UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

O Método de Ponto Proximal para Otimização Quase Convexa

Gilson Amorim César Filho

Teresina - 2016

Gilson Amorim César Filho

Dissertação de Mestrado:

O Método de Ponto Proximal para Otimização Quase Convexa

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes

Teresina - 2016

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

C422m César Filho, Gilson Amorim.
O método de ponto proximal para otimização quase convexa / Gilson Amorim César Filho. – Teresina, 2016.
50f.: il.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2016.
Orientador: Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes.

1. Algoritmo. 2. Função Quase Convexa. I. Título

CDD 511.8

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

SBM

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada: **O Método de Ponto Proximal para Otimização Quase Convexa**, defendida por **Gilson Amorim César Filho** em **07/04/2016** e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Jurandir de Oliveira Lopes

Jurandir de Oliveira Lopes - Presidente

João Xavier da Cruz Neto

João Xavier da Cruz Neto - Examinador

Arnaldo Silva Brito

Arnaldo Silva Brito - Examinador Externo

"A verdadeira medida de um homem não é como ele se comporta em momentos de conforto e conveniência, mas como ele se mantém em tempos de controvérsia e desafio."

Martin Luther King Jr.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por tudo.

Agradeço a minha família. Pelo amor incondicional, pela criação e pelos ensinamentos valiosos.

Agradeço ao Profº Jurandir de Oliveira Lopes pela sugestão do tema proposto e por suas orientações imprescindíveis ao êxito deste trabalho.

Agradeço aos professores doutores João Xavier da Cruz Neto e Arnaldo Silva Brito por aceitarem o convite para comporem a banca de defesa e pelas sugestões apresentadas.

Agradeço a minha esposa Aline de Carvalho Amorim pelo incondicional apoio, dedicação e paciência nas horas que não dei muita atenção a ela e por tudo que ela representa.

Agradeço ao meu irmão Huérllen Vicente Lemos e Silva pelos momentos de descontração, pela dicas e sugestões que ajudaram no desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço as minhas colegas de trabalho professoras Kedman Jesus Silva e Letícia dos Santos Rocha pela ajuda na elaboração do abstract e pelo paciente trabalho de revisão ortográfica e gramatical.

Agradeço ao Prof. Me. Marcos Wildson Alves Nery pelas sugestões apresentadas e pelo cuidadoso trabalho de revisão.

Agradeço aos amigos do PROFMAT-UFPI, pelos bons momentos, pela troca de conhecimentos e pela grande ajuda que me deram durante o mestrado: Delano, Samuel, Renee, Bruno, Wilson, Jerson, Rubens, Gidêone, Pedro, Perivaldo, Queiroz, Valderino, Leonardo e Raimundinho.

Agradeço a todos os professores do PROFMAT-UFPI que de alguma forma contribuíram para minha formação.

Agradeço ao IMPA pela implantação do PROFMAT em Teresina.

Resumo

Neste trabalho propomos o Algoritmo do Ponto Proximal, que tem como finalidade a resolução do Problema de Minimização Quase Convexa. Mostraremos que a sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gerada pelo algoritmo converge para os pontos críticos de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde f é derivável, com derivada contínua, ou seja, de classe C^1, quase convexa e limitada inferiormente. E, que sob a condição dos parâmetros de regularização convergirem a zero ($\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = 0$), obteremos que a sequência converge para a solução do problema. Além disso, apresentaremos algumas ilustrações/aplicações voltadas para educação básica, no intuito de mostrarmos através da prática a utilização do referido método.

Palavras-chaves: Problema de Minimização, Função Quase Convexa, Algoritmo do Ponto Proximal.

Abstract

In this work we propose the Proximal Point Algorithm that aims the solving of the Minimization QuasiConvex Problem. We will show that the sequence $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ generated by the algorithm converges to the critical points of a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, where f is derivable, with continuous derivative, that is, class C^1, quasiconvex and inferiorly limited. And, that below condition of regularization parameter converges to zero $(\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = 0)$, we will obtain that the sequence converges to the problem solution. Moreover, we present some illustrations/applications related to basic education, in order to show throught the practice utilization of referred to method.

Keywords: Minimization Problem, Function QuasiConvex, Proximal Point Algorithm.

Sumário

Introdução

Em termos matemáticos, otimização refere-se ao estudo de problemas no qual deseja-se minimizar ou maximizar uma dada função. Para Harrel et. all [15], define-se otimização como o processo de tentar diferentes combinações de valores para variáveis que podem ser controladas (variáveis independentes), buscando a combinação de valores que leva à saída mais desejada.

Problemas de otimização são mais comuns do que aparentam e podem facilmente ser encontrados nas mais diversas áreas das ciências e engenharias. Como, por exemplo, um administrador interessado em maximizar a produção de determinado produto, ou ainda, minimizar o custo de produção deste produto. Neste contexto, é possível aplicar técnicas matemáticas de otimização visando encontrar uma "solução ótima"do problema, isto é, que resulte no melhor desempenho possível.

