Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática – Profmat

Demonstrações Matemáticas: importância e contribuições para a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio

José Daissy Ribeiro Nobre

Teresina - 2018

José Daissy Ribeiro Nobre

Dissertação de Mestrado:

Demonstrações Matemáticas: importância e contribuições para a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora:
Prof^a. Dr^a. Liane Mendes Feitosa

Teresina - 2018

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco
Divisão de Processos Técnicos

N754d Nobre, José Daissy Ribeiro.
Demonstrações Matemáticas : importância e contribuições para a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio / José Daissy Ribeiro Nobre. -- 2018.
122 f. : il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2018.
"Orientação: Profª. Dra. Liane Mendes Feitosa."

1. Demonstrações - Matemática. 2. Raciocínio Lógico. 3. Ensino - Aprendizagem. 4. Matemática - Ensino Médio. I. Título.

CDD 510.7

Elaborado por Thais Vieira de Sousa Trindade - CRB-3/1282

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

SBM

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada: **Demonstrações Matemática: importância e contribuições para a aprendizagem no Ensino Médio**, defendida por José Daissy Ribeiro Nobre em 26 / 10 / 2018 e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Liane Mendes Feitosa Soares

Presidente da Banca Examinadora

Manoel Vieira de Matos Neto

Examinador Interno

Anderson Fabian de Sousa Meneses

Examinador Externo ao Programa

Este trabalho é dedicado a minha família, que sempre dispensa a mim, apoio nas suas mais variadas formas, compreensão como ser humano e ser social, que é fonte de estímulo nas horas em que mais necessito para continuar minha caminhada rumo ao que procuro obter dia após dia, sempre com muita dignidade.

Agradecimentos

De modo primeiro agradeço a Deus, por me manter firme e se fazer presente em todos os momentos de minha vida, sem o qual nada teria se concretizado. Agradeço também:

Aos meus amados Pais: João Eugênio Nobre e Maria Jorge Ribeiro Nobre, pelo esforço contínuo na formação acadêmica dos seus filhos. Valeu a pena, vocês conseguiram.

Aos meus Irmãos, Zilvanir Ribeiro Nobre, Sílvia Régia Ribeiro Nobre, Núbia Ribeiro Nobre, Ferdinando Ribeiro Nobre e Maria Claudia Ribeiro Nobre, que se fizeram presentes juntos a mim para apoio e incentivo em todos os momentos

A minha esposa, Francisca Silvânia Nobre, pela responsabilidade com nossos filhos em meus momentos de estudos nesta jornada instrutiva.

Aos meus filhos, João Eugênio Nobre Neto, Júlia Ledícia Nobre Ribeiro e Pedro Jorge Nobre Ribeiro, através dos quais continuarei em existência.

Aos demais familiares pelas palavras de incentivo e apoio em pensamentos positivos.

Aos professores do PROFMAT, em especial ao professor João Benício (In memoriam) pelos ensinamentos e por contribuírem para o meu crescimento no conhecimento em Matemática.

Aos professores Manoel Vieira de Matos Neto e Anderson Fabian de Sousa Meneses, por aceitarem participar da banca examinadora.

A minha orientadora, Profª. Dra. Liane Mendes Feitosa, pela disposição e auxílio ao longo da realização deste trabalho.

Aos colegas e amigos do PROFMAT turma 2014, em especial aos amigos Fabrício, Itaércio, Egilberto, Jelves e Kelson pelos bons momentos de estudos e convivência.

Aos colegas e amigos Kim Carlos, Marcelo Aguiar e Paulo Jr, em nome de quem agradeço a todos os outros do PROFMAT turma 2016, pelas dificuldades compartilhadas, companheirismo e conquistas.

Ao grande amigo, José Cledes Braga, que no PROFMAT 2014 e 2016 foi companheiro em estudos e viagens, partilhamos adversidades, superações e vitórias alcançadas.

A Clovis Marques, pela grande contribuição em me ajudar com a digitação em Latex.

A Diassis Nascimento e Martinha Castro, pela ajuda no Abstrac.

A todos os meus colegas de profissão e amigos, em especial ao meu compadre Henrique Mendonça e à amiga Elenilda da Silva, pelo apoio e incentivo no decorrer deste curso.

A todos que fazem a Escola Maria Marina Soares, em especial ao núcleo Gestor (2014-2017), Zilvanir Nobre, Luciele Neves, Nirly Karine, Márcia Soares e Assis Nascimento, por acreditarem que a melhoria da educação passa pela capacitação dos professores.

Ao colega e amigo Toinho Vieira, em nome de quem agradeço a todos os profissonais do colégio Municipal Dom Pedro I e que demonstraram apoio e compreensão nesta caminhada.

Ao ex-prefeito de Guaraciaba do Norte, Regivaldo Cavalcante, por deferir meu pedido de afastamento para estudos, demonstrando apoio à formação de professores.

À SBM, pela oferta do Curso em Rede Nacional.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

"*Uma maneira de olharmos para a Matemática é considerá-la um conjunto de modelos abstratos para explicar situações concretas, que por serem abstratos se aplicam a uma quantidade enorme de situações diferentes e que, se examinadas em particular, não nos dão uma noção do que é a Matemática*".

Elon Lages.

Resumo

Este trabalho de pesquisa trata de mostrar que as demonstrações estão incorporadas à prática da Matemática, que são ferramentas para provar as afirmações feitas nesta ciência e procura verificar a importância delas nas aulas de Matemática do Ensino Médio. Enfatiza-se a apresentação da definição formal de uma Demonstração Matemática e sua relação com os objetivos, conteúdos e processo de ensino. Esta dissertação objetiva também identificar e definir as Componentes do Ensino da Matemática, a Conceituação, a Manipulação e as Aplicações, procurando mostrar que são elementos importantes no processo de ensino da Matemática, reforçando que seu uso bem equilibrado pode contribuir significativamente para uma melhor aprendizagem dos conceitos acerca da Matemática. Para análise da influência das demonstrações na melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem da Matemática e para a formação geral do educando do Ensino Médio, versa-se também, no âmbito desta pesquisa, sobre as diferentes técnicas de demonstrações em Matemática e as suas adequações de acordo com a necessidade para demonstrar resultados. Com foco nesse objetivo, apresenta-se uma lista de alguns resultados e fórmulas presentes no currículo do Ensino Médio, acompanhadas, é claro, de suas respectivas demonstrações. Finalmente, conclui-se que as demonstrações em Matemática têm papel fundamental para sua verificação como ciência e, desta forma, vislumbra-se uma maior popularidade das demonstrações entre os professores de Matemática do Ensino Médio e também despertar nos alunos desta etapa de ensino o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo visando uma aprendizagem mais completa.

Palavras chaves: Demonstrações, Matemática, Raciocínio Lógico, Ensino, Aprendizagem.

Abstract

This research work tries to show that the demonstrations are incorporated into the practice of Mathematics, which are tools to prove the affirmations made in this science and try to verify the importance of them in the classes of Mathematics of High School. It is emphasized the presentation of the formal definition of a Mathematical Demonstration and its relation with the objectives, contents and teaching process. This dissertation also aims to identify and define the Components of Mathematics Teaching, Conceptualization, Manipulation and Applications, trying to show that they are important elements in the teaching process of Mathematics, reinforcing that their well balanced use can contribute significantly to a better learning of Mathematics. concepts about mathematics. In order to analyze the influence of the demonstrations on the improvement of the teaching and learning quality of Mathematics and for the general education of the High School student, the scope of this research is also related to the different demonstration Techniques in Mathematics and their adaptations according to the need to demonstrate results. Focusing on this objective, we present a list of some results and formulas present in the High School curriculum, accompanied, of course, by their respective demonstrations. Finally, it is concluded that the demonstrations in Mathematics play a fundamental role for its verification as a science and, in this way, it is possible to see a greater popularity of the demonstrations among the teachers of Mathematics of High School and also to awaken in the students of this stage of teaching the development of deductive logic for a more complete learning.

Keywords: Demonstrations, Mathematics, Logical Reasoning, Teaching, Learning.

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A Matemática é uma ciência que se apresenta com linguagem própria, é dotada de definições, elementos e características intrínsecas que lhes fazem uma área muito especial do conhecimento acumulado pela humanidade. E, por ser um tipo de conhecimento, deve ser digna de se acreditar nela, mas não apenas acreditar, é necessário que se tenha grandes razões para isso. Nesse sentido, as Demonstrações Matemáticas representam uma essência, uma caracterização da Matemática, que não é uma ciência experimental, suas leis que são de natureza peculiar devem ser logicamente demonstradas, pois é uma forma de comprovar a veracidade de um fato não apenas para uma quantidade finita de casos, mas sim, para todos os casos no estudo de um determinado conceito.

As demonstrações são procedimentos de incorporação à prática da Matemática, pois as afirmações feitas nesta ciência devem ser provadas como forma de confirmação de sua verdade. "A nível escolar, demonstrar é uma forma de convencer com base na razão, em vez da autoridade"(LIMA, 2007, p. 158). Desta forma, o ensino e a aprendizagem da Matemática requerem métodos e procedimentos peculiares e pertinentes a ela, que sejam capazes de conceber aos seus aprendizes uma parcela significativa de todo o seu conhecimento. Nesta linha de raciocínio, este trabalho visa apresentar uma pesquisa bibliográfica onde busca investigar os motivos que, nas últimas décadas, causaram desvalorização das Demonstrações Matemáticas, nas aulas de Matemática do Ensino Médio, em escolas brasileiras.

Outro foco do presente trabalho é responder a questionamentos, tais como: os estudantes do Ensino Médio têm maturidades para compreender as etapas das Demonstrações

Matemáticas que lhes possam ser mostradas? As Demonstrações Matemáticas, no Ensino Médio, têm relevância para o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática e contribuem de modo expressivo para a formação geral do educando? A subestimação das demonstrações pode ter ligação com o fato de em considerável número de vezes, os livros escolares destinados à educação básica, e consequentemente para o Ensino Médio, não apresentarem ao seu público leitor as demonstrações das expressões que expõem em seus textos e proposta didática. Outro fator a ser analisado é quanto a formação do Professor e a valorização que este profissional dispõe para o trabalho com demonstrações em Matemática, no Ensino Médio. Pode ser que estes sejam fortes motivos para que professores e alunos não vejam o valor delas nesse nível de escolaridade.

O campo de estudos deste trabalho centrou-se em algumas demonstrações inseridas no conteúdo programático selecionado para serem trabalhados com estudantes da educação básica, especificamente no Ensino Médio. Desarte, dentre outras questões, este trabalho procura colher informações acerca das dificuldades encontradas no uso das Demonstrações Matemáticas no Ensino Médio, como também visa diligenciar estudos quanto a julgamentos de autores renomados que inquirem sobre o aporte que as Demonstrações Matemáticas oferecem nesta etapa do ensino.

Esta pesquisa, de caráter bibliográfico, procura levantar fatos e teorias no sentido de reforçar a ideia de que as Demonstrações Matemáticas são importantes no ensino e aprendizagem da Matemática, pois conseguem agregar na formação de capacidades intelectuais e estruturação do pensamento do aluno do Ensino Médio. Ela versará quanto ao mérito destas demonstrações para uma maior valorização da Matemática como ciência, ou seja, como um conjunto de conhecimentos com características estruturais inerentes a ela.

Como forma de fundamentação, os textos de documentos oficiais, como por exemplo, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), podem reforçar a ideia supracitada em relação a essa grande área do conhecimento. Neles encontram-se afirmações que mostram a importância de a Matemática ser vista como uma ciência acompanhada de características específicas, pois os mesmos relatam que:

> [...] a matemática no ensino médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas (BRASIL, 2000, p. 40; 41).

Assim, a Matemática pode ser apresentada no Ensino Médio, como um conjunto de signos bem organizados e convencionados para possibilitar ao aluno desse nível a construção e transmissão de mensagens numa linguagem peculiar, de comunicação de ideias e com capacidades de descrever um fenômeno da vida real seguido de sua interpretação. Tem-se o intuito de indagar como as Demonstrações Matemáticas podem favorecer o desenvolvimento e agilização do raciocínio dedutivo do educando, de sua capacidade expressiva, da sensibilidade estética e de sua imaginação, da obtenção de precisão de linguagem nas argumentações em soluções matemáticas, convergindo na construção da própria cidadania, na compreensão e transformação do mundo à sua volta.

No tocante a organização deste trabalho, primeiramente é feito uma descrição da problemática que motivou a sua realização, sequenciada pelas hipóteses levantadas que serão sustentáculos norteadores de sua escrita. Logo em seguida, no capítulo 2, serão apresentados os motivos que sustentam a justificativa pela escolha do tema em debate, os objetivos geral e específicos, num tentame em contextualizar toda a construção do trabalho em uma visão atualizada do assunto exposto. Adicionada a essa subdivisão do trabalho vem a metodologia empregada, através da qual são definidos os caminhos a serem percorridos na busca do êxito de todo o planejamento previamente estabelecido nos objetivos delineados.

No terceiro capítulo, serão apresentadas três partícipes de considerável relevância na fundamentação desta dissertação: são as chamadas Componentes do Ensino da Matemática. Estas se apresentam com nomenclaturas bem caracterizadas e intituladas por Conceituação, Manipulação e Aplicações, tendo ainda as suas respectivas definições, argumentações acerca de sua essência e as contribuições que as mesmas podem proporcionar na melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem em Matemática.

O quarto capítulo será dedicado à tarefa de exibir a definição formal de uma demonstração em Matemática, esse trecho visa esclarecer quais os elementos que estão envolvidos com a magia de mostrar a validade de resultados. As Demonstrações Matemáticas, nesse momento, serão conceituadas e caracterizadas em conformidade com as particularidades que as compõem. Juntamente com isso, tem-se maiores informações acerca da existência de uma variedade de definições de demonstração segundo as ideias de diferentes autores que integram a literatura pesquisada.

Em abordagem destinada a evidenciar as diferentes técnicas de demonstração em Matemática, o quinto capítulo vem trazer algumas destas, procurando apontar sua utilidade prática dentro de contextos onde são mais adequadas, ou até mesmo onde serão a grande válvula de escape para provar o quão é verdadeira uma determinada propriedade matemática.

Ainda no capítulo cinco, apresentam-se aplicações das técnicas de demonstração através de várias proposições, onde algumas se encontram em edições de livros didáticos direcionados para o Ensino Médio e, outras proposições que mesmo ausentes na grande maioria dos livros desta etapa do ensino, são considerados, por muitos, como possíveis de serem apresentadas ou, em último caso, adaptadas de acordo com a maturidade do educando do Ensino Médio. Neste momento, procurou-se através da amostragem de alguns resultados, evidenciar as suas respectivas demonstrações, pois muitos professores de Matemática desta etapa de ensino, as consideram parte fundamental para o desenvolvimento do estudante de um modo geral, dentro de um enfoque conceitual, reflexivo e contextualizado no mundo que o cerca.

Finalmente, nas considerações finais, revelam-se as conclusões de todo o estudo realizado, tendo como base de apoio os objetivos antevistos. Nessa etapa, o trabalho tem a função de apresentar afirmações conclusivas a respeito do assunto abordado, estas devem ocorrer segundo uma análise da fundamentação teórica encorpada ao trabalho, e também, por meio de inferências no tocante ao que as Demonstrações Matemáticas podem agregar, no presente e no futuro, considerando todo o suporte que a pesquisa irá fornecer para as deduções e manifestações no que concerne a sua utilidade junto aos profissionais envolvidos e comprometidos com o ensino da Matemática.

Capítulo 2

Justificativa, Objetivos e Metodologia

2.1 Justificativa

Comumente se encontram professores de Matemática do Ensino Médio, que em seus estudos de formação acadêmica, durante a licenciatura, não lhes foi fomentado um olhar atencioso e voltado para o uso das Demonstrações Matemáticas no processo de ensino desta disciplina a nível médio. Assim, muitos desses professores acabam por desenvolver em suas metodologias nas aulas de Matemática, práticas que fazem desta disciplina uma simples coleção de técnicas, com um conjunto de fórmulas prontas e suas respectivas aplicações em exercícios de repetição, em resolução de problemas montados para treinos, ou ainda em tentativa de contextualizar o assunto no cotidiano do estudante.

Nesta perspectiva, o ensino da Matemática fica aparentemente mecânico, focado em memorização, onde a criatividade perde espaço para uma transferência de conteúdos concentrada no uso de fórmulas e de regras sem suas correspondentes justificativas, e isso provoca uma supervalorização na repetição destas regras e fórmulas em detrimento do devido valor e do estímulo ao raciocínio lógico dedutivo, elemento fundamental da Matemática e, consequentemente, do seu ensino e aprendizagem.

No livro do autor Abramo Hefez, intitulado por ARITMÉTICA e adotado como a principal fonte bibliográfica da disciplina Aritmética, do curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT pelas Universidades credenciadas, abrange um quantitativo de definições e proposições matemáticas que contribuíram significativamente para escolha da temática deste trabalho. Em Hefez (2013, p. 72), encontra-se uma proposição que pode ser reescrita como a seguir: Seja $x = a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0$ um número representado no sistema decimal. Uma condição necessária e suficiente para que x seja divisível por 3 (respectivamente por 9) é que $a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0$ seja divisível por 3 (respectivamente por 9).

Ao se deparar com esta proposição, o pesquisador, cursista da disciplina, remete-se em pensamento ao início de sua docência nas chamadas séries finais do ensino fundamental, quando ministrou as primeiras aulas com o tema critérios de divisibilidade com números naturais. Duas coisas o faziam refletir sobre o assunto: primeiramente o fato de que os livros didáticos aos quais tinha acesso não contemplavam o critério de divisibilidade por sete, a outra era que, nestes livros, as ilustrações dos critérios de divisibilidade eram apenas através de exemplos numéricos. Assim, ficava um vazio quanto a demonstrar que os critérios se aplicariam a todos os números naturais, pois mesmo apresentando uma grande quantidade de exemplos numéricos, seja dez, cem ou até milhares deles, sempre ficará a dúvida sobre a possibilidade da existência de algum número natural tal que o um determinado critério de divisibilidade não seja verdadeiro.

Ainda em Hefez (2014, p. 114), encontra-se na parte de problemas a serem resolvidos pelos cursistas, que estes deduzam o seguinte critério de divisibilidade por sete, o qual também pode ser reescrito como a seguir: O número $x = a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0$ representado no sistema decimal é divisível por sete se, e somente se, o número $a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 - 2a_0$ for divisível por sete. Esta última proposição reforçou ainda mais a escolha do tema desta dissertação no sentido de fazer refletir do porquê de não apresentar aos alunos da educação básica e, de forma mais específica, aos alunos do ensino médio, as demonstrações de proposições como estas, dentre muitas outras, de acordo, é claro, com a maturidade dos alunos desta fase do ensino básico.

> A LDB/96, ao considerar o Ensino Médio como última e complementar etapa da Educação Básica, e a Resolução CNE/98, ao instituir as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, que organizam as áreas de conhecimento e orientam a educação à promoção de valores como a sensibilidade e a solidariedade, atributos da cidadania, apontam de que forma o aprendizado de Ciências e de Matemática, já iniciado no Ensino Fundamental, deve encontrar complementação e aprofundamento no Ensino Médio. Nessa nova etapa, em que já se pode contar com uma maior maturidade do aluno, os objetivos educacionais podem passar a ter maior ambição formativa, tanto em termos da natureza das informações tratadas, dos procedimentos e atitudes envolvidas, como em termos das habilidades, competências e dos valores desenvolvidos (BRASIL, 2006, p. 6).

Desta maneira, acredita-se que o aluno do ensino médio já dispõe de estruturais mentais que o habilitam a assimilar, desde que com adaptações ao seu grau de desenvolvimento, as demonstrações de muitas das fórmulas e leis matemáticas que lhes são apresentadas.

Recentemente, foi homologado pela Portaria nº 1570, publicada no Diário Oficial da União de 21 / 12 / 2017, seção 1, página 146, um documento que objetiva ser uma referência na construção de currículos em todas as redes de ensino no Brasil. Este, denominado Base Nacional Comum Curricular – BNCC, dispões de um conjunto de competências gerais e, assim sendo, vem reforçar ainda mais a ideia de que seja possível apresentar, no Ensino Médio, a validação de resultados em Matemática através de demonstrações, isso tendo em vista que nesta etapa da Educação Básica os "estudantes, com maior vivência e maturidade, têm condições para aprofundar o exercício do pensamento crítico, realizar novas leituras do mundo, com base em modelos abstratos" (BRASIL, 2017, p. 537).

Outra grande parcela da motivação para a escolha do tema Demonstrações Matemáticas com foco no Ensino Médio foi a sua desvalorização em escolas brasileiras nas últimas décadas, no processo de ensino e aprendizagem da Matemática na referida etapa da educação básica. Em companhia a isso, vem a possibilidade de contribuir através da atividade de investigar que ações podem ser desenvolvidas no sentido de colaborar com a retomada da sua significância entre professores, alunos e o próprio processo de ensino. Isto posto, contribui para o apoio e colaboração com a expectativa de averiguar a utilidade e necessidade de reestabelecer uma maior popularidade das Demonstrações Matemáticas nesta etapa da educação básica.

O presente trabalho também se fundamenta nas orientações curriculares para o Ensino Médio, pois este documento contém informações que relata o dever de considerar que a Matemática tem diferentes intenções em sua formação na educação básica. Encontramos nos relatos dessas orientações para o Ensino Médio que,

> Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (BRASIL, 2006, p. 69).

Dessa forma, escolher este assunto é uma excelente maneira de oportunizar um debate sobre a forma de trabalhar os conteúdos de Matemática no Ensino Médio, levantando questões concernente ao interesse da comunidade escolar, em valorizar a utilização de um ensino da Matemática onde se vislumbra o respeito ao valor formativo em relação ao progresso do pensamento matemático.

> Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático ? nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contra-exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. Também significa um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica (BRASIL, 2006, p. 69; 70).

Quando se estabelece, nas aulas de Matemática, procedimentos que levam esta disciplina a um patamar de conjunto de conhecimentos prontos para serem aplicados, sem questionamentos da veracidade das propriedades matemáticas, pode acontecer a instauração de uma ideia fixa, que é a de lecionar Matemática apenas com propostas de resolução de exercícios. Assim, a prática passa por uma aplicação dos conceitos matemáticos embutidos nas fórmulas que são utilizadas em exercícios para serem resolvidos pelos alunos e, nessa conjuntura, desvaloriza-se a construção passo a passo da modelagem destas expressões, dos conceitos, dos axiomas ou teoremas, juntamente com as argumentações que as tornam como se encontram, prejudicando a qualificação de sua validade, seja na comunidade científica, no ensino sistematizado ou mesmo em atividades do cotidiano dos estudantes.

Ainda segundo as orientações curriculares para o Ensino Médio é importante haver aumento e aprofundamento em explicitar a Matemática com sua estruturação lógica, pois ela é necessária ao educando nessa fase do ensino, “devendo-se valorizar os vários recursos do pensamento matemático, como a imaginação, a intuição, o raciocínio indutivo e o raciocínio lógico-dedutivo”e assim, certamente percebe-se “a distinção entre validação matemática e validação empírica, e favorecer a construção progressiva do método dedutivo em Matemática”(BRASIL, 2006, p. 95).

As finalidades do ensino da Matemática no Ensino Médio, apontam que o aprendizado do aluno deve corresponder de modo expressivo a aquisição de uma gama de habilidades referentes a esta disciplina, o que foi mais um incentivo a pesquisar o quão essas habilidades podem ser encontradas na precisão da linguagem e nas peculiaridades das Demonstrações Matemáticas, sendo que estas servem para nos dar uma garantia de que certas propriedades matemáticas são verdadeiras.

2.2 Objetivo Geral

Diante das hipóteses já levantadas sobre a importância da utilização das demonstrações voltadas para os alunos a nível de Ensino Médio, o desígnio deste trabalho é realizar uma pesquisa bibliográfica capaz de promover reflexões, discussões e obter um conjunto de respostas satisfatórias no que tange a aplicação das demonstrações nas aulas de Matemática do ensino mediano. Nesta perspectiva, esta dissertação tem como objetivo geral, analisar a influência das Demonstrações Matemáticas, durante o Ensino Médio, para a melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem da Matemática e para a formação geral do educando. Pretende-se identificar e explicitar fatores que comprovam de forma evidente a necessidade de empregar as demonstrações na educação básica, principalmente no Ensino Médio, além disso, objetiva-se concluir que mesmo tendo dificuldades em utilização, é possível torná-las mais populares nesta etapa do ensino e mostrar que estas têm relevância no ensino da Matemática e na vida cotidiana do educando, pois as mesmas dispõem de recursos que contribuem para o desenvolvimento do pensar matemático, do raciocínio logico dedutivo e poder de argumentação, consequentemente, são grandes aliadas de professores e alunos na busca de uma maior e melhor aprendizagem desta tão bela ciência, a Matemática.

2.3 Objetivos Específicos

No decorrer do desenvolvimento deste trabalho tem-se como um dos objetivos específicos o intuito de identificar e caracterizar as chamadas Componentes do Ensino da Matemática que são a Conceituação, a Manipulação e as Aplicações, pois veremos como a organização destas, segundo a natureza peculiar da Matemática, podem contribuir para a melhoria da qualidade do seu ensino e de sua aprendizagem.

Objetiva-se, também, definir formalmente uma demonstração em Matemática, analisar os elementos que as caracterizam e registrar qual a participação de cada um em sua composição. Além disso, após a exposição de alguns dos diferentes métodos para demonstrar, em Matemática, espera-se que defronte a alguma demonstração, o leitor tenha adquirido habilidades para identificar a técnica que foi empregada e ainda seja capaz de manipular os entes matemáticos conceituais e constituintes na construção desta. Agregado a isso, pretende-se uma reflexão quanto ao método da indução finita e, avaliar a sua aplicação como mais uma opção de método de demonstração com possível adequação para o Ensino Médio.

