3.1 Trajetórias não clássicas

Olhando para a equação (3.23), vemos que todas os caminhos contribuem de alguma forma para a amplitude total. Por outro lado, no limite clássico em que as massas são grandes, a relação S/\hbar se torna muito grande. Assim, qualquer variação δx pequena em termos clássicos, fará com que S tenha uma variação muito grande frente a \hbar , provocando assim grandes mudanças de fases, os cossenos (parte real) e os senos (parte imaginária) das amplitudes de probabilidade oscilarão muito rápido entre valores positivos e negativos, tornando nula a contribuição de tais caminhos. Portanto, só restaram as contribuições de caminhos contidos na região bem próximas à $\bar{x}(t)$ onde a variação na ação é da ordem de \hbar (Fig.3.3). Tais caminhos limítrofes aos caminhos para qual a ação não se altera em 1^a ordem, recebem o nome de *trajetórias não clássicas*.

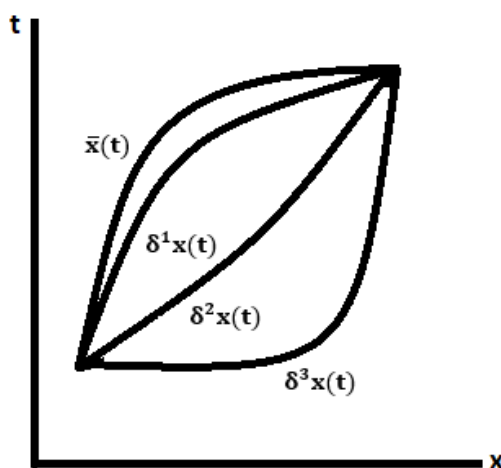


Fig. 3.3: $\bar{x}(t)$ é a trajetória clássica para qual a ação é mínima. Uma pequena variação $\delta^1 x(t)$ não altera a ação em primeira ordem e ainda contribuem de forma significativa. Porém, a medida que as variações são mais distantes da trajetória clássica, isto é, $\delta^2 x(t)$ e $\delta^3 x(t)$, tais contribuições tornam-se cada vez mais desprezíveis.

3.3.2 A soma sobre todos os caminhos

Em sua obra [5], R. Feynman utilizou a ideia da soma de Riemann para deduzir as integrais de caminho, como ilustrado na Fig.3.4 abaixo. Seja A a área abaixo de uma dada curva $f(x)$, de forma aproximada temos que

$$A \sim \sum_i f(x_i)h. \quad (3.26)$$

No limite em que $h \rightarrow 0$, a valor da área se torna exato

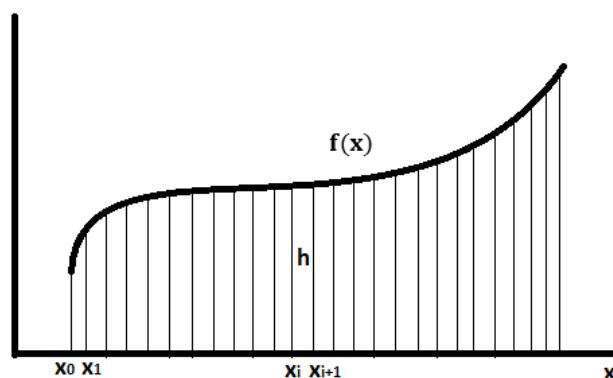


Fig. 3.4: Soma de Riemann para uma função $f(x)$, onde h representa o espaçamento entre duas abscissas x_i e x_{i+1} .

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} \left[h \sum_i f(x_i) \right]. \quad (3.27)$$

Com base nisso, vamos imaginar o mesmo princípio da soma de Riemann para deduzir as integrais de trajetória. Nesse sentido, teremos que somar todas as amplitudes referentes a todos os caminhos possíveis em N intervalos de tempo $\epsilon = t_{i+1} - t_i$.

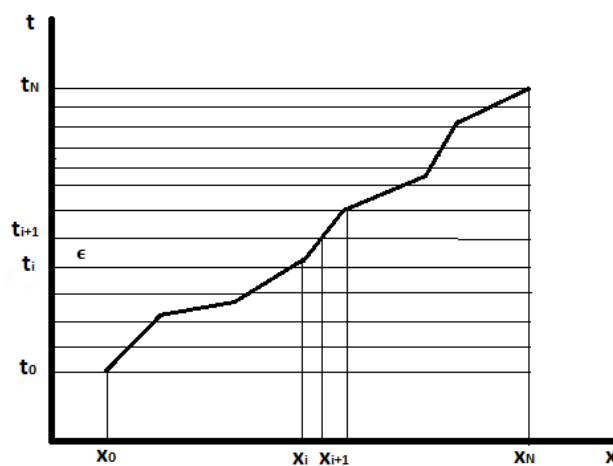


Fig. 3.5: Discretização da trajetória entre o ponto $\vec{x}_0(t_0)$ e $\vec{x}_N(t_N)$. Em cada caminho intermediário gasta um tempo ϵ para ir de um ponto $\vec{x}_i(t_i)$ ao seu sucessor $\vec{x}_{i+1}(t_{i+1})$.

Nesse limite, cada trajetória é representada por uma poligonal, como mostra a Fig.3.5. Sendo assim, a integral de trajetória de um ponto inicial $\vec{x}_0(t_0)$ ao ponto $\vec{x}_2(t_2)$, passando por

um ponto intermediário \vec{x}_1 , será de acordo com a equação (3.22)

$$K[\vec{x}_2(t_2), \vec{x}_0(t_0)] \sim \int \Phi[\vec{x}(t)] d\vec{x}_1, \quad (3.28)$$

onde $\Phi[\vec{x}(t)]$ depende implicitamente do ponto onde a trajetória passa $\vec{x}_1(t_1)$. Assim, a equação (3.28) descreve a soma de todas as amplitudes de probabilidade de uma partícula que sai do ponto $\vec{x}_0(t_0)$ e vai para o ponto $\vec{x}_2(t_2)$, passando por um ponto interposto \vec{x}_1 . Em seguida podemos estender a propagação até um outro ponto \vec{x}_3

$$K[\vec{x}_3(t_3), \vec{x}_0(t_0)] \sim \int \Phi[\vec{x}(t)] d\vec{x}_2, \quad (3.29)$$

agora $\Phi[\vec{x}(t)]$ depende de $\vec{x}_1(t_1)$ e $\vec{x}_2(t_2)$. Nessa perspectiva, após realizarmos um total de $N - 1$ propagações livres, chegaremos ao ponto final $\vec{x}(t)$, daí

$$K[\vec{x}(t), \vec{x}_0(t_0)] \sim \int \int \cdots \int \Phi[\vec{x}(t)] d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 \cdots d\vec{x}_{N-1}, \quad (3.30)$$

substituindo na equação (3.31) a equação (3.23), e fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, chegamos na seguinte equação

$$K[\vec{x}(t), \vec{x}_0(t_0)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{A} \int \int \cdots \int \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(\vec{x}, \vec{x}_0) \right] \frac{d\vec{x}_1}{A} \frac{d\vec{x}_2}{A} \cdots \frac{d\vec{x}_{N-1}}{A}, \quad (3.31)$$

onde $S(\vec{x}, \vec{x}_0)$ representa a ação ao longo do caminho especificado pelos pontos intermediários $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{N-1}$ e A é uma constante de normalização, que deve ser escolhida como

$$A = \sqrt{\frac{2\pi i \hbar \epsilon}{m}}, \quad (3.32)$$

para que a integral (3.31), seja convergente [5]. A fim de simplificar a notação, é conveniente definirmos

$$\mathcal{D}[\vec{x}(t)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{A^N} \prod_{k=1}^{N-1} d\vec{x}_k \right], \quad (3.33)$$

com isso, de forma compacta temos que

$$K[\vec{x}(t), \vec{x}_0(t_0)] = \int \left[\frac{i}{\hbar} S(\vec{x}, \vec{x}_0) \right] \mathcal{D}[\vec{x}(t)], \quad (3.34)$$

a equação (3.34), é a chamada *Integral de Caminho de Feynman* [5]. Nas próximas seções, utilizaremos essa equação para deduzir os propagadores da partícula livre e do oscilador harmônico (Apêndice B).

3.3.3 Eventos que ocorrem em sucessão

Aqui estamos interessados em mostrar como obter uma lei que descreva as amplitudes de probabilidade para eventos que ocorrem em sucessão.

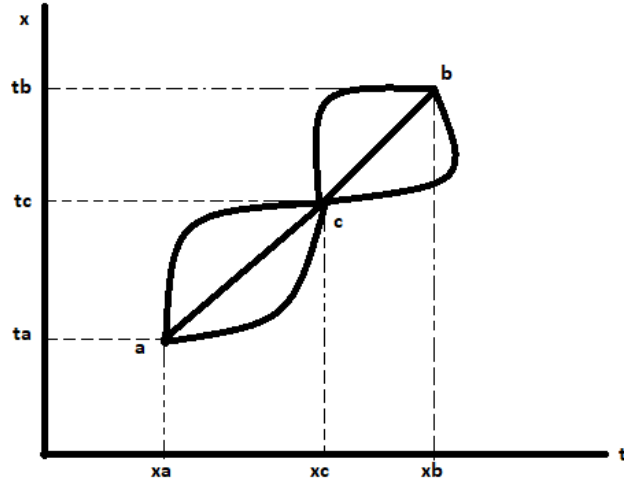


Fig. 3.6: Eventos que ocorrem em sucessão temporal.

Seja um ponto arbitrário $\vec{x}_c(t_c)$ entre $\vec{x}_a(t_a)$ e $\vec{x}_b(t_b)$, como deve se comportar a amplitude de probabilidade total para esses eventos que possuem uma sequência temporal? Partindo da equação (3.1), sabemos que nesse caso a ação torna-se

$$S[b, a] = S[b, c] + S[c, a], \quad (3.35)$$

isso também é uma consequência da Lagrangiana \mathcal{L} não depender de derivadas de segunda ordem em diante. Substituindo a ação composta equação (3.35) na equação para a integral de caminho (3.34), encontramos que

$$K(b, a) = \int \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(b, c) \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(c, a) \right] \mathcal{D}[\vec{x}(t)]. \quad (3.36)$$

Portanto vemos que é possível separar em duas partes a propagação de a até b , Fig.3.6. Na primeira parte estão as trajetórias que vão de $\vec{x}_a(t_a)$ a $\vec{x}_c(t_c)$, e na segunda estão as trajetórias de $\vec{x}_c(t_c)$ a $\vec{x}_b(t_b)$. A equação (3.36) nos diz então que a amplitude total é a soma das amplitudes de intermediárias. No entanto, é necessário somar sobre todos os valores possíveis para o ponto $\vec{x}_c(t_c)$ afim de obter a amplitude total de a até b .

$$K(b, a) = \int_{\vec{x}_c} K(b, c)K(c, a)d\vec{x}_c. \quad (3.37)$$

A equação (3.37) nos permite concluir que a amplitude de probabilidade para eventos que ocorrem sucessivamente no tempo se multiplicam [5]. Se continuarmos tal procedimento até que a escala de tempo seja dividida em N intervalos infinitesimais, passando pelos pontos intermediários $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{N-1}$, temos que

$$K(b, a) = \int_{\vec{x}_1} \int_{\vec{x}_2} \cdots \int_{\vec{x}_{N-1}} K(b, N-1)K(N-1, N-2) \cdots K(1, a)d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 \cdots d\vec{x}_{N-1}, \quad (3.38)$$

nesse sentido, é possível redefinir o propagador dado por (3.34) de uma forma alternativa, para uma propagação infinitesimal em ordem $\epsilon = t_{i+1} - t_i$

$$K(i+1, i) = \frac{1}{A} \exp \left[\frac{i\epsilon}{\hbar} \mathcal{L} \left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}, \frac{x_{i+1} - x_i}{2}, \frac{t_{i+1} + t_i}{2} \right) \right], \quad (3.39)$$

utilizando a regra de multiplicação das amplitudes de probabilidade para eventos em sucessão, temos que

$$\Phi[x(t)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \prod_{i=0}^{N-1} K(i+1, i). \quad (3.40)$$

Os resultados obtidos por meio das equações (3.38), (3.39) e (3.40) são os mesmos descritos pela integral de caminho definida em (3.34) [5].

3.3.4 Propagador da partícula livre via integral de caminho

Nessa secção iremos obter o propagador da partícula livre utilizando a definição das integrais de caminho juntamente com a ação descrita em (3.14). Portanto, com base nos resultados da secção anterior, temos que a propagação de a até b pode ser escrita como segue

$$K(b, a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \int \cdots \exp \left[\frac{im}{2\hbar \epsilon} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1})^2 \right] dx_1 \cdots dx_{N-1}, \quad (3.41)$$

uma vez que as integrais são independentes, visto que as amplitudes se multiplicam, podemos resolver a integral em x_1 primeiramente, assim iniciamos com $N = 2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right) \exp \left\{ \frac{-m}{2i\hbar \epsilon} [(x_2 - x_1)^2 + (x_1 - x_0)^2] \right\} dx_1,$$

utilizando o resultado da equação A.1 (apêndice A), temos que

$$\left(\frac{m}{2\pi i\hbar \cdot 2\epsilon}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{-m}{2i\hbar(2\epsilon)}(x_2 - x_0)^2\right], \quad (3.42)$$

em seguida, multiplicando o resultado por

$$\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{-m}{2i\hbar\epsilon}(x_3 - x_2)^2\right], \quad (3.43)$$

e integrando de forma semelhante, porém desse vez em x_2

$$\left(\frac{m}{2\pi i\hbar \cdot 3\epsilon}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{-m}{2i\hbar(3\epsilon)}(x_3 - x_0)^2\right], \quad (3.44)$$

repetindo o processo de integração por $n - 1$ vezes, obtem-se

$$K(b, a) = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar \cdot n\epsilon}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{-m}{2i\hbar(n\epsilon)}(x_n - x_0)^2\right]. \quad (3.45)$$

Finalmente, depois de $N - 1$ integrações e notando que $n\epsilon = t_b - t_a$, chegamos na seguinte equação para o propagador da partícula livre

$$K(b, a) = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar \cdot (t_b - t_a)}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{im}{2\hbar(t_b - t_a)}(x_b - x_a)^2\right]. \quad (3.46)$$

Este resultado da equação (3.46), obtida através da integral de caminho de Feynman, está em total acordo com o resultado frequentemente obtido utilizando Mecânica Quântica de Schrödinger [23].

3.4 Fenda dupla via integrais de caminho de Feynman

Até o presente momento, só havíamos tratado com a propagação de uma partícula livre, ou seja, sem restrições ou obstáculos entre os pontos iniciais e finais. Nessa seção, estudamos a evolução temporal de uma partícula que vamos supor ser o elétron, porém com a restrição de passar através de pequenas aberturas ou fendas entre os pontos iniciais e finais. Na Fig.3.7, estamos representando (em vermelho) somente as amplitudes das partículas que passaram através das fendas, a contribuição na amplitude total de elétrons que não atravessam as fendas serão negligenciadas em nossa análise. A grande questão nesse problema é, como determinarmos qual a probabilidade de encontrar o elétron em um ponto x da tela, sabendo que o mesmo sai da fonte inicialmente na posição ($x = 0, z = 0$)? Em outras palavras, qual a intensidade de elétrons na tela de detecção como função da posição x ? A origem física de tais questiona-

mentos está intimamente ligada com a propriedade de dualidade onda-partícula, manifestada no experimento de fenda dupla de Young e que só poderá ser explicada utilizando as leis da Mecânica Quântica.

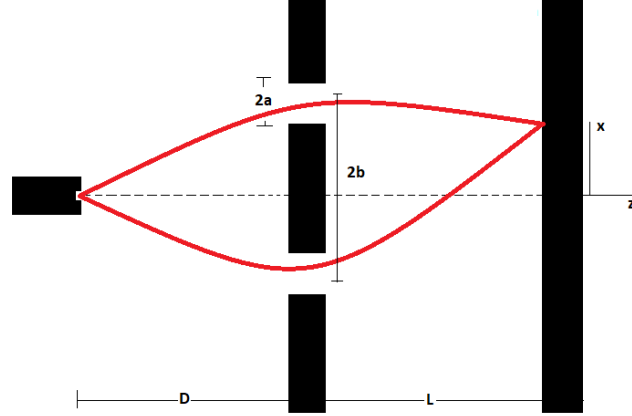


Fig. 3.7: Descrição experimental da fenda dupla. Considerando uma fonte coerente de baixa intensidade, as partículas se propagam por uma distância D e L , antes e depois da fenda respectivamente. Já as fendas possuem uma largura $2a$, e estão separadas centro a centro por uma distância $2b$. As curvas vermelhas, representam a amplitude de probabilidade da partícula que sai da fonte e chega no anteparo.

