

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



Fabrício Ribeiro Lustosa de Sousa

Correlações posição momento em pacotes Gaussianos e  
não Gaussianos de ondas de matéria

Teresina-PI

2019

FABRÍCIO RIBEIRO LUSTOSA DE SOUSA

CORRELAÇÕES POSIÇÃO MOMENTO EM PACOTES GAUSSIANOS E NÃO  
GAUSSIANOS DE ONDAS DE MATÉRIA

Dissertação apresentada ao programa de Pós Graduação em Física da Universidade Federal do Piauí, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. IRISMAR GONÇALVES DA PAZ

Teresina-PI

2019

FICHA CATALOGRÁFICA

Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí  
Biblioteca Setorial de Ciências da Natureza - CCN

S725c Sousa, Fabrício Ribeiro Lustosa de.

Correlações posição movimento em pacotes gaussianos e não gaussianos de ondas de matéria / Fabrício Ribeiro Lustosa de Sousa. – Teresina: 2019.

52 f.: il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-graduação em Física, 2019.

Orientador: Prof. Dr. Irismar Gonçalves da Paz

1. Física – Mecânica Ondulatória. 2. Estado Gaussiano. 3. Fendas Duplas. I. Título.

CDD 530.124

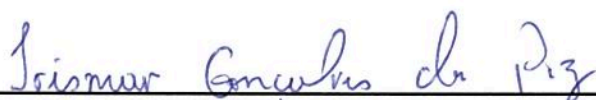
Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes CRB3 - 1461

“Correlações posição momento em pacotes gaussianos e não gaussianos de ondas de matéria”

Fabício Ribeiro Lustosa de Sousa

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Natureza - CCN/UFPI.

Comissão Julgadora:



Prof. Dr. Irismar Gonçalves da Paz(Orientador)



Prof. Dr. José Pimentel de Lima/UFPI



Prof. Dr. José Geraldo Gonçalves de Oliveira Júnior-UESC-Ba

Aprovada em 28/02/2019

à minha família

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, por ter me concedido, saúde, força, para superar as dificuldades e por ter me agraciado com uma família maravilhosa, que sempre está do meu lado. Também agradeço ao professor e orientador Prof. Dr. Irismar Gonçalves da Paz, pelos ensinamentos e paciência. Não poderia esquecer meus amigos companheiros de curso Carlos Henrique da S. Vieira, Lucas Soares Marinho, João Carlos e Oziel Ribeiro de Araújo e todos aqueles que me ajudaram diretamente ou indiretamente ao longo do curso.

Agradeço a UFPI, CAPES e CNPq pelo apoio logístico e financeiro prestado no decorrer da pesquisa



# Lista de Figuras

3.1	Espaço de Fase. Figura retirada da referência [25] . . . . .	10
3.2	Gráficos das correlações de primeira e segunda ordem do estado inicial $\psi_0(x)$ em função do parâmetro $\rho$ , (a) são as correlações de primeira ordem e em (b) correlações de segunda ordem. . . . .	12
3.3	Área demilitada pelas incertezas dos operadores $\hat{x}$ e $\hat{p}$ no espaço de fase, (a) a elipse (linha sólida vermelha) atribuímos $\rho = \pm 2$ , (b) a elipse (linha sólida azul) atribuímos $\rho = \pm 5$ . O círculo (linha pontilhada) representa o caso que não há correlações iniciais $\rho = 0$ . . . . .	13
3.4	Correlações de primeira e segunda ordem como função de $t/\tau_0$ para valores diferentes de $\rho$ . Curvas pontilhadas ( $\rho = 0$ ), curvas sólidas ( $\rho = -1$ ) e curvas tracejadas ( $\rho = 1$ ). (a) correlações de primeira ordem ,em (b) temos correlações de segunda ordem. . . . .	14
3.5	Conjunto de pontos formado pelas incertezas dos operadores $\hat{x}$ e $\hat{p}$ no espaço de fase, em (a) a elipse (curva sólida) atribuímos $\rho = 1$ e $t = 0.49\tau_0$ , em (b) a elipse (curva sólida) atribuímos $\rho = -1$ e $t = 0.49\tau_0$ . A elipse (curva pontilhada) atribuímos $\rho = \pm 2$ e $t = 0$ . . . . .	16
3.6	Partículas enviadas por uma fonte coerente se propagam durante um tempo $t$ até uma fenda. Depois da fenda, se propagam durante um tempo $\tau$ até alcançar o anteparo. . . . .	17
3.7	Gráficos da razão entre o determinante de Schrödinger e o <i>equivalente Gaussiano</i> em função dos parâmetros $\alpha$ e $\beta$ . Consideramos $y = \beta/\alpha$ . . . . .	22
3.8	(a) Gráfico da razão entre o determinante de Schrödinger e o <i>equivalente Gaussiano</i> em função de $z$ . (b) São as curvas do determinante de Schrödinger (curva vermelha) e do <i>Equivalente Gaussiano</i> (curva preta)em função de $z$ . Assumimos que $z = \alpha\delta^2$ e consideramos $\delta = 10^{-6}$ em ambos os casos. . . . .	24

- 4.1 Esboço do experimento de fenda dupla. Um pacote de onda Gaussiano de largura inicial transversa  $\sigma_0$  se propagando durante um tempo  $t$  até as fendas, e depois de um tempo  $\tau$  das fendas até chegar no anteparo. A abertura das fendas Gaussianas de largura  $\beta$  e separadas por uma distância  $d$  (Figura retirada da referência [21]). . . . . 26
- 4.2 (a) Relação de incerteza Robertson-Schrödinger  $D_C$  e (b) covariância de primeira ordem  $\sigma_{x,p}^{(1)}$ . Os gráficos estão em função de  $t/\tau_0$  mantendo  $\tau = 18\tau_0$  e  $\rho = -1.85$ . . . . . 30
- 4.3 (a) Covariância de primeira ordem em função de  $t/\tau_0$  (mantendo,  $\rho = -1$  e  $\tau = 18\tau_0$ ). (b) Valores absolutos dos termos da covariância eq.(4.16), primeiro termo (linha pontilhada), segundo termo (linha sólida), terceiro termo (linha tracejada) e quarto termo (linha ponto-tracejada) como função de  $t/\tau_0$  (matendo,  $\rho = -1$  e  $\tau = 18\tau_0$ ). . . . . 30
- 4.4 Metade do gráfico simétrico para a intensidade relativa como função de  $x$ , considerando os tempo de propagação em que as correlações são mínimas e máximas (Atribuímos  $\tau = 18\tau_0$ ). (a) Utilizamos o tempo de propagação da fonte até as fendas igual  $t_{min} = 0.42\tau_0$ . Em (b), utilizamos o tempo  $t_{max} = 0.95\tau_0$  de propagação da fonte até as fendas. . . . . 32
- 4.5 Metade do gráfico simétrico da visibilidade (curva sólida) e previsibilidade (curva pontilhada) como função de  $x$ . (a) Tempo para o qual as correlações são mínimas  $t_{min} = 0.42\tau_0$ . (b) tempo associado as correlações máxima  $t_{max} = 0.95\tau_0$ , em ambos os gráficos consideramos  $\tau = 18\tau_0$ . . . . . 33
- 4.6 Gráficos da covariância de segunda ordem em função do tempo de propagação  $t$  (fixamos  $\tau = 18\tau_0$ ). Em (a) corresponde ao caso simples  $\rho = 0$ , em (b) escolhemos  $\rho = -1.85$ . . . . . 36
- 4.7 Gráfico do Equivalente Gaussiano (curva sólida) e Determinante de Schrödinger (curva pontilhada), em função de  $t/\tau_0$  (fixamos  $\tau = 18\tau_0$ ). Em (a) consideramos  $\rho = 1$ , em (b) assumimos  $\rho = -1.85$ . . . . . 36



# Sumário

Agradecimentos	v
Lista de Figuras	vii
Resumo	ix
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Evolução de um estado Gaussiano correlacionado</b>	<b>4</b>
<b>3 Correlações de primeira e de segunda ordem e equivalente Gaussiano da relação de incerteza de Schrödinger</b>	<b>8</b>
3.1 Surgimento das correlações posição-momento para uma partícula livre . . .	9
3.2 Correlações entre $\hat{x}$ e $\hat{p}$ para Estados Gaussianos . . . . .	11
3.3 Correlações entre $\hat{x}$ e $\hat{p}$ para Estados não Gaussianos . . . . .	19
<b>4 Correlações no experimento de fenda dupla</b>	<b>25</b>
4.1 Experimento de fenda dupla com ondas de matéria . . . . .	25
4.2 Correlações de Segunda ordem no experimento de dupla fenda . . . . .	34
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>39</b>

# Resumo

Neste trabalho evoluímos um estado Gaussiano inicialmente, correlacionado de ondas de matéria. Obtemos os parâmetros que caracterizam o pacote evoluído, tais como, largura do pacote, raio de curvatura das frentes de onda e fase de Gouy em função da correlação inicial. Fizemos uma evolução livre e através de uma fenda Gaussiana. Em ambos os casos o pacote final é Gaussiano, mas os parâmetros que os caracterizam sofrem alterações. De posse desses estados calculamos as correlações de primeira e de segunda ordem entre posição e momento e obtemos uma relação que produz para o pacote Gaussiano mesmo resultado da relação de incerteza de Schrödinger, ou seja, satura em  $\hbar^2/4$ . Ao longo da dissertação vamos chamar essa relação de *equivalente Gaussiano*. Para estados não Gaussianos o equivalente Gaussiano pode produzir um resultado maior, menor ou igual ao da relação de incerteza de Schrödinger dependendo da relação entre certos parâmetros do pacote, tal como o parâmetro que acompanha a fase dependente do quadrado da posição. Por último, estudamos as correlações para o pacote gerado na fenda dupla, ou seja, a superposição de dois pacotes Gaussianos que resulta em um pacote final não Gaussiano. Aqui, observamos que o mínimo das correlações de primeira ordem está relacionado com o número máximo de franjas de interferência e que o máximo dessas correlações está relacionado com o número mínimo de franjas de interferência. Já o comportamento das correlações de segunda ordem (e do *equivalente Gaussiano*) parecem servir para caracterizar os regimes de Fresnel e Fraunhofer no experimento de dupla fenda.

**Palavras-chave:** Correlações, Estado Gaussiano, fenda dupla.

# Abstract

In this work, we develop a Gaussian state initially correlated of matter waves. We obtain the parameters that describe the improved set, such as, packet width, bend radius of wave fronts and Gouy phase as a function of initial correlations. We perform a free evolution through a Gaussian slit. In both cases the final packet is Gaussian, but the parameters that describe them suffer changes. With these states we calculate the correlations of first and second orders between position and momentum and obtained a relation that produces the same result of Schrodinger uncertainty equation for a Gaussian packet, in other words, it saturates in  $\hbar^2/4$ . Along the thesis, we call this relation as Gaussian equivalent. For non-Gaussian states the Gaussian equivalent can produce a greater, lesser or equal result of a Schrodinger uncertainty equation depending on the relation among certain packet parameters, such as the one which follows a square position dependable phase. Finally, we study the correlations for the packet generated on the double slit, simply put, the superposition of two Gaussian packets that result in a final non-Gaussian packet. Herein, we observe that the minimum of the first order correlations are related with the maximum value of interference fringes. As for the behaviour of the second order correlations (and the Gaussian equivalent) seem to be suitable to characterize Fresnel and Fraunhofer regimes on a double slit experiment.

Keywords: Correlations, Gaussian state, double-slit

# Capítulo 1

## Introdução

Correlações posição-momento são correlações quânticas que indicam a dependência entre a posição e o momento de uma única partícula. No caso de um pacote Gaussiano que satisfaz a incerteza mínima da relação de Heisenberg às correlações posição-momento em  $t = 0$  são zero mas elas surgem para tempos posteriores [21]. Por outro lado, estados mais complexos, como estados comprimidos ou combinações lineares de estados Gaussianos podem exibir correlações iniciais, correlações totalmente desprendidas da evolução temporal [39, 40]. Foi mostrado que a existência de correlações posição-momento está associada as fases da função de onda no experimento de fenda dupla[25]. Elas, são muito úteis para obter informação sobre outras quantidades físicas, por exemplo: mudanças qualitativas no padrão de interferência como função do aumento das correlações [41], a relação entre as correlações e a formação de espectros de ionização acima do limiar no espalhamento de eletro-íon em campos de laser intenso, e mais recentemente foi mostrado que o máximo das correlações posição-momento está relacionado com o número mínimo das franjas de interferência exibidas no experimento de dupla fenda [21].

O experimento de dupla fenda talvez não seja o único, mas sem dúvida é um dos poucos que ao longo da história do desenvolvimento da física foi usado em fenômenos que abrange o regime clássico e quântico. O fenômeno de interferência com ondas de matéria é um assunto de intensa pesquisa, dada a sua impotência para os fundamentos da mecânica quântica. O mistério inicial da mecânica quântica ilustrado pelo experimento da dupla fenda [24] revelou resultados surpreendentes que nos permitiram aprender muito sobre a mecânica quântica. Hoje sabemos que, sob diferentes circunstâncias, o mesmo sistema físico pode exibir um comportamento de partícula ou de onda, também conhecido

como dualidade onda-partícula [26]. Experimentos revelando a dualidade onda-partícula na dupla fenda foram realizados por Möllenstedt e Jösön para elétrons [28], por Zeilinger utilizando nêutrons [23], por Carnal and Mlynek para átomos [29], usando grade de difração por Schöllkopf e Toennies para pequenas moléculas [30] e por Zeilinger para macromoléculas [31].

Neste trabalho estudamos o efeito das correlações posição-momento iniciais no padrão de interferência, como onda e também como partícula no experimento de dupla fenda considerando ondas de matéria. Assim, antes de lidar com a configuração de dupla fenda, consideramos que a partícula é representada por um pacote de onda Gaussiano inicialmente correlacionado em posição e momento. Essas correlações iniciais são medidas por um parâmetro de correlação  $\rho$ , tal que, para  $\rho \neq 0$  os pacotes de onda satisfazem a relação de incerteza de Robertson-Schödinger, atingindo o seu valor mínimo  $\hbar^2/4$ . Após o aparato das fendas, a partícula é representada por uma combinação linear de dois pacotes de Gaussianos idênticos provenientes das duas fendas afetados pelas correlações iniciais. Contudo, logo que a partícula sai da fonte e se propaga em direção as fendas, a posição e seu momento estão correlacionados, e essas correlações sofrem mudanças por causa da evolução temporal e do parâmetro de correlação  $\rho$ . O comportamento dessas correlações nos permite extrair informações precisas sobre o padrão de interferência. O perfil das curvas das correlações sofrem uma drástica mudança; na escolha entre um dos domínios:  $\rho > 0$ ,  $\rho < 0$ , e quanto ao caso simples  $\rho = 0$ , encontramos sua discussão no trabalho [21].

