Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Estimativas locais para soluções positivas do p-Laplaciano

Cícero Nadiel de Oliveira Sousa

Teresina - 2018

Cícero Nadiel de Oliveira Sousa

Dissertação de Mestrado:

Estimativas locais para soluções positivas do p-Laplaciano

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. José Francisco Alves de Oliveira

Teresina - 2018

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Estimativas locais para soluções positivas do p-Laplaciano

CICERO NADIEL DE OLIVEIRA SOUSA

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 01 de Agosto de 2018.

Banca Examinadora:

José Francisco Alves de Oliveira

Prof. Dr. José Francisco Alves de Oliveira - Presidente

Franciane de Brito Vieira

Prof. Dra. Franciane de Brito Vieira - membro interno

Prof. Dr. Abiel Costa Macedo - membro externo

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

S725e Sousa, Cícero Nadiel de Oliveira.
Estimativas locais para soluções positivas do p-Laplaciano / Cícero Nadiel de Oliveira Sousa. – Teresina, 2018.
86 f.: il. color

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2018.
Orientador: Prof. Dr. José Francisco Alves de Oliveira

1. Análise. 2. Equações Diferenciais Parciais Elípticas. 3. p-Laplaciano. 3. Desigualdades de Harnack. I. Título.

CDD 515.353

A minha filha, Laura;

Aos meus pais, Conceição e Antonio.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pelo fôlego de vida, por me permitir conhecer esta ciência tão linda, a matemática, por me levar onde nunca imaginei chegar. Senhor, sem a tua Graça e Misericórdia, nada disso seria possível.

Aos meus pais Maria da Conceição e Antonio, pela dedicação, pelo zelo, carinho e amor com que me criaram e educaram. Agradeço a ambos por sempre lutarem por mim. Ao meu irmão Toninho, pelos momentos de alegria, pelo apoio e carinho.

À minha família, por todo o carinho, pelo amor e apoio, pelos conselhos e ensinamentos. Aos meus avós, Zé Victor e Luíza, Tico e Francisca. Aos meus tios, Carlim, Chico, Dungão, Magrão, Today e Zé Filho. Às minhas tias, Guga, Rosineide e Vilani (in memoriam). Aos meus primos, Fernando, Lucas e Mateus. À minhas primas Débora, Isa e Vanessa.

À minha amada esposa Laise, por toda a paciência e carinho com que me suportou no decurso deste período, pela força, pelo apoio e companheirismo, diante das dificuldades, por me proporcionar o momento mais incrível da minha vida, nossa princesa Laura.

A todos meus amigos do bairro Canto da Várzea, que contribuíram na minha formação como pessoa, pelas noites tocando violão na esquina, os jogos de futebol no urbano, videogame, “soltar”pipa, pelas aventuras de bicicleta (principalmente quando íamos à cachoeirinha), escaladas, etc. A galera da Banda Paradoxos, que me deram as primeiras dicas para aprender tocar violão, e depois passamos a tocar juntos na banda, bons tempos.

Aos meus amigos do Colégio Landri Sales, em especial, Edson e Rafael. Ao professor e amigo Wilson, que tornou as aulas de matemática ainda mais interessantes e, além disso, me incentivou a dedicar-se aos estudos. E aos demais Professores do Landri, que participaram da minha formação.

A todos os amigos do grupo Edificadores da Fé.

Aos meus amigos (a) da graduação, em especial ao Evaldo, pelo apoio, pela paciência e pelas tardes de estudo aos domingos. Também, aos meus queridos amigos (a) Danilo, Fernanda, Higor, Jonas e Odilene, com os quais dividi momentos incríveis na minha vida.

Aos meus amigos (a) do mestrado, Arilson, Edilson, Edimilson, Josimauro, Juliana, Kelvin, Leandro, Leonardo, Luân, Lucas Cassiano, Luciano (in memoriam), Marcos Paulo, Rafael Emanuel, Rafaelber, Ronniê, Valéria e Ydenilson. Aos amigos, Erisvaldo, João, Márcio e Ruan.

Ao Professor e amigo João Santos, que primeiro me motivou nos estudos (quando só pensava em tocar violão, e não estudava Geometria Analítica), também, aos demais Professores da graduação (UFPI-Picos), Anísia, Antônio José, Calvi, Cícero, Daniel, Erik, Gilberto, Ivanildo e Klaudia. Agradeço a todos, pelo empenho, pela paciência, pelos conselhos e ensinamentos, e por me incentivarem. Todos contribuíram de maneira única para minha formação acadêmica, por todos tenho grande admiração.

Ao meu orientador José Francisco, por quem tenho grande estima, agradeço pela coragem de me orientar, pela dedicação e paciência, pelos conselhos e ensinamentos, e por compartilhar seus conhecimentos comigo.

Aos Professores da Pós-Graduação em Matemática da UFPI-Teresina, em especial, Antonio Wilson, Gleison, Humberto, Jurandir e Roger, pela contribuição na minha formação acadêmica.

Aos Professores, Abiel Costa Macedo e Franciane de Brito Vieira, que prontamente aceitaram o convite para participar da minha banca e pelo tempo que dedicaram a este trabalho.

Agradeço a todos os funcionários da UFPI, técnicos, trabalhadores do RU, pessoal da limpeza e segurança.

Por fim, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

"Porque dele, e por ele, e para ele, são todas as coisas; glória, pois, a ele eternamente. Amém!"

Romanos 11, 36.

Resumo

Neste trabalho consideramos o problema de Dirichlet para soluções positivas da equação p-Laplaciano em um domínio, limitado e suave no espaço euclidiano. Estudamos a técnica iterativa de Moser (Comm. Pure Appl. Math., vol.14 (1961), 577-591) melhorada por Trudinger em (Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), vol.27 (1973), 265-308), a partir da qual fazemos estimativas locais para soluções do operador linearizado associado, e para soluções do problema. Este trabalho é baseado nos seguintes artigos: "*Harnack inequalities, maximum and comparison principles, and regularity of positive solutions of* $\mathtt{p}$-*laplace equations*" de Lucio Damascelli e Berardino Sciunzi (Calc. Var. Partial Differential Equations, vol.25 (2005), 139-159); "*A Strong Comparison Principle for the* $\mathtt{p}$*–Laplacian*" of Paolo Roselli and Berardino Sciunzi (Proc. Amer. Math. Soc. vol.135 (2007), 3217-3224).

Palavras–chave: p-Laplaciano; Desigualdades de Harnack; Princípios de máximo; Princípios de comparação.

Abstract

In this work we consider the Dirichlet problem for positive solutions of p-Laplacian equation on a smooth bounded domain in the euclidean space. We studied the Moser's iterative technique (Comm. Pure Appl. Math., vol.14 (1961), 577-591) improved by Trudinger (Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), vol.27 (1973), 265-308) from which we make local estimates for the solutions of the associated linearized operator, and for solutions of the problem. This work is based on the following articles: "*Harnack inequalities, maximum and comparison principles, and regularity of positive solutions of* $\mathtt{p}$*-laplace equations*" of Lucio Damascelli and Berardino Sciunzi (Calc. Var. Partial Differential Equations, vol.25 (2005), 139-159); "*A Strong Comparison Principle for the* $\mathtt{p}$*–Laplacian*" of Paolo Roselli and Berardino Sciunzi (Proc. Amer. Math. Soc. vol.135 (2007), 3217-3224).

Keywords: p-Laplacian; Harnack inequalities; Maximum principles; Comparison principles.

Sumário

Resumo **v**

Abstract **vi**

1 Noções Preliminares **3**

1.1 Derivada fraca 3

1.2 Espaços de Sobolev 4

1.3 Regra da Cadeia 7

1.4 Desigualdade de Sobolev 8

1.5 Desigualdade de Poincaré 9

1.6 Espaço de Sobolev com peso 10

2 Desigualdade de Harnack e princípio do máximo forte **14**

2.1 Desigualdades de Harnack 14

2.2 Princípio do Máximo Forte 38

3 Princípios de Comparação **40**

3.1 Princípio de Comparação I 40

3.2 Princípios de Comparação II 41

A Demonstrações dos Teoremas 2.5 e 2.7 **51**

A.1 Demonstração do Teorema 2.5 51

A.2 Demonstração do Teorema 2.7 70

Referências Bibliográficas **74**

Introdução

Neste trabalho consideramos o seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u) & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

com f localmente Lipschitz, onde Ω é um domínio (isto é, aberto e conexo) limitado e com fronteira suave em $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$ e $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ para $1 < p < \infty$ (Δ_p é chamado de p-Laplaciano).

Os principais resultados discutidos neste trabalho são obtidos por meio de estimativas locais via técnica de iteração de Moser [16], a qual foi melhorada por Trudinger [23], combinada com propriedades de regularidade acerca de $\frac{1}{|\nabla u|}$ obtidas por Damascelli e Sciunzi em [7], onde $u \in C^1(\overline{\Omega})$ é uma solução fraca de (1).

No Capítulo 1, recordamos alguns conceitos e resultados básicos sobre os espaços de Sobolev, os quais serviram como base para um melhor entendimento deste trabalho.

No Capítulo 2, iniciamos a Seção 2.1 relembrando o conceito de funções harmônicas e provamos a desigualdade clássica de Harnack, com o objetivo de introduzir os resultados mais gerais a serem discutidos acerca do tema. Logo após, consideramos $u \in C^1(\overline{\Omega})$ solução fraca de (1), expomos o resultado de regularidade a respeito de $\frac{1}{|\nabla u|}$, e definimos o espaço de Sobolev com o peso $\sigma \equiv |\nabla u|^{p-2}$ associado ao problema estudado, com base nisso, exibimos uma desigualdade de Sobolev com peso $\sigma \equiv |\nabla u|^{p-2}$ provada em [7]. Em seguida, apresentamos o operador linearizado associado a (1) o qual é dado por

$$L_u(v, \varphi) \equiv \int_\Omega \left[|\nabla u|^{p-2}(\nabla v, \nabla\varphi) + (p-2)|\nabla u|^{p-4}(\nabla u, \nabla v)(\nabla u, \nabla\varphi) - f'(u)v\varphi\right] dx.$$

Mostramos desigualdades fracas de Harnack para uma sub-solução (respectivamente para uma super-solução) do operador linearizado e desigualdades de comparação fraca de Harnack para soluções de (1), estas provadas por Damascelli e Sciunzi em [6]. Na Seção 2.2, introduzimos o princípio do máximo clássico, logo depois, como aplicação dos resultados apresentados na seção anterior, provamos um princípio do máximo para uma solução do operador linearizado, também provado em [6].

No Capítulo 3, como consequência da desigualdade de comparação fraca de Harnack apresentada no Capítulo 2, obtemos um princípio de comparação para soluções de (1), resultado este provado em [6]. Além disso, expomos dois princípios de comparação para soluções de (1), provados por Roselli e Sciunzi em [19], onde assumimos novas hipóteses sobre $\mathtt{f}$, mais precisamente, no resultado da Seção 3.1 pedi-se que $\mathtt{f}$ seja positiva, assim, o objetivo agora é lidar com a mudança de sinal de $\mathtt{f}$.

Finalmente, o Apêndice é dedicado as demonstrações (mais técnicas) de dois resultados principais deste trabalho, para ser mais preciso, a desigualdade fraca de Harnack para uma super-solução do operador linearizado e uma desigualdade de comparação fraca de Harnack para soluções de (1), com a intenção de tornar a leitura mais simples.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo iremos estabelecer as notações a serem usadas e recordar alguns conceitos e fatos básicos necessários para uma melhor compreensão dos capítulos seguintes. As demonstrações de alguns dos resultados serão omitidas, mas, nestes casos deixaremos claro (pelo menos) uma referência para leitura.

1.1 Derivada fraca

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto. Denotamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço das funções $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis, com suporte compacto em Ω ($\operatorname{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega \mid \varphi(x) \neq 0\}} \subset \Omega$).

Notação. (i) Um vetor $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, é chamado um multi-índice de ordem

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N.$$

(ii) Dados dois multi-índices $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$ e $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_N)$, dizemos que $\alpha \leqslant \beta$ quando $\alpha_i \leqslant \beta_i$ para todo $i = 1, \cdots, N$.

(iii) Para um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$ escrevemos $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_N!$.

(iv) Para $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \in \Omega$. Dado um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$, definimos a α-derivada parcial de u em x, por

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Definição 1.1. *Sejam $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, e α um multi-índice. Dizemos que v é a α-derivada fraca de u, e escrevemos*

$$D^\alpha u = v,$$

quando

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi dx, \quad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Lema 1.1 (Unicidade da derivada fraca)**.** *Uma α-derivada fraca de u, é única a menos de um subconjunto de medida nula.*

Demonstração. Veja [9, Lemma, p. 243]. □

1.2 Espaços de Sobolev

Fixemos $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e $k \in \mathbb{N}$.

Definição 1.2. *O espaço de Sobolev*

$$W^{k,p}(\Omega)$$

consiste das funções $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, tais que para cada multi-índice α com $|\alpha| \leqslant k$, $D^\alpha u$ existe no sentido fraco e $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$.

Observação 1.1. *Se $p = 2$, geralmente escrevemos*

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega) \quad (k = 0, 1, ...)$$

notação esta, motivada pelo fato de $H^k(\Omega)$ ser um espaço de Hilbert.

Definição 1.3. *$W^{k,p}(\Omega)$ torna-se um espaço normado quando munido da seguinte norma*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} & (1 \leqslant p < \infty) \\ \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & (p = \infty) \end{cases} \tag{1.1}$$

Definição 1.4. *(i) Sejam $u \in W^{k,p}(\Omega)$ e uma sequência $(u_n)_{n=1}^\infty \subset W^{k,p}(\Omega)$. Dizemos que u_n converge para u em $W^{k,p}(\Omega)$, e escrevemos*

$$u_n \longrightarrow u \quad \textit{em } W^{k,p}(\Omega),$$

quando

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0.$$

(ii) Escrevemos

$$u_n \longrightarrow u \quad \textit{em } W^{k,p}_{loc}(\Omega),$$

quando

$$u_n \longrightarrow u \quad \textit{em } W^{k,p}(V),$$

para cada $V \subset\subset \Omega$.

Observação 1.2. *O espaço* $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ *é formado pelas funções* $u \in W^{k,p}(V)$, *para cada* $V \subset\subset \Omega$ *(isto é,* $\overline{V} \subset \Omega$ *e* $\overline{V}$ *é compacto).*

Definição 1.5. *Denotemos por*

$$W^{k,p}_0(\Omega)$$

o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ *em* $W^{k,p}(\Omega)$ *com respeito a norma* (1.1).

Portanto, $u \in W^{k,p}_0(\Omega)$ se, e somente se, existe uma sequência $(u_n)_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_n \longrightarrow u$ em $W^{k,p}(\Omega)$.

Teorema 1.1 (Propriedades de derivadas fraca)**.** *Sejam* $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$, $|\alpha| \leqslant k$. *Então:*

(i) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ *e* $D^\beta(D^\alpha) = D^\alpha\left(D^\beta\right) = D^{\alpha+\beta}u$ *para quaisquer multi-índices* α, β *com* $|\alpha| + |\beta| \leqslant k$.

(ii) Para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega)$ *e* $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$, $|\alpha| \leqslant k$.

(iii) Se V *é um subconjunto aberto de* Ω, *então* $u \in W^{k,p}(V)$.

(iv) Se $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, *então* $\varphi u \in W^{k,p}(\Omega)$ *e*

$$D^\alpha(\varphi u) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \varphi D^{\alpha-\beta} u \qquad (\textit{fórmula de Lebniz}),$$

onde $\displaystyle\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$.

Demonstração. Veja [9, Theorem 1, p. 247]. □

Teorema 1.2. *Para cada* $k = 1, 2, ...$ *e* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *o espaço de Sobolev* $W^{k,p}(\Omega)$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Veja [9, Theorem 2, p. 249] □

Teorema 1.3 (Aproximação por funções suaves)**.** *Suponha que* Ω *é limitado, e seja* $u \in W^{k,p}(\Omega)$ *para algum* $1 \leqslant p < \infty$*. Então, existe uma sequência de funções* $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ *em* $C^{\infty}(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ *tal que*

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{em } W^{k,p}(\Omega).$$

Demonstração. Veja [9, Theorem 2, p.251]. □

Teorema 1.4 (Aproximação por funções suaves até a fronteira)**.** *Seja* Ω *limitado e com fronteira* C^1*, assumindo que* $u \in W^{k,p}(\Omega)$ *para algum* $1 \leqslant p < \infty$*. Então existe uma sequência de funções* $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ *em* $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ *tal que*

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{em } W^{k,p}(\Omega).$$

Demonstração. Veja [9, Theorem 3, p.252]. □

Teorema 1.5 (Teorema do Traço)**.** *Sejam* Ω *limitado, com fronteira* C^1 *e* $1 \leqslant p < \infty$*. Então existe um operador linear contínuo*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$$

tal que

(i) $Tu = u_{|_{\partial\Omega}}$ *quando* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$*,*

(ii) $\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$*,*

para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$*, com* $C = C(p, \Omega) > 0$ *(*C *é uma constante que depende somente de* p, Ω*).*

Demonstração. Veja [9, Theorem 1, p.258]. □

Teorema 1.6. *Suponha que* Ω *é limitado, com fronteira* C^1*. Se* $u \in W^{1,p}(\Omega)$*, então*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{se, e somente se,} \quad Tu = 0 \;\; \text{em} \;\; \partial\Omega, \tag{1.2}$$

onde T *é dado pelo Teorema 1.5.*

Demonstração. Veja [9, Theorem 2, p.259]. □

1.3 Regra da Cadeia

Nesta seção iremos apresentar uma versão da regra da cadeia para derivada fraca. Para isso, consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio, limitado e com fronteira suave.

Teorema 1.7. *Sejam* $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ *e* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *com* $1 \leqslant p < \infty$ *então a composição* $f \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ *e* $\nabla(f \circ u) = f'(u)\nabla u$.

Demonstração. Pelo Teorema 1.3, existem funções $u_n \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ tais que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{em} \quad W^{1,p}(\Omega).$$

Pelas hipóteses sobre f, temos $|f(x) - f(y)| \leqslant \|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}|x - y|$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Daí,

$$\left(\int_\Omega |f(u_n) - f(u)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left(\int_\Omega |u_n - u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \;\; n \longrightarrow \infty;$$

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega |f'(u_n)\nabla u_n - f'(u)\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leqslant \|f'\|^p_{L^\infty(\mathbb{R})} \left(\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &+ \left(\int_\Omega |f'(u_n) - f'(u)|^p |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Como $u_n \longrightarrow u$ em $L^p(\Omega)$, então $(u_n)_{n=1}^\infty$ possui uma subsequência $(u_{n_j})_{j=1}^\infty$ tal que $u_{n_j} \longrightarrow u$ q.t.p. em Ω. Logo, pela continuidade de f', temos que $f'(u_{n_j}) \longrightarrow f'(u)$ q.t.p. em Ω; assim, $|f'(u_n) - f'(u)|^p \longrightarrow 0$ q.t.p. em Ω, donde, $|f'(u_n) - f'(u)|^p |\nabla u|^p \leqslant C|\nabla u|^p$ q.t.p. em Ω, onde $C > 0$ é uma constante. Aplicando o Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$\int_\Omega |f'(u_{n_j}) - f'(u)|^p |\nabla u|^p \, dx \longrightarrow 0 \;\; \text{quando} \;\; j \longrightarrow \infty.$$

Donde,

$$\left(\int_\Omega |f'(u_{n_j})\nabla u_{n_j} - f'(u)\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0 \;\; \text{quando} \;\; j \longrightarrow \infty.$$

Consequentemente, $f(u_{n_j}) \longrightarrow f(u)$ em $L^p(\Omega)$ e $f'(u_{n_j})\nabla u_{n_j} \longrightarrow f'(u)\nabla u$ em $L^p(\Omega)$, portanto, $f(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\nabla(f(u)) = f'(u)\nabla u$. □

A parte positiva e negativa de uma função u são definidas respectivamente, por

$$u^+ = \max\{u, 0\} \quad \text{e} \quad u^- = \min\{u, 0\}.$$

Observe que, $u = u^+ + u^-$ e $|u| = u^+ - u^-$.

Corolário 1.1. *Seja* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *para algum* $1 \leqslant p < \infty$*, então* $u^+, u^-, |u| \in W^{1,p}(\Omega)$ *e*

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & se \quad u > 0 \\ 0 & se \quad u \leqslant 0 \end{cases} \qquad \nabla u^- = \begin{cases} 0 & se \quad u \geqslant 0 \\ \nabla u & se \quad u < 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\nabla |u| = \begin{cases} \nabla u & se \quad u > 0 \\ 0 & se \quad u = 0 \\ -\nabla u & se \quad u < 0. \end{cases}$$

Demonstração. Para $\varepsilon > 0$, defina

$$f_\varepsilon(u) = \begin{cases} (u^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon & \text{se } u > 0 \\ 0 & \text{se } u \leqslant 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

É evidente que $f_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$ e $f'_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R})$, assim, pelo Teorema 1.7, temos que $f_\varepsilon(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\nabla(f_\varepsilon(u)) = f'_\varepsilon(u)\nabla u$.

Então, para qualquer $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ tem-se

$$\int_\Omega f_\varepsilon(u)\nabla\varphi dx = -\int_\Omega f'_\varepsilon(u)\nabla u\varphi dx = -\int_{\{u>0\}} \frac{u\nabla u}{(u^2+\varepsilon^2)^{1/2}}\varphi dx$$

daí, fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0$ na igualdade acima, obtemos

$$\int_\Omega u^+\nabla\varphi dx = \int_{\{u>0\}} \nabla u\varphi dx.$$

Assim, $u^+ \in W^{1,p}(\Omega)$ e vale (1.3). Observando que, $u^- = -(-u)^+$ e que $|u| = u^+ - u^-$, segue o resultado. □

Corolário 1.2. *Seja* $u \in W^{1,p}(\Omega)$*. Então* $\nabla u = 0$ *em qualquer conjunto onde* u *é constante.*

Demonstração. Basta notar que, $\nabla u = \nabla u^+ + \nabla u^-$. Então, se $u \equiv c$ constante em $V \subset \Omega$, podemos supor $c = 0$ (caso contrário, escrevemos $v = u - c$, deste modo temos $\nabla v = \nabla u$). Logo, $\nabla u = 0$ em V. □

1.4 Desigualdade de Sobolev

Definição 1.6. *Se* $1 \leqslant p < N$*, o expoente de Sobolev de* p *é*

$$p^* = \frac{pN}{N-p}. \tag{1.5}$$

Note que,

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \quad p^* > p.$$

Teorema 1.8 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)**.** *Suponha* $1 \leqslant p < N$. *Então existe uma constante* $C = C(p, N) > 0$*, tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \tag{1.6}$$

para toda $u \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Veja [9, Theorem 1, p.263]. □

Teorema 1.9 (Estimativa para $W^{1,p}$, $1 \leqslant p < N$)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto e limitado, com fronteira* ($\partial\Omega$) C^1. *Suponha* $1 \leqslant p < N$ *e* $u \in W^{1,p}(\Omega)$. *Então* $u \in L^{p^*}(\Omega)$*, com*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

onde $C = C(p, N, \Omega) > 0$ *é uma constante.*

Demonstração. Veja [9, Theorem 2, p.265]. □

Teorema 1.10 (Estimativa para $W_0^{1,p}$, $1 \leqslant p < N$)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto, limitado e* $\partial\Omega$ *é* C^1. *Suponha* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *para algum* $1 \leqslant p < N$. *Então vale a seguinte estimativa*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

para cada $q \in [1, p^*]$*, e a constante* $C = C(p, q, N, \Omega) > 0$.

Em particular, para todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração. Veja [9, Theorem 3, p.265]. □

1.5 Desigualdade de Poincaré

Notação. $(u)_\Omega = \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega u\,dy.$

Teorema 1.11 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Suponha que* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *é um aberto, limitado, conexo, e* $\partial\Omega$ *é* C^1. *Para* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Então existe uma constante* C*, dependendo somente de* N, p *e* Ω*, tal que*

$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

para cada função $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Veja [9, Theorem 1, p. 275] □

Corolário 1.3. *Assumindo que* Ω *é aberto, limitado, conexo e com fronteira* C^1. *Seja* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *tal que*

$$\nabla u = 0 \quad em \quad \Omega. \tag{1.7}$$

Então u *é constante q.t.p. em* Ω.

Demonstração. Pelo Teorema 1.11, temos

$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Pela hipótese sobre ∇u, então $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} = 0$, assim

$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Portanto, $u = (u)_\Omega$ =constante q.t.p. em Ω. □

Teorema 1.12. *Seja* Ω *um aberto e limitado, com* $\partial\Omega$ *de classe* C^1. *Então* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *é Lipschitziana se, e somente se,* $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$.

Demonstração. Veja [9, Theorem 4, p. 279]. □

1.6 Espaço de Sobolev com peso

Definição 1.7. *Chamaremos de peso, uma função* $\sigma : \mathbb{R}^N \longrightarrow [0, \infty)$ *com* $\sigma \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *(mais detalhes podem ser vistos em [11]).*

Definição 1.8. *Sejam* σ *um peso e* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto, com* $\sigma \neq 0$ *q.t.p. em* Ω. *Para* $1 \leqslant p < \infty$, *definimos* $L^p(\Omega, \sigma)$ *(espaço de Lebesgue com peso), como sendo o conjunto das funções mensuráveis* u *em* Ω *tais que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega,\sigma)} = \left(\int_\Omega |u|^p \sigma dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Teorema 1.13. *O espaço* $L^p(\Omega, \sigma)$ *munido com a norma* $\|\cdot\|_{L^p(\Omega,\sigma)}$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Primeiro iremos verificar que, $\|\cdot\|_{L^p(\Omega,\sigma)}$ é de fato uma norma.
(I) Se $\|u\|_{L^p(\Omega,\sigma)} = 0$, então

$$\int_\Omega |u|^p \sigma dx = 0$$

assim, $|u|^p\sigma = 0$ q.t.p. em Ω, como $\sigma \neq 0$ q.t.p. em Ω segue que $u = 0$ q.t.p. em Ω. Reciprocamente, se $u = 0$ q.t.p. em Ω, então $|u|^p\sigma = 0$ q.t.p. em Ω, e portanto,

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega,\sigma)} = \int_\Omega |u|^p\sigma dx = 0.$$

(II) Sejam $u \in L^p(\Omega,\sigma)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, daí

$$\|\lambda u\|_{L^p(\Omega,\sigma)} = \left(\int_\Omega |\lambda u|^p\sigma dx\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\int_\Omega |u|^p\sigma dx\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda|\|u\|_{L^p(\Omega,\sigma)}.$$

(III) Sejam $u, v \in L^p(\Omega,\sigma)$, pela desigualdade de Minkowski, temos

$$\begin{aligned}
\|u+v\|_{L^p(\Omega,\sigma)} &= \left(\int_\Omega |u+v|^p\sigma dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_\Omega \left|u\sigma^{\frac{1}{p}} + v\sigma^{\frac{1}{p}}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \left(\int_\Omega |u|^p\sigma dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |v|^p\sigma dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u\|_{L^p(\Omega,\sigma)} + \|v\|_{L^p(\Omega,\sigma)}.
\end{aligned}$$

Logo, $\|\cdot\|_{L^p(\Omega,\sigma)}$ é uma norma em $L^p(\Omega,\sigma)$.

Agora, consideremos uma sequência $(u_n)_{n=1}^\infty$ de Cauchy em $L^p(\Omega,\sigma)$. Isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geqslant n_0$ implica

$$\|u_n - u_m\|_{L^p(\Omega,\sigma)} < \varepsilon.$$

Podemos extrair uma subsequência $(u_{n_j})_{j=1}^\infty$ de $(u_n)_{n=1}^\infty$ tal que

$$\|u_{n_{j+1}} - u_{n_j}\|_{L^p(\Omega,\sigma)} \leqslant \frac{1}{2^j}.$$

Afirmação 1.1. $(u_{n_j})_{j=1}^\infty$ *converge em* $L^p(\Omega,\sigma)$.

Com efeito, seja

$$v_k(x) = \sum_{j=1}^k |u_{n_{j+1}}(x) - u_{n_j}(x)|.$$

(a) Para cara $k \in \mathbb{N}$, $v_k \in L^p(\Omega,\sigma)$, além disso, usando a desigualdade triangular, veja que

$$\begin{aligned}
\|v_k\|_{L^p(\Omega,\sigma)} &= \left(\int_\Omega |v_k|^p \sigma dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_\Omega \left|\sum_{j=1}^{k} |u_{n_{j+1}}(x) - u_{n_j}(x)|\right|^p \sigma dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{k} \left(\int_\Omega |u_{n_{j+1}}(x) - u_{n_j}(x)|^p \sigma dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sum_{j=1}^{k} \|u_{n_{j+1}} - u_{n_j}\|_{L^p(\Omega,\sigma)} \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^j} \leqslant 1.
\end{aligned}$$

(b) $(|v_k|^p\sigma)_{k=1}^{\infty}$ é claramente não-decrescente.