Nessa abordagem iremos desprezar os efeitos de decoerência, isto é, nossa análise será livre de interações com o ambiente, e de quaisquer defeito na fonte (incoerência) [24]. Nesse sentido, podemos utilizar os argumentos de simetria para desprezar os efeitos de difração oriundos do eixo ortogonal ao plano ($x - z$). Em duas dimensões, temos que o propagador da partícula livre, equação (3.46), torna-se

$$K^{2D}(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) = \frac{m}{2\pi i \hbar (t - t_0)} \exp \left[\frac{im(\vec{r} - \vec{r}_0)^2}{2\hbar(t - t_0)} \right], \quad (3.47)$$

sendo que $\vec{r} = (x, z)$ é um vetor posição em duas dimensões no plano ortogonal ao y . Para iniciar os estudos de interferência e difração na fenda dupla, vamos primeiramente tratar com funções do tipo janela para simular as fendas

$$F(\beta) = \begin{cases} 0, & \beta > b + a, \beta < b - a \\ 1, & b - a < \beta < b + a \end{cases} \quad (3.48)$$

funções desse tipo já foram abordadas teoricamente [25], e experimentalmente na interferometria com elétrons [26]. Para encontrar a amplitude de probabilidade do elétron na posição x , é necessário utilizar as idéias de eventos que ocorrem em sucessão descritos na secção (3.3.3).

Nessa perspectiva, a propagação total é dividida em duas partes, na primeira o elétron sai da fonte na posição e no tempo $(x = 0, z = 0, t = 0)$ até as fendas em um posição $(\beta, z = D, t)$ intermediária onde $b - a < \beta < b + a$, e em seguida o elétron viaja por um tempo τ até uma posição arbitrária no anteparo $(x, z = D + L, t + \tau)$.

Considerando que na direção z o elétron tenha um momento $p_z = \hbar k_z$, sendo k_z o vetor de onda na direção z , e uma velocidade clássica $v_z = D/t = L/\tau$, onde nós estamos supondo que a distância da fonte até as fendas D e das fendas até o anteparo L , sejam muito maiores que as dimensões da direção x , ou seja, $x, a, b \ll D, L$, essas condições são conhecidas na literatura como regime de Fraunhofer [27]. Além disso, nós iremos supor que o comprimento de onda λ seja aproximadamente igual a comprimento na direção z , $\lambda \simeq \lambda_z = 2\pi\hbar/(mv_z)$, e esse sendo pequeno comparado com às distâncias $\lambda \ll D, L$. Nesse sentido, podemos dizer que o movimento na direção z é aproximadamente clássico, e o problema passa a ser decomposto em dois problemas independentes. Portanto, a amplitude de probabilidades da partícula sair da fonte e ser detectada em uma posição x , é dada por

$$K^{2D}(x, D + L, t + \tau; 0, 0, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta F(\beta) \times K^{2D}(x, D + L, t + \tau; \beta, D, \tau) K^{2D}(\beta, D, t; 0, 0, 0),$$

os intervalos de integração devem ser trocados, um vez que, fora da região da janela as partículas não conseguem atravessar a fenda e tais amplitudes são descartadas, assim

$$K^{2D}(x, D + L, t + \tau; 0, 0, 0) = \frac{e^{\frac{imD^2}{2\hbar t}}}{\sqrt{2\pi\hbar t/m}} \frac{e^{\frac{imL^2}{2\hbar\tau}}}{\sqrt{2\pi\hbar\tau/m}} \int_{b-a}^{b+a} d\beta \frac{e^{\frac{im(x-\beta)^2}{2\hbar\tau}}}{\sqrt{2\pi\hbar\tau/m}} \frac{e^{\frac{im\beta^2}{2\hbar t}}}{\sqrt{2\pi\hbar t/m}}, \quad (3.49)$$

logo fica explícito, que a parte da propagação na direção z é uma constante

$$K_z(D + L, T + \tau; 0, 0) = \frac{e^{\frac{imD^2}{2\hbar t}}}{\sqrt{2\pi\hbar t/m}} \frac{e^{\frac{imL^2}{2\hbar\tau}}}{\sqrt{2\pi\hbar\tau/m}}, \quad (3.50)$$

sendo possível reduzir o problema somente à propagação na direção transversal x

$$K_x(x, t + \tau; 0, 0) = \int_{b-a}^{b+a} d\beta \frac{e^{\frac{im(x-\beta)^2}{2\hbar\tau}}}{\sqrt{2\pi\hbar\tau/m}} \frac{e^{\frac{im\beta^2}{2\hbar t}}}{\sqrt{2\pi\hbar t/m}}. \quad (3.51)$$

À luz da equação (3.51), fica claro que os efeitos quânticos de interferência são manifestados todos no eixo x . Portanto, é inteiramente possível fazer uma descrição do interferômetro de

fenda dupla considerando um modelo unidimensional [28]. Por outro lado, na construção da amplitude de probabilidade descrita na equação (3.51) nós desconsideramos a inclusão de caminhos que possam passar mais de uma vez por uma mesma fenda antes de chegarem no anteparo, tais caminhos são chamados de exóticos, e foram estudados pioneiramente de forma teórica por Yabuki em [29]. A contribuição não nula desses caminhos para o padrão de interferência será nosso objetivo de estudo em capítulos futuros.

3.4.1 Fenda dupla com aberturas do tipo janela

Nessa seção, iremos mostrar as dificuldades de resolver o problema da difração por uma fenda descrito na equação (3.51) quando consideramos aberturas do tipo janela. Seja $\psi_1(x; t, \tau)$ e $\psi_2(x; t, \tau)$, as amplitudes de probabilidade de encontrar o elétron na posição x da tela, após passar pelas fendas respectivamente por $x = b$ e $x = -b$. Utilizando o formalismo da integrais de caminho, podemos adicionar as amplitudes para obter uma amplitude total $\psi(x; t, \tau)$, daí a probabilidade de detectar o elétron será $P(x, t, \tau) = |\psi(x; t, \tau)|^2$. Partindo da equação (3.51), é possível determinar a amplitude de probabilidade $\psi_1(x; t, \tau)$ como

$$\psi_1(x; t, \tau, a, b) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \tau}} \int_{b-a}^{b+a} e^{\frac{im(x-\beta)^2}{2\hbar\tau}} e^{\frac{im\beta^2}{2\hbar t}} d\beta, \quad (3.52)$$

completando o quadrado, é possível mostrar que

$$\frac{m(x-\beta)^2}{2\hbar\tau} + \frac{m\beta^2}{2\hbar t} = \left(\frac{m}{2\hbar\tau} + \frac{m}{2\hbar t}\right) \left(\beta - \frac{x}{1+t/\tau}\right)^2 + \frac{mx^2}{2\hbar(t+\tau)},$$

fazendo uma mudança de variável na integral, e definindo a seguinte função

$$\alpha_{\pm}(x, t, \tau) = \sqrt{\frac{m(t+\tau)}{\pi\hbar t\tau}}(b \pm a) - \frac{x}{\sqrt{\pi\hbar\tau/m}} \sqrt{\frac{t}{t+\tau}}, \quad (3.53)$$

chegamos em uma integral gaussiana com argumento complexo

$$\psi_1(x; t, \tau, a, b) = \frac{e^{\frac{imx^2}{2\hbar(t+\tau)}}}{\sqrt{(2i)^2\pi\hbar(t+\tau)/m}} \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\beta \exp\left(\frac{i\pi}{2}\beta^2\right), \quad (3.54)$$

e realizando a decomposição em parte real e imaginária, nós chegamos em duas integrais do tipo seno e cosseno com um argumento polinomial do segundo grau. Integrais desse tipo, são comumente definidas na literatura como funções de Fresnel [30]

$$C[u] \equiv \int_0^u d\beta \cos\left(\frac{\pi\beta^2}{2}\right),$$

$$S[u] \equiv \int_0^u d\beta \sin\left(\frac{\pi\beta^2}{2}\right).$$

Portando, temos que a amplitude de probabilidade de passar pela fenda na posição $x = b$, ficar explicitamente determinada em termos das funções de Fresnel

$$\begin{aligned} \psi_1(x; t, \tau, a, b) &= \frac{e^{\frac{imx^2}{2\hbar(t+\tau)}}}{\sqrt{(2i)^2\pi\hbar(t+\tau)/m}} \{C[\alpha_+(x, t, \tau)] - C[\alpha_-(x, t, \tau)]\} \\ &+ i \frac{e^{\frac{imx^2}{2\hbar(t+\tau)}}}{\sqrt{(2i)^2\pi\hbar(t+\tau)/m}} \{S[\alpha_+(x, t, \tau)] - S[\alpha_-(x, t, \tau)]\}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

por simetria da fenda dupla, é comum determinarmos a amplitude de probabilidade de passar na fenda localizada em $x = -b$, de tal forma

$$\psi_2(x; t, \tau, a, b) = \psi_1(x; t, \tau, a, -b).$$

A equação (3.55), mostra que a descrição da fenda dupla utilizando funções do tipo janela exige resultados matemáticos robustos que podem dificultar na determinação dos resultados físicos e na determinação de expressões analíticas. Dentre outras dificuldades, a intensidade de detecção do elétron na posição x para esse tipo de problema é analisada no limite assintótico das funções de Fresnel [26]

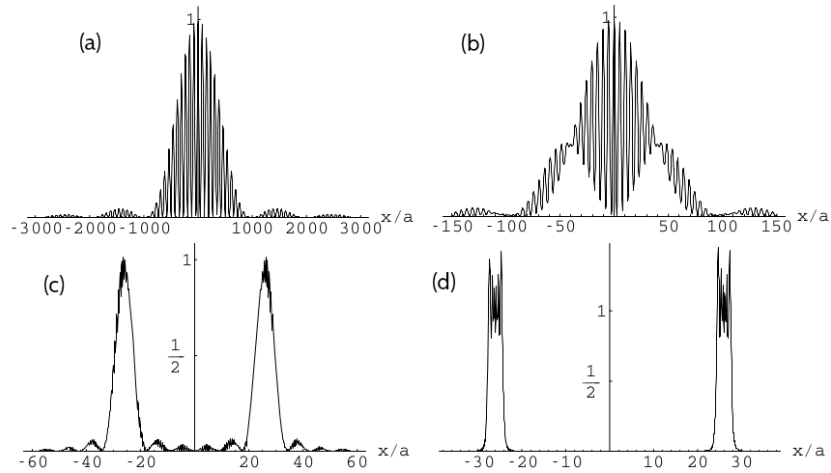


Fig. 3.8: Curvas de interferência em função da distância na dela de detecção em unidades da largura da fenda a . Escolhendo os seguintes valores para o numero de Fresnel (a) $N_F = 0.001$, (b) $N_F = 0.0015$, (c) $N_F = 0.12$, (d) $N_F = 6$ [25].

A Fig.3.8, mostra alguns resultados da interferência utilizando elétrons que passam por uma fenda dupla considerando fendas do tipo janela [25]. Na próxima seção, iremos fazer os cálculos considerando funções do tipo Gaussianas para modelar as aberturas.

3.4.2 Fenda dupla com aberturas do tipo Gaussianas

O objetivo dessa seção é resolver a equação (3.55), porém utilizando uma função transmissão que torne mais simples de descrever analiticamente a probabilidade de encontrar o elétron em um ponto x da tela. A hipótese passa por escolher funções do tipo Gaussianas para modelar as fendas

$$F(\beta) = \exp\left(\frac{-\beta^2}{2a^2}\right), \quad (3.56)$$

essas funções são matematicamente mais simples de tratar, e possuem um perfil geométrico semelhante ao formato de um sino, como mostrado na Fig.3.9. Em nosso estudo, estamos desconsiderando os efeitos da gravidade, embora tais efeitos já foram simulados com fendas Gaussianas [31]

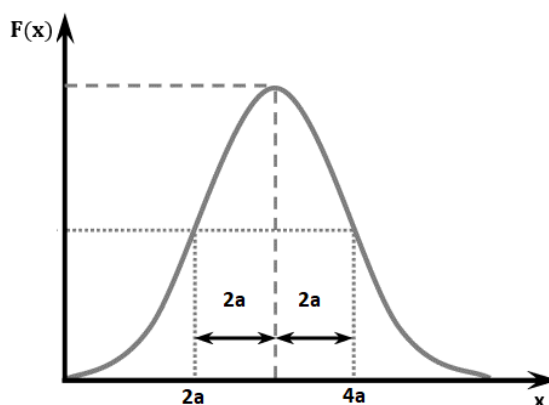


Fig. 3.9: A largura efetiva dessa função está relacionada com a distância a . Para esse tipo de função, aproximadamente dois terços da área abaixo da curva estão entre $2a$ e $4a$. A probabilidade de determinar o elétron em uma posição x é proporcional à $[F(\beta)]^2$.

Com base nisso, tendo como objetivo obter a amplitude de probabilidade de encontrar o elétron que passa por uma fenda dupla, e chegar na posição x do anteparo, é interessante olharmos apenas para uma das fendas Fig.3.10 e obter a amplitude de probabilidade. Assim temos que, a amplitude de passar pela fenda localizada $x = b$ é dada por

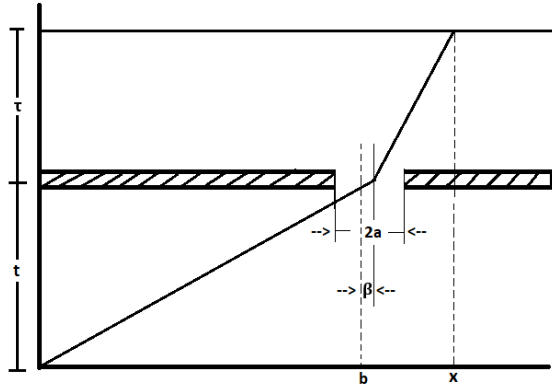


Fig. 3.10: Representação da difração de um elétron através de uma fenda Gaussiana. Sendo $2a$ a largura da fenda, e b sua posição em relação a origem, ver Fig.3.7.

$$\psi_1(x, t, \tau) = \frac{m}{2\pi i \hbar \sqrt{t\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \left(\frac{x^2}{\tau} + \frac{b^2}{t} \right) + \frac{im}{\hbar} \left(\frac{-x}{\tau} + \frac{b}{t} \right) \beta + \left(\frac{im}{2\hbar\tau} + \frac{im}{2\hbar t} - \frac{1}{2a^2} \right) \beta^2 \right\} d\beta, \quad (3.57)$$

utilizando o método de completar quadrados, a integral acima pode ser facilmente resolvida utilizando os resultados descritos no Apêndice A.1.1, assim temos que

$$\psi_1(x; t, \tau) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar}} \left[t\tau \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\tau} + \frac{\hbar i}{ma^2} \right) \right]^{-1/2} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \left(\frac{x^2}{\tau} + \frac{b^2}{t} \right) - \frac{(im/\hbar)^2 (-x/\tau + bt)^2}{4(im/2\hbar)(1/\tau + 1/t + i\hbar/a^2m)} \right\}, \quad (3.58)$$

logo por simetria, fazendo b por $-b$, obtemos a amplitude de probabilidades para o elétron que passa pela fenda de baixo

$$\psi_2(x; t, \tau) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar}} \left[t\tau \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\tau} + \frac{\hbar i}{ma^2} \right) \right]^{-1/2} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \left(\frac{x^2}{\tau} + \frac{b^2}{t} \right) + \frac{(im/\hbar)^2 (x/\tau + bt)^2}{4(im/2\hbar)(1/\tau + 1/t + i\hbar/a^2m)} \right\}. \quad (3.59)$$

Se definirmos a velocidade clássica, da origem até o centro da fenda como $v_0 = b/t$, então a

expressão da amplitude pode ser reescrita na forma

$$\psi_1(x; t, \tau) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar}} \left[\left(t + \tau + t\tau \frac{\hbar i}{ma^2} \right) \right]^{-1/2} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \left(\frac{x^2}{\tau} + v_0^2 t \right) + \frac{(m^2/2\hbar^2\tau^2)(x - v_0 t)}{(m/\hbar)(i/\tau + i/t) - 1/a^2} \right\}. \quad (3.60)$$

A fim de conectar a amplitude de probabilidade com a intensidade na tela de detecção, podemos utilizar o princípio da superposição

$$I(x) = |\psi_1(x; t, \tau) + \psi_2(x; t, \tau)|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2\mathcal{R}\{\psi_1^*\psi_2\}, \quad (3.61)$$

onde $|\psi_1|^2$ e $|\psi_2|^2$, representam respectivamente a probabilidade do elétron passar por cima ou por baixo através das fendas, já o último termo $2\mathcal{R}\{\psi_1^*\psi_2\}$, ficou conhecido na literatura como termo de interferência, que está intimamente ligado com a diferença de fase associada a cada caminho. Diante disso, utilizamos os seguintes parâmetros para ondas de elétrons na fenda dupla da Fig.3.7, sendo $m = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg, $b = 650$ nm, $a = 62$ nm, $t = 18$ ns, $\tau = 15$ ns, $D = 6.5$ mm e $L = 5.4$ mm [5].