Esta dissertação está dividida como se segue: No capítulo 2, estudamos as ferramentas necessárias ao desenvolvimento deste trabalho. Evoluimos um estado Gaussiano inicialmente correlacionado usando o propagador de Schrödinger de partícula livre, obtivemos o pacote de onda Gaussiano no tempo, bem como os parâmetros que descrevem a forma com que o pacote se modifica durante sua evolução temporal. No capítulo 3 estudamos as correlações posição-momento a partir de uma expressão geral da covariância, ela define um ordenamento nos tipos de correlações. Diante disso nós investigamos o comportamento das correlações de primeira ordem e de segunda ordem, de acordo com a função de covariância para cada uma delas. Na seção 3.1 essas duas categorias de correlações foram bastante interessante para estabelecer uma relação que permanece inalterada mesmo depois de evoluções temporais. Denominamos a relação de *equivalente Gaussiano*, esse resultado se mostra equivalente a relação de incerteza de Robertson-Schödinger, mas

apenas para os estados Gaussianos. Na seção 3.2, investigamos limites de validade do *equivalente Gaussiano* propondo estados não Gaussianos, como por exemplo: estados que são ligeiramente semelhantes aos autoestados do oscilador harmônico quântico e estados que são formado a partir de uma combinação de dois estados Gaussianos. No capítulo 4 o objeto central de estudo é avaliar o efeito das correlações no experimento de fenda dupla com ondas de matéria. Na seção 4.1 apresentamos o modelo para o experimento de dupla fenda, considerando que um pacote de onda correlacionado se propaga durante um tempo  $t$  da fonte até as fendas e em seguida um tempo  $\tau$  das fendas até o anteparo ou tela de detecção. Na seção 4.2, calculamos a covariância de primeira ordem entre posição e momento e a relação de incerteza generalizada Robertson-Schrödinger para o estado dado pela combinação linear dos estados que passaram por cada uma das fendas. Em seguida calculamos a intensidade, a visibilidade e a previsibilidade e analisamos o padrão de interferência em termos do conhecimento da dinâmica das correlações. Na seção 4.3 calculamos a covariância de segunda ordem para função de onda na tela detecção, e estudamos o comportamento em função dos tempos de propagação. Além disso, estudamos o comportamento do *equivalente Gaussiano* para a função de onda que representa o sistema após os pacotes atravessarem as fendas.

## Capítulo 2

# Evolução de um estado Gaussiano correlacionado

Pacotes Gaussianos que possuem correlação inicial tem grandes aplicações em vários campos da física quântica. Eles são bastante aplicados na ótica quântica, ótica quântica linear e não linear e na área da informação quântica. Diferentes nomes são dados para esse tipo de estado Gaussiano e dentre eles, talvez os mais conhecidos, sejam os estados comprimidos.

A história dos estados Gaussianos correlacionados teve início com Schrödinger que foi um dos primeiros a investigar as funções Gaussianas na mecânica quântica [1]. Após alguns anos, Roy Jay Glauber [2] introduziu o conceito de estados coerentes, que são muito utilizados na descrição de campos eletromagnéticos e em outras áreas da física quando é necessário representar sistemas com propriedades quânticas mas com aspectos mais próximos do mundo clássico. Logo depois, muitos trabalhos foram dedicados a várias versões generalizadas dos estados de Glauber e alguns deles podem ser encontrados nas referências [1]- [6]. Nomes diferentes foram dados para esses diferentes tipos de estados: estados coerentes generalizados, estados de dois fótons, estados inteligentes generalizados, estados comprimidos e outros.

Os estados coerentes correlacionados foram introduzidos por V. V. Dodonov [1] por volta de 1980, ele mostrou que a incerteza entre os operadores de coordenadas e de momento minimiza a relação de incerteza de Schrödinger [8] e Robertson [9], diferente dos estados de Glauber que minimizam a relação de Heisenberg.

Neste capítulo iremos considerar a propagação de uma partícula livre que será re-

presentada por um pacote Gaussiano correlacionado. Recentemente pacotes desse tipo foram considerados em um trabalho conforme a referência [7], onde estudou-se a propagação de um pacote Gaussiano inicial mais geral com coeficiente de correlação diferente de zero entre os operadores de coordenadas e de momento, na presença de uma barreira repulsiva de potencial delta.

A forma do pacote de onda inicial é dada por,

$$\psi(x, 0) \equiv \psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_0\sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2\sigma_0^2}x^2\right), \quad \gamma = 1 - i\rho, \quad (2.1)$$

onde  $\rho$  é o parâmetro de correlação. Assim, o pacote acima constitui uma família de estados que minimizam a relação de incerteza de Schrödinger e Robertson,

$$\sigma_x\sigma_p - \sigma_{xp}^2 \geq \hbar^2/4, \quad (2.2)$$

onde,

$$\sigma_{xp} = \frac{1}{2}\langle \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} \rangle - \langle \hat{x} \rangle \langle \hat{p} \rangle, \quad (2.3)$$

é a covariância, que mede o quanto os operadores de coordenadas e de momento estão correlacionados. Note que a relação de incerteza de Heisenberg aqui (quando  $\sigma_{xp} = 0$ ) é considerada um caso particular.

A relação (2.2), de acordo com a referência [7], pode ser reescrita na forma

$$\sigma_x\sigma_p \geq \hbar^2/4(1 - r^2), \quad (2.4)$$

onde

$$r = \sigma_{xp}/\sqrt{\sigma_x\sigma_p}, \quad (2.5)$$

é o coeficiente de correlação entre os operadores coordenadas e de momento. O parâmetro de correlação  $\rho$  se relaciona com o coeficiente de correlação da seguinte maneira [7]:



$$r = \frac{\rho}{\sqrt{1 + \rho^2}}, \quad \rho = \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}}, \quad -\infty < \rho < \infty, \quad -1 < r < 1. \quad (2.6)$$

A função de onda que representa a partícula em um tempo futuro é determinada a partir da relação

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, t; x', 0) \psi(x', 0) dx', \quad (2.7)$$

onde,

$$G(x, t; x', 0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} \exp\left(-\frac{m(x - x')^2}{2i \hbar t}\right), \quad (2.8)$$

é a função de Green ou também eventualmente chamado de propagador de Schrödinger para a partícula livre. Na realidade este objeto consiste de um elemento de matriz do operador evolução na representação de Schrödinger com relação à base das coordenadas, que pode ser interpretado como a amplitude da probabilidade de que uma partícula livre, localizada na posição  $x'$  em  $t = 0$ , seja encontrada na posição  $x$  e em um tempo  $t > 0$ . Após realizar a integral na eq.(2.7), obtemos a seguinte expressão para função de onda

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} b}} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2} + \frac{imx^2}{2\hbar r} - i\mu\right), \quad (2.9)$$

onde,

$$b(t, \rho) = \sigma_0 \left[ 1 + \left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2 + \left(\frac{t\rho}{\tau_0}\right)^2 + \frac{2\rho t}{\tau_0} \right]^{1/2}, \quad (2.10)$$

$$r(t, \rho) = t \left[ \frac{t^2 + t^2 \rho^2 + \tau_0^2 + 2t\tau_0 \rho}{t^2 + t^2 \rho^2 + t\tau_0 \rho} \right], \quad (2.11)$$

$$\mu(t, \rho) = -\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{t}{t\rho + \tau_0}\right), \quad (2.12)$$

$$\tau_0 = m\sigma_0^2/\hbar. \quad (2.13)$$

são os parâmetros em função do tempo que definem o aspecto do envelope ao longo da evolução temporal. O  $b(t)$  representa a largura do pacote, o  $r(t)$  é o raio de curvatura das frentes de onda,  $\tau_0$  é visto como um tempo característico para o “envelhecimento” do estado inicial [21, 19], uma vez que é o tempo a partir do qual o estado evoluído adquire propriedades completamente diferentes do estado inicial,  $\mu(t)$  é a fase de Gouy em função do tempo no qual é semelhante a fase de Gouy obtida através da solução Gaussiana da equação paraxial de Helmholtz [22].

No contexto das ondas de matéria, I.G. *da Paz* foi um dos pioneiros no estudo do termo de fase de Gouy resultando nos trabalhos [14, 15, 16, 17]. Além disso, a mudança de fase foi observada experimentalmente com o condensado de Bose-Einstein por A. *Hansen et al* [18] e para ondas de elétrons T.C. *Petersen et al* [20]. Uma maneira alternativa de compreender a origem física da mudança de fase de Gouy é mostrar explicitamente que o fenômeno ocorre a qualquer feixe que sofre um confinamento espacial transversal, com base no princípio de incerteza pelo qual verifica-se um espalhamento nas componentes transversais do momento. A expressão geral obtida para a fase de Gouy é escrita em termos dos valores médios dessas componentes e isso nos permite entender a razão pela qual a mudança de fase das ondas cilíndricas é a metade das ondas esféricas. Em geral a mudança de fase de Gouy que uma onda de luz convergente sofre ao passar pelo seu foco quando ela se propaga de  $-\infty$  a  $+\infty$  é de  $n\pi/2$ , onde  $n$  representa o número de componentes transversais do momento.

## Capítulo 3

# Correlações de primeira e de segunda ordem e equivalente Gaussiano da relação de incerteza de Schrödinger

Em pesquisas, frequentemente procura-se verificar se existe relação entre duas ou mais variáveis, isto é, saber se as alterações sofridas por uma das variáveis são acompanhadas por alterações nas outras. Por exemplo, peso e idade, altura e peso de um indivíduo. O termo correlação significa relação mútua, e é usado na estatística para designar a força que mantém unidos dois conjuntos de valores. A verificação da existência e do grau de relação entre as variáveis é o objeto de estudo da correlação. Uma vez caracterizada esta relação, procura-se descrevê-la sob forma matemática, através de uma função.

Na física é bastante natural investigar se uma distribuição em  $p$  (momento) tem alguma correlação com a distribuição em  $x$  (coordenada). As correlações quânticas são tratadas de forma semelhante na teoria clássica, elas são avaliadas pela covariância, que é o cálculo da diferença entre a média conjunta das duas variáveis pelo produto das médias separadas.

No entanto, vale ressaltar que a covariância é uma condição necessária, mas não suficiente. Mesmo que a covariância entre duas variáveis estatísticas seja zero, o sistema pode possuir outro tipo de correlação. A consequência desse fato torna o estudo das correlações mais sutil, e a covariância assume uma forma mais geral do que a forma apresentada na eq.(2.3), nesse sentido as correlações quânticas entre  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$  podem ser avaliadas de diferentes tipos a partir do grau de correlação conforme a expressão:

$$\begin{aligned} \sigma_{xp}^{(nm)} = & \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \left[ x^n \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right)^m + \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right)^m x^n \right] \psi dx + \\ & - \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* x^n \psi dx \right) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right)^m \psi dx \right], \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde,  $n, m = 1, 2, 3, \dots$  são os subscritos que definem as diferentes classes de covariâncias ou, funções de correlação. A relação acima é obtida através da teoria clássica das correlações ( $\sigma_{xp}^{(nm)} = \overline{x^n p^m} + (\bar{x})^n (\bar{p})^m$ ), apenas trocando as variáveis clássicas por operadores, de acordo com a referência [25].

### 3.1 Surgimento das correlações posição-momento para uma partícula livre

Vamos compreender como surgem as correlações quânticas entre os observáveis  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$  para ondas de elétrons que se propagam livremente no tempo. A função de onda que descreve a propagação do elétron é dado pelo pacote de onda

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k - k_0) \exp \left\{ i \left[ k(x - x_0) - \frac{\hbar k^2}{2m} t \right] \right\}, \quad (3.2)$$

onde,  $g(k - k_0)$  é chamada de função envelope, e  $x_0$  e  $k_0$  são os valores médios da posição e do vetor de onda. Para o nosso caso escolhemos um envelope Gaussiano,

$$g(k) = \exp \left[ - \frac{(k - k_0)^2}{2(\Delta k)^2} \right]. \quad (3.3)$$

Resolvendo a integral na eq.(3.2) a função de onda assume a forma:

$$\psi(x, t) = C \exp \left[ - (\alpha - i\beta)x^2 \right], \quad (3.4)$$

onde,

$$\alpha = \frac{(\Delta k)^2}{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2} (\Delta k)^4} \quad \text{e} \quad \beta = (\Delta k)^4 \frac{\hbar t}{m} \frac{1}{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2} (\Delta k)^4}. \quad (3.5)$$

Para reescrevermos a função de onda na forma mais simplificada, consideramos os valores médios:  $x_0 = k_0 = 0$  [25].

Por meio das funções de correlações eq.(3.1) estudamos o comportamento da covariância de primeira ordem ( $n = m = 1$ ). Assim, obtemos a seguinte expressão para a covariância,

$$\sigma_{xp}^{(1)}(t) = \frac{\hbar^2(\Delta k)^2}{2m}t \quad \text{ou} \quad \sigma_{xp}^{(1)}(t) = \frac{(\Delta p)^2}{2m}t, \quad (3.6)$$

onde,  $(\Delta p)^2$  é a incerteza inicial no momento que é proporcional à largura  $\Delta k$  do envelope inicial descrito na eq.(3.3). Note que para esse caso as correlações só dependem exclusivamente do tempo de propagação. Quando  $t = 0$  o coeficiente  $\beta$  desaparece, a função onda se torna real e os operadores  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$  não são correlacionados. A razão para o surgimento das correlações entre os observáveis é simplesmente porque as partículas mais rápidas tendem a cobrir maiores distâncias. Para esse caso dizemos que as correlações são fortes porque o crescimento de um dos observáveis acarreta no crescimento do outro.

A natureza dessas correlações podem também ser compreendida a partir do espaço de fase, mesmo sabendo que as propriedades das ondas nesse espaço não sejam reproduzidas completamente. No entanto, mesmo com essa limitação, o pacote de ondas é localizado no espaço e o elétron pode ser visto como uma partícula clássica com uma distribuição de momentos e posições.