Assim, pelo teorema da convergência monótona

$$|v_k(x)|^p\sigma(x) \longrightarrow |v(x)|^p\sigma(x) \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

(com isso, e o fato de $\sigma \neq 0$ q.t.p. em Ω segue que $|v_k(x)|^p \longrightarrow |v(x)|^p$ q.t.p. em Ω, assim $v_k(x) \longrightarrow v(x)$ q.t.p. em Ω). Além disso,

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |v_k|^p \sigma dx = \int_\Omega |v|^p \sigma dx.$$

Donde obtemos que $v \in L^p(\Omega,\sigma)$, desde que

$$\begin{aligned}
\|v\|^p_{L^p(\Omega,\sigma)} &= \int_\Omega |v|^p \sigma dx \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega |v_k|^p \sigma dx \\
&= \lim_{k\to\infty} \|v_k\|^p_{L^p(\Omega,\sigma)} \\
&\leqslant 1.
\end{aligned}$$

Por outro lado, para $k \geqslant l \geqslant 2$ temos

$$\begin{aligned}
|u_{n_{k+1}}(x) - u_{n_{l-1}}(x)| &\leqslant |u_{n_{k+1}}(x) - u_{n_k}(x)| + \cdots + |u_{n_l}(x) - u_{n_{l-1}}(x)| \\
&\leqslant v(x) - v_{l-1}(x) \leqslant v(x).
\end{aligned}$$

Logo, $(u_{n_j}(x))_{j=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$, q.t.p. em Ω, assim, $u_{n_j}(x) \longrightarrow u(x)$ q.t.p. em Ω, além disso, fazendo $l \longrightarrow \infty$ acima, obtemos que

$$|u_{n_{k+1}}(x) - u(x)| \leqslant v(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Assim,

$$|u_{n_{k+1}}(x) - u(x)|^p \sigma(x) \leqslant \nu(x)^p \sigma(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Como $\nu \in L^p(\Omega, \sigma)$ e pelo teorema da convergência dominada segue que

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |u_{n_{k+1}} - u|^p \sigma dx = \int_\Omega \lim_{k\to\infty} |u_{n_{k+1}} - u|^p \sigma dx = 0.$$

Portanto, $\|u_{n_{k+1}} - u\|_{L^p(\Omega,\sigma)} \longrightarrow 0$, isto é, mostramos que $(u_n)_{n=1}^\infty$ possui uma subsequência convergente, como a mesma é de Cauchy, então $u_n \longrightarrow u$ em $L^p(\Omega, \sigma)$. □

Definição 1.9. *Sejam σ um peso, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, com $\sigma \neq 0$ q.t.p. em Ω. Para $1 \leqslant p < \infty$, definimos o espaço de Sobolev com peso $W^{1,p}(\Omega, \sigma)$ como o conjunto das funções $u \in L^p(\Omega, \sigma)$ com derivada fraca $D^\alpha u \in L^p(\Omega, \sigma)$ para $|\alpha| \leqslant 1$. Munido com a norma*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega,\sigma)} = \|u\|_{L^p(\Omega,\sigma)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega,\sigma)}. \tag{1.8}$$

Observação 1.3. *Sem nenhuma restrição adicional sobre o peso σ, o espaço de Sobolev com peso $W^{1,p}(\Omega, \sigma)$ não é necessariamente um espaço de Banach (para um exemplo ver [14]).*

Definição 1.10. *Sejam σ um peso, com $\sigma \neq 0$ q.t.p. em Ω e $1 < p < \infty$, dizemos que σ satisfaz a condição $B_p(\Omega)$ e escrevemos*

$$\sigma \in B_p(\Omega),$$

quando $\sigma^{-\frac{1}{p-1}} \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Proposição 1.1. *Sejam $\sigma \in B_p(\Omega)$ um peso e $1 < p < \infty$, então $L^p(\Omega, \sigma) \subset L^1_{loc}(\Omega)$.*

Demonstração. Dada $u \in L^p(\Omega, \sigma)$, considere $\Omega' \subset\subset \Omega$. Daí, usando Hölder

$$\int_{\Omega'} |u| dx = \int_{\Omega'} |u| \sigma^{\frac{1}{p}} \sigma^{-\frac{1}{p}} dx \leqslant \left(\int_\Omega |u|^p \sigma dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega'} \sigma^{-\frac{p'}{p}} dx \right)^{\frac{1}{p'}}$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, ou seja, $\frac{p'}{p} = \frac{1}{p-1}$.

Logo, pela hipótese sobre σ e o fato de $u \in L^p(\Omega, \sigma)$, segue que

$$\int_{\Omega'} |u| dx < \infty$$

e portanto, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. □

Teorema 1.14. *Sejam $\sigma \in B_p(\Omega)$ um peso e $1 < p < \infty$, então $W^{1,p}(\Omega, \sigma)$ é uma espaço de Banach com a norma (1.8).*

Demonstração. Veja [14]. □

Capítulo 2

Desigualdade de Harnack e princípio do máximo forte

Neste capítulo iremos recordar a desigualdade clássica de Harnack e apresentar desigualdades do tipo Harnack provadas por Damascelli e Sciunzi em [6]. Além disso, como aplicação destas desigualdades discutiremos um princípio do máximo.

2.1 Desigualdades de Harnack

Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$ e $v \in C^2(\Omega)$. O Laplaciano de v, denotado por Δv, é definido por

$$\Delta v = \operatorname{div}(\nabla v) = \sum_{i=1}^{N} v_{x_i x_i}. \tag{2.1}$$

Definição 2.1. *Dizemos que uma função $v \in C^2(\Omega)$ é harmônica quando*

$$\Delta v = 0. \tag{2.2}$$

Além disso, se $\Delta v \geqslant 0$ (ou $\Delta v \leqslant 0$) então v é dita sub-harmônica (ou super-harmônica).

É bem conhecido que, se Ω é um domínio, limitado e $\partial\Omega$ de classe C^1, e $v \in C^2(\Omega)$ com

$\Delta v = 0$ ($\geqslant 0$, $\leqslant 0$) então vale a propriedade da média, isto é, para qualquer bola $B(y, \delta) \subset\subset \Omega$, temos

$$v(y) \;=\; (\leqslant,\ \geqslant)\ \frac{1}{\omega_N \delta^N} \int_{B(y,\delta)} v dx \tag{2.3}$$

$$v(y) \;=\; (\leqslant,\ \geqslant)\ \frac{1}{N\omega_N \delta^{N-1}} \int_{\partial B(y,\delta)} v dS, \tag{2.4}$$

onde ω_N denota o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^N$.

A seguir provaremos a desigualdade clássica de Harnack .

Teorema 2.1 (Desigualdade de Harnack)**.** *Seja v uma função harmônica não negativa em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Então para qualquer $\Omega' \subset\subset \Omega$, existe uma constante $C > 0$ que depende somente de N, Ω' e Ω tal que*

$$\sup_{\Omega'} v \leqslant C \inf_{\Omega'} v. \tag{2.5}$$

Demonstração. Primeiro consideremos $x \in \Omega$ e $\delta > 0$ tal que $B(x, 4\delta) \subset \Omega$. Sejam $y_1, y_2 \in B(x, \delta)$. Note que

1. Se $z \in B(y_1, \delta)$ então $|z - x| \leqslant |z - y_1| + |y_1 - x| < \delta + \delta = 2\delta$, isto é, $B(y_1, \delta) \subset B(x, 2\delta)$;

2. Se $z \in B(x, 2\delta)$ então $|z - y_2| \leqslant |z - x| + |x - y_2| < 2\delta + \delta = 3\delta$, isto é, $B(x, 2\delta) \subset B(y_2, 3\delta)$.

Usando a propriedade da média, temos

$$v(y_1) = \frac{1}{\omega_N \delta^N} \int_{B(y_1,\delta)} v(y)dy \leqslant \frac{1}{\omega_N \delta^N} \int_{B(x,2\delta)} v(y)dy$$

$$v(y_2) = \frac{1}{\omega_N (3\delta)^N} \int_{B(y_2,3\delta)} v(y)dy \geqslant \frac{1}{\omega_N (3\delta)^N} \int_{B(x,2\delta)} v(y)dy.$$

Assim,

$$v(y_1) = \frac{1}{\omega_N \delta^N} \int_{B(y_1,\delta)} v(y)dy \leqslant \frac{3^N}{\omega_N (3\delta)^N} \int_{B(y_2,3\delta)} v(y)dx = 3^N v(y_2). \tag{2.6}$$

Como $y_1, y_2 \in B(x, \delta)$ são arbitrários, então

$$\sup_{B(x,\delta)} v \leqslant 3^N \inf_{B(x,\delta)} v. \tag{2.7}$$

Agora, seja $\Omega' \subset\subset \Omega$, pela compacidade de $\overline{\Omega'}$ temos que:

i) existe $\delta > 0$ tal que $\operatorname{dist}(\overline{\Omega'}, \partial\Omega) > 4\delta > 0$. Assim, para qualquer $x \in \overline{\Omega'}$ tem-se $B(x, 4\delta) \subset \Omega$;

ii) existem $k \in \mathbb{N}$ e $x_1, \cdots, x_k \in \overline{\Omega'}$ tais que $\overline{\Omega'} \subset \bigcup_{j=1}^{k} B(x_j, \delta) \subset \Omega$ (a última inclusão é obtida pelo item i), k depende de Ω e Ω'), e além disso, pela conexidade de Ω' podemos supor $B(x_j, \delta) \cap B(x_{j+1}, \delta) \neq \emptyset$.

Por (2.7), para cada $j = 1, \cdots, k$ resulta que

$$\sup_{B(x_j,\delta)} v \leqslant 3^N \inf_{B(x_j,\delta)} v. \tag{2.8}$$

Afirmação 2.1. *Sejam* $A, B \subset \Omega$ *limitados e não vazios, se* $A \cap B \neq \emptyset$ *então*

$$\sup_A v \geqslant \inf_B v. \tag{2.9}$$

De fato, caso contrário, se tivermos $\sup_A v < \inf_B v$. Seja $x_0 \in A \cap B$, então

$$v(x_0) \leqslant \sup_A v < \inf_B v \leqslant v(x_0).$$

Absurdo!

Afirmação 2.2. $\sup_{\cup_{j=1}^k B(x_j,\delta)} v \leqslant 3^{Nk} \inf_{\cup_{j=1}^k B(x_j,\delta)} v.$

Usando (2.8) e (2.9), provaremos esta afirmação indutivamente. Com efeito, temos duas possibilidades em relação ao supremo e ínfimo de v em $B(x_j, \delta) \cup B(x_{j+1}, \delta)$:

a) O supremo e o ínfimo são atingidos no fecho da mesma bola, digamos em $\overline{B(x_j, \delta)}$. Isto é,

$$\sup_{B(x_j,\delta)\cup B(x_{j+1},\delta)} v = \sup_{B(x_j,\delta)} v \quad \text{e} \quad \inf_{B(x_j,\delta)\cup B(x_{j+1},\delta)} v = \inf_{B(x_j,\delta)} v.$$

Neste caso, combinando as equações acima com (2.8), temos

$$\sup_{B(x_j,\delta)\cup B(x_{j+1},\delta)} v \leqslant 3^N \inf_{B(x_j,\delta)\cup B(x_{j+1},\delta)} v \leqslant 3^{2N} \inf_{B(x_j,\delta)\cup B(x_{j+1},\delta)} v;$$

b) O supremo é atingido no fecho de uma das bolas (digamos $\overline{B(x_j, \delta)}$), e o ínfimo no fecho da outra bola ($\overline{B(x_{j+1}, \delta)}$). Dessa forma, por (2.8) e (2.9), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\sup_{B(x_j,\delta)\cup B(x_{j+1},\delta)} v = \sup_{B(x_j,\delta)} v &\leqslant 3^N \inf_{B(x_j,\delta)} v \\
&\leqslant 3^N \sup_{B(x_{j+1},\delta)} v \\
&\leqslant 3^{2N} \inf_{B(x_{j+1},\delta)} v = 3^{2N} \inf_{B(x_j,\delta)\cup B(x_{j+1},\delta)} v.
\end{aligned}$$

Assim, em qualquer caso, temos

$$\sup_{B(x_j,\delta)\cup B(x_{j+1},\delta)} v \leqslant 3^{2N} \inf_{B(x_j,\delta)\cup B(x_{j+1},\delta)} v. \tag{2.10}$$

Suponha que à Afirmação 2.2 é válida para $1 \leqslant m < k$, ou seja,

$$\sup_{\cup_{j=1}^{m} B(x_j,\delta)} v \leqslant 3^{mN} \inf_{\cup_{j=1}^{m} B(x_j,\delta)} v, \quad 1 \leqslant m < k. \tag{2.11}$$

Como $B(x_k,\delta) \cap \left(\cup_{j=1}^{k-1} B(x_j,\delta)\right) \neq \emptyset$, usando argumento análogo ao anterior, obtemos

$$\sup_{\cup_{j=1}^{k} B(x_j,\delta)} v \leqslant 3^{kN} \inf_{\cup_{j=1}^{k} B(x_j,\delta)} v. \tag{2.12}$$

Donde

$$\sup_{\Omega'} v \leqslant 3^{kN} \inf_{\Omega'} v \tag{2.13}$$

o que conclui a prova. $\square$

A seguir, provaremos uma desigualdade do tipo Harnack mais geral que a desigualdade clássica apresentada no Teorema 2.1, para isso, iniciamos apresentando algumas definições e resultados importantes.

Mais precisamente, consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e suave (isto é, $\partial\Omega$ é suave), $N \geqslant 2$. Para $1 < p < \infty$ o operador p-Laplaciano denotado por Δ_p, é definido por

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u). \tag{2.14}$$

Observação 2.1. *O operador p-Laplaciano é uma generalização do operador Laplaciano ver* (2.1)*, uma vez que, quando $p = 2$, então $\Delta_2 u = \Delta u$.*

Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u) & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.15}$$

onde f satisfaz as seguintes hipóteses:

(f_1) $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e positiva;

(f_2) f é localmente Lipschitz em $[0,\infty)$.

Observação 2.2. ***(a)*** *Como $u \in C^1(\overline{\Omega})$, a hipótese (f_2) sobre f, e por $\overline{\Omega}$ ser compacto, então $f \circ u$ é Lipschitz em $\overline{\Omega}$, pelo Teorema 1.12, temos que $f \circ u \in W^{1,\infty}(\Omega)$.*

(b) *A hipótese (f_2) implica que f é Lipschitz em qualquer $K \subset [0,\infty)$ compacto. Em particular, quando $K = [0,\delta]$ para qualquer $\delta > 0$. Pelo Teorema 1.12, temos*

$$f \in W^{1,\infty}((0,\delta)), \ \textit{isto é}, \ f \in L^\infty((0,\delta)) \ \textit{e} \ f' \in L^\infty((0,\delta)).$$

Seja δ *suficientemente grande de modo que* $u(\overline{\Omega}) \subset (0, \delta)$*, então*

$$f'(u(\Omega)) \subset f'((0, \delta)).$$

Donde,

$$\|f'(u)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|f'\|_{L^\infty((0,\delta))} < \infty.$$

Agora, fixada uma solução fraca $u \in C^1(\overline{\Omega})$ de (2.15), escrevemos

$$\sigma = |\nabla u|^{p-2}. \tag{2.16}$$

Observação 2.3. *Um resultado de regularidade provado por DiBenedetto [8, Theorem 2] garante que, se* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *é uma solução fraca de* (2.15)*, com* $p > 1$ *e* f *satisfazendo* (f_2)*. Então,* $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$*, onde* $\alpha < 1$.

Os autores demonstraram em [7, Theorem 2.3] o seguinte resultado de regularidade acerca de $\frac{1}{|\nabla u|}$.

Teorema 2.2. *Sejam* Ω *um domínio suave em* $\mathbb{R}^N$*,* $N \geqslant 2$ *e* $u \in C^1(\overline{\Omega})$ *uma solução fraca de* (2.15) *com* f *satisfazendo* (f_1)*,* (f_2)*,* $1 < p < \infty$ *e seja* $Z = \{x \in \Omega |\ \nabla u(x) = 0\}$*. Então* $|Z| = 0$ *e, para qualquer* $x \in \Omega$ *e todo* $r < 1$*,* $\gamma < N-2$ *se* $N \geqslant 3$ *e* $\gamma = 0$ *se* $N = 2$*, temos*

$$\int_\Omega \frac{1}{|\nabla u|^{(p-1)r}} \frac{1}{|x-y|^\gamma} dy \leqslant C \tag{2.17}$$

onde C não depende de x*.*

Em seguida definiremos o espaço de Sobolev com peso σ.

Definição 2.2. *Para* $\dfrac{2N+2}{N+2} < p < \infty$ *definimos o espaço de Sobolev* $H^{1,2}(\Omega, \sigma)$ *como o espaço de funções com derivadas de primeira ordem (no sentido fraco) para as quais a norma*

$$\|v\|_{H^{1,2}(\Omega,\sigma)} = \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega,\sigma)} \tag{2.18}$$

é limitada, onde $\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega,\sigma)} = \int_\Omega |\nabla v|^2 \sigma dx$*. Além disso, definimos* $H^{1,2}_0(\Omega, \sigma)$ *como sendo o fecho de* $C^1_0(\overline{\Omega})$ *(ou* $C^\infty_0(\overline{\Omega})$*) em* $H^{1,2}(\Omega, \sigma)$ *com respeito a norma* (2.18)*.*

Observação 2.4. *Se* $p > 2$ *(respec.* $\frac{2N+2}{N+2} < p < 2$*), desde que* $u \in C^1(\overline{\Omega})$ *então* $\sigma \in L^\infty(\Omega)$ *e pelo Teorema 2.2 temos que* $\sigma^{-1} \in L^1(\Omega)$ *(respec.* $\sigma \in L^1(\Omega)$ *isto é garantido pela condição* $\frac{2N+2}{N+2} < p$ *e pelo Teorema 2.2, além disso,* $\sigma^{-1} \in L^\infty(\Omega)$*, pois*

$u \in C^1(\overline{\Omega})$*), podemos definir o espaço de Sobolev* $W^{1,2}(\Omega, \sigma)$ *como sendo o completamento de* $C^1(\overline{\Omega})$ *(ou* $C^\infty(\overline{\Omega})$*) sob a norma* (2.18)*, para mais detalhes ver [18, 23]. Na verdade, se* Ω *tem fronteira suave por partes (no nosso caso, por hipótese* Ω *tem fronteira suave), então* $W^{1,2}(\Omega, \sigma) = H^{1,2}(\Omega, \sigma)$*, para uma demonstração veja por exemplo [13, 23].*

A seguir, exibiremos uma desigualdade de Sobolev com peso σ, provada em [7, Theorem 3.1] a partir do Teorema 2.2.

Teorema 2.3 (Desigualdade de Sobolev com Peso). *Seja* $u \in C^1(\overline{\Omega})$ *uma solução fraca de* (2.15) *com* f *satisfazendo* (f_1)*,* (f_2)*,* $p > 2$*. Definindo* $\overline{2}^*$ *por*

$$\frac{1}{\overline{2}^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N} + \frac{1}{N}\left(\frac{p-2}{p-1}\right).$$

Então, existe uma constante positiva $\overline{C} = \overline{C}(N,\ p,\ \sigma,\ t,\ \gamma)$*, tal que vale a seguinte desigualdade de Sobolev com peso:*

$$\|v\|_{L^{2^\star}(\Omega)} \leqslant \overline{C}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega,\sigma)}, \tag{2.19}$$

para qualquer $v \in H_0^{1,2}(\Omega, \sigma)$*,* $2^\star < \overline{2}^*$ *e* $\sigma = |\nabla u|^{p-2}$*.*

Demonstração. Primeiramente, provaremos a seguinte afirmação.

Afirmação 2.3. *Sejam* $0 < \alpha < N$ *e* $1 < q < \frac{N}{\alpha}$*, então o funcional* $T_\alpha : L^q(\Omega) \longrightarrow L^s(\Omega)$ $\Big($*onde* $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{\alpha}{N}\Big)$ *definido por*

$$T_\alpha(f)(x) = \int_\Omega f(y)|x-y|^{\alpha-N}dy,$$

é contínuo.

Com efeito, observe que $\left(\frac{\alpha}{N} + \frac{1}{s} + \frac{1}{q'} = 1,\ \text{onde } q' \text{ é o conjugado de } q\right)$, assim

$$\begin{aligned} |T_\alpha(f)(x)| &\leqslant \int_\Omega |f(y)||x-y|^{\alpha-N}dy \\ &= \int_\Omega |f(y)|^{\frac{q}{s}}|f(y)|^{\frac{q\alpha}{N}}|x-y|^{\frac{\alpha}{N}(\alpha-N)}|x-y|^{\frac{1}{s}(\alpha-N)}|x-y|^{\frac{1}{q'}(\alpha-N)}dy. \end{aligned}$$

Pelas desigualdades de Hölder generalizada e Young para convolução (veja [2, Theorem 4.15, p. 104]), obtemos

$$\begin{aligned} |T_\alpha(f)(x)| &\leqslant \left(\int_\Omega |x-y|^{\alpha-N}dy\right)^{\frac{1}{q'}}\left(\int_\Omega |f(y)|^q|x-y|^{\alpha-N}dy\right)^{\frac{1}{s}+\frac{\alpha}{N}} \\ &\leqslant \|f\|_{L^q(\Omega)}^{\frac{q}{s}+\frac{q\alpha}{N}}\left(\int_\Omega |x-y|^{\alpha-N}dy\right)^{\frac{\alpha}{N}+\frac{1}{s}+\frac{1}{q'}} \\ &= \|f\|_{L^q(\Omega)}\left(\int_\Omega |x-y|^{\alpha-N}dy\right). \end{aligned}$$

Como $\int_\Omega |x-y|^{\alpha-N}dy \leqslant \frac{N}{\alpha}\omega_N^{\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)}|\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{s}} < \infty$, segue que

$$\|T_\alpha(f)\|_{L^s(\Omega)} = \left(\int_\Omega |T_\alpha(f)(x)|^s dx\right)^{\frac{1}{s}} \leqslant \frac{N}{\alpha}\omega_N^{\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)}|\Omega|^{\frac{1}{q}}\|f\|_{L^q(\Omega)}.$$

O que prova à afirmação.

Devido a densidade de $C_0^1(\Omega)$ em $H_0^{1,2}(\Omega,\sigma)$, é suficiente considerarmos $\nu \in C_0^1(\Omega)$, assim, existe (pelo Lemma 3.4 em [18]) uma constante positiva C_N que depende somente de N tal que

$$|\nu(x)| \leqslant C_N\int_\Omega \frac{|\nabla\nu(y)|}{|x-y|^{N-1}}dy \quad \text{para todo} \quad x\in\Omega. \tag{2.20}$$

Daí, para $t>1$, e $0\leqslant\gamma<N$ (posteriormente serão feitas mais especificações sobre t,γ). Usando a desigualdade de Hölder $\left(\frac{1}{2t}+\frac{1}{(2t)'}=1\right)$, temos

$$\begin{aligned}
|\nu(x)| &\leqslant C_N\int_\Omega \frac{|\nabla\nu(y)||\nabla u(y)|^{\frac{p-2}{2}}}{|x-y|^{N-1-\frac{\gamma}{2t}}}\frac{1}{|\nabla u(y)|^{\frac{p-2}{2}}|x-y|^{\frac{\gamma}{2t}}}dy\\
&\leqslant C_N\left(\int_\Omega\left[\frac{|\nabla\nu(y)||\nabla u(y)|^{\frac{p-2}{2}}}{|x-y|^{N-1-\frac{\gamma}{2t}}}\right]^{(2t)'}dy\right)^{\frac{1}{(2t)'}}\left(\int_\Omega\frac{1}{|\nabla u(y)|^{(p-2)t}|x-y|^{\gamma}}dy\right)^{\frac{1}{2t}}.
\end{aligned}$$

Observe que, a integral no segundo parentese é semelhante à (2.17), assim, para aplicarmos o Teorema 2.2, precisamos que $(p-2)t=(p-1)r$ para algum $r<1$, ou seja, $t<\frac{p-1}{p-2}$, também $\gamma<N-2$ se $N\geqslant3$ ou $\gamma=0$ se $N=2$. Com isso, podemos aplicar o Teorema 2.2, daí

$$|\nu(x)| \leqslant C_N C^{\frac{1}{2t}}\left(\int_\Omega\left[\frac{|\nabla\nu(y)||\nabla u(y)|^{\frac{p-2}{2}}}{|x-y|^{N-1-\frac{\gamma}{2t}}}\right]^{(2t)'}dy\right)^{\frac{1}{(2t)'}}. \tag{2.21}$$

Agora, escreva $f(y)=\left(|\nabla\nu(y)||\nabla u(y)|^{\frac{p-2}{2}}\right)^{(2t)'}$ e $\alpha=N-\left(N-1-\frac{\gamma}{2t}\right)(2t)'$.

Observe que:

(i) $N-1-\frac{\gamma}{2t}>0$;

(ii) $\alpha=N-\left(N-1-\frac{\gamma}{2t}\right)(2t)'>0$.

Com isso, obtemos $0<\alpha<N$, $\frac{2}{(2t)'}<\frac{N}{\alpha}$ e

$$T_\alpha(f)(x)=\int_\Omega\frac{|\nabla\nu(y)|^{(2t)'}|\nabla u(y)|^{\frac{(p-2)}{2}(2t)'}}{|x-y|^{\left(N-1-\frac{\gamma}{2t}\right)(2t)'}}dy.$$

Como $u\in C^1(\overline{\Omega})$ e $\nu\in C_0^1(\Omega)$, então $|\nabla\nu||\nabla u|^{\frac{p-2}{2}}\in L^2(\Omega)$, assim,

$$f(y)=|\nabla\nu(y)|^{(2t)'}|\nabla u(y)|^{\frac{(p-2)}{2}(2t)'}\in L^{\frac{2}{(2t)'}}(\Omega).$$

Assim, pela Afirmação 2.3, para $\frac{1}{s} = \frac{(2t)'}{2} - \frac{\alpha}{N}$, temos

$$\|T_\alpha(f)\|_{L^s(\Omega)} \leqslant C_0 \|f\|_{L^{\frac{2}{(2t)'}}(\Omega)}. \tag{2.22}$$

Deste modo, por (2.21) e (2.22), temos

$$\begin{aligned}
\|v\|_{L^{s(2t)'}(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |v(x)|^{s(2t)'} dx\right)^{\frac{1}{s(2t)'}} \\
&\leqslant C_N C^{\frac{1}{2t}} \left\{\int_\Omega \left(\int_\Omega \left[\frac{|\nabla v(y)||\nabla u(y)|^{\frac{p-2}{2}}}{|x-y|^{N-1-\frac{\gamma}{2t}}}\right]^{(2t)'} dy\right)^{\frac{s(2t)'}{(2t)'}}\right\}^{\frac{1}{s(2t)'}} \\
&= C_N C^{\frac{1}{2t}} \|T_\alpha(f)\|_{L^s(\Omega)}^{\frac{1}{(2t)'}} \\
&\leqslant C_N C^{\frac{1}{2t}} C_0 \|f\|_{L^{\frac{2}{(2t)'}}(\Omega)}^{\frac{1}{(2t)'}} \\
&= C_N C^{\frac{1}{2t}} C_0 \left(\int_\Omega |f(y)|^{\frac{2}{(2t)'}} dy\right)^{\frac{(2t)'}{2(2t)'}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|v\|_{L^{s(2t)'}(\Omega)} \leqslant C_N C^{\frac{1}{2t}} C_0 \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 |\nabla u|^{p-2} dy\right)^{\frac{1}{2}} = C_N C^{\frac{1}{2t}} C_0 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega,\sigma)}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s(2t)'} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{N(2t)'} &= \frac{1}{2} - \frac{N - \left(N-1-\frac{\gamma}{2t}\right)(2t)'}{N(2t)'} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{(2t)'} + \frac{N-1-\frac{\gamma}{2t}}{N} \\
&= \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2t} + \frac{N-1-\frac{\gamma}{2t}}{N} \\
&> -\frac{1}{2} + \frac{p-2}{2(p-1)} + \frac{N-1-\frac{(N-2)}{2}\frac{(p-2)}{(p-1)}}{N} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{N} + \frac{1}{N}\left(\frac{p-2}{p-1}\right) = \frac{1}{2^*}.
\end{aligned}$$

Desde que, podemos tomar t e γ próximos de $\frac{p-1}{p-2}$ e $N-2$ respectivamente. O resultado segue para qualquer $2^\star < \overline{2}^*$. □

Agora, definiremos o operador linearizado associado a (2.15).

Definição 2.3. *O operador linearizado de uma solução* u *de* (2.15), *é definido por dualidade da seguinte maneira para* $v \in H^{1,2}(\Omega,\sigma) \longmapsto L_u(v) \in (H^{1,2}(\Omega,\sigma))'$, *com* $L_u(v)(\varphi) = L_u(v,\varphi)$ *e*

$$L_u(v,\varphi) \equiv \int_\Omega \left[|\nabla u|^{p-2}(\nabla v, \nabla\varphi) + (p-2)|\nabla u|^{p-4}(\nabla u, \nabla v)(\nabla u, \nabla \varphi) - f'(u) v \varphi\right] dx.$$

Observe que L_u está bem definido. Com efeito, aplicando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}|L_u(v,\varphi)| &\leqslant \int_\Omega [\sigma|\nabla v||\nabla\varphi| + (p-2)\sigma|\nabla v||\nabla\varphi| + |f'(u)||v||\varphi|]\,dx \\ &= (p-1)\int_\Omega \sigma|\nabla v||\nabla\varphi|dx + \|f'(u)\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |v||\varphi|dx \\ &\leqslant C\left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega,\sigma)}\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega,\sigma)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}\right) \\ &< \infty\end{aligned}$$

onde $C = \max\left\{p-1, \|f'(u)\|_{L^\infty(\Omega)}\right\} < \infty$, uma vez que, pela Observação 2.2 tem-se $\|f'(u)\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$.

Definição 2.4. *Dizemos que* $v \in H^{1,2}(\Omega,\sigma)$ *é uma solução fraca do operador linearizado se*

$$L_u(v,\varphi) \equiv 0 \tag{2.23}$$

para qualquer $\varphi \in H_0^{1,2}(\Omega,\sigma)$.