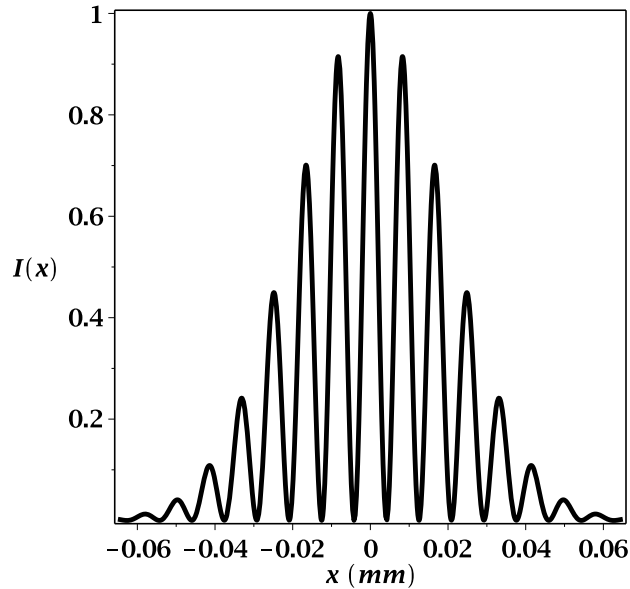


Fig. 3.11: Representação do padrão de interferência normalizada, isto é, dividida pelo valor em $x = 0$ de um elétron através de uma fenda dupla descrita por funções Gaussianas. Sendo $2a$ a largura de cada fenda, e $2b$ a distância centro a centro das fendas, ver Fig.3.7.

Essa sucessão de máximos e mínimos no padrão de interferência demonstram bem o comportamento dual da matéria. A perfeita concordância do padrão de interferência descrito na Fig.3.11, com os experimentos já conhecidos na literatura, nos permite então explorar as características da dualidade onda-partícula através do formalismo das integrais de caminho de Feynman, além de ser possível investigar o efeito da inclusão de novos caminhos, previstos por essa teoria, no princípio da superposição. A análise qualitativa e quantitativa de caminhos exóticos no padrão de interferência, bem como suas consequências físicas, foram explorados tanto no experimento de fenda tripla quanto no experimento de fenda dupla em seções a posteriori.

Capítulo 4

Fase de Gouy e trajetórias exóticas no experimento de fenda tripla

4.1 Introdução

Nesse capítulo, investigamos qual a importância da fase de Gouy no estudo de trajetórias exóticas. Adotaremos, durante o texto, o subscrito (et) para nos referir a caminhos exóticos menos prováveis, mas que contribuem para o padrão de interferência no experimento de fenda tripla. O tratamento teórico de caminhos exóticos foi primeiramente proposto na fenda dupla por Yabuki em 1986 [29]. No capítulo 5, exploramos uma discussão mais detalhada sobre os efeitos de caminhos menos prováveis no padrão de interferência da fenda dupla de Young.

Recentemente, foram propostos uma série de trabalhos teóricos e experimentais na tentativa de quantificar a interferência contendo trajetórias exóticas [3],[4],[32],[33]. A fundamentação teórica que sustenta tais experimentos, está amparada no formalismo das integrais de caminho de Feynmann [5]. Uma maneira de quantificar o efeito de caminhos exóticos, é utilizar o parâmetro de Sorkin κ [2].

Aqui, propomos incorporar no parâmetro κ os efeitos da fase de Gouy para ondas de matéria, além evidenciar essas considerações por meio do padrão de interferência. Iremos mostrar que o parâmetro de Sorkin, no experimento de fenda tripla, é diretamente dependente da diferença de fase de Gouy entre os caminhos exóticos e não exóticos. Além disso, foi possível determinar uma expressão analítica para a fase de Gouy de um caminho não clássico, sendo a mesma utilizada para estimar a ordem de grandeza do parâmetro $\kappa \approx 10^{-8}$, para ondas de elétrons coerentes.

4.2 Trajetórias exóticas no experimento de fenda tripla

Nessa parte da dissertação, obtemos resultados analíticos para as funções de onda exóticas e não exóticas do experimento de fenda tripla. Focaremos nossa atenção na fase de Gouy a fim de analisar seus efeitos no padrão de interferência. Trataremos o sistema com um modelo unidimensional, onde os efeitos quânticos são manifestados no eixo x , tal eixo é transverso à direção de propagação z , como mostrado na Fig.4.1.

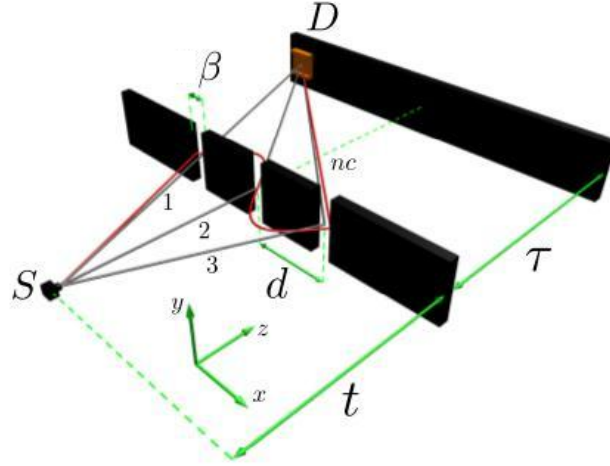


Fig. 4.1: Experimento de fenda tripla com pacote de onda Gaussiano, de comprimento inicial transversal σ_0 produzido por uma fonte S totalmente coerente, sendo t o tempo de propagação até a fenda tripla, e τ o tempo da fenda ao detector D . As fendas são funções Gaussianas que possuem a meia largura transversal β .

As funções de ondas associadas com trajetórias exóticas (linhas cinzas) são mostradas em 1, 3 e 2, assim temos

$$\Psi_{1,3}(x, t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\tau}(x, t + \tau; x_j, t) F(x_j \pm d) K_t(x_j, t; x_0, 0) \psi_0(x_0) dx_0 dx_j, \quad (4.1)$$

já para o caminho clássico 2,

$$\Psi_2(x, t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\tau}(x, t + \tau; x_j, t) F(x_j) K_t(x_j, t; x_0, 0) \psi_0(x_0) dx_0 dx_j, \quad (4.2)$$

onde

$$K_t(x_j, t; x_0, 0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t_j - t_0)}} \exp \left[\frac{im(x_j - x_0)^2}{2\hbar(t_j - t_0)} \right], \quad (4.3)$$

$$F(x_j) = \exp \left[-\frac{(x_j)^2}{2\beta^2} \right], \quad (4.4)$$

e

$$\Psi_0(x_0) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\sigma_0}} \exp \left(-\frac{x_0^2}{2\sigma_0^2} \right). \quad (4.5)$$

Os núcleos $K_t(x_j, t; x_0, 0)$ e $K_\tau(x, t + \tau; x_j, t)$, nessa abordagem, são conhecidos como propagadores de Schrödinger para partícula livre, também chamados de funções de Green. Tais funções, são completamente equivalentes aos propagadores obtidos pelo formalismo das integrais de caminho de Feynman [5]. A fenda é descrita por uma função $F(x_j)$, que foi escolhida como sendo uma função Gaussiana de largura β . d é a distância de separação entre as fendas, σ_0 é a largura efetiva do pacote de onda inicialmente emitido da fonte S , m é a massa da partícula, t e τ são, respectivamente, os tempo de propagação antes e depois da fenda tripla. A função de onda associada com a trajetória exóticas (linha vermelha) é dada por

$$\begin{aligned} \Psi_{123}(x, t, \tau) = & \int_{-\infty}^{\infty} K_\tau(x, \tau + \bar{t}; x_3, \bar{t}) F(x_3 + d) F(x_2) \times \\ & \times K(1 - 2; 2 - 3) F(x_1 - d) K_t(x_1, t; x_0, 0) \psi_0(x_0) dx_0 dx_1 dx_2 dx_3, \end{aligned} \quad (4.6)$$

com

$$\bar{t} = t + 2\varepsilon,$$

e

$$K(1 - 2; 2 - 3) = \sqrt{\frac{m}{4\pi i \hbar \varepsilon}} \exp \left[\frac{im[(x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2]}{4\hbar \varepsilon} \right], \quad (4.7)$$

Este último, é o propagador que evolui o estado da fenda 1 para a 2 e em seguida para fenda 3. O parâmetro ε é o tempo gasto para passar de uma fenda à outra, sendo ele determinado pela incerteza na componente x do operador momento linear, isto é, $\varepsilon = \frac{d}{\Delta v_x}$, ($\Delta v_x = \Delta p_x/m$) onde $\Delta p_x = \sqrt{\langle \Delta \hat{p}_x^2 \rangle - \langle \Delta \hat{p}_x \rangle^2}$. Essa estimativa é compatível na construção da trajetória exótica. Um argumento similar foi utilizado em [34], onde a dinâmica exótica está sustentada no princípio da incerteza.

Trajetoórias que circulam ao redor das fendas, isto é, que afastam-se cada vez mais de caminhos clássicos, evidentemente contribuem menos para o padrão de interferência. A justificativa para essa assertiva, consiste no fato de que as amplitudes associadas com os caminhos são pro-

porcionais ao fator $\exp[iS/\hbar]$, e uma vez que $\hbar \mapsto 0$ tal exponencial oscila muito, o que tende a provocar um cancelamento efetivo de caminhos extremamente exóticos, sobrando apenas aqueles próximos ao que minimiza a ação clássica (ver seção 3.3.1).

Após algumas manipulações algébricas, é possível resolver as integrais nas equações (4.1), (4.2) e (4.6) via método de completar quadrados, e encontrar as funções de onda que expressam as amplitudes de probabilidade de caminhos exóticos e não exóticos, assim

$$\Psi_1(x, t, \tau) = A \exp(-C_1 x^2 - C_2 x + C_3) \exp(i\alpha x^2 - i\gamma x - i\theta + i\mu), \quad (4.8)$$

$$\Psi_2(x, t, \tau) = A \exp(-C_1 x^2) \exp(i\alpha x^2 + i\mu), \quad (4.9)$$

$$\Psi_3(x, t, \tau) = A \exp(-C_1 x^2 + C_2 x + C_3) \exp(i\alpha x^2 + i\gamma x - i\theta + i\mu) \quad (4.10)$$

e

$$\Psi_{123}(x, t, \tau) = A_{et} \exp(-C_{1et} x^2 + C_{2et} x + C_{3et}) \exp(i\alpha_{et} x^2 + i\gamma_{et} x - i\theta_{et} + i\mu_{et}). \quad (4.11)$$

De posse das funções de onda, é possível explicitar a fase de Gouy de ondas de matéria associada com ambas as trajetórias, respectivamente, μ_c e μ_{et} , onde

$$\mu_{et} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{z_I}{z_R}\right). \quad (4.12)$$

Todos os coeficientes que aparecem nas equações de (4.8-4.12) serão explicitados nos apêndices *C* e *D*. Como discutido por I.G da Paz e colaboradores em [28], os termos $\theta_{et}(t, \tau)$ e $\mu_{et}(t, \tau)$ são fases que não dependem da posição transversa x . No entanto, diferente da fase de Gouy $\mu_{et}(t, \tau)$, a fase $\theta_{et}(t, \tau)$ é uma fase que depende diretamente do deslocamento d entre as fendas, como mostrado na Fig.4.1.

4.3 Princípio da superposição e trajetórias exóticas

Se fosse possível enumerar os principais fundamentos da Física, sem sombra de dúvidas, o princípio da superposição estaria entre os mais importantes. Comumente, encontramos em livros clássicos de Mecânica Quântica o experimento de fenda dupla de Young sendo utilizado para ilustrar o princípio da superposição [23]. A função de onda Ψ , quando ambas as fendas estão abertas Fig.4.2 (a) é simplesmente a soma de duas funções de onda Ψ_1 e Ψ_2 correspondente as situações (b) e (c) da Fig.4.2 respectivamente

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2. \quad (4.13)$$

Há muito tempo, a equação (4.13) vem sendo aceita como uma verdade cristalina, pois representa a descrição formal do princípio da superposição na fenda dupla. No entanto, Yabuki foi o primeiro a apontar teoricamente que essa superposição não estaria rigorosamente correta [29]. As funções Ψ , Ψ_1 e Ψ_2 são soluções da equação de Schrödinger com diferentes condições de contorno, portanto possuem diferentes espaços de Hilbert, tornando assim a equação (4.13) apenas uma aproximação. Recentemente, H. De Raedt [4] mostrou através de simulações numéricas das equações de Maxwell utilizando o método das diferenças de tempo finita (FDTD), que essa superposição é aproximada no regime da óptica clássica.

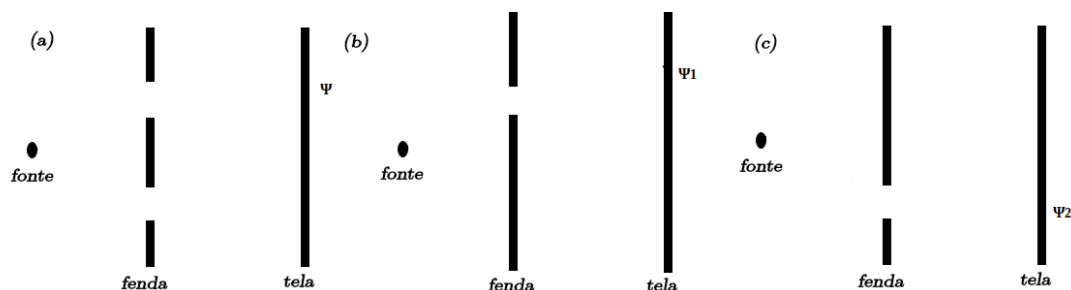


Fig. 4.2: Princípio da superposição na fenda dupla e diferentes configurações experimentais

A grande questão é, como quantificar tal efeito na Mecânica Quântica? Uma maneira de resolver esse problema seria utilizar a teoria das integrais de caminho de Feynman para incluir na superposição, equação (4.13), e a contribuição de caminhos menos prováveis, mas que contribuem de forma finita Fig.4.3.

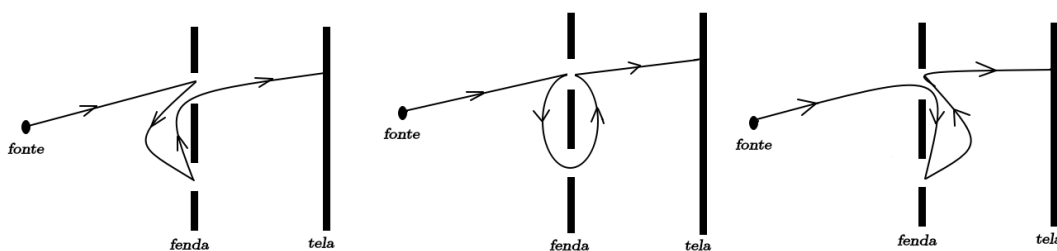


Fig. 4.3: Possíveis caminhos exóticos na fenda dupla.

Nessa perspectiva, o princípio da superposição na fenda tripla incluindo os efeitos de caminhos que não minimizam a ação clássica (trajetórias exóticas), torna-se

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_{et}. \quad (4.14)$$

Partindo dessa perspectiva, é compreensível entender o ponto de vista de alguns autores que afirmam que o princípio da superposição vem sendo aplicado de forma incorreta em experimentos que envolvam interferência, uma vez que tais caminhos são desconsiderados [32].

4.4 Quantificando o efeito de trajetórias exóticas via parâmetro de Sorkin

Uma vez que consideramos a inclusão de caminhos exóticos na superposição da fenda tripla, Fig.(4.1), podemos utilizar a chamada regra de Born da mecânica quântica para escrever a intensidade em um determinado ponto x da tela de detecção

$$I_T = |\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_{123}|^2, \quad (4.15)$$

daí,

$$I_T = I_c + |\Psi_{et}|^2 + 2|\Psi_1||\Psi_{123}|\cos(\Delta_1) \quad (4.16)$$

$$+ 2|\Psi_2||\Psi_{123}|\cos(\Delta_2) + 2|\Psi_3||\Psi_{123}|\cos(\Delta_3), \quad (4.17)$$

onde as diferenças de fase, oriundas das diferenças de caminhos são

$$\Delta_{1,123} = (\alpha - \alpha_{et})x^2 - (\gamma + \gamma_{et})x - (\theta - \theta_{et}) + (\mu - \mu_{et}), \quad (4.18)$$

$$\Delta_{2,123} = (\alpha - \alpha_{et})x^2 - \gamma_{et}x + \theta_{et} + (\mu - \mu_{et}), \quad (4.19)$$

$$\Delta_{3,123} = (\alpha + \alpha_{et})x^2 - (\gamma - \gamma_{et})x - (\theta - \theta_{et}) + (\mu - \mu_{et}). \quad (4.20)$$

A intensidade quando somente caminhos clássicos são considerados é dada por I_c . A grandeza física, que quantifica o efeito de trajetórias exóticas é conhecida na literatura como o parâmetro de Sorkin κ [2], esse que pode ser definido, de forma alternativa como

$$\kappa = \frac{I_T - I_c}{I_0}, \quad (4.21)$$

reescrevendo temos

$$\begin{aligned}
 kI_0 &= |\Psi_{123}|^2 + 2|\Psi_1||\Psi_{123}|\cos(\Delta_{1,123}) \\
 &+ 2|\Psi_2||\Psi_{123}|\cos(\Delta_{2,123}) \\
 &+ 2|\Psi_3||\Psi_{123}|\cos(\Delta_{3,123}).
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Onde definimos I_0 como a normalização escolhida como sendo a intensidade do máximo central. Fica evidente que o parâmetro que é responsável pela quantificação de caminhos exóticos κ , apresenta uma dependência direta com as diferenças de fase de Gouy exótica e não exótica. Nas próximas seções, exploraremos com mais detalhes essa dependência e suas implicações físicas na interferometria com ondas de elétrons.