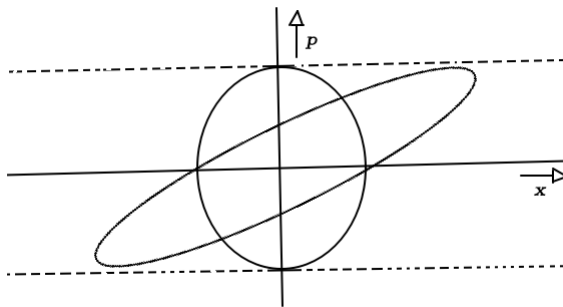


Figura 3.1: Espaço de Fase. Figura retirada da referência [25]

No espaço fase o espalhamento que o pacote de onda sofre é relacionado à partículas que se movem com diferentes velocidades atingindo diferentes posições. Segundo a referência [25], é esse processo que introduz as correlações entre  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$ , uma vez que

partículas mais rápidas tendem a cobrir maiores distâncias. A medida que o tempo passa, partículas de momento positivo se deslocam para a direita e aquelas com o momento negativo de deslocam para a esquerda, portanto o círculo passa a ser uma elipse como mostra a figura-3.1. Note que o intervalo  $\Delta p$  não muda, mas o intervalo  $\Delta x$  aumenta. O fato de  $\Delta p$  permanecer inalterado está associado a velocidade de grupo, e o aumento em  $\Delta x$  é associado com o aumento da largura do pacote.

Neste capítulo, iremos estudar as correlações posição-momento de primeira e de segunda ordem para estados Gaussianos e estados não Gaussianos. Veremos que para os estados Gaussianos correlacionados obtemos uma relação que produz o mesmo resultado da relação de incerteza de Schrödinger ( $\hbar/4$ ), tal relação denominamos de *equivalente Gaussiano*.

## 3.2 Correlações entre $\hat{x}$ e $\hat{p}$ para Estados Gaussianos

Estados Gaussianos são importantes de serem estudados, porque além de todas as suas propriedades matemáticas, eles são relativamente acessíveis experimentalmente, sobretudo em experimentos de geração de estados do campo eletromagnético que apresentam compressão das quadraturas. Nesta seção iremos estudar correlações de primeira e de segunda ordem para estados Gaussianos, que foram a base para executar os cálculos da propagação de um partícula livre, e além disso iremos considerar à difração de ondas de matéria através de uma única fenda.

### Pacote de onda inicial

Utilizando as funções de correlações obtemos as covariâncias de primeira e de segunda ordem do pacote de onda inicial eq.(2.1),

$$\sigma_{xp}^{(1)}(\rho) = \frac{\hbar}{2}\rho, \quad (3.7)$$

$$\sigma_{xp}^{(2)}(\rho) = \frac{\hbar^2}{2}(\rho^2 - 1). \quad (3.8)$$

As correlações para o estado inicial só depende exclusivamente do parâmetro de correlação

$\rho$ , para  $\rho = 0$  o pacote de onda não possui correlação de primeira ordem, mas exibe correlação de segunda ordem de valor negativo. Em seguida plotamos os gráficos e mostramos que há valores de  $\rho$  em que as correlações de primeira e de segunda ordem tem o mesmo valor.

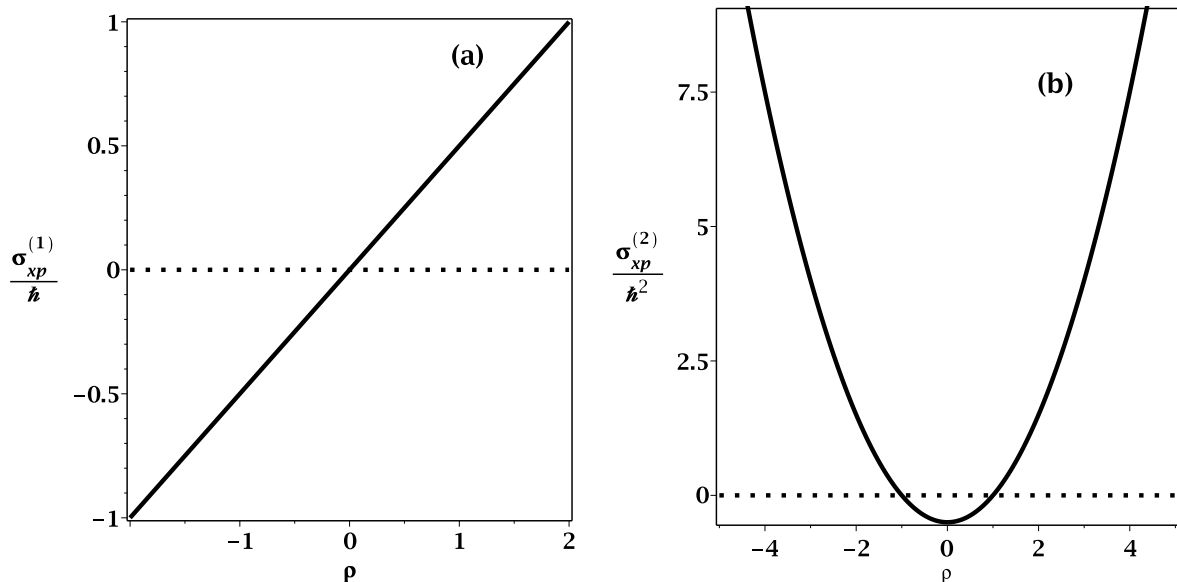


Figura 3.2: Gráficos das correlações de primeira e segunda ordem do estado inicial  $\psi_0(x)$  em função do parâmetro  $\rho$ , (a) são as correlações de primeira ordem e em (b) correlações de segunda ordem.

A figura-3.2 mostra que para uma partícula representada pelo estado inicial a correlação de primeira ordem é uma função linear do parâmetro de correlação  $\rho$ , enquanto que para as correlações de segunda ordem a curva é uma parábola. Igualando as eq. (3.7,3.8) encontramos os seguintes valores:  $\rho_- \approx -1.05 \times 10^{-34}$  e  $\rho_+ \approx 9.52 \times 10^{33}$  cuja correlações de primeira e de segunda ordem possui o mesmo valor. Pode-se observar, que o valor absoluto de  $\rho_-$  coincide com o valor da constante de Plank, enquanto que  $\rho_+$  é um valor muito maior do que  $\rho_-$ .

Podemos avaliar no espaço de fase o comportamento das incertezas na posição  $\sigma_x$  e no momento  $\sigma_p$ , assumindo valores diferentes para o parâmetro de correlação. Para o pacote de onda inicial suas incertezas são respectivamente,  $\sigma_x = \sigma_0^2/2 = \hbar/2$  e  $\sigma_p = (\hbar^2/2\sigma_0^2)(1 + \rho^2)$ . A figura-3.3 mostra o espaço de fase para partículas que são representadas pelos estados coerentes correlacionados antes de executar uma evolução temporal, em ambos os casos o círculo (linha pontilhada) representa o caso quando  $\rho = 0$  e as linhas sólidas (linhas sólidas) para o caso que  $\rho \neq 0$ . Em ambos os casos notemos que para um

estado inicialmente correlacionado a incerteza no momento sofre um espalhamento maior do que para os estados que não são inicialmente correlacionados (estados que satura a relação de Heisenberg) e a região da incerteza (conjunto de pontos no interior da curva delimitadas pelas incertezas  $\sigma_x$  e  $\sigma_p$ ) deixa de ser um círculo e passa a ser uma elipse. A partir das figuras-3.3(a), (b) observamos que quanto maior for a quantidade  $|\rho|$  a incerteza no momento será maior e a incerteza na posição é inalterada, ou seja, é a mesma quantidade no caso de  $\rho = 0$ .

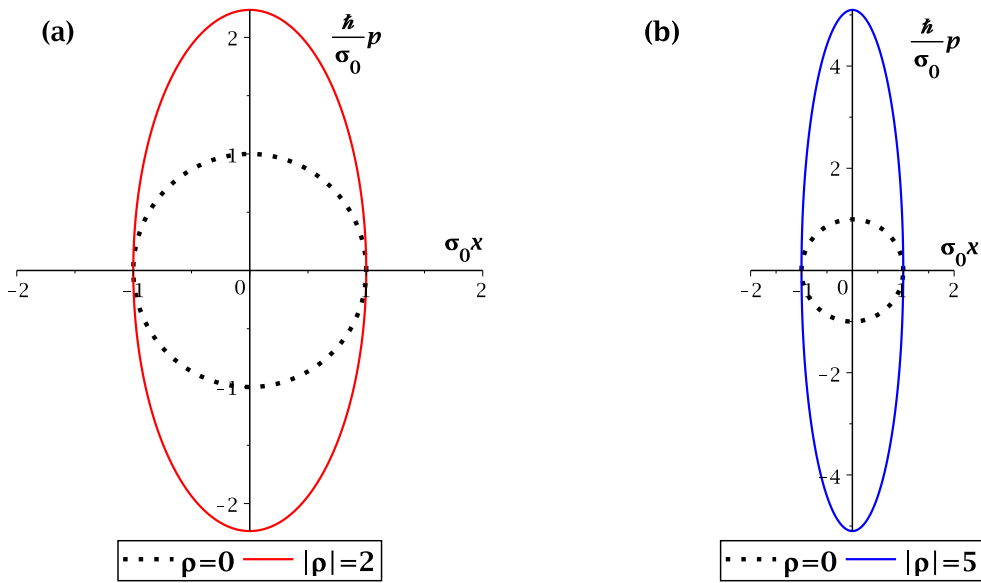


Figura 3.3: Área demilitada pelas incertezas dos operadores  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$  no espaço de fase, (a) a elipse (linha sólida vermelha) atribuímos  $\rho = \pm 2$ , (b) a elipse (linha sólida azul) atribuímos  $\rho = \pm 5$ . O círculo (linha pontilhada) representa o caso que não há correlações iniciais  $\rho = 0$ .

## Pacote de onda no tempo

Para função de onda que representa a partícula que se propaga no tempo eq.(2.9), obtemos às seguintes expressões para as correlações de primeira e de segunda ordem

$$\sigma_{xp}^{(1)}(t) = \frac{\hbar\tau_0 b^2}{2\sigma_0 r}, \quad (3.9)$$

$$\sigma_{xp}^{(2)}(t) = \frac{\hbar^2}{2} \left( \frac{\tau_0^2 b^4}{\sigma_0^4 r^2} - 1 \right), \quad (3.10)$$



em função da largura do pacote e do raio de curvatura. Durante a propagação, as correlações aumentam à medida que o pacote de onda sofre um alargamento. De acordo com as eq. (2.10) e (2.11), avaliamos a razão  $b^2/r$  cujo resultado é uma expressão proporcional ao tempo de propagação. Na sequência, construímos os gráficos das correlações em função do tempo de propagação.

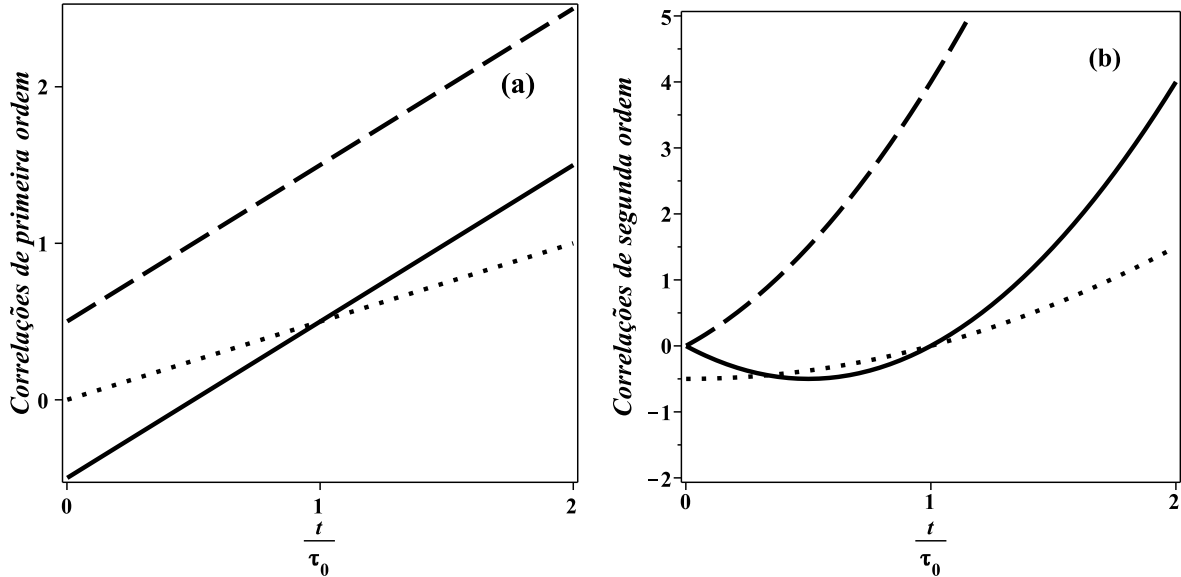


Figura 3.4: Correlações de primeira e segunda ordem como função de  $t/\tau_0$  para valores diferentes de  $\rho$ . Curvas pontilhadas ( $\rho = 0$ ), curvas sólidas ( $\rho = -1$ ) e curvas tracejadas ( $\rho = 1$ ). (a) correlações de primeira ordem ,em (b) temos correlações de segunda ordem.

A figura-3.2(a) mostra que no caso simples  $\rho = 0$  (curva pontilhada) às correlações de primeira ordem só surgem a partir de  $t > 0$ , já para  $\rho = -1$  (curva sólida) e  $\rho = 1$  (curva tracejada) sempre ocorre correlações. No caso das correlações de segunda ordem, figura-3.2(b), inicialmente em  $t = 0$  não há correlações para os casos  $\rho = -1$  e  $\rho = 1$ , mas existem correlações para o caso simples  $\rho = 0$ . Para valores  $|\rho| \leq 1$  as correlações de segunda ordem assumem valores negativos, e ao longo da propagação esses valores passam a ser positivos, além disso, para os casos  $\rho \neq 0$  as correlações apresentam um mínimo local.

Por outro lado a fase de Gouy obtida na propagação do pacote de onda inicial está diretamente relacionada com as covariâncias. Nos trabalhos [34, 35] foi mostrado que a covariância de primeira ordem pode ser expressa como função da fase de Gouy, para

feixes Gaussianos e para ondas de matéria considerando pacotes de ondas Gaussianos (que satisfaz a relação de Heisenberg). Veremos que essas idéias podem ser ampliadas para os estados Gaussianos correlacionados, sem contar que funcionam para covariância de segunda ordem.