Mais geralmente, $v \in H^{1,2}(\Omega,\sigma)$ *é uma super-solução (respec. sub-solução) fraca de* (2.23) *se* $L_u(v,\varphi) \geqslant 0$ *(respec.* $\leqslant 0$*) para qualquer* $\varphi \in H_0^{1,2}(\Omega,\sigma)$*, com* $\varphi \geqslant 0$.

A partir destas definições, usando a técnica iterativa de Moser ver [10, 23], os Teoremas 2.2 e 2.3, provaremos a seguinte estimativa local para sub-soluções não negativas do operador linearizado, a qual chamaremos de desigualdade fraca de Harnack.

Teorema 2.4. *Seja* $u \in C^1(\overline{\Omega})$ *uma solução fraca de* (2.15)*, onde* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *é um domínio limitado e suave,* $N \geqslant 2$*, com* f *satisfazendo* (f_1)*,* (f_2)*. Suponha* $\overline{B(x,5\delta)} \subset \Omega$ *e que* $v \in H^{1,2}(\Omega,\sigma) \cap L^\infty(\Omega)$ *é uma sub-solução fraca não negativa de* (2.23)*. Então valem os seguintes casos:*

(a_1) *Se* $p > 2$*, existe uma constante* $C = C(x,q,N,u,p,f,\delta) > 0$ *tal que*

$$\sup_{B(x,\delta)} v \leqslant C\|v\|_{L^q(B(x,2\delta))}, \quad \textit{para todo } q > 1. \tag{2.24}$$

(b_1) *Se* $\dfrac{2N+2}{N+2} < p < 2$ *o mesmo resultado do item* (a_1) *é válido para qualquer* $q > \dfrac{s^*}{2}$*, onde* $\dfrac{2}{s^*} \equiv 1 - \dfrac{1}{s}$ *e* $\dfrac{N}{2} < s < \dfrac{p-1}{2-p}$.

Demonstração. (a_1) Se $p > 2$, seja $v \in H^{1,2}(\Omega,\sigma) \cap L^\infty(\Omega)$ uma sub-solução fraca de (2.23), isto é,

$$L_u(v,\varphi) \leqslant 0, \qquad \text{para toda } \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega,\sigma), \text{ com } \varphi \geqslant 0. \tag{2.25}$$

Consideremos

$$\Phi = \eta^2 v^\beta, \qquad \text{com} \quad \beta > 0, \tag{2.26}$$

onde $\eta \in C_0^1(B(x, 5\delta)), \eta \geqslant 0$.

Pelas regras da cadeia e produto, temos que $\Phi \in H_0^{1,2}(\Omega, \sigma)$, e também , $\Phi \geqslant 0$. Além disso, $\nabla\Phi = 2\eta v^\beta \nabla\eta + \beta\eta^2 v^{\beta-1}\nabla v$.

Usando Φ como função teste em (2.25), temos

$$\int_\Omega \left[\sigma(\nabla v, \nabla\Phi) + (p-2)|\nabla u|^{p-4}(\nabla u, \nabla v)(\nabla u, \nabla\Phi) - f'(u)v\Phi\right] dx \leqslant 0. \tag{2.27}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left[\sigma 2\eta v^\beta(\nabla v, \nabla\eta) + \beta\sigma\eta^2 v^{\beta-1}|\nabla v|^2\right] dx + (p-2)\int_\Omega |\nabla u|^{p-4}(\nabla u, \nabla v)(\nabla u, \nabla\eta)2\eta v^\beta dx \\ + \int_\Omega |\nabla u|^{p-4}(\nabla u, \nabla v)^2\beta\eta^2 v^{\beta-1} dx \\ \leqslant \int_\Omega f'(u)v^{\beta+1}\eta^2 dx.\end{aligned}$$

Reescrevendo isso, obtemos

$$\begin{aligned}\beta\int_\Omega \sigma\eta^2 v^{\beta-1}|\nabla v|^2 dx &\leqslant -\int_\Omega \sigma 2\eta v^\beta(\nabla v, \nabla\eta) dx - (p-2)\int_\Omega |\nabla u|^{p-4}(\nabla u, \nabla v)(\nabla u, \nabla\eta)2\eta v^\beta dx \\ &\quad - \int_\Omega |\nabla u|^{p-4}(\nabla u, \nabla v)^2\beta\eta^2 v^{\beta-1} dx \ + \int_\Omega f'(u)v^{\beta+1}\eta^2 dx \\ &\leqslant\ 2p\int_\Omega \sigma|\nabla v||\nabla\eta|\eta v^\beta dx \ + \int_\Omega |f'(u)|v^{\beta+1}\eta^2 dx.\end{aligned}$$

Pela Observação 2.1, temos $C_1 = \|f'(u)\|_{L^\infty(B(x,5\delta))} < \infty$, e pelo fato do suporte de η estar contido em $B(x, 5\delta)$, segue que

$$\beta\int_\Omega \sigma\eta^2 v^{\beta-1}|\nabla v|^2 dx \ \leqslant\ 2p\int_\Omega \sigma|\nabla v||\nabla\eta|\eta v^\beta dx \ + \ C_1\int_\Omega v^{\beta+1}\eta^2 dx. \tag{2.28}$$

Aplicando a desigualdade de Young $\left(\sqrt{\varepsilon}a\dfrac{b}{\sqrt{\varepsilon}} \leqslant \dfrac{\varepsilon a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2\varepsilon}\right)$ em (2.28), obtemos

$$\begin{aligned}\beta\int_\Omega \sigma\eta^2 v^{\beta-1}|\nabla v|^2 dx \leqslant \frac{\beta}{2}\int_\Omega \sigma\eta^2 v^{\beta-1}|\nabla v|^2 dx \ + \ \frac{2p^2}{\beta}\int_\Omega \sigma|\nabla\eta|^2 v^{\beta+1} dx \\ + \ C_1\int_\Omega v^{\beta+1}\eta^2 dx,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_\Omega \sigma\eta^2 v^{\beta-1}|\nabla v|^2 dx \leqslant \frac{4p^2}{\beta^2}\int_\Omega \sigma|\nabla\eta|^2 v^{\beta+1} dx \ + \ \frac{2C_1}{\beta}\int_\Omega v^{\beta+1}\eta^2 dx. \tag{2.29}$$

Um cálculo simples mostra que

$$\int_\Omega \sigma\eta^2 v^{\beta-1}|\nabla v|^2 dx \leqslant C_2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^2\int_\Omega v^{\beta+1}(\eta^2 + \sigma|\nabla\eta|^2) dx, \tag{2.30}$$

onde $C_2 = \max\{4p^2, 2C_1\}$.

Defina

$$w = v^{\frac{\beta+1}{2}}$$

e seja

$$r = \beta + 1.$$

Pela regra da cadeia $w \in H^{1,2}(\Omega, \sigma)$ e $\nabla w = \left(\dfrac{\beta+1}{2}\right) v^{\frac{\beta-1}{2}} \nabla v$. Daí, por (2.30) temos

$$\int_\Omega \sigma\eta^2|\nabla w|^2 dx = \frac{r^2}{4}\int_\Omega \sigma\eta^2 v^{\beta-1}|\nabla v|^2 dx \leqslant r^2\frac{C_2}{4}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\int_\Omega w^2(\eta^2+\sigma|\nabla\eta|^2)dx. \quad (2.31)$$

Pela desigualdade de Sobolev com peso σ, para $\overline{2}^* > 2^\star > 2$ (usando também $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$, $a, b \geqslant 0$) temos

$$\begin{aligned} \|\eta w\|^2_{L^{2^\star}(\Omega)} \leqslant \overline{C}\|\nabla(\eta w)\|^2_{L^2(\Omega,\sigma)} &= \overline{C}\int_\Omega \sigma|\nabla\eta w + \nabla w\eta|^2 dx \\ &\leqslant \overline{C}\int_\Omega \sigma(|\nabla\eta|w + |\nabla w|\eta)^2 dx \\ &\leqslant 2\overline{C}\left(\int_\Omega \sigma|\nabla\eta|^2 w^2 dx + \int_\Omega \sigma|\nabla w|^2\eta^2 dx\right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Por (2.31), obtemos

$$\begin{aligned} \|\eta w\|^2_{L^{2^\star}(\Omega)} &\leqslant 2\overline{C}\int_\Omega \sigma|\nabla\eta|^2 w^2 dx + \overline{C}r^2\frac{C_2}{2}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\int_\Omega w^2(\eta^2+\sigma|\nabla\eta|^2)dx \\ &\leqslant C_3 r^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\int_\Omega w^2(\eta^2+2\sigma|\nabla\eta|^2)dx, \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde $C_3 = \max\left\{2\overline{C}, \dfrac{\overline{C}C_2}{2}\right\}$.

Como $u \in C^1(\overline{\Omega})$ é solução de (2.15), então $0 < \sup_{\overline{\Omega}} \sigma < \infty$. Usando isto em (2.33) temos

$$\|\eta w\|^2_{L^{2^\star}(\Omega)} \leqslant Cr^2\int_\Omega w^2(\eta^2+|\nabla\eta|^2)dx \leqslant Cr^2\|w(\eta+|\nabla\eta|)\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad (2.34)$$

onde $C = C_3\left(1+\dfrac{1}{\beta}\right)^2 C_4$, com $C_4 = \max\left\{1, 2\sup_{\overline{\Omega}}\sigma\right\}$. (Note que a constante C será limitada desde que $\beta \geqslant \tau > 0$).

Agora faremos as especificações sobre η.

Sejam $\delta \leqslant h' < h'' \leqslant 5\delta$, tome $\eta \equiv 1$ em $B(x, h')$ e $\mathrm{supp}(\eta) \subset B(x, h'')$, e além disso, $|\nabla\eta| \leqslant \dfrac{2}{h''-h'}$.

Escrevendo $\chi = \dfrac{2^\star}{2}$, obtemos

$$\|w\|^2_{L^{2^\star}(B(x,h')} \leqslant \frac{Cr^2(4\delta+2)^2}{(h''-h')^2}\|w\|^2_{L^2(B(x,h''))}. \quad (2.35)$$

Então, como $r = \beta + 1 > 1$ segue que

$$\|w\|^{\frac{2}{r}}_{L^{2^*}(B(x,h'))} \leqslant \left(\frac{C^{\frac{1}{2}} r(4\delta+2)}{h''-h'}\right)^{\frac{2}{r}} \|w\|^{\frac{2}{r}}_{L^2(B(x,h''))}, \tag{2.36}$$

isto é,

$$\left(\int_{B(x,h')} v^{r\chi} dx\right)^{\frac{1}{r\chi}} \leqslant \left(\frac{Cr}{h''-h'}\right)^{\frac{2}{r}} \left(\int_{B(x,h'')} v^r dx\right)^{\frac{1}{r}}, \tag{2.37}$$

onde escrevemos $C = C^{\frac{1}{2}}(4\delta+2) = C(x,\ p,\ f,\ u,\ \delta,\ \beta,\ N)$.

Dado $q > 1$. Defina $r_k = q\chi^k$ e $h_k = \delta\left(1 + \dfrac{1}{2^k}\right)$, com $k = 0, 1, 2, \cdots$. Veja que,

$$\left|\begin{array}{l} h_k - h_{k+1} = \dfrac{\delta}{2^{k+1}}, \\ h_k \longrightarrow \delta, \\ r_{k+1} = r_k\chi, \\ r_k \longrightarrow \infty. \end{array}\right. \tag{2.38}$$

Com isso, a sequência de constantes associada a cada $\beta_k = r_k - 1$ (ainda $(\beta_k)_{k=0}^{\infty}$ é estritamente crescente e $\beta_k \longrightarrow \infty$) é dada por

$$\begin{aligned} \overline{C}_k = \left(C_3\left(1+\frac{1}{\beta_k}\right)^2 C_4\right)^{\frac{1}{2}}(4\delta+2) &\leqslant \left(C_3\left(1+\frac{1}{\beta_0}\right)^2 C_4\right)^{\frac{1}{2}}(4\delta+2) \\ &= \left(C_3\left(1+\frac{1}{q-1}\right)^2 C_4\right)^{\frac{1}{2}}(4\delta+2) \\ &= \overline{C}_0. \end{aligned}$$

Iterando em (2.37), temos

$$\begin{aligned} \left(\int_{B(x,h_{k+1})} v^{r_{k+1}} dx\right)^{\frac{1}{r_{k+1}}} &= \left(\int_{B(x,h_{k+1})} v^{r_k\chi} dx\right)^{\frac{1}{r_k\chi}} \\ &\leqslant \left(\frac{2^{k+1}\overline{C}_k q\chi^k}{\delta}\right)^{\frac{2}{q\chi^k}} \left(\int_{B(x,h_k)} v^{r_k} dx\right)^{\frac{1}{r_k}} \\ &\leqslant \left[\left(\frac{2\overline{C}_0}{\delta}\right)^{\frac{2}{q}}\right]^{\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{\chi^j}} \left[(2\chi)^{\frac{2}{q}}\right]^{\sum_{j=0}^{k}\frac{j}{\chi^j}} \left(\int_{B(x,h_0)} v^{r_0} dx\right)^{\frac{1}{r_0}}, \end{aligned}$$

ou seja, obtemos

$$\left(\int_{B(x,h_{k+1})} v^{r_{k+1}} dx\right)^{\frac{1}{r_{k+1}}} \leqslant \left[\left(\frac{2\overline{C}_0}{\delta}\right)^{\frac{2}{q}}\right]^{\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{\chi^j}} \left[(2\chi)^{\frac{2}{q}}\right]^{\sum_{j=0}^{k}\frac{j}{\chi^j}} \left(\int_{B(x,2\delta)} v^{q} dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.39}$$

Como as séries $\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{\chi^j}, \sum_{j=0}^{k} \frac{j}{\chi^j}$ são convergentes, então fazendo $k \longrightarrow \infty$, conseguimos uma constante $C = C(x,\ p,\ u,\ f,\ N,\ \delta,\ q) > 0$ tal que

$$\sup_{B(x,\delta)} v \ \leqslant\ C\|v\|_{L^q(B(x,2\delta))}. \tag{2.40}$$

(b_1) Se $\left(\dfrac{2N+2}{N+2} < p < 2\right)$.

Como no item **(a)**, consideremos

$$\Phi = \eta^2 v^\beta, \qquad \text{com} \quad \beta > 0 \tag{2.41}$$

onde $\eta \in C_0^1(B(x,5\delta)), \eta \geqslant 0$.

Pelas regras da cadeia e produto, temos que $\Phi \in H_0^{1,2}(\Omega, \sigma)$, e também , $\Phi \geqslant 0$. Além disso, $\nabla\Phi = 2\eta v^\beta \nabla\eta + \beta\eta^2 v^{\beta-1}\nabla v$.

Usando Φ como função teste em (2.25), temos

$$\int_\Omega \left[\sigma(\nabla v, \nabla\Phi) + (p-2)|\nabla u|^{p-4}(\nabla u, \nabla v)(\nabla u, \nabla\Phi) - f'(u)v\Phi\right] dx \leqslant 0. \tag{2.42}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left[\sigma 2\eta v^\beta(\nabla v, \nabla\eta) + \beta\sigma\eta^2 v^{\beta-1}|\nabla v|^2\right] dx + (p-2)\int_\Omega |\nabla u|^{p-4}(\nabla u, \nabla v)(\nabla u, \nabla\eta)2\eta v^\beta\, dx \\ + \int_\Omega |\nabla u|^{p-4}(\nabla u, \nabla v)^2\beta\eta^2 v^{\beta-1} dx \\ \leqslant \int_\Omega f'(u)v^{\beta+1}\eta^2 dx,\end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned}\beta\int_\Omega \sigma\eta^2 v^{\beta-1}|\nabla v|^2 dx \ &\leqslant\ -\int_\Omega \sigma 2\eta v^\beta(\nabla v, \nabla\eta)dx - \int_\Omega |\nabla u|^{p-4}(\nabla u, \nabla v)^2\beta\eta^2 v^{\beta-1}dx \\ &\quad -(p-2)\int_\Omega |\nabla u|^{p-4}(\nabla u, \nabla v)(\nabla u, \nabla\eta)2\eta v^\beta\, dx \ + \int_\Omega f'(u)v^{\beta+1}\eta^2 dx \\ &\leqslant\ (2-p)\int_\Omega \sigma\eta v^\beta(\nabla v, \nabla\eta)dx \ + \int_\Omega f'(u)v^{\beta+1}\eta^2 dx \\ &\leqslant\ (2-p)\int_\Omega |\sigma|\nabla v||\nabla\eta|\eta v^\beta\, dx \ + \int_\Omega |f'(u)|v^{\beta+1}\eta^2 dx.\end{aligned}$$

Pela observação 2.2 temos $C_1 = \|f'(u)\|_{L^\infty(B(x,5\delta))} < \infty$, e pelo fato de $\eta \equiv 0$ fora de $B(x,5\delta)$ segue que

$$\beta\int_\Omega \sigma\eta^2 v^{\beta-1}|\nabla v|^2 dx \ \leqslant\ (2-p)\int_\Omega |\sigma|\nabla v||\nabla\eta|\eta v^\beta\, dx \ + \ C_1\int_\Omega v^{\beta+1}\eta^2 dx. \tag{2.43}$$

Aplicando a desigualdade de Young em (2.43), obtemos

$$\begin{aligned}\beta\int_\Omega \sigma\eta^2 v^{\beta-1}|\nabla v|^2 dx \leqslant \frac{\beta}{2}\int_\Omega \sigma\eta^2 v^{\beta-1}|\nabla v|^2 dx \ + \ \frac{(2-p)^2}{2\beta}\int_\Omega \sigma|\nabla\eta|^2 v^{\beta+1}dx \\ + C_1\int_\Omega v^{\beta+1}\eta^2 dx,\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_\Omega \sigma\eta^2 v^{\beta-1}|\nabla v|^2 dx \leqslant \frac{(2-p)^2}{\beta^2}\int_\Omega \sigma|\nabla\eta|^2 v^{\beta+1}dx \;+\; \frac{2C_1}{\beta}\int_\Omega v^{\beta+1}\eta^2 dx, \tag{2.44}$$

isso implica que,

$$\int_\Omega \sigma\eta^2 v^{\beta-1}|\nabla v|^2 dx \leqslant C_2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\int_\Omega v^{\beta+1}\left(\eta^2+\sigma|\nabla\eta|^2\right)dx, \tag{2.45}$$

onde $C_2 = \max\{(2-p)^2, 2C_1\}$.

Note que, a equação (2.45) é semelhante (a menos de constantes) a equação (2.30). Então usando novamente

$$w = v^{\frac{\beta+1}{2}} \qquad \text{e} \qquad r = \beta+1 \tag{2.46}$$

de maneira análoga ao que fizemos no item (a_1), conseguimos

$$\int_\Omega \sigma\eta^2|\nabla w|^2 dx \leqslant r^2\frac{C_2}{4}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\int_\Omega w^2(\eta^2+\sigma|\nabla\eta|^2)dx. \tag{2.47}$$

Além disso, como $u \in C^1(\overline{\Omega})$ e $\dfrac{2N+2}{N+2} < p < 2$, então $\sigma^{-1} \in L^\infty(\Omega)$, ou seja, existe $\lambda_0 > 0$ tal que $\lambda_0 \geqslant \sigma^{-1} > 0$ q.t.p. em Ω, assim $\sigma \equiv |\nabla u|^{p-2} \geqslant \lambda = \dfrac{1}{\lambda_0} > 0$ q.t.p em Ω. Neste caso, pela desigualdade de Sobolev clássica (Teorema 1.10) e usando (2.47) temos,

$$\begin{aligned}
\|\eta w\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} &\leqslant \overline{C}\|\nabla(\eta w)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&= \overline{C}\int_\Omega |\nabla\eta w + \eta\nabla w|^2\,dx\\
&\leqslant \frac{2\overline{C}}{\lambda}\int_\Omega \sigma(|\nabla\eta|^2 w^2 + \eta^2|\nabla w|^2)dx\\
&\leqslant \frac{2\overline{C}}{\lambda}\int_\Omega \sigma|\nabla\eta|^2 w^2 dx + \frac{2\overline{C}}{\lambda}\int_\Omega \sigma\eta^2|\nabla w|^2 dx\\
&\leqslant \frac{2\overline{C}}{\lambda}\int_\Omega \sigma|\nabla\eta|^2 w^2 dx + \frac{\overline{C}C_2}{2\lambda}r^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\int_\Omega w^2\left[\eta^2+\sigma|\nabla\eta|^2\right]dx\\
&\leqslant C_3 r^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\int_\Omega \sigma w^2\left[\frac{\eta^2}{\lambda}+|\nabla\eta|^2\right]dx,
\end{aligned}$$

onde $C_3 = \max\left\{\dfrac{2\overline{C}}{\lambda}, \dfrac{\overline{C}C_2}{2\lambda}\right\}$. Escreva $C_4 = \max\left\{\dfrac{1}{\lambda}, 1\right\}$, com isso, obtemos

$$\|\eta w\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} \leqslant C_5 r^2\int_\Omega \sigma w^2\left[\eta^2+|\nabla\eta|^2\right]dx \leqslant C_5 r^2\int_\Omega \sigma\left[w\left(\eta+|\nabla\eta|\right)\right]^2 dx, \tag{2.48}$$

com $C_5 = C_3C_4\left(1+\dfrac{1}{\beta}\right)^2$.

Agora, se $\sigma \in L^s(\Omega)$, usando a desigualdade de Hölder em (2.48), temos

$$\begin{aligned}\|\eta w\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} &\leqslant C_5 r^2 \left(\int_\Omega \sigma^s\right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_\Omega [w\,(\eta + |\nabla\eta|)]^{s^*}\,dx\right)^{\frac{2}{s^*}} \\ &= C_5 r^2 \|\sigma\|_{L^s(\Omega)} \|w(\eta + |\nabla\eta|)\|^2_{L^{s^*}(\Omega)}, \end{aligned} \tag{2.49}$$

onde $\dfrac{2}{s^*} = 1 - \dfrac{1}{s}$.

Com as mesmas especificações feitas sobre η no item (a_1). E escrevendo $\chi' = \dfrac{2^*}{s^*}$, obtemos

$$\|w\|^2_{L^{2^*}(B(x,h'))} \leqslant \frac{C_5 r^2 \|\sigma\|_{L^s(\Omega)}(4\delta + 2)^2}{(h'' - h')^2} \|w\|^2_{L^{s^*}(B(x,h''))},$$

assim, para $C = \left(C_5 \|\sigma\|_{L^s(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}(4\delta + 2)$, temos

$$\left(\int_{B(x,h')} v^{\frac{2^* r}{2}}\,dx\right)^{\frac{2}{2^* r}} \leqslant \left(\frac{Cr}{h'' - h'}\right)^{\frac{2}{r}} \left(\int_{B(x,h'')} v^{\frac{rs^*}{2}}\,dx\right)^{\frac{2}{s^* r}},$$

escrevendo $\alpha = \frac{2^* r}{2}$ (note que, como $r > 1$, então $\alpha > \frac{2^*}{2}$), temos

$$\left(\int_{B(x,h')} v^{\alpha}\,dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant \left(\frac{C\frac{2\alpha}{2^*}}{h'' - h'}\right)^{\frac{2^*}{\alpha}} \left(\int_{B(x,h'')} v^{\frac{\alpha}{\chi'}}\,dx\right)^{\frac{\chi'}{\alpha}}, \tag{2.50}$$

para usarmos os mesmos argumentos da iteração feita no item (a_1), precisamos que $\chi' > 1$, isto ocorre, quando

$$1 < \chi' = \frac{2^*}{s^*} = \frac{2}{s^*}\frac{N}{(N-2)} = \left(1 - \frac{1}{s}\right)\frac{N}{(N-2)},$$

donde resulta que

$$\frac{1}{s} < 1 - \frac{N-2}{N} = \frac{2}{N}, \text{ ou seja, } s > \frac{N}{2}.$$

Dado $q > 0$. Defina $\alpha_k = q\chi'^k$ e $h_{k-1} = \delta\left(1 + \dfrac{1}{2^{k-1}}\right)$, com $k = 1, 2, \cdots$. Veja que:

i) $h_{k-1} - h_k = \dfrac{\delta}{2^k}$, $\quad h_k \longrightarrow \delta$, $\quad \alpha_{k+1} = \alpha_k \chi'$ e $\alpha_k \longrightarrow \infty$;

ii) Para iterar em (2.50) precisamos que,

$$\alpha_1 = q\chi' > \frac{2^*}{2} \implies q > \frac{s^*}{2}.$$

Além disso,

$$\alpha_k = \frac{2^* r_k}{2} \implies r_k = \frac{2}{2^*} q\chi'^k \longrightarrow \infty.$$

Com isso, a sequência de constantes associada a cada $\beta_k = r_k - 1$ (ainda $(\beta_k)_{k=0}^{\infty}$ é estritamente crescente e $\beta_k \longrightarrow \infty$) é dada por

$$
\begin{aligned}
\overline{C}_k = C\left(\left(1+\frac{1}{\beta_k}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}(4\delta+2) \quad &\leqslant \quad \left(C\left(1+\frac{1}{\beta_1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}(4\delta+2) \\
&= \quad \left(C\left(1+\frac{1}{\frac{2q\chi'}{2^*}-1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}(4\delta+2) \\
&= \quad \overline{C}_1,
\end{aligned}
$$

Onde escrevemos $C = C_3C_4\|\sigma\|_{L^s(\Omega)}$.

Iterando em (2.50), temos

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{B(x,h_{k+1})} v^{\alpha_{k+1}}dx\right)^{\frac{1}{\alpha_{k+1}}} \quad &\leqslant \quad \left(\frac{\overline{C}_{k+1}\frac{2\alpha_{k+1}}{2^*}}{h_k - h_{k+1}}\right)^{\frac{2}{\alpha_{k+1}}}\left(\int_{B(x,h_k)} v^{\frac{\alpha_{k+1}}{\chi'}}dx\right)^{\frac{\chi'}{\alpha_{k+1}}} \\
&= \quad \left(\frac{2^{k+1}\overline{C}_{k+1}\frac{2q\chi'^{k+1}}{2^*}}{\delta}\right)^{\frac{2}{q\chi'^{k+1}}}\left(\int_{B(x,h_k)} v^{\alpha_k}dx\right)^{\frac{1}{\alpha_k}} \\
&\leqslant \quad \left(\frac{2^{k+1}\overline{C}_1\frac{2q\chi'^{k+1}}{2^*}}{\delta}\right)^{\frac{2}{q\chi'^{k+1}}}\left(\int_{B(x,h_k)} v^{\alpha_k}dx\right)^{\frac{1}{\alpha_k}} \\
&\leqslant \quad \left[\left(\frac{2\overline{C}_1q}{2^*\delta}\right)^{\frac{2}{q}}\right]^{\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{\chi'^j}}\left[(2\chi')^{\frac{2}{q}}\right]^{\sum_{j=1}^{k+1}\frac{j}{\chi'^j}}\left(\int_{B(x,h_0)} v^{\frac{\alpha_1}{\chi'}}dx\right)^{\frac{\chi'}{\alpha_1}},
\end{aligned}
$$

isto é, obtemos

$$
\left(\int_{B(x,h_{k+1})} v^{\alpha_{k+1}}dx\right)^{\frac{1}{\alpha_{k+1}}} \leqslant \left[\left(\frac{2\overline{C}_1q}{2^*\delta}\right)^{\frac{2}{q}}\right]^{\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{\chi'^j}}\left[(2\chi')^{\frac{2}{q}}\right]^{\sum_{j=1}^{k+1}\frac{j}{\chi'^j}}\left(\int_{B(x,2\delta)} v^{q}dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.51}
$$

Devido a convergência das séries $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\chi'^j}$, $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j}{\chi'^j}$. Então fazendo $k \longrightarrow \infty$ em (2.51), conseguimos uma constante $C = C(x, u, p, f, N, \delta, q) > 0$, tal que

$$
\sup_{B(x,\delta)} v \leqslant C\|v\|_{L^q(B(x,2\delta))}. \tag{2.52}
$$

Agora, determinemos os valores de s, para os quais $\sigma \in L^s(\Omega)$. Pelo Teorema 2.2, se $1 < p < 2$, então $\sigma \in L^{\left(\frac{p-1}{2-p}\right)\varepsilon}(\Omega)$ para todo $0 < \varepsilon < 1$. Portanto, desde que $\dfrac{2N+2}{N+2} < p < 2$, então $\sigma \in L^s(\Omega)$ para $\dfrac{N}{2} < s < \dfrac{p-1}{2-p}$. □

Observação 2.5. *Na conclusão da demonstração do item* (b_1) *do Teorema anterior, a condição* $\frac{2N+2}{N+2} < p$ *surge naturalmente, pois precisamos que* $\frac{p-1}{2-p} > \frac{N}{2}$ *isso equivale a* $\frac{2N+2}{N+2} < p$.

Se considerarmos uma super-solução ν de (2.23), neste caso, a técnica de iteração usada na demonstração é mais complicada, o que torna a prova mais longa. Por este motivo a demonstração da seguinte desigualdade fraca de Harnack para o operador linearizado, será feita no Apêndice.