O problema de otimização clássico pode ser representado da seguinte forma:

Dados $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$. Busca-se encontrar um elemento $x^* \in A$ tal que

$$f(x^*) \leqslant f(x), \forall\ x \in A.$$

O conjunto A será chamado *conjunto viável* do problema, os pontos de A serão chamados *pontos viáveis*, e f será chamada *função objetivo*.

A maioria dos trabalhos voltados para otimização faz uso de funções convexas, como função objetivo. No entanto, surgiu-se a necessidade de resolver problemas não convexos, como, por exemplo, as funções quase convexas, que foram objeto de estudo de Attouche e Teboulle [4], sendo eles os responsáveis pela introdução do método do Ponto Proximal para resolução de problemas de minimização quase convexa, motivando assim, a publicação de alguns trabalhos, ver Apolinário [3], Bello Cruz [6], Brito [7], Carvalho [9], Silva [26]. Além disso, algumas aplicações podem ser encontradas em Cysne [11], Murolo [21], Penot [23] ou Quiroz e Oliveira [24]. Estudaremos este tipo de problema neste trabalho.

Vamos considerar o problema de otimização quase convexa:

$$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) := \begin{cases} \text{Encontrar } x^* \in \mathbb{R} \text{ tal que} \\ f(x^*) \leqslant f(x), \forall\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Com as seguintes hipóteses: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável, com derivada contínua, ou seja, de classe C^1; f é quase convexa e limitada inferiormente. Neste caso, o método gera uma sequência. Inicialmente, devemos escolher $x_0 \in \mathbb{R}$ e a partir daí, iterativamente, dado x_{k-1}, encontremos $x_k \in \operatorname{argmin}\{f(x) + \lambda_k(x - x_{k-1})^2\}$, onde $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais positivos tal que $0 < \lambda_k < \lambda$.

No que diz respeito a educação básica para o ensino de matemática, os PCN's recomendam um maior aprofundamento dos conhecimentos matemáticos adquiridos. Nesse sentido, o nosso Método faz uso de vários tópicos de matemática, como por exemplo: sequências de números reais, limite e derivadas, conteúdos esses que possibilitam os alunos da educação básica matematizarem problemas do cotidiano e consequentemente trabalharem na busca de possíveis soluções.

Desta forma, este trabalho encontra-se dividida em três partes. Na primeira, apresentaremos alguns resultados clássicos e conceitos básicos, tais como: sequências de números reais, funções convexas e funções quase convexas, na qual formarão a parte teórica básica para o capítulo subsequente. Em seguida, apresentaremos o algoritmo do ponto proximal para otimização quase convexa, mostraremos a boa definição do algoritmo, analisaremos sua convergência, posteriormente, realizaremos alguns testes em funções reais e utilizaremos o método para encontrarmos a raiz da equação, $e^x = x^2$. Finalmente, são feitas as considerações finais.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos e resultados básicos, tais como: noções de sequência de números reais, limite de funções, continuidade, derivadas, funções convexas e funções quase convexas, que são de fundamental importância para o desenvolvimento deste trabalho.

1.1 Sequências de números reais

Nesta seção iremos abordar algumas definições e resultados sobre a convergência de sequências numéricas infinitas. Esta teoria pode ser encontrada em Lima ([12], [13]), Martinet [19] ou Muniz Neto [20].

Observação 1. *Consideremos o número* 1 *como o menor elemento do conjunto dos naturais* $\mathbb{N}$.

Definição 1. *Uma sequência de números reais é uma função* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *que associa a cada número natural* n *um número real* $x(n) = x_n$, *onde* x_n *é o* n*-ésimo termo da sequência.*

Utiliza-se uma das seguintes notações para representar uma sequência $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$: $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente, (x_n).

Exemplo 1. $x_n = 0$, *se* n *é par e* $x_n = 1$, *se* n *é ímpar, ou seja,* $(x_n) = (1, 0, 1, 0, 1, ...)$.

Exemplo 2. $x_n = \dfrac{1}{n}$, *com* $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3. $x_n = n$, *com* $n \in \mathbb{N}$.

Observação 2. *Vale ressaltar a diferença entre uma sequência e o conjunto formado pelos seus termos. Essa distinção é importante, pois uma sequência pode possuir infinitos elementos, mesmo que seu conjunto de termos seja finito.*

Por exemplo, a sequência $(x_n) = (1, -1, 1, -1, ...)$ não é o mesmo que o conjunto $\{-1, 1\}$. Ou ainda, as sequências $(1, 2, 1, 2, 1, 2, ..)$ e $(1, 1, 2, 1, 1, 2, ...)$ são diferentes, no entanto o conjunto de seus termos, $\{1, 2\}$ é o mesmo.