Um outro objetivo integrante do presente trabalho é o de coletar e apresentar algumas Demonstrações Matemáticas que possam ser desenvolvidas nas aulas com estudantes do Ensino Médio, conjuntamente, pretende-se avaliar a adequação destas ao nível de escolaridade em questão, sendo ainda acrescida algumas outras que para muitos profissionais da docência em Matemática podem ser inclusas nas obras voltadas para o Ensino Médio.

Deste modo, a presente pesquisa bibliográfica objetiva dentro dos caminhos a percorrer, realizar estudos que em sua fundamentação teórica possam mostrar de maneira evidente a importância das Demonstrações Matemáticas para o processo de ensino e de aprendizagem, calcular o valor que estas têm para a formação geral do educando e, desta forma, enfatizar uma maior popularidade das demonstrações entre os professores de Matemática, entre os alunos da educação básica e, consequentemente, nas aulas de Matemática do Ensino Médio.

2.4 Metodologia

Na execução das atividades que compõem o presente trabalho delineou-se um procedimento sistemático. O caminho trilhado no processo de sua construção apoiou-se em uma pesquisa teórica, pois se utilizou de fontes bibliográficas caracterizadas como secundárias, tendo o propósito de responder a um problema. Como procedimento procurou-se coligir informações por meio de pesquisa bibliográficas sendo estas compostas por diversos materiais elaborados e divulgados publicamente, com ênfase em livros, revistas, artigos, monografias e dissertações, todos fundamentados em resultados de publicações na área da Matemática, e de modo específico, do seu ensino. Com esse modelo de investigação, através do estudo de dados já publicados e analisados por outros pesquisadores, entende-se que a colheita de elementos acerca das demonstrações em Matemática seja capaz de reforçar a aquisição de um conhecimento mais amplo relacionado ao assunto, sendo portanto, uma base de sustentação para atender ao máximo os objetivos da investigação proposta pela temática estabelecida.

A construção do trabalho se configura em caracterização a publicações relevantes de autores renomados, tais como Lima (2007), com o título Matemática e Ensino, uma obra composta de capítulos independentes, onde alguns deles tratam do ensino da Matemática, mostrando análises críticas e sugerindo propostas de como o ensino desta disciplina pode ser organização e praticado. É voltado para todos que gostam de Matemática e se interessam pela forma como ela é ensinada, principalmente para aqueles que pretendem seguir carreira no magistério.

Na revisão de literatura, encontra-se em Filho (2013), contribuições importantíssimas para a realização deste trabalho, pois nos textos mostrados na sua obra "Um Convite à Matemática", principal referência na composição específica pesquisada, é encontrado uma série de definições que fazem parte do conteúdo a ser construído no presente trabalho, tais como: o que vem a ser uma Definição Matemática e a linguagem específica de sua escrita, a conceituação do que vem a ser um Teorema e uma Demonstração em Matemática. É um livro que, entre outros objetivos, foca na formação de professores para o magistério, tem uma linguagem acessível e pautada no uso da lógica dentro da Matemática e, de modo muito dinâmico e esclarecedor apresenta as principais técnicas de demonstração em Matemática, cada uma delas sequenciadas por uma série de exemplificações de proposições demonstradas e seguida de comentários a respeito destas demonstrações.

Seguindo a temática das pesquisas em obras já publicadas, Fossa (2009), contribui com uma série de diálogos procurando despertar no leitor, linhas gerais das argumentações e articulações sobre a naturalidade da Matemática, numa introdução informal às mais básicas técnicas de demonstração. Com Garbi (2010), tem-se o ensino da geometria numa visão lógico-dedutiva não muito difundida nas escolas brasileiras, os textos têm leitura agradável e motivadora por seu rico conteúdo e pela linguagem clara, simples e precisa na qual foi escrito, retratando explicações e demonstrações, conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria e, se destina a todos que desejam entender a lógica que há por trás das fórmulas que utilizam.

O desenvolvimento da pesquisa bibliográfica contou ainda com outros grandes parâmetros, conforme exposição na seção "referências bibliográficas", sendo que através da realização de leituras, fichamentos, resumos e anotações de pontos relevantes para a temática proposta, procurou-se atender, em grande parte, à marca registrada da linguagem matemática, levando em conta a natureza e a atualização das argumentações propostas em cada uma das publicações revisadas.

Capítulo 3

Componetes do Ensino da Matemática

Neste capítulo, serão apresentadas três denominações consideradas muito importantes para o ensino e a aprendizagem da Matemática, para tanto fundamentou-se o argumento, principalmente, nas ideias de Elon Lages Lima, professor, pesquisador e autor de mais de 30 livros de Matemática. Assim sendo, um maior aprofundamento nas informações acerca do assunto é encontrado em Lima (2007), intitulado "Matemática e Ensino".

A busca pelo domínio da Matemática é justificada no seu estudo pelas suas aplicações práticas e também pelo seu aspecto teórico. A mais importante característica da Matemática, para muitos, está na sua beleza e intelectualidade em desafiar o seu apreciador, no entanto, para outros está na sua aplicabilidade prática às atividades do homem em sua vida cotidiana. É certo que, independentemente de qual seja a natureza do que se admira da Matemática e do seu conhecimento, seja como indivíduo ou como estrutura social estabelecida, ela agrega as duas características com muito dinamismo e propriedades específicas desta ciência.

No entanto, no permeio destas duas importantes componentes se encontra uma terceira de igualitário valor, esta tem capacidades que proporcionam simples produções mentais instintivas, avançam do tratamento, com perícia, das equações e fórmulas matemáticas e ainda se mostra eficaz nas construções cujo objeto é o estudo do espaço e suas formas. Com esse olhar sobre a Matemática e com a intencionalidade do seu ensino de forma equilibrada, Lima (2007) afirma que as três importantes denominações citadas anteriormente são a Conceituação, a Manipulação e as Aplicações.

> Afim de familiarizar gradativamente os alunos com método matemático, dotá-los de habilidades para lidar desembaraçadamente com os mecanismos do cálculo e dar-lhes condições para mais tarde saberem utilizar seus conhecimentos em situações da vida real, o ensino da Matemática deve abranger três componentes fundamentais, que chamaremos de Conceituação, Manipulação e Aplicações (LIMA, 2007, p. 153; 154).

É fácil perceber que o autor defende o valor que essas três componentes têm em momentos diferentes dentro do processo de ensino e aprendizagem desta elegante ciência chamada Matemática, cuja presença é marcante e extremamente útil na vida humana em vários aspectos. E, ainda de acordo com uma utilização contrabalanceada delas, haverá um avanço que vai desde a familiarização com as ferramentas matemáticas, passando pelo manuseio destas e, chegando a evoluir ao ponto de conseguir aplicabilidade prática de seus ensinamentos, incorporando esses conhecimentos em sua vida cotidiana.

Considerando que investigações acerca da importância e utilização das Demonstrações Matemáticas é parte integrante dentre os objetivos deste trabalho, então elas dever ser situadas em meio ao conhecimento matemático, inclusive tomar ciência sobre em qual das três componentes, Conceituação, Manipulação e Aplicações as demonstrações estão inseridas.

Posteriormente, será tratado que a estrutura de uma demonstração matemática requer a utilização de passos nos quais há uma harmonia das argumentações válidas de entes matemáticos, incluindo, é claro, as definições. Logo, percebe-se claramente, que as demonstrações estão inseridas na componente Conceituação, pois a linguagem matemática é composta da língua materna e de uma linguagem simbólica, ou seja, há uma interação entre elas para comunicar ideias, formular corretamente as definições matemáticas, as conexões entre os vários conceitos e a apreciação concentrada dos enunciados de resultados para uma subsequente remodelação das ideias.

Nas palavras de Lima (2007, p. 158), quanto a inclusão das demonstrações em uma das componentes que o mesmo considera fundamentais para o ensino da matemática, encontra-se de forma bem evidente que "as demonstrações pertencem à componente Conceituação. Elas devem ser apresentadas por serem parte essencial da natureza da Matemática e por seu valor educativo".

Mesmo fazendo parte de um conjunto de valor indiscutível para o ensino da

Matemática a Conceituação e consequentemente as Demonstrações Matemáticas devem ter utilização com uma dose de prudência, o que certamente é uma defesa para esquivar-se de um ocasional acontecimento semelhante ao que houve com o movimento da Matemática Moderna, que teve início no final da década de 1950 e que influenciou o ensino de Matemática no Brasil na década de 70. Este movimento fora implantado com argumento de que o ensino de Matemática havia malogrado em função do modelo de ensino anterior ao da Matemática Moderna, justificadamente por uma série de motivos.

Nessa perspectiva, as três componentes ganham um relevante e oportuno papel na aprendizagem da matemática, sendo que essa importância se caracteriza mais significativamente a partir do uso de uma porção ajustada de cada uma das componentes.

> Da dosagem adequada de cada uma das três componentes depende o equilíbrio do processo de aprendizagem, o interesse dos alunos e a capacidade que terão para empregar futuramente, não apenas técnicas aprendida nas aulas, mas sobretudo o discernimento, a clareza das ideias, o hábito de pensar e agir ordenadamente, virtude que são desenvolvidas quando o ensino respeita o balanceamento das três componentes básicas (LIMA, 2007, p. 154).

Percebe-se que o ponderamento no uso das três componentes é o que deve ser levado em consideração para que possam representar, no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, uma base de sustentação capaz de promover uma harmonia, isto é, quando cada uma delas tem seu valor de importância qualitativa e quantitativa aumentam as chances de estabelecer o sucesso da aprendizagem.

3.1 Definição de Conceituação

Claramente, não se contesta que a Matemática preenche um considerável espaço na vida cotidiana das pessoas e ainda que a formulação de suas ideias conceituais por meios de palavras, símbolos ou recursos visuais se incluem nas atividades da vida em sociedade de tal maneira que nem sempre é possível ter a exata percepção desse acontecimento. Nesse sentido, o conhecimento matemático pressupõe o domínio das definições específicas que caracterizam a sua essência e, consequentemente, a sua utilização conforme o ensejo.

Por conseguinte, Lima (2007, p. 154) define conceituação com a seguinte redação:

> A conceituação compreende a formulação correta e objetiva das definições matemáticas, o enunciado preciso das proposições, a prática do raciocínio dedutivo, a nítida conscientização de que conclusões sempre são provenientes de hipóteses que se admitem, a distinção entre uma afirmação e sua recíproca, o estabelecimento de conexões entre conceitos diversos, bem como a interpretação e a reformulação de ideias e fatos sobre diferentes formas e termos. É importante ter em mente e destacar que a conceituação é indispensável para o bom resultado das aplicações.

Deste modo, as definições matemáticas assumem um papel de grande importância para o ensino e aprendizagem da Matemática, tornando-se um elemento fundamental para possibilitar a aplicação do raciocínio dedutivo. Sendo que, em contextos formais elas protagonizam papel central no ensino da Matemática e, juntamente com as hipóteses admitidas, as conexões entre entes matemáticos e os algoritmos disponíveis podem contribuir para se chegar ao que vem a ser a apresentação da verdade de um determinado resultado em Matemática. Assim, a Conceituação funciona na condição de promover o processo de raciocínio dedutivo a partir de uma ou mais afirmações aceitas como verdadeiras, com objetivo de chegar a uma certa conclusão lógica através das ligações dessas premissas com as conclusões.

3.2 Definição de Manipulação

Em consulta ao dicionário Aurélio, da Língua Portuguesa, e atento aos seus verbetes pode-se dizer que "Manipulação"é o ato de manipular e, manipular tem os seguintes significados: "1 - Preparar com a mão; imprimir forma (a alguma coisa) com a mão. 2 - Preparar (medicamentos) com corpos simples. 3 - Engendrar, forjar, maquiar: manipular um plano. 4 - Fazer funcionar; pôr em movimento; acionar".

Se buscássemos uma tentativa de esclarecer, conceitualmente, os variados empregos que costumam fazer do termo Manipulação, teríamos de contar com as contribuições de autores que nos últimos anos refletiram e escreveram a acerca do assunto. No entanto, o objetivo, neste momento, se volta para a utilização do termo Manipulação, segundo as ideias de Lima (2007), que faz menção ao seu valor matemático, num sentido de exercitar o manuseio de elementos pertencentes a Conceituação e, consequentemente, o seu uso no processo de ensino da Matemática, caracterizando-se pelo formato de treinamento com repetição, num exercitar com ordem e exatidão para se apoderar de habilidades dos algoritmos envolvidos no campo dos conhecimentos inerentes a esta ciência. Nesse sentido, o autor nos diz que:

> A manipulação, de caráter principalmente (mas não exclusivamente) algébrico, está para o ensino e o aprendizado da Matemática assim como a prática dos exercícios e escalas musicais está para música (ou mesmo como repetido treinamento dos chamados ?fundamentos? está para certos esportes, como o tênis e o voleibol). A habilidade e destreza no manuseio de equações, fórmulas e construções geométricas elementares, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas, verdadeiros reflexos condicionados, permite ao usuário da Matemática concentrar sua atenção consciente nos pontos realmente cruciais, poupando-lhe a perda de tempo e energia com detalhes secundários (LIMA, 2007, p. 154;155).

Dentre as três componentes supramencionadas, temos no ensino da Matemática em nossas escolas a Manipulação com uma notável comparência e, muitas vezes, até com um certo grua de excesso da mesma nos livros didáticos adotados nas escolas brasileiras, se apresentando caracterizada na forma como os conteúdos estão incluídos no material teórico, na maioria desses livros didáticos.

A Manipulação, como definida acima nos causa a sensação de que o ensino da Matemática pode ser resumido em uma coleção de fatos e fórmulas, onde na maioria das vezes predomina a ausência de justificativas, prevalecendo o ato de levar o aluno a praticar a memorização desvinculada do raciocínio dedutivo e caminhando para um excessivo trabalho com exercícios repetitivos. Lembrando que os exercícios de manipulação são indispensáveis, o que deve ser considerado é a dosagem de sua utilização e os critérios em suas escolhas, para que possam fortalecer a aprendizagem em um dado momento e a mesma possa contribuir em outras aprendizagens nos momentos futuros.

3.3 Definição de Aplicações

Não é de hoje que os seres humanos buscam incessantemente tomar poder do entendimento e das explicações dos fenômenos da natureza por meio dos conhecimentos matemáticos, sejam eles da ordem de anotações, de desenhos, da contagem, das medidas, enfim, de um conjunto de elementos capaz de permitir a modelagem de tais fenômenos em linguagem matemática e, consequentemente, obter sua aceitação junto à comunidade científica e posteriormente sua utilidade junto a vida em sociedade. Toda essa preocupação com a utilidade prática do conhecimento acerca da matemática é bastante louvável, principalmente quando esse conhecimento é difundido e ensinado na educação sistematizada de maneira sólida e eficiente.

A esta maneira de agir, caracterizada pelo processo de fazer uso correto dos conceitos e procedimentos matemáticos no dia a dia, Lima (2007), em nomenclatura peculiar, define-a com o termo “Aplicações”. Isto posto, encontramos em sua definição para o termo que:

> As aplicações são empregos das noções e teorias da Matemática para obter resultados, conclusões e previsões em situações que vão desde problemas triviais do dia a adia a questões mais sutis que surgem em outras áreas, quer científicas, quer tecnológicas, quer mesmo sociais. As aplicações constituem a principal razão pela qual o ensino da Matemática é tão difundido e necessário, desde os primórdios da civilização até os dias de hoje e certamente cada vez mais no futuro. Como as entendemos, as aplicações do conhecimento matemático incluem a resolução de problemas, essa arte intrigante que, por meio de desafios, desenvolve a criatividade, nutri a auto-estima, estimula a imaginação e recompensa o esforço de aprender (LIMA, 2007, p. 155).

As palavras do autor permitem inferir que é de fundamental importância tomar ciência dos conceitos presentes no conhecimento matemático e, a partir deles e toda essa gama de processos aritméticos, algébricos e também no campo geométrico, alcançar bons resultados em diferentes áreas. Nessa linha de pensamento, percebe-se nos ensinamentos sobre os objetos dos quais se ocupa o ensino sistematizado da Matemática, que não devem de forma alguma, tornarem-se obsoletos e isolados como um simples conjunto de regras, pois acima de tudo, o conhecimento que os estudantes aprendem na escola devem estar presentes em situações diversificadas do cotidiano.

Com essa mesma abordagem, o mesmo autor discorre sobre o assunto em outro veículo de comunicação sobre o ensino da Matemática, a Revista do Professor de Matemática (RPM), nº 58, do ano 2005. Nela, o autor também afirma que Aplicação é o mesmo que Contextualização, expressão muito divulgada em textos didáticos e nos discursos de profissionais da educação quando se referem ao ensino da Matemática em nossas escolas. A esse respeito, encontra-se, também, em Garbi (2009), um alerta sobre o que ele chama de dogma da contextualização.

> Ao negligenciar o emprego do raciocínio lógico-dedutivo no ensino da Matemática, ao conviver com inaceitáveis contradições entre a pregação contrária a memorização e a adoção de livros que pouco ensinam aos jovens o pensamento matematicamente, ao criar um falso dilema entre a compreensão e a memorização, ao abraçar sem senso crítico dogmas como o da contextualização e dos conteúdos exclusivamente práticos dos currículos, o Brasil está perdendo preciosa oportunidade de melhorar a desconfortável posição em que se encontra em termos comparativos internacionais no ensino da Matemática (Garbi, 2009, p. 5; 6).

Nessa perspectiva é necessário ressaltar um ponto bastante relevante em relação ao fato de aplicar conhecimentos dos conceitos matemáticos nas atividades cotidianas. Para se conseguir a Aplicação de um conhecimento matemático é necessário entendê-lo e saber lidar operacionalmente com ele, o que caracteriza a Conceituação e Manipulação, apresentando assim, a importante ligação entre os três pilares de sustentação capazes de equilibrar o sucesso do processo de aprendizagem em matemática.

3.4 As Componetes do Ensino da Matemática e o Ensino Médio

De um modo geral, o encadeamento das três Componentes já apresentadas, a Conceituação, a Manipulação e as Aplicações, em consonância com as recomendações de uso equilibrado das mesmas, têm potencial para desenvolverem um papel relevante e decisivo no ensino da Matemática. Consequentemente, em conformidade com as observações já expostas a respeito de sua utilização, estas componentes quando direcionadas para o estudante do Ensino Médio elas também contribuem para que estes, a partir das definições, notações e toda uma linguagem característica, através da manipulação desses elementos, possam aprender de forma eficiente os conceitos matemáticos desta etapa de ensino, e assim, construírem validações das propriedades matemáticas e, posteriormente, consigam aplicar os conhecimentos adquiridos em situações novas e cotidianas.

O estudante do Ensino Médio já acumula uma boa quantidade de experiências no que diz respeito aos conhecimentos de Matemática. “Nessa nova etapa, em que já se pode contar com uma maior maturidade do aluno os objetivos educacionais podem passar a ter maior ambição formativa"(BRASIL, 2000, p. 6). Nesse sentido, as pretensões devem considerar aspectos da "natureza das informações tratadas, dos procedimentos e atitudes envolvidas, como em termos das habilidades, competências e dos valores desenvolvidos"nesta etapa da educação básica. Deve-se usar esta vantagem de maturidade do estudante para ofertar a ele, um ensino de Matemática centrado nos métodos específicos desta ciência e que sejam capazes de fornecer aprendizagens mais significativas do ponto de vista matemático e com aplicações em outras áreas do conhecimento.

Assim sendo, é importante ressaltar que o ensino da Matemática deve abordar em seus preceitos a conjuntura ampla desta arte, que ela seja exposta por sua estrutura completa e abrangente, que se valorize seu lado teórico, a apaixonante beleza dos seus enlaces, o poder quantitativo e qualitativo de sua objetividade, enfim, toda a sua magnitude como ciência e como elemento necessário a humanidade e à sua constante evolução, incluindo é claro, o seu poder prático de resolução de problemas do cotidiano através da aplicação de seus conceitos.

Para LIMA (2007, p. 162), seria importante que os professores de Matemática, independentemente do nível escolar que estejam inseridos, "transmitissem a seus alunos que o ensino dessa matéria é uma das formas de preparação para o futuro"e, que pode tornar-se ainda mais agradável se levarmos em conta "que a matemática tem muitas faces". E assim sendo, o Ensino Médio é uma excelente oportunidade para apresentar ao aluno uma destas caras, as Demonstrações, pois a Matemática valoriza o tratamento das noções e verdades da natureza abstrata, buscando atingir aprendizagens que permitam descrever a realidade por meio da construção de modelos bem elaborados.

> A generalidade com que vale as proposições matemáticas exige precisão, proíbe ambiguidades e por isso requer mais concentração e cuidado por parte do estudante. Por outro lado, o exercício dessas virtudes durante os anos de escola ajuda a formar hábitos que serão úteis no futuro. A perseverança, dedicação e a ordem do trabalho são qualidades indispensáveis para o estudo da Matemática. Note-se que não se trata de talentos e que não se nasce dotado delas (LIMA, 2007, p. 3).

Com aproveitamento destas características a Matemática oportuniza uma aprendizagem formadora, sólida e marcante no Ensino Médio. Nesta fase, o professor de Matemática pode contar com estudantes num desenvolvimento mental consideravelmente avançado, com alguma aprendizagem, ainda que mecanicamente, dos procedimentos elementares de operações com números e letras e também um domínio básico de noções conceituais dos conhecimentos na área da Geometria.

Ainda segundo LIMA (2007, p. 197), é bastante "desejável, e certamente possível, fazer com que, ao final dos seus três anos, o aluno egresso da Escola Media tenha adquirido, mesmo que seja mediante o estudo de temas elementares, uma ideia bastante clara do que é a Matemática". Isso significa que após toda a prática metodológica desenvolvida nesta etapa do ensino básico, o estudante consiga entender que a Matemática tem suas práticas próprios, tem "seu alcance, sua utilidade, sua relevância social e sua beleza". Nessa tarefa, é preciso dar ao aluno a noção do que seja o método matemático, pois assim, terá condições desenvolver habilidades que o façam aplicar o conhecimento adquirido em situações da vida cotidiana. Na busca de êxito das atividades de ensino e de aprendizagem da Matemática deve-se tomar como base as três componentes fundamentais, Conceituação, Manipulação e Aplicações.

> Cada tópico apresentado na sala de aula, cada novo assunto tratado no curso, cada novo tema estudado deve ser visto sob esses três aspectos: o conceitual, o manipulativo e o aplicativo. O professor deve submeter-se ao desafio de completar esse tripé a cada nova etapa do seu trabalho. Nem sempre vai ser fácil; por isso é um desafio. Às vezes até parece impossível: não há muitas fontes bibliográficas nas quais se apoiar. No começo, não se vai sempre poder apresentar cada assunto sob essa tríplice abordagem. Mas anote a dificuldade e busque, com diligência e determinação, superá-la mais tarde. Pesquise, indague, olhe em torno de si, procure exemplos, exerça sua autocrítica. No decorrer do processo terá muitas alegrias. Cada êxito é um nutriente para a auto-estima; cada lacuna é uma motivação para o estudo e pesquisas adicionais (LIMA, 2007, p. 197; 198).

Tendo em vista tudo isso é muito importante que o professor consiga dar impulso à uma postura crítica inserida nas aulas de Matemática no nível do Ensino Médio, fazendo com que este trabalho possa permitir maior qualidade do ensino desta matéria. Neste objetivo, a organização do ensino de Matemática de modo a propiciar um satisfatório equilíbrio entre as três componentes fundamentais, será um passo avantajado rumo ao sucesso na sua incumbência de fornecer ao aluno, conhecimentos de Matemática que os façam chegar a conclusões e obter respostas para problemas reais e que lhes ponham em condições de suprir às exigências da sociedade moderna.

3.4.1 A importância da Conceituação

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, o aluno nesta etapa de da educação básica deve ser capaz de "compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral". Adicionando ainda a estas posturas a capacidade de "expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática"(BRASIL, 2000, p. 42).

Nessa perspectiva, a Conceituação por ser uma componente que contém em sua natureza, vários aspectos, ela desenvolve um papel de valor inestimável no ensino da Matemática, principalmente por que, segundo Lima (2007, p. 158), "as demonstrações pertencem à componente Conceituação". Nessa importante componente inclui-se a necessidade de compreender que as definições exprimem a ideia de nomear conceitos, uma situação ou uma condição, saber que nessa tarefa, muitas vezes usa-se uma palavra ou algumas palavras para substituir uma frase, tornando o discurso matemático o mais claro possível, valorizando os pontos essenciais e dando maior precisão nas afirmações, argumentações e raciocínios.

> Com as definições nascem as terminologias apropriadas para ser usadas ao desenvolver uma teoria matemática. Definições são importantes, pois evitam longas e desnecessárias repetições e, juntamente com as notações, são mais um aliado na ajuda com a economia da linguagem. Saber definir e manipular corretamente as definições é uma habilidade essencial para quem estuda matemática (FILHO, 2013, p. 134).

Ainda segundo o mesmo autor, independentemente de qual seja a ocasião, é necessário "conhecer os objetos com os quais trabalhamos e, para conhecê-los, é preciso saber precisamente as propriedades que os definem".

Na conceituação deve-se aplicar, numa proporção adequada, o raciocínio dedutivo, indicando com precisão a diferença daquilo que se concebe como verdade, denominado de hipótese, do que se quer mostrar, denominado de tese, uma prática constante na arte de construir Demonstrações Matemáticas. No mesmo ensejo, deve-se distinguir com clareza uma proposição de sua recíproca, realçando que toda conclusão, necessariamente, aparece como consequência de uma asserção, ou seja, dos fatos iniciais a partir dos quais se inicia um raciocínio, um estudo.