4.5 Resultados e discussões considerando ondas de elétrons na fenda tripla

Investigaremos agora o efeito da fase de Gouy na quantidade k , para ondas de elétrons no experimento de fenda tripla Fig.4.1. Nesse sentido, primeiro nós observamos a intensidade normalizada I_n e o parâmetro κ como função da posição transversa x na tela de detecção. Segundo, nós observamos o parâmetro de Sorokin como função de x e τ para um dado valor do tempo t fixo. Por terceiro, analisamos o comportamento de κ com o tempo antes da fenda fixo, mas agora na posição $x = 0$ e como função de τ .

A escolha do ponto $x = 0$ é perspicaz, pois nesse ponto o efeito da fase de Gouy é mais evidente no padrão de interferência como pode-se ver nas equações (4.18-4.20). No entanto, uma vez que temos as expressões analíticas para todos os termos das funções de onda, nosso estudo pode ser generalizado caso seja necessário incluir demais contribuições e analisar outros tipos de efeitos. Os resultados discutidos nessa seção, foram publicados no artigo **Gouy phase in nonclassical paths in a triple-slit interference experiment**, *Physical Review A* (2016) [35].

Na construção dos gráficos da intensidade normalizada I_n e do parâmetro de Sorokin κ , utilizamos ondas de elétrons com os seguintes parâmetros: $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg, $d = 650$ nm, $\beta = 64$ nm, $\sigma_0 = 62$ nm, $t = 18$ ns, $\tau = 15$ ns. Utilizando esses valores foi possível determinar o tempo de propagação entre as fendas $\varepsilon = 0.492$ ns. A Fig.4.4 (a), mostra a intensidade normalizada I_n como função de x , no limite de Fraunhofer, além de ser semelhante aos gráficos das referências [32]-[33], a curva mostra o padrão de interferência com máximos e mínimos

evidenciando a natureza ondulatória da matéria.

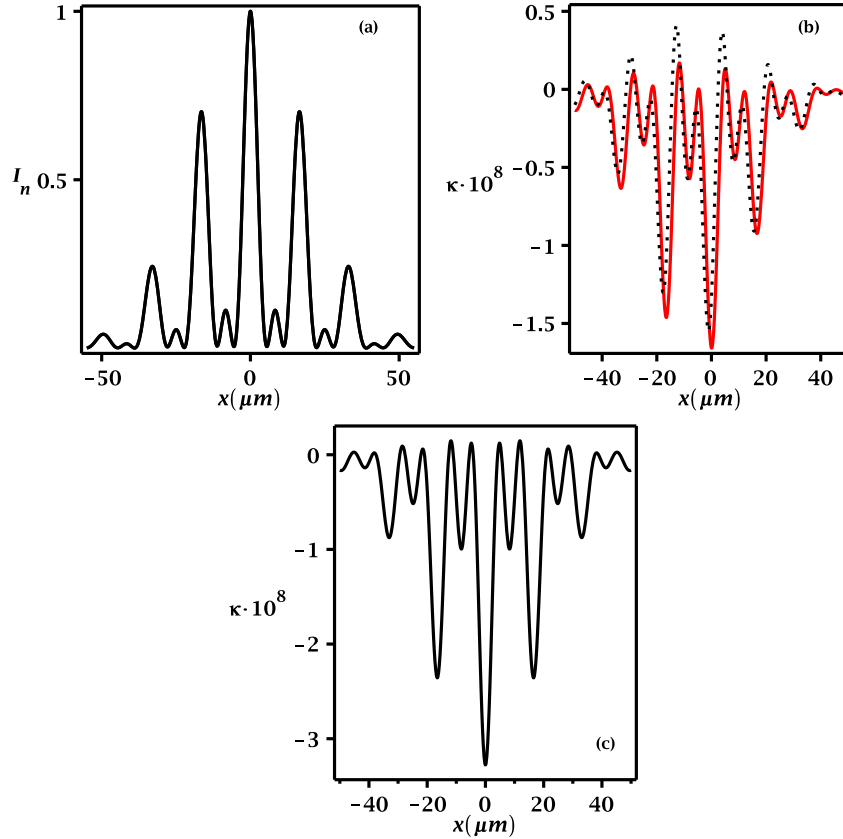


Fig. 4.4: (a) Intensidade normalizada como função de x . (b) Influência da fase de Gouy no parâmetro de Sorkin em função de x . Na curva vermelha nós consideramos e na curva preta negligenciamos a fase de Gouy. (c) Comportamento simétrico de κ após a inclusão do caminho simétrico Ψ_{321} .

Na Fig.4.4 (b), temos o gráfico do parâmetro κ como uma função de x , onde pode-se perceber o efeito direto da fase de Gouy (linha sólida e linha pontilhada) na curva do parâmetro de Sorkin. Nosso modelo teórico corrobora os resultados obtidos por Sinha e colaboradores em [32], onde κ também é estimado como sendo da ordem de 10^{-8} para ondas de elétrons. Contudo, nossa abordagem além de ser completamente mais simplificada de tratar, é totalmente analítica, o que dá credibilidade ao nosso modelo. O crédito adicional desse estudo, reflete-se no fato que todos os parâmetros são algebricamente obtidos, permitindo-nos generalizar os resultados para várias configurações experimentais da fenda tripla.

A Fig.4.4 (b), mostrou uma assimetria do parâmetro de Sorkin como uma consequência de estarmos considerando apenas uma trajetória exótica, isto é, o caminho Ψ_{123} como mostrado na Fig.4.1. Se nós adicionarmos a contribuição de um outro caminho exótico Ψ_{321} , obtido pela

substituição de $(d \rightarrow -d)$ e $(x_1 \rightarrow x_3)$ na equação (4.14), o aspecto simétrico é recuperado como mostrado na Fig.4.4 (c)

Na Fig.4.5, mostramos o comportamento do $|\kappa|$ como função de x e τ para o caminho não clássico Ψ_{123} . Observamos que tal curva apresenta um máximo para um dado valor de x e τ . A existência de tal máximo, nos permite escolher um conjunto de valores de modo a tornar a medida de κ mais acessível. Anteriormente, tal máximo foi detectado experimentalmente em um aparato montado na referência [33]. Como podemos ver, o máximo ocorre em torno de $x = 0$. Em tal ponto, os efeitos da fase de Gouy são mais evidentes, portanto o desvio provocado por tal fase deve ser mais considerável.

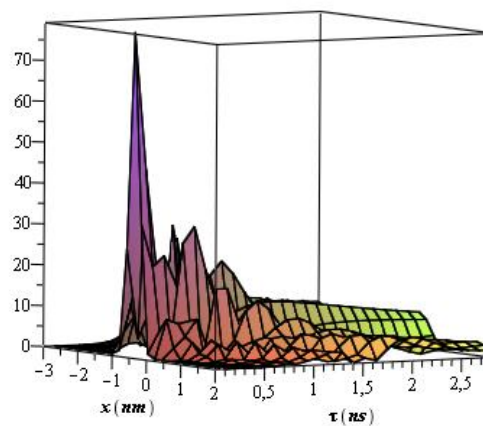


Fig. 4.5: Parâmetro de Sorkin κ multiplicado por uma potência de 10^8 em função de x e τ com t com o tempo pré-fenda t fixo. Existe um máximo em torno de $x = 0$.

Na Fig.4.6 (a), analisamos a fase de Gouy de uma trajetória não exótica (linha tracejada) e de uma trajetória exótica ψ_{123} (linha contínua), como função de τ para os mesmos parâmetros descritos anteriormente. Nota-se que, o valor absoluto da fase de Gouy de uma trajetória não exótica (linha tracejada) diminui, enquanto que para a exótica (linha sólida) aumenta em função do tempo de propagação pós fenda τ . Podemos verificar a influência da fase de Gouy no parâmetro de Sorkin, com base na figura 4.6 (b), onde mostramos o valor absoluto de κ como função de τ em $x = 0$. Para a trajetória exótica Ψ_{123} que contém a diferença de fase de Gouy (linha sólida) e uma que negligencia o efeito da fase de Gouy (linha pontilhada).

O comportamento do parâmetro κ como uma função de τ , é similar ao obtido em função da distância da fenda tripla até o anteparo obtido por Sinha e colaboradores em [33]. É notório que uma solução exata para k , dependa da fase de Gouy. A fim de avaliar o efeito quantitativo

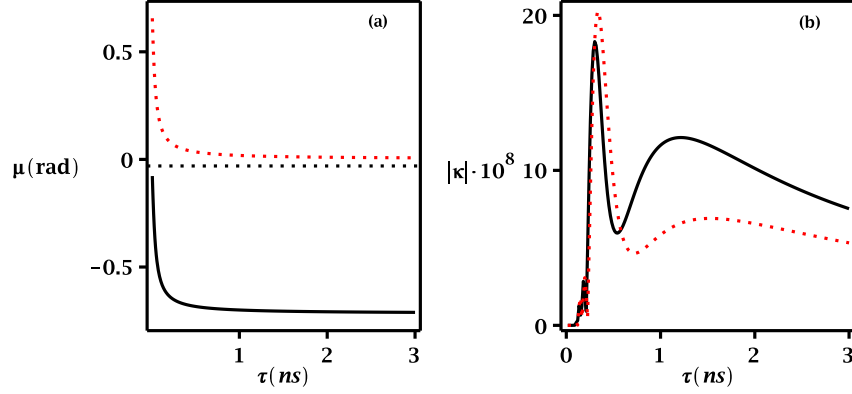


Fig. 4.6: (a) Fase de Gouy em função de τ , para t fixo. (b) Valor de κ em função de τ para $x = 0$. Na linha sólida consideramos e linha pontilhada desconsideramos a diferença de fase de Gouy.

da fase no valor absoluto do parâmetro κ para o caminho exótico Ψ_{123} , calculamos para o ponto $x = 0$ o erro percentual, que é definido como, $(|\kappa| - |\kappa'|/|k|) \times 100\%$, onde $|\kappa|$ considera a diferença de fase de Gouy, sendo assim o valor exato, já $|\kappa'|$ negligencia a diferença de fase de Gouy. Escolhendo o tempo pós fenda $\tau = 2ns$, o erro percentual encontrado foi de 51,5% e portanto se a diferença de fase de Gouy for omitida, o parâmetro de Sorkin κ é reduzido.

Como pode-se observar na Fig.4.6 (a), para $\tau = 2ns$, a fase de Gouy do caminho não exótico tende a zero e a diferença de fase de Gouy é aproximadamente a fase de Gouy da trajetória exótica, ou seja, $\mu_c - \mu_{et} \approx |\mu_{et}| \approx 0.719$ rad. Se utilizarmos esses parâmetros, é possível medir experimentalmente a diferença da fase de Gouy como um assinatura de caminhos exóticos. Observamos claramente, que o efeito de caminhos exóticos em um interferômetro de ondas de matéria, aqui na fenda tripla, pode ser avaliado por uma medida do parâmetro de Sorkin κ , bem como da correspondente fase de Gouy, μ_{et} , associada com o caminho exótico Ψ_{et} . Isto porque, para uma dada configuração experimental de valores apropriados, a diferença de fase de Gouy torna-se aproximadamente a fase de Gouy das trajetórias exóticas. Portanto, o parâmetro κ apresentará apenas uma dependência direta com a fase de Gouy exótica.

Nessa perspectiva, poderíamos utilizar o interferômetro de fenda dupla com ondas de matéria para medir a fase de Gouy exótica μ_{et} , como recentemente proposto por I.G da Paz e colaboradores em [36]. Em $x = 0$, seria possível estimar a diferença de fase de Gouy fazendo uma medida da intensidade relativa, e das franjas de visibilidade no padrão de interferência.

Capítulo 5

Trajétórias exóticas no experimento de fenda dupla com ondas de matéria

5.1 Introdução

O experimento de fenda dupla de Young, originalmente feito com ondas de luz [37], hoje pode ser realizado com fótons individuais (luz quântica) [38], elétrons [39], nêutrons [40], átomos [41], e grandes moléculas constituídas por dezenas de átomos [42]. Conceitos e resultados contraintuitivos da natureza quântica, como a dualidade onda partícula [43], emaranhamento e não localidade [44], podem ser demonstrados utilizando a fenda dupla.

A interpretação habitual afirma que, sendo Ψ_1 a função de onda no anteparo quando somente a fenda 1 está aberta, e sendo Ψ_2 a função para a partícula emergindo através da fenda 2, então a função de onda total deve ser dada, de acordo com o princípio da superposição, pela soma dos diferentes caminhos individuais $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$. Diante disso, ao aplicarmos a regra de Born, o resultado do experimento de fenda dupla é descrito pela soma das probabilidades individuais mais o termo de interferência

$$P_{12} \equiv |\Psi_{12}|^2 = P_1 + P_2 + (\Psi_1^* \Psi_2 + \Psi_1 \Psi_2^*). \quad (5.1)$$

De forma intrínseca a toda teoria ondulatória, a regra Born sempre limita a complexidade de qualquer efeito envolvendo superposições de um número arbitrário de funções de onda, à uma soma de termos denotando a interferência entre pares de funções de onda [2]. No experimento de fenda tripla, de acordo com a regra de Born, o padrão de interferência (P_{123}) é obtido por meio das seguintes probabilidades

$$P_{123} = P_{12} + P_{13} + P_{23} - P_1 - P_2 - P_3, \quad (5.2)$$

a equação (5.2) não inclui um termo de probabilidade envolvendo três fendas, mas é totalmente descrita por probabilidades envolvendo somente duas fendas. Qualquer possível contribuição para a interferência vinda de ordem superiores, isto é, um termo de probabilidade que envolvesse as três fendas, seria quantificado pelo parâmetro de Sorkin [2]-[33]

$$\kappa = P_{123} - P_{12} + P_{13} + P_{23} - P_1 - P_2 - P_3, \quad (5.3)$$

que deve ser igual a zero, sempre que apenas caminhos que vão direto da fonte ao anteparo são considerados (ver Fig.4.1). Sinha e colaboradores [3], mostraram que κ pode ser determinado experimentalmente medindo o conjunto de todas as probabilidades na equação (5.3). Na literatura, apenas a intensidade do padrão de interferência considerando a interferometria da fenda tripla, foi utilizada para mostrar desvios nas previsões convencionais do princípio da superposição quando caminhos exóticos são considerados [32].

Nesse capítulo, iremos mostrar teoricamente quais as implicações físicas desses caminhos no experimento de fenda dupla. Como mostrado no capítulo 4, a contribuição de tais caminhos é pequena, o que torna difícil a detecção experimental, porém iremos propor uma maneira de relacionar o parâmetro de Sorkin com a visibilidade das franjas de interferência, bem como mostrar que é possível ampliar o efeito de caminhos exóticos na zona de Fresnel, escolhendo adequadamente um conjunto de parâmetros no experimento de fenda dupla.

5.2 Experimento de fenda dupla com trajetórias exóticas

Por meio do formalismo das integrais de caminho de Feynman, na propagação da fonte até o anteparo, é possível incluir amplitudes de probabilidades oriundas de caminhos que possam dar voltas entre as fendas Fig.4.3. Nessa seção, iremos descrever o experimento de fenda dupla com trajetórias exóticas, e conseguiremos expressões para ambas as funções de onda não exóticas (linha preto) e exóticas (linha verde), como ilustrado na Fig.5.1.

Assim como foi mostrado no capítulo 4, é possível descrever os efeitos considerando um modelo unidimensional apenas na direção x . Essa condição está sustentada na hipótese de que a energia associada com o momento linear da partícula na direção z é muito grande, de tal forma que a componente do momento p_z é bem definida, isto é, $\Delta p_z \ll p_z$. Então, o movimento na direção de propagação z é clássico, com velocidade v_z . Admitimos que as flutuações estatísticas na velocidade v_z podem ser negligenciadas ($\Delta t \ll t$), nós podemos escrever $z = v_z t$ [45]-[46].