Teorema 2.5. *Seja* $u \in C^1(\overline{\Omega})$ *uma solução fraca de* (2.15)*, onde* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *é um domínio limitado e suave,* $N \geqslant 2$*, com* f *satisfazendo* (f_1)*,* (f_2)*. Suponha que* $\overline{B(x,5\delta)} \subset \Omega$ *e seja* $\nu \in H^{1,2}(\Omega,\sigma) \cap L^\infty(\Omega)$ *uma super-solução fraca não negativa de* (2.23)*. Então valem os seguintes casos:*

(a_2) *Se* $p > 2$*, existe uma constante* $C = C(x,s,q,N,u,p,f,\delta) > 0$ *tal que*

$$\|\nu\|_{L^q(B(x,2\delta))} \leqslant C \inf_{B(x,\delta)} \nu \quad \textit{para todo} \;\; 1 < q < \chi, \tag{2.53}$$

onde $\chi \equiv \dfrac{2^\star}{2}$ *e* $2^\star$ *é um número real qualquer tal que* $2 < 2^\star < \overline{2}^*$*, com* $\dfrac{1}{\overline{2}^*} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{N} + \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{p-2}{p-1}\right)$.

(b_2) *Se* $\dfrac{2N+2}{N+2} < p < 2$*, existe uma constante* $C = C(x,q,s,N,u,p,f,\delta) > 0$ *tal que*

$$\|\nu\|_{L^q(B(x,2\delta))} \leqslant C \inf_{B(x,\delta)} \nu \quad \textit{para todo} \;\; 1 < q < \chi', \tag{2.54}$$

onde $\chi' \equiv \dfrac{2^*}{s^*}$*,* $2^* = \frac{2N}{N-2}$ *é o expoente de Sobolev,* $\dfrac{2}{s^*} \equiv 1 - \dfrac{1}{s}$ *e* $\dfrac{N}{2} < s < \dfrac{p-1}{2-p}$.

Agora, se ν é uma solução de (2.23), como consequência dos Teoremas 2.4 e 2.5, obtemos a seguinte desigualdade do tipo Harnack para o operador linearizado.

Corolário 2.1 (Desigualdade de Harnack)**.** *Seja* $\nu \in H^{1,2}(\Omega,\sigma) \cap L^\infty(\Omega)$ *uma solução não negativa de* (2.23) *em um domínio limitado e suave* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$*,* $N \geqslant 2$*. Suponha que* $\overline{B(x,5\delta)} \subset \Omega$*. Se* $p > 2$*, então existe uma constante* $C = C(x,N,u,p,f,\delta) > 0$ *tal que*

$$\sup_{B(x,\delta)} \nu \leqslant C \inf_{B(x,\delta)} \nu. \tag{2.55}$$

Demonstração. Seja $q \in \mathbb{R}$ tal que $q \in (1,\chi) \cap (1,\infty)$, onde χ é como no Teorema 2.5, assim por tal Teorema existe uma constante $C_1 = C_1(x,q,N,u,p,f,\delta) > 0$ tal que

$$\|\nu\|_{L^q(B(x,2\delta))} \leqslant C_1 \inf_{B(x,\delta)} \nu. \tag{2.56}$$

Aplicando o Teorema 2.4, para q, existe uma constante $C_2 = C_2(x,q,N,u,p,f,\delta) > 0$ tal que

$$\sup_{B(x,\delta)} \nu \leqslant C_2 \|\nu\|_{L^q(B(x,2\delta))} \tag{2.57}$$

Portanto, por (2.56) e (2.57) segue que

$$\sup_{B(x,\delta)} v \leqslant C \inf_{B(x,\delta)} v$$

onde $C = C_1 C_2$. $\square$

No que segue, apresentaremos uma desigualdade de comparação fraca do tipo Harnack, que é obtida por meio da mesma técnica utilizada no Teorema 2.4.

Teorema 2.6 (Desigualdade de comparação fraca de Harnack I)**.** *Sejam* $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ *e* $\overline{B(x, 5\delta)} \subset \Omega$. *Suponha que* u *ou* v *é solução fraca de* (2.15). *Assuma que*

$$-\Delta_p v + \Lambda v \leqslant -\Delta_p u + \Lambda u, \qquad u \leqslant v \quad \textit{em} \quad B(x, 5\delta) \tag{2.58}$$

para algum $\Lambda \in \mathbb{R}$. *Com isso, valem os seguintes casos:*

(a_3) *Se* $p > 2$, *então existe uma constante* $C = C(x, q, N, u, v, p, \delta, \Lambda) > 0$ *tal que*

$$\sup_{B(x,\delta)} (v - u) \leqslant C\|(v - u)\|_{L^q(B(x,2\delta))}, \quad \textit{para todo } q > 1.$$

(b_3) *Se* $\dfrac{2N+2}{N+2} < p < 2$ *o mesmo resultado do item* (a_3) *é válido para qualquer* $q > \dfrac{s^*}{2}$, *onde* $\dfrac{2}{s^*} \equiv 1 - \dfrac{1}{s}$ *e* $\dfrac{N}{2} < s < \dfrac{p-1}{2-p}$.

Demonstração. (a_3) Se $p > 2$.

Suponha sem perda de generalidade que $v - u \geqslant \tau > 0$, para algum $\tau \in \mathbb{R}$. Pois caso contrário, podemos considerar $(v - u) + \tau$ e fazer $\tau \longrightarrow 0^+$.

Consideremos a função

$$\Phi = \eta^2 (v - u)^\beta, \qquad \beta > 0, \tag{2.59}$$

com $\eta \in C_0^1(B(x, 5\delta))$ e $\eta \geqslant 0$ em Ω. Posteriormente serão feitas mais especificações sobre a função η. Pelas regras do produto e cadeia, $\Phi \in H_0^{1,2}(\Omega, \sigma)$, $\Phi \geqslant 0$, e ainda $\nabla\Phi = 2\eta(v - u)^\beta \nabla\eta + \beta\eta^2(v - u)^{\beta-1}\nabla(v - u)$.

Então usando Φ como função teste em (2.73), isto é,

$$-\Delta_p v\Phi + \Lambda v\Phi \leqslant -\Delta_p u\Phi + \Lambda u\Phi. \tag{2.60}$$

Integrando sobre Ω, temos

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}(\nabla v, \nabla\Phi)dx + \Lambda \int_\Omega v\Phi dx \leqslant \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}(\nabla u, \nabla\Phi)dx + \Lambda \int_\Omega u\Phi dx,$$

assim,

$$
\begin{aligned}
-\Lambda\int_\Omega \eta^2(v-u)^{\beta+1}dx \geqslant& \int_\Omega (|\nabla v|^{p-2}\nabla v-|\nabla u|^{p-2}\nabla u,\ \nabla\Phi)dx\\
=& \int_\Omega 2\eta(v-u)^\beta\left(|\nabla v|^{p-2}\nabla v-|\nabla u|^{p-2}\nabla u,\ \nabla\eta\right)dx\\
+& \int_\Omega \beta\eta^2(v-u)^{\beta-1}\left(|\nabla v|^{p-2}\nabla v-|\nabla u|^{p-2}\nabla u,\ \nabla(v-u)\right)dx.
\end{aligned}
$$

Com um cálculo simples, obtemos

$$
\begin{aligned}
|\Lambda|\int_\Omega \eta^2(v-u)^{\beta+1}dx \ +& \int_\Omega 2\eta(v-u)^\beta\left||\nabla v|^{p-2}\nabla v-|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|\,|\nabla\eta|dx\\
\geqslant& \int_\Omega \beta\eta^2(v-u)^{\beta-1}\left(|\nabla v|^{p-2}\nabla v-|\nabla u|^{p-2}\nabla u,\ \nabla(v-u)\right)dx.
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

Recordemos que existem constante $c_1, c_2 > 0$ (veja [5, Lemma 2.1]) tais que

$$
\begin{aligned}
||x|^{p-2}x-|y|^{p-2}y| \ &\leqslant\ c_1(|x|+|y|)^{p-2}|x-y|\\
&\text{e}\\
(|x|^{p-2}x-|y|^{p-2}y,\ x-y)\ &\geqslant\ c_2(|x|+|y|)^{p-2}|x-y|^2
\end{aligned}
\tag{2.62}
$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$. Aplicando tais estimativas em (2.61), temos

$$
\begin{aligned}
|\Lambda|\int_\Omega \eta^2(v-u)^{\beta+1}dx \ +\ 2c_1\int_\Omega \eta(v-u)^\beta(|\nabla v|+|\nabla u|)^{p-2}|\nabla v-\nabla u||\,\nabla\eta|dx\\
\geqslant\ \beta c_2\int_\Omega \eta^2(v-u)^{\beta-1}(|\nabla v|+|\nabla u|)^{p-2}|\nabla v-\nabla u|^2dx.
\end{aligned}
\tag{2.63}
$$

Escrevendo $\omega = (|\nabla u|+|\nabla v|)^{p-2}$, vejamos que, como $\dfrac{1}{\omega}\leqslant\dfrac{1}{|\nabla u|^{p-2}}$ e $\dfrac{1}{\omega}\leqslant\dfrac{1}{|\nabla v|^{p-2}}$, então ω satisfaz as mesmas propriedades de $|\nabla u|^{p-2}$ e $|\nabla v|^{p-2}$, assim, como por hipótese, u ou v é solução de (2.15), logo, para ω vale um análogo do Teorema 2.2, e com isso, uma desigualdade de Sobolev com peso ω, também é possível neste caso.

Usando a desigualdade de Young, conseguimos a seguinte estimativa

$$
\begin{aligned}
\frac{C_1}{\beta}\int_\Omega \left[\eta^2+\omega|\nabla\eta|^2\right](v-u)^{\beta+1}dx \ +\ \frac{\beta c_2}{2}\int_\Omega \eta^2(v-u)^\beta\omega|\nabla v-\nabla u|^2\ dx\\
\geqslant\ \beta c_2\int_\Omega \eta^2(v-u)^{\beta-1}\omega|\nabla v-\nabla u|^2dx,
\end{aligned}
\tag{2.64}
$$

onde $C_1 = \max\left\{|\Lambda|, \dfrac{2c_1^2}{c_2}\right\}$. Reorganizando e escrevendo $C_2 = \dfrac{2C_1}{c_2}$ obtemos

$$
\int_\Omega \eta^2(v-u)^{\beta-1}\omega|\nabla v-\nabla u|^2dx \ \leqslant\ C_2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\int_\Omega (v-u)^{\beta+1}\left[\eta^2+\omega|\nabla\eta|^2\right]dx. \tag{2.65}
$$

Agora, pela desigualdade de Sobolev com peso ω (assim como no Teorema 2.4), temos

$$
\begin{aligned}
\|\eta(v-u)^{\frac{\beta+1}{2}}\|^2_{L^{2^*}(\Omega)}\ &\leqslant\ \overline{C}r^2\|(v-u)^{\frac{\beta+1}{2}}(\eta+|\nabla\eta|)\|^2_{L^2(\Omega,\omega)}\\
&\leqslant\ \overline{C}\|\omega\|_{L^\infty(\Omega)}r^2\|(v-u)^{\frac{\beta+1}{2}}(\eta+|\nabla\eta|)\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}
$$

com $2 < 2^{\star} < \overline{2}^{*}$ e $r = \beta + 1 > 1$.

Agora faremos as especificações sobre η.

Sejam $\delta \leqslant h' < h'' \leqslant 5\delta$, tome $\eta \equiv 1$ em $B(x, h')$ e $\operatorname{supp}(\eta) \subset B(x, h'')$, e além disso, $|\nabla\eta| \leqslant \dfrac{2}{h'' - h'}$. Assim,

$$\|(v-u)^{\frac{\beta+1}{2}}\|^2_{L^{2^\star}(B(x,h'))} \leqslant \frac{Cr^2(4\delta+2)^2}{(h''-h')^2}\|(v-u)^{\frac{\beta+1}{2}}\|^2_{L^2(B(x,h''))}. \tag{2.66}$$

Então,

$$\|(v-u)^{\frac{\beta+1}{2}}\|^{\frac{2}{r}}_{L^{2^\star}(B(x,h'))} \leqslant \left(\frac{C^{\frac{1}{2}}r(4\delta+2)}{h''-h'}\right)^{\frac{2}{r}}\|(v-u)^{\frac{\beta+1}{2}}\|^{\frac{2}{r}}_{L^2(B(x,h''))}, \tag{2.67}$$

ou seja, para $\chi = \dfrac{2^\star}{2}$, temos

$$\left(\int_{B(x,h')}(v-u)^{r\chi}dx\right)^{\frac{1}{r\chi}} \leqslant \left(\frac{C^{\frac{1}{2}}r(4\delta+2)}{h''-h'}\right)^{\frac{2}{r}}\left(\int_{B(x,h'')}(v-u)^{r}dx\right)^{\frac{1}{r}}, \tag{2.68}$$

onde escrevemos $C = C^{\frac{1}{2}}(4\delta+2) = C(x,\ p,\ f,\ u,\ v,\ \delta,\ \beta,\ N)$.

Dado $q > 1$. Defina $r_k = q\chi^k$ e $h_k = \delta\left(1 + \dfrac{1}{2^k}\right)$, com $k = 0, 1, 2, \cdots$. De maneira análoga ao item (a_1) do Teorema 2.4, obtemos que,

$$\sup_{B(x,\delta)}(v-u) \leqslant C\|(v-u)\|_{L^q(B(x,2\delta))}.$$

O que prova o item (a_3).

(b_3) Se $\dfrac{2N+2}{N+2} < p < 2$.

Repetindo os passos iniciais do item (a_3) (que acabamos de provar), obtemos uma equação semelhante a equação (2.65), isto é,

$$\int_\Omega \eta^2(v-u)^{\beta-1}\omega|\nabla v - \nabla u|^2dx \ \leqslant\ C_2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\int_\Omega (v-u)^{\beta+1}\left[\eta^2 + \omega|\nabla\eta|^2\right]dx.$$

Pela desigualdade de Sobolev clássica (veja Teorema 1.10) e desde que, u ou v é solução de (2.15), então $\omega \equiv (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-2} \geqslant \lambda > 0$ (assim como no teorema 2.4), temos

$$\|\eta(v-u)^{\frac{\beta+1}{2}}\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} \ \leqslant\ Cr^2\int_\Omega \omega\left[(v-u)^{\frac{\beta+1}{2}}(\eta + |\nabla\eta|)\right]^2dx. \tag{2.69}$$

Agora, se $\omega \in L^s(\Omega)$, pela desigualdade de Hölder em (2.69) , temos

$$\|\eta(v-u)^{\frac{\beta+1}{2}}\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} \ \leqslant\ Cr^2\|\omega\|_{L^s(\Omega)}\|(v-u)^{\frac{\beta+1}{2}}(\eta+|\nabla\eta|)\|^2_{L^{s^*}(\Omega)},$$

onde $\dfrac{2}{s^*} = 1 - \dfrac{1}{s}$.

Com as mesmas especificações feitas sobre η no item (a_3). Resulta que

$$\|(v-u)^{\frac{\beta+1}{2}}\|^2_{L^{2^*}(B(x,h'))} \leqslant \frac{Cr^2\|\omega\|_{L^s(\Omega)}(4\delta+2)^2}{(h''-h')^2}\|(v-u)^{\frac{\beta+1}{2}}\|^2_{L^{s^*}(B(x,h''))}, \tag{2.70}$$

assim, para $C = \left(C\|\omega\|_{L^s(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}(4\delta+2)$ e $r = \beta+1 > 1$, temos

$$\left(\int_{B(x,h')}(v-u)^{\frac{2^*r}{2}}dx\right)^{\frac{2}{2^*r}} \leqslant \left(\frac{Cr}{h''-h'}\right)^{\frac{2}{r}}\left(\int_{B(x,h'')}(v-u)^{\frac{rs^*}{2}}dx\right)^{\frac{2}{s^*r}}, \tag{2.71}$$

escrevendo $\chi' = \frac{2^*}{s^*}$ e $\alpha = \frac{2^*r}{2}$ (note que, como $r > 1$, então $\alpha > \frac{2^*}{2}$), obtemos

$$\left(\int_{B(x,h')}(v-u)^{\alpha}dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant \left(\frac{C\frac{2\alpha}{2^*}}{h''-h'}\right)^{\frac{2^*}{\alpha}}\left(\int_{B(x,h'')}(v-u)^{\frac{\alpha}{\chi'}}dx\right)^{\frac{\chi'}{\alpha}}, \tag{2.72}$$

para aplicarmos os mesmos argumentos usados no item (a_3), basta que $\chi' > 1$, isto é evidente para $s > \dfrac{N}{2}$.

Dado $q > \dfrac{2^*}{2}$.

Defina $\alpha_k = q\chi'^k$ e $h_{k-1} = \delta\left(1 + \dfrac{1}{2^{k-1}}\right)$, com $k = 1, 2, \cdots$. Assim, de maneira análoga ao item (b_1) do Teorema 2.4, obtemos que,

$$\sup_{B(x,\delta)}(v-u) \leqslant C\|(v-u)\|_{L^q(B(x,2\delta))}.$$

Agora, determinemos os valores de s, para os quais $\omega \in L^s(\Omega)$. Pelo Teorema 2.2, temos que, $|\nabla u|^{p-2} \in L^s(\Omega)$ ou $|\nabla v|^{p-2} \in L^s(\Omega)$, para todo $\dfrac{N}{2} < s < \dfrac{p-1}{2-p}$. Observe que,

$$\omega = (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-2} = \frac{1}{(|\nabla u| + |\nabla v|)^{2-p}} \leqslant \frac{1}{|\nabla u|^{2-p}} = |\nabla u|^{p-2}$$

e

$$\omega = (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-2} = \frac{1}{(|\nabla u| + |\nabla v|)^{2-p}} \leqslant \frac{1}{|\nabla v|^{2-p}} = |\nabla v|^{p-2},$$

isto é, ω herda as mesmas propriedades de $|\nabla v|^{p-2}$ e $|\nabla u|^{p-2}$.

Portanto, $\omega \in L^s(\Omega)$, para todo $\dfrac{N}{2} < s < \dfrac{p-1}{2-p}$.

Com isso concluímos a demonstração. □

A seguinte desigualdade de comparação fraca do tipo Harnack, será explorada no capítulo 3, para demonstrar um princípio de comparação forte. Para obter este resultado faremos uso da mesma técnica utilizada para demonstrar o Teorema 2.5, por este motivo a demonstração será feita no apêndice.

Teorema 2.7 (Desigualdade de comparação fraca de Harnack II)**.** *Sejam* $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ *e* $\overline{B(x, 5\delta)} \subset \Omega$*. Suponha que* u *ou* v *é solução fraca de* (2.15)*. Assuma que*

$$-\Delta_p u + \Lambda u \leqslant -\Delta_p v + \Lambda v, \qquad u \leqslant v \quad \textit{em} \quad B(x, 5\delta) \tag{2.73}$$

para algum $\Lambda \in \mathbb{R}$*, com* $\Lambda > 0$*. Com isso, valem os seguintes casos:*

(a_4) *Se* $p > 2$*, então existe uma constante* $C = C(x, q, N, u, v, p, \delta, \Lambda) > 0$

$$\|(v - u)\|_{L^q(B(x,2\delta))} \leqslant C \inf_{B(x,\delta)} (v - u) \quad \textit{para todo } 1 < q < \chi,$$

com $\chi \equiv \dfrac{2^\star}{2}$ *e* $2^\star$ *e* $2 < 2^\star < \overline{2}^*$.

(b_4) *Se* $\dfrac{2N+2}{N+2} < p < 2$ *vale o mesmo resultado com* χ *substituído por* $\chi' \equiv \dfrac{2^*}{s^*}$*, onde* 2^* *é o expoente de Sobolev,* $\dfrac{2}{s^*} \equiv 1 - \dfrac{1}{s}$ *e* $\dfrac{N}{2} < s < \dfrac{p-1}{2-p}$.

Antes de enunciarmos a desigualdade de comparação do tipo Harnack para duas soluções de (2.15), vamos provar o seguinte lema.

Lema 2.1. *Uma função* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *é localmente Lipschitz no intervalo* I *se, e somente se, para cada sub-intervalo compacto* $[a, b] \subset I$*, existirem duas constantes positivas* C_1 *e* C_2 *satisfazendo:*

(i) $f_1(s) = f(s) - C_1 s$ *é não crescente em* $[a, b]$*;*

(ii) $f_2(s) = f(s) + C_2 s$ *é não decrescente em* $[a, b]$.

Demonstração.

$[\Rightarrow]$ Se f é localmente Lipschitz em I, sabemos que, para qualquer compacto $K \subset I$, f é Lipschitz em K, em particular, para $K = [a, b] \subset I$, existe $C > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|. \tag{2.74}$$

Sejam $x, y \in [a, b]$, com $y \leqslant x$, temos $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y| = C(x - y)$. Daí

$$\begin{cases} f(x) - f(y) \leqslant C(x - y) \\ \qquad\text{e} \\ -[f(x) - f(y)] \leqslant C(x - y). \end{cases}$$

Isso implica

$$\begin{cases} f(x) - Cx \leqslant f(y) - Cy \\ \qquad\text{e} \\ f(y) + Cy \leqslant f(x) + Cx, \end{cases}$$

ou seja, tomando $C_1 = C_2 = C$, obtemos que

$$f_1(s) = f(s) - Cs \ \text{ é não crescente em } [a, b]$$

e

$$f_2(s) = f(s) + Cs \ \text{ é não decrescente em } [a, b].$$

[$\Leftarrow$] Dado $x_0 \in I$, seja $r << 1$ tal que $[x_0 - r, x_0 + r] \subset I$, então existem $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$f_1(s) = f(s) - C_1 s \ \text{ é não crescente em } [x_0 - r, x_0 + r]$$

e

$$f_2(s) = f(s) + C_2 s \ \text{ é não decrescente em } [x_0 - r, x_0 + r].$$

Dados $x, y \in [x_0 - r, x_0 + r]$. Suponha que $x \leqslant y$, assim

$$f(y) - C_1 y \leqslant f(x) - C_1 x \ \text{ e } \ f(x) + C_2 x \leqslant f(y) + C_2 y,$$

isto é,

$$f(y) - f(x) \leqslant C_1(y - x) \ \text{ e } \ f(x) - f(y) \leqslant C_2(y - x),$$

com isso, obtemos

$$|f(y) - f(x)| \leqslant C(y - x) = C|y - x|,$$

onde $C = \max\{C_1, C_2\}$.

Portanto, f é localmente Lipschitz em I. □

Como consequência do Lema 2.1 e dos Teoremas 2.6 e 2.7, provamos os seguintes corolários.

Corolário 2.2. *Sejam* $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, f *satisfazendo* (f_1) *e* (f_2), *e* $\overline{B(x, 5\delta)} \subset \Omega$, *com* u *ou* v *solução fraca de* (2.15) *e tais que*

$$-\Delta_p u - f(u) \leqslant -\Delta_p v - f(v), \qquad u \leqslant v \ \text{em } B(x, 5\delta) \tag{2.75}$$

então

$$-\Delta_p u + \Lambda u \leqslant -\Delta_p v + \Lambda v, \qquad u \leqslant v \ \text{ em } \ B(x, 5\delta) \tag{2.76}$$

para algum $\Lambda \in \mathbb{R}$ *suficientemente grande, e neste caso, também vale o Teorema 2.7.*

Demonstração. Pela continuidade de u e v temos que, $u(\overline{B(x, 5\delta)}) \cup v(\overline{B(x, 5\delta)}) \subset [a, b] \subset (0, \infty)$, assim, pelo Lema 2.1 existem $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$f_1(s) = f(s) - C_1 s \ \text{ é não crescente em } [a, b]$$

e

$$f_2(s) = f(s) + C_2 s \ \text{ é não decrescente em } [a, b].$$

Como $u \leqslant v$ em $B(x, 5\delta)$ segue que

$$f(u) - C_1 u \geqslant f(v) - C_1 v \quad \text{e} \quad f(u) + C_2 u \leqslant f(v) + C_2 v \quad \text{em} \quad B(x, 5\delta). \tag{2.77}$$

Pela hipótese (2.75), temos

$$-\Delta_p u + f(v) \leqslant -\Delta_p v + f(u), \tag{2.78}$$

ou seja, por (2.77) e (2.78), obtemos

$$-\Delta_p u + f(u) + C_2 u \leqslant -\Delta_p u + f(v) + C_2 v \leqslant -\Delta_p v + f(u) + C_2 v,$$

assim,

$$-\Delta_p u + C_2 u \leqslant -\Delta_p v + C_2 v, \quad \text{em} \quad B(x, 5\delta).$$

Portanto, o resultado está provado para $\Lambda = C_2$. □

Corolário 2.3. *Sejam* $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, f *satisfazendo* (f_1) *e* (f_2), *e* $\overline{B(x, 5\delta)} \subset \Omega$, *com* u *ou* v *solução fraca de* (2.15) *e tais que*

$$-\Delta_p u - f(u) \geqslant -\Delta_p v - f(v), \qquad u \leqslant v \text{ em } B(x, 5\delta)$$

então

$$-\Delta_p u + \Lambda u \geqslant -\Delta_p v + \Lambda v, \qquad u \leqslant v \quad \text{em} \quad B(x, 5\delta) \tag{2.79}$$

para algum $\Lambda \in \mathbb{R}$ *suficientemente grande, e neste caso, também vale o Teorema 2.6.*

Demonstração. Segue de maneira análoga ao Corolário 2.2. □

Argumentando de modo análogo ao Corolário 2.1 e combinando os Teoremas 2.6 e 2.7, podemos provar a seguinte desigualdade de comparação do tipo Harnack.

Corolário 2.4. *Sejam* $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ *soluções fracas de* (2.15) *e, um domínio limitado e suave* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, *com* f *satisfazendo* (f_1), (f_2) *e* $p > 2$. *Suponha que* $\overline{B(x, 5\delta)} \subset \Omega$ *e* $u \leqslant v$ *em* $B(x, 5\delta)$. *Então existe* $C = C(x, N, p, u, v, f) > 0$ *tal que*

$$\sup_{B(x,\delta)} (v - u) \leqslant C \inf_{B(x,\delta)} (v - u). \tag{2.80}$$

Demonstração. Seja $q \in \mathbb{R}$ tal que $q \in (1, \chi) \cap (1, \infty)$, onde χ é como no Teorema 2.7, assim por tal Teorema existe uma constante $C_1 = C_1(x, q, N, u, v, p, \delta, \Lambda) > 0$ tal que

$$\|v - u\|_{L^q(B(x, 2\delta))} \leqslant C_1 \inf_{B(x,\delta)} (v - u). \tag{2.81}$$

Aplicando o Teorema 2.6, para q, existe uma constante $C_2 = C_2(x, q, N, u, v, p, \delta, \Lambda) > 0$ tal que

$$\sup_{B(x,\delta)} (v - u) \leqslant C_2 \|v - u\|_{L^q(B(x,2\delta))}. \tag{2.82}$$

Portanto, por (2.81) e (2.82) segue que

$$\sup_{B(x,\delta)} (v - u) \leqslant C \inf_{B(x,\delta)} (v - u)$$

onde $C = C_1 C_2$. □

2.2 Princípio do Máximo Forte

O Princípio do Máximo clássico, diz basicamente que, uma função harmônica que atinge seu valor máximo (ou ainda seu mínimo) no interior do seu domínio (aberto e conexo), é uma função constante.

Em seguida, apresentamos o Princípio do Máximo clássico.

Teorema 2.8. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio e $v \in C^2(\Omega)$, com $\Delta v \geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$). Se $v(y) = \max\limits_{\Omega} v$ (resp. $v(y) = \min\limits_{\Omega} v$) para algum $y \in \Omega$, então v é constante. Consequentemente, se $\Delta v = 0$ e v atinge seu máximo ou mínimo no interior de Ω, então v é constante.*

Demonstração. Se $\Delta v \geqslant 0$, seja $M = \max\limits_{\Omega} v = v(y)$, defina $C_v = \{x \in \Omega \mid v(x) = M\}$.

Como por hipótese, $C_v \neq \emptyset$. Pela continuidade de v, então C_v é fechado em Ω.

Dado $x_0 \in C_v$, existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subset \Omega$. Pela propriedade da média (veja (2.3)) temos

$$0 \;=\; v(x_0) - M \;\leqslant\; \frac{1}{\omega_N \delta^N} \int_{B(x_0,\delta)} v dx - \frac{1}{|B(x_0,\delta)|} \int_{B(x_0,\delta)} M dx. \tag{2.83}$$

Recordemos que, $|B(x_0, \delta)| = \omega_N \delta^N$.

Com efeito, a aplicação $h : B(0,1) \longrightarrow B(x_0, \delta)$ definida por, $h(z) = \delta z + x_0$, é claramente um difeomorfismo e, além disso, $h'(z) = \delta I_N$. Daí, pelo teorema de mudança de variável, segue que

$$|B(x_0,\delta)| = \int_{h(B(0,1))} dx = \int_{B(0,1)} |\det h'(z)| dz = \delta^N \int_{B(0,1)} dz = \delta^N \omega_N. \tag{2.84}$$

Voltando a (2.83), temos

$$0 \;\leqslant\; \frac{1}{\omega_N \delta^N} \int_{B(x_0,\delta)} (v - M) dx \;\leqslant\; 0. \tag{2.85}$$

Isto é, $v \equiv M$ em $B(x_0, \delta)$, logo, $B(x_0, \delta) \subset C_v$, concluindo assim, que C_v é aberto em Ω. Pela conexidade de Ω, segue que $C_v = \Omega$.

Agora, se $\Delta v \leqslant 0$ e $m = \min_{\Omega} v = v(y)$, escreva $w = -v$, então $\Delta w \geqslant 0$ e $-m = \max_{\Omega} w = w(y)$, pelo caso anterior, segue que w é constante, logo, v é constante. O que conclui a demonstração. □

No que segue, iremos explorar o Teorema 2.5 e mostrar um Princípio do Máximo (mais geral do que este apresentado acima) para uma super-solução do operador linearizado.