Outro fator a ser considerado na componente em questão, a Conceituação, por ser de utilização proveitosa é o fato de certas noções e proposições matemáticas serem definidas por diferentes termos e, assim, se apresentarem com redações reformuladas de maneiras distintas, porém com a mesma ideia conceitual. Em harmonia a esse entendimento, Filho (2013) escreve que:

> [...] se um objeto matemático é a união de três segmentos de retas que ligam três pontos não colineares e que os tem como extremos, esse objeto é um triângulo; e reciprocamente, se chamarmos um objeto de triângulo, ele necessariamente tem de ser a união de três segmentos de retas que ligam três pontos não colineares e os têm como extremos (FILHO, 2013, p. 135).

Com o mesmo ponto de vista do exposto acima e manifestação favorável através da escrita, Lima (2007, p. 202) diz que ao admitir como verdadeiras "ideias e proposições análogas, porém apresentadas sob aspectos e terminologias aparentemente diversas conduz a uma importante prática de estabelecer conexões entre os vários temas da Matemática". Essa característica da Conceituação promove um efeito específico desta disciplina, fazendo a ligação entre suas diferentes partes tender a ficar mais robustas, isto é, tornando cada vez mais forte a sua "unidade e coesão".

Outro ponto relacionado à Conceituação e já mencionado anteriormente, foi que no fim da década de 1950 e início de 1960, surgiu a chamada Matemática Moderna, um movimento internacional que visava uma grande e radical mudança do ensino de Matemática. Esse movimento tinha a intenção de avizinhar a Matemática desenvolvida na escola básica com aquela produzida pelos pesquisadores da área. Já se sabe também que esse movimento influenciou o ensino de Matemática no Brasil, principalmente na década de 70, mas o quanto e como influenciou é o que deve ser absorvido e posto sob reflexão com objetivo de reduzir erros e aumentar os acertos em ações educacionais presentes e futuras.

Para Lima (2007), esse movimento foi uma espécie de moda, e isso incentivado pela vontade de ajustar "o ensino da Matemática aos padrões utilizados pelos matemáticos do século 20 (ou pelo menos por um grande número deles), foi proposta uma reformulação radical dos currículos com a ênfase nos métodos abstratos gerais". Sobre os impactos dessa onda em nosso ensino, o autor afirma ainda que "as consequências desse movimento em nosso país foram desastrosas"pois temos o tradicional mau hábito de copiar tendências de outros países e, muitas vezes, reproduzir o que parece ser uma solução. Assim não se considerou que apenas uma fração "das práticas propostas eram realmente aconselháveis"e sua implantação no Brasil acabou não correspondendo às expectativas.

> Por outro lado, é errado pensar que tudo que veio com a onda da Matemática moderna deve ser posto de lado. Algumas de suas coisas boas foram: o uso da linguagem de conjuntos, que facilita, da precisão e assegura a generalidade à expressão das ideias matemáticas (desde que usada com moderação) e a ênfase na conceituação adequada dos objetos matemáticos. Paradoxalmente, a conceituação precisa é indispensável nas aplicações: numa situação concreta em que se estuda um fenômeno este nunca vem acompanhado de uma fórmula matemática (LIMA, 2007, p. 167).

Percebe-se, nas ideias expostas pelo autor, que a Conceituação, uma das componentes do ensino da Matemática, foi um ponto positivo nesse movimento da Matemática Moderna. Nesse sentido, vale ressaltar que o presente trabalho procura mostrar a importância das Demonstrações como possibilidade de melhoras na aprendizagem desta matéria e, ainda segundo o mesmo autor estas estão inseridas na componente Conceituação, e consequentemente, "elas devem ser apresentadas por serem parte essencial da natureza da Matemática e por seu valor educativo", promovendo a validade de proposições e teoremas por meio do raciocínio dedutivo através da prática de Demonstrações Matemáticas.

Com a significação que se expôs em relação a esta conceituada área do conhecimento humano, é necessário um enfoque específico sobre a sua importância na etapa do Ensino Médio, e assim a Conceituação juntamente com as outras componentes e o conhecimento matemático, também representem um conjunto de ferramentas importantes e que forneçam contribuições para o ensino e aprendizagem. Conceituar é necessário para que possamos entender com o que estamos tratando, sabermos selecionar quais elementos podemos usar em uma situação onde queremos demonstrar a veracidade de alguma propriedade em Matemática.

3.4.2 Necessidade de Manipulação

No processo de ensino e de aprendizagem da Matemática durante a etapa da educação básica que correspondente ao Ensino Médio, em um número considerável de vezes é necessário colocar em prática procedimentos onde a partir de elementos inclusos na Conceituação, através de um processo de técnicas com manuseio de fórmulas já modeladas e uso de algoritmos adequados, pratica-se o saber fazer em Matemática com objetivos de obtenção de resultados de aprendizagem significativas.

Para Guimarães (2010, p. 63), em relação à linguagem característica que tem a Matemática, afirma que tal linguagem "é formada por um sistema de signos relacionados com o conjunto de regras de manipulação desses signos. O conhecimento adquirido nas escolas, por intermédio principalmente dos professores e dos livros didáticos, é o que permitirá aprendizagem dessa linguagem", consequentemente o resultado dessa ação de lidar com esse conjunto de recursos disponíveis é o que promove a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos no objeto em estudo.

"Durante séculos, e ainda hoje, a manipulação quase se monopolizou no ensino da Matemática. A tal ponto que, para a maioria das pessoas (e até mesmo de professores e autores de livros didáticos) a Matemática é essencialmente manipulação"(LIMA, 2007, p. 204). É verdade que já se vivenciou uma tentativa de desmanchar essa cultura no ensino, isso aconteceu por volta dos anos 60 num movimento já citado antes e que teve algumas influências no Ensino Médio nas escolas brasileiras.

Quando eventualmente ou processualmente, surgem propostas inovadoras com extrema modificação de metodologias vigente na educação básica e mais especificamente no Ensino Médio, em qualquer área e, é claro, na Matemática, deve-se lançar nessas práticas um olhar analítico e dotado de criticidade e conseguir reduzir resultados insatisfatórios, como por exemplo, os que se mostraram com a Matemática Moderna. Nesse período quase que se aboliu por total o manuseio dos cálculos numa supervalorização da Conceituação. Contudo, percebe-se que não é tarefa tão fácil estimar ou avaliar o valor que tem a Manipulação no desenvolvimento da fixação dos conceitos e teorias da Matemática e, mais uma vez se evidencia a importância de equilibrar o emprego das componentes fundamentais para o sucesso do ensino e aprendizagem do conhecimento matemático.

De acordo com Lima, (2007), atualmente o ensino proporciona uma situação um pouco mais tranquila, prevalecendo uma posição mais cautelosa quanto ao quase abandono do manuseio dos cálculos. Segundo o autor a manipulação pode ser proporcionalizada para o ensino como a prática de treinamento está para certos esportes. Ele afirma, ainda, acerca da manipulação, que:

> A influência no manuseio de equações, fórmulas e operações com símbolos e números, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas diante de cálculos algébricos ou construções geométricas, a criação de uma série de reflexões condicionadas sadios em Matemática, os quais são adquiridos através da prática continuada de exercícios manipulativos bem escolhidos, permite que o aluno (mais tarde, usuário da Matemática) concentre sua atenção consciente nos pontos realmente essenciais, salvando seu tempo e sua energia de serem desperdiçados com detalhes secundários (LIMA, 2007, p.204).

O conhecimento que circunvala a Matemática inclui armazenamento de informações, além disso, incorpora em sua construção um alto número de operações e procedimentos de rotina a serem empregados com atenção, precisão e ordem. Desprendendo-se do extremo exagero das práticas manipulativas em detrimento de outros ingredientes do processo de ensino em prol de boa desenvoltura sistemática dessas operações, com o efetivo manuseio de propriedades e definições matemáticas, já é possível afirmar que se tem uma demonstração do forte enlaçamento das duas componentes fundamentais do ensino da Matemática, a Conceituação e Manipulação. Desta forma, através da combinação desses ingredientes tem-se um passo inicial para um qualitativo desenvolvimento da aprendizagem dos conhecimentos inerentes a Matemática na etapa mediana da educação básica.

3.4.3 Aplicações e contextualização

A educação escolar a nível de Ensino Médio abrange dentre os seus objetivos o propósito de criar condições para que o aluno amplie suas potencialidades relacionadas à cognição. Seguindo esse mérito e rumando para o ensino da Matemática espera-se que o estudante desta etapa do ensino aprenda os elementos necessários para a compreensão dos conceitos, que seja capaz de usar as ferramentas matemáticas disponíveis dentro do próprio processo de ensino e ainda em outras diversas situações, fazendo uso do conhecimento para manipulação da realidade. Desta forma ele pode tornar-se socialmente crítico, participativo das relações e transformações sociais, dos acontecimentos da vida política, da cultura e de modo geral da vida em sociedade.

De acordo com as definições propostos por Lima (2007, p. 162), a Matemática "é como uma arte, onde o enlace das proposições, as conexões entre as diversas teorias, a elegância e a limpidez de seus raciocínios", entre outras características, como por exemplo, a desenvoltura das palavras em suas definições, são uma cordialidade ao nosso entendimento do que é belo. Nessa mesma linhagem a Matemática "é uma linguagem precisa e geral, tão bem sucedida que o fato de poder exprimir princípios científicos por meio dela é uma prova do estado avançado dessa ciência". Sendo assim, é de fundamental importância que os professores além de terem uma boa noção do significado desta disciplina que eles lecionam, consigam ainda, repassar para os seus alunos a importância do seu aprendizado, pois:

> Ela é também um eficaz instrumento, às vezes simples em suas aplicações cotidianas, às vezes sutil e complexo quando empregado na solução de problemas tecnológicos ou na formulação de teorias científicas, pois dispõe de um inesgotável repertório de modelos abstratos que podem ser usados nas mais diversas situações concretas (LIMA, 2007, p. 162; 163).

Dessa forma, o professor que propiciar ao seu aluno um bom entendimento do é o aprendizado da Matemática fará com que ele possa tornar-se socialmente crítico, participativo das relações e transformações sociais, dos acontecimentos da vida política, da cultura e de modo geral da vida em sociedade.

Seguindo em análise no sentido das Aplicações dos conhecimentos em Matemática, encontra-se documentos oficiais que oferecem um conjunto de ações como caminhos a serem seguidos na educação básica no Brasil como por exemplo, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB/96), dentre outros, que evidenciam de forma bastante persistente em suas orientações para o Ensino Médio, a contextualização do ensino da Matemática. Em Brasil (2000), sobre estas propostas para práticas nesse nível de ensino, lê-se:

> No sentido desses referenciais, este documento procura apresentar, na seção sobre O Sentido do aprendizado na área, uma proposta para o Ensino Médio que, sem ser profissionalizante, efetivamente propicie um aprendizado útil à vida e ao trabalho, no qual as informações, o conhecimento, as competências, as habilidades e os valores desenvolvidos sejam instrumentos reais de percepção, satisfação, interpretação, julgamento, atuação, desenvolvimento pessoal ou de aprendizado permanente, evitando tópicos cujos sentidos só possam ser compreendidos em outra etapa de escolaridade. A recomendação de contextualização serve, dessa forma, a esses mesmos propósitos (BRASIL, 2000, p. 4).

Com essa maneira de enxergar as finalidades do Ensino Médio, é notório que as intenções nessa fase da educação básica, na área da Matemática é de dar um sentido prático ao que se aprende na escola. O estudante envolvido nesse contexto necessita de desenvolver um conjunto de atitudes que usam o conhecimento com valor de utilidade na vida cotidiana, também é de grande valia tornar-se proprietário de saberes abstratos com capacidades culturais abrangentes, dotadas de possibilidades de transformação da realidade na vida em sociedade.

Porém, a contextualização do ensino da Matemática e todo o seu invólucro, esteve e ainda se faz presente em pautas educacionais, em muitas vezes, de forma exageradamente teórica ou até mesmo vaga de significado. Este fato chega a causar certa confusão no tocante ao real significado desta expressão em si, da sua aplicabilidade e do quanto professores estão ou não preparados para o seu desenvolvimento em sala de aulas no Ensino Médio, adicionado a tudo isso tem-se também a questão da necessidade de construção de material didático de qualidade e aceitação pela comunidade escolar.

"Nos últimos 30 anos, implementou-se no Brasil a política da supervalorização de métodos pedagógicos em detrimento do conteúdo matemático na formação dos professores"Druck (2003, p. 2). Tudo isso pode estar ligado a questão de buscar de modo exagerado fugir do chamado ensino tradicional, onde a Matemática se torna excessivamente mecânica através de metodologia de ensino que não privilegia o pensar matemático, daí a superestimação de técnicas que fazem com que professores fiquem presos a métodos pedagógicos, incluindo nesse pacote, segundo a autora, uma interpretação equivocada dos Parâmetros Curriculares Nacionais, "como se a matemática só pudesse ser tratada no âmbito de situações concretas do dia-a-dia, reduzindo-a a uma sequência desconexa de exemplos o mais das vezes inadequados".

> Além disso, eles se deparam com a exigência da moda: a contextualização. Se muitos de nossos professores não possuem o conhecimento matemático necessário para discernir o que existe de matemática interessante em determinadas situações concretas, aqueles que lhes cobram a contextualização possuem menos ainda. Forma-se, então, o pano de fundo propício ao surgimento de inacreditáveis tentativas didático-pedagógicas de construir modelos matemáticos para o que não pode ser assim modelado (DRUCK, 2003).

Em compatibilidade com a visão de Druck (2003), sobre a interpretação errônea dos parâmetros que orientam o ensino da Matemática a nível nacional, onde por muitas vezes se entendeu que contextualizar se concentrava radicalmente em aplicar os conceitos aprendidos em situações cotidianas da vida real, encontra-se nas palavras de Agostinho (2014, p. 14), que tal pensamento tem certa relevância, "porém não é a única e nem sempre a mais importante na contextualização como um todo porque contextualizar carrega uma polissemia de sentidos principalmente os que estão atrelados à forma de ensinar".

Quando se faz tentativas de solucionar problemas de aprendizagem através de grandes mudanças em relação aos procedimentos usuais ou tradicionais, e estes não correspondem aos objetivos traçados ou pelo menos a maioria deles, ainda sim, é possível visualizar ensinamentos importantes relacionadas a esses fatos. Estabelecendo um paralelo entre a Contextualização no ensino da Matemática no Brasil segundo as palavras de Druck e o movimento da Matemática Moderna nas palavras de Lima, é conveniente e salutar apresentar algumas das aprendizagens já deixadas por estas, ou em processo de construção, sejam elas moldadas por resultados positivos ou negativos. No caso da Matemática Moderna e as lições ocasionadas, uma delas foi a percepção de que:

> [...] a matemática é muito mais do que um encadeamento lógico de proposições referentes a conceitos abstratos, a partir das quais se pode chegar a conclusões de rara beleza e vasto alcance. Não apenas por isso que ela é universalmente ensinada. Nem tão pouco é verdade que a aprendizagem se faz sob a forma de silogismo, do geral para o particular. O lado prático, algorítmico e utilitário de certos tópicos da Matemática elementar não pode ser menosprezado (LIMA, 2007, p. 167).

Ainda sobre os instrumentos educacionais que norteiam o ensino no Brasil, também se encontram outras relevantes orientações a respeito do ensino da Matemática nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio. No referido documento, esta disciplina é parte integrante na composição da área das Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias. Ainda segundo o documento, a Matemática é parte muito importante do conhecimento, pois seu ensino e aprendizagem é de grande relevância para a vida do ser humano e das relações constantes da vida em sociedade, tendo em vista que:

> A Matemática, por sua universalidade de quantificação e expressão, como linguagem portanto, ocupa uma posição singular. No Ensino Médio, quando nas ciências torna-se essencial uma construção abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes. Mas não é só nesse sentido que a Matemática é fundamental. Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver. A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações. As formas de pensar dessa ciência possibilitam ir além da descrição da realidade e da elaboração de modelos (BRASIL, 2000, p. 9).

Nessa mesma conjuntura e objetivando mais abordagens de dados a respeito desse incremento aos conhecimentos matemáticos, é importante destacar o trato das componentes fundamentais do ensino da Matemática segundo as ideias de Lima (2007). Nesse contexto, a componente Aplicações, termo usado pelo autor mencionado como equivalente ao que se usa hoje em dia como contextualização. Na Revista do Professor de Matemática (RPM), nº 58, em relato sobre uma conversa a respeito de Contextualização e a preocupação exagerada em estabelecer um contexto para os conceitos matemáticos, lê-se:

> [...] Mas você estava falando sobre contextualização. ? É verdade, Contextualização está na ordem do dia. De minha parte, concordo plenamente com a preocupação em utilizar o conhecimento matemático que se adquire na escola para interpretar melhor os fatos e as experiências da vida. Mas, segundo você corretamente apregoa, a estrutura da Matemática que se ensina deve ser montada em três pilares: conceituação, manipulação e aplicação. Contextualização é aplicação. Você só pode aplicar um instrumento matemático quando o entende (conceituação) e sabe operar com ele (manipulação). O papel da conceituação é fundamental, pois sem ela você não saberia qual instrumento matemático iria usar para resolver o seu problema (LIMA, 2005, p.28).

Percebe-se nas palavras do autor que além da importância da Conceituação, componente que engloba as Demonstrações Matemáticas (elemento central desta pesquisa bibliográfica), há um forte destaque de um termo muito presente na educação brasileira nos últimos anos, a contextualização. Outro fator expressivo na citação acima é que os termos contextualização e aplicação são equivalentes, portanto sempre que mencionado a componente Aplicações, esta será referenciada também como contextualização do ensino.

No manejo dos conhecimentos matemáticos a serem trabalhados em sala de aula com a finalidade de aprendizagem, deve sim ter ênfase no conceito, nas suas propriedades, nas interpretações geométricas, quando for o caso e, nas Aplicações. Com essa configuração, torna-se possível uma abertura de espaço para a valorizar da Conceituação, caracterizada pelas boas notações, pelas definições e articulações de conceitos e, é claro, as Manipulações algébricas dentro de uma linguagem formal adequada ao nível de escolaridade do aluno de ensino Médio.

No final das contas a grande aprendizagem que fica de tudo isso é que a melhor saída é promover um ensino que seja balanceado, que no uso de metodologias e técnicas, seja possível retirar de todas as manifestações propostas para o ensino e aprendizagem a ideia de proporcionalizar o emprego das componentes fundamentais no sentido de garantir um bom ensino e uma aprendizagem sólida na Matemática

> A solução é desenvolver um ensino equilibrado, isolar nessas tendências três componentes básicos cuja equilíbrio determina o êxito do bom ensino da matemática: conceituação, manipulação e aplicação, uma espécie de tripé que sustenta o ensino da matemática. Sem um deles, a coisa desaba, não se equilibra. O mais interessante é que para as aplicações, para o que denominam hoje em dia de contextualização, a conceitualização é mais importante do que a manipulação, já que, para se poder aplicar Matemática, tem de se ter a teoria subjacente; quando se quer modelar um fenômeno matematicamente, tem que se conhecer as propriedades características da função que vai usar (LIMA, 2007, p. 233)

Com esta abordagem conclui-se que a Conceituação é uma personagem fundamental no processo de ensino e aprendizagem fortalecido através das Aplicações. Ela pode fornecer propriedades válidas, definições bem elaboradas e, ajudar a construir conceitos capazes de conduzir o estudante rumo ao conhecimento de ferramentas matemáticas adequadas a uma determinada situação.

Com todo esse conjunto de elementos fornecidos pela Conceituação e através da Manipulação destes, juntamente com os símbolos e algoritmos, dentro de uma linguagem pertinente a Matemática, o estudante do ensino Médio tem plenas condições de realizar

Demonstrações para validar resultados matemáticos que, consequentemente, serão aplicados para solucionar problemas, configurando de forma evidente a Aplicação do conhecimento matemático e mostrando a bela relação entre as três componentes do ensino da Matemática, Conceituação, Manipulação e Aplicações.

Capítulo 4

Demonstrações

No capítulo anterior foi bastante mencionada a questão das componentes do ensino da Matemática e o quanto elas podem contribuir no seu ensino e aprendizagem, principalmente para os estudantes a nível de Ensino Médio. Notou-se que, das três componentes em questão, a Conceituação compreende vários aspectos a serem observados acerca da Matemática, pois sendo que a mesma contempla as demonstrações. Sendo assim, ela envolve elaboração correta de definições matemáticas e também se propõe a empregar de forma bem dosada "raciocínio dedutivo, deixando clara a distinção entre o que supõe (hipótese) e o que se quer provar (tese), diferenciando uma proposição de sua recíproca e enfatizando que toda a conclusão necessariamente advém de uma premissa"(LIMA, 2007, p. 201).

Este capítulo, dentre muitos objetivos, tem a incumbência de mostrar o grande valor que têm as demonstrações na validação de resultados matemáticos, contribuindo de modo significativo para o ensino e a aprendizagem da Matemática e que a sua aplicação no Ensino Médio tende a melhorar a assimilação de conceitos pelos alunos dessa modalidade do ensino básico, pois demonstrar é ação eficaz para estabelecer uma certeza. "Em Matemática, a validação de ideias deriva da busca de certeza"(Brasil, 2017, p. 520). Em confirmação a esse respeito, Filho (2013), afirma que "demonstrar é um ato de persuasão, de convencimento, baseado em argumentações lógico-dedutivas, por isso é tão importante". O mesmo autor afirma ainda que,

> Muitas vezes esse convencimento é para você mesmo, mas, na grande maioria das vezes, a demonstração é para convencer outra pessoa da validade do fato. As demonstrações são como rituais indispensáveis, usados para provar resultados matemáticos, o que garante a validade deles, mesmo os que a princípio possamos não acreditar, nem aceitar ou não sermos capazes de dar opinião decisiva sobre eles (FILHO, 2013, P. 195).

Quando se diz que as demonstrações podem contribuir e muito para que o aluno do Ensino Médio tenha melhores rendimentos no desempenho com o conhecimento matemático e que ainda pode ajudar em uma postura mais autônoma frente às necessidades de tomada de decisões, significa dizer também, que tais demonstrações devem estar de acordo com a sua maturidade de entendimento.

> É inegável que submeter principiantes a áridas demonstrações sobre temas excessivamente abstratos, utilizando não raro uma linguagem peculiar e pedante, como se fazia no passado, certamente produz efeitos traumáticos. Muitas pessoas detestam a Matemática, julgam-se incapazes de aprendê-la e afastam-se dela exatamente devido a isso. Mas parece-me também um grave erro perder-se qualquer oportunidade que surja de ensinar os jovens a deduzir por meio de raciocínio lógico algumas fórmulas importantes e simples, [...] cujas provas dependem apenas de alguns teoremas facilmente demonstráveis (GARBI, 2010, p. 10).

Ainda sobre a mesma questão, Garbi (2010, p. 10), diz que, no Brasil, "o ensino de Matemática aos adolescentes simplesmente passou de um extremo a outro: antigamente demonstrava-se demais; hoje demonstra-se de menos", deixando assim, escapar a oportunidade de promover aos jovens a possibilidade de pensar de maneira própria, lógico-dedutiva e consequentemente aumentar o conhecimento científico e interagir melhor com o mundo que o cerca.

A importância de demonstrar com o intuito de validação para resultados, encontra em Brasil (2017) um ponto de apoio nesse sentido, reforçando ainda mais a ideia da temática, pois:

> Essa importância também decorre do fato de que é necessário que os estudantes adquiram uma compreensão viva do que é a Matemática, incluindo a sua relevância. Para tanto, é indispensável que os estudantes experimentem e interiorizem o caráter distintivo da Matemática como ciência, ou seja, a natureza do raciocínio hipotético-dedutivo, em contraposição ao raciocínio hipotético-indutivo, característica preponderante de outras ciências. Assim, a construção de uma argumentação, incluindo o desenvolvimento de algumas demonstrações matemáticas, proposta por esta Base, é uma importante contribuição para a representatividade da Matemática como área do conhecimento (BRASIL, 2017, p. 532)

Isto posto, vale ressaltar também, que o desenvolvimento da habilidade de demonstrar e o manuseio com o processo dedutivo caracteriza a matemáticas como uma grande atividade humana, em que está presente acertos e erros, em que se vivencia a ação de procurar descobrir ou confirmar verdades, questionamentos, conjecturar e investigar, procurar contraexemplos, de não aceitar tudo a qualquer aparência inicial e, ainda, de aplicar uma linguagem própria para comunicar e caracterizar o conhecimento matemático.

Além de contemplar sobre a importância das Demonstrações matemáticas, outro objetivo deste capítulo, conforme será visto nas próximas seções é apresentar de forma bastante compreensível uma definição formal do que vem a ser uma demonstração em Matemática. Reservar-se-á também, espaço para colocar à mostra definições de elementos que são fundamentais para construir uma demonstração, tais como proposição, axioma, hipótese, tese, teorema, além de outros componentes que compõem o processo dedutivo.

4.1 Proposições e Axiomas

No capítulo 3 deste trabalho, na seção "A importância da Conceituação", já foi mostrado o quanto é importante o papel que as definições assumem para o ensino e aprendizagem dos conhecimentos matemáticos. Naturalmente, no desenvolvimento de atividades das quais se propõe o presente trabalho, é necessário que se conheça os objetos envolvidos no manuseio com as demonstrações e, para se ter um bom conhecimento sobre estes é fundamental que se conheça as propriedades que os definem, desta forma se possibilita maior chances do bom desenvolvimento da habilidade de demonstrar resultados em Matemática.