Definição 2. *Seja (x_n) uma sequência. Diz-se que (x_n) é estritamente crescente se $x_1 < x_2 < ... < x_n < ...$, ou seja, $x_n < x_{n+1}, \forall\ n \in \mathbb{N}$. Analogamente, se $x_1 > x_2 > ... > x_n > ...$, ou seja, $x_n > x_{n+1}, \forall\ n \in \mathbb{N}$ a sequência (x_n) é estritamente decrescente. Se $x_n \leqslant x_{n+1}$ (respectivamente, $x_n \geqslant x_{n+1}, \forall\ n \in \mathbb{N}$), dizemos que a sequência (x_n) é não decrescente (respectivamente, não crescente).*

Observação 3. *Uma sequência (x_n) que satisfaz qualquer uma das condições da (Definição 2) é dita monótona.*

Exemplo 4. $x_n = n$, *com* $n \in \mathbb{N}$. *É monótona (estritamente crescente)*

Exemplo 5. $x_n = \dfrac{1}{n}$, *com* $n \in \mathbb{N}$. *É monótona (estritamente decrescente).*

Exemplo 6. $x_n = (1, 1, 1, 1, ...)$. *É monótona (não crescente e não decrescente)*

Exemplo 7. $x_n = n(-1)^n$, *com* $n \in \mathbb{N}$. *Não é monótona, pois* $x_1 < x_2$ *e* $x_2 > x_3$.

Definição 3. *Uma sequência (x_n) diz-se limitada inferiormente (respectivamente superiormente) quando existe $m \in \mathbb{R}$ tal que, $\forall\ n \in \mathbb{N}, x_n \geqslant m$ (respectivamente $x_n \leqslant m$).*

Diz-se que a sequência (x_n) é limitada, quando ela é limitada inferiormente e superiormente, ou seja, existe um número real $r > 0$ tal que $|x_n| \leqslant r, \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 8. $x_n = \dfrac{1}{n}$, *com* $n \in \mathbb{N}$, *é limitada, pois todos os seus termos encontram-se no intervalo fechado* $[0, 1]$.

Exemplo 9. *Sejam a e r números naturais. Considere a sequência (x_n) tal que $x_n = a + (n-1)r$, com $n \geqslant 1$.*

Note que, (x_n) é uma Progressão Aritmética de primeiro termo a e razão r. Daí, temos:

Se $r = 0$, então $(x_n) = (a, a, a, ...)$ é constante e, portanto, limitada;

Se $r < 0$, então (x_n) é estritamente decrescente, portanto, limitada superiormente;

Finalmente, se $r > 0$, então (x_n) é estritamente crescente e, portanto, limitada inferiormente.

Definição 4. *Uma subsequência de uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a restrição da sequência $x_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < ... < n_i < ...\} \subset \mathbb{N}$, isto é, a função $x_n : |_{\mathbb{N}'} \to \mathbb{R}$.*

Notação: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ ou (x_{n_k}).

Do (Exemplo 9), temos que (x_n) é uma Progressão Aritmética, de termo inicial a e razão r, com $x_n = a + (n-1)r$.

A Progressão Aritmética $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de termo inicial a e razão $2r$ é uma subsequência de (x_n). De fato, tomando $n_k = 2k-1$, com $k \in \mathbb{N}$, temos:

$$x_{n_k} = a + (n_k - 1)r = a + (2k-2)r = a + (k-1)(2r).$$

Definição 5. *Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um número real L, $(x_n \to L)$, se dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$\forall\, n > n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon.$$

Alternativamente, se (x_n) convergir para L, diremos que a sequência é convergente e que L é um limite da sequência, ou seja, $L = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é convergente, então dizemos que ela é divergente.

Exemplo 10. *A sequência cujo termo geral é $x_n = \dfrac{n}{n+1}$, com $n \in \mathbb{N}$, converge para 1.*

Solução.

Inicialmente, observe que, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, temos:

$$|x_n - 1| = |\frac{n}{n+1} - 1| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $n_0 \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$, tal que:

$$n > n_0 \Rightarrow |\frac{n}{n+1} - 1| < \varepsilon.$$

Conforme, (Definição 5), segue o resultado.

Teorema 1. *Se* $\lim x_n = L_1$ *e* $\lim x_n = L_2$*, então* $L_1 = L_2$.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, $L_1 \neq L_2$, onde $\lim x_n = L_1$ e $\lim x_n = L_2$. Tomando $\varepsilon = \dfrac{|L_2 - L_1|}{2} > 0$, temos:

(i) Como $\lim x_n = L_1$, então existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\forall\, n > n_1 \Rightarrow |x_n - L_1| < \varepsilon.$$

(ii) Como $\lim x_n = L_2$, então existe $n_2 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\forall\, n > n_2 \Rightarrow |x_n - L_2| < \varepsilon.$$

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Sendo assim, para todo $n > n_0$, temos:

$$|L_2 - L_1| = |(L_2 - x_n) + (x_n - L_1)|.$$

Daí, pela desigualdade triangular, segue que:

$$|L_2 - L_1| = |(L_2 - x_n) + (x_n - L_1)| \leqslant |x_n - L_2| + |x_n - L_1| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon < 2 \cdot \frac{|L_2 - L_1|}{2}.$$

Logo, $|L_2 - L_1| < |L_2 - L_1|$, o que é um absurdo. Portanto, $L_1 = L_2$. □

Proposição 1. *Se* $\lim x_n = L$*, então toda subsequência de* (x_n) *converge para* L.