Teorema 2.9 (Princípio do Máximo Forte). *Seja* $v \in H^{1,2}(\Omega, \sigma) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *uma super-solução fraca de* (2.23) *em um domínio limitado e suave* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, *com* $\frac{2N+2}{N+2} < p < 2$ *ou* $p > 2$ *e* f *satisfazendo* (f_1), (f_2). *Então, para qualquer domínio* $\Omega' \subset \Omega$ *com* $v \geqslant 0$ *em* Ω', *temos* $v \equiv 0$ *em* Ω' *ou* $v > 0$ *em* Ω'.

Demonstração. Seja $C_v := \{x \in \Omega' \mid \ v(x) = 0\}$.

- Se $C_v = \emptyset$, então $v > 0$ em Ω'.

- Suponha que, $C_v \neq \emptyset$.

Primeiramente, pela continuidade de v, temos que C_v é fechado em Ω'.

Agora, vejamos que C_v é aberto em Ω'.

De fato, seja $x_0 \in C_v$, como Ω' é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $\overline{B(x_0, 5\delta)} \subset \Omega'$. Desde que, v é super-solução de (2.23) e $v \geqslant 0$ em Ω', podemos usar o Teorema 2.5, o que implica que

$$\|v\|_{L^q(B(x_0,2\delta))} \leqslant C \inf_{B(x_0,\delta)} v \tag{2.86}$$

para q fixo e $C = C(x_0, q, s, N, u, p, f) > 0$, onde

$$1 < q < \tfrac{2^\star}{2}, \ \text{com } 2 < 2^\star < \overline{2}^*, \quad \text{se } p > 2;$$

ou

$$1 < q < \tfrac{2^*}{s^*}, \ \text{com } \tfrac{2}{s^*} = 1 - \tfrac{1}{s} \text{ e } \tfrac{N}{2} < s < \tfrac{p-1}{2-p} \ \text{ se } \tfrac{2N+2}{N+2} < p < 2.$$

Agora, note que $\inf_{B(x_0,\delta)} v = 0 = v(x_0)$. Pela continuidade de v e por (2.86), segue que $v \equiv 0$ em $B(x_0, 2\delta)$, isto é, $B(x_0, 2\delta) \subset C_v$.

Portanto, C_v é aberto em Ω'. Pela conexidade de Ω' então, $C_v = \Omega'$. □

Capítulo 3

Princípios de Comparação

3.1 Princípio de Comparação I

Nesta seção, exploraremos o Teorema 2.7 para provar um princípio de comparação forte (provado em [6]) para soluções do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u) & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde f satisfaz as seguintes hipóteses:

(f_1) $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e positiva;

(f_2) f é localmente Lipschitz em $[0, \infty)$.

Teorema 3.1 (Princípio de Comparação Forte). *Sejam $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e suave, $N \geqslant 2$, e $\frac{2N+2}{N+2} < p < 2$ ou $p > 2$. Suponha que u ou v seja solução fraca de (3.1), e além disso, satisfazem*

$$-\Delta_p u + \Lambda u \leqslant -\Delta_p v + \Lambda v, \qquad u \leqslant v \quad em \quad \Omega \tag{3.2}$$

onde $\Lambda \in \mathbb{R}$. Então $u \equiv v$ em Ω a menos que

$$u < v \qquad em \qquad \Omega.$$

O mesmo resultado vale se u e v são soluções fraca de (3.1) ou mais geralmente (veja Corolário 2.2) se

$$-\Delta_p u - f(u) \leqslant -\Delta_p v - f(v), \qquad u \leqslant v \quad em \quad \Omega \tag{3.3}$$

com u ou v sendo solução fraca de (3.1).

Demonstração. Defina o seguinte conjunto

$$C_{u,v} = \{x \in \Omega \mid u(x) = v(x)\}.$$

Pela continuidade de u e v temos que $C_{u,v}$ é fechado em Ω.

Afirmamos que $C_{u,v}$ também é aberto em Ω. Com efeito, Se $C_{u,v} = \emptyset$ não há o que fazer. Caso contrário, seja $x_0 \in C_{u,v}$, como Ω é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $\overline{B(x_0, 5\delta)} \subset \Omega$, além disso, pelas hipóteses assumidas, podemos aplicar o Teorema 2.7, isto é, existe uma constante $C = C(x_0, s, N, u, p, f) > 0$ tal que

$$\|(v-u)\|_{L^s(B(x_0,2\delta))} \leqslant C \inf_{B(x_0,\delta)} (v-u) \tag{3.4}$$

onde $1 < q < \dfrac{2^\star}{2}$ se $p > 2$, ou $\dfrac{N}{2} < q < \dfrac{p-1}{2-p}$ se $\dfrac{2N+2}{N+2} < p < 2$.

Note que, $\inf_{B(x_0,\delta)}(v-u) = (v-u)(x_0) = 0$, uma vez que $x_0 \in C_{u,v}$. logo,

$$\|(v-u)\|_{L^s(B(x_0,2\delta))} = 0,$$

donde $v - u = 0$ q.t.p. em $B(x_0, 2\delta)$, assim, pela continuidade de u e v segue que $v \equiv u$ em $B(x_0, 2\delta)$, portanto, $B(x_0, 2\delta) \subset C_{u,v}$, isto é, obtemos que $C_{u,v}$ é aberto em Ω.

Pela conexidade de Ω segue o resultado. □

3.2 Princípios de Comparação II

Esta seção, terá como base o trabalho de Roselli, P. e Sciunzi, B. (veja [19]), nela apresentaremos princípios de comparação forte, onde mantemos as mesmas hipóteses sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, ou seja, Ω é um domínio, limitado e suave, $N \geqslant 2$. No Teorema 3.1 apresentado na seção anterior, tínhamos a condição de que f fosse positiva, nesta seção queremos retirar a exigência de f ser positiva, ou seja, o objetivo agora, é lidar com a mudança de sinal de f.

Considerando novamente o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u) & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.5}$$

com f localmente Lipschitz em $[0, \infty)$.

Definição 3.1. *Uma função* $u \in C^1(\overline{\Omega})$ *é uma solução fraca de*

$$-\Delta_p u = f(u) \quad \textit{em} \quad \Omega$$

se, e somente se

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}(\nabla u, \nabla\varphi)dx = \int_\Omega f(u)\varphi dx, \quad \textit{para toda } \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.6}$$

Definição 3.2. *Duas funções* $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ *satisfazem a desigualdade*

$$-\Delta_p u - f(u) \leqslant -\Delta_p v - f(v) \ \textit{em } \Omega \quad (\textit{no sentido fraco})$$

se, e somente se,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}(\nabla u, \nabla\varphi)\ dx - \int_\Omega f(u)\varphi\ dx \leqslant \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}(\nabla v, \nabla\varphi)\ dx - \int_\Omega f(v)\varphi\ dx,$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$*, com* $\varphi \geqslant 0$.

A partir daqui, iremos assumir que $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ satisfazem:

$$(A)_p \begin{cases} u \text{ e } v \text{ são não negativas em } \Omega, \\ \\ \text{ou } u \text{ ou } v \text{ é solução de } (3.5), \\ \\ -\Delta_p u - f(u) \leqslant -\Delta_p v - f(v) \text{ em } \Omega. \end{cases}$$

O seguinte Lema será necessário posteriormente, o mesmo é apenas uma versão local do Teorema 3.1.

Lema 3.1. *Assuma* $\dfrac{2N+2}{N+2} < p < 2$ *ou* $p > 2$*. Sejam* $\Omega' \subset \Omega$ *e* $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ *satisfazendo* $(A)_p$*. Suponha que,* u *é solução de* (3.5) *em* Ω*, com* f *satisfazendo as seguintes hipóteses:*

$(f_1)'$ $f(u) > 0$ (*ou* $f(u) < 0$) *em* Ω';

$(f_2)'$ f *é localmente Lipschitz em* $[0, +\infty)$.

Se $u \leqslant v$ *e* $u \neq v$ *em* Ω'*, então* $u < v$ *em* Ω'.

Observação 3.1. *No Teorema 3.1, assumimos* $f(u) > 0$*, no entanto, assumir que* $f(u) < 0$ *é equivalente. Para isso, uma versão do Teorema 2.5 com* $f(u) < 0$ *é necessária, para tal, veja [21, Theorem 4.2].*

Assim, manteremos a hipótese $(A)_p$, com f localmente Lipschitz, sem que $f(u)$ ou $f(v)$ tenha um sinal definido. E assumimos as seguintes hipóteses:

$$(f_3)' \quad f(t)\begin{cases} = 0, \text{ se } t = 0 \text{ ou } t = k > 0 \\ < 0, \text{ se } t \in (0,k) \\ > 0, \text{ se } t \in (k,+\infty). \end{cases}$$

$(f_4)'$ f é não decrescente em um intervalo aberto I_k, onde $k \in I_k$.

Com isso, provaremos o seguinte Princípio de Comparação.

Teorema 3.2. *Assuma* $\dfrac{2N+2}{N+2} < p < 2$ *ou* $p > 2$. *Sejam* $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ *satisfazendo* $(A)_p$, *com* f *localmente Lipschitz, e cumprindo* $(f_3)'$ e $(f_4)'$, *suponha que* $u \leqslant v$ *em* Ω. *Então, se* $u < v$ *em* $\partial\Omega$, *segue que*

$$u < v \textit{ em } \Omega.$$

Demonstração. Consideremos o conjunto

$$C_{u,v} = \{x \in \Omega \mid u(x) = v(x)\ \},$$

queremos mostrar que $C_{u,v} = \emptyset$.

Suponha por absurdo que $C_{u,v} \neq \emptyset$. Pela continuidade de u e v, temos que:

- $C_{u,v}$ é fechado;
- $\partial C_{u,v} \neq \emptyset$. De fato, caso contrário, se $\partial C_{u,v} = \emptyset$ então $C_{u,v}$ é aberto, assim, pela conexidade de Ω, segue que $C_{u,v} = \Omega$ e daí, por continuidade teríamos $u \equiv v$ em $\partial\Omega$, contrariando a hipótese.

Afirmação 3.1. *Para cada* $x \in \partial C_{u,v}$, *tem-se* $u(x) = v(x) = k$.

Prova da afirmação.

É evidente que, $\partial C_{u,v} \subset C_{u,v}$, uma vez que $C_{u,v}$ é fechado. Então $u \equiv v > 0$ em $C_{u,v}$ desde que, ou u ou v é solução de (3.5).

Suponha que exista $x_0 \in \partial C_{u,v}$ tal que $u(x_0) \neq k$. Pela hipótese $(f_3)'$ de f, temos $f(u(x_0)) \neq 0$. Sem perda de generalidade, consideremos $f(u(x_0)) > 0$, e u como sendo solução de (3.5). Pela continuidade de f, existe $\delta = \delta(x_0) > 0$ tal que $f(u(x)) > 0$, para todo $x \in B(x_0, \delta)$. Note que, $u \neq v$ em $B(x_0, \delta)$, caso contrário teríamos que $B(x_0, \delta) \subset C_{u,v}$, consequentemente, $x_0 \in \text{int}(C_{u,v})$, no entanto $x_0 \in \partial C_{u,v}$, o que seria um absurdo.

Assim, usando o Lema 3.1, segue que $u < v$ em $B(x_0, \delta)$, isso é uma contradição, visto que $u(x_0) = v(x_0)$. O que prova a afirmação 3.1.

Como assumimos $C_{u,v} \neq \emptyset$, a função $\text{dist}(x, C_{u,v})$ fica bem definida, para cada $x \in \Omega$.

Para cada $\varepsilon > 0$ defina o seguinte conjunto

$$C^{\varepsilon}_{u,v} = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, C_{u,v}) < \varepsilon\},$$

o qual é claramente aberto.

Vimos que, $u \equiv v \equiv k$ em $\partial C_{u,v}$, afirmamos que existe $\overline{\varepsilon} > 0$ tal que

$$\text{para todo } x \in C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v} \backslash C_{u,v}, \text{ tem-se } u(x) \in I_k \text{ e } v(x) \in I_k.$$

Caso contrário, para todo $\varepsilon > 0$, existiria $x_\varepsilon \in C^{\varepsilon}_{u,v} \backslash C_{u,v}$ tal que

$$u(x_\varepsilon) \notin I_k \text{ ou } v(x_\varepsilon) \notin I_k.$$

Tomando $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, encontramos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$x_n \in C^{\frac{1}{n}}_{u,v} \backslash C_{u,v} \ \text{ e, } \ u(x_n) \notin I_k \text{ ou } \ v(x_n) \notin I_k.$$

Logo, existe uma subsequência (x_{n_j}) de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$v(x_{n_j}) \notin I_k \text{ (ou } u(x_{n_j}) \notin I_k), \text{ para todo } x_{n_j} \in C^{\frac{1}{n_j}}_{u,v} \backslash C_{u,v}.$$

Como Ω é limitado, então (x_{n_j}) possui subsequência convergente, digamos $(x_{n'})$ com $x_{n'} \longrightarrow z \in \overline{\Omega}$.

Desde que $x_n \in C^{\frac{1}{n}}_{u,v}$ então

$$\text{dist}(x_{n'}, C_{u,v}) < \frac{1}{n'} \quad \text{para todo } n'.$$

Fazendo $n' \to \infty$, conseguimos

$$\text{dist}(z, C_{u,v}) = 0,$$

como $C_{u,v}$ é fechado, segue que, $z \in C_{u,v}$. Porém, $x_{n'} \in C^{\frac{1}{n'}}_{u,v} - C_{u,v}$, assim, $z \in \partial C_{u,v}$. Logo, $v(z) = k$ e $\lim\limits_{n' \to \infty} v(x_{n'}) = v(z) = k \in I_k$, isso é um absurdo, uma vez que I_k é aberto.

Observe que $u < v$ em $\partial C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v}$, já que $\partial C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v} = \{x \in \Omega \mid \mathrm{dist}(x, C_{u,v}) = \overline{\varepsilon}\}$. Pela compacidade de $\partial C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v}$, existe alguma constante $\rho > 0$ tal que $u + \rho < v$ em $\partial C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v}$.

Agora, consideremos a função $w_\rho : \overline{\Omega} \longrightarrow [0, +\infty)$ definida por

$$w_\rho = \begin{cases} (u + \rho - v)^+ & \text{em} \quad C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v} \\ 0 & \text{em} \quad \overline{\Omega} - C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v} \end{cases}$$

Pela Regra da Cadeia, $w_\rho \in W^{1,p}(\Omega)$ e, como $u + \rho < v$ em $\partial C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v}$, segue que w_ρ é contínua, pelo Teorema do Traço, temos que $w_\rho \in W^{1,p}_0(\Omega)$ com $w_\rho \geqslant 0$ e além disso

$$\nabla w_\rho = \begin{cases} \nabla u - \nabla v, & \text{quando} \quad w_\rho > 0 \\ 0 & \text{c.c..} \end{cases}$$

Assim, a partir das hipóteses $(A)_p$, f ser não decrescente em I_k e o fato de u ser solução de (3.5), usando w_ρ como função teste em (3.6), tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}(\nabla u, \nabla w_\rho)dx &= \int_\Omega f(u)w_\rho dx \\
&= \int_{\Omega - C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v}} f(u)w_\rho dx + \int_{C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v}} f(u)w_\rho dx \\
&= \int_{C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v}} f(u)w_\rho dx \\
&= \int_{C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v} - C_{u,v}} f(u)w_\rho dx + \int_{C_{u,v}} f(u)w_\rho dx \\
&= \int_{C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v} - C_{u,v}} f(u)w_\rho dx + \int_{C_{u,v}} f(v)w_\rho dx \\
&\quad (\forall\, x \in C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v} \backslash C_{u,v} \Longrightarrow u(x) \in I_k \text{ e } v(x) \in I_k) \\
&\leqslant \int_{C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v} - C_{u,v}} f(v)w_\rho dx + \int_{Cu,v} f(v)w_\rho dx \\
&= \int_{C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v}} f(v)w_\rho dx \\
&= \int_\Omega f(v)w_\rho dx \\
&\leqslant \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}(\nabla v, \nabla w_\rho)dx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left[|\nabla u|^{p-2}(\nabla u,\ \nabla w_\rho) - |\nabla v|^{p-2}(\nabla v,\ \nabla w_\rho)\right] dx &= \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v,\ \nabla w_\rho)dx \\
&= \int_{\{w_\rho > 0\}} (|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v,\ \nabla u - \nabla v)dx \\
&\leqslant 0.
\end{aligned}$$

Lembrando que (veja [5, Lemma 2.1]) existe uma constante $C_p > 0$ tal que para cada $x, y \in \mathbb{R}^N$, tem-se

$$(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y,\ x - y) \geqslant C_p(|x| + |y|)^{p-2}|x - y|^2. \tag{3.7}$$

Então,

$$\begin{aligned} 0 &\geqslant \int_{\{w_\rho > 0\}} (|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v,\ \nabla u - \nabla v)dx \\ &\geqslant C_p \int_{\{w_\rho > 0\}} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-2}|\nabla u - \nabla v|^2 dx. \end{aligned}$$

Isso implica que,

$$(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-2}|\nabla u - \nabla v|^2 = 0 \ \text{ q.t.p. em } \ \{w_\rho > 0\}.$$

Logo,

$$\nabla u - \nabla v = \nabla w_\rho = 0 \ \text{ q.t.p. em } \ \{w_\rho > 0\}.$$

Daí resulta que,

$$\nabla w_\rho = 0 \text{ q.t.p. em } \ \Omega.$$

Sendo assim, pelo Corolário 1.3 temos que w_ρ é constante q.t.p. em Ω, pela definição e continuidade da mesma, segue que $w_\rho \equiv 0$ em Ω. Em particular, $w_\rho \equiv 0$ em $C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v}$, isso significa que

$$u + \rho \leqslant v \text{ em } C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v},$$

donde,

$$u < v \text{ em } C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v}.$$

Mas , isto é uma contradição, desde que $C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v} \supset C_{u,v} \neq \emptyset$.

Portanto, $C_{u,v} = \emptyset$. O que termina a demonstração. $\square$

Observação 3.2. *No enunciado do Teorema 3.2, a condição de fronteira sobre u e v, isto é, $u < v$ em $\partial\Omega$, nos diz que u e v não podem ser soluções de* (3.5) *simultaneamente.*

Explorando o Lema 3.1, o Teorema 3.2 e o Teorema da Divergência versão demonstrada em [4], iremos exibir o seguinte resultado de comparação.

Teorema 3.3. *Assuma que, $\dfrac{2N+2}{N+2} < p < 2$ ou $p > 2$. Sejam $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ soluções de* (3.5)*, com f localmente Lipschitz e satisfazendo $(f_3)'$, $(f_4)'$, e suponha que $u \leqslant v$ em Ω. Então, como $u \equiv v \equiv 0$ em $\partial\Omega$, a seguinte alternativa é válida:*

$$\textit{ou} \ \ u < v \ \ \textit{em} \ \ \Omega \qquad \textit{ou} \qquad u \equiv v \ \ \textit{em} \ \ \Omega.$$

Demonstração.

Como $u \equiv 0$ em $\partial\Omega$, a partir da continuidade da mesma e pela compacidade de $\partial\Omega$, existe uma vizinhança aberta U de $\partial\Omega$ tal que $0 < u < k$ em $V = U \cap \Omega$. Assim, $f(u) < 0$ em V, pelo Lema 3.1, temos que, ou $u \equiv v$ em V ou $u < v$ em V.

<u>1º Caso</u>: Se $u < v$ em V.

Consideremos o seguinte conjunto

$$\Gamma_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) \geqslant \varepsilon\}, \quad \text{com} \quad \varepsilon > 0.$$

Afirmamos que existe $\overline{\varepsilon} << 1$ tal que $\partial\Gamma_{\overline{\varepsilon}} \subset V$ (ou seja, $u < v$ em $\partial\Gamma_{\overline{\varepsilon}}$). Caso contrário, para todo $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in \partial\Gamma_\varepsilon$ tal que $x_\varepsilon \notin V$. Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in \partial\Gamma_{\frac{1}{n}}$ tal que $x_n \notin V$, temos que (x_n) é limitada, assim, a menos de subsequência, podemos supor que $x_n \longrightarrow x \in \overline{\Omega}$, mas, $x_n \in \partial\Gamma_{\frac{1}{n}}$, isto é,

$$\text{dist}(x_n, \partial\Omega) = \frac{1}{n} \longrightarrow \text{dist}(x, \partial\Omega) = 0,$$

logo, $x \in \partial\Omega$, donde $x_n \in V$ para todo $n >> 1$, contradição!
Portanto, Existe $\overline{\varepsilon} > 0$ tal que $\partial\Gamma_{\overline{\varepsilon}} \subset V$, pelo Teorema 3.2 segue que $u < v$ em $\Gamma_{\overline{\varepsilon}}$, como $\Omega = V \cup \Gamma_{\overline{\varepsilon}}$, segue que, $u < v$ em Ω.

<u>2º Caso</u>: Se $u \equiv v$ em V.

Defina $C_{u,v} = \{x \in \Omega \mid u(x) = v(x)\}$, lembre que, na Afirmação 3.1 mostramos que, se $x \in \partial C_{u,v}$ então $u(x) = v(x) = k$. Considere também o seguinte conjunto

$$C^\varepsilon_{u,v} = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, C_{u,v}) < \varepsilon\} \tag{3.8}$$

note que, se $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ então $C^{\varepsilon_1}_{u,v} \subset C^{\varepsilon_2}_{u,v}$.

Suponha por contradição que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) < v(x_0)$.
Afirmamos que existe $\overline{\varepsilon} > 0$ tal que:

$$\left| \begin{array}{l} \text{dist}(x_0, \partial C_{u,v}) > \overline{\varepsilon} \\ \qquad\quad \text{e} \\ \forall\, x \in C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v} \backslash C_{u,v}, \quad u(x) \in I_k \;\text{ e }\; v(x) \in I_k. \end{array} \right. \tag{3.9}$$

Por um lado, vimos no Teorema 3.2, que existe $\overline{\varepsilon} > 0$ tal que

$$\text{para todo } x \in C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v} \backslash C_{u,v}, \quad u(x) \in I_k \;\text{ e }\; v(x) \in I_k.$$

Por outro lado, como $x_0 \notin C_{u,v}$, então $\mathrm{dist}(x_0, \partial C_{u,v}) > 0$.

Assim, podemos escolher $\overline{\varepsilon} > 0$ suficientemente pequeno, de maneira que vale (3.9).

É evidente que, $\Omega \backslash C_{u,v}$ e $C_{u,v}^{\overline{\varepsilon}}$ são abertos, logo, $(\Omega \backslash C_{u,v}) \cap C_{u,v}^{\overline{\varepsilon}}$ é aberto. Além disso, como podemos escrever $\Omega = (\Omega \backslash C_{u,v}) \cup C_{u,v} = (\Omega \backslash C_{u,v}) \cup C_{u,v}^{\overline{\varepsilon}}$, pela conexidade de Ω então $(\Omega \backslash C_{u,v}) \cap C_{u,v}^{\varepsilon} \neq \emptyset$.

Veja também que, $\partial C_{u,v}^{\overline{\varepsilon}} \backslash \partial \Omega \neq \emptyset$, com efeito, como $\mathrm{dist}(x_0, \partial C_{u,v}) > \overline{\varepsilon} > 0$, pela continuidade da função $\mathrm{dist}(\cdot, \partial C_{u,v})$ existe $y \in \Omega$ tal que $\mathrm{dist}(y, \partial C_{u,v}) = \overline{\varepsilon}$, ou seja, $y \in \partial C_{u,v}^{\overline{\varepsilon}} \cap \Omega$, o que implica que, $y \in \partial C_{u,v}^{\overline{\varepsilon}} \backslash \partial \Omega$. Além disso,

$$u < v \text{ em } \partial C_{u,v}^{\overline{\varepsilon}} \backslash \partial \Omega,$$

uma vez que, $C_{u,v}^{\varepsilon}$ é aberto, e com isso, $C_{u,v}^{\overline{\varepsilon}} \cap \partial C_{u,v}^{\overline{\varepsilon}} = \emptyset$, em particular, $C_{u,v} \cap \partial C_{u,v}^{\overline{\varepsilon}} = \emptyset$.

A partir, da compacidade de $\partial C_{u,v}^{\overline{\varepsilon}} \backslash \partial \Omega$ e da continuidade de u e v, existe $\rho > 0$ tal que $u + \rho < v$ em $\partial C_{u,v}^{\overline{\varepsilon}} \backslash \partial \Omega$.

Defina a seguinte função

$$w_\rho = \begin{cases} (u + \rho - v)^+ & \text{em} \quad C_{u,v}^{\overline{\varepsilon}}, \\ 0 & \text{em} \quad \Omega \backslash C_{u,v}^{\overline{\varepsilon}}. \end{cases} \tag{3.10}$$

Temos que, $w_\rho \in W^{1,p}(\Omega)$ e

$$\nabla w_\rho = \begin{cases} \nabla u - \nabla v & \text{em} \quad \{w_\rho > 0\}, \\ 0 & \text{c.c.}. \end{cases} \tag{3.11}$$

Note que, w_ρ é continua em Ω. Com efeito, dado $x_0 \in \Omega$, precisamos verificar apenas o caso em que $x_0 \in \partial C_{u,v}^{\overline{\varepsilon}} \backslash \partial \Omega$, uma vez que w_ρ é claramente continua em $C_{u,v}^{\overline{\varepsilon}}$ e $\mathrm{int}(\Omega \setminus C_{u,v}^{\overline{\varepsilon}})$, daí, $u(x_0) + \rho < v(x_0))$ assim, $w_\rho(x_0) = 0$. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset C_{u,v}^{\overline{\varepsilon}}$, com $x_n \longrightarrow x_0$, suponha que esta possua uma subsequência $(x_{n_i})_{n_i \in \mathbb{N}'}$ tal que $w_\rho(x_{n_i}) > 0$ assim, $u(x_{n_i}) + \rho > v(x_{n_i})$, e daí fazendo $i \longrightarrow \infty$, tem-se $u(x_0) + \rho \geqslant v(x_0)$, contradição! Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que para todo $n \geqslant n_0$ implica $w_\rho(x_n) = 0$, portanto $w_\rho(x_n) \longrightarrow 0 = w_\rho(x_0)$. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Omega \backslash C_{u,v}^{\overline{\varepsilon}}$, com $x_n \longrightarrow x_0$, temos $w_\rho(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim $w_\rho(x_n) \longrightarrow 0 = w_\rho(x_0)$. Concluindo assim que, w_ρ é continua em Ω.

Desde que, $u \equiv v$ em V, então $\nabla w_\rho = \nabla u - \nabla v = 0$ em $\overline{V}$. Isto nos permite usar w_ρ "como função teste"mesmo que $w_\rho \notin W_0^{1,p}(\Omega)$. De fato, veremos que os termos de fronteira que aparecem no Teorema da Divergência (versão apresentada em [4]) para u e v coincidem.

Foi provado em [7, Corollary 2.2] que uma solução C^1 de (3.5), com f como na nossa hipótese, pertence a classe $C^2(\Omega \backslash Z)$, onde

$$Z = \{x \in \Omega \mid \nabla u(x) = 0\}.$$

Portanto, as derivadas fracas de $|\nabla u|^{p-2}u_{x_i}$ coincidem com as derivadas clássicas em $\Omega \setminus Z$. Além disso, no mesmo resultado citado acima, foi provado que

$$|\nabla u|^{p-2}u_{x_i} \in W^{1,2}(\Omega).$$

Observe ainda, que $w_\rho \in W^{1,2}(\Omega)$, uma vez que $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, com isso, afirmamos que $\operatorname{div}(w_\rho|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \in L^1(\Omega)$. De fato, temos:

(i) $\operatorname{div}(w_\rho|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = w_\rho \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |\nabla u|^{p-2}(\nabla u, \nabla w_\rho)$;

(ii) $-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = -\Delta_p u = f(u)$ q.t.p..