"As definições matemáticas consistem em atribuir nomes a objetos que gozam de certas propriedades particularmente interessantes"(LIMA, 2012, p. 8). Outra fundamental noção do que vem a ser as definições é encontrada em Filho (2013, p. 134), quando afirma que "definir é dar nomes a objetos matemáticos, mediante determinadas propriedades interessantes que possuam e que os caracterizem", e assim, em contextos formais, as definições também são protagonistas no processo de aplicação do método dedutivo.

Desse modo, visualiza-se que a Matemática tem uma linguagem desprovida de ambiguidades ou frases de efeito, pois sempre põe em primeiro lugar a exatidão dos seus resultados de maneira muito eficaz. De acordo com Filho (2013, p. 28), através de um exemplo por mais básico que seja, é o suficiente para tomar percepção de que "na Matemática as mensagens devem ser expressas com linguagem e os cuidados específicos, muitas vezes, diferentes daqueles que estamos acostumados a usar e a interpretar na linguagem coloquial". O autor publica também que denominamos por "***frase*** a um conjunto de palavras ou de símbolos matemáticos, incluídos os sinais de acentuação e pontuação, que se relacionam para comunicar uma ideia". A esse grupo de palavras atribui-se o valor de um pré-requisito para definir uma proposição, pois encontra-se na literatura do mesmo autor que:

> Uma ***sentença*** ou ***proposição*** é uma frase, expressa em linguagem matemática, podendo conter apenas símbolos matemáticos, que cumprem as condições:
>
> (1) Apresenta-se estruturada como oração, com sujeito e predicado, incluindo o verbo.
>
> (2) É afirmativa declarativa (não é interrogativa, nem exclamativa).
>
> (3) Satisfaz os seguintes princípios:
>
> (3.1) ***Princípio do Terceiro Excluído:*** uma sentença é falsa ou é verdadeira, excluindo-se uma terceira alternativa.
>
> (3.2) ***Princípio da não-contradição:*** uma sentença não pode ser falsa e verdadeira ao mesmo tempo, não podendo contradizer-se (FILHO, 2013, p. 28; 29).

Todas estas características levam a considerar que uma proposição é uma afirmação realizada com segurança cujo conteúdo é devotamente aceito, sendo que seu significado tem interpretação única e mostra a precisão das ideias matemáticas. Em compartilhamento da mesma ideia sobre o ente em questão, Oliveira e Fernández (2012, p. 2), definem uma proposição como sendo uma “frase afirmativa em forma de oração, com sujeito, verbo e predicado, que ou é falsa ou é verdadeira, sem dar lugar a uma terceira alternativa”.

É importante frisar que as proposições podem se apresentar como condicionais ou implicativas. Nesse caso, elas são proposições formada a partir de duas outras proposições, as quais pode ter as notações P e Q, por exemplo. Assim, uma proposição condicional é uma sentença composta do tipo

$$\text{“Se } P, \text{ então } Q\text{”}.$$

De modo análogo, uma proposição implicativa é uma sentença composta do tipo

$$\text{“}P \text{ implica } Q\text{”}.$$

No caso desta última, por questão de simplificação de linguagem, pose-se usar apenas a notação $P \Rightarrow Q$, em vez de escrever a proposição P implica a proposição Q. Em verdade, a sentença $P \Rightarrow Q$ “é apenas outra maneira de escrever uma sentença condicional *Se P então Q*. [...] sentenças implicativas e condicionais representam a mesma ideia, só que escritas de formas diferentes”(FILHO, 2013, p. 75).

Nas proposições condicionais e implicativas formadas a partir das proposições P e Q, a proposição P é chamada de hipótese e a proposição Q de tese. “A hipótese também é chamada de *proposição antecedente* e a tese, de *proposição consequente*”(OLIVEIRA e FERNÁNDEZ, 2012, p. 3).

Definição 4.1. *Um número natural n é divisível por 3, se existe um natural k tal que n = 3k.*

Denominando com P a propriedade de um número natural n ser divisível por 3 e designando por Q a propriedade de a soma dos algarismos de n ser um número divisível por 3, então pode-se escrever que “Se P, então Q”, obtendo, assim, a forma positiva de uma proposição condicional, ou mesma a forma positiva de uma proposição implicativa do tipo $P \Rightarrow Q$, como a seguir:

Proposição 4.2. *Se o número natural n for divisível por 3, então a soma dos algarismos de n é divisível por 3.*

Agora, trocando-se a hipótese pela tese, na forma positiva de uma proposição condicional ou implicativa, como por exemplo, na proposição 4.2, obtém-se a chamada forma recíproca de uma proposição, assim, pode ser escrita como Se Q, então P ou ainda $Q \Rightarrow P$, exemplificada pela proposição 4.3 a seguir:

Proposição 4.3. *Se a soma dos algarismos de um número natural n for divisível por 3, então o número natural n é divisível por 3.*

Já para obtenção da forma contrapositiva de uma proposição condicional ou implicativa, e tomando ainda a proposição 4.2 como exemplo, procede-se como a seguir: inicialmente toma-se sua forma recíproca, conforme a proposição 4.3, em seguida nega-se as sentenças antecedente e consequente da forma recíproca, o que é equivalente a negar a sentença antecedente e consequente da forma positiva e é claro, fazer a forma recíproca desta última. Em qualquer das situações escolhidas, tem a contrapositiva conforme a seguir:

Proposição 4.4. *Se a soma dos algarismos de um número natural n não for divisível por 3, então o número natural n não é divisível por 3.*

Sabendo que a implicação $Q \Rightarrow P$ é chamada recíproca de $P \Rightarrow Q$, vale ressaltar que a recíproca de uma proposição verdadeira poder ser falsa. Esse fato é exemplificado pela proposição 4.6 na sequência, logo após a definições 4.5 a seguir:

Definição 4.5. *Um número natural n é par se existe um número natural k tal que $n = 2k$.*

Proposição 4.6. *Se a e b são dois números naturais pares, então seu produto ab é um número natural par.*

Para verificar a falsidade da recíproca da proposição 4.6, basta tomar, por exemplo, os naturais 4 e 5 cujo produto é 20. Daí teremos $20 \doteq 4 \times 5$, isto é, o produto ab sendo um número par, porém, o número a $\doteq 4$ é par e b $\doteq 5$ é ímpar.

Sabendo que uma sentença condicional do tipo Se P então Q, pode ser apontada como uma sentença implicativa do tipo $P \Rightarrow Q$, onde se lê P implica Q, e vice-versa, então mostrar-se-á, agora, outras maneiras de apresentar uma sentença implicativa do tipo P implica Q:

$$P \quad \text{é condição suficiente para} \quad Q$$
$$\text{ou}$$
$$Q \quad \text{é condição suficiente para} \quad Q$$

Um bom exemplo para ilustrar as duas últimas situações é a proposição já mencionada anteriormente referente a divisibilidade por 3.

Nesse caso, considera-se:

$$P: \qquad \text{Um número natural n é divisível por 3}$$
$$\text{e}$$
$$Q: \quad \text{a soma dos algarismos de n é divisível por 3}$$

Considerando verdadeira a implicação $P \Rightarrow Q$, e observando o que já se expôs, vem a seguir duas outras maneiras de enunciar a mesma proposição. Desta forma tem-se a seguinte representação:

Proposição 4.7. *Um número natural n ser divisível por 3 é condição suficiente para que a soma dos algarismos de n seja divisível por 3.*

Proposição 4.8. *A soma dos algarismos de um número natural n ser divisível por 3 é condição necessária para que o número natural n divisível ser por 3.*

Em qualquer das versões acima apenas está sendo mostrado a mesma proposição com duas opções diferentes de apresentação das mesmas.

> Para justificar essa terminologia, recordemos que uma sentença implicativa $P \Rightarrow Q$ ou condicional Se P então Q é válida, caso seja possível provar a sentença Q, todas as vezes que se considerarmos que P vale. Quando isso acontece, observe ser suficiente, ou seja, é bastante a sentença P valer, para que a sentença Q valha; ou ainda, é necessário a sentença Q valer, todas as vezes que a sentença P valer (FILHO, 2013, p. 84; 85).

A respeito dessa forma de apresentar as proposições condições ou implicativas, Lima (2012, p. 7), afirma caso sejam verdadeiras tanto a proposição $P \Rightarrow Q$ como a proposição

$Q \Rightarrow P$, pode-se escrever como $P \Leftrightarrow Q$ e lê-se "P se, e somente se, Q", "P é equivalente a Q"ou "P é necessária e suficiente para Q".

Dando sequência na temática central deste capítulo, que é fornecer uma notável ideia do que seja uma demonstração, pode-se então dizer que demonstrar é oferecer motivos que venham a garantir a veracidade da proposição demonstrada. Sendo assim, e levando em conta que toda conclusão, inevitavelmente, decorre de uma premissa, ou seja, do fato inicial a partir do qual se inicia um raciocínio ou um estudo, ou ainda onde começam os argumentos e raciocínios, surge então, justificadamente, uma dúvida sobre a verdade e validade das premissas estabelecidas para compor a argumentação. "Precisamos, portanto, demonstrar todas as premissas? Claramente, isto é impossível porque cada demonstração destas premissas terá novas premissas que precisariam ser encontradas, e assim por diante sem nunca chegaram ao fim"Fossa (2009, p. 47). Em relação ao surgimento de tais dúvidas quanto a validade das premissas, temos que:

> Ao enfrentar essas e outras perguntas pertinentemente levantadas nas primeiras tentativas de provar afirmações sobre Aritmética e a Geometria, os pioneiros da Matemática Dedutiva certamente concluíram que era necessário fazê-lo de **maneira ordenada**, ou seja, começando pelas mais simples e, sucessivamente, a partir delas, ir demonstrando as demais. Nessa sequência demonstrativa, resultados obtidos anteriormente serviriam de base para novas provas. Em outras palavras, **a Matemática Nativa Dedutiva deveria ser construída como um edifício.** Desse fato decorre, então, uma pergunta natural:**por onde começar**? (GARBI, 2010, p. 30).

Procurar elementos que sejam satisfatoriamente capazes de sanar dúvidas desse tipo é tarefa que ao longo dos tempos já foi motivo de inquietação de muitas pessoas que, de alguma forma se vincularam ao conhecimento matemático, seja como profissional da área, tais como pesquisadores, professores, ou mesmo um estudante dedicado, ou inda um leitor curioso e admirador da Matemática. Sendo assim, o aconselhável é "começar por objetos mais simples, que independam da definição de outros objetos. Esses objetos precisam ser evidentes por si mesmos, cujos conceitos se aceitem naturalmente, sem explicações"(FILHO, 2013, p. 152).

Muitas vezes é necessário partir de entes matemáticos que, segundo Garbi (2010, p. 33), "são indefiníveis: nossa mente os vislumbra independentemente de qualquer descrição por meio de palavras", e por conta disto são denominados por conceitos primitivos ou noções primitivas. Consequentemente, chamam-se por conceitos primitivos aqueles escolhidos como sendo os primeiros a serem adotados sem a necessidade de uma definição e que são usados através da imitação e da experiência acumulada anteriormente. Para Filho (2013, p. 153), os conceitos primitivos "não são escolhidos"de qualquer maneira, onde se possa fazer até de forma isolada, na verdade são oriundos de trabalho e da experiência, de construções ao longo do tempo e de um certo "consenso coletivo".

Com o intuito de apresentar uma situação com capacidade de caracterizar as últimas temáticas e que possa contribuir com a obtenção de um melhor entendimento a esse respeito, pode-se tomar algumas proposições onde, dependendo da técnica de demonstração empregada para comprovar os seus resultados, tem-se uma certa relação de dependências entre as argumentações envolvidas. Filho (2013, p. 153), afirma que para se demonstrar um determinado teorema, proposições que serão definidas na próxima seção deste capítulo, "muitas vezes precisamos usar outros teoremas, os quais, por sua vez, também devem ser provados, e assim por diante". Nesse sentido, as proposições a seguir, juntamente com as inter-relações que as envolvem, conforme a sequência, ilustram o que foi dito.

Proposição 4.9. *Se r e s são retas cortadas por uma transversal t, de modo que um par de ângulos alternos internos (respectivamente correspondentes) são congruentes, então as retas r e s, são paralelas.*

Para apresentar uma demonstração que garanta a veracidade desta proposição, por exemplo, pode-se fazer uso de uma outra proposição, que vem logo a seguir.

Proposição 4.10. *Em qualquer triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos que não lhe são adjacentes.*

De maneira semelhante ao caso anterior, onde se usa uma outra proposição já aceita como verdadeira para realização da demonstração, ao realizar os procedimentos para provar a verdade da proposição 4.10, pode-se, por exemplo, usar a seguinte proposição.

Proposição 4.11. *A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer vale 180.*

Continuando na mesma linha de discurso, esta última, também pode ser demonstrada usando o fato de que seja válida a proposição que vem na sequência.

Proposição 4.12. *Se r e s são retas paralelas e t é uma reta transversal a r e s, então os ângulos alternos internos (respectivamente correspondentes) formados por essas retas são congruentes.*

Percebe-se, pelo exposto, que na demonstração da proposição 4.9 pode-se recorrer à proposição 4.10. Para demonstrar a proposição 4.10 faz-se o uso da proposição 4.11 que em sua demonstração pode-se recorrer à proposição 4.12, e assim sucessivamente.

Desta maneira torna-se evidente a necessidade de um ponto de partida para dar início ao processo dedutivo. Por conseguinte, esse ponto de largada são as premissas, aceitas como válidas mesmo na ausência de uma demonstração para elas, isto é, os Axiomas ou Postulado (tratados neste trabalho como termos sinônimos). Para Filho (2013, p. 154), estas "afirmações, com características de teoremas, são escolhidas para ser as primeiras, a partir das quais seja possível deduzir os demais resultados. Tais afirmações devem ser evidentes por si mesmas e não depender de outras afirmações". Segundo Fossa (2009, p. 47), os axiomas são "os princípios fundamentais de uma teoria matemática: são as últimas razões, das quais todo o resto depende". Portanto, pode-se definir um Axioma ou Postulado como sendo uma proposição que deve ser aceita como verdadeira sem uma demonstração, a partir das quasi se deduz todas as outras.

> O processo de provar em Matemática seria uma tarefa impossível de marchar para trás indefinidamente, a não ser que se estabelecesse um ponto de partida. Esse ponto inicial deve conter um certo número de afirmações, chamadas de postulados ou axiomas, que devem ser aceitas como verdadeiras e para as quais não se exige nenhuma prova. Toda vez que um campo do conhecimento se organiza a partir de algumas verdades eleitas, preferivelmente poucas, simples e evidentes, então se diz que esse campo está apresentado de forma axiomática (BRASIL, 2002, p. 124).

Com o propósito de ilustrar o que foi aludido, vem em amostra, a seguir, uma relação de axiomas famosos e importantes na construção do conjunto dos números naturais, os Axiomas de Peano. "Este sistema axiomático, proposto pelo matemático italiano Giuseppe Peano, no final do século XIX, foi a primeira construção matemática formal do conjunto dos naturais"(RIPOLL, 2015, p. 41). O próprio autor, na mesma publicação, cita os quatro axiomas, os de Peano, como sendo os seguintes:

Axioma 4.13. *Todo número natural tem um único sucessor, que ainda é um número natural;*

Axioma 4.14. *Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;*

Axioma 4.15. *Existe um único número natural, chamado 0 (zero), que não é sucessor de nenhum outro;*

Axioma 4.16. *Se X é um conjunto de números naturais com as seguintes propriedades:*

(1) $0 \in X$*;*

(2) Se um número natural n pertence a X, e o sucessor de n também pertence a X; então X é o conjunto de todos os números naturais.

O delineamento dos Axiomas de Peano tem como base principal a ideia de sucessor. Ainda de acordo com Ripoll (2015), fundamentalmente "o conjunto dos números naturais é construído tomando-se progressivamente sucessores, a partir de um elemento inicial". Em linhas gerais pode-se dizer que o conjunto nos números naturais $\mathbb{N}$ "é obtido como resultado do processo que parte de um elemento, acrescenta seu sucessor, o sucessor de seu sucessor, e assim por diante". Não serão empreendidos, neste trabalho, os detalhes formais da construção do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, tendo em vista a considerar que o leitor tem conhecimento das propriedades operacionais e a respeito da ordem. Além disso, vale também salientar que os Axiomas de Peano viabilizam a definição das operações em $\mathbb{N}$, sua estrutura algébrica e de ordem e ainda a dedução de todos os teoremas da aritmética.

Por outro lado, em Lima (2012, p. 35), encontra-se os mesmos quatro Axiomas de Peano com a seguinte estrutura textual:

Axioma 4.17. *Todo número natural tem um único sucessor;*

Axioma 4.18. *Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;*

Axioma 4.19. *Existe um único número natural, chamado um e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;*

Axioma 4.20. *Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X \doteq \mathbb{N}$.*

Ao se deparar com as formas de escrever os Axiomas de Peano conforme supra, percebe-se que são equivalentes os axiomas 4.15 e 4.19 e, ainda, os axiomas 4.16 e 4.20, porém, nota-se uma sútil diferença entre elas por conta das seguintes notações do próprio conjunto N, dos números naturais:

Notação 1: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$;

Notação 2: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Sendo assim, surge um questionamento sobre o fato do zero ser ou não um número natural. A esse respeito, Lima (1991), diz que:

> Sim e não. Incluir ou não incluir o 0 no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é uma questão de preferência pessoal ou, mais objetivamente de conveniência. O mesmo professor o autor pode, em diferentes circunstâncias, escrever $0 \in \mathbb{N}$ ou $0 \notin \mathbb{N}$. Como assim?
> Consultemos um tratado de Álgebra. Praticamente em todos eles encontramos $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Vejamos um livro de análise. Lá acharemos quase sempre $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
> Por que essas preferências? É natural que o autor de um livro de Álgebra, cujo principal interesse é o estudo das operações, considere zero com um número natural pois isto lhe dará um elemento neutro para adição de números naturais e permitirá que diferença x − y seja operação com valores em $\mathbb{N}$ não somente quando x > y mas também se x = y. Assim, quando o algebrista considera zero como um número natural, está facilitando a sua vida, eliminando algumas exceções (LIMA, 1991, p. 150).

No entanto, a Matemática se apresenta em muitas situações em que é de fundamental importância para o bom funcionamento de suas estruturas e contribuir para o bom entendimento dos seus conceitos que o ponto de partida desse conjunto não seja o zero. E assim o mesmo autor afirmar o seguinte:

> Por outro lado, em Análise, os números naturais ocorrem muito frequentemente como índices de termos numa sequência.
> Uma sequência (digamos, de números reais) é uma função $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, cujo domínio é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. O valor que a função x assume no número natural n é indicado com anotação x_n (em vez de x(n)) e é chamado o "n-ésimo termo"da sequência.
> A notação (x_1, x_2, ..., x_n , ...) é usada para representar a sequência. Aqui o primeiro termo da sequência x_1, o segundo é x_2, e assim por diante. Se fossemos considerar $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ então a sequência seria (x_0, x_1, x_2, ..., x_n , ...), na qual o primeiro termo é x_0, o segundo x_1 etc. Em geral, x_n, não seria o n-ésimo e sim o (n + 1)-ésimo termo (LIMA, 1991, p. 150; 151).

Sobre este assunto, percebe-se realmente, que a melhor resposta é mesmo "Sim e Não", sendo isto uma questão de escolha e que, na Matemática, isso não é um problema ao qual se deve dar muita atenção. Vale lembrar dois pontos relevantes, o primeiro é o fato do zero ter sido empregado, inicialmente, não como um número e sim como algarismo, tendo um objetivo de representar ordens decimais ausentes. O outro é a existência de um genial recurso denominado Sistema de Numeração Decimal, que através dos seus procedimentos possibilita representar simbolicamente todos os números naturais através dos símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, conhecidos como algarismos hindu-arábicos.

4.2 O que é um Teorema

Em se tratando da linguagem e também das palavras usadas para descrever um teorema, pode-se afirmar, com certeza, que já foi mencionado e exibido neste trabalho alguns teoremas que fazem parte do conhecimento de muitas pessoas ligadas diretamente a Matemática, tais como professores e alunos, sejam de nível universitário ou mesmo de ensino básico. Assim, convém destacar o fato de que os Teoremas e as Demonstrações estão diretamente relacionados.

Considerando a finalidade de evidenciar claramente a definição de teorema e tendo em vista que já se tem o conhecimento do conceito de axioma pela temática da seção anterior, procura-se, neste momento, apresentar a ideia do que vem a ser um teorema. Para tanto, Lima (2012), afirma que:

> Uma vez feita a lista dos conceitos primitivos e enunciado os axiomas de uma teoria matemática, todas as demais noções devem ser definidas e as afirmações seguintes devem ser demonstradas. Nisto consiste o chamado modelo axiomático. As proposições e a serem demonstradas chamam-se teoremas e suas consequências imediatas são denominadas corolários. Uma proposição auxiliar, usada na demonstração de um teorema, é chamada um lema (LIMA, 2012, p. 32).

Além do mais, para Lima (2012, p. 32), o fato de uma determinada proposição ser considerada como um axioma ou como um teorema é algo que vai depender "de quem organiza a apresentação da teoria, uma determinada proposição pode ser adotada como axioma ou então provada como Teorema". Uma boa ilustração deste fato é encontrada em Neto (2013, p. 29), ao apresentar a seguinte proposição e classificá-la como axioma: "Se dois lados de triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes", configurando o caso LAL da congruência de triângulos. Por outro lado, Garbi (2010, p. 55), define a mesma proposição como sendo um teorema, conforme a seguir: "Se dois triângulos têm dois lados respectivamente congruentes e os ângulos entre eles congruentes, então os terceiros lados também serão congruentes, assim como os pares de ângulos, um em cada triângulo, que se opõem aos pares de lados congruentes", também configurando o caso LAL da congruência de triângulos.

Isso também acontece, caso seja oportuno e vantajoso, com muitas outras sentenças matemáticas. A exemplo disso, Oliveira e Fernández (2012), trazem uma boa ilustração desse fato quando afirmam que:

> O princípio da boa ordenação dos naturais, [...] e o axioma da indução não são independentes e sem nenhuma conexão. De fato, eles são equivalentes, ou seja, se consideramos o princípio da boa ordenação como sendo um postulado podemos deduzir o axioma da indução e, reciprocamente, se considerarmos o axioma da indução como sendo um postulado podemos deduzir o princípio da boa ordenação (OLIVEIRA e FERNÁNDEZ, 2012, p. 204).

Neste trabalho, por exemplo, para celebrar esta explicação e por efeito de conveniência, considera-se como um axioma a proposição que vem logo a seguir e recebe a denominada de Princípio da Boa Ordenação - PBO ou apenas Princípio da Boa Ordem.

Axioma 4.21 (Princípio da boa ordem). *Todo subconjunto não vazio* $A \subset \mathbb{N}$ *possui um elemento menor que todos os outros elementos deste, ou seja, existe* $a \in A$, *tal que* $a \leq n$ *para todo* $n \in A$.

Em continuação das exposições que configurem cada vez mais a definição de um teorema, tem-se mais uma contribuição para reforço da maneira de classificar e apresentar as proposições demonstradas, Fossa (2009), considera que:

> **1. Um teorema é uma proposição demonstrada.**
>
> **2. Um corolário de um determinado teorema é uma proposição de fácil demonstração a partir do referido teorema.**
>
> **3. Um lema para um determinado teorema é uma proposição demonstrada, não tanto pelo seu interesse intrínseco, mas a propósito de demonstrar o referido teorema (FOSSA, 2009, p. 49).**

Em conformidade com estas definições apresentadas, percebe-se facilmente que os corolários e os lemas são na verdade teoremas. Em termos formais, é notável que os teoremas, os corolários e os lemas, todos são proposições demonstradas, o que não caracteriza diferença entre eles. "Portanto, os dois últimos termos são supérfluos e podem ser eliminados em favor do primeiro"(FOSSA, 2009, p. 49). O mesmo autor afirma ainda que, apesar disso, "prestando atenção ao uso destes termos, podemos discernir melhor a estrutura de um texto matemático que, por sua vez, nos permite organizar e aprender com mais eficiência a matéria apresentada".

Sendo a Matemática uma ciência com capacidade de assumir características próprias, a mesma dispõe de uma prática muito natural de mostrar os seus resultados encontrados, mesmo que estes sejam bem elementares, através dos teoremas. Segundo Filho (2013, p. 104), os teoremas são integrantes da linguagem matemática, e por conta de tal característica é relevante estudá-los. E sobre a forma de descrever o que é um teorema, o mesmo autor afirma que um "teorema é uma sentença matemática válida, cuja validade é garantida por uma demonstração matemática". Para Oliveira e Fernández (2012, p. 9), "sempre que, via demonstração, comprovemos a veracidade de uma proposição passamos então a chamar esta de teorema". Desta forma, define-se Teorema como sendo uma proposição verdadeira assegurada por uma demonstração com fundamentação em proposições anteriores também verdadeiras.

Em Brasil (2011), uma publicação cujo objetivo além de contribuir com os professores na escolha de livros adotados no Ensino Médio, em certo período, também contém em sua literatura subsídios para a formação continuada de professores. Percebe-se na exposição dos seus textos um olhar atento para a prática das demonstrações em salas de aula a nível de Ensino Médio.