Demonstração. Como $\lim x_n = L$, então dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n > n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$. Seja $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (x_{n_1}, x_{n_2}, ...)$ uma subsequência qualquer de (x_n). Como os índices da subsequência formam um subconjunto infinito, existe entre eles um $n_j > n_0$. Então:

$$n_i > n_j \Rightarrow n_i > n_0 \Rightarrow |x_{n_k} - L| < \varepsilon.$$

Logo, $\lim x_{n_k} = L$. □

Observação 4. *Note que a sequência* $(1, 0, 1, 0, 1, ...)$ *é divergente. Pois, se a considerássemos convergente, então, pela Proposição 1, todas suas subsequências seriam convergentes para um mesmo limite. Porém,* $(1, 1, 1, ...)$ *e* $(0, 0, 0, ...)$ *são subsequências que convergem para* 1 *e* 0*, respectivamente.*

Teorema 2. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência que converge para L. Logo, dado um $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$L - \varepsilon < x_n < \varepsilon + L.$$

Logo, $x_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Consideremos o conjunto finito $A = \{x_1, x_2, ..., x_{n_0}, L - \varepsilon, L + \varepsilon\}$. Tomando $a = \min\{x_1, x_2, ..., x_{n_0}, L - \varepsilon, L + \varepsilon\}$ e $b = \max\{x_1, x_2, ..., x_{n_0}, L - \varepsilon, L + \varepsilon\}$, temos que $a \leqslant x_n \leqslant b$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, todos os termos x_n da sequência estão contidos no intervalo $[a, b]$.

Portanto, (x_n) é limitada. □

Vale ressaltar que a recíproca do (Teorema 2) não é verdadeira, como mostra a (Observação 4).

Teorema 3. *Sejam* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sequências de números reais.*

$i)$ *Se* $x_n \to a$ *e* $y_n \to b$, *então* $x_n \pm y_n \to a \pm b$ *e* $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$.

$ii)$ *Se* $x_n \to 0$ *e* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada, então* $x_n \cdot y_n \to 0$.

$iii)$ (Teorema do confronto) *Sejam* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sequências tais que* $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. *Se* $x_n, z_n \to L$, *para algum* $L \in \mathbb{R}$, *então* $y_n \to L$.

Demonstração. $i)$ Parte 1 - Provemos, inicialmente, que $x_n + y_n \to a + b$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que:

$$n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } n > n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo, tomando $n > \max\{n_1, n_2\}$, temos:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

De modo análogo, segue que $x_n - y_n \to a - b$.

Parte 2 - Como $y_n \to b$, segue que (y_n) é limitada, assim:

Seja $L > 0$, tal que $|y_n| < L, \forall\ n \in \mathbb{N}$. Além disso, temos que: $x_n \to a$ e $y_n \to b$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot L} \text{ e } |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot |a| + 1}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \\ &\leqslant |x_n - a| \cdot |y_n| + |a| \cdot |y_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot L} \cdot L + |a| \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot |a| + 1} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|a| \cdot \varepsilon}{2 \cdot |a|} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $x_n y_n \to ab$.

$ii)$ Como $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, temos que existe $M > 0$ tal que $|y_n| < M, \forall\ n \in \mathbb{N}$. Além disso, $x_n \to 0$, logo, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $n_0 \in \mathbb{N}\ /\ n > n_0 \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$.

Daí,

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n y_n - 0| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

Portanto, $x_n y_n \to 0$.

$iii)$ Dado $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que:

$n > n_1 \Rightarrow |x_n - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e $n > n_2 \Rightarrow |z_n - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, ou seja, $L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$ e $L - \varepsilon < z_n < L + \varepsilon$.

Seja $n_0 = max\{n_1, n_2\}$. Então, $n > n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < L + \varepsilon$, isso implica que, $y_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Logo, $y_n \to L$.

□

Teorema 4. *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração. Suponhamos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência monótona, digamos não decrescente (os demais casos são análogos), ou seja,

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots$$

Além disso, (x_n) é limitada superiormente, isto é, seu conjunto de termos possui supremo, L. Afirmemos que $L = \lim x_n$. Com efeito, dado um $\varepsilon > 0$ qualquer, temos que $L - \varepsilon < L$, logo o número $L - \varepsilon$ não é cota superior do conjunto dos termos de x_n. Daí, existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L - \varepsilon < x_0$, como a sequência (x_n) é monótona, temos que:

$$n > n_0 \Rightarrow x_{n_0} \leqslant x_n$$

e, portanto,

$$L - \varepsilon < x_n.$$

Como $x_n \leqslant L$, $\forall\ n$, vemos que:

$$n < n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon.$$

Portanto, $\lim x_n = L$. □

Teorema 5. (Teorema de Bolzano-Weierstrass). *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada. Considere o seguinte conjunto: $B = \{k \in \mathbb{N}; n > k \Rightarrow x_k > x_n\}$.