Através da razão  $b^2/r$ , que aparece nas expressões da covariância, encontramos as seguintes expressões:

$$\sigma_{xp}^{(1)}(t, \rho) = \frac{\hbar}{2} \left[ \frac{(t^2 + \tau_0^2)\rho + 2t\tau_0\rho^2 + t^2\rho^3}{\tau_0(t\rho + \tau_0)} - \tan[2\mu(t, \rho)] \right], \quad (3.11)$$

$$\sigma_{xp}^{(2)}(t, \rho) = \frac{\hbar^2}{2} \left[ \frac{(t^2 + \tau_0^2)\rho + 2t\tau_0\rho^2 + t^2\rho^3}{\tau_0(t\rho + \tau_0)} - \tan[2\mu(t, \rho)] \right]^2 - \frac{\hbar^2}{2}. \quad (3.12)$$

Para o caso simples;  $\rho \rightarrow 0$ ,  $\sigma_{xp}^{(1)}(t) = -(\hbar/2) \tan[2\mu(t)]$ , e a covariância de segunda ordem fica,  $\sigma_{xp}^{(2)}(t) = (\hbar^2/2)[\tan^2[2\mu(t)] - 1]$ . Para esse caso, as expressões para as covariâncias tem uma relação direta com a fase de Gouy e a medida de uma nos permite conhecer a outra. Enquanto que o caso mais geral nos permite conhecer o valor do parâmetro  $\rho$  se a fase e as correlações forem medidas.

No espaço de fase construímos a região limitada pelas incertezas dos operadores de posição e de momento. Para um sistema representado pela função de onda no tempo, obtemos as incertezas

$$\sigma_x = \frac{b^2}{2} \quad e \quad \sigma_p = \frac{\hbar^2}{2} \left( \frac{1}{b^2} + \frac{m^2 b^2}{\hbar^2 r^2} \right),$$

onde ambas as quantidades dependem do parâmetro  $\rho$  e do tempo de propagação. A figura-3.5 mostra o espaço de fase para os casos em que não houve evolução temporal (curva pontilhada) e quando há evolução temporal (curva sólida). Na figura-3.5(a) podemos observar que para um valor positivo de  $\rho$  ( $\rho = 1$ ) e  $t \neq 0$  o estado é comprimido em momento e alargado na posição, enquanto que na figura-3.5(b) para um valor negativo de  $\rho$  ( $\rho = -1$ ) e  $t \neq 0$ , observamos o efeito contrário o estado passa a ser comprimido em posição e alargado no momento. Portanto, depois que o sistema evolui no tempo as incertezas  $\sigma_x$  e  $\sigma_p$  podem ser comprimidas ou alargadas em contraste com o caso  $t = 0$  em que para qualquer valor de  $\rho$  apenas  $\sigma_p$  sofre um espalhamento para qualquer valor de  $\rho$ .

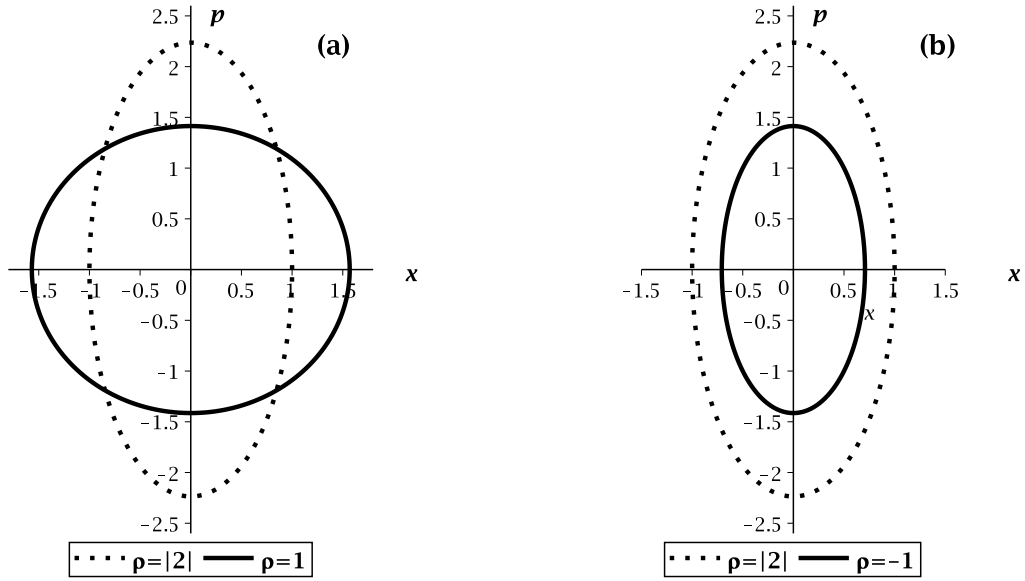


Figura 3.5: Conjunto de pontos formado pelas incertezas dos operadores  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$  no espaço de fase, em (a) a elipse (curva sólida) atribuímos  $\rho = 1$  e  $t = 0.49\tau_0$ , em (b) a elipse (curva sólida) atribuímos  $\rho = -1$  e  $t = 0.49\tau_0$ . A elipse (curva pontilhada) atribuímos  $\rho = \pm 2$  e  $t = 0$ .

## Difração de ondas de matéria por fenda única

Vamos considerar o experimento de fenda única para ondas de matéria utilizando as mesmas ferramentas matemática introduzida no capítulo-2. Vamos admitir que o pacote  $\psi_0(x)$  representa partículas que são liberadas por uma fonte coerente, e que se propagam durante um tempo  $t$  assumindo a forma da função  $\psi(x, t)$  (eq.2.9), representando partículas que estão antes da fenda. Depois da fenda o pacote de onda se propaga durante um tempo  $\tau$  até chegar no anteparo. A figura-3.4 mostra o aparato experimental.

A função de onda  $\psi(x, t, \tau)$  no anteparo é obtida utilizando dois propagadores de Schrödinger

$$\psi(x, t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_j \int_{-\infty}^{+\infty} G_\tau(x, t + \tau; x_j, t) F(x_j) G_t(x_j, t; x_i, 0) \psi_0(x_i) dx_i, \quad (3.13)$$

onde,

$$G_t(x_j, t; x_i, 0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} \exp \left[ \frac{im}{2\hbar t} (x_j - x_i)^2 \right], \quad (3.14)$$

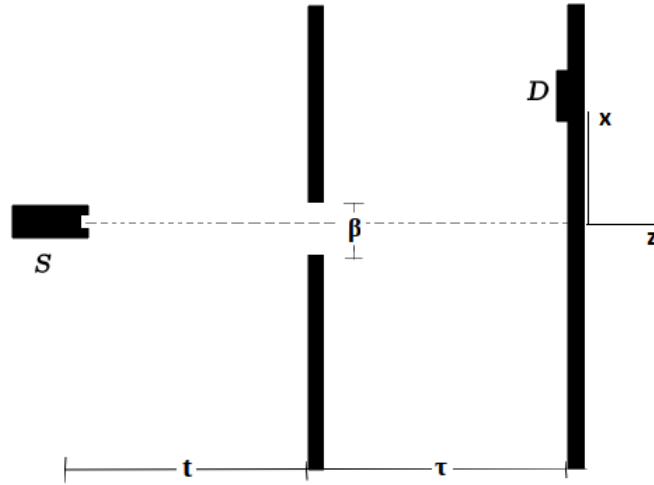


Figura 3.6: Partículas enviadas por uma fonte coerente se propagam durante um tempo  $t$  até uma fenda. Depois da fenda, se propagam durante um tempo  $\tau$  até alcançar o anteparo.

$$G_{\tau}(x, t + \tau; x_j, t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar\tau}(x - x_j)^2\right], \quad (3.15)$$

$$F(x_j) = \frac{1}{\sqrt{\beta\sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{x_j^2}{2\beta^2}\right), \quad (3.16)$$

$$\psi_0(x_i) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_0\sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2\sigma_0^2}x_i^2\right). \quad (3.17)$$

A função  $F(x_j)$  representa a fenda,  $G_t$  e  $G_{\tau}$  são os propagadores. Resolvendo as integrais obtemos a função de onda

$$\psi(x, t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{B\sqrt{\pi}}} \exp\left[-\frac{x^2}{2B^2}\right] \exp\left(\frac{imx^2}{2\hbar R} + i\mu\right), \quad (3.18)$$

tal que

$$B^2(t, \tau, \rho) = \frac{\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 + \frac{m^2}{\hbar^2}\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{r}\right)^2}{\left(\frac{m}{\hbar\tau}\right)^2\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{b^2}\right)}, \quad (3.19)$$

$$R(t, \tau, \rho) = \tau \frac{\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 + \frac{\tau m^2}{\hbar^2} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{r}\right)^2}{\frac{1}{\beta^4} + \frac{\tau_0^2 + \frac{t\tau_0^2}{\tau} + \tau_0^2 \rho^2 + \frac{\tau_0^3 \rho}{\tau} + \frac{t\tau_0^2 \rho^2}{\tau} + \frac{2\tau_0^2 \sigma_0^2}{\beta}}{\sigma_0^4(t^2 + \tau_0^2 + 2\tau_0 t \rho + t^2 \rho^2)}, \quad (3.20)$$

$$\mu(t, \tau, \rho) = -\frac{1}{2} \arctan \left[ \frac{t + \tau \left(1 + \frac{\sigma_0^2}{\beta^2}\right) + \frac{\rho \hbar t \tau}{m \beta^2}}{\tau_0 \left(1 - \frac{t \tau \sigma_0^2}{\tau_0^2 \beta^2}\right) + \rho(t + \tau)} \right], \quad (3.21)$$

são respectivamente a largura do pacote, o raio de curvatura e a fase de Gouy. De posse da função de onda obtemos as seguintes expressões para as funções de correlações,

$$\sigma_{xp}^{(1)}(t, \tau, \rho) = \frac{\hbar \tau_0 B^2}{2\sigma_0^2 R}, \quad (3.22)$$

$$\sigma_{xp}^{(2)}(t, \tau, \rho) = \frac{\hbar^2}{2} \left( \frac{\tau_0^2 B^4}{\sigma_0^4 R^2} - 1 \right). \quad (3.23)$$

Note que as expressões acima são semelhantes as expressões: eq.(3.9) e (3.10), que foram obtidas para o caso de partícula livre. Na ordem construímos o gráfico das covariâncias em função do tempo de propagação  $t$ .

A figura 3.5 mostra o comportamento das correlações em função de  $t$  (fixando o valor de  $\tau = 18\tau_0$ ). Observamos que o efeito do parâmetro de correlação  $\rho$  amplia as correlações posição-momento nos dois casos: figura-3.5a correlações de primeira ordem e figura-3.5b correlações de segunda ordem. No trabalho [21], foi mostrado que o máximo da covariância (de primeira ordem) conduz o sistema a ter seu caráter de partícula dominante (no experimento de dupla fenda na versão quântica). Essa informação é bastante útil para o estudo da propriedade onda-partícula da matéria, e a partir do comportamento das correlações entre  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$  podemos estudar um sistema que manifesta mais propriedade de partícula ou de onda.

No capítulo anterior, foi citado algumas das principais características dos estados Gaussianos mais gerais, e entre elas, está a condição que eles saturam a relação de incerteza de Schrödinger, ou seja, saturam em  $\hbar^2/4$ . Ao longo dessa seção calculamos as funções de correlação de primeira e de segunda ordem para os estados: eq.(2.1),(2.9) e (3.19), e por meio dessas expressões podemos, construir uma relação que é equivalente a relação de incerteza de Schrödinger. Assim, para esses estados obtemos a seguinte relação;

$$[\sigma_{xp}^{(1)}]^2 - \sigma_{xp}^{(2)}/2 = \frac{\hbar^2}{4}, \quad (3.24)$$

que se mantém para qualquer valor do parâmetro de correlação  $\rho$  e, também para qualquer tempo durante a propagação. Denominamos a relação acima de o equivalente Gaussiano. De acordo com a relação acima podemos avaliar qualquer uma das duas funções de correlações a partir de uma delas. Para o caso simples,  $\rho \rightarrow 0$  a relação se reduz à  $\sigma_{xp}^{(2)} = -\hbar^2/2$ , que corresponde ao caso das funções Gaussianas que minimizam a relação de Heisenberg.

Nesse caso, é preciso ser cuidadoso ao afirmar que não existe correlação entre os observáveis (pelo fato de que  $\sigma_{xp}^{(1)}$  se anula), porque a incerteza de Heisenberg pode ser reescrita em termos da covariância de segunda ordem  $\sigma_x \sigma_p = -\sigma_{xp}^{(2)}/2$ .

### 3.3 Correlações entre $\hat{x}$ e $\hat{p}$ para Estados não Gaussianos

Na formulação matematicamente rigorosa da mecânica quântica, os estados possíveis (mais precisamente, os estados puros) de um sistema de mecânica quântica são representados por vetores unitários (chamados vetores de estado), que residem em um espaço de Hilbert separável complexo, conhecido como espaço dos vetores de estado. Em outras palavras, os estados possíveis são pontos na projetivização de um espaço de Hilbert.

Nesse espaço, há uma variedade de operadores com atuações bem definidas em subespaços que são construído por subclasses de objetos denominados: vetores de estados característicos. Um número incontável das mais diversas categorias de funções compõem esses subespaços. Entre elas, as funções Gaussianas são de grande destaque nessa formulação, suas propriedades especiais facilitam o estudo e a compreensão em diversas áreas da física. Contudo, existem classes de funções que não são Gaussianas, porém quero destacar aquelas que de certa forma tem uma “ natureza Guassiana ”, mas “perdem” sua Gaussianidade por causa de algum “ detalhe ” matemático, como por exemplo às autofunções do oscilador harmônico quântico (produto de uma função Gaussiana por polinômios de Hermite), ou até mesmo a superposição de funções Gaussianas.

Na seção anterior, vimos que as covariâncias calculadas para estados Gaussianos estabelecem uma relação que reproduz o mesmo resultado do determinante de Schrödinger.

Agora, vamos tratar de funções não Gaussianas e estudar como e em quais condições o equivalente Gaussiano pode reproduzir os mesmos resultados da relação de incerteza de Schrödinger. Essa comparação será feita com funções de estado que não são Gaussianas, por exemplo: estados que são o produto de funções Gaussianas por funções do tipo  $x^n$  e estados que são combinação de duas funções Gaussianas.

Assumimos uma função de onda da seguinte maneira

$$\phi(x) = Ax^n \exp \left[ -(\alpha + i\beta)x^2 \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.25)$$

onde

$$A = \frac{2}{\sqrt{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha^{-\left(\frac{1}{2}+n\right)} \left[ 2^{\left(\frac{1}{2}-n\right)} + (-1)^{2n} 2^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} 4^{-n} \right]}}, \quad (3.26)$$

$A$  é a constante de normalização que dependente de  $n$ , e  $\alpha \neq 0$ .