> Nos níveis de maior sistematização da Matemática, seus teoremas podem ser todos escritos na forma *"Se p, então q"* . Uma proposição deste tipo é chamada de implicação. Em um teorema, dizemos que p é a *hipótese* e q é a *tese*. Tomemos, por exemplo: *"Se dois números r e s são ímpares, então seu produto é ímpar"*. Nesse caso, a hipótese do teorema é *"r e s são dois números ímpares quaisquer"* e sua tese: *"o produto rs é ímpar"* (BRASIL, 2011, p. 25).

Além de grande contribuição para um melhor entendimento do que seja um teorema, este documento traz boas orientações no sentido de alertar ouso bem dosado de formalização da Matemática no Ensino Médio. "Por um lado, evitar excesso de formalismo que afaste o interesse do aluno; por outro lado, desenvolver a capacidade de argumentação matemática, recorrendo a demonstrações simples e sugestivas"(BRASIL, 2011, p. 25).

Para ampliar as informações acerca dos teoremas é pertinente saber que, às vezes, estes podem ser apresentados de maneira diferente da forma condicional ou implicativa como visto na seção 4.1 através das proposições 4.9 e 4.10, as quais serão mostradas no próximo capítulo deste trabalho, suas respectivas demonstrações, configurado assim a denominação de teorema para estas proposições. Outra possibilidade é "escolher"uma forma não condicional ou não implicativa na escrita de um algum teorema. Por exemplo, a proposição 4.3 da seção 4.1, que posteriormente será demonstrada confirmando a sua condição de teorema, pode ser naturalmente reescrita como a seguir:

Teorema 4.22. *Um número natural n cuja soma dos algarismos é divisível por 3 também é divisível por 3.*

Mesmo reescrito nesse formato, é notável a identificação da hipótese e da tese no teorema 4.22, a proposição P: *Um número natural n cuja soma dos algarismos é divisível por 3* é a hipótese e a tese pode ser representada pela proposição Q: *o número natural n é divisível* *por 3*. Veja a seguir, outro teorema, que é uma outra versão da proposição 4.2 da seção 4.1.

Teorema 4.23. *Seja n um número natural. Se n for divisível por 3, então a soma dos algarismos de n é divisível por 3.*

Em situações como esta, as hipóteses do teorema, pois são mais de uma (duas hipóteses, no caso), devem necessariamente serem identificadas, assim como nos demais teoremas, pois elas, segundo Filho (2013, p. 105), "são condições indispensáveis que aparecem no enunciado do teorema e devem ser usadas na demonstração desse teorema. Já a tese, que também aparece no enunciado do teorema, é a conclusão que se deve deduzir na demonstração".

Na intenção de consumar a definição de teorema já vista até aqui, é fundamental saber que as proposições do tipo $P \Leftrightarrow Q$, onde lê-se "P se, e somente se, Q"são também teoremas, bastando para isso que ambas as proposições $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$ sejam também teoremas.

Teorema 4.24. *Se o número* $x = a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0$ *representado na base 10 for divisível por 7, então o número* $a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 - 2a_0$ *é divisível por 7.*

Teorema 4.25. *Se o número* $a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 - 2a_0$ *representado na base 10 for divisível por 7, então o número* $x = a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0$ *é divisível por 7.*

Teorema 4.26. *O número* $x = a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0$ *representado na base 10 é divisível por 7 se, e somente se, o número* $a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 - 2a_0$ *é divisível por 7.*

Considerando o teorema 4.26 para representar o que acontece em muitos casos, nota-se, que este teorema se constitui de duas partes, uma delas, o teorema 4.24, que representa um resultado matemático e, a outra, o teorema 4.25, é o teorema recíproco. Nessa mesma linhagem e sendo que as proposições 4.2 e 4.3 são teoremas, então pode-se enunciar o seguinte teorema:

Teorema 4.27. *O número* $x = a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0$ *representado na base 10 é divisível por 3 se, e somente se, o número* $a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0$ *é divisível por 3.*

Quando as proposições matemáticas se apresentam conforme o último Teorema evidenciado, é necessário que ambos os resultados sejam válidos. Frequentemente, para se construir a demonstração de um resultado como este, ela é dividida em dois passos, ou seja, cada passo é a demonstração de cada um dos resultados constituintes do Teorema, onde pode acontecer da demonstração de um dos resultados ou implicação ser completamente autônoma em relação a demonstração do outro resultado ou implicação. Além disso, é bastante relevante destacar que, em tais demonstrações, fica livre a escolha da técnica ou método de demonstração, assunto que será tratado no capítulo subsequente deste trabalho.

4.3 O que é uma Demonstração

A princípio, precedendo à definição de uma demonstração em Matemática, pretende-se evidenciar a sua importância para o ensino e a aprendizagem desta ciência, especificamente na etapa mediana da Educação Básica. Para tanto, inicialmente mostrar-se-á uma observação proposta por Lima (2012, p. 33), quando diz que do "ponto de vista do Ensino Médio, não tem cabimento expor a Matemática sob forma axiomática. Mas é necessário que o professor saiba que ela pode ser organizada"desta maneira e que isso é fundamental para realização do ato de demonstrar.

Nesse sentido, o autor afirma que para manter, em sala de aula, uma linha de equilíbrio é recomendável a prática de orientações tais como: "Nunca dar explicações falsas sobre o pretexto de que os alunos ainda não têm maturidade para entender a verdade". Para ele, isto seria equivalente a dizer para uma criança que "bebês são trazidos pela cegonha".

Outra situação que se recomenda é não "insistir em detalhes formais para justificar afirmações que, além de verdadeiras, são intuitivamente óbvias e aceitas por todos sem discussão nem dúvidas"(LIMA, 2012, p. 33).

Ainda a esse respeito, Lima (2012), diz também que "fatos importantes cuja veracidade não é evidente, como o Teorema de Pitágoras", por exemplo, devem ser demonstrados. Porém, não se deve insistir com aquelas demonstrações muito longas, muito elaboradas ou mesmo aquelas que não estão de acordo com os conhecimentos e, consequentemente, ao alcance dos alunos dessa etapa de ensino.

Uma demonstração tem por finalidade o convencimento da veracidade de uma proposição. Ao realizar um procedimento de demonstrar um resultado, usa-se, inicialmente, algumas definições de proposições básicas e necessárias chamadas axiomas, aceitas como verdadeiras conforme já frisado anteriormente. Para Garbi (2010), as nomenclaturas usuais tais como Prova, Demonstração e Justificativa Lógica são equivalentes, e sendo assim, o ato de demonstrar é essencial, é **"a verdadeira marca registrada da Matemática**. É ela que distingue a Rainha das Ciências de todos os demais campos do conhecimento"(GARBI, 2010, p. 21).

Um outro bom exemplo da valorização do uso das demonstrações, no ensino Médio, é encontrado em Brasil (2002), quando este retrata o ensino de Geometria, pois é necessário dar continuidade, nessa etapa da educação básica, ao conhecimento que o aluno traz do ensino fundamental nesta área da Matemática. Nesse momento em que o estudante já teve contato por meio de "experimentações e de deduções informais sobreas propriedades relacionadas a entes matemáticos, tais como, "lados, ângulos e diagonais de polígonos, bem como o estudo de congruência e semelhança de figuras planas". Nesse sentido, o documento afirma ainda que:

> Para alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, é necessário que no ensino médio haja um aprofundamento dessas ideias no sentido de que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são familiares.
> Não se trata da memorização de um conjunto de postulados e de demonstrações, mas da oportunidade de perceber como a ciência Matemática valida e apresenta seus conhecimentos, bem como propiciar o desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo e dos aspectos mais estruturados da linguagem matemática. Afirmar que algo é "verdade"em Matemática significa, geralmente, ser resultado de uma dedução lógica, ou seja, para se provar uma afirmação (teorema) deve-se mostrar que ela é uma consequência lógica de outras proposições provadas previamente (BRASIL, 2002, p. 124).

Acentuando estas ideias acerca do ensino de Geometria e, semelhantemente a outras áreas da Matemática, no que diz respeito às habilidades propostas para a serem desenvolvidas nesta etapa de ensino, encontra-se ainda em Brasil (2002, p. 125), que é importante o fato do estudante do Ensino Médio ter a oportunidade de "compreender o significado de postulados ou axiomas e teoremas e reconhecer o valor de demonstrações para perceber a Matemática como ciência com forma específica para validar resultados".

Por conseguinte, para saber se informar da definição de uma demonstração em Matemática, é significativo saber que esta ciência tem a virtude educativa de instruir os estudantes no sentido de que toda conclusão tem como base as hipóteses e, estas, devem ser aceitas como verdadeiras para as argumentações finais serem válidas.

Lima (2007, p. 158), define uma demonstração como sendo "o processo de passar, mediante argumentos logicamente convincentes, das hipóteses para a conclusão". O mesmo, diz ainda que o "seu uso sistemático na apresentação de uma teoria constitui o método dedutivo. Este é o método matemático por excelência e a Geometria Elementar tem sido, desde a remota antiguidade, o lugar onde melhor se pode começar a praticá-lo".

Sendo que o propósito vai além de encontrar uma única resposta para a definição do termo central em debate, ou seja, o que vem a ser uma demonstração, tem-se também uma contribuição para elaboração deste conceito nas palavras de Fossa (2009, p. 47), quando segundo o autor "uma demonstração é um argumento, cuja conclusão é o teorema demonstrado".

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC, já mencionada anteriormente, traz para a área de Matemática e suas Tecnologias, no Ensino Médio, uma proposta de ampliar e aprofundar aprendizagens importantes desenvolvidas no Ensino Fundamental, nesse intuito busca possibilitar que o aluno possa construir uma visão mais globalizada da Matemática, ou seja, mais integrada, num panorama onde possa acontecer a sua aplicação à realidade.

> Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (BRASIL, 2017, p. 519).

Isto posto, a BNCC também se configura como mais um documento oficial onde se vislumbra uma valorização dos procedimentos de demonstrar, mesmo que se remetendo a essa ação de modo equilibrado, e assim tendo como objetivo a validação de resultados em Matemática, pois encontra-se em seus textos que no processo para desenvolver competências onde se evidencia o raciocínio "é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar os problemas resolvidos, com ênfase nos processos de argumentação matemática"(BRASIL, 2017, p. 519).

Complementando ideias como estas, Lima (2012, p. 33), diz que as "demonstrações, quando objetivas e bem apresentadas, contribuem para desenvolver o raciocínio, o espírito crítico, a maturidade e ajudam a entender o encadeamento das proposições matemáticas".

Continuando com a temática a respeito da importância das demonstrações para a aprendizagem da Matemática no ensino mediano, acrescenta-se ao que já foi mencionado, uma análise publicada em Brasil (2011), quando diz que, no Ensino Médio, a formalização do ensino da Matemática deve manter-se equilibrada. "Por um lado, evitar excesso de formalismo que afaste o interesse do aluno; por outro lado, desenvolver a capacidade de argumentação matemática, recorrendo a demonstrações simples e sugestivas"(BRASIL, 2011, p. 25).

Tanto quanto apresentar argumentos convincentes da importância das demonstrações em Matemática, especificamente no Ensino Médio, é relevante também mostrar diferentes definições das mesmas e, para ampliar a noção desse conceito, Brasil (2011) também apresenta uma definição para o termo, no momento em que relata:

> Em todo teorema de Matemática, uma peça-chave é a demonstração, ou prova, que é uma sequência finita de passos lógicos que permite partir de p e chegar a q. Nesses passos lógicos, só podemos utilizar: a hipótese; teoremas já demonstrados; os axiomas aceitos; e as definições já feitas. Algumas demonstrações são extremamente curtas, outras muito longas; umas bem simples, outras mais complexas (BRASIL, 2011, p. 25; 26).

Na busca de mais definições para o termo em questão, Garbi (2010), também contribui com essa tarefa, e assim como em Brasil (2011), ainda acrescenta um outro termo considerado, como sinônimo de demonstração, pois no presente trabalho de pesquisa, os termos provar e demonstrar são tomados como equivalentes.

> ***Prova de uma afirmação referente a um ou mais entes matemáticos é o processo pelo qual, partindo exclusivamente de definições, conceitos primitivos e postulados, evidencia-se a veracidade da afirmação por meio de uma sequência de conclusões (inferências) lógicas válidas.***
> (Naturalmente, para que não se necessite em cada demonstração retornar aos postulados e conceitos primitivos, pode-se utilizar em uma prova outros fatos demonstrados anteriormente) (GARBI, 2010, p. 33).

Adicionando mais uma contribuição na tarefa principal desta seção, que é apresentar uma definição de Demonstração Matemática de uma proposição, Oliveira e Fernández (2012,

p. 9) definem que uma "demonstração em Matemática é o processo de raciocínio lógico e dedutivo para chegar a veracidade de uma proposição condicional. Nesse processo são usados argumentos válidos", isto é, argumentos que permitam deduzir fatos verdadeiros partindo de proposições verdadeiras.

Portanto, diante do exposto, pode-se concluir que as Demonstrações em Matemática são imprescindíveis, tendo em vista que uma demonstração completa um argumento válido e preciso, se utilizando de elementos da lógica, porém através de uma linguagem natural capaz de garantir a veracidade de uma sentença matemática configurando-a com a denominação de Teorema, pois como já mostrado anteriormente, um Teorema é exatamente uma proposição demonstrada.

Capítulo 5

Técnicas de Demonstração

As demonstrações em Matemática são personagens que exercem um papel fundamental no desenvolvimento do raciocínio dedutivo, elas se postam num patamar de centralidade para a formalização e validação de resultados. Ao realizar demonstrações em Aritmética, Álgebra, Geometria ou em quaquer que seja a ramificação da matemática, tem-se a possibilidade de fazer uso de várias técnicas disponíveis para tais procedimentos. Ademais, é importante saber que nem sempre um mesmo método ou técnica se aplica a diferentes problemas, isto é, dependendo do que se quer demonstrar pode-se lançar mão da técnica mais adequada, ou até mesmo observar que, em alguns casos, deve-se usar a opção de método de demonstração que seja possível de aplicar à situação envolvida.

Sobre as intensamente apreçadas Técnicas de Demonstrações Matemáticas, costumam-se classificá-las em Diretas e Indiretas. Neste trabalho serão exibidas algumas das principais técnicas para se demonstrar e que se enquadram nas classificações mencionadas. Além disto, para cada uma das técnicas que serão evidenciadas, reservar-se-á algumas proposições e suas respectivas demonstrações, que irão caracterizar a técnica empregada. No vasto conjunto das técnicas disponíveis, destacam-se o método Direto, a Contrapositiva e Redução ao Absurdo. Também será tratado aqui, uma técnica de demonstração direta muito útil e, consequentemente, bastante difundido no permeio das validações de resultados matemáticos, esse método é denominado Princípio da Indução Matemática.

5.1 Demonstração Direta

Nesse tipo de demonstração podem ser utilizados além dos conceitos primitivos, as proposições já consagradas como verdadeiras, sejam elas um axioma ou um resultado já demonstrado que justificam a veracidade do que se quer demonstrar como verdadeiro. Assim, chama-se de Hipótese (H) o que se assume como verdade e através da manipulação destes, constrói-se os argumentos e as deduções cabíveis para se concluir uma outra verdade desejada, chamada de Tese (T).

Na visão de Oliveira e Fernández (2012, p. 11), o que caracteriza uma demonstração direta é o fato de que "assumimos a hipótese como verdadeira e através de uma série de argumentos verdadeiros e deduções lógicas concluímos a veracidade da tese".

Nesta seção, assim como nas demais sobre as técnicas de demonstrações tratadas aqui, serão relacionadas algumas definições de elementos da matemática que são muito importantes para o conhecimento matemático, estes servirão de alicerce para a construção de muitas das demonstrações que se seguem. Inicialmente serão apresentadas definições relacionadas aos números inteiros, lembrando é claro, que não se deseja expor detalhadamente a evolução do conceito desse conjunto de números e nem dar explicações a respeito de sua natureza, sendo que a ideia é apenas fazer uso das suas operações e propriedades nas argumentações e algoritmos utilizados na construção das demonstrações aqui apresentadas.

Sendo assim, denota-se por $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros, ele é constituído pelo conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, provido do zero e dos números negativos. Desta maneira, tem-se $\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ e, além disso, serão admitidas como válidas, as operações de adição, subtração e multiplicação em $\mathbb{Z}$, isto é, a soma, a diferença e o produto de números pertencentes ao conjunto dos inteiros também serão números inteiros. Porém, sobre a divisão de números inteiros não se pode afirmar o mesmo, pois o quociente de dois números inteiros pode ser ou não um número inteiro.

Definição 5.1. *Sejam a e b dois números inteiros, com $a \neq b$. Dizemos que a divide b se existe um inteiro q tal que $b = \mathrm{a} \cdot \mathrm{q}$.*

Além do mais, também se usa as frases: a é divisor de b ou b é múltiplo de a para exprimir esta mesma situação e, da mesma forma usa-se a notação $a \mid b$ (a divide b) para representar as frases equivalentes ditas acima. Caso a não seja divisor de b, então pode-se representar as frases anteriores da seguinte forma: $a \nmid b$ (a não divide b).

Proposição 5.2. *Sejam a, b e c números inteiros. Se a divide b e b divide c, então a divide c.*

Demonstração: Tem-se, pelas hipóteses, que a, b e c são números inteiros e, ainda, que $a \mid b$ e $b \mid c$. Diante disto, pose-se afirmar que existem números inteiros p e q tais que,

$$b = ap \tag{5.1}$$

$$e$$

$$c = bq \tag{5.2}$$

Assim, substituindo (5.1) em (5.2), obtém-se

$$\begin{aligned} c &= (ap)q \\ \Rightarrow\ & c = a(pq) \\ \Rightarrow\ & c = ak \end{aligned}$$

para $k = pq$, com $k \in \mathbb{Z}$

Portanto, $c \mid a$. $\square$

Proposição 5.3. *Se n é um número par, então n^2 também é um número par.*

Demonstração: Como n é um número par, logo n é da forma $n = 2k$, para algum inteiro k. Assim,

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k)^2 \\ &= (4k^2) \\ &= 2 \cdot 2k^2 \\ &= 2m \end{aligned}$$

para $m = 2k^2$.

Portanto, n^2 é par. $\square$

Proposição 5.4. *Sejam a e b números inteiros com $b > 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que $a = \mathrm{b} \cdot \mathrm{q} + r$, com $0 \leq r < b$.*

Demonstração: Considere o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ como sendo a união de intervalos conforme a seguir:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} = \ldots &\cup \{-2b, -2b+1, -2b+2, \ldots, -b-1\} \\ &\cup \{-b, -b+1, -b+2, \ldots, -1\} \\ &\cup \{0, 1, 2, \ldots, b-1\} \\ &\cup \{b, b+1, b+2, \ldots, 2b-1\} \\ &\cup \{2b, 2b+1, 2b+2, \ldots, 3b-1\} \\ &\cup \{3b, 3b+1, 3b+2, \ldots, 4b-1\} \cup \ldots \\ &\cup \{qb, qb+1, qb+2, \ldots, (q+1)b- \ 1\} \cup \ldots \end{aligned}$$

Seja $A \subset \mathbb{Z}$, onde $A = \{qb, qb+1, qb+2, \ldots, (q+1)b-1;$ com $b \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{Z}\}$ um intervalo genérico dentre os intervalos que compõem o conjunto $\mathbb{Z}$. Assim, tomando um número inteiro a qualquer, tem-se que a pertence a algum dos intervalos que compõem o conjunto $\mathbb{Z}$, digamos que $a \in A$.

Logo,

$$qb \leq a \leq (q+1)b - 1. \tag{5.3}$$

Considerando $a = b \cdot q + r$, para algum inteiro r na desigualdade (5.3), tem-se,

$$qb \leq b \cdot q + r \leq (q+1)b - 1. \tag{5.4}$$

Daí, subtraindo qb na desigualdade (5.4), obtém-se,

$$0 \leq r \leq b - 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq r < b$$

Portanto, existem inteiros q e r, tais $a = b \cdot q + r$.

Vejamos a unicidade: Suponha que existem inteiros q, q', r e r' com $0 \leq$ r, r' $< b$, tais que

$$a = qb + r \tag{5.5}$$

$$e$$

$$a = q'b + r' \tag{5.6}$$

Subtraindo a igualdade (5.5) da igualdade (5.6), tem-se

$$(q'b + r') - (qb + r) = 0$$
$$\Rightarrow q'b + r' - qb - r = 0$$
$$\Rightarrow b(q' - q) - (r - r') = 0$$
$$\Rightarrow b(q' - q) = (r - r'). \tag{5.7}$$

Pela igualdade (5.7), tem-se que

$$b \mid r - r'$$

o que implica $r - r'$ ser múltiplo de b. Daí,

$$\begin{aligned}
&0 \leq r < b \;\; e \;\; 0 \leq r' < b \\
&\Rightarrow |r - r'| < b \\
&\Rightarrow -b < r - r' < b \\
&\Rightarrow r - r' = 0 \qquad (5.8) \\
&\Rightarrow r = r'
\end{aligned}$$

De (5.7) e (5.8), tem-se

$$b(q' - q) = 0 \quad \Rightarrow \quad q' - q = 0 \quad \Rightarrow q' = q$$

o que encerra a demonstração.

Observação: A **proposição 5.4** é válida para todo número inteiro $b \neq 0$. A demonstração do caso $b < 0$ é encontrada em consequência do Teorema provado.

Definição 5.5. *Dadas, no plano, duas semirretas $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$, um ângulo de vértice O e lados $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$ é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$.*

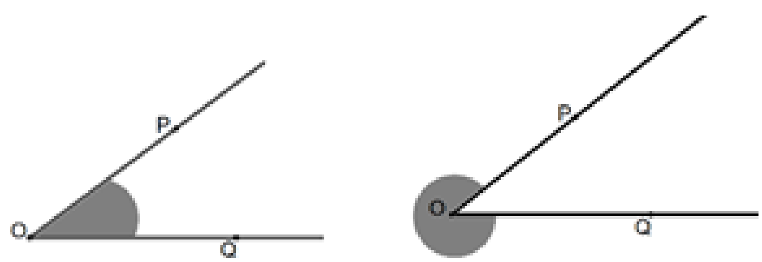

Figura 5.1: Ilustração da definição de ângulo

Um ângulo pode ser convexo ou não convexo, na figura apresentada acima temos que o ângulo à esquerda é convexo enquanto que o ângulo à direita é não convexo. Denotamos um ângulo de lados OP e OQ escrevendo $P\widehat{O}Q$. Em situações onde seja necessário a utilização dessas regiões angulares, o contexto esclarecerá se o ângulo referido é convexo ou não convexo.

Definição 5.6. *Um ângulo $A\widehat{O}B$ é denominado de ângulo raso quando $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ forem semirretas opostas, isto é, A, O e B estejam sobre uma mesma reta, com $O \in \overline{AB}$ (figura 5.2). A medida, em graus, de um ângulo raso é igual a* $180°$.

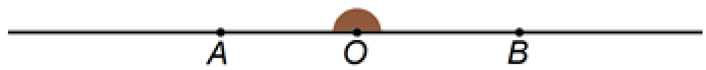

Figura 5.2: Ângulo raso.

Definição 5.7. *Dois ângulos $A\widehat{O}B$ e $C\widehat{O}D$, que têm o mesmo vértice, são chamados opostos pelo vértice (OPV) se seus lados forem semirretas opostas (figura 5.3).*

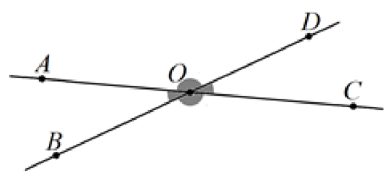

Figura 5.3: Ângulos opostos pelo vértice.

Preposição 5.8. *Se dois ângulos $A\widehat{O}B$ e $C\widehat{O}D$ são opostos pelo vértice, então eles têm a mesma medida.*

Demonstração: Sejam os ângulos $A\widehat{O}B$ e $C\widehat{O}D$ opostos pelo vértice (figura 5.3). Pela definição 5.6, $B\widehat{O}D$ e $A\widehat{O}C$ são ângulos rasos, logo $B\widehat{O}D = A\widehat{O}C$. Segue que,

$$\begin{aligned} & B\widehat{O}D = A\widehat{O}B + A\widehat{O}D \;\; e \;\; A\widehat{O}C = A\widehat{O}D + C\widehat{O}D \\ \Rightarrow \;\; & \mathrm{A}\widehat{O}B + A\widehat{O}D = A\widehat{O}D + C\widehat{O}D \\ \Rightarrow \;\; & \mathrm{A}\widehat{O}B = C\widehat{O}D \end{aligned}$$

Portanto, dois ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida. □

Definição 5.9. Duas retas são paralelas (símbolo: $\|$) quando são coincidentes ou são coplanares e não se interceptam, isto é, não têm nenhum ponto em comum.

Definição 5.10. Quando duas retas distintas r e s, não necessariamente paralelas, são cortadas por uma transversal t formam-se oito ângulos como indicados na figura 5.4 a seguir.

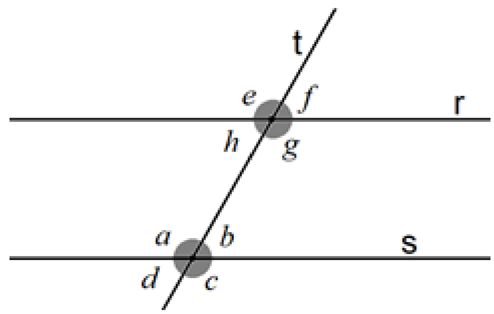

Figura 5.4: Retas r e s cortadas pela reta transversal t.

Denominam-se ângulos:

- correspondentes: a e e, b e f, c e g, d e h.
- opostos pelo vértice: a e c, b e d, e e g, f e h.
- alternos internos : a e g, b e h.
- alternos externos : c e e, d e f.
- colaterais internos: a e h, b e g.
- colaterais externos: c e f, d e e.