Diante disso, assumimos que o estado inicial da partícula emitida pela fonte coerente S é um pacote Gaussiano de largura transversal σ_0 . Considerando D , o detector e considerando t e τ os tempos de propagação antes e depois da fenda dupla, respectivamente

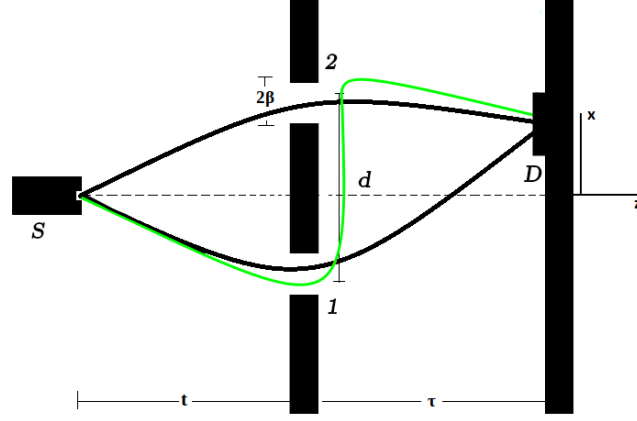


Fig. 5.1: Trajetória exótica no experimento de fenda dupla. Partículas são emitidas de uma fonte coerente S , t e τ representam os tempos de propagação antes e depois das fendas, respectivamente, e as fendas são funções Gaussianas de largura β separadas por uma distância d . A linha verde descreve uma trajetória exótica e a linha preta os caminhos não exóticos.

No tratamento de Feynman, a propagação de um ponto ao outro pode ser dividida em várias propagações intermediárias, ocorrendo em sucessões temporais (ver capítulo 3). Diante disso, os caminhos exóticos e não exóticos serão descritos através do produto de propagadores

$$\Psi_{1,2}(x, t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\tau}(x, t + \tau; x_j, t) F(x_j \pm d) K_t(x_j, t; x_0, 0) \psi_0(x_0) dx_0 dx_j, \quad (5.4)$$

onde

$$K_t(x_j, t; x_0, 0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t_j - t_0)}} \exp\left[\frac{im(x_j - x_0)^2}{2\hbar(t_j - t_0)}\right], \quad (5.5)$$

$$F(x_j) = \exp\left[-\frac{(x_j)^2}{2\beta^2}\right], \quad (5.6)$$

e

$$\Psi_0(x_0) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\sigma_0}} \exp\left(-\frac{x_0^2}{2\sigma_0^2}\right). \quad (5.7)$$

Os propagadores $K_t(x_j, t; x_0, 0)$ e $K_{\tau}(x, t + \tau; x_j, t)$, são os mesmos descritos na seção 4.2. A função $F(x_j)$, representa a fenda Gaussiana de largura β . Por outro lado, nós também

consideramos que as partículas realizam mais do que duas propagações livres antes de chegar na tela de detecção. Um dos muitos caminhos possíveis, linha verde na Fig.5.1, pode ser determinado com base na equação abaixo

$$\begin{aligned} \Psi_{12}(x, t, \tau) = & \int K_{\tau}(x, \tau + \tilde{t}; x_2, \tilde{t}) \times F(x_2 - d/2)K(1 \rightarrow 2) \\ & \times F(x_1 + d/2)K_t(x_1, t; x_0, 0)\psi_0(x_0)dx_0dx_1dx_2, \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde $\tilde{t} = t + \varepsilon$, aqui nós utilizamos o propagador entre as fendas 1 e 2 como

$$K(1 \rightarrow 2) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon}} \exp \left[\frac{im(x_2 - x_1)^2}{2\hbar \varepsilon} \right]. \quad (5.9)$$

A equação (5.9), é uma demonstração da aplicação da propriedade de transitividade dos propagadores mostrada na seção 3.3. O tempo de translado entre as fendas ε , pode ser calculado via incerteza no momento linear, $\varepsilon = \frac{d}{\Delta v_x} (\Delta v_x = \Delta p_x/m)$, com $\Delta p_x = \sqrt{\langle \hat{p}_x^2 \rangle - \langle \hat{p}_x \rangle^2}$ e \hat{p}_x sendo o operador momento. Nós encontramos que o tempo ε depende da massa da partícula e de alguns parâmetros característicos da fenda, mas não depende do tempo τ . Futuramente, a não dependência de ε em relação a τ será utilizada para analisar a contribuição de caminhos exóticos em função desse tempo de propagação depois da fenda

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{2}m\beta d}{\hbar} \sqrt{\frac{1 + (\beta/\sigma_0)^2 + (t/\tau_0)^2}{[1 + (\beta/\sigma_0)^2]^2 + (t/\tau_0)^2}}, \quad (5.10)$$

posterior ao desenvolvimento algébrico, encontramos as seguintes funções de onda

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, t, \tau) = & A \exp(-C_1 x^2 + C_2 x + C_3) \\ & \times \exp(i\alpha x^2 + i\gamma x + i\theta + i\mu), \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(x, t, \tau) = & A \exp(-C_1 x^2 - C_2 x + C_3) \\ & \times \exp(i\alpha x^2 - i\gamma x + i\theta + i\mu), \end{aligned} \quad (5.12)$$

e

$$\begin{aligned}\Psi_{12}(x, t, \tau) &= A_{\text{et}} \exp(-C_{1\text{et}}x^2 + C_{2\text{et}}x + C_{3\text{et}}) \\ &\times \exp(i\alpha_{\text{et}}x^2 + i\gamma_{\text{et}}x + i\theta_{\text{et}} + i\mu_{\text{et}}).\end{aligned}\quad (5.13)$$

As fase μ e μ_{et} , são as fase de Gouy para os caminho exóticos e não exóticos. Nós utilizamos os subíndices (et) para as quantidades oriundas de trajetórias exóticas. A função de onda exótica e simétrica no sentido 21, pode ser obtida fazendo a troca de d por $-d$ na equação (5.13)

$$\begin{aligned}\psi_{21}(x, t, \tau) &= A_{\text{et}} \exp(-C_{1\text{et}}x^2 - C_{2\text{et}}x + C_{3\text{et}}) \\ &\times \exp(i\alpha_{\text{et}}x^2 - i\gamma_{\text{et}}x + i\theta_{\text{et}} + i\mu_{\text{et}}).\end{aligned}\quad (5.14)$$

De forma similar ao capítulo 4, todas as constantes das equações (5.11), (5.12) e (5.13) estão no apêndice D. Na próxima seção, iremos analisar quais os efeitos físicos da inclusão de caminhos exóticos na intensidade e no parâmetro de Sorkin na fenda dupla.

5.3 Parâmetro de Sorkin na fenda dupla

Nessa seção, iremos mostrar uma forma de quantificar os efeitos de trajetórias exóticas na fenda dupla, mesmo que a definição formal encontrada na literatura para o parâmetro de Sorkin não possa ser aplicada para evidenciar tal efeito. Em um experimento de três fenda, o fator de Sorkin é definido com base na equação (5.3), sendo que, P_{123} é a probabilidade de detecção com todas as três fendas (1, 2, 3) abertas, P_{12} é probabilidade quando somente duas fendas (1,2) estão abertas, e assim por diante.

Partindo da regra de Born, ao adicionarmos um caminho não exótico Ψ_{123} na superposição, teremos que $P_{123} = |\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_{123}|^2$, $P_{12} = |\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_{12}|^2$ e assim por diante. Portanto, ao substituir na definição do Sorkin equação (5.3), temos que $\kappa \neq 0$. Este resultado foi o principal motivo para se procurar correções no princípio da superposição na fenda tripla. No entanto, se utilizamos a definição do parâmetro de Sorkin na fenda dupla, independente de adicionarmos ou não um caminho exótico Ψ_{12} , sempre teríamos um valor de $\kappa \neq 0$. Nessa perspectiva, seria impossível de quantificar os efeitos de trajetórias exóticas na fenda dupla [47].

Em nosso modelo, iremos utilizar a diferença de intensidades para definir um análogo ao “parâmetro de Sorkin”. Assim temos que a intensidade total, como função de x na tela de detecção, considerando trajetórias exóticas (não exóticas) será descrita pela regra de Born [1]

$$I_T = |\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_{12} + \Psi_{21}|^2, \quad (5.15)$$

que nos permite o seguinte resultado

$$\begin{aligned} I_T(x, t, \tau) = & F(x, t, \tau) + 2|\Psi_1||\Psi_2| \cos(\phi_{1,2}) \\ & + 2|\Psi_1||\Psi_{12}| \cos(\phi_{1,12}) \\ & + 2|\Psi_1||\Psi_{21}| \cos(\phi_{1,21}) \\ & + 2|\Psi_2||\Psi_{12}| \cos(\phi_{2,12}) \\ & + 2|\Psi_2||\Psi_{21}| \cos(\phi_{2,et21}) \\ & + 2|\Psi_{12}||\Psi_{21}| \cos(\phi_{12,21}), \end{aligned} \quad (5.16)$$

onde

$$\begin{aligned} F(x, t, \tau) = & |\psi_1(x, t, \tau)|^2 + |\psi_2(x, t, \tau)|^2 \\ & + |\psi_{12}(x, t, \tau)|^2 + |\psi_{21}(x, t, \tau)|^2, \end{aligned} \quad (5.17)$$

e as diferenças de fases são dadas por (ver Apêndice D)

$$\phi_{1,2} = 2\gamma x, \quad (5.18)$$

$$\phi_{1,12} = (\alpha - \alpha_{et})x^2 - (\gamma - \gamma_{et})x + (\theta - \theta_{et}) + (\mu - \mu_{et}), \quad (5.19)$$

$$\phi_{1,21} = (\alpha - \alpha_{et})x^2 - (\gamma + \gamma_{et})x + (\theta - \theta_{et}) + (\mu - \mu_{et}), \quad (5.20)$$

$$\phi_{2,12} = (\alpha - \alpha_{et})x^2 + (\gamma + \gamma_{et})x + (\theta - \theta_{et}) + (\mu - \mu_{et}), \quad (5.21)$$

$$\phi_{2,21} = (\alpha - \alpha_{et})x^2 + (\gamma - \gamma_{et})x + (\theta - \theta_{et}) + (\mu - \mu_{et}), \quad (5.22)$$

$$\phi_{12,21} = 2\gamma_{et}x. \quad (5.23)$$

Com objetivo de estimar o efeito de trajetórias exóticas no experimento de fenda dupla, nós consideramos a seguinte definição, assim como na equação (4.21)

$$\kappa(x, t, \tau) = \frac{I_T(x, t, \tau) - I(x, t, \tau)}{I_0}, \quad (5.24)$$

onde $I = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2|\psi_1||\psi_2|\cos(\phi_{1,2})$, é a intensidade quando somente trajetórias não exóticas são consideradas, $I_0 = I_T(0, t, \tau)$ representa a intensidade do máximo central em $x = 0$, que depende de t e τ . Se nós calcularmos a intensidade relativa, $I_r(x, t, \tau) = I_T(x, t, \tau)/F(x, t, \tau)$, é possível observar que alguns termos são análogos os termos do parâmetro de Sorkin em $x = 0$, mas diferem em muitos valores quando estão em função de x . Isso acontece porque o fator F é dependente de x , já $I_T(x, t, \tau)$ é independente. Portanto, não é possível obter κ medindo a intensidade relativa como função de x . Por outro lado, isso pode ser diferente se nós consideramos a posição $x = 0$ e mudamos os valores de tempo τ , ou, z_τ .

Para obter os gráficos, nós utilizamos os mesmos parâmetros da interferometria com nêutrons frios realizados por Zeilinger e colaboradores [40]: $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg, $\sigma_0 = 7.0 \mu\text{m}$, $d = 125 \mu\text{m}$, $\beta = 7.0 \mu\text{m}$, distância da fonte até a fenda dupla $z_t = 5.0$ m, distância da fenda dupla até o anteparo $z_\tau = 5.0$ m e comprimento de onda $\lambda = 2$ nm. Para esses dados nós obtemos $t \approx (m\lambda/h)z_t = 26.4$ ms, $\tau \approx (m\lambda/h)z_\tau = 26.4$ ms e $\varepsilon = 19.6$ ms

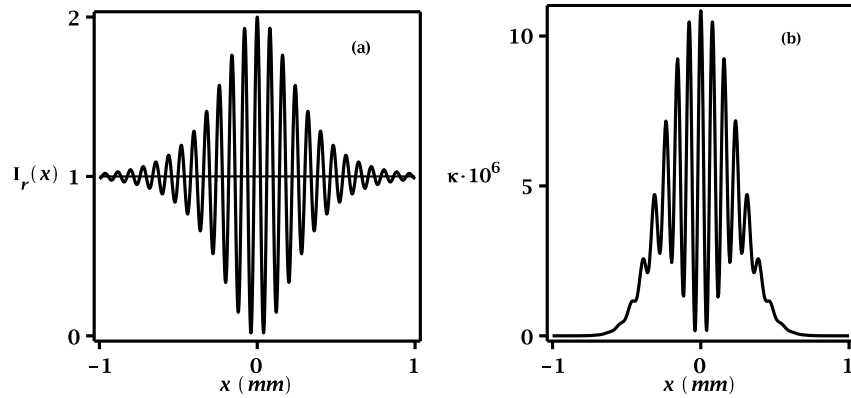


Fig. 5.2: (a) Intensidade relativa, (b) Parâmetro de Sorkin como função de x . A magnitude do parâmetro de Sorkin é da ordem de 10^{-6} .

Na Fig.5.2 (a), nós mostramos a intensidade relativa e na Fig.5.2 (b) o parâmetro de Sorkin para um experimento de fenda dupla em função de x para ondas de nêutrons. Nós podemos ver que a intensidade relativa é máxima em $x = 0$, com máximo $I_r = 2$, e oscilando em torno do resultado clássico (sem interferência) $I_r = 1$. Para grandes valores de x , nós não

observamos interferência, ou seja, $I_r(x > 1.0 \text{ mm}) = 1$. A oscilação da intensidade relativa para $|x| < 1.0 \text{ mm}$ contém a contribuição de trajetórias exóticas e não exóticas. Com base na Fig.5.2 (b), vemos que a contribuição de trajetórias exóticas na intensidade relativa é da ordem $\kappa \approx 10^{-6}$, embora a principal contribuição seja de trajetórias não exóticas.

Observamos que a escolha adequada de um conjunto de valores, torna o parâmetro de Sorkin duas ordens de grandeza menor do que os anteriores obtidos na literatura para elétrons [32]-[35], mostrando que a interferometria de nêutrons torna-se um melhor candidato para indicar o efeito de trajetórias exóticas do que os elétrons. Finalmente, é interessante observar que o comportamento do Sorkin no experimento de fenda dupla é diferente da fenda tripla. Este fato é um consequência de existirem diferentes padrões de interferência entre as duas configurações.

5.4 Visibilidade das franjas de interferência e parâmetro de Sorkin

Nessa seção, iremos fixar a posição $x = 0$, isto é, ao longo do eixo de simetria da fenda dupla, e iremos obter simples expressões para a intensidade relativa e para o parâmetro de Sorkin como função do tempo pós fenda τ (ou distância da fenda até o anteparo z_τ , sendo que $z_\tau = v_z \tau$). Esse fato nos permite associar a visibilidade das franjas de interferência com a contribuição de trajetórias exóticas, e também nos fornece um relação entre o parâmetro de Sorkin e a visibilidade. Como iremos ver, sob certas condições, medir a visibilidade de trajetórias exóticas seria medir o parâmetro de Sorkin.

Na posição $x = 0$, nós temos $\phi_{1,12} = \phi_{2,12} = \phi_{1,21} = \phi_{2,21} = (\theta + \mu) - (\theta + \mu)$, $\phi_{1,2} = \phi_{12,21} = 0$, $|\psi_1| = |\psi_2|$, $|\psi_{12}| = |\psi_{21}|$ e $I(0, t, \tau) = 4|\psi_1|^2$. Os parâmetros σ_0 , β , d , t , τ e ϵ podem ser tais que nós teremos $|\psi_1(0, t, \tau)| \gg |\psi_{12}(0, t, \tau)|$, implicando que

$$\begin{aligned} |\psi_1(0, t, \tau)|^2 &\gg |\psi_{12}(0, t, \tau)|^2, \\ |\psi_1(0, t, \tau)||\psi_{12}(0, t, \tau)| &\gg |\psi_{12}(0, t, \tau)||\psi_{21}(0, t, \tau)|, \\ F(0, t, \tau) &\approx 2|\psi_1(0, t, \tau)|^2, \end{aligned}$$

assim

$$I_T(0, t, \tau) \approx 4|\psi_1|^2 + 8|\psi_1||\psi_{12}| \cos[\theta_{et} + \mu_{et} - (\theta + \mu)].$$

Sob essas condições, a intensidade relativa pode ser escrita como

$$I_r(0, t, \tau) \approx 2\{1 + \mathcal{V}_{et}(0, t, \tau) \cos[\theta_{et} + \mu_{et} - (\theta + \mu)]\}, \quad (5.25)$$

onde

$$\mathcal{V}_{et}(0, t, \tau) \approx \frac{2|\psi_{et12}(0, t, \tau)|}{|\psi_1(0, t, \tau)|}. \quad (5.26)$$

A intensidade relativa, equação (5.25), tem um expressão semelhante a equação (1.3) discutida no trabalho de Bramon [48], nos permitindo definir a função \mathcal{V}_{et} como visibilidade construída com trajetórias exóticas. O segundo termo da equação (5.25) é a contribuição para a interferência devido as trajetórias exóticas. Se negligenciarmos essa contribuição, teremos que $I_r = 2$, que é necessariamente o valor da intensidade relativa quando consideramos somente trajetórias não exóticas (linha preta, na Fig.(5.1)).