Existem duas possibilidades para o conjunto B. A saber ou ele é finito ou ele é infinito.

Se B for infinito, escrevamos $B = \{k_1, k_2, k_3, ..., k_i, k_j, ...\}$, onde $k_1 < k_2 < ... < k_i < k_j < ....$ Assim, se $i < j$ então $k_i < k_j$ e, como $k_i \in B$, obtemos que $x_{k_i} > x_{k_j}$. Logo, $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência decrescente, ou seja, monótona. Sendo ela limitada, pelo Teorema anterior concluímos que ela é convergente.

Se B for finito, seja $m = max\{B\}$ e tome $k_1 = m + 1$, onde $k_1 \notin B$. Assim, como $k_1 \notin B$ então existe $k_2 \notin B$, com $k_2 > k_1$ tal que $x_{k_1} \leqslant x_{k_2}$. Como $k_2 \notin B$, existe $k_3 \notin B$, com $k_3 > k_2$ tal que $x_{k_2} \leqslant x_{k_3}$. Repetindo esse processo sucessivamente, temos:

$$x_{k_1} \leqslant x_{k_2} \leqslant ... \leqslant x_{k_n} \leqslant ....$$

Definimos assim uma subsequência $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ não decrescente (monótona). Sendo (x_{k_n}) limitada, segue, pelo Teorema anterior, que esta subsequência é convergente. □

Proposição 2. *Se uma sequência monótona $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente, então ela própria é convergente.*

Demonstração. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência monótona não decrescente (os demais casos são análogos) e $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ uma subsequência convergente de (x_n).

Assim, pelo (Teorema 2), a subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada, logo existe $M > 0$ tal que $x_{n_k} < M, \forall\ k \in \mathbb{N}$. Pela Definição de subsequência, temos que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > n$. Como (x_n) é uma sequência monótona não decrescente, temos:

$$x_n \leqslant x_{n_k} < M.$$

Logo, concluímos que (x_n) é limitada superiormente por M. Daí, pelo (Teorema 4), temos que (x_n) é convergente. □

Corolário 1. *Se uma subsequência monótona* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *converge para um número real* p*, a sequência* (x_n) *também convergente para o número real* p*.*

Demonstração. Segue imediato das (Proposições 1 e 2). □

1.2 Algumas Noções de Topologia

Nesta seção, abordaremos alguns conceitos topológicos elementares, visando estabelecer a base adequada para o melhor desenvolvimento deste trabalho. Os resultados apresentados podem ser encontrados em Lima ([12] e [13]).

Definição 6. *Um número* $a \in \mathbb{R}$*, diz-se um ponto de acumulação do conjunto* $D \subset \mathbb{R}$ *quando toda vizinhança de* a *contém algum ponto de* D *diferente do próprio* a*, ou seja, para todo real* $\varepsilon > 0$ *tem-se* $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (D - \{a\}) \neq \emptyset$*.*

Exemplo 11. *É fácil ver que* 0 *é ponto de acumulação do intervalo* $]0,1[$*.*

Observação 5. *Indica-se por* D' *o conjunto dos pontos de acumulação de* D*.*

Teorema 6. *Dados* $D \subset \mathbb{R}$ *e* $a \in \mathbb{R}$*, as afirmações abaixo são equivalentes:*

(i) a *é um ponto de acumulação de* D*;*

(ii) a *é o limite de uma sequência de pontos* $x_n \in D - \{a\}$*;*

(iii) Todo intervalo aberto de centro a *contém uma infinidade de pontos de* D*.*

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Como a é ponto de acumulação de D, então para todo natural n podemos achar um ponto $x_n \in D, x_n \neq a$, na vizinhança $\left(a - \dfrac{1}{n}, a + \dfrac{1}{n}\right)$. Portanto, $\lim x_n = a$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Supondo (ii), então para qualquer $a \in \mathbb{N}$, o conjunto $\{x_n; n > n_0\}$ é infinito, pois caso contrário existiria um termo x_{n_1} que se repetiria infinitas vezes, onde teríamos uma sequência constante com $\lim x_{n_1} \neq a$. O que entra em contradição com a Proposição 1.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Segue imediato da definição de ponto de acumulação. □

Exemplo 12. *Seja o conjunto* $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...\}$*, mostre que zero é ponto de acumulação de* A*.*

De fato, seja a sequência $x_n = \dfrac{1}{2n}, \forall\ n \in \mathbb{N}$, note que os elementos de x_n encontram-se contidos no conjunto A. Além disso, x_n é uma sequência que converge para zero, pois, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$.

Logo, pelo Teorema 6, zero é ponto de acumulação do conjunto A.

Definição 7. *Um conjunto* $X \subset \mathbb{R}$ *é limitado quando existe um número real* $c > 0$ *tal que* $a \in [-c, c]$ *para todo* a *em* X.

Teorema 7. *Todo conjunto infinito limitado de números reais admite ao menos um ponto de acumulação.*

Demonstração. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto infinito limitado. A possui um subconjunto enumerável, $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ (ver p. 48 de Lima [12]). Fixando esta enumeração, temos uma sequência (a_n), onde seus termos são dois a dois distintos, pertencentes a A, logo, (a_n) é uma sequência limitada, a qual, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, possui uma subsequência (a_{n_k}) convergente.