Axioma 5.11 *(Caso de congruência LAL). Se dois lados de triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes.*

Proposição 5.12 *(Teorema do ângulo externo). A medida de cada ângulo externo de um triângulo, é maior do que as medidas dos ângulos internos a ele não adjacentes.*

Demonstração: Seja ABC um triângulo qualquer e seja $A\widehat{C}D$ um ângulo externo de ABC conforme a figura 5.5. Mostraremos que $A\widehat{C}D > B\widehat{A}C$, o caso $A\widehat{C}D > A\widehat{B}C$ é análogo.

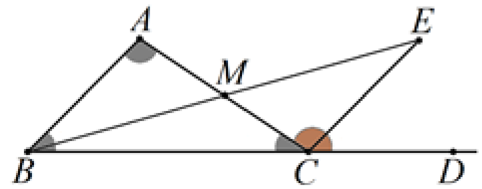

Figura 5.5: Ilustração teorema do ângulo externo

Considere o ponto médio M do segmento AC e prolongue a semirreta BM até o ponto E, tal que $\overline{BM} = \overline{ME}$.

Desta forma, nos triângulos ABM e CEM temos que $\overline{AM} = \overline{MC}$, $\overline{BM} = \overline{ME}$ e $A\widehat{M}B = C\widehat{M}E$ (ângulos OPV).

Logo, temos pelo caso de congruência LAL, que os triângulos ABM e CEM são congruentes, consequentemente, tem-se $B\widehat{A}M = M\widehat{C}E$

Note que,

$$\begin{aligned} \mathrm{A}\widehat{C}D > A\widehat{C}E &= M\widehat{C}E \\ &= B\widehat{A}M \\ &= A\widehat{C}E \\ &= B\widehat{A}C \end{aligned}$$

o que nos remete a conclusão de que $A\widehat{C}D > B\widehat{A}C$ $\square$

5.2 Demonstração por contrapositiva

No processo de aprendizagem da Matemática, segundo Filho (2013, p. 220), "é imprescindível saber negar definições e saber negar sentenças, pois várias ideias bastante relevantes advêm dessas negações". Nesta seção estudaremos demonstrações que fazem uso de argumentos por contraposição, o que vem ao encontro de saber exprimir a negação de sentenças Matemáticas.

> A **negação de uma sentença** P é a sentença não P, cuja notação é $\sim P$. Definimos o valor lógico da sentença $\sim P$ como o oposto do valor lógico da sentença P.
> Assim, conforme o Princípio da Não Contradição [...], resultam as implicações:
> $$P \text{ é verdadeiro} \Rightarrow \sim P \text{ é falso}$$
> $$\sim P \text{ é verdadeiro} \Rightarrow \; P \text{ é falso.}$$
> Consequentemente, dada uma sentença qualquer P, ou P é verdadeira ou $\sim P$ é verdadeira, excludentemente. Da mesma forma, ou P é falsa ou $\sim P$ é falsa, excludentemente (FILHO, 2013, p. 220-221).

Elevando o modelo acima para uma sentença ou proposição implicativa ou mesmo proposição condicional, significa encontrar a sua contrapositiva, ou seja, onde a Hipótese e a Tese são invertidas e negadas, pois "a veracidade da forma positiva de uma proposição é equivalente à veracidade de sua forma contrapositiva, podendo ser esta última, eventualmente, mais fácil de se provar" (OLIVEIRA e FERNÁNDEZ, 2012, p. 12). A seguir será dado um exemplo para ilustrar claramente o que foi dito, ou seja, uma proposição e sua contrapositiva. Sendo assim, a proposição

"Se sou aluno do PROFMAT na UFPI, então estudo no Piauí"

é equivalente a proposição

"Se não estudo no Piauí, então não sou aluno do PROFMAT na UFPI".

Nessa perspectiva, pode-se afirmar que que a implicação "Se H, então T"é equivalente à sua contrapositiva, ou seja, equivalente à implicação "Se $\sim T$, então $\sim H$". Existem muitas situações que para construir a demonstração de um resultado é necessário substituir uma implicação por sua contrapositiva. A partir dessas informações pode-se dizer que demonstrar usando a contrapositiva significa não partir exatamente da Hipótese para se concluir a Tese. Esta técnica ou método de uso muito frequente nas demonstrações em Matemática, tem uma característica bem particular, pois para provar a veracidade da Tese, nega-se a própria Tese e com este procedimento o foco principal não é provar a Tese, mas sim provar a negação da Hipótese.

Tudo isso faz com que o método de demonstração por contraposição também tenha como base, evidenciar a equivalência entre uma implicação e sua contrapositiva, e assim sendo, se torna, ocasionalmente, mais simples para construir a demonstração.

A seguir, serão mostradas algumas proposições juntamente com as suas respectivas demonstrações.

Proposição 5.13. *Se a^2 é um número par, então a é um número par.*

Nota-se, neste caso, que:

Hipótese: a^2 é um número par

e

Tese: a é um número par.

Nos procedimentos para validar uma proposição como esta, percebe-se rapidamente que partindo inicialmente da Hipótese (H) para através de deduções lógicas chegar a concluir a Tese (T) será uma atividade sem sucesso e, consequentemente, cabível de abandono em função de outra estratégia. Sendo assim, dar-se prosseguimento com a demonstração da seguinte forma:

Proposição 5.14. *Se a não é par, então a^2 não é par.*

Neste caso, temos:

Hipótese: a não é um número par

e

Tese: a^2 não é um número par.

Demonstração: Como estamos supondo que a não é um número par, logo a tem que ser ímpar, ou seja, existe um inteiro p, tal que $a = 2p + 1$. Logo,

$$\begin{aligned} a^2 &= (2p+1)^2 \\ &= (2p+1)\cdot(2p+1) \\ &= 4p^2+2p+2p+1 \\ &= 4p^2+4p+1 \\ &= 2\cdot(2p^2+2p)+1 \\ &= 2k+1 \end{aligned}$$

onde k $\in \mathbb{Z}$ de modo que $k = 2p^2 + 2p$.

Portanto, a^2 é ímpar. □

Proposição 5.15. *Sejam p e q números inteiros. Se a soma $p + q$ é par, então p e q têm a mesma paridade.*

Demonstração: A contrapositiva da proposição 5.15 é:

Sejam p e q números inteiros. Se p e q têm paridades diferentes, então a soma $p + q$ é ímpar.

Assim, pela contrapositiva, tem-se que p é par e q é ímpar ou p é ímpar e q é par. Considere que p é par e q é ímpar, o outro caso é análogo. Logo, existem inteiros k e k' tais que

$$p = 2k \ \text{ e } \ q = 2k' + 1.$$

Daí, tem-se

$$p + q \ = \ 2k + (2k' + 1) \ = \ 2(k + k') + 1 \ = \ 2m + 1$$

para $m = k + k'$.

Como $2m + 1$ é ímpar, segue daí que $p + q$ é ímpar. □

Definição 5.16. *Número racional é todo aquele que pode ser representado por uma razão entre dois números inteiros, sendo o segundo não nulo. Indicamos o conjunto de todos os números racionais pela letra $\mathbb{Q}$ de tal modo que:*

$$Q = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\}$$

Assim como no caso dos conjuntos dos números naturais e inteiros, serão admitidas como válidas, as propriedades operacionais no conjunto $\mathbb{Q}$, ou seja, as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Logo, a soma, a diferença, o produto e o quociente de números pertencentes ao conjunto dos racionais também serão números racionais.

Em continuidade a apresentação de definições fundamentalmente importantes no estudo da Matemática e, relacionado aos conjuntos numéricos, deve-se considerar as palavras de Neto (2013), quando afirma que: "todo número racional admite uma representação decimal, mas nem toda representação decimal representa algum racional. Nesse ponto, afim de suprir tal deficiência, **postulamos** a existência de um conjunto, o qual denotamos $\mathbb{R}$, contendo $\mathbb{Q}$" (NETO, 2013, p. 6). Nesse caso, os elementos pertencente a $\mathbb{R}$ são chamados de números reais e o conjunto $\mathbb{R}$ denominado como sendo o conjunto dos números Reais.

De maneira semelhante ao conjunto $\mathbb{Q}$, serão admitidas como válidas as propriedades operacionais no conjunto $\mathbb{R}$, ou seja, as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Desta forma, a soma, a diferença, o produto e o quociente de números pertencentes ao conjunto dos reais também serão números reais.

Da definição de números racionais, suas propriedades e suas operações e, sendo que $\mathbb{Q}$ está contido em $\mathbb{R}$, e ainda com base nas palavras de Neto (2013, p. 18), pode-se concluir que "um número real é racional exatamente quando sua representação decimal for finita ou infinita e periódica", também chamado de dízima periódica. O mesmo autor define números irracionais como sendo todos os números reais "que não podem ser escritos como quocientes de dois números inteiros ou, ainda, aqueles cuja representação decimal" além de infinita também é não periódica, isto é, um número real é irracional quando sua representação decimal for uma dízima não periódica. Neste trabalho adota-se o símbolo $\mathbb{Q}'$ para representar o conjunto dos números irracionais.

Proposição 5.17. *Se n é um número positivo, então* $n + \dfrac{1}{n} \geq 2.$

Demonstração: A contrapositiva da proposição 5.17 é:

Para $n \neq 0$, se $n + \dfrac{1}{n} < 2$, então o número n é negativo.

Assim, unsando a contrapositiva, temos que,

$$n + \frac{1}{n} < 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{n^2+1}{n} < 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{(n-1)^2}{n} < 0.$$

Desta forma, obrigatoriamente

$$(n-1)^2 < 0 \text{ e } n > 0 \quad \text{ou} \quad (n-1)^2 > 0 \text{ e } n < 0$$

O primeiro caso é impossível, pois $\forall\ n \neq 0$, temos que $(n-1)^2 > 0$. Sendo assim, nos resta que

$$(n-1)^2 > 0 \text{ e } n < 0.$$

Donde, concluímos que $n < 0$. $\square$

Usando a contrapositiva, provamos que: Se $n + \dfrac{1}{n}$ não é maior do que ou igual a 2, então n não é positivo. Ou ainda que: Se $n + \dfrac{1}{n} < 2$, então n é negativo. Mostrando assim que uma proposição e sua contrapositiva são equivalentes.

5.3 Demonstração por Redução a um Absurdo

Redução a um Absurdo, Redução ao Absurdo ou Redução por Absurdo são nomenclaturas usadas para esta técnica de demonstração considerada uma poderosa ferramenta matemática. Há também quem tenha preferência por chamá-la de demonstração por Contradição. Esta estratégia para provar resultados em Matemática tem como fundamento básico o fato de que se uma proposição tomada como premissa levar a uma conclusão contraditória, isto é, a um absurdo ou uma contradição, então tal premissa é falsa.

Veja as proposições a seguir:

A) Todo professor de Matemática é um bom jogador de futebol;

B) Nenhum professor de Matemática é um bom jogador de futebol.

Seriam contraditórias, as duas proposições? Fazendo uma análise, pode-se concluir que a proposição A) sendo verdadeira, então a proposição B), necessariamente, é falsa. Agora, sendo falsa a proposição A), a proposição B) pode ser falsa ou verdadeira. Sendo assim, as duas proposições acima não são contraditórias. Para entender o motivo disso veja mais duas proposições a seguir:

C) A professora de Matemática pratica esportes;

D) A professora de Matemática não pratica esportes.

E neste último caso, seriam contraditórias, as duas proposições? Novamente analisando, pode-se concluir que a proposição C) sendo verdadeira, então a proposição D), obrigatoriamente, é falsa. Por outro lado, sendo falsa a proposição C), a proposição D) é, com certeza, verdadeira. Sendo assim, pode-se afirmar que as duas proposições, C) e D), são contraditórias, ou seja, seus respectivos valores lógicos são necessariamente opostos, o que é uma contradição ou um absurdo.

Em linhas gerais, o princípio que acompanha uma demonstração por Redução a um Absurdo, de uma proposição condicional do tipo Se H, então T, é a suposição provisória, da não ocorrência da proposição Se H, então T, para tanto, deve-se assumir a validade da hipótese e supor que a tese é falsa. Com posse desta nova configuração deduzir uma proposição que contradiz a suposição levantada, ou seja, um absurdo.

Sendo assim, para uma melhor compreensão da técnica de demonstração por Redução a um Absurdo, explicitada acima, mostrar-se-á algumas proposições e também suas respectivas Demonstrações onde seja possível a sua aplicação.

Apresenta-se, agora uma outra demonstração da Proposição 5.17. Desta vez através d redução a um absurdo.

Demonstração da Proposição 5.17:

Seja n um número positivo. Suponha, por absurdo, que a tese é falsa, ou seja, $n+\dfrac{1}{n}<2$. Como $n>0$, então podemos multiplicar a desigualdade $n+\dfrac{1}{n}<2$ pelo número n.

Logo, obtemos:

$$\begin{aligned} & n^2 + 1 < 2n \\ & \Rightarrow n^2 - 2n + 1 < 0 \\ & \Rightarrow (n-1)^2 < 0 \end{aligned}$$

o que é um absurdo.

Portanto, $n + \dfrac{1}{n} \geqslant 2.$ $\square$

No quarto capítulo, falou-se sobre a proposição 4.9, onde a mesma afirma que: *Se r e s são retas cortadas por uma transversal t, de modo que um par de ângulos alternos internos (respectivamente correspondentes) são congruentes, então as retas r e s, são paralelas.*

Demonstração da Proposição 4.9.

Sejam α e β os ângulos alternos internos congruentes. Suponhamos, por absurdo, que r e s não sejam paralelas. Assim, r e s se interceptam num ponto P. Seja A o ponto de interseção de s com t e B o ponto de interseção de r com t, os três pontos A, B, P definem o triângulo ABP (figura 5.6).

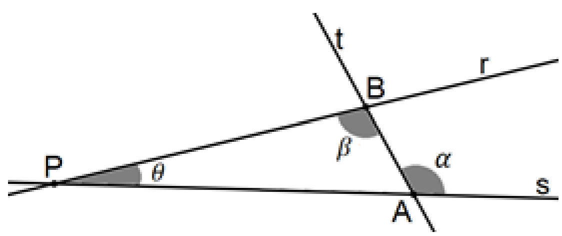

Figura 5.6: Ângulos alternos internos

Note que, α é ângulo externo ao triângulo ABP e, pelo *Teorema do ângulo externo*, temos que $\alpha > \beta$, o que é um absurdo, pois pela hipótese, $\alpha = \beta$, por serem ângulos alternos internos.

Logo, r e s não se interceptam e, portanto, são paralelas.

Observação: Um ângulo correspondente ao ângulo α, neste caso, é ângulo OPV em relação ao ângulo β e portanto igual a $\beta = \alpha$, o que encerra a demonstração.

Proposição 5.18. *O número real* $\sqrt{2}$ *é irracional.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$ é racional, isto é, existem dois números inteiros p e q, com $q \neq 0$ tais que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \tag{5.9}$$

onde $\frac{p}{q}$ é fração irredutível, ou seja, p e q não têm divisor comum maior do que 1.

Elevando a igualdade (5.9) ao quadrado, obtemos que

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \;\Rightarrow\; 2q^2 = p^2$$

mostrndo que p^2 é par e, pela proposição 5.13, p também é par. Logo, p = 2k para algum inteiro k. Daí, tem-se

$$\begin{aligned} &2q^2 = (2k)^2 \\ &\Rightarrow 2q^2 = 4k^2 \\ &\Rightarrow q^2 = 2k^2. \end{aligned}$$

Assim concluímos, como no caso de p, que o número q também deve ser par. Isso mostra que p e q são ambos divisíveis por 2, contrariando a hipótese da fração $\frac{p}{q}$ ser irredutível. O que é um absurdo.

Portanto, concluímos que $\sqrt{2}$ é irracional. □

5.4 Demostração por Indução Matemática

Inicia-se, esta seção, com a mostragem de um jogo de compreensão bastante simples e que pode ser praticado com utilização de moedas, o mesmo possui regras de fácil aprendizagem e possibilita um passo atrativo para a introdução do método da Indução Matemática numa abordagem pitoresca, com capacidade de entreter pela sua essência própria e diferente.

A ilustração do jogo se dará tomando uma quantidade de 8 moedas para exemplificação de como o jogo deve proceder. Inicialmente colocam-se as moedas em fila conforme a figura 5.7.

Figura 5.7: Ilustração do jogo usando moedas.

O jogo tem como finalidade juntar as moedas em duplas e sobrepostas fazendo com que, no final, seja possível obter quatro pares de moedas dispostas conforme aparecem conforme a figura 5.8.

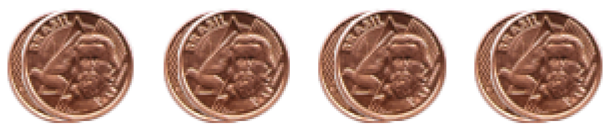

Figura 5.8: Ilustração do jogo usando moedas com finalidade alcançada.

Na busca do sucesso no cumprimento do objetivo final deste jogo, o jogador poderá realizar movimentos com as moedas da seguinte forma: escolher uma moeda qualquer entre as oito disponíveis e promover um salto sobre apenas duas das outras moedas restantes em qualquer das direções direita ou esquerda e, sobrepor a moeda seguinte, de acordo com a figura 5.9 (caso se queira enumerar as posições das moedas fica como opção de quem pratica o jogo).

Figura 5.9: Ilustração do jogo usando moedas após 1 jogada.

Note que, da figura 5.7, foi escolhida a moeda da posição **cinco** e dado um salto sobre as duas à esquerda sobrepondo a moeda de posição **dois**. Outro ponto a ser observado com atenção é o fato de que saltar sobre uma moeda já sobreposta em outra é equivalente a saltar sobre duas moedas. Veja agora a figura 5.9, considerando a sua disposição, escolhe-se a moeda da posição **um** e saltando sobre o par à direita sobrepondo a moeda da posição **três**, obtenso a figura 5.10.

Figura 5.10: Ilustração do jogo usando moedas após 2 jogadas.

Dando sequência e com o objetivo de caracterizar uma situação de jogo, realiza-se mais um movimento, agora de acordo com a disposição das moedas na figura 5.10. Escolhendo a moeda da posição **três** e dando um salto sobre as duas à direita, sobrepondo a moeda da posição **seis**, obtendo a figura 5.11.

Figura 5.11: Ilustração do jogo usando moedas com finalidade não alcançada.

Nesse caso temos a impossibilidade de sucesso nessa exemplificação de uma partida, pois em conformidade com a disposição das moedas na figura 5.11, não há como sobrepor a moeda da posição **três** na moeda da posição **quatro** ou virse-versa, seguindo as regras supracitadas. Não será apresentada, neste trabalho, uma exemplificação com a finalidade alcançada, seja para o caso de oito moedas, dez moedas ou para algum caso com um número maior que 10 moedas.

Pelo exposto até aqui e, considerando a validade do jogo para ocaso de jogar com 8 moedas ou oito peças, caso assim se queira falar, percebe-se facilmente que a quantidade de moedas suficiente para a realização do jogo é $2n$, para algum número natural n, ou seja, um número par, tendo em vista que a finalidade é formar pares de moedas, uma sobrea outra. Desta forma, é natural surgirem perguntas, tais como: pode-se jogar com $2n$ moedas para qualquer n natural? Existe algum $n = n_0$, de modo que seja o menor número natural tal que o jogo seja possível?

Este jogo é uma variante ou mesmo uma adaptação de um jogo com utilização de palitos, divulgado por Aldo Vignatti e Patrícia Fonseca de Brito, na Revista do Professor de Matemática (RPM), nº 84, no segundo quadrimestre de 2014. Para eles, caso um jogador ao realizar o primeiro movimento e este, por exemplo, coincidir com "o palito de posição $2n-3$ sobre o da posição $2n$, então o jogo será reduzido para o caso de $2n-2$ palitos, ou seja, se o jogador souber como alcançar o objetivo do jogo com $2n-2$ palitos então ele saberá com $2n$ palitos" (VIGNATTI, BRITO, 2014, p. 8). Lembrando que a afirmação acima também se aplica igualmente ao caso do jogo com as peças sendo moedas ao invés de palitos.

Voltando as perguntas acima, sobre o número mínimo de moedas para que seja possível chegar ao objetivo final do jogo e, também, se há a possibilidade de jogar com qualquer número natural par de moedas, tem-se, exatamente nesse ponto, a relação do jogo com a Indução em Matemática ou Princípio da Indução Finita, pois esta técnica busca demonstrar a veracidade de uma proposição $P(n)$ aplicável a todo número natural n ou mesmo para qualquer natural n a partir de um número natural fixado $n = n_0$.

Segundo Oliveira e Fernández (2012), o matemático italiano, Giuseppe Peano (1858-1932) estabeleceu uma lista de axiomas, baseado na noção de sucessor, estes axiomas são necessários para nos permitirem, atualmente, representar de modo preciso o conjunto dos naturais. Dentre estes axiomas, num total de quatro, o último deles se destaca, podendo ser enunciado como se segue.

Axioma 5.19 *(Axioma da Indução). Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.*

"Este axioma é conhecido como *axioma da indução* e serve como base do método de demonstração por indução, o qual é de grande utilidade para estabelecer provas rigorosas em Matemática" (OLIVEIRA e FERNÁNDEZ, 2012, p. 204).

Para Morgado e Carvalho (2013, p. 3), ainda que todos os quatro axiomas tenham um valor fundamental para caracterizar os números naturais, o Axioma da Indução tem valor evidenciado, pois "fornece mecanismos para garantir que um dado subconjunto X de $\mathbb{N}$ inclui, na verdade, todos os elementos de $\mathbb{N}$". Desta forma percebe-se que ele é uma ferramenta fundamental para a formulação de definições em Matemática nas demonstrações de importantes teoremas referentes a números naturais.

Ainda segundo os mesmos autores, para demonstrar que uma propriedade $P(n)$ relacionada ao número natural n, é verdadeira para todos os valores de n, isto é, caso se queira demonstrar que o certo conjunto $X = \{n \mid P(n)\}$, onde $X \subset \mathbb{N}$, é na verdade, igual ao próprio $\mathbb{N}$.

Desta forma, o axioma da indução proporciona dizer que "basta mostrar que e que o sucessor de cada elemento de X também está em X". Nesta configuração pode-se afirmar que, em se tratando da propriedade $P(n)$, isto é equivalentemente a "mostrar que: i) $P(1)$ é válida; ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$ a validez de $P(n)$ implica na validez de $P(n+1)$. Verificados esses dois fatos, conclui-se a validez de $P(n)$ para todos os valores de n" (MORGADO e CARVALHO, 2013, p. 3).

O princípio da Indução Matemática, conforme Garbi (2010), pode ser expresso da seguinte forma: Se uma propriedade que diz respeito a números naturais for verdadeira para o número natural 1 e ainda se, da hipótese que ela é verdadeira para o natural n for possível demonstrar que ela é obrigatoriamente verdadeira para o natural seguinte, $n+1$, então pode-se afirmar que tal propriedade é verdadeira para todos os naturais.

Um outro enunciado do Princípio de Indução e muito utilizada nas demonstrações em Matemática é encontrada em Filho (2013, p. 315), para o autor, ao supor a intenção de demonstrar uma certa propriedade $P(n)$ abrangendo números e, para conseguir tal feito, "basta verificar a validade de $P(1)$, e mostrar que, se $P(k)$ é válida para algum número natural $k \geqslant 1$, então $P(k+1)$ é também válida". Sobre o exposto nas palavras dos autores já citados, o processo de indução garante a afirmação de que a validade de $P(1)$ implica na validade de $P(2)$, onde $P(2) = P(1+1)$, que implica na validade de $P(3)$, pois $P(3) = P(2+1)$ que resulta na validade de $P(4)$ já que $P(4) = P(3+1)$ e assim sucessivamente.

É de fundamental importância ressaltar que, nas demonstrações por Indução Finita nem sempre uma propriedade $P(n)$ com $n \in \mathbb{N}$ é verdadeira para $n = 1$, em muitos casos, a propriedade só se verifica como verdadeira a partir de um certo número natural $n \geqslant n_0$, onde é maior do que 1. Esta última observação permite voltar ao jogo das moedas e rever os questionamentos sobre a quantidade mínima de modo a ser possível cumprir a finalidade do jogo. Consequentemente percebe-se na relação com a indução, o fato de não ser possível obter a finalidade do jogo com 4 ou 6 moedas, pois verifica-se que a quantidade mínima possível é de 8 moedas. Uma outra excelente exemplificação desta observação é a proposição a seguir, um resultado da geometria plana referente a ângulos internos de um polígono convexo.

Proposição 5.20. *Se $n \geqslant 3$, então a soma S_n das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é igual a $(n-2) \cdot 180°$, isto é, $S_n = (n-2) \cdot 180°$.*

Num texto sobre outras formas do Princípio da Indução e ao mesmo tempo com redação assemelhada ao exposto até aqui, neste trabalho, Morgado e Carvalho (2013, p. 27) afirmam que, tendo como ponto de partida o Princípio da Indução é possível a obtenção de "variantes úteis para construir determinadas demonstrações", claro que levando em conta a "sempre possível" utilização de sua forma de origem. E assim encontra-se nesse mesmo texto "uma variante que é útil para demonstrar propriedades que são válidas para números naturais a partir de um certo natural n_0 (o valor de n_0 pode ser 0, naqueles casos em que seja interessante considerar o 0 como um número natural)". Ainda segundo os mesmos autores, essa variante equivalente a proposição que vem a seguir, sendo esta uma versão mais geral que o Princípio da Indução Matemática.