Obtemos as expressões gerais para as covariâncias

$$\sigma_{xp}^{(1)} = -\frac{\hbar}{2}(2n+1)\frac{\beta}{\alpha}, \quad (3.27)$$

$$\sigma_{xp}^{(2)} = -\frac{\hbar^2}{2} \left[ \frac{4n-1}{2n-1} - (2n+1)\frac{\beta^2}{\alpha^2} \right]. \quad (3.28)$$

O *equivalente Gaussiano* é expresso na seguinte forma

$$EG_n = \frac{\hbar^2}{4} \left\{ \frac{4n-1}{2n-1} + \left[ (2n+1)^2 - (2n+1) \right] \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right\}. \quad (3.29)$$

Note que o *o equivalente Gaussiano* só assume valores negativos se  $\beta$  for um número imaginário puro. Caso contrário, não importa o valor atribuído ao  $n$ , o  $EG$  sempre será positivo. Na sequência obtemos as covariâncias para os seguintes casos:

$$\sigma_{xp}^{(1)} = -\frac{3\hbar}{2}\frac{\beta}{\alpha} \quad e \quad \sigma_{xp}^{(2)} = -\frac{3\hbar^2}{2} \left( 1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) \quad (n=1), \quad (3.30)$$

$$\sigma_{xp}^{(1)} = -\frac{5\hbar}{2} \frac{\beta}{\alpha} \quad e \quad \sigma_{xp}^{(2)} = -\frac{\hbar^2}{6} \left(1 - 15 \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) \quad (n = 2), \quad (3.31)$$

$$\sigma_{xp}^{(1)} = -\frac{7\hbar}{2} \frac{\beta}{\alpha} \quad e \quad \sigma_{xp}^{(2)} = -\frac{11}{10} \hbar^2 \left(1 - \frac{35}{11} \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) \quad (n = 3), \quad (3.32)$$

onde

$$EG_1(\alpha, \beta) = \frac{3\hbar^2}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right), \quad (3.33)$$

$$EG_2(\alpha, \beta) = \frac{3\hbar^2}{2} \left(\frac{7}{2} + 5 \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right), \quad (3.34)$$

$$EG_3(\alpha, \beta) = \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{11}{10} + 21 \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right), \quad (3.35)$$

são os respectivos *equivalentes Gaussianos* dependente dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ . Para esses casos encontramos os respectivos valores do determinante de Schrödinger:  $D_1 = 9\hbar^2/4$ ,  $D_2 = 35\hbar^2/12$  e  $D_3 = 77\hbar^2/20$ .

A figura 3.5 mostra três casos da razão entre o determinante de Schrödinger e o *equivalente Gaussiano* em função de  $y = \alpha/\beta$ . Pode se observar que a medida que os valores de  $n$  vão aumentando a curva tende a se estreitar, para esses casos obtemos as seguintes relações:

$$R_1(y) = \frac{3}{1 + 2y^2} \quad (n = 1), \quad (3.36)$$

$$R_2(y) = \frac{35}{7 + 60y^2} \quad (n = 2), \quad (3.37)$$



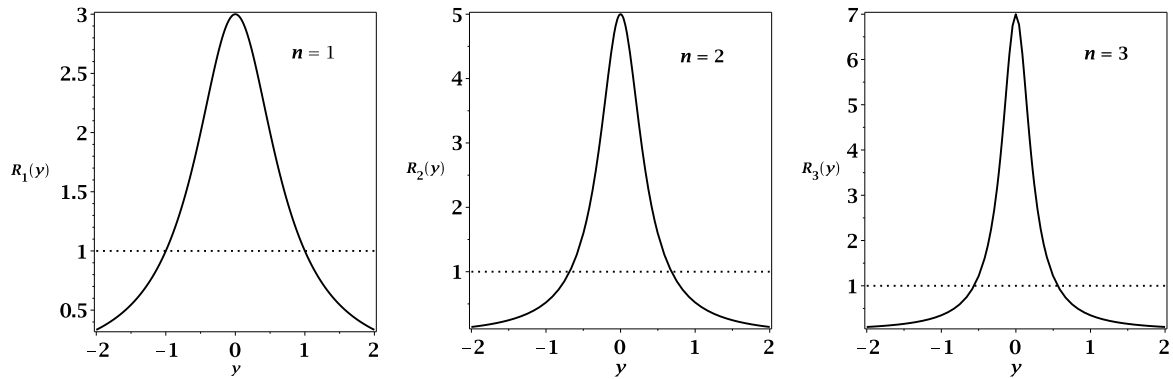


Figura 3.7: Gráficos da razão entre o determinante de Schrödinger e o equivalente Gaussiano em função dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ . Consideramos  $y = \beta/\alpha$

$$R_3(y) = \frac{77}{11 + 210y^2} \quad (n = 3). \quad (3.38)$$

As expressões acima demonstram que dependendo dos valores de  $\alpha$  e  $\beta$ , o equivalente Gaussiano dos estados dados na eq.(3.25), continuam produzindo o mesmo resultado do determinante de Schrödinger.

Na seção anterior, consideramos o experimento de fenda única para ondas de matéria provenientes de uma fonte capaz de liberar ondas Gaussianas. Observamos que a onda se mantém Gaussiana, mesmo depois de sofrer o confinamento na fenda. Mas no próximo capítulo, o modelo considerado será o experimento de dupla fenda, e a função de onda que representa o sistema após as fendas perde sua Gaussianidade porque a função de onda total será uma combinação linear de dois estados Gaussianos.

Iremos considerar uma função de estado como combinação de duas funções Gaussianas, logo após estudaremos o comportamento do equivalente Gaussiano frente à esses estados. A função de estado é dada por

$$\varphi(x) = B \left\{ \exp \left[ -\alpha(x - \delta)^2 - i\alpha x^2 \right] + \exp \left[ -\alpha(x + \delta)^2 - i\alpha x^2 \right] \right\}, \quad (3.39)$$

onde

$$B = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\sqrt{\pi}\sqrt{2} \left[ \exp(2\alpha\delta^2) + 1 \right] \exp(-2\alpha\delta^2)}}, \quad (3.40)$$

é o fator de normalização, sendo que  $\alpha$  e  $\delta$  são diferentes de zero.

Obtemos as expressões gerais para as covariâncias

$$\sigma_{xp}^{(1)} = -\frac{\hbar}{2} \left[ \frac{4\alpha\delta^2}{\exp(-2\alpha\delta^2) + 1} + 1 \right], \quad (3.41)$$

$$\sigma_{xp}^{(2)} = \frac{4\hbar^2\alpha\delta^2 [\exp(2\alpha\delta^2) + 1 + 2\alpha\delta^2]}{[\exp(2\alpha\delta^2) + 1]^2}. \quad (3.42)$$

De o modo que o *equivalente Gaussiano* é dado por:

$$EG(\alpha, \delta) = \frac{\hbar^2}{4} \left[ \frac{4\alpha\delta^2}{\exp(-2\alpha\delta^2) + 1} + 1 \right]^2 - \frac{2\hbar^2\alpha\delta^2 [\exp(2\alpha\delta^2) + 1 + 2\alpha\delta^2]}{[\exp(2\alpha\delta^2) + 1]^2}. \quad (3.43)$$

Calculamos o determinante de Schrödinger e obtivemos o seguinte resultado:

$$D_c = \frac{\hbar^2}{4} \frac{[4\alpha\delta^2 \exp(2\alpha\delta^2) + \exp(2\alpha\delta^2) + 1] [\exp(2\alpha\delta^2) - 4\alpha\delta^2 + 1]}{[\exp(2\alpha\delta^2) + 1]^2}. \quad (3.44)$$

Na sequência, plotamos o gráfico do *equivalente Gaussiano* e do determinante de Schrödinger em função dos parâmetros  $\alpha$  e  $\delta$ .

A Figura 3.6 mostra os gráficos do determinante de Schrödinger, *equivalente Gaussiano* e da razão entre eles. Na Figura 3.6(a) a linha pontilhada corresponde quando essa razão for igual a um, e conforme o gráfico vemos que esse resultado é válido para valores de  $z$  em torno do zero. A Figura 3.6(b) são as curvas do determinante de Schrödinger (curva vermelha) e *equivalente Gaussiano* (curva preta), que é outra maneira de comparar qual a região de  $z$  (ou melhor dizendo, quais os valores  $\alpha$  e  $\delta$ ), em que o *equivalente Gaussiano* produz os mesmos valores do determinante de Schrödinger. Pode se observar que para valores negativos de  $z$  o determinante atinge valores maiores, e na região próxima de zero eles assumem valores iguais, no entanto quando  $\alpha\delta^2$  são valores positivos as variações de  $EG$  são muito maiores do que as de  $D_c$ . Por outro lado se  $\delta \rightarrow 0$ ,  $z \rightarrow 0$  a distribuição das funções Gaussianas da eq.(3.39) se torna apenas uma, e nesse limite a eq.(3.39) se torna uma função Gaussiana, e o *equivalente Gaussiano* produz os mesmos valores que o determinante de Schrödinger.

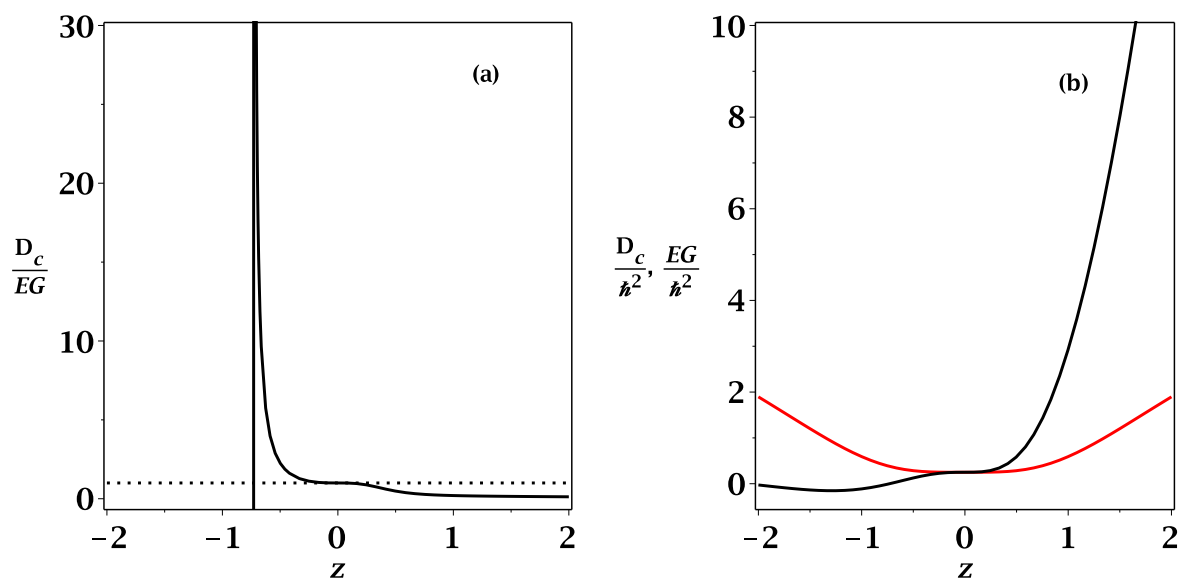


Figura 3.8: (a) Gráfico da razão entre o determinante de Schrödinger e o *equivalente Gaussiano* em função de  $z$ . (b) São as curvas do determinante de Schrödinger (curva vermelha) e do *Equivalente Gaussiano* (curva preta) em função de  $z$ . Assumimos que  $z = \alpha\delta^2$  e consideramos  $\delta = 10^{-6}$  em ambos os casos.

# Capítulo 4

## Correlações no experimento de fenda dupla

Neste capítulo, nós modelamos o experimento de dupla fenda com pacote de onda Gaussiano inicialmente correlacionado eq.(2.1). O pacote de onda propaga durante um tempo  $t$  até as fendas e se divide em dois pacotes de onda Gaussianos. Depois da fenda, os dois pacotes se propagam durante um tempo  $\tau$  até que ele atinjam a tela de detecção, onde eles são recombinados e o padrão de interferência é observado como função da coordenada transversal  $x$ . O modelo é apresentado na Figura 4.1, juntamente com uma ilustração qualitativa do padrão de interferência para três diferentes valores de tempo  $t$ , mantendo  $\tau$  constante.

Como foi observado, o padrão de interferência é drasticamente influenciado pelos tempos de propagação  $t$  e  $\tau$ . Em particular, existem valores do tempo  $t_{max}(\tau)$  e  $t_{min}(\tau)$  que o número de franjas de interferência tende a ser mínimo e máximo, respectivamente.

### 4.1 Experimento de fenda dupla com ondas de matéria

Inicialmente obtemos as funções de onda no tempo que simbolizam as partículas que atravessaram a fenda 1(+) ou a fenda 2(-). As funções de onda conforme a referência [19], são obtidos da seguinte maneira:

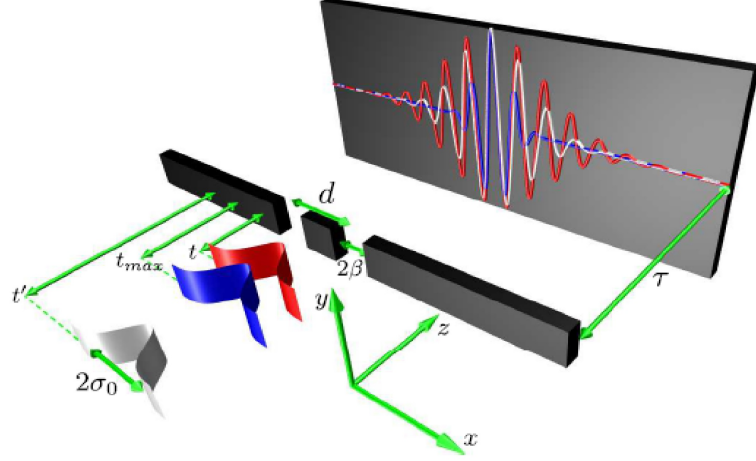


Figura 4.1: Esboço do experimento de fenda dupla. Um pacote de onda Gaussiano de largura inicial transversa  $\sigma_0$  se propagando durante um tempo  $t$  até as fendas, e depois de um tempo  $\tau$  das fendas até chegar no anteparo. A abertura das fendas Gaussianas de largura  $\beta$  e separadas por uma distância  $d$  (Figura retirada da referência [21]).

$$\psi_{1,2}(x, t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_j \int_{-\infty}^{+\infty} G_\tau(x, t + \tau; x_j, t) F(x_j \pm d/2) G_t(x_j, t; x_i, 0) \psi_0(x_i) dx_i, \quad (4.1)$$

onde,

$$G_t(x_j, t; x_i, 0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} \exp \left[ \frac{im}{2\hbar t} (x_j - x_i)^2 \right], \quad (4.2)$$

$$G_\tau(x, t + \tau; x_j, t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \tau}} \exp \left[ \frac{im}{2\hbar \tau} (x - x_j)^2 \right], \quad (4.3)$$

$$F(x_j \pm d/2) = \frac{1}{\sqrt{\beta\sqrt{\pi}}} \exp \left[ -\frac{(x_j \pm d/2)^2}{2\beta^2} \right] \quad (4.4)$$

e

$$\psi(x_i, 0) \equiv \psi_0(x_i) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_0\sqrt{\pi}}} \exp \left[ -\frac{x_i^2}{2\sigma_0^2} \right]. \quad (4.5)$$

Os termos  $G_t(x_j, t; x_i, 0)$  e  $G_\tau(x, t + \tau; x_j, t)$  são os propagadores para uma partícula

livre, que foram aplicados no modelo representativo à experiência de fenda única. As funções  $F(x_j \pm d/2)$  descrevem as aberturas das fendas, que são consideradas gaussianas de largura  $\beta$  e separadas por uma distância  $d$ . Consideramos as fendas Gaussianas conforme a referência [21], isso nos permite obter expressões analíticas para a intensidade, visibilidade e especialmente para as correlações quânticas entre posição e momento.