Seja $\lim a_{n_k} = a$. Como os termos de a_{n_k} são todos distintos, no máximo um deles pode ser igual a a. Descartando-o, caso exista, temos a como limite de uma sequência de pontos $a_{n_k} \in A - \{a\}$. Logo, da (Definição 6), a é um ponto de acumulação de A. □

1.3 Limite, Continuidade e Derivada de Funções Reais

Os principais resultados aqui obtidos podem ser encontrados em Lima [13], Guidorizzi [14], Izmailov [16], Muniz Neto [20], Neto Antar et. al. [22] ou Rockafallar [25].

Definição 8. *Seja* $D \subset \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ *uma função real e* $x_0 \in D'$ *um ponto de acumulação do conjunto* D. *Diz-se que a função* f *tem limite* L *quando* x *tende a* x_0, *e escreve-se* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, *quando, para qualquer* $\varepsilon > 0$ *arbitrário, é possível encontrar* $\delta > 0$ *tal que:*

$$x \in D, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Exemplo 13. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = 2x - 5$. *Provemos que* $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 3$.

Solução.

Inicialmente, note que, $|(2x-5)-3| = |2.(x-4)| < \varepsilon \Rightarrow |x-4| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Daí, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Logo, se $0 < |x-4| < \delta$. Então, temos: $|f(x)-3| = |(2x-5)-3| = |2x-8| = 2|x-4| < 2\delta = \varepsilon$, isto é, $|f(x)-3| < \varepsilon$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 3$.

Teorema 8. *Sejam* $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *duas funções dadas e* $x_0 \in \mathbb{D}'$. *Se* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1$ *e* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_2$, *então* $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = L_1 + L_2$ *e* $\lim\limits_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = L_1 \cdot L_2$.

Demonstração. $i)$ Como $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_2$ temos que, para todo $\varepsilon > 0$ arbitrário, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que:

$$x \in D, 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$x \in D, 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que se $0 < |x - x_0| < \delta$, então:

$$|(f(x)+g(x)) - (L_1 + L_2)| = |(f(x) - L_1) + (g(x) - L_2)|,$$

pela desigualdade triangular, segue que:

$$|(f(x)+g(x))-(L_1+L_2)| = |(f(x)-L_1)+(g(x)-L_2)| \leqslant |f(x)-L_1|+|g(x)-L_2| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = L_1 + L_2$.

$ii)$ Ver p. 203 de Muniz Neto [20]. □

Definição 9. *Dizemos que* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, *se dado* $N > 0$, *existe um real positivo* M *tal que se* $x > M$, *então* $f(x) > N$. *Além disso, dizemos que* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, *se dado* $N > 0$, *existe um real positivo* M *tal que se* $x < -M$, *então* $f(x) > N$.

Exemplo 14. *Mostre que* $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty$.

Solução.

Dado um número real $M > 0$, tome $N = \sqrt[3]{M} > 0$, logo, $x > \sqrt[3]{M} \Rightarrow x^3 > M$, então $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

Definição 10. *Sejam* $f : D \to \mathbb{R}$. *A função* f *é contínua em* x_0 *se:*

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0;\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Definição 11. *Diz-se que uma função* $f : D \to \mathbb{R}$ *é contínua em um conjunto* D*, se* f *é contínua em todos pontos de* D*.*

Teorema 9. *Sejam* $f : D \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in D \cap D'$*. Então* f *é contínua em* x_0 *se, e somente se,* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Demonstração. Ver p. 223 de Lima [12]. □

Exemplo 15. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$*, com* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$*. Prove que* f *é contínua em* $\mathbb{R}$*.*

Solução.

Inicialmente, note que:

$$|(ax + b) - (ax_0 + b)| = |a(x - x_0)| = |a||x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{|a|}.$$

Daí, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$. Logo, se $0 < |x - x_0| < \delta$, então, temos: $|f(x) - f(x_0)| = |(ax + b) - (ax_0 + b)| = |a||x - x_0| < |a|\delta = |a|\dfrac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon$, isto é, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Portanto, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, ou seja, f é contínua em todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

Proposição 3. *Se* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *são funções contínuas no ponto* $x_0 \in D$*, então são contínuas as funções* $f + g$ *e* $f.g : D \to \mathbb{R}$ *no ponto* x_0*.*

Demonstração. Ver p. 144 de Muniz Neto [20]. □

Teorema 10. (Teorema de Weierstrass). *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua definida no intervalo fechado* $[a, b]$ *e limitada. Então, existem números* c *e* d *em* $[a, b]$*, tais que,* $f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d)$*, para todo* $x \in [a, b]$*.*

Demonstração. Ver p. 82 de Lima [13]. □

Definição 12. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua, diz-se que* f *é coerciva se*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

Exemplo 16. $f(x) = 2x^4$

Exemplo 17. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$.