Daí,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\operatorname{div}(w_\rho|\nabla u|^{p-2}\nabla u)|dx &\leqslant \int_\Omega |w_\rho||\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)|dx + \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}|(\nabla u, \nabla w_\rho)|dx \\
&\leqslant \int_\Omega |w_\rho||f(u)|dx + \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\sum_{i=1}^N |u_{x_i}||(w_\rho)_{x_i}|dx \\
&= \int_\Omega |w_\rho||f(u)|dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left||\nabla u|^{p-2}u_{x_i}\right| |(w_\rho)_{x_i}|dx \\
&\leqslant \left(\int_\Omega |w_\rho|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |f(u)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \sum_{i=1}^N \left(\int_\Omega \left||\nabla u|^{p-2}u_{x_i}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |(w_\rho)_{x_i}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Veja que o campo de vetores $w_\rho|\nabla u|^{p-2}\nabla u$ é contínuo em Ω, uma vez que w_ρ é continua em Ω e $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Portanto, podemos aplicar a versão do Teorema da Divergência demonstrado em [4], e assim, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \operatorname{div}(w_\rho|\nabla u|^{p-2}\nabla u)dx &= \int_{\partial\Omega} w_\rho|\nabla u|^{p-2}(\nabla u, \nu)dS \\
&= \int_{\partial\Omega} w_\rho|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \nu}dS,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

onde ν denota o normal unitário exterior a $\partial\Omega$. Assim, usando (i), (ii), (3.9) e (3.12), e o fato de f ser não decrescente em I_k, segue que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}(\nabla u, \nabla w_\rho)dx &= \int_\Omega \operatorname{div}(w_\rho|\nabla u|^{p-2}\nabla u)dx - \int_\Omega w_\rho \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)dx \\
&= \int_{\partial\Omega} w_\rho |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \nu}dS + \int_\Omega w_\rho f(u)dx \\
&= \int_{\partial\Omega} w_\rho |\nabla v|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial \nu}dS + \int_\Omega w_\rho f(u)dx \\
&= \int_{\partial\Omega} w_\rho |\nabla v|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial \nu}dS + \int_{C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v}} w_\rho f(u)dx \\
&= \int_{\partial\Omega} w_\rho |\nabla v|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial \nu}dS + \int_{C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v}\cap C_{u,v}} w_\rho f(u)dx + \int_{C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v}\setminus C_{u,v}} w_\rho f(u)dx \\
&= \int_{\partial\Omega} w_\rho |\nabla v|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial \nu}dS + \int_{C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v}\cap C_{u,v}} w_\rho f(v)dx + \int_{C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v}\setminus C_{u,v}} w_\rho f(u)dx \\
&\leqslant \int_{\partial\Omega} w_\rho |\nabla v|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial \nu}dS + \int_{C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v}\cap C_{u,v}} w_\rho f(v)dx + \int_{C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v}\setminus C_{u,v}} w_\rho f(v)dx \\
&= \int_{\partial\Omega} w_\rho |\nabla v|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial \nu}dS + \int_{C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v}} w_\rho f(v)dx \\
&= \int_{\partial\Omega} w_\rho |\nabla v|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial \nu}dS + \int_\Omega w_\rho f(v)dx \\
&= \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}(\nabla v, \nabla w_\rho)dx.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
0 \ &\geqslant \ \int_\Omega \big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v,\ \nabla w_\rho\big)\,dx \\
&= \ \int_{\{w_\rho>0\}} \big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v, \nabla u - \nabla v\big)\,dx
\end{aligned}
$$

Mais uma vez recordemos que (veja [5, Lemma 2.1]) existe uma constante $C_p > 0$ tal que para cada $x, y \in \mathbb{R}^N$, tem-se

$$
\big(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y\big) \geqslant C_p(|x| + |y|)^{p-2}|x - y|^2. \tag{3.13}
$$

Donde,

$$
C_p \int_{\{w_\rho>0\}} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-2}|\nabla u - \nabla v|^2 \leqslant 0. \tag{3.14}
$$

Daí resulta que, $\nabla u - \nabla v = \nabla w_\rho = 0$ q.t.p. em $\{w_\rho > 0\}$, logo, $\nabla w_\rho = 0$ q.t.p. em Ω, assim, w_ρ é constante em Ω, como $w_\rho \equiv 0$ em $\partial C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v}\backslash\partial\Omega$ e pela continuidade da mesma, segue que, $w_\rho \equiv 0$ em Ω, em particular, $w_\rho \equiv 0$ em $C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v}$. Isto é,

$$
u + \rho \leqslant v \quad \text{em} \quad C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v}.
$$

Logo, $u < v$ em $C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v}$. No entanto, $C^{\overline{\varepsilon}}_{u,v} \supset C_{u,v} \neq \emptyset$, resultando em uma contradição! Portanto, $u \equiv v$ em Ω. O que concluí a demonstração. □

Apêndice A

Demonstrações dos Teoremas 2.5 e 2.7

A.1 Demonstração do Teorema 2.5

Demonstração. (a_2) Se $p > 2$.

Seja $v \in H^{1,2}(\Omega, \sigma) \cap L^\infty(\Omega)$ uma super-solução fraca não negativa de (2.23), ou seja,

$$L_u(v, \varphi) \geqslant 0, \quad \text{para toda } \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega, \sigma), \text{ com } \varphi \geqslant 0, \tag{A.1}$$

onde

$$L_u(v, \varphi) \equiv \int_\Omega \left[|\nabla u|^{p-2}(\nabla v, \nabla \varphi) + (p-2)|\nabla u|^{p-4}(\nabla u, \nabla v)(\nabla u, \nabla \varphi) - f'(u)v\varphi\right] dx$$

Primeiro, note que, podemos supor $v \geqslant \tau > 0$ para algum $\tau \in \mathbb{R}$, caso contrário basta considerar $v + \tau$ e depois fazer $\tau \longrightarrow 0^+$.

Seja

$$\Phi = \eta^2 v^\beta, \qquad \beta < 0 \tag{A.2}$$

com $\eta \in C_0^1(B(x, 5\delta))$ e $\eta \geqslant 0$ em Ω. (Posteriormente, assumiremos mais hipóteses sobre η). Pelas regras da cadeia e produto, $\Phi \in H_0^{1,2}(\Omega, \sigma)$, $\Phi \geqslant 0$, logo podemos usá-la como função teste em (A.1), daí

$$\int_\Omega \left[|\nabla u|^{p-2}(\nabla v, \nabla \Phi) + (p-2)|\nabla u|^{p-4}(\nabla u, \nabla v)(\nabla u, \nabla \Phi) - f'(u)v\Phi\right] dx \geqslant 0,$$

onde $\nabla\Phi = 2\eta v^\beta \nabla\eta + \beta\eta^2 v^{\beta-1}\nabla v$.

Assim,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left[|\nabla u|^{p-2}\beta\eta^2 v^{\beta-1}|\nabla v|^2 + (p-2)|\nabla u|^{p-4}\beta\eta^2 v^{\beta-1}(\nabla u,\nabla v)^2\right] dx\\ &+\int_\Omega \left[|\nabla u|^{p-2}2\eta v^\beta(\nabla v,\nabla\eta) + (p-2)|\nabla u|^{p-4}2\eta v^\beta(\nabla u,\nabla v)(\nabla u,\nabla\eta)\right] dx\\ &\geqslant \int_\Omega f'(u)v^{\beta+1}\eta^2 dx.\end{aligned} \tag{A.3}$$

Como $\beta < 0$, resulta que o termo

$$(p-2)|\nabla u|^{p-4}\beta\eta^2 v^{\beta-1}(\nabla u,\nabla v)^2 < 0,$$

para $p > 2$.

Então,

$$\begin{aligned}|\beta|\int_\Omega \sigma v^{\beta-1}|\nabla v|^2\eta^2 dx &\leqslant 2\int_\Omega \sigma v^\beta(\nabla v,\nabla\eta)\eta dx - \int_\Omega f'(u)v^{\beta+1}\eta^2 dx\\ &+ 2(p-2)\int_\Omega |\nabla u|^{p-4}\eta v^\beta(\nabla u,\nabla v)(\nabla u,\nabla\eta)dx\\ &\leqslant 2\int_\Omega \sigma v^\beta|\nabla v||\nabla\eta|\eta dx + \int_\Omega |f'(u)|v^{\beta+1}\eta^2 dx\\ &+ 2(p-2)\int_\Omega \sigma v^\beta|\nabla v||\nabla\eta|\eta dx.\end{aligned}$$

Ou seja, obtemos

$$|\beta|\int_\Omega \sigma v^{\beta-1}|\nabla v|^2\eta^2 dx \leqslant 2(p-1)\int_\Omega \sigma v^\beta|\nabla v||\nabla\eta|\eta dx + \int_\Omega |f'(u)|v^{\beta+1}\eta^2 dx. \tag{A.4}$$

Aplicando a desigualdade de Young, temos que

$$\begin{aligned}2(p-1)\int_\Omega \sigma v^\beta|\nabla v||\nabla\eta|\eta dx &= 4(p-1)^2\int_\Omega \sigma\left(\frac{\sqrt{|\beta|}v^{\frac{\beta-1}{2}}|\nabla v|\eta}{2(p-1)}\right)\left(\frac{v^{\frac{\beta+1}{2}}|\nabla\eta|}{\sqrt{|\beta|}}\right)dx\\ &\leqslant 4(p-1)^2\int_\Omega \sigma\left(\frac{|\beta|v^{\beta-1}|\nabla v|^2\eta^2}{8(p-1)^2} + \frac{v^{\beta+1}|\nabla\eta|^2}{2|\beta|}\right)dx\\ &= \frac{|\beta|}{2}\int_\Omega \sigma v^{\beta-1}|\nabla v|^2\eta^2 dx + \frac{2(p-1)^2}{2|\beta|}\int_\Omega \sigma v^{\beta+1}|\nabla\eta|^2 dx.\end{aligned}$$

Substituindo essa estimativa em (A.4), obtemos

$$\frac{|\beta|}{2}\int_\Omega \sigma v^{\beta-1}|\nabla v|^2\eta^2 dx \leqslant \frac{2(p-1)^2}{2|\beta|}\int_\Omega \sigma v^{\beta+1}|\nabla\eta|^2 dx + \int_\Omega |f'(u)|v^{\beta+1}\eta^2 dx. \tag{A.5}$$

Pelo Teorema 1.12 temos que $f\circ u$ é Lipschitz em Ω se, e somente se, $f \in W^{1,\infty}(\Omega)$, então $f'(u) \in L^\infty(B(x,5\delta))$, isto é, $C_1 = \|f'(u)\|_{L^\infty(B(x,5\delta))} < \infty$. Assim,

$$\int_\Omega \sigma v^{\beta-1}|\nabla v|^2\eta^2 dx \leqslant \frac{2(p-1)^2}{|\beta|^2}\int_\Omega \sigma v^{\beta+1}|\nabla\eta|^2 dx + \frac{2C_1}{|\beta|}\int_\Omega v^{\beta+1}\eta^2 dx.$$

Escrevendo $C_2 = \max\{2(p-1)^2, 2C_1\}$ conseguimos

$$\int_\Omega \sigma v^{\beta-1}|\nabla v|^2\eta^2 dx \leqslant \frac{C_2}{|\beta|}\left(1+\frac{1}{|\beta|}\right)\int_\Omega v^{\beta+1}\left[\eta^2+\sigma|\nabla\eta|^2\right]dx. \tag{A.6}$$

Agora defina

$$w = \begin{cases} v^{\frac{\beta+1}{2}} & \text{se} \quad \beta \neq -1, \\ \log(v) & \text{se} \quad \beta = -1, \end{cases} \tag{A.7}$$

e seja

$$r = \beta + 1.$$

Temos,

$$\nabla w = \begin{cases} \dfrac{(\beta+1)}{2} v^{\frac{\beta-1}{2}}\nabla v & \text{se} \quad \beta \neq -1, \\ v^{-1}\nabla v & \text{se} \quad \beta = -1. \end{cases} \tag{A.8}$$

Daí, por (A.6)

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma\eta^2|\nabla w|^2 dx &= \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \sigma\eta^2\frac{r^2}{4}v^{\beta-1}|\nabla v|^2 dx & \text{se} \quad \beta \neq -1, \\ \displaystyle\int_\Omega \sigma\eta^2 v^{-2}|\nabla v|^2 dx & \text{se} \quad \beta = -1, \end{cases} \\ &\leqslant \begin{cases} \dfrac{r^2}{4}C_2\left(1+\dfrac{1}{|\beta|}\right)^2\displaystyle\int_\Omega w^2\left[\eta^2+\sigma|\nabla\eta|^2\right]dx & \text{se} \quad \beta \neq -1, \\ 2C_2\displaystyle\int_\Omega (\eta^2+\sigma|\nabla\eta|^2)dx & \text{se} \quad \beta = -1. \end{cases} \end{aligned} \tag{A.9}$$

Como $p > 2$ e $u \in C^1(\overline{\Omega})$ temos que, $\sigma \equiv |\nabla|^{p-2}$ é limitado em $\overline{\Omega}$, e desde que $\overline{2}^* > 2$, para todo $2 < 2^\star < \overline{2}^*$ vale a desigualdade de Sobolev com peso (Teorema 2.3). Logo, para $\beta \neq -1$, usando as desigualdades triangulares e $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$ conseguimos

$$\begin{aligned} \|\eta w\|^2_{L^{2^\star}(\Omega)} &\leqslant \overline{C}\|\nabla(\eta w)\|^2_{L^2(\Omega,\sigma)} \\ &= \overline{C}\int_\Omega \sigma|\nabla(\eta w)|^2 dx \\ &\leqslant \overline{C}\int_\Omega \sigma\left|\nabla\eta v^{\frac{\beta+1}{2}} + \eta\left(\frac{\beta+1}{2}\right)v^{\frac{\beta-1}{2}}\nabla v\right|^2 dx \\ &\leqslant 2\overline{C}\int_\Omega \sigma\left(|\nabla\eta|^2 v^{\beta+1} + \eta^2\frac{(\beta+1)^2}{4}v^{\beta-1}|\nabla v|^2\right)dx \\ &= 2\overline{C}\int_\Omega \sigma\left(|\nabla\eta|^2 w^2 + \eta^2|\nabla w|^2\right)dx. \end{aligned}$$

Por (A.9), obtemos

$$
\begin{aligned}
\|\eta w\|^2_{L^{2^\star}(\Omega)} &\leqslant 2\overline{C}\int_\Omega \sigma|\nabla\eta|^2 w^2 dx + \overline{C}\frac{r^2}{2}C_2\left(1+\frac{1}{|\beta|}\right)^2\int_\Omega w^2\left(\eta^2+\sigma|\nabla\eta|^2\right)dx \\
&\leqslant 2\overline{C}\left(1+\frac{1}{|\beta|}\right)^2\int_\Omega \sigma|\nabla\eta|^2 w^2 dx \\
&+ \overline{C}r^2C_2\left(1+\frac{1}{|\beta|}\right)^2\int_\Omega w^2\left(\eta^2+\sigma|\nabla\eta|^2\right)dx.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\|\eta w\|^2_{L^{2^\star}(\Omega)} &\leqslant r^2\left(1+\frac{1}{|\beta|}\right)^2\left[\overline{C}C_2\int_\Omega w^2\left(\eta^2+\sigma|\nabla\eta|^2\right)dx + \frac{2\overline{C}}{r^2}\int_\Omega \sigma|\nabla\eta|^2 w^2 dx\right] \\
&\leqslant r^2\left(1+\frac{1}{|\beta|}\right)^2\left(\overline{C}C_2+\frac{2\overline{C}}{r^2}\right)\int_\Omega w^2\left(\eta^2+2\sigma|\nabla\eta|^2\right)dx.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\|\eta w\|^2_{L^{2^\star}} \leqslant Cr^2\int_\Omega w^2\left(\eta^2+|\nabla\eta|^2\right)dx \leqslant Cr^2\int_\Omega w^2(\eta+|\nabla\eta|)^2 dx, \tag{A.10}
$$

onde $C = C(p,f,N,u,\Omega,\beta) = 2\sup_{\overline{\Omega}}\{\sigma\}\left(1+\frac{1}{|\beta|}\right)^2\left(\overline{C}C_2+\frac{2\overline{C}}{r^2}\right) > 0$ constante, e além disso, C será limitada, desde que $|r| \geqslant \alpha > 0$ (ou seja, $-1 < t < \beta$) e $|\beta| \geqslant l > 0$.

Agora faremos as especificações sobre η para este caso. Sejam $\delta \leqslant h' < h'' \leqslant 5\delta$ e $\eta \equiv 1$ em $B(x,h')$ e $\eta \equiv 0$ fora de $B(x,h'')$. Suponha também que, $|\nabla\eta| \leqslant \frac{2}{h''-h'}$, daí,

$$
\begin{aligned}
\|w\|_{L^{2^\star}(B(x,h'))} &\leqslant C^{\frac{1}{2}}|r|\left\|w(1+\frac{2}{h''-h'})\right\|_{L^2(B(x,h'))} \\
&\leqslant C^{\frac{1}{2}}|r|\left\|w(\frac{h''-h'+2}{h''-h'})\right\|_{L^2(B(x,h''))} \\
&\leqslant C^{\frac{1}{2}}|r|\left(\frac{4\delta+2}{h''-h'}\right)\|w\|_{L^2(B(x,h''))}.
\end{aligned}
$$

Ou seja, obtemos

$$
\|w\|_{L^{2^\star}(B(x,h'))} \leqslant \frac{C|r|}{h''-h'}\|w\|_{L^2(B(x,h''))}, \tag{A.11}
$$

onde com abuso de notação colocamos a constante $C = C^{\frac{1}{2}}(4\delta+2) = C(p,f,N,u,\Omega,\beta,\delta)$, além disso, podemos supor $C \geqslant 1$.

Escrevendo $\chi \equiv \frac{2^\star}{2}$.

Se $\beta < -1$, então $r < 0$. Assim, por (A.11) temos

$$
\begin{aligned}
\|w\|^{\frac{2}{r}}_{L^{2^\star}(B(x,h'))} &\geqslant \left(\frac{C|r|}{h''-h'}\right)^{\frac{2}{r}}\|w\|^{\frac{2}{r}}_{L^2(B(x,h''))} \\
&\geqslant \left(\frac{|r|}{h''-h'}\right)^{\frac{2}{r}}\|w\|^{\frac{2}{r}}_{L^2(B(x,h''))},
\end{aligned} \tag{A.12}
$$

isto é,

$$\left(\int_{B(x,h'')} v^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \left(\frac{|r|}{h''-h'}\right)^{\frac{2}{r}} \leqslant \left(\int_{B(x,h')} v^{r\chi} dx\right)^{\frac{1}{r\chi}}. \tag{A.13}$$

Usando a técnica iterativa de Moser. Para $\alpha_0 > 0$ dado, definamos

$$r_k = (-\alpha_0)\chi^k \;\text{ e }\; h_k = \delta\left[1 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right] \tag{A.14}$$

$k = 0, 1, 2, \cdots$.

Veja que,

$$\left|\begin{array}{l} h_k - h_{k+1} = \dfrac{3\delta}{2}\dfrac{1}{2^{k+1}}, \\ h_k \longrightarrow \delta, \\ r_{k+1} = (-\alpha_0)\chi^{k+1} = r_k\chi, \\ r_k \longrightarrow -\infty, \\ \beta_k = r_k - 1 \longrightarrow -\infty, \end{array}\right. \tag{A.15}$$

usando isto, podemos iterar em (A.13), do seguinte modo

$$\begin{aligned}
\left(\int_{B(x,h_{k+1})} v^{r_{k+1}} dx\right)^{\frac{1}{r_{k+1}}} &= \left(\int_{B(x,h_{k+1})} v^{r_k\chi} dx\right)^{\frac{1}{r_k\chi}} \\
&\geqslant \left(|r_k|^{-\frac{2}{\alpha_0}}\right)^{\frac{1}{\chi^k}} \left[\left(\frac{3\delta}{2}\frac{1}{2^{k+1}}\right)^{\frac{2}{\alpha_0}}\right]^{\frac{1}{\chi^k}} \left(\int_{B(x,h_k)} v^{r_k} dx\right)^{\frac{1}{r_k}} \\
&= \left[\left(\alpha_0\chi^k\right)^{-\frac{2}{\alpha_0}}\right]^{\frac{1}{\chi^k}} \left[\left(\frac{3\delta}{2}\frac{1}{2^{k+1}}\right)^{\frac{2}{\alpha_0}}\right]^{\frac{1}{\chi^k}} \left(\int_{B(x,h_k)} v^{r_k} dx\right)^{\frac{1}{r_k}} \\
&= \left[(2\alpha_0)^{-\frac{2}{\alpha_0}}\right]^{\frac{1}{\chi^k}} \left[(2\chi)^{-\frac{2}{\alpha_0}}\right]^{\frac{k}{\chi^k}} \left[\left(\frac{3\delta}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha_0}}\right]^{\frac{1}{\chi^k}} \left(\int_{B(x,h_k)} v^{r_k} dx\right)^{\frac{1}{r_k}} \\
&\geqslant \left[(2\alpha_0)^{-\frac{2}{\alpha_0}}\right]^{\frac{1}{\chi^k}} \left[(2\chi)^{-\frac{2}{\alpha_0}}\right]^{\frac{k}{\chi^k}} \left(\delta^{\frac{2}{\alpha_0}}\right)^{\frac{1}{\chi^k}} \left(\int_{B(x,h_k)} v^{r_k} dx\right)^{\frac{1}{r_k}} \\
&= \left[\left(\frac{2\alpha_0}{\delta}\right)^{-\frac{2}{\alpha_0}}\right]^{\frac{1}{\chi^k}} \left[(2\chi)^{-\frac{2}{\alpha_0}}\right]^{\frac{k}{\chi^k}} \left(\int_{B(x,h_k)} v^{r_k} dx\right)^{\frac{1}{r_k}} \\
&\geqslant \left[\left(\frac{2\alpha_0}{\delta}\right)^{-\frac{2}{\alpha_0}}\right]^{\sum_{j=0}^k \frac{1}{\chi^j}} \left[(2\chi)^{-\frac{2}{\alpha_0}}\right]^{\sum_{j=0}^k \frac{j}{\chi^j}} \left(\int_{B(x,h_0)} v^{-\alpha_0} dx\right)^{-\frac{1}{\alpha_0}},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left(\int_{B(x,h_{k+1})} v^{r_{k+1}} dx\right)^{\frac{1}{r_{k+1}}} \geqslant C_0^{\sum_{j=0}^k \frac{1}{\chi^j}} \left[(2\chi)^{-\frac{2}{\alpha_0}}\right]^{\sum_{j=0}^k \frac{j}{\chi^j}} \left(\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})} v^{-\alpha_0} dx\right)^{-\frac{1}{\alpha_0}}, \tag{A.16}$$

onde $C_0 = \left(\dfrac{2\alpha_0}{\delta}\right)^{-\frac{2}{\alpha_0}}$.

Como as séries $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\chi^j}$, $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{\chi^j}$ são convergentes, fazendo $k \longrightarrow \infty$ em (A.16), encontramos uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\inf_{B(x,\delta)} \nu \geqslant C_1 \left(\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})} \nu^{-\alpha_0} dx \right)^{-\frac{1}{\alpha_0}}. \tag{A.17}$$

Afirmação A.1. *Existem $\alpha_0 > 0$ e uma constante $\tilde{C} > 0$ tais que*

$$\left(\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})} \nu^{\alpha_0} dx \right)^{\frac{1}{\alpha_0}} \leqslant \tilde{C} \left(\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})} \nu^{-\alpha_0} dx \right)^{-\frac{1}{\alpha_0}}. \tag{A.18}$$

Esta afirmação será provada em seguida.

Dado $1 < q < \chi$.

1. Se $1 < q \leqslant \alpha_0$, usando o fato de $L^{\alpha_0}(B(x, \frac{5\delta}{2})) \subset L^q(B(x, \frac{5\delta}{2}))$ e (A.18) temos

$$\begin{aligned} \left(\int_{B(x,2\delta)} \nu^{q} dx \right)^{\frac{1}{q}} &\leqslant \left(\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})} \nu^{q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leqslant \left| B(x, \frac{5\delta}{2}) \right|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{\alpha_0}} \left(\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})} \nu^{\alpha_0} dx \right)^{\frac{1}{\alpha_0}} \\ &\leqslant \tilde{C} \left| B(x, \frac{5\delta}{2}) \right|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{\alpha_0}} \left(\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})} \nu^{-\alpha_0} dx \right)^{-\frac{1}{\alpha_0}}. \end{aligned}$$

Então, por (A.17)

$$\|\nu\|_{L^q(B(x,2\delta))} \leqslant \hat{C} \inf_{B(x,\delta)} \nu, \tag{A.19}$$

onde $\hat{C} = \dfrac{\tilde{C}|B(x, \frac{5\delta}{2})|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{\alpha_0}}}{C_1}$.

2. Se $\alpha_0 < q < \chi$, precisaremos apenas de um número finito de iterações.

Para isso, voltaremos à (A.11), e consideraremos o caso em que $0 < r < 1$, isto é, $-1 < \beta < 0$. Assim,

$$\|w\|^{\frac{2}{r}}_{L^{2^*}(B(x,h'))} \leqslant \left(\frac{Cr}{h'' - h'} \right)^{\frac{2}{r}} \|w\|^{\frac{2}{r}}_{L^2(B(x,h''))}, \tag{A.20}$$

ou seja,

$$\left(\int_{B(x,h')} \nu^{r\chi} dx \right)^{\frac{1}{r\chi}} \leqslant \left(\frac{Cr}{h'' - h'} \right)^{\frac{2}{r}} \left(\int_{B(x,h'')} \nu^{r} dx \right)^{\frac{1}{r}}. \tag{A.21}$$

Agora, seja $\alpha_1 = \dfrac{q}{\chi^{k_0+1}} \leqslant \alpha_0$ para $k_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Então para $k = 0, 1, \cdots, k_0 + 1$ tomemos os valores $r_k = \alpha_1 \chi^k$ (note que, $q = r_{k_0+1} = \alpha_1 \chi^{k_0+1}$) e

$h_0 = \dfrac{5\delta}{2} > h_1 > \cdots > h_{k_0+1} = 2\delta$. Com isso, fazemos a iteração em (A.21)

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{B(x,2\delta)} \nu^q dx\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\int_{B(x,2\delta)} \nu^{\alpha_1 \chi^{k_0+1}} dx\right)^{\frac{1}{\alpha_1 \chi^{k_0+1}}} \\
&= \left(\int_{B(x,2\delta)} \nu^{(\alpha_1 \chi^{k_0})\chi} dx\right)^{\frac{1}{(\alpha_1 \chi^{k_0})\chi}} \qquad \text{(A.22)} \\
&\leqslant \left(\frac{C_{k_0}\alpha_1 \chi^{k_0}}{h_{k_0} - 2\delta}\right)^{\frac{2}{\alpha_1 \chi^{k_0}}} \left(\int_{B(x,h_{k_0})} \nu^{\alpha_1 \chi^{k_0}} dx\right)^{\frac{1}{\alpha_1 \chi^{k_0}}} \qquad \text{(A.23)} \\
&\leqslant \left[\prod_{j=0}^{k_0} \left(\frac{C_j}{h_j - h_{j+1}}\right)^{\frac{2}{\alpha_1 \chi^j}}\right] \left(\alpha_1^{\frac{2}{\alpha_1}}\right)^{\sum_{j=0}^{k_0} \frac{1}{\chi^j}} \left(\chi^{\frac{2}{\alpha_1}}\right)^{\sum_{j=0}^{k_0} \frac{j}{\chi^j}} \left(\int_{B(x,h_0)} \nu^{\alpha_1} dx\right)^{\frac{1}{\alpha_1}},
\end{aligned}
$$

ou seja, conseguimos

$$
\left(\int_{B(x,2\delta)} \nu^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \overline{\overline{C}} \left(\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})} \nu^{\alpha_1} dx\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}, \qquad \text{(A.24)}
$$

onde $\overline{\overline{C}} = \left[\prod_{j=0}^{k_0} \left(\dfrac{C_j}{h_j - h_{j+1}}\right)^{\frac{2}{\alpha_1 \chi^j}}\right] \left(\alpha_1^{\frac{2}{\alpha_1}}\right)^{\sum_{j=0}^{k_0} \frac{1}{\chi^j}} \left(\chi^{\frac{2}{\alpha_1}}\right)^{\sum_{j=0}^{k_0} \frac{j}{\chi^j}}$. Observe que, na iteração (A.24) (por exemplo no primeiro passo, isto é, de (A.22) para (A.23)) precisamos definir $r_{k_0+1} = r_{k_0}\chi$ de maneira que $0 < r_0 < 1$, neste caso precisamos que $0 < \alpha_1 \chi^{k_0} = \dfrac{q}{\chi} < 1$. Portanto $q < \chi$ é uma condição necessária.

Desde que $\alpha_1 \leqslant \alpha_0$, então $L^{\alpha_0}(B(x, \frac{5\delta}{2})) \subset L^{\alpha_1}(B(x, \frac{5\delta}{2}))$, usando este fato em (A.24), temos

$$
\left(\int_{B(x,2\delta)} \nu^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \overline{\overline{C}} \left|B(x, \frac{5\delta}{2})\right|^{\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_0}} \left(\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})} \nu^{\alpha_0} dx\right)^{\frac{1}{\alpha_0}}, \qquad \text{(A.25)}
$$

mediante (A.18), encontramos

$$
\left(\int_{B(x,2\delta)} \nu^s dx\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \overline{\overline{C}} \left|B(x, \frac{5\delta}{2})\right|^{\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_0}} \tilde{C} \left(\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})} \nu^{-\alpha_0} dx\right)^{-\frac{1}{\alpha_0}}, \qquad \text{(A.26)}
$$

e agora, por (A.17), obtemos

$$
\left(\int_{B(x,2\delta)} \nu^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C_3 \inf_{B(x,\delta)} \nu, \qquad \text{(A.27)}
$$

onde $C_3 = \dfrac{\overline{\overline{C}} \left|B(x, \frac{5\delta}{2})\right|^{\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_0}} \tilde{C}}{C_1}$.

Agora iremos provar a veracidade da Afirmação (A.18). Para isso, seguiremos a técnica introduzida por N.S. Trudinger em [23].

Consideremos $\beta = -1$ em (A.7), isto é,

$$w = \log v. \tag{A.28}$$

Vimos em (A.9) que,

$$\int_\Omega \sigma\eta^2|\nabla w|^2 dx \leqslant 2C_2 \int_\Omega (\eta^2 + \sigma|\nabla\eta|^2)dx. \tag{A.29}$$

Tomando $\eta \equiv 1$ em $B(x, 5\delta)$, então $\nabla\eta \equiv 0$ em $B(x, 5\delta)$. Daí

$$\int_{B(x,5\delta)} \sigma|\nabla w|^2 dx \leqslant 2C_2 \int_{B(x,5\delta)} dx = 2C_2|B(x, 5\delta)| = C, \tag{A.30}$$

onde C não depende de w (podemos supor $C \leqslant \mathcal{C}\delta^{N-2}$). Substituindo v por $\dfrac{v}{m}$ com $m := e^{\frac{1}{|B(x,5\delta)|}\int_{B(x,5\delta)} \log v dx}$, também podemos supor que w tem média zero em $B(x, 5\delta)$. Portanto, pela desigualdade de Sobolev com peso, para funções com média zero, obtemos

$$\|w\|_{L^{2^\star}(B(x,5\delta))} \leqslant \overline{C} \left(\int_{B(x,5\delta)} \sigma|\nabla w|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \overline{C} C^{\frac{1}{2}} = \bar{A}, \tag{A.31}$$

onde $\bar{A}$ é uma constante que não depende de w. O fato de $\bar{A}$ não depender de w é crucial e garante que as constantes não explodam, quando $\tau \longrightarrow 0$. Além disso, a constante m que introduzimos não modifica os cálculos seguintes e pode ser cancelada na desigualdade conclusiva.