Como já foi dito anteriormente, o parâmetro  $\rho$  garante que o estado inicial tenha correlações entre os observáveis,  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$ . De fato, para o estado inicial  $\psi(x_i, 0)$  a sua relação de incerteza na posição é  $\sigma_x^2 = \sigma_0^2/2$ , a incerteza no momento é  $\sigma_p^2 = (1 + \rho^2)\hbar/2\sigma_0^2$  e a covariância de primeira ordem é  $\sigma_{xp} = \hbar/2$ .

Resolvendo as integrais da eq.(2.21), obtemos o seguinte resultado para a onda que passou através da fenda 1

$$\psi_1(x, t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{B}\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(x + D/2)^2}{2B^2}\right] \exp\left(\frac{imx^2}{2\hbar R} + i\Delta x + i\theta + i\mu\right), \quad (4.6)$$

onde

$$B^2(t, \tau) = \frac{\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 + \frac{m^2}{\hbar^2}\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{r}\right)^2}{\left(\frac{m}{\hbar\tau}\right)^2\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{b^2}\right)}, \quad (4.7)$$

$$R(t, \tau, \rho) = \tau \frac{\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 + \frac{\tau m^2}{\hbar^2}\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{r}\right)^2}{\frac{1}{\beta^4} + \frac{\tau_0^2 + \frac{t\tau_0^2}{\tau} + \tau_0^2\rho^2 + \frac{\tau_0^3\rho}{\tau} + \frac{t\tau_0^2\rho^2}{\tau} + \frac{2\tau_0^2\sigma_0^2}{\beta}}{\sigma_0^4(t^2 + \tau_0^2 + 2\tau_0 t\rho + t^2\rho^2)}, \quad (4.8)$$

$$\Delta(t, \tau, \rho) = \frac{\tau\sigma_0^2 d}{2\tau_0\beta^2 B^2}, \quad (4.9)$$

$$D(t, \tau, \rho) = \frac{\left(1 + \frac{\tau}{r}\right)}{\left(1 + \frac{\beta^2}{b^2}\right)} d, \quad (4.10)$$

$$\theta(t, \tau, \rho) = \frac{md^2\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{r}\right)}{8\hbar\beta^4 \left[\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 + \frac{m^2}{\hbar^2}\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{r}\right)^2\right]}, \quad (4.11)$$

e

$$\mu(t, \tau, \rho) = -\frac{1}{2} \arctan \left[ \frac{t + \tau \left(1 + \frac{\sigma_0^2}{\beta^2}\right) + \frac{\rho \hbar t \tau}{m \beta^2}}{\tau_0 \left(1 - \frac{t \tau \sigma_0^2}{\tau_0^2 \beta^2}\right) + \rho(t + \tau)} \right]. \quad (4.12)$$

Para obter as expressões para onda que passou pela fenda 2, apenas devemos substituímos o parâmetro  $d$  por  $-d$  nas expressões correspondentes à onda que passou pela fenda 1. O parâmetro  $B(t, \tau, \rho)$  é a largura para a propagação do feixe através de uma fenda,  $R(t, \tau, \rho)$  é o raio de curvatura das frentes de ondas para a propagação através de uma fenda. O parâmetro  $D(t, \tau, \rho)$  é a distância da separação entre os pacotes de onda produzidos pelas fendas.  $\theta(t, \tau, \rho)$  e  $\mu(t, \tau, \rho)$  são as fases que dependem do tempo, elas são revelante quando a largura das fendas são de comprimento diferentes.

Agora que já temos às expressões da onda que passou em cada uma das fendas, iremos calcular a covariância de primeira ordem e o determinante de Schrödinger na tela de detecção. Veremos que o comportamento das covariâncias em função dos tempo de propagação nos diz muito sobre o comportamento do sistema, a relação entre o número mínimo de franjas de interferência, bem como as propriedades de onda e de partícula com o máximo da cavariância (de primeira ordem) foram obtido na referência [21].

Pelo princípio da superposição a função de onda normalizada na tela é dada por

$$\psi(x, t, \tau) = \frac{\psi_1(x, t, \tau) + \psi_2(x, t, \tau)}{\sqrt{2 + 2 \exp \left[ - \left( \frac{D}{2B} \right)^2 - (\Delta B)^2 \right]}}, \quad (4.13)$$

para essa função de onda calculamos os elementos da matriz da covariança e obtemos

$$\sigma_{xx}^2 = \frac{B^2}{2} + \frac{D^2 - 4\Delta^2 B^4 \exp \left[ - \frac{D^4}{4B^2} - \Delta^2 B^2 \right]}{4 + 4 \exp \left[ - \frac{D^2}{4B^2} - (\Delta B)^2 \right]}, \quad (4.14)$$

$$\frac{\sigma_{pp}^2}{\hbar^2} = \left( \frac{1}{2B^2} + \frac{m^2 B^2}{2\hbar^2 R^2} \right) + \frac{\left( \frac{mD}{\hbar R} - 2\Delta \right)^2}{4 + 4 \exp \left[ - \frac{D^2}{4B^2} - (\Delta B)^2 \right]} - \frac{\left[ \frac{D^2}{B^4} + 2\Delta \left( \Delta + \frac{mD}{\hbar R} \right) \right]}{1 + \exp \left[ \frac{D^2}{4B^2} + (\Delta B)^2 \right]}, \quad (4.15)$$

e

$$\sigma_{x,p}^{(1)}(t, \tau, \rho) = \frac{mB^2}{2R} + \frac{(mD^2/R)}{4 + 4 \exp \left[ - \left( \frac{D}{2B} \right)^2 - (\Delta B)^2 \right]}$$

$$-\frac{\hbar\Delta D}{2} - \frac{(m\Delta^2 B^4/R)}{1 + \exp[-(\frac{D}{2B})^2 - (\Delta B)^2]}. \quad (4.16)$$

O determinante da matriz de covariância é a relação incerteza generalizada de Robertson-Schrödinger e é dada por

$$D_C = \sigma_{xx}^2 \sigma_{pp}^2 - [\sigma_{x,p}^{(1)}]^2. \quad (4.17)$$

Para pacote Gaussiano de partículas livres não correlacionado, a incerteza na posição e no momento é mínima, o que produz para a relação de incerteza Robertson-Schrödinger, o valor mínimo  $\hbar^2/4$ . As correlações posição-momento aparecem apenas com a evolução temporal, e elas são seguidas por um espalhamento da distribuição da posição associada, enquanto a incerteza no momento e a relação de incerteza de Robertson-Schrödinger são mantidas constantes durante todo o tempo de propagação. Recentemente, foi mostrado que para estados obtidos a partir da superposição de dois estados Gaussianos, as correlações posição-momento tem um ponto de máximo e a relação de incerteza de Robertson-Schrödinger é maior do que  $\hbar^2/4$  para todo o tempo, tendendo assim para um valor máximo de  $D_C \approx 33\hbar^2$  [21].

Veremos os efeitos que aparecem quando o estado inicial é o caso de pacotes gaussianos mais geral, para esse caso a função de onda total deixa de ser um pacote Gaussiano e torna-se uma superposição de duas funções Gaussianas.

A Figura 4.2 são as curvas da relação de incerteza de Robertson-Schrödinger e da covariância em função de  $t/\tau_0$  para Nêutrons, a razão para considerar os nêutrons depende de sua realidade experimental, que é mais próxima do nosso modelo de interferência com ondas de matéria completamente coerentes, embora ainda tenhamos perda de coerência como discutido na referência [27]. Adotamos os seguintes valores dos parâmetros: massa  $m = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{kg}$ , largura inicial do pacote  $\sigma_0 = 7.8 \mu\text{m}$ , largura das fendas  $\beta = 7.8 \mu\text{m}$ , separação entre as fendas  $d = 125 \mu\text{m}$  e o comprimento de onda de Broglie  $\lambda = 2 \text{nm}$ . Esses parâmetros foram usados no experimento de dupla fenda com Nêutrons por A. Zeilinger [23]. Observamos que a relação de Robertson-Schrödinger apresenta um mínimo para  $\rho < 0$ , e esse mínimo é mais pronunciado para  $\rho \approx -1.85$  (quando mantemos  $\tau = 18\tau_0$ ) produzindo o resultado  $D_C \approx 7\hbar^2$ . A covariância atinge o mínimo em  $t_{min} = 0.42\tau_0$  e um máximo em  $t_{max} = 0.95\tau_0$ .



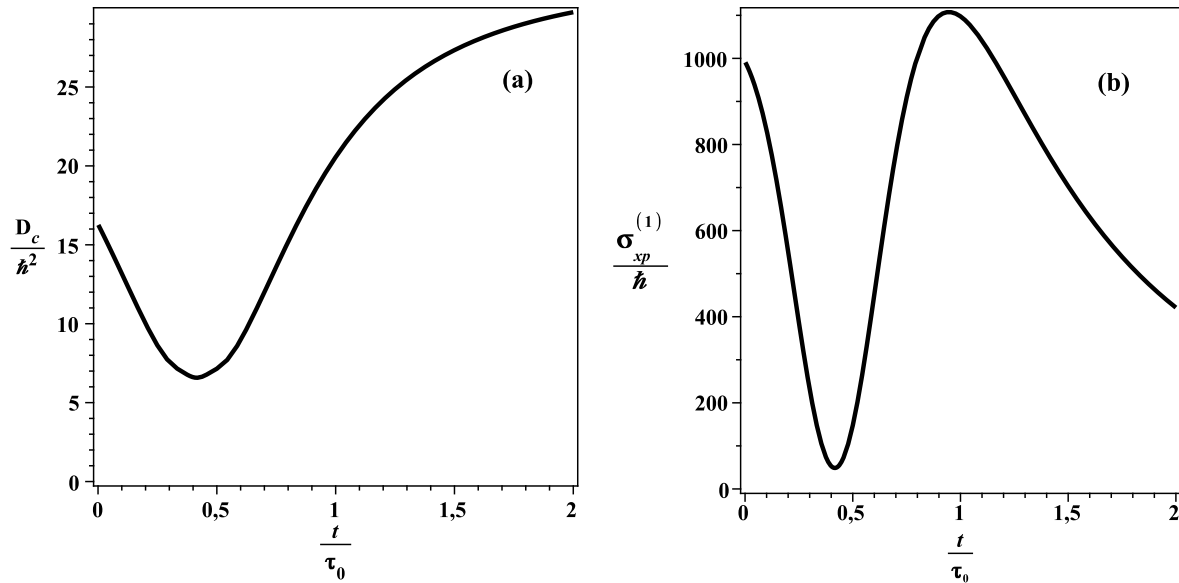


Figura 4.2: (a) Relação de incerteza Robertson-Schrödinger  $D_C$  e (b) covariância de primeira ordem  $\sigma_{x,p}^{(1)}$ . Os gráficos estão em função de  $t/\tau_0$  mantendo  $\tau = 18\tau_0$  e  $\rho = -1.85$ .

Observamos que a covariância de primeira ordem não depende das fases  $\theta$  e  $\mu$ , mas depende da fase  $\Delta$  e dos outros parâmetros que definem a dinâmica do pacote de onda. Para avaliar o papel dos parâmetros plotamos as curvas de cada termo separadamente.

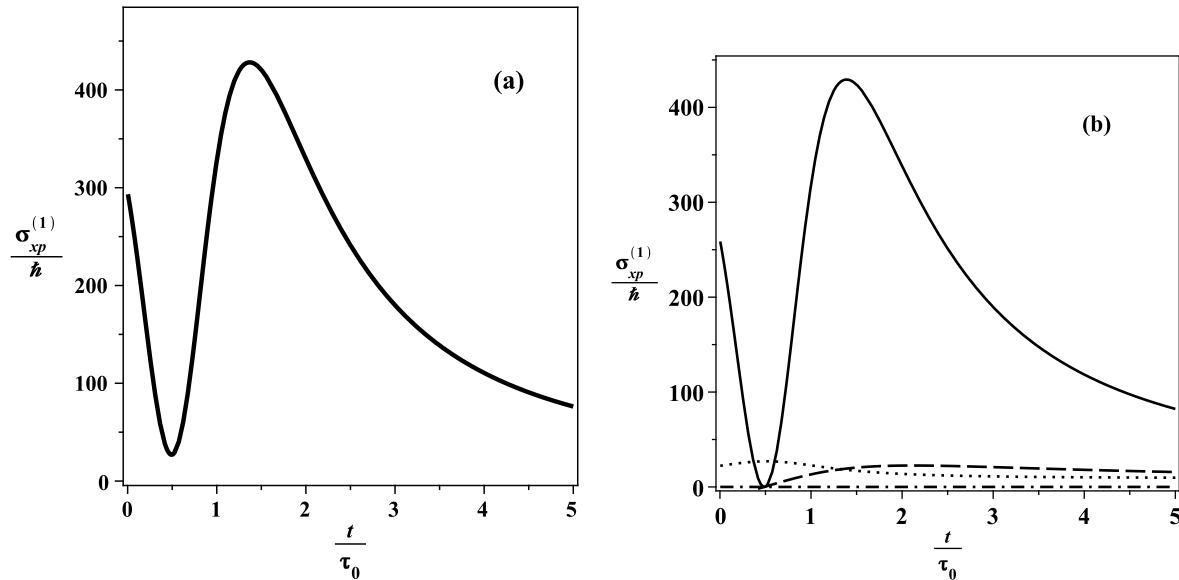


Figura 4.3: (a) Covariância de primeira ordem em função de  $t/\tau_0$  (mantendo,  $\rho = -1$  e  $\tau = 18\tau_0$ ). (b) Valores absolutos dos termos da covariância eq.(4.16), primeiro termo (linha pontilhada), segundo termo (linha sólida), terceiro termo (linha tracejada) e quarto termo (linha ponto-tracejada) como função de  $t/\tau_0$  (matendo,  $\rho = -1$  e  $\tau = 18\tau_0$ ).