Proposição 5.21. *Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n e seja n_0 um número natural. Suponhamos que*

(i) *$P(n_0)$ é válida;*

(ii) Para todo $n \geqslant n_0$ a validez de $P(n)$ implica na validez de $P(n+1)$.

Então $P(n)$ é válida para todo $n \geqslant n_0$.

Demonstração: Defina o conjunto

$$A = \{a \in \mathbb{N}; a \geqslant n_0 \text{ e } P(a) \text{ é verdadeira}\}.$$

Note que, o conjunto A é não vazio, pois a condição (i) garante que $n_0 \in A$. Logo, tem-se o objetivo de mostrar que o conjunto

$$A = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, n_0 + 3, ...\}$$

ou de modo equivalente, mostrar que o conjunto

$$B = \{a \in \mathbb{N}; a \geqslant n_0 \text{ e } P(a) \text{ é falsa}\}$$

é vazio.

Suponha ainda, que B é não vazio. *Pelo Princípio da Boa Ordenação (PBO)*, o conjunto B tem um elemento mínimo, digamos a_0 onde $P(a_0)$ é falso. Observe que,

(I) $a_0 \geqslant n_0 + 1$. De fato, $a_0 \geqslant n_0$, porém a possibilidade $a_0 = n_0$ contradiz a condição (i);

(II) $a_0 - 1 \in A$. Com efeito, $P(a_0 - 1)$ é verdadeira pois, caso contrário, $a_0 - 1 \in B$ e, além disso, $a_0 - 1 < a_0$, o que contradiz a minimalidade de a_0.

Finalmente, como $P(a_0 - 1)$ é verdadeira, segue da condição $ii)$ que $P(a_0)$ também é verdadeira, o que é impossível pela definição de a_0. Logo, o conjunto B é vazio.

Portanto, $P(n)$ é válida para todo número natural $n \geqslant n_0$. □

Para evidenciar um grande leque de opções na maneira de enunciar o Princípio da Indução Matemática, encontra-se ainda segundo as ideias de Filho (2013, p. 316), o que segue:

Princípio de Indução

Uma propriedade $P(n)$ dependendo de um número natural n, é válida para todos os números $n \geqslant n_0$, se provarmos:
(i) $P(n_0)$ é válida;
(ii) Se $P(k)$ for válida para algum número natural $k \geqslant n_0$, então $P(k+1)$ é válida.
A suposição de que $P(k)$ é válida chama-se **hipótese de indução**.

Em complementação e reforço ao que foi dito anteriormente, é interessante observar que numa Demonstração por Indução, a ação de averiguar que $P(n_0)$ é verdadeira geralmente é chamada de caso base, ao passo que a Demonstração da veracidade de $P(n)$ implica na veracidade de $P(n+1)$ é denominada de passo indutivo.

Ainda sobre o jogo de moedas referido em trecho anterior, pode-se verificar a sua relação com o Princípio de Indução em Matemática pelo fato deste ter a intencionalidade de mostrar a veracidade de uma propriedade $P(n)$ para todo n natural a partir de um determinado e para tanto usa um procedimento em dois passos. Primeiramente mostrar que $P(n_0)$ é verdadeira, isto é, o caso base, depois mostrar que a veracidade de $P(n-1)$ implica na veracidade de $P(n)$ para algum $(n-1) \geqslant n_0$. De modo equivalente, no caso do jogo, a propriedade seria como a seguir:

$$P(n): \text{ Pode-se alcançar a finalidade do jogo com um número } 2n \text{ de moedas, onde } n \geqslant 4.$$

Assim, o caso base da indução seria verificar que é possível jogar com um número mínimo de $2n$ moedas sendo $n = 4$. O passo indutivo equivale a mostrar a possibilidade de jogar com um número de $2n$ moedas sendo $n > 4$, o que já foi observado em comentário anterior quando se diz que, no caso de um jogador escolher como movimento inicial a moeda de posição $2n-3$ e sobrepor na de posição $2n$, então o jogo será reduzido ao caso de $2n-2 = 2\cdot(n-1)$ moedas. Se o jogo cumprir sua finalidade com $2n-2 = 2\cdot(n-1)$ moedas, ou seja $P(n-1)$ então cumprirá também com $2n$ moedas, isto é, $P(n)$, mostrando que a verdade de $P(n-1)$ implica na verdade de $P(n)$.

Em sequência, tem-se a aplicação da técnica de demonstração por Indução Matemática através de algumas proposições acompanhadas de suas respectivas demonstrações.

Proposição 5.22. *Para todo natural* $n \geqslant 1, 10^n$ *é da forma* $3q+1$ *para algum natural* q.

Demonstração: Provaremos o resultado por indução.

Seja $P(n) : 3q+1$. Claramente $P(n)$ vale para $n = 1$, pois $10^1 = 3 \cdot 3 + 1 = 10$.

Suponhamos que $P(n)$ vale para um certo $n = k$, ou seja, $10^k = 3 \cdot q + 1$.

Queremos mostrar que $P(n)$ vale para $n = k+1$, isto é, $10^{k+1} = 3 \cdot q' + 1$.

De fato,

$$\begin{aligned} 10^{k+1} &= 10^k \cdot 10 \\ &= (3 \cdot q + 1) \cdot 10 \end{aligned}$$

pela hipótese de indução. Assim,

$$\begin{aligned} 10^{k+1} &= 3 \cdot 10q + 10 \\ &= 3 \cdot 10q + 9 + 1 \\ &= 3(10q + 3) + 1. \end{aligned}$$

Fazendo $10q + 3 = q'$, temos que

$$10^{k+1} = 3 \cdot q' + 1.$$

Portanto, $10^n = 3q + 1$ para todo natural $n \geqslant 1$. $\square$

Definição 5.23. *Uma Progressão Aritmética* (PA) *é toda sequência de números reais* (a_n) *em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo precedente com número real fixo* r, *onde o número real* r *é chamado de razão da Progressão Aritmética. Numa*

PA de termos (a_n), dado o primeiro termo a_1, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $a_{n+1} = a_n + r$.

Proposição 5.24. *Se uma sequência de números reais (a_n) é uma Progressão Aritmética (PA), então cada termo da sequência é dado pela expressão $a_n = a_1 + (n-1)r$, com $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Seja a proposição $P(n) : a_n = a_1 + (n-1)r$. Temos que a proposição é válida para $n = 1$, pois

$$a_1 = a_1 + (1-1)r = a_1 + 0 = a_1$$

Suponhamos que $P(n)$ é válida para um certo $n = k$, ou seja,

$$a_k = a_1 + (k-1)r.$$

Queremos mostrar que P(n) é válida para um n = k+1, isto é,

$$a_{k+1} = a_1 + [(k+1) - 1]r.$$

Por definição de PA e usando a hipótese de indução, temos que

$$a_{k+1} = a_k + r \Rightarrow a_{k+1} = a_1 + (k-1)r + r.$$

Daí, obtemos que

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_1 + kr - r + r \\ \Rightarrow a_{k+1} &= a_1 + (k+1)r - r \\ \Rightarrow a_{k+1} &= a_1 + [(k+1) - 1]r. \end{aligned}$$

Portanto, a fórmula $a_n = a_1 + (n-1)r$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Definição 5.25. *Uma Progressão Geométrica* (PG) *é toda sequência de números reais* (a_n) *em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo precedente com número real fixo* q*, onde o número real* q *é diferente de 0 e de 1, chamado de razão da Progressão Geométrica. Numa PG de termos* (a_n)*, dado o primeiro termo* a_1*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, tem-se que* $a_{n+1} = a_n \cdot q$*.*

Proposição 5.26. *Se uma sequência de números reais* (a_n) *é uma Progressão Geométrica* (PG)*, então cada termo da sequência é dado pela expressão* $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$*, com* $n \in \mathbb{N}$*.*

Demonstração: Seja a proposição $P(n) : a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. A proposição é obviamente verdadeira $n = 1$, pois

$$a_1 = a_1 \cdot q^{1-1} = a_1 \cdot q^0 = a_1 \cdot 1 = a_1.$$

Suponhamos que $P(n)$ é verdadeira para um certo $n = k$, ou seja,

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}.$$

Queremos mostrar que $P(n)$ é verdadeira para um $n = k + 1$, isto é,

$$a_{k+1} = a_1 \cdot q^{(k+1)-1}.$$

Por definição de Progressão Geométrica e usando a hipótese de indução, temos que

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k \cdot q \\ &= a_1 \cdot q^{k-1} \cdot q \\ &= a_1 \cdot q^{k-1+1} \\ &= a_1 \cdot q^{(k+1)-1}. \end{aligned}$$

Portanto, a fórmula $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

5.5 Outras Aplicações

Esta seção será destinada a apresentar uma série de proposições e suas respectivas demonstrações. Também incorpora-se a estas, algumas definições e axiomas importantes no estudo e na aprendizagem da Matemática e que compõem uma engrenagem fundamental frente às demonstrações de muitas das proposições que aqui serão mostradas. Procurou-se incluir tanto as definições, axiomas e as demonstrações numa linguagem que seja ao mesmo tempo formal e com um detalhamento cuja compreensão esteja ao alcance de um estudante da educação básica, especificamente, o aluno do Ensino Médio.

No quarto capítulo deste trabalho, mostrou-se algumas proposições cujas demonstrações, dependendo do método escolhido, careciam de uma demonstração pré-requisito ou proposições já aceitas como verdadeiras. São elas: **proposição 4.9** (já demonstrada na seção 5.1), **proposição 4.10**, **proposição 4.11** e **proposição 4.12**, onde a três últimas têm, respectivamente, as seguintes redações:

- *Em qualquer triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos que não lhe são adjacentes;*
- *A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer vale* $180°$*;*
- *Sejam r e s retas paralelas e t uma reta transversal a r e s. Os ângulos alternos internos formados por essas retas são congruentes.*

Axioma 5.27 *(Axioma das paralelas). Dados, no plano, uma reta r e um ponto $A \notin r$, existe uma única reta s, paralela a r e passando por A.*

Demonstração da Proposição 4.12:

Sejam r e s retas paralelas e t uma transversal a r e s. Suponha, por absurdo, que os ângulos alternos internos α e β determinados por r e s e a transversal t, que as toca, respectivamente, nos pontos A e B, são diferentes, ou seja, $\alpha \neq \beta$ (figura 5.12).

Trace uma reta s' passando pelo ponto A tal que os ângulos alternos internos determinados por s', s e a transversal t sejam iguais. Assim, pela proposição 4.9, as retas

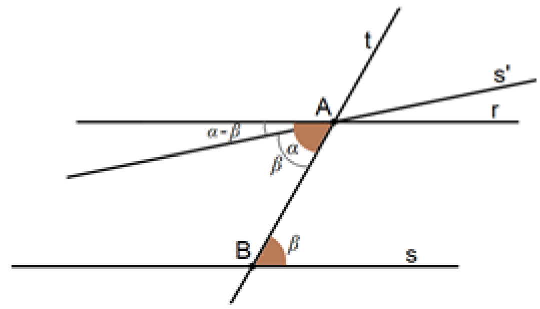

Figura 5.12: Retas paralelas r e s cortadas pela reta transversal t.

s' e s são paralelas. Mas, por hipótese, r é paralela a s. Como s' e r passam pelo ponto A, teríamos por esse ponto duas retas (s' e r) paralelas a reta s, contrariando o axioma 5.27, pelo qual, por um ponto fora de uma reta passa um a única paralela a tal reta.

Portanto, os ângulos alternos internos, α e β têm medidas iguais. □

Demonstração da Proposição 4.11:

Seja ABC um triângulo qualquer e seja DE a reta paralela ao lado AB e passando por C (figura 5.13).

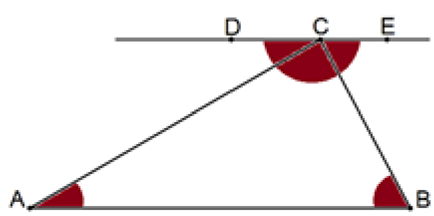

Figura 5.13: Ilustração da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer.

Pela proposição 4.12, temos que

$$\mathrm{B}\widehat{A}C = A\widehat{C}D \quad e \quad A\widehat{B}C = B\widehat{C}E$$

de sorte que

$$\mathrm{B}\widehat{A}C + A\widehat{B}C + A\widehat{C}B = A\widehat{C}D + B\widehat{C}E + A\widehat{C}B = D\widehat{C}E.$$

E, como $D\widehat{C}E$ é um ângulo raso, então $B\widehat{A}C + A\widehat{B}C = 180°$

Portanto, a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer vale 180°. □

Demonstração da Proposição 4.10:

Sejam α, β, e γ os ângulos internos do triângulo ABC (figura 5.14) e seja θ um ângulo externo ao referido triângulo. Queremos mostrar que $\theta = \alpha + \beta$.

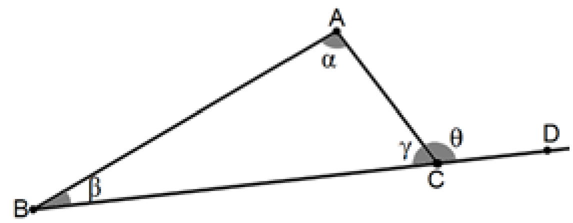

Figura 5.14: Ângulo externo de um triângulo ABC.

Pela proposição 4.11, temos que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Note que, $B\widehat{C}D = \theta + \gamma$ é um ângulo raso, ou seja, vale $180°$. Assim, tem-se:

$$\theta + \gamma = \alpha + \beta + \gamma.$$

Subtraindo γ em ambos os lados da igualdades, obtemos que $\theta = \alpha + \beta$. □

Proposição 5.28. *A soma de dois números pares quaisquer é um número par.*

Demonstração: Sejam a e b dois números quaisquer. Pela definição 4.5, a e b são da forma $2q$ e $2q'$, respectivamente, com q e q' inteiros. Assim, temos:

$$\begin{aligned} a + b &= 2q + 2q' \\ \Rightarrow a + b &= 2 \cdot (q + q'). \end{aligned}$$

Tomando $k = q + q'$, com k inteiro, temos que

$$a + b = 2k$$

. □

Proposição 5.29. *Se a e b são dois números naturais pares, então seu produto ab é um número natural par.*

Demonstração: Sejam a e b dois números naturais pares tais que

$$a = 2q \;\; e \;\; b = 2p$$

com q, p pertencentes a $\mathbb{N}$. Logo,

$$\begin{aligned} ab &= (2q) \cdot (2p) \\ &= 4qp \\ &= 2 \cdot 2qp \\ &= 2k \end{aligned}$$

para $k = 2qp$.

Portanto, ab é um número natural par. $\square$

Proposição 5.30. *O produto de dois números naturais consecutivos é sempre um número natural par.*

Demonstração: Sejam n_1 e n_2 dois números naturais consecutivos de tal modo que $n_2 = n_1 + 1$. Sem perda de generalidade, suponha que n_1 seja par, ou seja, $n_1 = 2q$, $q \in \mathbb{N}$. No caso de n_1 ser ímpar, a demonstração é análoga. Segue daí que

$$\begin{aligned} & n_1 \cdot n_2 = n_1 \cdot (n_1 + 1) \\ & \Rightarrow n_1 \cdot n_2 = 2q \cdot (2q + 1) \\ & \Rightarrow n_1 \cdot n_2 = 4q^2 + 2q \\ & \Rightarrow n_1 \cdot n_2 = 2 \cdot (2q^2 + q) \\ & \Rightarrow n_1 \cdot n_2 = 2k \end{aligned}$$

onde $2q^2 + q = k \in \mathbb{N}$.

Portanto, o produto de dois números naturais consecutivos é sempre par. $\square$

Definição 5.31. *Dado uma lista de números x_1, x_2, x_3, ..., x_n, a média aritmética simples entre eles é um número m_a, tal que $m_a = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$ e a média geométrica entre eles é o número m_g, tal que $m_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n}$ ou ainda $(m_g)^n = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n$.*

Proposição 5.32. *A média aritmética entre dois números racionais, a e b, com $a < b$, é um número maior do que a e menor do que b.*

Demonstração: Seja $\dfrac{a+b}{2}$ a média aritmética entre os números racionais a e b. Considere duas situações:

(I) Como $a < b$, somando o número racional a em ambos os membros da desigualdade anterior, obtemos que

$$\begin{aligned} & a + a < a + b \\ \Rightarrow \quad & 2a < a + b \\ \Rightarrow \quad & a < \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

(II) Analogamente, somando o número racional b em ambos os lados da desigualdade $a < b$, obtemos que

$$\begin{aligned} & a + b < b + b \\ \Rightarrow \quad & a + b < 2b \\ \Rightarrow \quad & \frac{a+b}{2} < b. \end{aligned}$$

Portanto, de (I) e (II) temos que $a < \dfrac{a+b}{2} < b$. $\square$

Definição 5.33. *Um ângulo cuja medida é igual a* 90° *é chamado de ângulo reto.*

Definição 5.34. *Um triângulo que possui um ângulo reto é chamado triângulo retângulo. O lado oposto ao ângulo reto é chamado hipotenusa, e os outros dois lados são denominados catetos.*

Proposição 5.35. *Em todo triângulo retângulo a altura relativa ao vértice do ângulo reto é a média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.*

Demonstração: Seja ABC um triângulo retângulo em A e, sejam $\overline{CH} = m$ e $\overline{HB} = n$, as projeções dos catetos $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, respectivamente, sobre a hipotenusa. Pelo ponto A, trace a altura $\overline{AH} = h$ relativa a hipotenusa $\overline{BC} = a$ (figura 5.15).

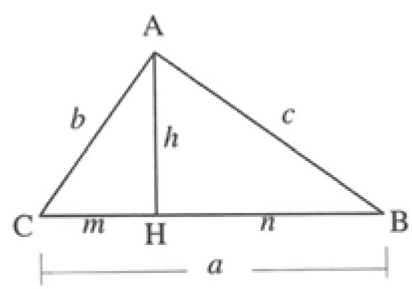

Figura 5.15: Triângulo retângulo ABC. Fonte: Wagner (2017).

Daí, temos que ABH e ACH são triângulos retângulos com ângulo reto no vértice H e ainda que $\mathrm{A\hat{B}C} = \mathrm{A\hat{B}H}$ e $\mathrm{A\hat{C}B} = \mathrm{A\hat{C}H}$.

Temos que $\mathrm{A\hat{C}H} + \mathrm{H\hat{A}C} = 90^\circ$ e $\mathrm{A\hat{B}C} + \mathrm{A\hat{C}B} = 90^\circ$, então $\mathrm{H\hat{A}C} = \mathrm{A\hat{B}C} = \mathrm{A\hat{B}H}$.

De modo análogo, $\mathrm{A\hat{B}H} + \mathrm{H\hat{A}B} = 90^\circ$ e $\mathrm{A\hat{B}C} + \mathrm{A\hat{C}B} = 90^\circ$, o que implica que $\mathrm{H\hat{A}B} = \mathrm{A\hat{C}B} = \mathrm{A\hat{C}H}$. Logo, os triângulos ACH e ABH são semelhantes e estes são semelhantes ao triângulo ABC. Desta forma, tem-se

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \quad \Rightarrow \quad h^2 = mn. \tag{5.10}$$

Donde, h é a média geométrica entre m e n. □

Proposição 5.36. *Em todo triângulo retângulo cada cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e a sua respectiva projeção sobre a hipotenusa.*

Demonstração: Pela proposição 5.35, podemos garantir que os triângulos ABC, ABD e ACD são semelhantes entre si (figura 5.16).

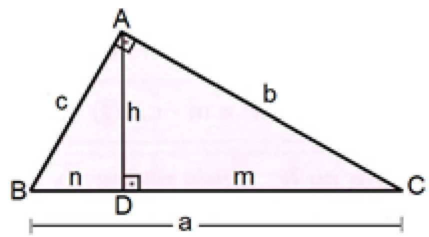

Figura 5.16: Triângulo retângulo ABC. Fonte: adaptada de Iezzi (2008).

Tomando os triângulos ACD e ABC, temos:

$$\frac{b}{m} = \frac{a}{b} \Rightarrow \quad b^2 = am. \tag{5.11}$$

Analogamente, usando os triângulos ABD, ABC temos:

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{c} \Rightarrow \quad c^2 = an, \tag{5.12}$$

o que encerra a demonstração.

Proposição 5.37. *Em qualquer triângulo retângulo o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela.*

Demonstração: Utilizando a nomenclatura da figura 5.16 queremos mostrar que $bc = ah$. Tomando as equações 5.11 e 5.12 demonstradas na proposição 5.36 e multiplicando membro a membro estas igualdades, obtemos que

$$\begin{aligned} & b^2 \cdot c^2 = am \cdot an \\ \Rightarrow \quad & b^2c^2 = a^2mn. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Substituindo a igualdade 5.10 (demonstrada na proposição 5.35) na igualdade 5.13 temos que

$$b^2c^2 = a^2h^2 \quad \Rightarrow \quad bc = ah$$

como queríamos demonstrar.

Proposição 5.38 (*Teorema de Pitágoras*). *Em todo triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

Demonstração: Seja ABC um triângulo retângulo em A. Como já provado anteriormente, cada cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e a sua projeção sobre a hipotenusa, ou, seja, $b^2 = am$ e $c^2 = an$ (figura 5.17).

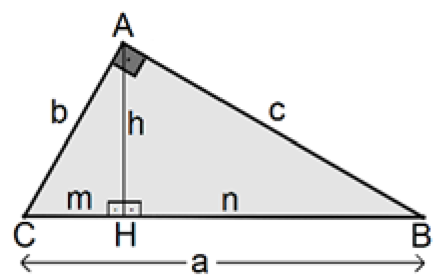

Figura 5.17: Ilustração do Teorema de Pitágoras.

Sendo assim, somando membro a membro, as duas igualdades, temos

$$b^2 + c^2 = am + an \quad \Rightarrow \quad b^2 + c^2 = a(m+n). \tag{5.14}$$

Como $a = m + n$, substituindo esta última igualdade em 5.14, obtemos que

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= a \cdot a \\ \Rightarrow \; a^2 &= b^2 + c^2 \end{aligned}$$

Portanto, em todo triângulo retângulo no qual a hipotenusa mede a e os catetos medem b e c, temos que $a^2 = b^2 + c^2$. $\square$

Proposição 5.39. *Se em um triângulo ABC, as medidas dos lados são dadas por a, b e c de tal modo que $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo ABC é retângulo de hipotenusa a, e catetos b e c.*

Demonstração: Seja o triângulo ABC, com $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, onde $a^2 = b^2 + c^2$.

Caso I: $B\widehat{A}C < 90°$.

Considere que $b \leq c$, assim a projeção D do vértice C sobre o lado AB acontece no interior de AB. Sejam ainda $\overline{AD} = x$ e $\overline{CD} = h$ (figura 5.18).

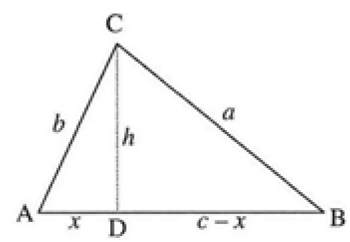

Figura 5.18: Ilustração da proposição 5.39, caso I. Fonte: Wagner (2017).

Como os triângulos BCD e ACD são retângulos, então

$$a^2 = (c - x)^2 + h^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = a^2 - (c - x)^2 \tag{5.15}$$

e

$$b^2 = x^2 + h^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = b^2 - x^2. \tag{5.16}$$

De (5.15) e (5.16), temos que

$$\begin{aligned} a^2 - (c - x)^2 &= b^2 - x^2 \\ \Rightarrow a^2 - c^2 + 2cx - x^2 &= b^2 - x^2 \\ \Rightarrow a^2 &= b^2 + c^2 - 2cx \\ \Rightarrow a^2 &< b^2 + c^2 \end{aligned}$$

o que contradiz a hipótese de que $a^2 = b^2 + c^2$.

Caso II: $B\widehat{A}C > 90°$.

Nesse caso, o ponto D se projeta fora do lado AB (figura 5.19).

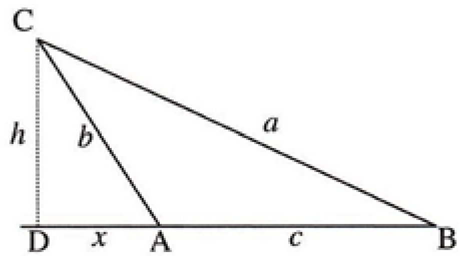

Figura 5.19: Ilustração da proposição 5.39, caso II. Fonte: Wagner (2017).

Assim como no caso I, os triângulos BCD e ACD também são retângulos. Daí, temos

$$a^2 = (x+c)^2 + h^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = a^2 - (x+c)^2 \tag{5.17}$$

e

$$b^2 = x^2 + h^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = b^2 - x^2. \tag{5.18}$$

De (5.17) e (5.18), temos que

$$\begin{aligned} a^2 - (x+c)^2 &= b^2 - x^2 \\ \Rightarrow a^2 - x^2 - 2cx - c^2 &= b^2 - x^2 \\ \Rightarrow a^2 &= b^2 + c^2 + 2cx \\ \Rightarrow a^2 &> b^2 + c^2 \end{aligned}$$

o que contradiz novamente a hipótese de que $a^2 = b^2 + c^2$.

Das considerações feitas, temos que $B\widehat{A}C$ não pode ser menor que 90°, tampouco $B\widehat{A}C$ pode ser maior do que 90°, o que nos leva a concluir que $B\widehat{A}C = 90°$. □

Portanto, ABC é um triângulo retângulo, com hipotenusa a, e catetos b e c. □

Observação: Pelas proposições 5.38 e 5.39, percebe-se que os dois resultados podem ser reunidos em uma única proposição do tipo "P se, e somente se, Q", apresentando uma outra redação para os resultados. Esta redação que se segue representa um resultado matemático muito conhecido em todo o mundo, o Teorema de Pitágoras.