Por outro lado, o parâmetro de Sorkin, equação (5.24), pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \kappa(0, t, \tau) &= 1 - \frac{I(0, t, \tau)}{I_T(0, t, \tau)} \\ &\approx 1 - (1 + \xi)^{-1}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

onde $\xi = \mathcal{V}_{et}(0, t, \tau) \cos[\theta_{et} + \mu_{et} - (\theta + \mu)]$. Se $\xi \ll 1$, que é esperado desde que $|\psi_{et12}| \ll |\psi_1|$ e $|\cos[\theta_{et} + \mu_{et} - (\theta + \mu)]| \leq 1$, então nós podemos aproximar $(1 + \xi)^{-1} \approx 1 - \xi + \xi^2 \dots$, e escrever uma expressão para o fator de Sorkin que depende da visibilidade produzida por trajetórias exóticas, bem como das fases axiais

$$\begin{aligned} \kappa &\approx \mathcal{V}_{et} \cos[\theta_{et} + \mu_{et} - (\theta + \mu)] \\ &\times \{1 - \mathcal{V}_{et} \cos[\theta_{et} + \mu_{et} - (\theta + \mu)]\} + \dots \end{aligned} \quad (5.28)$$

Essa expressão é um dos resultados mais importantes do nosso trabalho. As fases exibem um papel extremamente importante na determinação do parâmetro de Sorkin. O valor máximo do parâmetro de Sorkin ocorre para $[\theta_{et} + \mu_{et} - (\theta + \mu)] = 2n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), que é exatamente a visibilidade. Por outro lado, para $[\theta_{et} + \mu_{et} - (\theta + \mu)] = (2n + 1)(\pi/2)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) nós temos $\kappa = 0$, e nenhum efeito de caminhos exóticos é observado. Portanto, fica evidente que podemos evidenciar ou não o efeito de trajetórias exóticas dependendo do valor das fases.

É extremamente interessante analisar os pontos onde o parâmetro de Sorkin possui um valor máximo, para esses pontos de máximo, $|\kappa_{max}| = \mathcal{V}_{et}(1 - \mathcal{V}_{et}) + \dots$, assim o parâmetro de

Sorkin pode ser determinado diretamente por meio da visibilidade ou por meio dos máximos e mínimos da intensidade nesses pontos. De acordo com a literatura, se somente trajetórias não exóticas existem, então a visibilidade na posição $x = 0$ dever ser $\mathcal{V} = 1$. Poranto, desvios da unidade em \mathcal{V}_T podem indicar a existência de trajetórias exóticas, isto é, $\mathcal{V}_{et} = 1 - \mathcal{V}_T$, onde $\mathcal{V}_T = (I_T^{max} - I_T^{min}) / (I_T^{max} + I_T^{min})$. Essa simples forma de medir o efeito de trajetórias exóticas torna esse resultado extremamente importante. Notemos que esse resultado só é verdade na posição $x = 0$. Conseqüentemente, nessa posição, medir as franjas de visibilidade fornece uma estimativa dos efeitos de trajetórias exóticas na interferometria da fenda dupla.

No sentido de obter tais estimativas, consideramos ondas de nêutrons com os mesmos parâmetros anteriores, com a diferença de que iremos segurar a posição $x = 0$, e variar o tempo de propagação depois da fenda τ . Como já mencionado anteriormente, o tempo de propagação entre as fendas ε permanece constante quando mudamos τ ou z_τ . Essa propriedade é importante para construção de nossos resultados. Na Fig.5.3 (a), nós mostramos o parâmetro de Sorkin e na Fig.5.3 (b), a visibilidade em função de z_τ . Podemos observar que a ordem de grandeza do fator de Sorkin e da visibilidade é a mesma, ou seja, 10^{-6} para nêutrons.

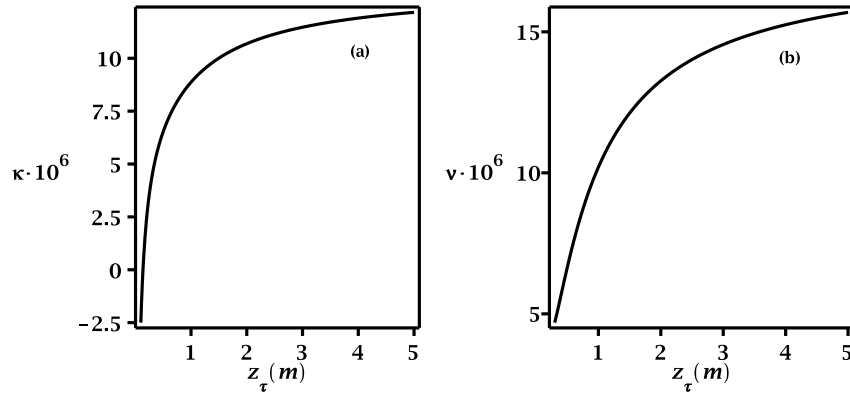


Fig. 5.3: (a) Parâmetro de Sorkin e (b) franjas de visibilidade como uma função de z_τ . A magnitude do parâmetro de Sorkin é 10^{-6} , semelhante quando em função de x .

Perante isso, medindo as franjas de visibilidade é possível evidenciar a contribuição de caminhos exóticos no padrão de interferência, por outro lado é necessário uma precisão ainda muito boa, pois as ordens de grandeza envolvidas são bem pequenas, como visto, $\approx 10^{-6}$. Na próxima seção, iremos mostrar que a ordem de magnitude do parâmetro de Sorkin, assim como das franjas de visibilidade, podem ser amplificados no regime de Fresnel ajustando alguns parâmetros do experimento de fenda dupla.

5.5 Regime de Fresnel e trajetórias exóticas

Como apontado por Sinha e colaboradores [32]-[33], o parâmetro de Sorkin é muito sensível em relação aos parâmetros da configuração experimental. Na referência [33], foi obtido uma expressão analítica para o parâmetro de Sorkin no experimento de fenda tripla, que é válida no regime de Fraunhofer ($\mathcal{F} = \frac{\beta^2}{z_\tau \lambda} \ll 1$), onde denotaremos z_τ como a distância das fendas ao detector. Na Fig.4 da referência [33], o comportamento do fator de Sorkin em função da distância da fenda ao anteparo foi obtido para fótons via simulação numérica. Esse resultado é válido no regime de Fraunhofer bem como no regime de Fresnel, porém nenhuma expressão compatível com o regime de Fresnel foi apresentada.

Confrontando isso, nosso modelo de fenda dupla é capaz de inferir análises em regiões longe da fenda (Fraunhofer) quanto em regiões próximas (Fresnel). Na Fig.5.4, mostramos o parâmetro de Sorkin de nosso modelo em função da distância z_τ considerando nêutrons, entretanto utilizando os parâmetros da fenda tripla, como largura das fendas e distância da fonte até as mesmas, feita com fótons em [33]

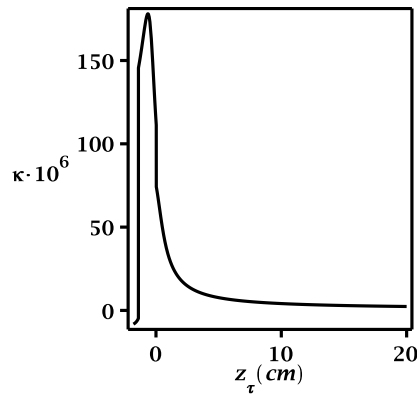


Fig. 5.4: Comportamento do parâmetro de Sorkin, de nosso modelo, em função da distância da fenda dupla ao anteparo, considerando nêutrons submetidos aos parâmetros de fenda tripla utilizados para o fóton na Fig.4 da Referência [33].

Apesar de utilizarmos diferentes configurações de interferometria, fenda dupla e fenda tripla, respectivamente, é possível observar uma boa concordância qualitativa entre nosso modelo e a simulação numérica feita por Sinha e colaboradores [33]. Na próxima seção, mostraremos que na zona de Fresnel somos capazes de amplificar o efeito de trajetórias exóticas no experimento de fenda dupla considerando ondas de nêutrons.

5.6 Amplificação do parâmetro de Sorkin no regime de Fresnel

Em 2016, Robert W. Boyd e colaboradores, realizaram a primeira medida experimental do desvio no princípio da superposição, via parâmetro de Sorkin, considerando o experimento de fenda tripla [49]. Controlando a intensidade e a distribuição de campos eletromagnéticos em torno das fendas, foi possível aumentar drasticamente a probabilidade de ocorrência de trajetórias exóticas para o fóton, encontrando um fator $\kappa \approx 10^{-1}$. No entanto, para observar essa amplificação no fator de Sorkin, foi utilizado um material capaz de confinar campos eletromagnéticos na superfície do metal [50].

Já em 2017, Sinha e colaboradores partindo da forte dependência do efeito dos caminhos exóticos em relação a certos parâmetros experimentais da fenda tripla, conseguiram obter a primeira medida do parâmetro de Sorkin no regime de microondas [51].

Seguindo nossa abordagem teórica de fenda dupla, escolhemos os seguintes parâmetros para ondas de nêutrons: $z_t = 20$ cm, $\sigma_0 = 3.0$ μm , $\beta = 6.0$ μm , $d = 240$ μm e $\lambda = 10$ nm. Para esse conjunto de parâmetros, nossas aproximações são mantidas. Na Fig.5.5 (a), mostramos o parâmetro de Sorkin, e as franjas de visibilidade na Fig.5.5 (b), como função de z_τ . Existe um valor máximo do parâmetro de Sorkin da ordem $|\kappa| \approx 3.05 \times 10^{-3}$ para uma distância $z_\tau = 3.94$ cm que corresponde a um número de Fresnel $\mathcal{F} = 0.091$, ou seja, no regime de Fresnel (ou regime intermediário). A linha pontilhada corresponde ao fator de Sorkin da ordem de $\kappa \approx 2.97 \times 10^{-6}$, sendo $\mathcal{F} = 0.000036$, isto é, no regime de Fraunhofer.

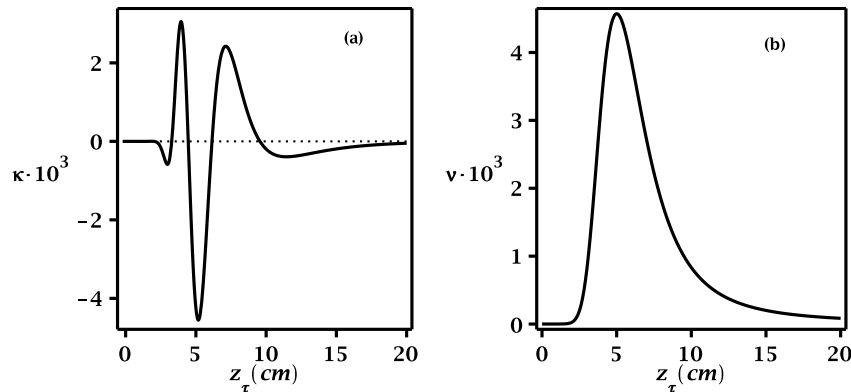


Fig. 5.5: (a) Parâmetro de Sorkin e (b) franjas de visibilidade como função de z_τ . Observamos um aumento no parâmetro de Sorkin e nas franjas de visibilidade, de pelo menos três ordens de grandeza para alguns valores de z_τ .

Nesse sentido, uma vez que no regime de Fresnel (intermediário) existe um aumento signifi-

cativo no parâmetro de Sorkin, a fenda dupla pode vir a ser um excelente interferômetro capaz de detectar a contribuição de trajetórias exóticas de ondas de matéria, por meio de medidas nas franjas de visibilidade. Acreditamos que as implicações físicas, de caminho exóticos, podem ser importantes nos estudos de interferometria com decoerência, aumento na complexidade de protocolos quânticos e simulação de novos algoritmos em computação quântica [49].

Capítulo 6

Conclusão

Investigamos de forma teórica os efeitos da inclusão de trajetórias exóticas em experimentos de interferência com ondas de matéria. Propomos inicialmente um modelo simples para estudar os efeitos da fase de Gouy no experimento de fenda tripla, quando caminhos exóticos são considerados. Nessas perspectivas, demonstramos que essa fase desempenha uma papel importante no padrão de interferência, além de ser imprescindível na determinação do parâmetro de Sorkin, que é utilizado para quantificar os efeitos físicos de caminhos menos prováveis. Considerando a posição $x = 0$ e fixando o tempo de propagação pós fenda em $\tau = 2$ ns, o erro percentual ao desconsiderarmos a fase de Gouy foi de 51,1%. Esse resultado deixou evidente que existe uma forte relação entre a fase de Gouy e o efeito de caminhos exóticos na configuração experimental de três fendas, considerando ondas de matéria.

Se utilizarmos parâmetro de Sorkin descrito na literatura, o mesmo que foi inicialmente definido para a fenda tripla, seria impossível de inferir na fenda dupla a existência de caminhos exóticos. Por outro lado, em nosso trabalho adotamos uma definição capaz de atestar a ordem das correções no princípio da superposição, tanto no experimento de fenda tripla quanto na configuração de fenda dupla. Além disso, para pontos específicos da tela de detecção, mostramos ser possível relacionar a evidência de trajetórias menos prováveis com as franjas de visibilidade.

Na posição $x = 0$, encontramos uma expressão para as franjas de visibilidade totalmente oriunda de caminhos exóticos. Ainda nessa posição, fomos capazes de escrever o parâmetro de Sorkin em função da visibilidade e das fases axiais. Portanto, nosso trabalho nos possibilita afirmar a existência de caminhos menos prováveis na fenda dupla, medindo desvios da unidade (valor sem caminhos exóticos) nas franjas de visibilidade.

Por fim, mostramos que na zona de Fresnel (regime intermediário) existe um conjunto apropriado de parâmetros que podem proporcionar um significativo aumento no parâmetro de Sorkin κ no experimento de fenda dupla de Young.

Capítulo 7

Perspectivas

Como perspectiva, planejamos continuar utilizando a fenda dupla afim de indicar a existência de caminhos exóticos. No entanto, buscaremos formas alternativas ao parâmetro de Sorkin para atestar a existência de caminhos menos prováveis. Uma maneira alternativa, seria olhar para a distribuição de Wigner desses estados quânticos [52]. Para uma função de onda unidimensional, temos que

$$W(x, k) = \frac{1}{2\pi} \int \Psi^* \left(x - \frac{y}{2} \right) \Psi \left(x + \frac{y}{2} \right) e^{-iky} dy. \quad (7.1)$$

Devido ao fato de que a função de Wigner poder assumir valores negativos, ela não pode ser interpretada como uma distribuição de probabilidade regular de duas variáveis aleatórias, assim essa função é usualmente dita ser uma distribuição de quase-probabilidade. Uma possível maneira de quantificar a não-classicalidade de um dado estado pode ser baseada na negatividade da função de Wigner, que é interpretada com uma assinatura quântica. Realizações experimentais já foram feitas no sentido de medir as funções de Wigner, utilizando a interferometria da fenda dupla com átomos de Hélio [53]. Diante disso, esperamos que ao adicionar mais caminhos na função de ondas total, o sistema se tornará mais quântico, ou seja, passará a ter uma maior parte negativa.

Neste sentido, um indicador de não classicalidade de um dado estado quântico pode ser definido como sendo o volume da parte negativa da função de Wigner, como apontado por Kenfack [54]. Assim, o dobro do volume da parte negativa da função de Wigner quando consideramos trajetórias exóticas na fenda dupla, $\Psi_T = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_{12} + \Psi_{21}$, pode ser escrito como

$$\delta_T = \int \int |W_T(x, k)| dx dk - 1. \quad (7.2)$$

Quando consideramos apenas trajetórias clássicas, caminhos não exóticos, na superposição da fenda dupla, $\Psi_c = \Psi_1 + \Psi_2$, o dobro do volume da parte negativa seria dado por

$$\delta_c = \int \int |W_c(x, k)| dx dk - 1. \quad (7.3)$$

No capítulo 5, evidenciamos os efeitos de caminhos exóticos na fenda dupla por meio da subtração das intensidades, equação (5.24). Aqui, por meio das funções de Wigner poderíamos fazer um procedimento semelhante, porém envolvendo a subtração dos volumes

$$\delta_{et} = \delta_T - \delta_c. \quad (7.4)$$

Portanto, a equação (7.4) mostra que é possível utilizar a medida de não classicidade, ou volume da parte negativa das funções de Wigner, para ressaltar a existência de caminhos exóticos no experimento de fenda dupla.