A Figura 4.3 mostra que as correlações medida pela covariância de primeira ordem no tempo mínimo e no tempo máximo são governadas, respectivamente, pelo primeiro e segundo termo da equação eq.(4.16));  $\sigma_{t_{min}}^{(1)} \approx mB^2/2R$  e  $\sigma_{t_{max}}^{(1)} \approx mD^2/4R$  [21]. Uma vez que  $B(t, \tau, \rho)$  é o comprimento do pacote e  $D(t, \tau, \rho)$  é a separação entre os pacotes na tela de observação, temos uma região maior de sobreposição dos pacotes para o mínimo da covariância, e uma região menor para as correlações máximas. Estes resultados são refletidos no padrão de interferência como iremos observar na próxima seção.

## Intensidade, Visibilidade e Previsibilidade

Aqui, calculamos a intensidade relativa, visibilidade e previsibilidade para analisar o padrão de interferência bem como a propriedade onda-partícula através do conhecimento dos máximos e mínimos das correlações posição-momento. Essa análise pode ser útil no experimento de dupla fenda, porque nos permite escolher o conjunto de parâmetros que nos fornece o padrão de interferência de melhor qualidade.

A intensidade na tela é dado por

$$I = |\psi|^2 \Rightarrow I(x, t, \tau) = F(x, t, \tau) \left[ 1 + \frac{\cos(2\Delta x)}{\cosh\left(\frac{Dx}{B^2}\right)} \right], \quad (4.18)$$

onde

$$F(x, t, \tau) = I_0 \exp \left[ -\frac{x^2 + (D/2)^2}{B^2} \right] \cosh \left( \frac{Dx}{B^2} \right). \quad (4.19)$$

O Primeiro termo da eq.(4.18) está associado ao envelope de cada fenda e o segundo termo é responsável pela interferência [21].

Na figura 4.4, mostramos a metade do gráfico simétrico da intensidade relativa em função de  $x$ , matendo o tempo de propagação das fendas até a tela de observação igual a  $\tau = 18\tau_0$ . Observamos na Figura 4.4(a) um número grande de franjas de inteferência, uma vez que, escolhemos o tempo de propagação  $t_{min} = 0.42\tau_0$  em que as correlações são mínimas e na Figura 4.4(b) para o qual elas são máximas  $t_{max} = 0.95\tau_0$ . Observamos que, o maior número de franjas de interferência está associado com o mínimo da covariância e o número menor está associado ao máximo da covariância.

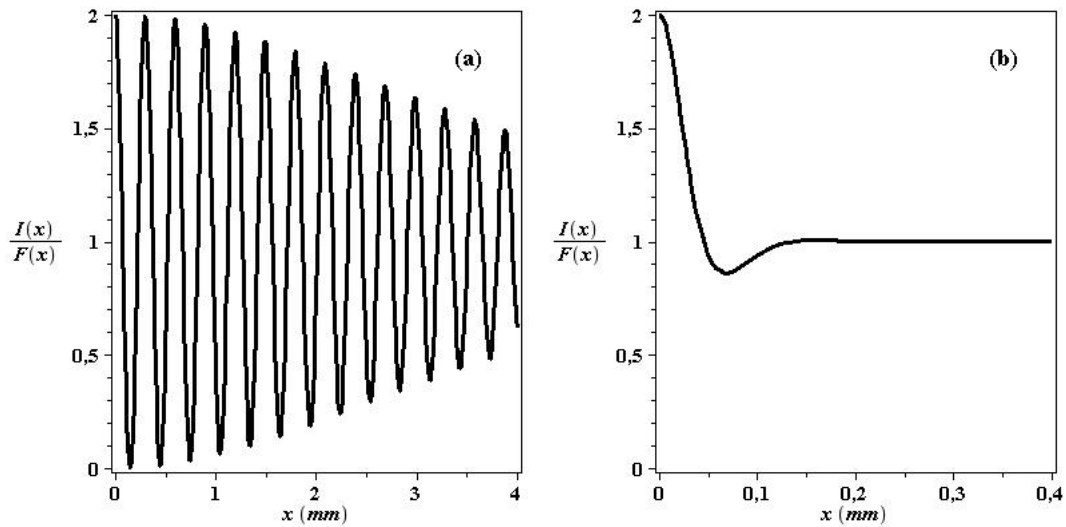


Figura 4.4: Metade do gráfico simétrico para a intensidade relativa como função de  $x$ , considerando os tempo de propagação em que as correlações são mínimas e máximas (Atribuímos  $\tau = 18\tau_0$ ). (a) Utilizamos o tempo de propagação da fonte até as fendas igual  $t_{min} = 0.42\tau_0$ . Em (b), utilizamos o tempo  $t_{max} = 0.95\tau_0$  de propagação da fonte até as fendas.

O conhecimento de partícula e de onda em um experimento de interferometria é dado pela relação de Greenberger e Yasin  $P^2(\beta) + \nu^2(\beta) \geq 1$ , que foram quem ampliaram o princípio de complementariedade de Bohr.  $P$  evidencia a propriedade de partícula e  $\nu$  a propriedade de onda, o parâmetro  $\beta$  é usado para que se tenha o conhecimento maior de onda e de partícula. A igualdade refere-se a estados quânticos puros e a desigualdade é para estados mistos [37]. Calculamos a previsibilidade e a visibilidade da nossa configuração experimental e obtemos,

$$P = \frac{|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2}{|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2} = \left| \tanh \left( \frac{Dx}{B^2} \right) \right|, \quad (4.20)$$

e

$$\nu = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{1}{\cosh \left( \frac{Dx}{B^2} \right)}, \quad (4.21)$$

onde, o  $I_{max}$  é a intensidade quando o termo oscilante é  $\cos(2\Delta x) = 1$  e  $I_{min}$  é a intensidade quando o  $\cos(2\Delta x) = -1$ . Resultados similares foram obtidos anteriormente na referência [38].

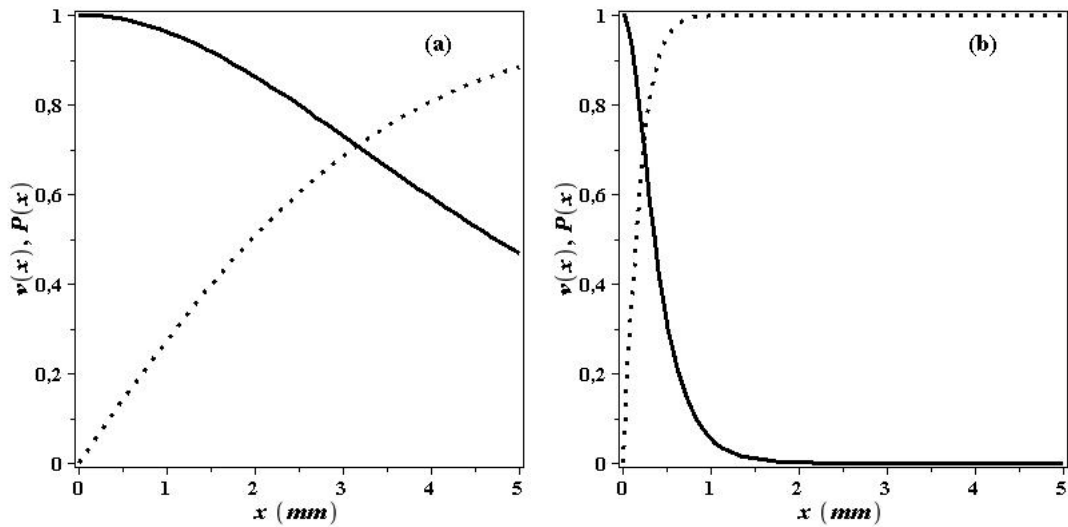


Figura 4.5: Metade do gráfico simétrico da visibilidade (curva sólida) e previsibilidade (curva pontilhada) como função de  $x$ . (a) Tempo para o qual as correlações são mínimas  $t_{min} = 0.42\tau_0$ . (b) tempo associado as correlações máxima  $t_{max} = 0.95\tau_0$ , em ambos os gráficos consideramos  $\tau = 18\tau_0$ .

Na Figura 4.5(a), são os gráficos simétricos da visibilidade (curva sólida) e previsibilidade (curva pontilhada) em função de  $x$  considerando o tempo de propagação  $t_{min} = 0.42\tau_0$ , na Figura-4.5(b) as curvas da visibilidade e previsibilidade estão associadas com o tempo de propagação  $t_{max} = 0.95\tau_0$ . Fixamos o tempo de propagação das fendas até a tela de  $\tau = 18\tau_0$ .

Estes resultados mostram claramente a relação entre o mínimo e o máximo das correlações posição-momento com o número de franjas de interferência, e a propriedade onda-partícula no experimento de dupla-fenda. O número máximo de franjas de interferência ocorre quando as correlações na tela de detecção são mínimas, além de um número consideravelmente menor quando as correlações detectadas são máximas. A propriedade de onda é predominante numa faixa maior do eixo  $x$  quando escolhermos o  $t_{min}$  para a propagação, enquanto a propriedade de partícula é dominante para o tempo de propagação  $t_{max}$ , conforme podemos observar as curvas da visibilidade e previsibilidade para os dois casos. Portanto, o conhecimento das correlações nos diz se a partícula enviada pela fonte se comportará mais como uma partícula na tela em um determinado valor de  $x$ , excluindo apenas os valores próximos  $x = 0$ . Isso também é refletido na relação de incerteza aparecendo como uma incerteza mínima quando as correlações são mínimas e aumentando a incerteza quando as correlações são máximas. Assim, a superposição de

dois estados Gaussianos têm um número máximo de franjas de interferência quando a incerteza para o estado total é mínimo e um número mínimo de franjas de interferência quando a incerteza para o estado total aumenta, por outro lado, podemos também compreender porque a visibilidade (ou previsibilidade) domina quando as correlações são mínimas (ou máximas), observando que existe um valor

$$x_0 = \ln(1 + \sqrt{2})B^2/D,$$

tal que as propriedades de onda e partícula são iguais,  $P^2(x_0) = \nu^2(x_0) = 0.5$ . Para o tempo de correlações mínimas  $t_{min}$  temos um valor grande para  $x_0$ , já que para este tempo a região de sobreposição é grande, e é dominada pela largura do pacote de onda seguido por uma pequena separação dos pacotes de onda, ou seja,  $B^2(t_{min}) \gg D^2(t_{min})$ , por outro lado, para o tempo das correlações máxima  $t_{max}$  temos um valor pequeno de  $x_0$ , uma vez que para esse tempo a região de superposição é pequena, e é dominada por uma separação entre os pacotes de onda, onde  $D^2(t_{max}) \gg B^2(t_{max})$ .

## 4.2 Correlações de Segunda ordem no experimento de dupla fenda

Neste seção seguiremos avaliando as correlações posição-momento, mas utilizando-se da covariância de segunda ordem com base no experimento de dupla fenda. Calculamos a covariância da função de onda total na tela de detecção e avaliamos as correlações em função do tempo de propagação  $t$ .

Para a função de onda total eq.(4.13) calculamos a covariância de segunda ordem e obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{x,p}^{(2)}(t, \tau, \rho)}{\hbar^2} = & -\alpha^2 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{D^2}{4B^2} - \frac{3m^2B^4}{2\hbar^2R^2} - \frac{3m^2D^2B^2}{2\hbar^2R^2} - \frac{m^2D^4}{8\hbar^2R^2} + \frac{3m\Delta DB^2}{\hbar R} + \frac{m\Delta D^3}{2\hbar R} - \Delta^2 B^2 - \frac{\Delta^2 D^2}{2} + \right. \\ & \left. + e^{-\eta} \left( \Delta^2 B^2 + \frac{1}{2} - \frac{2m^2\Delta^4 B^8}{\hbar^2 R^2} + \frac{6m^2\Delta^2 B^6}{\hbar^2 R^2} - \frac{3m^2 B^4}{2\hbar^2 R^2} - \frac{2m\Delta^3 DB^4}{\hbar R} + \frac{3m\Delta DB^2}{\hbar R} - \frac{\Delta^2 D^2}{2} + \frac{D^2}{4B^2} \right) \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\alpha^4 \left\{ -1 - \frac{m^2 B^4}{\hbar^2 R^2} - \frac{m^2 D^2 B^2}{\hbar^2 R^2} + \frac{2m\Delta DB^2}{\hbar R} - 2\Delta^2 B^2 - \frac{D^2}{B^2} - \frac{m^2 D^4}{4\hbar^2 R^2} + \frac{m\Delta D^3}{\hbar R} - \Delta^2 D^2 + \right. \\
& + e^{-\eta} \left( -2 + \frac{4m^2 \Delta^2 B^6}{\hbar^2 R^2} - \frac{2m^2 B^4}{\hbar^2 R^2} + \frac{4m\Delta DB^2}{\hbar R} + \frac{2m^2 \Delta^2 D^2 B^4}{\hbar^2 R^2} - \frac{m^2 D^2 B^2}{\hbar^2 R^2} + \frac{m\Delta D^3}{\hbar R} + \frac{D^4}{4B^4} - \frac{4m\Delta^3 DB^4}{\hbar R} \right. \\
& \left. \left. + 4\Delta^4 B^4 \right) + e^{-2\eta} \left( 2\Delta^2 B^2 - \frac{4m^2 \Delta^4 B^8}{\hbar^2 R^2} + \frac{4m^2 \Delta^2 B^6}{\hbar^2 R^2} - \frac{4m\Delta^3 DB^4}{\hbar R} + \right. \right. \\
& \left. \left. - \Delta^2 D^2 - 1 - \frac{m^2 B^4}{\hbar^2 R^2} + \frac{2m\Delta DB^2}{\hbar R} + \frac{D^2}{2B^2} \right) \right\} \quad (4.22)
\end{aligned}$$

onde

$$\eta = \left( \frac{D}{2B} \right)^2 + (\Delta B)^2, \quad (4.23)$$

e

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2 + 2 \exp \left[ - \left( \frac{D}{2B} \right)^2 - (\Delta B)^2 \right]}}, \quad (4.24)$$

é o fator de normalização da função de onda total. Em seguida plotamos o gráfico da covariância de segunda ordem como função do tempo que as partículas levam para se propagar da fonte até chegar nas fendas, conforme a Figura 4.1.