Seja agora

$$\zeta = \psi^2 \frac{1}{v} \left(|w|^\theta + (2\theta)^\theta \right), \quad \theta \geqslant 1, \tag{A.32}$$

com $\psi \geqslant 0$ e $\psi \in C_0^1(B(x, 5\delta))$. Pelas regras da cadeia e produto, $\zeta \in H_0^{1,2}(\Omega, \sigma)$ $\zeta \geqslant 0$, e

$$\nabla\zeta = 2\psi\nabla\psi \frac{1}{v} \left(|w|^\theta + (2\theta)^\theta \right) + \psi^2 \frac{1}{v} \nabla v \left(\theta sign(w)|w|^{\theta-1} - |w|^\theta - (2\theta)^\theta \right). \tag{A.33}$$

Usando ζ como função teste em (2.23), tem-se

$$\int_\Omega \left[|\nabla u|^{p-2}(\nabla v, \nabla\zeta) + (p-2)|\nabla u|^{p-4}(\nabla u, \nabla v)(\nabla u, \nabla\zeta) - f'(u)v\zeta \right] dx \geqslant 0,$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f'(u)\psi^2 \left(|w|^\theta + (2\theta)^\theta \right) dx \;\leqslant\; & \int_\Omega 2\sigma \frac{\psi}{v} \left(|w|^\theta + (2\theta)^\theta \right) (\nabla v, \nabla\psi) dx \\
+ & \int_\Omega \sigma|\nabla v|^2 \frac{\psi^2}{v^2} \left(\theta sign(w|w|^{\theta-1} - |w|^\theta - (2\theta)^\theta) \right) dx \\
+ & \int_\Omega 2(p-2)|\nabla u|^{p-4}(\nabla u, \nabla v)(\nabla u, \nabla\psi) \frac{\psi}{v} \left(|w|^\theta + (2\theta)^\theta \right) dx \\
+ & \int_\Omega (p-2)|\nabla u|^{p-4}(\nabla u, \nabla v)^2 \frac{\psi^2}{v^2} \left(\theta sign(w)|w|^{\theta-1} - |w|^\theta - (2\theta)^\theta \right) dx.
\end{aligned} \tag{A.34}$$

Em seguida, para $\theta \geqslant 1$, faremos uso repetido das seguintes desigualdade, que são obtidas a partir da desigualdade de Young $\left(\frac{\theta-1}{\theta} + \frac{1}{\theta} = 1\right)$

$$\left|\begin{array}{lll} 2\theta|w|^{\theta-1} & \leqslant \dfrac{(\theta-1)}{\theta}|w|^{\theta} + \dfrac{1}{\theta}(2\theta)^{\theta} & \leqslant |w|^{\theta} + (2\theta)^{\theta} \\ & \text{ou} & \\ \theta|w|^{\theta-1} & \leqslant |w|^{\theta} + (2\theta)^{\theta} - \theta sign(w)|w|^{\theta-1}. & \end{array}\right. \tag{A.35}$$

Assim, aplicando (A.35) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz em (A.34) conseguimos

$$\begin{aligned} \int_\Omega f'(u)\psi^2\left(|w|^\theta + (2\theta)^\theta\right)dx \ \leqslant \ & \int_\Omega 2\sigma\frac{\psi}{v}\left(|w|^\theta + (2\theta)^\theta\right)|\nabla v||\nabla\psi|dx \\ - \ \theta(p-2)\int_\Omega \sigma\frac{\psi^2}{v^2}|\nabla v|^2|w|^{\theta-1}dx \ & - \ \theta\int_\Omega \sigma\frac{\psi^2}{v^2}|\nabla v|^2|w|^{\theta-1}dx \\ + \ 2(p-2)\int_\Omega \sigma\frac{\psi}{v} & \left(|w|^\theta + (2\theta)^\theta\right)|\nabla v||\nabla\psi|dx, \end{aligned} \tag{A.36}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int_\Omega f'(u)\psi^2\left(|w|^\theta + (2\theta)^\theta\right)dx \ \leqslant \ & (2p-3)\int_\Omega \sigma\frac{\psi}{v}\left(|w|^\theta + (2\theta)^\theta\right)|\nabla v||\nabla\psi|dx \\ & - \ \theta(p-1)\int_\Omega \sigma\psi^2|\nabla w|^2|w|^{\theta-1}dx, \end{aligned} \tag{A.37}$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned} \theta(p-1)\int_\Omega \sigma\psi^2|\nabla w|^2|w|^{\theta-1}dx \ \leqslant \ & - \int_\Omega f'(u)\psi^2\left(|w|^\theta + (2\theta)^\theta\right)dx \\ & (2p-3)\int_\Omega \sigma\frac{\psi}{v}\left(|w|^\theta + (2\theta)^\theta\right)|\nabla v||\nabla\psi|dx, \end{aligned} \tag{A.38}$$

então,

$$\begin{aligned} \theta\int_\Omega \sigma\psi^2|\nabla w|^2|w|^{\theta-1}dx \ \leqslant \ & \left(\frac{2p-3}{p-1}\right)\int_\Omega \sigma\frac{\psi}{v}\left(|w|^\theta + (2\theta)^\theta\right)|\nabla v||\nabla\psi|dx \\ & + \ \frac{1}{p-1}\int_\Omega |f'(u)|\psi^2\left(|w|^\theta + (2\theta)^\theta\right)dx. \end{aligned} \tag{A.39}$$

Note que, $\dfrac{2p-3}{p-1}$ e $\dfrac{1}{p-1}$ são constantes limitadas e não dependem de θ. Além disso, como $\theta \geqslant 1$, $p > 2$ (então σ é limitado em $\overline{\Omega}$), e $C_1 = \|f'(u)\|_{L^\infty(B(x,5\delta))} < \infty$, com isso, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma\psi^2|\nabla w|^2|w|^{\theta-1}dx \ \leqslant \ & \frac{C_1}{p-1}\int_\Omega \psi^2\left(|w|^\theta + (2\theta)^\theta\right)dx \ + \\ \left(\frac{2p-3}{p-1}\right)\int_\Omega \sigma\frac{\psi}{v}|w|^\theta|\nabla v||\nabla\psi|dx \ & + \ \left(\frac{2p-3}{p-1}\right)\int_\Omega \sigma\frac{\psi}{v}(2\theta)^\theta|\nabla v||\nabla\psi|dx. \end{aligned} \tag{A.40}$$

Usando a desigualdade de Young duas vezes em (A.40), encontramos

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \sigma\psi^2|\nabla w|^2|w|^{\theta-1}dx \leqslant B_1\int_\Omega \psi^2\left(|w|^\theta + (2\theta)^\theta\right)dx + \frac{\varepsilon^2 B_2}{2}\int_\Omega \sigma|w|^{\theta+1}|\nabla\psi|^2dx \\ & + \frac{B_2}{2\varepsilon^2}\int_\Omega \sigma\frac{\psi^2}{v^2}|w|^{\theta-1}|\nabla v|^2dx + \frac{B_2}{2}\int_\Omega \sigma(2\theta)^\theta|\nabla\psi|^2dx + \frac{B_2}{2}\int_\Omega \sigma\frac{\psi^2}{v^2}(2\theta)^\theta|\nabla v|^2dx, \end{aligned} \tag{A.41}$$

onde $B_1 = \dfrac{C_1}{p-1}$, $B_2 = \left(\dfrac{2p-3}{p-1}\right)$ e ε é uma constante positiva de maneira que $\dfrac{B_2}{2\varepsilon^2} = \dfrac{1}{2}$, isto é, $\varepsilon = \sqrt{B_2}$.

Com isso,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \sigma\psi^2|\nabla w|^2|w|^{\theta-1}dx &\leqslant 2B_1\int_\Omega \psi^2\left(|w|^\theta + (2\theta)^\theta\right)dx + B_2^2\int_\Omega \sigma|w|^{\theta+1}|\nabla\psi|^2dx \\
&\quad + B_2\int_\Omega \sigma(2\theta)^\theta|\nabla\psi|^2dx + B_2\int_\Omega \sigma\frac{\psi^2}{\nu^2}(2\theta)^\theta|\nabla \nu|^2dx \\
&\leqslant 2B_1\int_\Omega \psi^2\left(|w|^\theta + (2\theta)^\theta\right)dx + B_2(2\theta)^\theta\int_\Omega \sigma\psi^2|\nabla w|^2dx \\
&\quad + B_2^2\int_\Omega \sigma\left(|w|^{\theta+1} + (2\theta)^\theta\right)|\nabla\psi|^2dx.
\end{aligned} \tag{A.42}$$

Agora, o fato de $\psi \in C_0^1(B(x,5\delta))$ implica que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \sigma\psi^2|\nabla w|^2dx &= \int_{B(x,5\delta)} \sigma\psi^2|\nabla w|^2dx \\
&\leqslant \|\psi^2\|_{L^\infty}\int_{B(x,5\delta)} \sigma|\nabla w|^2dx.
\end{aligned}$$

Por (A.30), temos

$$\int_\Omega \sigma\psi^2|\nabla w|^2dx \leqslant \underbrace{\|\psi^2\|_\infty C}_{\text{não depende de } w}. \tag{A.43}$$

A partir disso, voltando à equação (A.42), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \sigma\psi^2|\nabla w|^2|w|^{\theta-1}dx &\leqslant 2B_1\int_\Omega \psi^2\left(|w|^\theta + (2\theta)^\theta\right)dx + B_2(2\theta)^\theta\|\psi^2\|_\infty C \\
&\quad + B_2^2\int_\Omega \sigma\left(|w|^{\theta+1} + (2\theta)^\theta\right)|\nabla\psi|^2dx \\
&\leqslant 2B_1\int_\Omega \psi^2\left(|w|^\theta + (2\theta)^\theta\right)dx + B_2\|\psi^2\|_\infty C(2\theta)^\theta n_0\int_\Omega \psi^2dx \\
&\quad + B_2^2\int_\Omega \sigma\left(|w|^{\theta+1} + (2\theta)^\theta\right)|\nabla\psi|^2dx \\
&\leqslant 2B_1\int_\Omega \psi^2\left(|w|^\theta + (2\theta)^\theta\right)dx + B_3\int_\Omega \psi^2\left(|w|^\theta + (2\theta)^\theta\right)dx \\
&\quad + B_2^2\int_\Omega \sigma\left(|w|^{\theta+1} + (2\theta)^\theta\right)|\nabla\psi|^2dx,
\end{aligned} \tag{A.44}$$

onde $B_3 = B_2\|\psi^2\|_\infty C n_0$ e $n_0 = n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ (uma vez que $\psi \in C_0^1(B(x,5\delta))$) é suficientemente grande tal que $n_0\int_{B(x,5\delta)} \psi^2 \geqslant 1dx$. Então,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \sigma\psi^2|\nabla w|^2|w|^{\theta-1}dx &\leqslant (2B_1 + B_3)\int_\Omega \psi^2\left(|w|^\theta + (2\theta)^\theta\right)dx \\
&\quad + B_2^2\int_\Omega \sigma\left(|w|^{\theta+1} + (2\theta)^\theta\right)|\nabla\psi|^2dx.
\end{aligned} \tag{A.45}$$

Afirmamos que, $|w|^\theta + (2\theta)^\theta \leqslant 2(|w|^{\theta+1} + (2\theta)^\theta)$.

De fato, usando a desigualdade de Young e depois (A.35)

$$
\begin{aligned}
|w|^{\theta} + (2\theta)^{\theta} &= |w|^{\frac{\theta+1}{2}}|w|^{\frac{\theta-1}{2}} + (2\theta)^{\theta} \\
&\leqslant \frac{|w|}{2}^{\theta+1} + \frac{|w|}{2}^{\theta-1} + (2\theta)^{\theta} \\
&\leqslant |w|^{\theta+1} + \frac{|w|}{2}^{\theta} + \frac{(2\theta)}{2}^{\theta} + (2\theta)^{\theta},
\end{aligned}
\tag{A.46}
$$

ou seja,

$$
\frac{|w|}{2}^{\theta} + \frac{(2\theta)}{2}^{\theta} \leqslant |w|^{\theta+1} + (2\theta)^{\theta}.
$$

Daí,

$$
\int_{\Omega} \psi^2 \left(|w|^{\theta} + (2\theta)^{\theta}\right) dx \leqslant 2\int_{\Omega} \psi^2 \left(|w|^{\theta+1} + (2\theta)^{\theta}\right) dx. \tag{A.47}
$$

Usando (A.47) em (A.45), obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega} \sigma\psi^2|\nabla w|^2|w|^{\theta-1}dx &\leqslant 2(2B_1+B_3)\int_{\Omega} \psi^2 \left(|w|^{\theta+1} + (2\theta)^{\theta}\right) dx \\
&\quad + B_2^2\int_{\Omega} \sigma \left(|w|^{\theta+1} + (2\theta)^{\theta}\right)|\nabla\psi|^2 dx \\
&\leqslant 2(2B_1+B_3)\int_{\Omega} \psi^2 \left(|w|^{\theta+1} + (2\theta)^{\theta}\right) dx \\
&\quad + \sup_{\overline{\Omega}}(\sigma)B_2^2\int_{\Omega} \left(|w|^{\theta+1} + (2\theta)^{\theta}\right)|\nabla\psi|^2 dx,
\end{aligned}
\tag{A.48}
$$

isto é,

$$
\int_{\Omega} \sigma\psi^2|\nabla w|^2|w|^{\theta-1}dx \leqslant B\int_{\Omega} \left(|w|^{\theta+1} + (2\theta)^{\theta}\right)\left(\psi^2 + |\nabla\psi|^2\right) dx \tag{A.49}
$$

onde $B = \max\left\{2(2B_1+B_3), \sup_{\overline{\Omega}}(\sigma)B_2^2\right\}$.

A equação (A.49) é semelhante a (A.6), a menos do termo $(2\theta)^{\theta}$.

Defina

$$
g = |w|^{\frac{\theta+1}{2}}
$$

então,

$$
\nabla g = \mathrm{sign}(w)\left(\frac{\theta+1}{2}\right)|w|^{\frac{\theta-1}{2}}\nabla w.
$$

Por (A.48), temos

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega} \sigma\psi^2|\nabla g|^2 dx &= \int_{\Omega} \sigma\psi^2\left(\frac{\theta+1}{2}\right)^2|w|^{\theta-1}|\nabla w|^2 dx \\
&\leqslant \left(\frac{\theta+1}{2}\right)^2 B\int_{\Omega} \left(|w|^{\theta+1} + (2\theta)^{\theta}\right)\left(\psi^2 + |\nabla\psi|^2\right) dx.
\end{aligned}
\tag{A.50}
$$

Para $2 < 2^\star < \overline{2}^*$, vale a desigualdade de Sobolev com peso. Assim, (com $r = \theta + 1$) e usando a estimativa acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\psi g\|^2_{L^{2^\star}(\Omega)} &\leqslant \overline{C}^2 \|\nabla(\psi g)\|^2_{L^2(\Omega,\sigma)} \\
&= \overline{C}^2 \left(\int_\Omega \sigma |\nabla\psi g + \psi \nabla g|^2 dx \right) \\
&\leqslant 2\overline{C}^2 \int_\Omega \left(\sigma |\nabla \psi|^2 g^2 + \sigma \psi^2 |\nabla g|^2 \right) dx \\
&\leqslant 2r^2 \overline{C}^2 \sup_\Omega(\sigma) \left(\int_\Omega |\nabla\psi|^2 |w|^{\theta+1} dx \right) \\
&+ 2\overline{C}^2 \left(\frac{r}{2}\right)^2 B \int_\Omega \left(|w|^{\theta+1} + (2\theta)^\theta \right) \left(\psi^2 + |\nabla\psi|^2 \right) dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\|\psi g\|^2_{L^{2^\star}(\Omega)} &\leqslant r^2 B_0 \left[\int_\Omega |\nabla\psi|^2 |w|^{\theta+1} dx + \int_\Omega \left(|w|^{\theta+1} + (2\theta)^\theta \right) \left(\psi^2 + |\nabla\psi|^2 \right) dx \right] \\
&\leqslant 2r^2 B_0 \left[\int_\Omega \left(|w|^{\theta+1} + (2\theta)^\theta \right) \left(\psi^2 + |\nabla\psi|^2 \right) dx \right] \\
&= 2r^2 B_0 \left[\int_\Omega |w|^{\theta+1} \left(\psi^2 + |\nabla\psi|^2 \right) dx + \int_\Omega (2\theta)^\theta \left(\psi^2 + |\nabla\psi|^2 \right) dx \right] \\
&\leqslant 2r^2 B_0 \left[\int_\Omega |w|^{\theta+1} (\psi + |\nabla\psi|)^2 dx + \int_\Omega (2\theta)^\theta (\psi + |\nabla\psi|)^2 dx \right] \\
&= 2r^2 B_0 \left[\left\| w^{\frac{\theta+1}{2}} (\psi + |\nabla\psi|) \right\|^2_{L^2(\Omega)} + (2\theta)^\theta \|(\psi + |\nabla\psi|)\|^2_{L^2(\Omega)} \right],
\end{aligned}$$

onde $B_0 = \max\left\{ 2\overline{C}^2 \sup_{\overline{\Omega}}(\sigma), \dfrac{2\overline{C}^2 B}{4} \right\}$ e não depende de θ.

Sejam $\delta \leqslant h' < h'' \leqslant 5\delta$ e $\psi \equiv 1$ em $B(x, h')$ e $\psi \equiv 0$ fora de $B(x, h'')$. Suponha também que, $|\nabla\psi| \leqslant \dfrac{2}{h'' - h'}$. Daí,

$$\|g\|^2_{L^{2^\star}(B(x,h'))} \leqslant \left[\frac{r(2B_0)^{\frac{1}{2}}(4\delta + 2)}{h'' - h'} \right]^2 \left[\left\| w^{\frac{\theta+1}{2}} \right\|^2_{L^2(B(x,h''))} + (2\theta)^\theta |B(x, 5\delta)| \right]. \tag{A.51}$$

Afirmação A.2. *Existe* $\gamma > 0$ *suficientemente grande, tal que*

$$\left[\left(\int_{B(x,h'')} |w|^r dx \right) + (2\theta)^\theta |B(x, 5\delta)| \right]^{\frac{1}{r}} \leqslant \left(\int_{B(x,h'')} |w|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} + r\gamma,$$

para todo $r = \theta + 1 \geqslant 2$.

Caso contrário, para cada $n \in \mathbb{N}$ existiria $r_n = \theta_n + 1 \geqslant 2$ tal que

$$\left[\left(\int_{B(x,h'')} |w|^{r_n} dx \right) + (2\theta_n)^{\theta_n} |B(x, 5\delta)| \right]^{\frac{1}{r_n}} > \left(\int_{B(x,h'')} |w|^{r_n} dx \right)^{\frac{1}{r_n}} + r_n n.$$

Como $v \in L^{\infty}(\Omega)$, escreva $a = \sup\limits_{\Omega} |w| < \infty$, temos

$$\begin{aligned} a^{r_n}|\Omega| + (2\theta_n)^{\theta_n}|B(x,5\delta)| &\geqslant \left(\int_{B(x,h'')} |w|^{r_n}dx\right) + (2\theta_n)^{\theta_n}|B(x,5\delta)| \\ &> \left[\left(\int_{B(x,h'')} |w|^{r_n}dx\right)^{\frac{1}{r_n}} + r_n n\right]^{r_n} \\ &\geqslant (r_n n)^{r_n}. \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} 1 \leqslant \frac{a^{r_n}|\Omega|}{(r_n n)^{r_n}} + \frac{(2\theta_n)^{\theta_n}|B(x,5\delta)|}{(r_n n)^{r_n}} &\leqslant \frac{a^{r_n}|\Omega|}{(r_n n)^{r_n}} + \frac{(2\theta_n)^{\theta_n}|B(x,5\delta)|}{(\theta_n n)^{\theta_n}(r_n n)} \\ &= \frac{a^{r_n}|\Omega|}{(r_n n)^{r_n}} + \frac{2^{\theta_n}|B(x,5\delta)|}{n^{\theta_n}(r_n n)}. \end{aligned} \tag{A.52}$$

No entanto,

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{a^{r_n}|\Omega|}{(r_n n)^{r_n}} \longrightarrow 0 \\ \qquad \text{e} \\ \dfrac{2^{\theta_n}|B(x,5\delta)|}{n^{\theta_n}(r_n n)} \longrightarrow 0 \end{array} \right.$$

independente de que (r_n) seja limitada ou não. Mas, isso ocasiona um absurdo em (A.52). O que prova à Afirmação A.2.

Portanto, aplicando isso em (A.51), conseguimos

$$\begin{aligned} \|g\|^{\frac{2}{r}}_{L^{2^\star}(B(x,h'))} &\leqslant \left[\frac{r(2B_0)^{\frac{1}{2}}(4\delta+2)}{h''-h'}\right]^{\frac{2}{r}} \left[\left\|w^{\frac{\theta+1}{2}}\right\|^2_{L^2(B(x,h''))} + (2\theta)^{\theta}|B(x,5\delta)|\right]^{\frac{1}{r}} \\ &\leqslant \left[\frac{r(2B_0)^{\frac{1}{2}}(4\delta+2)}{h''-h'}\right]^{\frac{2}{r}} \left[\left\|w^{\frac{\theta+1}{2}}\right\|^{\frac{2}{r}}_{L^2(B(x,h''))} + \gamma r\right], \end{aligned}$$

isto é, obtemos

$$\left(\int_{B(x,h')} |w|^{r\chi}dx\right)^{\frac{1}{r\chi}} \leqslant \left(\frac{rB_0}{h''-h'}\right)^{\frac{2}{r}} \left[\left(\int_{B(x,h'')} |w|^{r}dx\right)^{\frac{1}{r}} + \gamma r\right], \tag{A.53}$$

onde abusamos da notação e escrevemos $B_0 = (2B_0)^{\frac{1}{2}}(4\delta+2)$.

Afirmação A.3. *Existe uma constante* $\Lambda > 0$ *tal que*

$$\left(\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})} |w|^{m}\right)^{\frac{1}{m}} \leqslant \Lambda \left[\left(\int_{B(x,5\delta)} |w|^{2^\star}\right)^{\frac{1}{2^\star}} + m\right] \quad \textit{para todo} \;\; m \geqslant 2^\star. \tag{A.54}$$

Com efeito, escolha $h_k = \frac{5\delta}{2}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$ e também considere $r_k = \chi^{k-1}2^\star = \chi^k 2$, ou seja, $r_k\chi = \chi^k 2^\star$, com $k = 0, 1, 2, \cdots$. Iterando em (A.53), temos

$$\begin{aligned}
\left(\int_{B(x,h_k)} |w|^{\chi^k 2^\star} dx\right)^{\frac{1}{\chi^k 2^\star}} &= \left(\int_{B(x,h_k)} |w|^{r_k\chi} dx\right)^{\frac{1}{r_k\chi}} \\
&\leqslant \left(\frac{r_k B_0}{h_{k-1}-h_k}\right)^{\frac{2}{r_k}} \left[\left(\int_{B(x,h_{k-1})} |w|^{r_k} dx\right)^{\frac{1}{r_k}} + \gamma r_k\right] \\
&= \left(\frac{2\chi^k B_0}{h_{k-1}-h_k}\right)^{\frac{1}{\chi^k}} \left[\left(\int_{B(x,h_{k-1})} |w|^{\chi^{k-1}2^\star} dx\right)^{\frac{1}{\chi^{k-1}2^\star}} + \gamma\chi^{k-1}2^\star\right] \\
&\leqslant (2B_0)^{\sum_{j=1}^k \frac{1}{\chi^j}} \prod_{j=1}^k \left(\frac{\chi^j}{h_{j-1}-h_j}\right)^{\frac{1}{\chi^j}} \left(\int_{B(x,h_0)} |w|^{2^\star} dx\right)^{\frac{1}{2^\star}} \\
&+ \left\{\sum_{j=0}^{k-1} \chi^{j-k} \left[\prod_{i=j+1}^k \left(\frac{2B_0\chi^i}{h_{i-1}-h_i}\right)^{\frac{1}{\chi^i}}\right]\right\} \gamma\chi^k 2^\star.
\end{aligned}$$

Observando que, $h_k - h_{k+1} = \dfrac{5\delta}{2}\left(\dfrac{1}{2^{k+1}}\right)$, façamos as seguintes estimativas sobre os produtórios acima, para $j = 0, \cdots, k-1$, temos

$$\text{(I)} \quad \prod_{j=1}^k \left(\frac{\chi^j}{h_{j-1}-h_j}\right)^{\frac{1}{\chi^j}} = \prod_{j=1}^k \left(\frac{\chi^j}{\frac{5\delta}{2}\left(\frac{1}{2^j}\right)}\right)^{\frac{1}{\chi^j}} = \left(\frac{2}{5\delta}\right)^{\sum_{j=1}^k \frac{1}{\chi^j}} (2\chi)^{\sum_{j=1}^k \frac{j}{\chi^j}} \leqslant \Lambda_1,$$

$$\begin{aligned}
\text{(II)} \quad \prod_{i=j+1}^k \left(\frac{2B_0\chi^i}{h_{i-1}-h_i}\right)^{\frac{1}{\chi^i}} &= \prod_{i=j+1}^k \left(\frac{2B_0\chi^i}{\frac{5\delta}{2}\left(\frac{1}{2^i}\right)}\right)^{\frac{1}{\chi^i}} = \left(\frac{4B_0}{5\delta}\right)^{\sum_{i=j+1}^k \frac{1}{\chi^i}} \left[\prod_{i=j+1}^k (2\chi)^{\frac{i}{\chi^i}}\right] \\
&= \left(\frac{4B_0}{5\delta}\right)^{\sum_{i=j+1}^k \frac{1}{\chi^i}} (2\chi)^{\sum_{i=j+1}^k \frac{i}{\chi^i}} \leqslant \left(\frac{4B_0}{5\delta}\right)^{\sum_{i=0}^\infty \frac{1}{\chi^i}} (2\chi)^{\sum_{i=0}^\infty \frac{i}{\chi^i}} \leqslant \Lambda_2,
\end{aligned}$$

onde Λ_1 e Λ_2 são constantes que não dependem de k, (uma vez que podemos supor que $\dfrac{4B_0}{5\delta} \geqslant 1$, e depois usamos o fato que as séries $\sum_{i=0}^\infty \frac{1}{\chi^i}, \sum_{i=0}^\infty \frac{i}{\chi^i}$ convergem).

Assim, encontramos uma constante $\Lambda_3 > 0$ (que não depende de k) tal que

$$\left(\int_{B(x,h_k)} |w|^{\chi^k 2^\star} dx\right)^{\frac{1}{\chi^k 2^\star}} \leqslant \Lambda_3 \left[\left(\int_{B(x,5\delta)} |w|^{2^\star} dx\right)^{\frac{1}{2^\star}} + \gamma\chi^k 2^\star\right]. \tag{A.55}$$

Seja $k_m = \inf_{\mathbb{N}}\{k/\ \chi^k 2^\star \geqslant m\}$, a partir de (A.55), temos

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})}|w|^m dx\right)^{\frac{1}{m}} &\leqslant |B(x,\frac{5\delta}{2})|^{\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{\chi^{k}2^\star}\right)}\left(\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})}|w|^{\chi^{k_m}2^\star}dx\right)^{\frac{1}{\chi^{k_m}2^\star}}\\
&\leqslant |B(x,\frac{5\delta}{2})|^{\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{\chi^{k}2^\star}\right)}\left(\int_{B(x,h_{k_m})}|w|^{\chi^{k_m}2^\star}dx\right)^{\frac{1}{\chi^{k_m}2^\star}}\\
&\leqslant |B(x,\frac{5\delta}{2})|^{\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{\chi^{k}2^\star}\right)}\Lambda_3\left[\left(\int_{B(x,5\delta)}|w|^{2^\star}dx\right)^{\frac{1}{2^\star}}+\gamma\chi^{k_m}2^\star\right]\\
&\leqslant |B(x,\frac{5\delta}{2})|^{\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{\chi^{k}2^\star}\right)}\Lambda_3\gamma\left[\left(\int_{B(x,5\delta)}|w|^{2^\star}dx\right)^{\frac{1}{2^\star}}+\chi^{k_m}2^\star\right].
\end{aligned}
$$

É evidente que, $m\chi > \chi^{k_m}2^\star$. Assim,

$$
\left(\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})}|w|^m dx\right)^{\frac{1}{m}} \leqslant |B(x,\frac{5\delta}{2})|^{\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{\chi^{k}2^\star}\right)}\Lambda_3\gamma\left[\left(\int_{B(x,5\delta)}|w|^{2^\star}dx\right)^{\frac{1}{2^\star}}+m\chi\right],
$$

ou seja,

$$
\left(\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})}|w|^m dx\right)^{\frac{1}{m}} \leqslant \Lambda\left[\left(\int_{B(x,5\delta)}|w|^{2^\star}dx\right)^{\frac{1}{2^\star}}+m\right], \tag{A.56}
$$

onde $\Lambda = |B(x,\frac{5\delta}{2})|^{\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{\chi^{k}2^\star}\right)}\Lambda_3\gamma\chi$. Provando assim, à Afirmação A.3.

Fazendo uso da Afirmação A.3, iremos provar à Afirmação A.1.