Um triângulo ABC, de lados $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, é um triângulo retângulo se, e somente se, $a^2 = b^2 + c^2$.

Na seção 5.4 do capítulo 5, foi apresentada a proposição 5.20 cuja demonstração pode ser feita por indução sobre n, com $n \in \mathbb{N}$, porém, nesse caso, n não é o primrose elemento do conjunto $\mathbb{N}$, dos números naturais. Segue a redação da citada proposição.

Se $n \geq 3$, então a soma S_n, das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é igual a $(n-2) \cdot 180°$, isto é, $S_n = (n-2) \cdot 180°$.

Demonstração da Proposição 5.20:

Provaremos por indução. Seja a proposição $P(n) : S_n = (n-2) \cdot 180°$. Desta forma, temos que:

A proposição é verdadeira para $n = 3$, pois

$$\begin{aligned} S_3 &= (3-2) \cdot 180° \\ &= 1 \cdot 180° \\ &= 180°, \end{aligned}$$

onde $180°$ é a soma dos ângulos internos de um triângulo, polígono convexo com exatamente 3 lados.

Suponha que a proposição é verdadeira para um certo $n = k$, sendo $k \geq 3$, ou seja,

$$S_k = (k-2) \cdot 180°.$$

Queremos mostrar que a proposição vale para $n = k+1$, isto é,

$$S_{k+1} = [(k+1)-2)] \cdot 180°.$$

De fato, tomando a diagonal A_1A_k no polígono convexo $A_1A_2A_3...A_kA_{k+1}$ de $k+1$ lados, então este fica divido em dos polígonos: o triângulo $A_1A_kA_{k+1}$ e o polígono convexo $A_1A_2A_3...A_k$ de k lados (figura 5.20), o qual a proposição é válida, pela hipótese de indução.

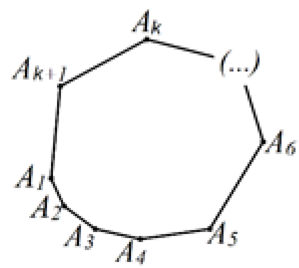

Figura 5.20: polígono convexo.

Assim, podemos escrever:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + 180° \\ &= (k-2) \cdot 180° + 180° \\ &= [(k-2)+1] \cdot 180° \\ &= [k-2+1] \cdot 180° \\ &= [(k+1)-2] \cdot 180°. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, concluímos que a fórmula é vale para todo natural $n \geq 3$. □

Proposição 5.40. *Se n+1 senhas diferentes foram distribuídas para n alunos, então algum aluno recebeu duas ou mais senhas.*

Demonstração: A contrapositiva da proposição 5.40 é:

Se todo aluno recebeu menos que 2 senhas, então não foram distribuídas n+1 senhas".

Pela contrapositiva, tem-se que cada aluno recebeu menos que 2 senhas. Logo, tem-se obrigatoriamente que cada aluno recebeu 1 senha ou nenhuma senha. Desta forma, com um total de n alunos, teríamos uma quantidade de senha menor do que n ou no máximo igual a n. Portanto, não foram distribuídas $n+1$ senhas. □

Proposição 5.41. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, a soma $1+2+3+...+n$ é dada por* $\dfrac{(1+n)n}{2}$.

Demonstração: Seja a propriedade $P(n): 1+2+3+...+n = \dfrac{(1+n)n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. A propriedade é verdadeira para $n=1$, pois $1 = \dfrac{(1+1)\cdot 1}{2}$.

Suponhamos que $P(n)$ seja verdadeira para algum $n=k$, ou seja,

$$1+2+3+...+k = \frac{(1+k)k}{2}.$$

Vamos mostrar que que $P(n)$ é verdadeira para $n=k+1$, isto é,

$$1+2+3+...+k+(k+1) = \frac{[1+(k+1)]\cdot(k+1)}{2}.$$

Ora, usando a hipótese de indução, temos que

$$\begin{aligned} 1+2+3+...+k+(k+1) &= \frac{(1+k)k}{2}+(k+1) = \frac{(1+k)k}{2}+\frac{2(k+1)}{2} \\ &= \frac{k+k^2+2k+2}{2} = \frac{1+k+k^2+2k+1}{2} \\ &= \frac{(1+k)+(k+1)^2}{2} = \frac{[(1+(k+1)](k+1)}{2} \end{aligned}$$

o que encerra a demonstração.

Portanto a fórmula é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Proposição 5.42. *Sejam a, b e c números reais com $a \neq 0$. Se $b^2-4ac \geq 0$, então as raízes da equação $ax^2+bx+c=0$ são dadas por $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.*

Demonstração: Podemos multiplicar a equação $ax^2 + bx + c = 0$ por $4a$. Assim, obtemos,

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Somando b^2 em ambos os membros da igualdade anterior, temos que

$$\begin{aligned}
&4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac = b^2 \\
&\Rightarrow (2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 = b^2 - 4ac \\
&\Rightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.
\end{aligned}$$

Temos, por hipótese, que $b^2 - 4ac \geq 0$. Daí, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
&2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{ou} \quad 2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac} \\
&\Rightarrow 2ax = -b + \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{ou} \quad 2ax = -b - \sqrt{b^2 - 4ac} \\
&\Rightarrow x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Portanto, as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, são dadas por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ □

Proposição 5.43. *Um número natural n, quando dividido por 5, deixa resto 3 se, e somente se, o dobro de n deixa resto 1, quando dividido por 5.*

Demonstração: Suponha que o número natural n deixa resto 3 qunado dividido por 5, isto é, existe um número natural q, tal que n = 5q + 3.

Multiplicando ambos os membros da última igualdade por 2, obtemos

$$\begin{aligned} 2n &= 10q + 6 \\ &= 10q + 5 + 1 \\ &= 5(2q + 1) + 1 \\ &= 5k + 1 \end{aligned}$$

para $k = 2q + 1$, com $k \in \mathbb{N}$. Logo, o dobro de n deixa resto 1, quando dividido por 5.

Reciprocamente, suponha que $2n$ deixa resto 1 quando dividido por 5, ou seja,

$$2n = 5y + 1 \tag{5.19}$$

onde $y \in \mathbb{N}$.

Pela igualdade (5.19) tem-se que $5y$ é ímpar, logo y também é ímpar. Assim, existe um natural r de modo que

$$y = 2r + 1. \tag{5.20}$$

Substituindo (5.20) em (5.19), obtemos

$$\begin{aligned} 2n &= 5(2r + 1) + 1 \\ &= 10r + 5 + 1 \\ &= 10r + 6 \\ &= 2(5r + 3) \\ \Rightarrow n &= 5r + 3. \end{aligned}$$

Portanto, n deixa resto 3, quando dividido por 5. $\square$

Outro resultado já citado anteriormente foi o Teorema de número 4.27, o mesmo afirma que: *O número $x = a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0$ representado na base 10 é divisível por 3 se, e somente se, o número $a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0$ é divisível por 3.*

Demonstração do Teorema 4.27:

Primeiramente suponha que $x = a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0$ seja divisível por 3, ou seja, existe um $q' \in \mathbb{N}$ de tal modo que:

$$\begin{aligned} x &= a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0 \\ &= 10^n a_n + 10^n a_{n-1} + ... + 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + a_0 \\ &= 3q'. \end{aligned}$$

Usando a proposição 5.22 na última igualdade, temos que

$$\begin{aligned} &(3q_n + 1)a_n + (3q_{n-1} + 1)a_{n-1} + ... + (3q_2 + 1)a_2 + (3q_1 + 1)a_1 + a_0 = 3q' \\ &\Rightarrow \quad 3q_n a_n + 3q_{n-1} a_{n-1} + ... + 3q_2 a_2 + 3q_1 a_1 + (a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0) = 3q' \\ &\Rightarrow \quad 3(q_n a_n + q_{n-1} a_{n-1} + ... + q_2 a_2 + q_1 a_1) + (a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0) = 3q'. \end{aligned}$$

Fazendo, $q_n a_n + q_{n-1} a_{n-1} + ... + q_2 a_2 + q_1 a_1 = q''$, onde $q'' \in \mathbb{N}$ e usando a hipótese, temos

$$\begin{aligned} &3q'' + a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0 = 3q' \\ &\Rightarrow \quad a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0 = 3q' - 3q'' = 3(q' - q'') = 3q \end{aligned}$$

onde $q = q' - q''$, com $q \in \mathbb{N}$.

Logo, $a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0$ é divisível por 3.

Reciprocamente, suponha que $a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0$ seja divisível por 3, ou seja, existe $k' \in \mathbb{N}$, tal que

$$a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0 \ = \ 3k'.$$

Agora, seja x um número no sistema decimal, de modo que

$$\begin{aligned} x &= a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0 \\ &= 10^n a_n + 10^n a_{n-1} + ... + 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + a_0. \end{aligned}$$

Novamente pela proposição 5.22, temos que

$$\begin{aligned} x &= (3q_n + 1)a_n + (3q_{n-1} + 1)a_{n-1} + ... + (3q_2 + 1)a_2 + (3q_1 + 1)a_1 + a_0 \\ &= 3q_n a_n + 3q_{n-1} a_{n-1} + ... + 3q_2 a_2 + 3q_1 a_1 + (a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0) \\ &= 3(q_n a_n + q_{n-1} a_{n-1} + ... + q_2 a_2 + q_1 a_1) + (a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0). \end{aligned}$$

Tomando $q_n a_n + q_{n-1} a_{n-1} + ... + q_2 a_2 + q_1 a_1 = k''$, com $k'' \in \mathbb{N}$ e usando a hipótese, obtemos que

$$\begin{aligned} & x = 3k'' + 3k' \\ & \Rightarrow x = 3(k'' + k') \\ & \Rightarrow x = 3k \end{aligned}$$

onde $k = k'' + k'$ e $k \in \mathbb{N}$.

Portanto, $x = a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0$ é divisível por 3. □

Assim como o Teorema 4.27, outro resultado já mencionado neste trabalho foi o Teorema 4.26, cuja redação é a seguinte: *O número $x = a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0$ representado na base 10 é divisível por 7 se, e somente se, o número $a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 - 2a_0$ é divisível por 7.*

Demonstração do Teorema 4.26:

Suponha que $x = a_n a_{n-1} a_2 a_1 a_0$ seja divisível por 7. Assim, existe um $q \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0 \;=\; 7q.$$

Como,

$$\begin{aligned} a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0 &= 10^n a_n + 10^n a_{n-1} + ... + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0 \\ &= \sum_{i=0}^{n} 10^i a_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} 10^i a_i + a_0, \end{aligned}$$

temos que

$$\sum_{i=1}^{n} 10^i a_i + a_0 \;=\; 7q.$$

Multiplicando a última igualdade por 2, obtemos:

$$2\sum_{i=1}^{n} 10^i a_i + 2a_0 = 14q,$$

$$\Rightarrow\; 2a_0 = 14q - 2\sum_{i=1}^{n} 10^i a_i. \tag{5.21}$$

Note que,

$$a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 - 2a_0 = 10^{n-1} a_n + 10^{n-2} a_{n-1} + ... + 10^1 a_2 + a_1 - 2a_0$$

$$\Rightarrow\; a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 - 2a_0 = \sum_{i=1}^{n} 10^{i-1} a_i - 2a_0. \tag{5.22}$$

Substituindo (5.21) em (5.22) obtemos:

$$\begin{aligned}
a_na_{n-1}...a_2a_1 - 2a_0 &= \sum_{i=1}^{n} 10^{i-1}a_i - \left(14q - 2\sum_{i=1}^{n} 10^{i}a_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 10^{i-1}a_i - \left(14q - 2\sum_{i=1}^{n} 10 \cdot 10^{i-1}a_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 10^{i-1}a_i - \left(14q - 2 \cdot 10\sum_{i=1}^{n} 10^{i-1}a_i\right) \\
&= 21\sum_{i=1}^{n} 10^{i-1}a_i - 14q \\
&= 7\left(3\sum_{i=1}^{n} 10^{i-1}a_i - 2q\right).
\end{aligned}$$

O que prova que $a_na_{n-1}...a_2a_1 - 2a_0$ é divisível por 7.

($\Leftarrow$) Suponha que o número

$$a_na_{n-1}...a_2a_1 - 2a_0 = 10^{n-1}a_n + 10^{n-2}a_{n-1} + ... + 10^1a_2 + a_1 - 2a_0$$

seja divisível por 7. Assim, existe um $q' \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_na_{n-1}...a_2a_1 - 2a_0 = \sum_{i=1}^{n} 10^{i-1}a_i - 2a_0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} 10^{i-1}a_i - 2a_0 = 7q'.$$

Multiplicando a última igualdade por 10, obtemos:

$$
\begin{aligned}
&10\sum_{i=1}^{n} 10^{i-1}a_i - 20a_0 = 10 \cdot 7q' \\
\Rightarrow\ &\sum_{i=1}^{n} 10^{i}a_i - 20a_0 = 10 \cdot 7q' \\
\Rightarrow\ &\sum_{i=1}^{n} 10^{i}a_i + a_0 - a_0 - 20a_0 = 10 \cdot 7q' \\
\Rightarrow\ &\sum_{i=0}^{n} 10^{i}a_i - 21a_0 = 10 \cdot 7q' \\
\Rightarrow\ &\sum_{i=0}^{n} 10^{i}a_i = 10 \cdot 7q' + 21a_0 \\
\Rightarrow\ &\sum_{i=0}^{n} 10^{i}a_i = 7 \cdot (10q' + 3a_0)
\end{aligned}
$$

Portanto, $7 \mid a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0 \Leftrightarrow 7 \mid a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 - 2a_0$ $\square$

Capítulo 6

Considerações Finais

No decorrer deste trabalho procurou-se estabelecer situações e evidenciar elementos que vislumbram a importância das Demonstrações Matemáticas para o ensino e a aprendizagem dos saberes acerca desta ciência, especificamente no Ensino Médio. Não seria exagero dizer que, atualmente, o Ensino Médio brasileiro carece de valorizar mais a aprendizagem de um modo geral e, consequentemente, da Matemática. É preciso entender que esta ciência tem métodos peculiares de expor suas descobertas, de provar a verdade destas e suas respectivas aplicações, necessitando de uma melhoria no saber ler e escrever matematicamente.

Observou-se na literatura pesquisada, que existem documentos oficias que dão abertura para a prática das demonstrações nas aulas de Matemática do Ensino Médio, tais como Brasil (2002) e Brasil (2006), dentre outros, embora eles não apontem as Demonstrações Matemáticas como uma prática obrigatória. Um outro exemplo de documento oficial com tal característica é a Base Nacional Comum Curricular - BNCC, já mencionada anteriormente e que objetiva dar suporte na construção dos currículos em todas as redes de ensino no Brasil, essa base comum visa assegurar ao estudante da educação básica o desenvolvimento de competências gerais e competências em áreas específicas, exatamente aí, ela contempla o raciocínio dedutivo que tanto se emprega nas Demonstrações Matemáticas.

Dado o exposto e considerando as competências propostas para o ensino da Matemática a nível mediano, temos que a Matemática tem uma grande responsabilidade para com o aluno do Ensino Médio no sentido de aproveitar o seu conhecimento já adquirido e desenvolver um ensino baseado em métodos que estimulem os processos de reflexão e de abstração, que promova o pensamento criativo, analítico, indutivo, dedutivo e sistemático contribuindo para a tomada de decisões.

Sobre as hipóteses levantadas na pesquisa, no que diz respeito aos livros de Matemática escolhidos para uso no Ensino Médio, constata-se que muitos deles não incentivam os jovens a pensarem matematicamente, criando um impasse entre a compreensão e a memorização, defendem sem uma análise crítica mais detalhada, muitas vezes, algo dogmatizado como por exemplo a exagerada busca pela contextualização e uma obsessiva simpatia por conteúdos exclusivamente práticos dos currículos, isso se caracteriza na medida em que os livros abrem mão de atividades que exercitem as demonstrações.

Dentre os motivos que levam as demonstrações a serem ainda pouco praticadas no Ensino Médio, encontra-se nas palavras de Druck (2003), um fator que somado aos livros e suas ausências de validações, refletem um ensino limitado em enunciar definições, teoremas e fórmulas Matemáticas sem suas justificativas. Nas palavras da autora, compreende-se que deve-se evitar o grave erro de abordar o ensino de Matemática tão somente com uma visão pedagógica. Sobre a formação do professor e seu valor para o ensino, ela diz que é "necessário encarar primordialmente as deficiências de conteúdo dos que lecionam matemática. É preciso entender as motivações dos que procuram licenciatura em matemática, a formação que a licenciatura lhes propicia e as condições de trabalho com que se deparam".

Avalia-se que a ausência das demonstração em boa parte de livros didáticos, evidenciada por Lima (2013), tanto em relação a exposição teórica dos conteúdos como nos seus exercícios são pontos de baixa para incentivo aos estudantes do Ensino Médio. Porém, é importante refletir sobre as palavras de Ávila (2010), quando relata ser verdade que os livros apresentem pontos negativos, mas que também "devemos reconhecer o que eles têm de bom", pois mesmo que antigamente houvesse maior ênfase em teoremas e demonstrações, os livros não tinham grande preocupação com uma boa didática e com um estilo de escrever direcionado ao jovem, o que acontece hoje e, além disso, em várias ocasiões o professor de Matemática dispõe de um bom livro, porém, não faz utilização de forma mais adequada, ou apenas toma o livro para listar exercícios e problemas direcionados aos estudantes.

As demonstrações garantem a verdade dos fatos matemáticos, proporcionam construção de novos conceitos e com eles pode-se fazer uma combinação entre resolução de problemas e demonstrações, mostrando ao aluno que os conteúdos matemáticos são utilizáveis nos diversos campos do conhecimento e aplicáveis a prática social.

Outro ponto notável foi a constatação dos termos Prova, Demonstração e Justificativa Lógica como sinônimos e que a ação de demonstrar constitui a marca registrada da Matemática, pois as demonstrações garantem a verdade dos resultados matemáticos. Elas devem ser apresentadas aos alunos do nível Médio, de maneira compreensível, com o rigor lógico adequado, sendo necessário atentar para os requisitos didáticos. Portanto, é necessário aproveitar cada oportunidade para ensinar aos jovens a deduzir por meio de raciocínio lógico algumas fórmulas importantes e simples, cujas demonstrações estão ao seu alcance. Não se deve deixar escapar uma ocasião de promover aos alunos do Ensino Médio a chance de pensarem de maneira própria e lógico-dedutiva, para ampliem os conhecimentos científicos que os façam interagir melhor com o mundo que os cercam.

Em virtude dos fatos mencionados, afirma-se que demonstrar proposições matemáticas exige exatidão, requer concentração e cuidado, a prática dessas virtudes no Ensino Médio contribui na formação de hábitos que serão úteis no futuro. A perseverança, dedicação e a ordem no trato com a Matemática são qualidades indispensáveis no trato com uma demonstração matemática e estas devem ser apresentadas por serem parte fundamental da natureza da Matemática e por seu potencial educativo. As demonstrações, quando expressas de forma clara e bem apresentadas, são um bem para desenvolver o raciocínio, o espírito crítico, a maturidade do estudante e ajudam a entender o encadeamento das proposições matemáticas, elas proporcionam aos alunos condições para mais tarde saberem utilizar seus conhecimentos em situações da vida real.

Conclui-se que as Demonstrações Matemáticas, no Ensino Médio, devem ser ter presença marcante, pois elas contribuem significativamente para ensinar aos jovens as mais fundamentais aprendizagens pertinentes a essa notável e valiosa área do conhecimento humana e da prática social. A Matemática deve ter valor um formativo, deve ser frutífera na construção das estruturas do pensamento e do raciocínio dedutivo, ela tem que ser capaz de desempenhar um papel instrumental, constituindo-se em um mecanismo com utilidade prática, que sirva para a vida cotidiana e, além disso, ser uma ferramenta útil em outras tarefas específicas nas diversificadas atividades humanas.

Referências Bibliográficas

[1] AGOSTINHO, Marco Antônio Ferreira. **Questões contextualizadas nas provas de matemática**. Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT. Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA. Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/. Acesso em: 29/01/2018.

[2] ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Reflexões Sobre o Ensino de Geometria**. Revista do Professor de Matemática, nº 71. Rio de Janeiro: SMB, 2010.

[3] BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 11ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[4] BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Ministério de Educação, Secretaria da Educação Básica. Brasília, 2000.

[5] BRASIL. **PCN+ Ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília, 2002. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 17/novembro/2017.

[6] BRASIL. **Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica. Brasília, 2006. Disponível em:

portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book$_v$*olume*$_0$*2*$_i$*nternet.pdf*. Acesso em: 06/janeiro/2018.

[7] BRASIL. **Guia de Livros Didáticos, PNLD 2012: Matemática**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 2011.

[8] BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC: Ensino Médio**. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. Brasília, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/bncc-ensino-medio. Acesso em: 11/julho/2018.

[9] CARVALHO, Dione Lucchesi de Carvalho. **Metodologia do Ensino da Matemática**. 2ª ed. São Paulo: Cortez editora, 1994.

[10] COSTA, Deise M. B.; TEIXEIRA, J. L.; SIQUEIRA, P. H.; SOUSA, L. V. de. **Elementos de Geometria: Geometria plana e espacial**. 3ª ed. Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Departamento de Expressão Gráfica. Curitiba, 2012. Disponível em: *www.exatas.ufpr.br/portal/docs*$_d$*egraf/elementos.pdf*. Acesso em 05/07/2018.

[11] DRUCK, Suely. **O drama do ensino da Matemática**. Folha de São Paulo, 25 de março de 2003. Disponível em: ¡www1.folha.uol.com.br/folha/sinapse/ult1063u343.shtm¿. Acesso em: 16/abril/2018.

[12] DUTENHEFNER, Francisco; CADAR, Luciana. **Encontros de Aritmética**. Rio de Janeiro: IMPA, 2017 - Programa de Iniciação científica da OBMEP - PIC.

[13] DUTENHEFNER, Francisco; CADAR, Luciana. **Encontros de Geometria – parte 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 2017 - Programa de Iniciação científica da OBMEP - PIC.

[14] FILHO, Daniel Cordeiro de Morais. **Um Convite à Matemática**. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[15] FILHO, Daniel Cordeiro de Morais. **Manual de Redação Matemática**. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[16] FOSSA, John Andrew. **Introdução às Técnicas de demonstração na Matemática**. 2ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

[17] GARBI, Gilberto G. **Decorar é preciso, Demonstrar também é**. Revista do Professor de Matemática, nº 68. Rio de Janeiro: SMB, 2009.

[18] GARBI, Gilberto G. **C.Q.D.: Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria**. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

[19] GUIMARÃES, Rita Santos. **Atividades para aprendizagem do conceito matemático de função**. Dissertação de Mestrado Profissional. Universidade Federal de São Carlos - UFSCAR, São Carlos, 2010. Disponível em: $https://www.dm.ufscar.br/\ ptlini/TCC_Rita_Santos_Guimaraes.pdf$. Acesso em: 14/julho/2018.

[20] HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013 - Coleção PROFMAT.

[21] IEZZI, Gelson; MACHADO, Antônio; DOLCE, Osvaldo. **Geometria Plana: conceitos básicos**. 1ª ed. São Paulo: Atual Editora, 2008.

[22] KLINE, Morris. **O Fracasso da Matemática Moderna**. Tradução de Leonidas Gontijo de Carvalho. São Paulo: Ibrasa, 1976.

[23] LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013 - Coleção PROFMAT.

[24] LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

[25] LIMA, Elon Lages. **Conceituação, Manipulação e Aplicações, as três componentes do ensino de Matemática**. Revista do Professor de Matemática, nº 41. Rio de Janeiro: SMB, 1999.

[26] LIMA, Elon Lages. **A Propósito de Contextualização**. Revista do Professor de Matemática, nº 58. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[27] LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino**. 3ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

[28] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César **A Matemática do Ensino Médio, volume 1**. 10ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[29] LIMA, Luiza Maria Morais. **Construções algorítmicas e demonstrações axiomáticas**. Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT. Universidade Estadual do Ceará – UECE. Fortaleza, 2013. Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/. Acesso em: 02/02/2018.

[30] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta**. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013 - Coleção PROMAT.

[31] NETO, Antônio Caminha Muniz. **Tópicos de Matemática Elementar, volume 1. Números Reais**. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[32] NETO, Antônio Caminha Muniz. **Geometria**. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013 - Coleção PROFMAT.

[33] FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa**. 2ª edição, revisada e ampliada. 42ª impressão. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1999.

[34] OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins; FERNÁNDEZ, Adán José Corcho. **Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções**. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[35] PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática: Paiva, volume 1**. Ensino Médio 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2009.

[36] PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática: Paiva, volume 2**. Ensino Médio 3ª ed. São Paulo: Moderna, 2015.

[37] RIPOLL, Cydara; RANGEL, Letícia; GIRALDO, Victor. **Livro do Professor de Matemática da Educação Básica. Volume I: Números Naturais**. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[38] SOUSA, Fábio Henrique Teixeira de. **Algoritmo da divisão euclidiana**. Programa de Iniciação científica da OBMEP. 2014. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=gB0nRZHI4Wg. Acesso em: 06/julho/2018.

[39] VIGNATTI, Aldo; BRITO, Patrícia Fonseca de. **Jogo de palitos e indução finita**. Revista do Professor de Matemática, nº 84. Rio de Janeiro: SMB, 2014.

[40] WAGNER, Eduardo. **Teorema de Pitágoras e Áreas**. Rio de Janeiro: IMPA, 2017 - Programa de Iniciação científica da OBMEP – PIC.