A Figura 4.6 mostra o comportamento da covariância de segunda ordem em função do tempo de propagação  $t$ . Em (a) consideramos o caso simples  $\rho = 0$ , o pacote de onda não possui correlações iniciais. Apesar disso, podemos observar que mesmo para o instante  $t = 0$  a covariância de segunda ordem indica presença de correlações posição-momento. Na referência [21] foi mostrado que em  $t = 0$  as correlações de primeira ordem são nulas, em (b), consideramos  $\rho = -1.85$  e observamos que a covariância de segunda ordem exibe dois máximos, diferente dos casos de primeira ordem. O valor de tempo que a covariância de segunda ordem é mínimo é  $t_{min} = 0.42\tau_0$ , que é o mesmo valor encontrado para correlações de primeira ordem. Mas para os valores de  $t$  que ampliam

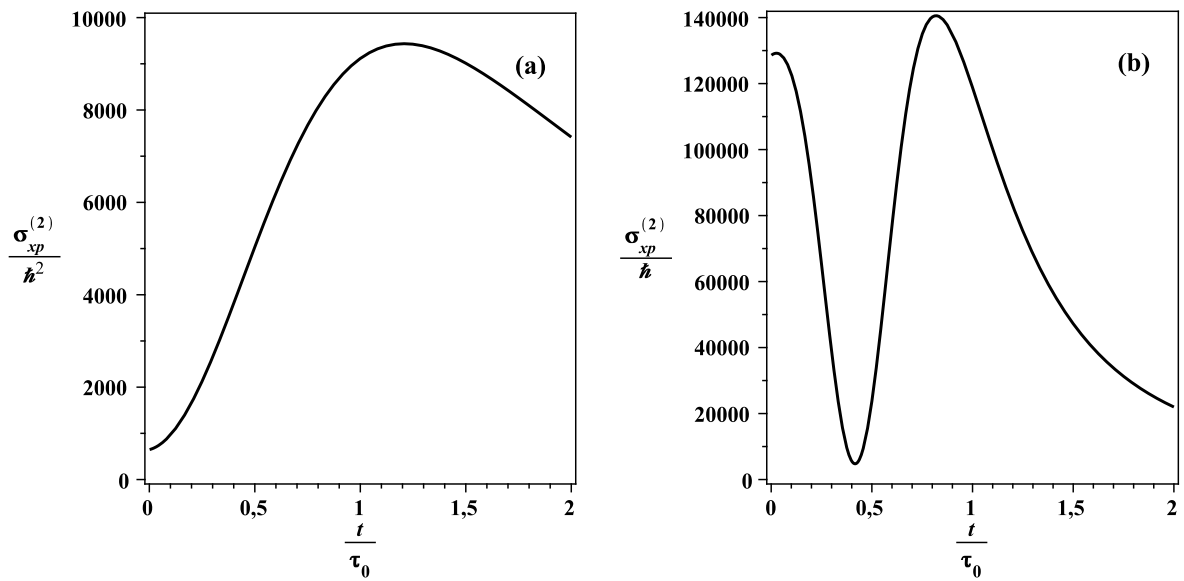


Figura 4.6: Gráficos da covariância de segunda ordem em função do tempo de propagação  $t$  (fixamos  $\tau = 18\tau_0$ ). Em (a) corresponde ao caso simples  $\rho = 0$ , em (b) escolhemos  $\rho = -1.85$ .

a covariância de segunda ordem, observamos que esses valores variam ligeiramente com o que foi encontrado para a covariância de primeira ordem. O valor do tempo que a covariância de segunda ordem é máximo é  $t_{max} = 0.02\tau_0$  e  $t_{max} = 0.8\tau_0$ .

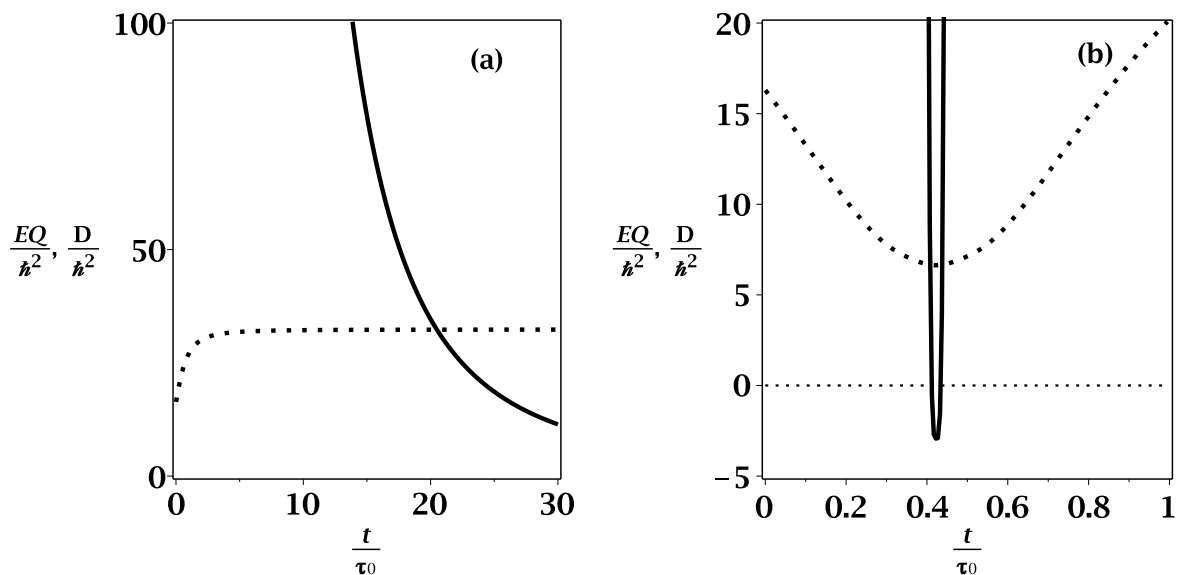


Figura 4.7: Gráfico do Equivalente Gaussiano (curva sólida) e Determinante de Schrödinger (curva pontilhada), em função de  $t/\tau_0$  (fixamos  $\tau = 18\tau_0$ ). Em (a) consideramos  $\rho = 1$ , em (b) assumimos  $\rho = -1.85$ .

Na Figura 4.7 plotamos as curvas do equivalente Gaussiano (curva sólida) e o determinante Schrödinger (curva pontilhada), em função de  $t/\tau_0$  matendo  $\tau = 18\tau_0$ . Em (a) atribuímos um valor de  $\rho$  positivo ( $\rho = 1$ ) que mostra que o equivalente Gaussiano e o determinante Schrödinger alcançã o mesmo valor próximo de  $t = 20\tau_0$ , apenas uma vez. Para valores negativo de  $\rho$  conforme a figura 4.7(b) ( $\rho = -1.85$ ), o equivalente Gaussiano assume valores negativo em torno de um valor do tempo de propagação em que as correlações são mínima ( $t_{min} = 0.42\tau_0$ ), além disso existe dois pontos em que os valores do equivalente Gaussiano (curva sólida) e o determinante Schrödinger são iguais.

No capítulo 3, estabelecemos uma relação entre as covariância de primeira e de segunda ordem que denominamos de *equivalente Gaussiano*. Para os estados Gaussinos a relação reproduz o mesmo resultado que o Determinante de Schrödinger. Mas para estados não Gaussianos a equivalência depende dos parâmetros da função de onda. Na Figura 4.7,comparamos as curvas do Equivalente Gaussiano (curva sólida) e do Determinante de Schrödinger (curva pontilhada), em função do tempo de propagação. Pode se observar que os valores alcançados pelo equivalente Gaussiano são muito maiores do que os valores máximos atingidos pelo Determinante de Schrödinger.



# Conclusão

Nesta dissertação estudamos o experimento de dupla fenda considerando ondas de matéria, essa versão as partículas que são liberadas da fonte são modeladas por pacotes Gaussianos que já tem correlação inicial, ou seja, uma fase dependente do quadrado da posição que é conhecido como parâmetro de correlação  $e$ , ao longo da propagação das partículas os termos que descrevem a estrutura do pacote passam a depender do parâmetro de correlação. Nossos resultados mostram que podemos ter informações sobre o padrão de interferência observando o comportamento das funções de covariância que mede as correlações entre os operadores  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$ . Segundo a referência [3], quando os estados quânticos são representado pelo estados coerentes correlacionados, uma informação à mais é acrescentada ao sistema. Isso foi verificado em nossos resultados, porque para pacotes correlacionados  $\rho \neq 0$  o comportamento das correlações fornece pontos de máximo e de mínimo. De acordo com os nossos resultados o mínimo está associado ao caráter de onda e o máximo é associado com o comportamento de partícula. Para o caso simples  $\rho = 0$ , só existirá uma dessas informações, ou seja, a covariância só possui ponto de máximo. Além disso investigamos o comportamento da covariância de segunda ordem. Esse estudo nos permitiu encontrar uma relação entre a covariância de primeira ordem e de segunda ordem, e este resultado nós denominamos de *equivalente Gaussiano*. Observamos que para os estados Gaussianos correlacionados o *equivalente Gaussiano* fornece o mesmo resultado que a relação geral de incerteza de Robertson-Schrödinger. Também verificamos o comportamento do *equivalente Gaussiano* para estados não Gaussianos. Para esses estados observamos que para determinados valores dos parâmetros da função de onda a equivalência entre o *equivalente Gaussiano* e a incerteza de Robertson-Schrödinger é mantida.

Como perspectiva para trabalhos posteriores pretendemos continuar investigando o comportamento das correlações de segunda ordem para outros sistemas quânticos. Além

disso pretendemos calcular a informação de Fisher da a função de onda total no anteparo eq.(4.13) para estimar o parâmetro de correlação  $\rho$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] V. V. Dodonov, A. B. Klimov, and V. I. Man'ko ?Physical significance of correlated and squeezed states?.
- [2] R. J. Glauber: Phys. Rev. 131 2766 (1963)
- [3] V.V. Dodonov, E.V. Kurmyshev and V.I. Man'ko, Generalized uncertainty relation and correlated coherent states, Phys. Lett. A 79, 150 (1980).
- [4] D.A. Trifonov, Schrödinger uncertainty relation and its minimization states, Physics World 24 (2001) 107-116; arXiv: physics/0105035 [physics.atom-ph].
- [5] H. Takahasi: Advances in Communication Systems. Theory and Applications. Ed. A V. Balakrishnan (Acad. Press, N. Y., 1965), vol. 1, p. 227
- [6] D. Stoler: Phys. R,ev. D1 3217 (1970)
- [7] V. V. Dodonov, A. V. Dodonov, Journal of Russian Laser Research, Volume 35, Number 1, January, 2014
- [8] E. Schrödinger, Ber. Kgl. Akad. Wiss. Berlin, 24, 296 (1930).
- [9] H. P. Robertson, Phys. Rev., 35, 667 (1930).
- [10] Zentile, N., Quantum Mechanics Concepts and Applications, 2nd Edition, John Wiley and Sons (2009).
- [11] S. Feng and H. G. Winful, Opt. Lett. 26, 485 (2001).
- [12] R. W. Boyd, J. Opt. Soc. Am. 70, 877 (1980).
- [13] S. Feng, H. G. Winful, and R. W. Hellwarth, Opt. Lett. 23, 386 (1998).

- [14] I. G. da Paz et al., Phys. Lett. A 374, 1660 (2010).
- [15] I. G. da Paz et al., New journal of Physics 13, 125005 (2011).
- [16] I. G. da Paz, Tese de Doutorado, UFMG (2011).
- [17] I. G. da Paz, M.C.Nemes, and J.G.Peixoto de Faria, J. Phys.: Conference Series 84, 012016 (2007).
- [18] A. Hansen et al., Measuring the Gouy Phase of Matter Waves Using Full Bloch Bose-Einstein Condensates CQO-x and QIM-2 OSA 2013.
- [19] G. Glionna et al, Physica A 387 (2008) 1485
- [20] T. C. Petersen et al, Phys Rev. A 88 043803 (2013).
- [21] J. S. M. Neto, L. A. Cabral, and I. G. da Paz, Eur. J. Phys. 36, 035002 (2015)
- [22] I. G. da Paz, M. C. Nemes, and J. G. Peixoto de Faria, Book Electromagnetic Waves ISBN 978-953-307-174-9 (chapter Gouy Phase and Matter Waves) (InTech, 2011)
- [23] A. Zeilinger, R. Gahler, C. G. Shull, W. Treimer, W. Mampe, Rev. Mod. Phys. 60 (1988) 1067.
- [24] Feynman R, Leighton R B and Sands M L 1965 *The Feynman Lectures on Physics: Quantum Mechanics vol 3* (Reading, MA: Addison-Wesley) chapter 1.
- [25] D. Bohm, Quantum Theory (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1963), pp 200-205.
- [26] Bohr N 1928 *Nature* **121** 580; W. K. Wootters W K and Zurek W K 1979 *Phys. Rev. D.* **19** 473.
- [27] Sanz A S and Borodo F 2005 *Phys. Rev. A* **71** 042103.
- [28] Möllenstedt G and Jösso C 1959 *Z. Phys.* **155** 472.
- [29] Carnal O and Mlynek J 1991 *Phys. Rev. Lett* **66** 2689.

- [30] Schöllkopf W and Toennies J P 1994 *Science* **266** 1345.
- [31] Arndt M *et al.* 1999 *Nature* **401** 680; Nairz O, Arndt M and Zeilinger A 2000 *J. Mod. Opt.* **47** 2811; Nairz O, Arndt M and Zeilinger A 2003 *Am. J. Phys.* **71** 319.
- [32] O. Nairz, M. Arndt, and A. Zeilinger, *Am. J. Phys.* 71, 319 (2003).
- [33] P. B. Lerner, H. Rauch, and M. Suda, *Phys. Rev. A*, 51, 3889 (1995).
- [34] Da Paz I.G, Nemes M C, Pádua S, Monken C H and Peixoto de Faria J G 2010 *Phys. Lett A* 374 1660.
- [35] Da Paz I.G, Saldanha P L, Nemes M C and Peixoto de Faria J G 2011 *New Journal of Phys.* 13 125005.
- [36] Riahi N 2013 *Eur. J Phys.* 34 461.
- [37] Greenberger D M and Yasin A 1988 *Phys. Lett. A* 128 391.
- [38] Bramon A, Garbarino G and Hiesmayr B C 2004 *Phys. Rev. A* 69 022112.
- [39] Robinett R W, Docheski M A and Bassett L C 2005 *Found. Of Phys. Lett.* 18 455.
- [40] Campos R A 1999 *J. Mod. Opt.* 46 1277.
- [41] G *et al.* 2008 *Physica A* 387 1485