Para $\alpha_0 > 0$ dado, consideremos a expansão em série de potência de $e^{\alpha_0|w|}$.

$$
\begin{aligned}
\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})}e^{\alpha_0|w|}dx &= \int_{B(x,\frac{5\delta}{2})}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha_0|w|)^k}{k!}\right]dx\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})}\frac{(\alpha_0|w|)^k}{k!}dx\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha_0^k}{k!}\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})}|w|^k dx\right)\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{(\alpha_0\Lambda)^k}{k!}\left[\left(\int_{B(x,5\delta)}|w|^{2^\star}dx\right)^{\frac{1}{2^\star}}+k\right]^k\right\}\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha_0\Lambda)^k\left(\bar{A}+k\right)^k}{k!},
\end{aligned} \tag{A.57}
$$

onde usamos (A.31), ou seja, $\left(\int_{B(x,5\delta)}|w|^{2^\star}dx\right)^{\frac{1}{2^\star}} \leqslant \bar{A}$ ($\bar{A}$ é uma constante que não depende de w, logo não explode quando $\tau \longrightarrow 0$). Calculemos o raio de convergência da série em (A.57)

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\frac{\dfrac{(\alpha_0\Lambda)^{k+1}(\bar{A}+k+1)^{k+1}}{(k+1)!}}{\dfrac{(\alpha_0\Lambda)^{k}(\bar{A}+k)^{k}}{(k)!}} &= \alpha_0\Lambda\lim_{k\to\infty}\frac{k!(\bar{A}+k+1)^{k+1}}{(K+1)!(\bar{A}+k)^{k}} \\
&= \alpha_0\Lambda\lim_{k\to\infty}\frac{(\bar{A}+k)}{K+1}\left(\frac{\bar{A}+k+1}{\bar{A}+k}\right)^{k+1} \\
&= \alpha_0\Lambda\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{\bar{A}+k}\right)^{k+1} \\
&\leqslant \alpha_0\Lambda\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} \\
&= \alpha_0\Lambda e.
\end{aligned}$$

Portanto, para $\alpha_0 << 1$, a série (A.57) converge, ou seja, existe uma constante $C > 0$ (que não depende de w) tal que

$$\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})} e^{\alpha_0|w|}dx \leqslant C. \tag{A.58}$$

Isto implica que,

$$\left(\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})} e^{\alpha_0 w}dx\right)\left(\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})} e^{-\alpha_0 w}dx\right) \leqslant \left(\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})} e^{\alpha_0|w|}dx\right)^2 \leqslant C^2. \tag{A.59}$$

Lembrando que $w = \log(v)$ temos,

$$\left(\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})} e^{\alpha_0\log(v)}dx\right)^{\frac{1}{\alpha_0}}\left(\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})} e^{-\alpha_0\log(v)}dx\right)^{\frac{1}{\alpha_0}} \leqslant C^{\frac{2}{\alpha_0}}$$

donde,

$$\left(\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})} v^{\alpha_0}dx\right)^{\frac{1}{\alpha_0}}\left(\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})} v^{-\alpha_0}dx\right)^{\frac{1}{\alpha_0}} \leqslant C^{\frac{2}{\alpha_0}}.$$

Com isso, obtemos

$$\left(\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})} v^{\alpha_0}dx\right)^{\frac{1}{\alpha_0}} \leqslant C^{\frac{2}{\alpha_0}}\left(\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})} v^{-\alpha_0}dx\right)^{-\frac{1}{\alpha_0}} \tag{A.60}$$

provando assim, a veracidade da Afirmação A.1.

(b_2) Se $\left(\dfrac{2N+2}{N+2} < p < 2\right)$.

Voltando à (A.3), veja que, para $\beta < 0$, temos $\beta(p-2) > 0$. Daí

$$\int_\Omega \beta(p-2)|\nabla u|^{p-4}(\nabla u, \nabla v)^2\eta^2 v^{\beta-1}dx \leqslant \beta(p-2)\int_\Omega \sigma|\nabla v|^2\eta^2 v^{\beta-1}dx, \tag{A.61}$$

equivalentemente,

$$\int_\Omega \left[\beta(p-2)|\nabla u|^{p-4}(\nabla u,\nabla v)^2\eta^2 v^{\beta-1} + \beta\sigma|\nabla v|^2\eta^2 v^{\beta-1}\right] dx \leqslant \beta(p-1)\int_\Omega \sigma|\nabla v|^2\eta^2 v^{\beta-1}$$

usando esta última desigualdade em (A.3), obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega f'(u)\eta^2 v^{\beta+1}dx &\leqslant \int_\Omega \sigma 2\eta v^\beta(\nabla v,\nabla\eta)dx + \int_\Omega \beta(p-1)\sigma|\nabla v|^2\eta^2 v^{\beta-1}dx \\ &\leqslant \int_\Omega \sigma 2\eta v^\beta|\nabla v||\nabla\eta|dx + \int_\Omega \beta(p-1)\sigma|\nabla v|^2\eta^2 v^{\beta-1}dx.\end{aligned} \tag{A.62}$$

Então,

$$-\beta\int_\Omega \sigma|\nabla v|^2\eta^2 v^{\beta-1}dx \leqslant \frac{2}{(p-1)}\int_\Omega \sigma\eta v^\beta|\nabla v||\nabla\eta|dx + \frac{1}{(p-1)}\int_\Omega |f'(u)|\eta^2 v^{\beta+1}dx.$$

Note que, a equação acima é semelhante a (A.4), e de modo análogo ao que já fizemos. Obtemos

$$\int_\Omega \sigma v^{\beta-1}|\nabla v|^2\eta^2 dx \leqslant \frac{C}{|\beta|}\left(1+\frac{1}{|\beta|}\right)\int_\Omega v^{\beta+1}\left[\eta^2+\sigma|\nabla\eta|^2\right] dx, \tag{A.63}$$

e consequentemente,

$$\int_\Omega \sigma\eta^2|\nabla w|^2 dx \leqslant \begin{cases} \dfrac{r^2}{4}C\left(1+\dfrac{1}{|\beta|}\right)^2\displaystyle\int_\Omega w^2\left[\eta^2+\sigma|\nabla\eta|^2\right] dx & \text{se} \quad \beta\neq -1 \\ 2C\displaystyle\int_\Omega(\eta^2+\sigma|\nabla\eta|^2)dx & \text{se} \quad \beta=-1. \end{cases} \tag{A.64}$$

Além disso, como $u \in C^1(\overline{\Omega})$, então $\sigma^{-1} \in L^\infty(\Omega)$, ou seja, existe $\lambda_0 > 0$ tal que $\lambda_0 \geqslant \sigma^{-1} > 0$ q.t.p. em Ω, assim $\sigma \equiv |\nabla u|^{p-2} \geqslant \lambda = \dfrac{1}{\lambda_0} > 0$ q.t.p em Ω. Neste caso, pela desigualdade de Sobolev clássica (com $w = v^{\frac{\beta+1}{2}}$, $\beta \neq -1$) e usando (A.64), temos,

$$\begin{aligned}\|\eta w\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} &\leqslant C_1\|\nabla(\eta w)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= C_1\int_\Omega |\nabla\eta w + \eta\nabla w|^2\, dx \\ &\leqslant \frac{2C_1}{\lambda}\int_\Omega \sigma(|\nabla\eta|^2 w^2 + \eta^2|\nabla w|^2)dx \\ &\leqslant \frac{2C_1}{\lambda}\int_\Omega \sigma|\nabla\eta|^2 w^2 dx + \frac{2C_1}{\lambda}\int_\Omega \sigma\eta^2|\nabla w|^2 dx \\ &\leqslant \frac{2C_1}{\lambda}\int_\Omega \sigma|\nabla\eta|^2 w^2 dx + \frac{C_1}{\lambda}\frac{r^2}{2}C\left(1+\frac{1}{|\beta|}\right)^2\int_\Omega w^2\left[\eta^2+\sigma|\nabla\eta|^2\right] dx \\ &\leqslant C_2 r^2\left(1+\frac{1}{|\beta|}\right)^2\int_\Omega w^2\left[\eta^2+2\sigma|\nabla\eta|^2\right] dx \\ &\leqslant C_2 r^2\left(1+\frac{1}{|\beta|}\right)^2\int_\Omega \sigma w^2\left[\frac{\eta^2}{\lambda}+2|\nabla\eta|^2\right] dx,\end{aligned}$$

onde $C_2 = \max\left\{\frac{2C_1}{r^2\lambda}, \frac{C_1 C}{2\lambda}\right\}$. Donde

$$\|\eta w\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} \leqslant C_3 r^2 \int_\Omega \sigma\,[w(\eta + |\nabla\eta|)]^2\,dx, \tag{A.65}$$

com $C_3 = C_2\left(1 + \frac{1}{|\beta|}\right)^2 \max\left\{2, \frac{1}{\lambda}\right\}$.

Agora, se $\sigma \in L^s(\Omega)$, aplicando a desigualdade de Hölder, então

$$\int_\Omega \sigma\,[w(\eta + |\nabla\eta|)]^2\,dx \leqslant \left(\int_\Omega \sigma^s dx\right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_\Omega [w(\eta + |\nabla\eta|)]^{s^*}\,dx\right)^{\frac{2}{s^*}}, \tag{A.66}$$

onde $\frac{2}{s^*} = 1 - \frac{1}{s}$.

Substituindo (A.66) em (A.65), conseguimos

$$\|\eta w\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} \leqslant C_3 r^2 \|\sigma\|_{L^s(\Omega)} \|w(\eta + |\nabla\eta|)\|^2_{L^{s^*}(\Omega)}. \tag{A.67}$$

Assim, com as mesmas especificações feitas sobre η (no item (a_2)), isto é, $\delta \leqslant h' < h'' \leqslant 5\delta$ e $\eta \equiv 1$ em $B(x, h')$ e $\eta \equiv 0$ fora de $B(x, h'')$. Suponha também que, $|\nabla\eta| \leqslant \frac{2}{h'' - h'}$, com isso, obtemos

$$\|w\|^2_{L^{2^*}(B(x,h'))} \leqslant \frac{C_3 r^2 \|\sigma\|_{L^s(\Omega)}}{(h'' - h')^2} \|w\|^2_{L^{s^*}(B(x,h''))}. \tag{A.68}$$

Definindo $\chi' = \frac{2^*}{s^*}$.

1º) Se $1 > r > 0$, teremos

$$\|w\|^{\frac{2}{r}}_{L^{2^*}(B(x,h'))} \leqslant \left(\frac{C_3 |r| \|\sigma\|_{L^s(\Omega)}}{h'' - h'}\right)^{\frac{2}{r}} \|w\|^{\frac{2}{r}}_{L^{s^*}(B(x,h''))},$$

isto é,

$$\left(\int_{B(x,h')} v^m dx\right)^{\frac{1}{m}} \leqslant \left(\frac{C_3 \left|\frac{m2}{2^*}\right| \|\sigma\|_{L^s(\Omega)}}{h'' - h'}\right)^{\frac{2^*}{m}} \left(\int_{B(x,h'')} v^{\frac{m}{\chi'}}\,dx\right)^{\frac{\chi'}{m}}, \tag{A.69}$$

onde $m = \frac{r2^*}{2}$ (substituição de r por m).

2º) Se $r < 0$, então

$$\|w\|_{L^{s^*}(B(x,h''))} \left(\frac{C_3 |r| \|\sigma\|_{L^s(\Omega)}}{h'' - h'}\right)^{\frac{2}{r}} \leqslant \|w\|^{\frac{2}{r}}_{L^{2^*}(B(x,h'))},$$

ou seja,

$$\left(\int_{B(x,h'')} v^{\frac{m}{\chi'}} dx\right)^{\frac{\chi'}{m}} \left(\frac{C_3 \left|\frac{m2}{2^*}\right| \|\sigma\|_{L^s(\Omega)}}{h''-h'}\right)^{\frac{2^*}{m}} \leqslant \left(\int_{B(x,h')} v^m dx\right)^{\frac{1}{m}}. \tag{A.70}$$

Para podermos usar os mesmos argumentos do item (a_2) é necessário somente que $\chi' > 1$, isto é,

$$1 < \chi' = \frac{2^*}{s^*} = \frac{2}{s^*}\frac{N}{(N-2)} = \left(1 - \frac{1}{s}\right)\frac{N}{(N-2)},$$

donde resulta que,

$$\frac{1}{s} < 1 - \frac{N-2}{N} = \frac{2}{N}, \text{ ou seja, } s > \frac{N}{2}.$$

Pelo Teorema 2.2, se $1 < p < 2$, temos que

$$\sigma \in L^{\left(\frac{p-1}{2-p}\right)\varepsilon}(\Omega) \text{ para todo } 0 < \varepsilon < 1.$$

Portanto, desde que $\frac{2N+2}{N+2} < p < 2$, então $\sigma \in L^s(\Omega)$, para $\frac{N}{2} < s < \frac{p-1}{2-p}$. Assim, para $1 < q < \chi'$ vale o mesmo resultado do item (a_2). □

A.2 Demonstração do Teorema 2.7

Demonstração. (a_4) Se $(p > 2)$.

Suponha sem perda de generalidade que $v - u \geqslant \tau > 0$ para algum $\tau \in \mathbb{R}$. Pois caso contrário, podemos considerar $(v-u)+\tau$ e fazer $\tau \longrightarrow 0^+$.

Assim, definamos

$$\Phi = \eta^2(v-u)^\beta, \qquad \beta < 0, \tag{A.71}$$

com $\eta \in C_0^1(B(x,5\delta))$ e $\eta \geqslant 0$ em Ω. Posteriormente serão feitas mais especificações sobre a função η. Pelas regras do produto e cadeia, $\Phi \in H_0^{1,2}(\Omega,\sigma)$, $\Phi \geqslant 0$, e ainda $\nabla\Phi = 2\eta(v-u)^\beta\nabla\eta + \beta\eta^2(v-u)^{\beta-1}\nabla(v-u)$.

Então usando Φ como função teste em (2.73), isto é,

$$-\Delta_p u\Phi + \Lambda u\Phi \leqslant -\Delta_p v\Phi + \Lambda v\Phi. \tag{A.72}$$

Integrando sobre Ω, temos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}(\nabla u, \nabla\Phi)dx + \Lambda\int_\Omega u\Phi dx \leqslant \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla(v,\nabla\Phi)dx + \Lambda\int_\Omega v\Phi dx,$$

e daí,

$$\begin{aligned}\Lambda\int_\Omega \eta^2(v-u)^{\beta+1}dx \ \geqslant\ &\int_\Omega 2\eta(v-u)^\beta(\nabla\eta,\ |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)dx\\ &+\beta\int_\Omega \eta^2(v-u)^{\beta-1}(\nabla(v-u),\ |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)dx,\end{aligned} \tag{A.73}$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned}\Lambda\int_\Omega \eta^2(v-u)^{\beta+1}dx \ -\ &\int_\Omega 2\eta(v-u)^\beta(\nabla\eta,\ |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)dx\\ \geqslant\ |\beta|&\int_\Omega \eta^2(u-v)^{\beta-1}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v,\ \nabla u - \nabla v)dx.\end{aligned} \tag{A.74}$$

Recordemos que existem constante $c_1, c_2 > 0$ (veja [5, Lemma 2.1]) tais que

$$\begin{gathered}||x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y| \ \leqslant\ c_1(|x|+|y|)^{p-2}|x-y|\\ \text{e}\\ (|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y,\ x-y)\ \geqslant\ c_2(|x|+|y|)^{p-2}|x-y|^2\end{gathered} \tag{A.75}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$.

Assim, usando estas estimativas em (A.74), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\Lambda}{c_2}\int_\Omega \eta^2(v-u)^{\beta+1}dx + \frac{2c_1}{c_2}&\int_\Omega \eta(v-u)^\beta|\nabla\eta|(|\nabla u|+|\nabla v|)^{p-2}|\nabla(v-u)|dx\\ \geqslant\ |\beta|&\int_\Omega \eta^2(v-u)^{\beta-1}|\nabla(v-u)|^2(|\nabla u|+|\nabla v|)^{p-2}dx.\end{aligned} \tag{A.76}$$

Escrevendo $\omega = (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-2}$, vejamos que, como $\dfrac{1}{\omega} \leqslant \dfrac{1}{|\nabla u|^{p-2}}$ e $\dfrac{1}{\omega} \leqslant \dfrac{1}{|\nabla v|^{p-2}}$, então ω satisfaz as mesmas propriedades de $|\nabla u|^{p-2}$ e $|\nabla v|^{p-2}$, assim, como por hipótese u ou v é solução de (2.15) com f satisfazendo (f_1) e (f_2), logo, para ω vale um análogo do Teorema 2.2, e com isso, uma desigualdade do tipo Sobolev com peso ω, também é possível neste caso.

Usando a desigualdade de Young, façamos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}\int_\Omega \eta(v-u)^\beta |\nabla(v-u)||\nabla\eta|\omega dx &\leqslant \frac{c_1}{c_2|\beta|}\int_\Omega |\nabla\eta|^2(v-u)^{\beta+1}\omega dx \\ &+ \frac{c_2|\beta|}{4c_1}\int_\Omega \eta^2(v-u)^{\beta-1}|\nabla(v-u)|^2\omega dx.\end{aligned} \tag{A.77}$$

Substituindo (A.77) em (A.76), conseguimos

$$\begin{aligned}\frac{|\beta|}{2}\int_\Omega \omega\eta^2(v-u)^{\beta-1}|\nabla(v-u)|^2 dx &\leqslant \frac{2c_1^2}{c_2^2|\beta|}\int_\Omega \omega(v-u)^{\beta+1}|\nabla\eta|^2 dx \\ &+ \frac{\Lambda}{c_2}\int_\Omega \eta^2(v-u)^{\beta+1}dx,\end{aligned} \tag{A.78}$$

isso implica

$$\begin{aligned}\int_\Omega \omega\eta^2(v-u)^{\beta-1}|\nabla(v-u)|^2 dx &\leqslant \frac{4c_1^2}{c_2^2|\beta|^2}\int_\Omega \omega(v-u)^{\beta+1}|\nabla\eta|^2 dx \\ &+ \frac{2\Lambda}{c_2|\beta|}\int_\Omega \eta^2(v-u)^{\beta+1}dx \\ &\leqslant \frac{C}{|\beta|}\left(1+\frac{1}{|\beta|}\right)\int_\Omega (v-u)^{\beta+1}[\eta^2+\omega|\nabla\eta|^2]dx,\end{aligned} \tag{A.79}$$

onde $C = \max\left\{\dfrac{2\Lambda}{c_2}, \dfrac{4c_1^2}{c_2^2}\right\}$.

Agora, pela desigualdade de Sobolev com peso ω, (assim como no Teorema 2.5) temos

$$\begin{aligned}\|\eta(v-u)^{\frac{\beta+1}{2}}\|^2_{L^{2^\star}(\Omega)} &\leqslant Cr^2\|(v-u)^{\frac{\beta+1}{2}}(\eta+|\nabla\eta|)\|^2_{L^2(\Omega,\omega)} \\ &\leqslant C\|\omega\|_{L^\infty(\Omega)}r^2\|(v-u)^{\frac{\beta+1}{2}}(\eta+|\nabla\eta|)\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Com argumentos análogos aos do Teorema 2.5, o resultado está provado. Onde mostra-se que existem $\alpha_0 > 0$ e uma constante $B > 0$ tais que

$$\left(\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})}(v-u)^{\alpha_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_0}} \leqslant B\left(\int_{B(x,\frac{5\delta}{2})}(v-u)^{-\alpha_0}\right)^{-\frac{1}{\alpha_0}}. \tag{A.80}$$

Para tal, defini-se

$$w = \log(v-u) \tag{A.81}$$

e procedendo como no Teorema 2.5, usando (A.75) e a função

$$\zeta = \psi^2\frac{1}{v-u}(|w|^\theta + (2\theta)^\theta)$$

para $\theta \geqslant 1$ e $\psi \in C_0^1(B(x, 5\delta))$, com $\psi \geqslant 0$. Obtemos

$$\begin{aligned}\theta \int_\Omega \omega \psi^2 |w|^{\theta-1} |\nabla w|^2 dx \leqslant & \int_\Omega \omega \frac{\psi}{v-u} (|w|^\theta + (2\theta)^\theta) |\nabla \psi| |\nabla (v-u)| dx \\ & + \Lambda \int_\Omega \eta^2 (|w|^\theta + (2\theta)^\theta) dx\end{aligned} \tag{A.82}$$

que é semelhante a equação (A.39), então podemos concluir a demonstração seguindo os mesmos argumentos do Teorema 2.5.

(b_4) Se $\left(\dfrac{2N+2}{N+2} < p < 2 \right)$:

Repetindo os passos iniciais do item (a_4) deste Teorema, obtemos uma equação semelhante à equação (A.79),

isto é,

$$\int_\Omega \omega \eta^2 (v-u)^{\beta-1} |\nabla (v-u)|^2 dx \;\leqslant\; \frac{C}{|\beta|} \left(1 + \frac{1}{|\beta|} \right) \int_\Omega (v-u)^{\beta+1} [\eta^2 + \omega |\nabla \eta|^2] dx,$$

onde $C = \max \left\{ \dfrac{2\Lambda}{c_2}, \dfrac{4c_1^2}{c_2^2} \right\}$.

Como u ou v é solução de (2.15), então $\omega \equiv (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-2} \geqslant \lambda > 0$, neste caso, pela desigualdade de Sobolev clássica, assim como no item (b_2) do Teorema 2.5 (para $w = (v-u)^{\frac{\beta+1}{2}}, \beta \neq -1$), temos

$$\|\eta w\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} \;\leqslant\; Cr^2 \int_\Omega \omega \left[w(\eta + |\nabla \eta|) \right]^2 dx, \tag{A.83}$$

onde 2^* é o expoente de sobolev (veja Definição 1.6).

Agora, se $\omega \in L^s(\Omega)$, aplicando a desigualdade de Hölder, então

$$\int_\Omega \omega \left[w(\eta + |\nabla \eta|) \right]^2 dx \;\leqslant\; \left(\int_\Omega \omega^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_\Omega \left[w(\eta + |\nabla \eta|) \right]^{s^*} dx \right)^{\frac{2}{s^*}}, \tag{A.84}$$

onde $\dfrac{2}{s^*} = 1 - \dfrac{1}{s}$.

Daí,

$$\|\eta w\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} \;\leqslant\; C_3 r^2 \|\omega\|_{L^s(\Omega)} \|w(\eta + |\nabla \eta|)\|^2_{L^{s^*}(\Omega)}. \tag{A.85}$$

Assim, com as mesmas especificações feitas sobre η (no item (a_2) do Teorema 2.5), obtemos

$$\|w\|^2_{L^{2^*}(B(x,h'))} \;\leqslant\; \frac{C_3 r^2 \|\omega\|_{L^s(\Omega)}}{(h''-h')^2} \|w\|^2_{L^{s^*}(B(x,h''))}. \tag{A.86}$$

Definindo $\chi' = \dfrac{2^*}{s^*}$.

1º) Se $1 > r > 0$, teremos

$$\|w\|^{\frac{2}{r}}_{L^{2^*}(B(x,h'))} \;\leqslant\; \left(\frac{C_3 |r| \|\omega\|_{L^s(\Omega)}}{h''-h'} \right)^{\frac{2}{r}} \|w\|^{\frac{2}{r}}_{L^{s^*}(B(x,h''))},$$

isto é,

$$\left(\int_{B(x,h')} v^m dx\right)^{\frac{1}{m}} \leqslant \left(\frac{C_3\left|\frac{q2}{2^*}\right|\|\omega\|_{L^s(\Omega)}}{h''-h'}\right)^{\frac{2^*}{q}} \left(\int_{B(x,h'')} v^{\frac{m}{\chi'}} dx\right)^{\frac{\chi'}{q}} \tag{A.87}$$

onde $m = \dfrac{r2^*}{2}$(substituição de r por m).

2º) Se $r < 0$, então

$$\|w\|_{L^{s^*}(B(x,h''))}\left(\frac{C_3|r|\|\omega\|_{L^s(\Omega)}}{h''-h'}\right)^{\frac{2}{r}} \leqslant \|w\|^{\frac{2}{r}}_{L^{2^*}(B(x,h'))}$$

ou seja,

$$\left(\int_{B(x,h'')} v^{\frac{m}{\chi'}} dx\right)^{\frac{\chi'}{m}} \left(\frac{C_3\left|\frac{m2}{2^*}\right|\|\omega\|_{L^s(\Omega)}}{h''-h'}\right)^{\frac{2^*}{m}} \leqslant \left(\int_{B(x,h')} v^m dx\right)^{\frac{1}{m}}. \tag{A.88}$$

Para podermos usar os argumentos do item (a_2) do Teorema 2.5, é necessário somente que $\chi' > 1$, isto é,

$$1 < \chi' = \frac{2^*}{s^*} = \frac{2}{s^*}\frac{N}{(N-2)} = \left(1 - \frac{1}{s}\right)\frac{N}{(N-2)}$$

donde resulta que

$$\frac{1}{s} < 1 - \frac{N-2}{N} = \frac{2}{N}, \text{ ou seja, } s > \frac{N}{2}.$$

Pelo Teorema 2.2, se $1 < p < 2$ então $|\nabla u|^{p-2} \in L^{\left(\frac{p-1}{2-p}\right)\varepsilon}(\Omega)$ ou $|\nabla v|^{p-2} \in L^{\left(\frac{p-1}{2-p}\right)\varepsilon}(\Omega)$ para todo $0 < \varepsilon < 1$. Observe que,

$$\omega = (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-2} = \frac{1}{(|\nabla u| + |\nabla v|)^{2-p}} \leqslant \frac{1}{|\nabla u|^{2-p}} = |\nabla u|^{p-2}$$

e

$$\omega = (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-2} = \frac{1}{(|\nabla u| + |\nabla v|)^{2-p}} \leqslant \frac{1}{|\nabla v|^{2-p}} = |\nabla v|^{p-2},$$

isto é, ω herda as mesmas propriedades de $|\nabla v|^{p-2}$ e $|\nabla u|^{p-2}$.

Portanto, $\omega \in L^s(\Omega)$ para $\dfrac{N}{2} < s < \dfrac{p-1}{2-p}$, desde que $\dfrac{2N+2}{N+2} < p < 2$. E assim, para todo $1 < q < \chi'$, vale o mesmo resultado do item (a_4). □

Referências Bibliográficas

[1] Botelho, G., Pellegrino, D., Teixeira, E. - *Fundamentos de Análise Funcional.* 2nd Ed., Textos Universitários, SBM, 2015.

[2] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Universitext, Springer, 2010.

[3] Castorina, D., Esposito, P.,Sciunzi, B. *Spectral theory for linearized p-Laplace equations.* Nonlinear Analysis, (74) 3606–3613, 2011.

[4] Cuesta, M., Takàc, P. -*A strong comparison principle for positive solutions of degenerate elliptic equations.* Differential Integral Equations, (13) 721–746, 2000.

[5] Damascelli, L. - *Comparison theorems for some quasilinear degenerate elliptic operators and applications to symmetry and monotonicity results.* Ann. Inst. Henri Poincaré, 15(4) 493–516, 1998.

[6] Damascelli, L., Sciunzi, B. - *Harnack inequalities, maximum and comparison principles, and regularity of positive solutions of m-laplace equations.* Calc. Var. Partial Differential Equations, 25(2) 139–159, 2005.

[7] Damascelli, L., Sciunzi, B. - *Regularity, monotonicity and symmetry of positive solutions of m-Laplace equations.* J. Differential Equations, 206 483–515, 2004.

[8] DiBenedetto, E. - $C^{1,\alpha}$ *local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations.* Nonlinear Analysis, 7(8) 827–850, 1983.

[9] Evans, L.C. *Partial Differential Equations.* Graduate Studies in Mathematics, AMS, 1998.

[10] Gilbarg, D., Trudinger, N.S. - *Elliptic partial differential equations of second order.* Springer, reprint of the 1998.

[11] Gol'dshtein, V., Ukhlov, A. - *Weighted Sobolev spaces and embedding theorems.* Trans. Amer. Math. Soc., 361(7) 3829–3850, 2009.

[12] Han, Q., Lin, F. - *Elliptic partial differential equation.* Courant Lecture notes, 2000.

[13] Kilpeläinen, T. - *Weighted Sobolev spaces and capacity.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 19 95–113, 1994.

[14] Kufner, A., Opic, B. - *How to define reasonably weighted Sobolev spaces.* Comment. Math. Univ. Carolin., 25(3) 1984, 537-554.

[15] Lima, E. L. - *Espaços métricos.* 5nd Ed., Projeto Euclides, IMPA, 2015.

[16] Moser, J. - *A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations.* Comm. on Pure and Appl. Math., 13 457–468, 1960.

[17] Moser, J. - *On Harnack's theorem for elliptic differential equations.* Comm. on Pure and Appl. Math., 14 577–591, 1961.

[18] Murthy, M.K.V., Stampacchia, G. - *Boundary value problems for some degenerate-elliptic operators.* Ann. Mat. Pura Appl. 80(4) 1–122, 1968.

[19] Roselli, P., Sciunzi, B. - *A strong comparison principle for the p-Laplacian.* Proc. Amer. Math. Soc., 135(10) 3217–3224, 2007.

[20] Sciunzi, B. - *A weak maximum principle for the linearized operator of m-laplace equations with applications to a nondegeneracy result.* Adv. Differential Equations, 2004.

[21] Sciunzi, B. - *Some results on the qualitative properties of positive solutions of quasilinear elliptic equations.* NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., 14 315–334, 2007.

[22] Tolksdorf, P. - *Regulary for more general class of quasilinear elliptic equations.* J. Differential Equations, 51 126–150, 1984.

[23] Trudinger, N. S. - *Linear elliptic operator with measurable coefficients.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa., 27(3) 265–308, 1973.