Definição 13. *Sejam* $f : D \to \mathbb{R}$ *e* $a \in D \cap D'$. *A derivada de* f *no ponto* a*, denotada por* $f'(a)$*, é dado por:*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

se este limite existir e for finito.

Se em algum ponto x *de* D *este limite não existir ou for infinito, diz-se que a função não é derivável em* x.

Observação 6. *Se existir a derivada* $f'(x)$ *em todo os pontos* $x \in D \cap D'$*, diz-se que a função* $f : D \to \mathbb{R}$ *é derivável no conjunto* D.

Teorema 11. *Sejam* $f : D \to \mathbb{R}$ *e* $a \in D \cap D'$. *Se existe* $f'(a)$ *então* f *é contínua no ponto* a.

Demonstração. Suponha que exista $f'(a)$, logo:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} [f(x) - f(a) + f(a)] \\
&= \lim_{x \to a} [\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) + f(a)] \\
&= \left[\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right] \cdot \lim_{x \to a} (x - a) + f(a) \\
&= f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a).
\end{aligned}$$

Portanto, de acordo com Teorema 9, segue o resultado. □

Definição 14. *Seja* $f : D \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in D$. *Dizemos que* x_0 *é ponto de mínimo local de* f *em* D*, se existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $f(x_0) \leqslant f(x)$*, para todo* $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap D$. *(De modo análogo define-se máximo local).*

Definição 15. *Quando* $x_0 \in D$ *é tal que* $f(x_0) \leqslant f(x), \forall\ x \in D$*, diz-se que* x_0 *é ponto de mínimo global para a função* $f : D \to \mathbb{R}$. *(De maneira análoga define-se ponto de máximo global).*

Definição 16. *Se* $D \subset \mathbb{R}$ *é um intervalo aberto e* $f : D \to \mathbb{R}$ *uma função derivável. Dizemos que* $x_0 \in D$ *é um ponto crítico de* f *se,* $f'(x_0) = 0$.

Exemplo 18. *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, definida por* $f(x) = x^2$*, possui ponto crítico em* $x_0 = 0$*, pois* $f'(x_0) = 2x_0 \Rightarrow f'(0) = 0$*.*

Observação 7. *Embora se possa trabalhar com mínimos e máximos, ao longo deste trabalho só trabalharemos com mínimos, pois achar o máximo de uma função* f *é equivalente a achar o mínimo da função* $-f$*.*

Observação 8. *Os pontos de máximos e mínimos locais de uma função são pontos críticos, mas existem pontos críticos que não são pontos de máximos ou mínimos locais.*

Exemplo 19. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, definida por* $f(x) = x^3$*.*

Note que $f'(x) = 3x^2$. Assim, para $x = 0$ temos que $f'(0) = 0$. Logo, $x = 0$ é um ponto crítico de f, porém não é ponto de máximo nem mínimo local de f.

Teorema 12. *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e derivável em* (a, b)*. Se* f *assume seu valor mínimo local em* $x_0 \in (a, b)$*, então* $f'(x_0) = 0$*.*

Demonstração. Como $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é derivável em $x_0 \in (a, b)$, temos:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Suponha que f assuma seu valor mínimo local em $x_0 \in (a, b)$, segue que $f(x_0) \leqslant f(x) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \geqslant 0$, para todo $x \in (a, b)$.

Por outro lado,

i) se $x < x_0$, temos que $x - x_0 < 0$. Daí $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$, para $x_0 \in (a, b)$. Passando o limite quando x tende a x_{0_-}, segue:

$$\lim_{x \to x_{0_-}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0. \tag{1.1}$$

ii) se $x > x_0$, temos que $x - x_0 > 0$. Daí: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$ para $x_0 \in (a, b)$. Passando o limite quando x tende a x_{0_+}, segue:

$$\lim_{x \to x_{0_+}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0. \tag{1.2}$$

De (1.1) e (1.2) implica que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Portanto, $f'(x_0) = 0$. □

Teorema 13. (Teorema de Rolle). *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a, b]$ *e derivável em* (a, b)*, com* $f(a) = f(b)$*. Então, existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Demonstração. i) Se f é uma função constante para todo $x \in [a, b]$, então $f'(x) = 0$ no interior do intervalo. Logo, c pode ser qualquer ponto de (a, b).

ii) Suponha que f não é uma função constante no intervalo $[a, b]$. Como f é contínua no intervalo fechado, então, pelo Teorema de Weierstrass, existem x_1 e $x_2 \in [a, b]$, tais que $f(x_1)$ e $f(x_2)$ são, respectivamente, os valores máximos e mínimos de f em $[a, b]$. Como $f(x_1) \neq f(x_2)$, uma vez que f não é constante, segue que x_1 ou $x_2 \in (a, b)$.

Logo, $f'(x_1) = 0$ ou $f'(x_2) = 0$.