Ainda como perspectiva, pretendemos analisar quais são os efeitos causados pela decoerência, ou seja, interação do sistema com o ambiente, sobre o fator de Sorkin κ . Recentemente, Laurant mostrou, que estados que possuem uma compressão (squeezing) em posição resistem mais à perdas por decoerência [55]. Partindo disso, iremos analisar se para esses estados comprimidos, embora o efeito do ambiente esteja presente, ainda seja possível evidenciar o efeito de trajetórias exóticas no experimento de fenda dupla de forma significativa.

Apêndice A

Integrais Gaussianas, a fórmula de Parseval e produto infinito de Euler

Esse apêndice tem como objetivo, mostrar as diversas ferramentas matemáticas utilizadas no cálculo do propagador da partícula livre e do oscilador harmônico

Integrais Gaussianas

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{a(x_1-x)^2+b(x_2-x)^2} dx = \sqrt{\frac{-\pi}{a+b}} \exp\left[\frac{ab}{a+b}(x_1-x_2)^2\right]. \quad (\text{A.1})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax^2+bx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{-a}} e^{\frac{-b^2}{4a}}. \quad (\text{A.2})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (\text{A.3})$$

Fórmula de Parseval

Para uma função $u(t)$ decomposta em série de Fourier, tal que

$$z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \sin[\Omega_n(t-ta)], \quad (\text{A.4})$$

o seu módulo ao quadrado é dado pela relação

$$\|u\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} |u(t)|^2 dt = \frac{t_2-t_1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |u(t)|^2. \quad (\text{A.5})$$

Fórmula do Produto Infinito de Euler

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right). \quad (\text{A.6})$$

Apêndice B

Propagador do oscilador harmônico via integral de caminho

Nessa seção, iremos obter o propagador para o caso de uma partícula sujeita a um potencial quadrático. Em diversas aplicações da natureza, é comum nos depararmos com potenciais que podem ser aproximados pelo potencial do oscilador harmônico. A Lagrangeana para tal sistema já foi calculada na equação (3.21), no entanto sabemos que a equação de movimento para uma partícula sujeita a esse tipo de potencial é dada por

$$m\ddot{x} + m\omega^2 = 0, \quad (\text{B.1})$$

essa equação descreve a trajetória clássica do oscilador, $\bar{x}(t)$. Representando as condições iniciais por $\bar{x}(t_a) = x_a$ e $\bar{x}(t_b) = x_b$, podemos escrever um caminho arbitrário indo de x_a a x_b , como $x(t) = \bar{x}(t) + z(t)$, sendo que $z(t_a) = z(t_b) = 0$. Assim, é possível calcular a ação do oscilador harmônico como

$$S[x(t)] = \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{m}{2} (\dot{\bar{x}} + \dot{z})^2 - \frac{m\omega^2}{2} (\bar{x} + z)^2 \right], \quad (\text{B.2})$$

expandido os termos quadráticos da integral, temos

$$S[x] = \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{m}{2} \dot{\bar{x}}^2 - \frac{m\omega^2}{2} \bar{x}^2 \right] dt + \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{m}{2} \dot{z}^2 - \frac{m\omega^2}{2} z^2 \right] dt + \int_{t_a}^{t_b} [m\dot{\bar{x}}\dot{z} - m\omega^2 \bar{x}z] dt, \quad (\text{B.3})$$

a última integral se anula em um processo de integração por partes, devido as condições de contorno e à equação de movimento (B.1), logo a ação pode ser reescrita como

$$S[x] = S[\bar{x}] + S_0[z], \quad (\text{B.4})$$

onde,

$$S_0[z] = \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{m}{2} \dot{z}^2 - \frac{m\omega^2}{2} z^2 \right], \quad (\text{B.5})$$

assim o propagador fica

$$K(b, a) = \exp \left(\frac{i}{\hbar} S[\bar{x}] \right) \int_{z_a=0}^{z_b=0} \mathcal{D}_z \cdot \exp \left[\frac{im}{2\hbar} \int_{t_a}^{t_b} (\dot{z}^2 - \omega^2 z^2) dt \right] \quad (\text{B.6})$$

sendo que

$$\mathcal{D}_z = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\left(\frac{2\pi i \hbar T}{m} \right)^{-N/2} \prod_{k=1}^{N-1} dz_k \right], \quad (\text{B.7})$$

os limites de integração, nesse caso, significam que as trajetórias se anulam em t_a e t_b . Em seguida, é conveniente decompor a função $z(t)$ em série de Fourier

$$z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \sin [\Omega_n(t - t_a)], \quad (\text{B.8})$$

sendo, $\Omega_n = n\pi/T$ e $T = t_b - t_a$, assim o propagador torna-se

$$K(b, a) = e^{\left(\frac{i}{\hbar} S[\bar{x}]\right)} \int \mathcal{D}_z \exp \left[\frac{im}{2\hbar} \int_{t_a}^{t_b} (\Omega_n^2 \left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \cos[\Omega_n(t - t_a)] \right|^2 - \omega^2 \left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \sin[\Omega_n(t - t_a)] \right|^2) dt \right], \quad (\text{B.9})$$

utilizando a formula de Parserval, equação A.5 (apêndice A), temos que

$$K(b, a) = \exp \left(\frac{i}{\hbar} S[\bar{x}] \right) \int \mathcal{D}_z \cdot \exp \left\{ \frac{imT}{4\hbar} \left[\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2 (\Omega_n^2 - \omega^2) \right] \right\}, \quad (\text{B.10})$$

de forma compacta a integral do propagador pode ser escrita como

$$K(b, a) = F(T) \exp \left(\frac{i}{\hbar} S[\bar{x}] \right), \quad (\text{B.11})$$

de modo que $F(T)$ é o produto das integrais Gaussianas

$$F(T) = F_0 \prod_{n=1}^{\infty} \int \exp \left\{ \frac{imT}{4\hbar} z_n^2 (\Omega_n^2 - \omega) \right\} dz_n, \quad (\text{B.12})$$

e F_0 é um termo independente de ω , que será explicitado a posteriori. Utilizando as integrais Gaussianas A.2 (apêndice A), $F(T)$ torna-se

$$F(T) = F_0 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4\pi i\hbar}{mT(\Omega_n^2 - \omega^2)} \right)^{1/2} \quad (\text{B.13})$$

$$= F_0 \left[\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4\pi i\hbar T}{mn^2\pi^2} \right)^{1/2} \right] \left[\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_n^2} \right) \right]^{-1/2}, \quad (\text{B.14})$$

para o último produtório, utilizamos a fórmula do produto infinito de Euler, equação A.6 (apêndice A), assim $F(T)$ fica

$$F(T) = F_0 \left(\frac{\omega T}{\sin(\omega T)} \right)^{1/2} \left[\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4\pi i\hbar T}{mn^2\pi^2} \right)^{1/2} \right] \quad (\text{B.15})$$

Aqui, devemos escolher o valor de F_0 de modo que no limite $\omega \rightarrow 0$, o propagador do oscilador harmônico seja o mesmo da partícula livre, assim

$$F(T) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin(\omega T)} \right)^{1/2}. \quad (\text{B.16})$$

Portanto, chegamos finalmente no propagador do oscilador harmônico

$$K(b, a) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin(\omega T)} \right)^{1/2} \cdot \exp \left(\frac{i}{\hbar} S[\bar{x}] \right). \quad (\text{B.17})$$

Assim como para a partícula livre, o propagador do oscilador harmônico descrito pela equação (B.17) é completamente análogo ao resultado obtido pela mecânica quântica habitual.

Apêndice C

Constantes físicas do experimento de fenda tripla

Segue abaixo, as expressões para constantes físicas que descrevem as funções de onda de trajetórias exóticas e não exóticas no experimento de fenda tripla. O índice subscrito R e I, são respectivamente as partes reais e imaginárias dos números complexos que aparecem como soluções nas equações (4.8-4.11)

Constantes para as funções de onda não exóticas

$$\begin{aligned} z_R &= (z_{0R}z_{1R} - z_{0I}z_{1I})(z_{2R}z_{3I} + z_{2I}z_{3R}) + \\ &+ (z_{0R}z_{1I} + z_{0I}z_{1R})(z_{2R}z_{3R} - z_{2I}z_{3I}), \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{aligned} z_I &= (z_{0R}z_{1R} - z_{0I}z_{1I})(z_{2R}z_{3R} - z_{2I}z_{3I}) \\ &- (z_{0R}z_{1I} + z_{0I}z_{1R})(z_{2R}z_{3I} + z_{2I}z_{3R}), \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$$z_{0R} = \frac{1}{2\sigma_0^2}, \quad z_{0I} = -\frac{m}{2\hbar t}, \quad (\text{C.3})$$

$$z_{1R} = \frac{1}{2\beta^2} + \frac{m^2 z_{0R}}{4\hbar^2 t^2 (z_{0R}^2 + z_{0I}^2)}, \quad (\text{C.4})$$

$$z_{1I} = -\left(\frac{m}{4\hbar\epsilon} + \frac{m}{2\hbar t} + \frac{m^2 z_{0I}}{4\hbar^2 t^2 (z_{0R}^2 + z_{0I}^2)} \right), \quad (\text{C.5})$$

$$z_{2R} = \frac{1}{2\beta^2} + \frac{m^2 z_{1R}}{16\hbar^2 \epsilon^2 (z_{1R}^2 + z_{1I}^2)}, \quad (\text{C.6})$$

$$z_{2I} = - \left(\frac{m}{2\hbar\epsilon} + \frac{m^2 z_{1I}}{16\hbar^2 \epsilon^2 (z_{1R}^2 + z_{1I}^2)} \right), \quad (\text{C.7})$$

$$z_{3R} = \frac{1}{2\beta^2} + \frac{m^2 z_{2R}}{16\hbar^2 \epsilon^2 (z_{2R}^2 + z_{2I}^2)}, \quad (\text{C.8})$$

$$z_{3I} = - \left(\frac{m}{2\hbar\tau} + \frac{m}{4\hbar\epsilon} + \frac{m^2 z_{2I}}{16\hbar^2 \epsilon^2 (z_{2R}^2 + z_{2I}^2)} \right), \quad (\text{C.9})$$

$$z_{4R} = z_{1R}^2 z_{2R} - z_{1I}^2 z_{2R} - 2z_{1R} z_{1I} z_{2I}, \quad (\text{C.10})$$

$$z_{4I} = z_{1R}^2 z_{2I} - z_{1I}^2 z_{2I} + 2z_{1R} z_{1I} z_{2R}, \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{aligned} z_{5R} = & z_{3R} (z_{1R}^2 z_{2R}^2 - z_{1R}^2 z_{2I}^2 - z_{1I}^2 z_{2R}^2 + z_{1I}^2 z_{2I}^2 \\ & - 4z_{1R} z_{1I} z_{2R} z_{2I}) - 2z_{3I} (z_{1R}^2 z_{2R} z_{2I} - z_{1I}^2 z_{2R} z_{2I} \\ & + z_{1R} z_{1I} z_{2R}^2 - z_{1R} z_{1I} z_{2I}^2), \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

$$\begin{aligned} z_{5I} = & z_{3I} (z_{1R}^2 z_{2R}^2 - z_{1R}^2 z_{2I}^2 - z_{1I}^2 z_{2R}^2 + z_{1I}^2 z_{2I}^2 \\ & - 4z_{1R} z_{1I} z_{2R} z_{2I}) + 2z_{3R} (z_{1R}^2 z_{2R} z_{2I} \\ & - z_{1I}^2 z_{2R} z_{2I} + z_{1R} z_{1I} z_{2R}^2 - z_{1R} z_{1I} z_{2I}^2), \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

$$z_{6R} = z_{1R} z_{2R} z_{3R} - z_{1R} z_{2I} z_{3I} - z_{1I} z_{2R} z_{3I} - z_{1I} z_{2I} z_{3R}, \quad (\text{C.14})$$

$$z_{6I} = z_{1R} z_{2R} z_{3I} + z_{1R} z_{2I} z_{3R} + z_{1I} z_{2R} z_{3R} - z_{1I} z_{2I} z_{3I}. \quad (\text{C.15})$$

$$C_1 = \frac{\frac{m^2}{\hbar^2 \tau^2} \mathcal{A}}{4 [\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2]}, \quad (\text{C.16})$$

$$C_2 = \frac{\frac{2m d}{\hbar \tau \beta^2} \mathcal{B}}{4 [\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2]}, \quad (\text{C.17})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \left(\frac{1}{2\beta^2} + \frac{m^2\sigma_0^2}{2(\hbar^2 t^2 + m^2\sigma_0^4)} \right) \\ \mathcal{B} &= \left(\frac{m^3\sigma_0^4}{2\hbar t(\hbar^2 t^2 + m^2\sigma_0^4)} - \frac{m}{2\hbar t} - \frac{m}{2\hbar\tau} \right) \\ C_3 &= -\frac{d^2}{2\beta^2} + \frac{\hbar^2\tau^2 d^2}{m^2\beta^4} C_1, \quad \gamma = \frac{2d\hbar\tau}{m\beta^2} C_1,\end{aligned}\tag{C.18}$$

$$\alpha = \frac{m}{2\hbar\tau} + \frac{m\beta^2}{2\hbar\tau} C_2, \quad \theta_C = \frac{\hbar\tau d}{2m\beta^2} C_2,\tag{C.19}$$

$$\mu_c(t, \tau) = -\frac{1}{2} \arctan \left[\frac{t + \tau(1 + \frac{\sigma_0^2}{\beta^2})}{\tau_0(1 - \frac{t\tau\sigma_0^2}{\tau_0^2\beta^2})} \right],\tag{C.20}$$

Constantes para as funções exóticas

$$A_{et} = \sqrt{\frac{m^3\sqrt{\pi}}{16\hbar^3\tau t\epsilon\sigma_0\sqrt{z_R^2 + z_I^2}}},\tag{C.21}$$

$$C_{1et} = \frac{m^2 z_{3R}}{4\hbar^2\tau^2(z_{3R}^2 + z_{3I}^2)},\tag{C.22}$$

$$C_{2et} = \frac{m^3 dz_{6I}}{32\hbar^3\beta^2\tau\epsilon^2(z_{6R}^2 + z_{6I}^2)} + \frac{mdz_{3I}}{2\hbar\tau\beta^2(z_{3R}^2 + z_{3I}^2)},\tag{C.23}$$

$$\begin{aligned}C_{3et} &= \frac{d^2 z_{1R}}{4\beta^4(z_{1R}^2 + z_{1I}^2)} - \frac{m^2 d^2 z_{4R}}{64\beta^4\hbar^2\epsilon^2(z_{4R}^2 + z_{4I}^2)} \\ &+ \frac{m^4 d^2 z_{5R}}{4^5\hbar^4\beta^4\epsilon^4(z_{5R}^2 + z_{5I}^2)} + \frac{m^2 d^2 z_{6R}}{32\beta^4\epsilon^2\hbar^2(z_{6R}^2 + z_{6I}^2)} \\ &+ \frac{d^2 z_{3R}}{4\beta^4(z_{3R}^2 + z_{3I}^2)} - \frac{d^2}{\beta^2},\end{aligned}\tag{C.24}$$

$$\alpha_{et} = \frac{m}{2\hbar\tau} + \frac{m^2 z_{3I}}{4\hbar^2\tau^2(z_{3R}^2 + z_{3I}^2)},\tag{C.25}$$

$$\gamma_{et} = \frac{m^3 dz_{6R}}{32\hbar^3\beta^2\tau\epsilon^2(z_{6R}^2 + z_{6I}^2)} + \frac{mdz_{3R}}{2\hbar\tau\beta^2(z_{3R}^2 + z_{3I}^2)},\tag{C.26}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{et} &= \frac{d^2 z_{1I}}{4\beta^4(z_{1R}^2 + z_{1I}^2)} - \frac{m^2 d^2 z_{4I}}{64\beta^4 \hbar^2 \epsilon^2 (z_{4R}^2 + z_{4I}^2)} \\
&+ \frac{m^4 d^2 z_{5I}}{4^5 \hbar^4 \beta^4 \epsilon^4 (z_{5R}^2 + z_{5I}^2)} + \frac{m^2 d^2 z_{6I}}{32\beta^4 \epsilon^2 \hbar^2 (z_{6R}^2 + z_{6I}^2)} \\
&+ \frac{d^2 z_{3I}}{4\beta^4 (z_{3R}^2 + z_{3I}^2)}, \tag{C.27}
\end{aligned}$$

$$\mu_{et} = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{z_I}{z_R} \right). \tag{C.28}$$

Apêndice D

Constantes físicas do experimento de fenda dupla

Semelhante ao apêndice C, aqui nós apresentaremos as expressões para constantes físicas que descrevem as funções de onda de trajetórias exóticas (et) e não exóticas (sem subscrito) no experimento de dupla. O índice R e I, são respectivamente as partes reais e imaginárias dos números complexos que aparecem como soluções nas equações (5.11-5.13)

Constantes para as funções não exóticas

$$z_{0R} = \frac{1}{2\sigma_0^2}, \quad (\text{D.1})$$

$$z_{0I} = -\frac{m}{2\hbar t}, \quad (\text{D.2})$$

$$z_{1R} = \frac{m^2 a_{0R}}{4\hbar^2 t^2 (a_{0R}^2 + a_{0I}^2)} + \frac{1}{2\beta^2}, \quad (\text{D.3})$$

$$z_{1I} = -\frac{m^2 a_{0R}}{4\hbar^2 t^2 (a_{0R}^2 + a_{0I}^2)} - \frac{m}{2\hbar t} - \frac{m}{2\hbar \tau}, \quad (\text{D.4})$$

$$z_R = \Re_e [(a_{0R} + ia_{0I})(a_{1R} + ia_{1I})], \quad (\text{D.5})$$

$$z_I = \Im_m [(a_{0R} + ia_{0I})(a_{1R} + ia_{1I})], \quad (\text{D.6})$$

$$A = \frac{\pi}{\sqrt{\sigma_0}\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{(z_R^2 + z_I^2)}}, \quad (\text{D.7})$$

$$C_1 = -\frac{m^2 a_{1R}}{4\hbar^2 \tau^2 (a_{1R}^2 + a_{1I}^2)}, \quad (\text{D.8})$$

$$C_2 = -\frac{m d a_{1I}}{4\hbar \tau \beta^2 (a_{1R}^2 + a_{1I}^2)}, \quad (\text{D.9})$$

$$C_3 = -\frac{d^2}{8\beta^2} + \frac{d^2 a_{1R}}{16\beta^4 (a_{1R}^2 + a_{1I}^2)}, \quad (\text{D.10})$$

$$\alpha = \frac{m}{2\hbar \tau} + \frac{m^2 a_{1I}}{4\hbar^2 \tau^2 (a_{1R}^2 + a_{1I}^2)}, \quad (\text{D.11})$$

$$\gamma = -\frac{m d a_{1R}}{4\hbar \tau \beta^2 (a_{1R}^2 + a_{1I}^2)}, \quad (\text{D.12})$$

$$\theta = -\frac{d^2 a_{1I}}{16\beta^4 (a_{1R}^2 + a_{1I}^2)}, \quad (\text{D.13})$$

$$\mu = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{z_I}{z_R}\right). \quad (\text{D.14})$$

Constantes para as funções exóticas

$$z_{0Ret} = a_{0R}, \quad (\text{D.15})$$

$$z_{0Iet} = a_{0I}, \quad (\text{D.16})$$

$$z_{1Ret} = a_{1R}, \quad (\text{D.17})$$

$$z_{1Iet} = -\frac{m^2 a_{0Ret}}{4\hbar^2 t^2 (a_{0Ret}^2 + a_{0Iet}^2)} - \frac{m}{2\hbar t} - \frac{m}{2\hbar \varepsilon}, \quad (\text{D.18})$$

$$z_{2Ret} = \frac{1}{2\beta^2} + \frac{m^2 a_{1Ret}}{4\hbar^2 \varepsilon^2 (a_{1Ret}^2 + a_{1Iet}^2)}, \quad (\text{D.19})$$

$$z_{2Iet} = -\frac{m^2 a_{1Ret}}{4\hbar^2 \varepsilon^2 (a_{1Ret}^2 + a_{1Iet}^2)} - \frac{m}{2\hbar \tau} - \frac{m}{2\hbar \varepsilon}, \quad (\text{D.20})$$

$$z_{3R_{et}} = \Re_e [(a_{1R_{et}} + ia_{1I_{et}})(a_{2R_{et}} + ia_{2I_{et}})], \quad (D.21)$$

$$z_{3I_{et}} = \Im_m [(a_{1R_{et}} + ia_{1I_{et}})(a_{2R_{et}} + ia_{2I_{et}})], \quad (D.22)$$

$$z_{5R_{et}} = \Re_e [(a_{1R_{et}} + ia_{1I_{et}})^2(a_{2R_{et}} + ia_{2I_{et}})], \quad (D.23)$$

$$z_{3I_{et}} = \Im_m [(a_{1R_{et}} + ia_{1I_{et}})^2(a_{2R_{et}} + ia_{2I_{et}})], \quad (D.24)$$

$$z_{R_{et}} = \Im_m [(a_{0R_{et}} + ia_{0I_{et}})(a_{1R_{et}} + ia_{1I_{et}})(a_{2R_{et}} + ia_{2I_{et}})], \quad (D.25)$$

$$z_{I_{et}} = \Re_e [(a_{0R_{et}} + ia_{0I_{et}})(a_{1R_{et}} + ia_{1I_{et}})(a_{2R_{et}} + ia_{2I_{et}})], \quad (D.26)$$

$$A_{et} = \frac{\pi^3}{\sqrt{\sigma_0}\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{(z_{R_{et}}^2 + z_{I_{et}}^2)}}, \quad (D.27)$$

$$C_{1et} = -\frac{m^2 a_{2R_{et}}}{4\hbar^2 \tau^2 (a_{2R_{et}}^2 + a_{2I_{et}}^2)}, \quad (D.28)$$

$$C_{2et} = -\frac{m^2 da_{3R_{et}}}{8\hbar^2 \tau \varepsilon \beta^2 (a_{3R_{et}}^2 + a_{3I_{et}}^2)} + \frac{m da_{2I_{et}}}{4\hbar \tau \beta^2 (a_{2R_{et}}^2 + a_{2I_{et}}^2)}, \quad (D.29)$$

$$\begin{aligned} C_{3et} &= \frac{d^2 a_{1R_{et}}}{16\beta^4 (a_{1R_{et}}^2 + a_{1I_{et}}^2)} - \frac{d^2}{4\beta^2} + \frac{d^2 a_{2R_{et}}}{16\beta^4 (a_{2R_{et}}^2 + a_{2I_{et}}^2)} \\ &+ \frac{d^2 m a_{3I_{et}}}{16\hbar \varepsilon \beta^4 (a_{3R_{et}}^2 + a_{3I_{et}}^2)} - \frac{d^2 m^2 a_{5R_{et}}}{64\hbar^2 \varepsilon^2 \beta^4 (a_{5R_{et}}^2 + a_{5I_{et}}^2)}, \end{aligned} \quad (D.30)$$

$$\alpha_{et} = \frac{m}{2\hbar \tau} + \frac{m^2 a_{2I_{et}}}{4\hbar^2 \tau^2 (a_{2R_{et}}^2 + a_{2I_{et}}^2)}, \quad (D.31)$$

$$\gamma_{et} = \frac{m da_{2R_{et}}}{4\hbar \tau \beta^2 (a_{2R_{et}}^2 + a_{2I_{et}}^2)} + \frac{m^2 da_{3I_{et}}}{8\hbar^2 \tau \varepsilon \beta^2 (a_{3R_{et}}^2 + a_{3I_{et}}^2)}, \quad (D.32)$$

$$\begin{aligned}
\theta_{et} = & -\frac{d^2 a_{1I_{et}}}{16\beta^4 (a_{1R_{et}}^2 + a_{1I_{et}}^2)} - \frac{d^2 a_{2I_{et}}}{16\beta^4 (a_{2R_{et}}^2 + a_{2I_{et}}^2)} \\
& + \frac{d^2 m a_{3R_{et}}}{16\hbar\varepsilon\beta^4 (a_{3R_{et}}^2 + a_{3I_{et}}^2)} + \frac{d^2 m^2 a_{5I_{et}}}{64\hbar^2\varepsilon^2\beta^4 (a_{5R_{et}}^2 + a_{5I_{et}}^2)}, \tag{D.33}
\end{aligned}$$

$$\mu_{et} = -\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{z_{I_{et}}}{z_{R_{et}}}\right). \tag{D.34}$$

Referências Bibliográficas

- [1] M. Born. Zur Quantenmechanik. *Zeitschrift. Phys.*, 37, 2005.
- [2] R. D. Sorkin. Quantum Mechanics as Quantum Measure Theory. *Modern Physics Letters A*, 1994.
- [3] U. Sinha, C. Couteau, Z. Medendorp, Immo Söllner, Raymond Laflamme, and Rafael Sorkin. Testing Born 's Rule in Quantum Mechanics with a Triple Slit Experiment. 2009.
- [4] H. De Raedt, K. Michielsen, and K. Hess. Analysis of multipath interference in three-slit experiments. 012101, 2012.
- [5] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M.Sands. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. Number 376. Library of Congress Catalog, 1965. ISBN: 20650-3.
- [6] Gouy L.G. *Ann. Chim. Phys. Ser.6*, 24:145, 1890.
- [7] Gouy L.G. *C. R. Acad Sci. Paris*, 110:1251, 1890.
- [8] A. E. Siegman. *Lasers*. Number 1243. University Science Books, 1986. ISBN: 0-935702-11-3.
- [9] Anne L'Huillier, M. Lewenstein, P. Salières, Ph. Balcou, M. Yu. Ivanov, J. Larsson, and C. G. Wahlström. High-order harmonic-generation cutoff. *Phys. Rev. A*, 1993.
- [10] T. C. Petersen, D. M. Paganin, M. Weyland, T. P. Simula, S. A. Eastwood, and M. J. Morgan. Measurement of the gouy phase anomaly for electron waves. *Phys. Rev. A*, 2013.
- [11] G. Guzzinati, P. Schattschneider, K. Y. Bliokh, F. Nori, and Jo Verbeeck. Observation of the larmor and gouy rotations with electron vortex beams. *Phys. Rev. Lett.*, 2013.
- [12] P Hariharan and P. A. Robinson. The gouy phase shift as a geometrical quantum effect. *Journal of Modern Optics*, 1996.

- [13] S. Feng and H. G. Winful. Physical origin of the Gouy phase shift. *Opt. Lett.*, 2001.
- [14] Subbarao. D. Topological phase in Gaussian beam optics. *Opt. Lett.*, 1995.
- [15] R. Simon and N. Mukunda. Bargmann invariant and the geometry of the güoy effect. *Phys. Rev. Lett.*, 1993.
- [16] R. W. Boyd. Intuitive explanation of the phase anomaly of focused light beams. *J. Opt. Soc. Am.*, 1980.
- [17] B.E.A Saleh. *Fundamentals of photonics*. Number 983. A Wiley-Interscience Publication, 1991. ISBN: 0-471-83965-5.
- [18] I. G. da Paz, M. C. Nemes, S. Pádua, C. H. Monken, and J. G. Peixoto de Faria. Indirect evidence for the Gouy phase for matter waves. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, 2010.
- [19] I. G. Da Paz, P. L. Saldanha, M. C. Nemes, and J. G. Peixoto De Faria. Experimental proposal for measuring the Gouy phase of matter waves. *New Journal of Physics*.
- [20] R. Ducharme and I. G. da Paz. Gouy phase for relativistic quantum particles. *Phys. Rev. A*, 2015.
- [21] S Sato and S Kawamura. Alignment signal extraction of the optically degenerate {RSE} interferometer using the wave front sensing technique. *Journal of Physics: Conference Series*, 2008.
- [22] I. G. da Paz, R. Soldati, L. A. Cabral, J. G. G. de Oliveira, and Marcos Sampaio. Poisson's spot and gouy phase. *Phys. Rev. A*, 2016.
- [23] T. C. Cohen, B. Diu, and F. Laloe. *Quantum Mechanics*, volume 1. Wiley, 1991. ISBN: 9780471164333.
- [24] L. S. Marinho, H. A. S. Costa, Marcos Sampaio, and I. G. da Paz. Quantum-to-classical transition measure of large molecule diffraction. *EPL (Europhysics Letters)*, 122, 2018.
- [25] M. Beau. Feynman path integral approach to electron diffraction for one and two slits: analytical results. *European Journal of Physics*, 2012.
- [26] S. Frabboni, C. Frigeri, G. C. Gazzadi, and G. Pozzi. Two and three slit electron interference and diffraction experiments. *American Journal of Physics*, 2011.

- [27] M. Born, E. Wolf, and A.B. Bhatia. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*, volume 1. Cambridge University Press, 2000. ISBN: 9780521784498.
- [28] J. S. M. Neto, L. A. Cabral, and I. G da Paz. Position-momentum correlations in matter waves double-slit experiment. *European Journal of Physics*, 2015.
- [29] H. Yabuki. Feynman path integrals in the young double-slit experiment. *International Journal of Theoretical Physics*, 1986.
- [30] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, volume 1. Dover, 1964. ISBN: 64-60036.
- [31] M. Gondran and A. Gondran. Numerical simulation of the double slit interference with ultracold atoms. *American Journal of Physics*, 2005.
- [32] R. Sawant, J. Samuel, Aninda Sinha, Supurna Sinha, and Urbasi Sinha. Nonclassical Paths in Quantum Interference Experiments. 2014.
- [33] A. Sinha, Aravind H. Vijay, and U. Sinha. On the superposition principle in interference experiments. *Nature Publishing Group*, 2015.
- [34] O. C.O. Dahlsten, A. J.P. Garner, and V. Vedral. The uncertainty principle enables non-classical dynamics in an interferometer. 2014.
- [35] C. H. S. Vieira, I. G. da Paz, R. Ducharme, L. A. Cabral, H. Alexander, and M. D. R. Sampaio. Gouy phase in nonclassical paths in a triple-slit interference experiment. *Phys. Rev. A*, 2016.
- [36] C. J. S. Ferreira, L. S. Marinho, T. B. Brazil, L. A. Cabral, J. G. G. de Oliveira Jr., M. D. R. Sampaio, and I. G. da Paz. Gouy phase and visibility in the double-slit experiment. *Annals of Physics*, 362, 2015.
- [37] T. Young. The Bakerian Lecture: On the Theory of Light and Colours. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1802.
- [38] S. Popescu, U. Kingdom, A. Steinberg, J. Lundeen, and C. National. Furtive Approach Rolls Back the Limits of Quantum Uncertainty. 2011.
- [39] C Jönsson. Electron Diffraction at Multiple Slits. *Am. Jour. Phys.*, (1):4–11, 1973.

- [40] A. Zeilinger, R. Gähler, C. G. Shull, W. Treimer, and W. Mampe. Single- and double-slit diffraction of neutrons. *Rev. Mod. Phys.*, 1988.
- [41] O. Carnal and J. Mlynek. Young's double-slit experiment with atoms: A simple atom interferometer. *Phys. Rev. Lett.*, 1991.
- [42] O. Nairz, M. Arndt, and A. Zeilinger. Quantum interference experiments with large molecules. *American Journal of Physics*, 2003.
- [43] M. Scully, Berthold-georg Englert, and H. Walther. Quantum optical tests of complementarity IIx. *Nature Publishing Group*, 1991.
- [44] P. Shadbolt, J. C. F. Mathews, A. Laing, and J. L. O. Brien. with photons. *Nature Publishing Group*, 2014.
- [45] A. Viale, M. Vicari, and N. Zanghì. Analysis of the loss of coherence in interferometry with macromolecules. *Phys. Rev. A*.
- [46] P.R. Berman. *Atom Interferometry*, volume 1. Elsevier Science, 1997. ISBN: 978-0-12-092460-8.
- [47] J. Q. Quach. Which-way double-slit experiments and born-rule violation. *Phys. Rev. A*.
- [48] A. Bramon, G. Garbarino, and B. C. Hiesmayr. Quantitative complementarity in two-path interferometry. *Phys. Rev. A*, 2004.
- [49] I. D. Leon, M. Mirhosseini, R. Fickler, A. Safari, O. S. Magan, U. Mick, B. McIntyre, P. Banzer, B. Rodenburg, G. Leuchs, and R. W. Boyd. Exotic looped trajectories of photons in three-slit interference. *Nature Communications*, 2016.
- [50] W. L. Barnes, A. Dereux, and T. W. Ebbesen. Surface plasmon subwavelength optics. *Nature*, 2003.
- [51] G. Rengaraj, U. Prathwiraj, S. N. Sahoo, R. Somashekhar, and U. Sinha. Measuring the deviation from the superposition principle in interference experiments. *New Journal of Physics*, 2018.
- [52] E. Wigner. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Phys. Rev.*, 1932.
- [53] Ch Kurtsiefer, T. Pfau, and J. Mlynek. Measurement of the wigner function of an ensemble of helium atoms. *Nature*, 1997.

-
- [54] A Kenfack and K Zyczkowski. Negativity of the Wigner function as an indicator of non-classicality. In *J. Opt. B: Quantum Semiclass Opt.*, 2004.
- [55] H. Le Jeannic, A. Cavallès, K. Huang, R. Filip, and J. Laurat. Slowing quantum decoherence by squeezing in phase space. *Phys. Rev. Lett.*, 2018.