Portanto, existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. □

Teorema 14. (Teorema do Valor Médio). *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua* $[a, b]$ *e derivável em* (a, b)*. Então, existe* $c \in (a, b)$ *tal que:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração. Seja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função dada por:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

Note que g é uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável em (a, b), pois $f(x)$ e $h(x) = (x - a)$ são contínuas e deriváveis. Além disso,

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a) = f(a)$$

e

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = f(a).$$

Então, como $g(a) = g(b)$, pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Logo,

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Corolário 2. *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e duas vezes derivável em* (a, b) *então:*

i) f' *é não-decrescente em* $[a, b]$ *se, e somente se,* $f''(x) \geqslant 0$ *para todo* x *em* (a, b)*. Além disso, se* $f''(x) > 0$ *para todo* $x \in (a, b)$ *então* f' *é crescente em* $[a, b]$.

ii) f' *é não-crescente em* $[a,b]$ *se, e somente se,* $f''(x) \leqslant 0$ *para todo* x *em* (a,b)*. Além disso, se* $f''(x) < 0$ *para todo* $x \in (a,b)$ *então* f' *é decrescente em* $[a,b]$.

Proposição 4. *Seja* f *uma função contínua e duas vezes derivável em* $\mathbb{R}$*. Se* $f'' > 0$ *para todo* x *em* $\mathbb{R}$*, então* $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$*,* $\forall\, x \neq x_0$*.*

Demonstração. Mostraremos que dado $x_0 \in \mathbb{R}$ qualquer, a imagem $f(x)$ está acima da reta tangente passando pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ para todo $x \in \mathbb{R}$, com $x \neq x_0$.

Suponhamos que $x > x_0$, pelo Teorema do Valor Médio, no intervalo $[x_0, x]$, temos que existe $c \in (x_0, x)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow f'(c)(x - x_0) = f(x) - f(x_0). \tag{1.3}$$

Por outro lado, como $f'' > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ temos conforme parte (i) do Corolário 2, que f' é uma função crescente e, portanto,

$$f'(x_0) < f'(c). \tag{1.4}$$

Agora, multiplicando a desigualdade (1.4) por $x - x_0 > 0$, temos que:

$$f'(c)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow f(x_0) + f'(c)(x - x_0) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Substituindo (1.3) na desigualdade acima, segue que:

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Logo, sendo $x < x_0$ temos que existe $c \in (x, x_0)$ tal que $f'(c)(x - x_0) = f(x) - f(x_0)$ e $f'(c) < f'(x_0)$, uma vez que f' é crescente. Multiplicando esta última desigualdade por $x - x_0 < 0$, temos:

$$f'(c)(x-x_0) > f'(x_0)(x-x_0) \Rightarrow f(x)-f(x_0) > f'(x_0)(x-x_0) \Rightarrow f(x) > f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Portanto, $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall\ x \neq x_0$. □

Exemplo 20. *Seja* $f(x) = ax^2 + bx + c$*, com* $a \in \mathbb{R}^*_+$ *e* $b, c \in \mathbb{R}$*. Mostre que se* $f''(x) > 0, \forall\ x \in \mathbb{R}$*, então* $f(x) > f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0), \forall\ x \neq x_0$.

Solução.

Seja $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, sendo $x_0 \in \mathbb{R}$ qualquer. Note que f é contínua e duas vezes derivável, a saber $f'(x) = 2ax + b$ e $f''(x) = 2a > 0$.

Além disso,

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \\ &= (ax^2 + bx + c) - (ax_0^2 + bx_0 + c) - (2ax_0 + b)(x - x_0) \\ &= ax^2 - 2ax_0x + ax_0^2 \\ &= a(x - x_0)^2. \end{aligned}$$

Logo, $g(x) > 0$ para todo $x \neq x_0$. Portanto, $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Proposição 5. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Se* f *é coerciva, então* f *possui um mínimo global.*

Demonstração. Como f é coerciva, temos que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

Assim, dado um número real $a > 0$, é possível encontrarmos um real positivo b tal que $a \in [-b, b]$ e para todo $|x| > b$ tem-se $f(x) > f(a)$.

Como f é contínua em $[-b, b]$, segue, pelo (Teorema 10), que existe $x_0 \in [-b, b]$ tal que $f(x_0) \leqslant f(x)$, $\forall\ x \in [-b, b]$. E como para todo $|x| > b$ tem-se $f(x) > f(a)$, segue que $f(x_0) \leqslant f(a) < f(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Portanto, x_0 é mínimo global de f. □

1.4 Conjuntos Convexos e Funções Convexas

Nesta seção faremos um breve estudo sobre conjuntos convexos e funções convexas. As definições e resultados utilizados nesta seção podem ser encontrados em Amaral [1], Amorin [2], Chaves [10], Lima [13], Izmailov [16] ou Souza e Diniz-Ehrhardt [27].

Definição 17. (Conjunto Convexo) *Um conjunto* $D \subset \mathbb{R}$ *é dito convexo se, dados dois pontos* a *e* $b \in D$*, o segmento de reta que os une está inteiramente contido no conjunto* D.

Observação 9. *Neste caso, todo conjunto convexo em* $\mathbb{R}$ *será um intervalo. Além disso, o conjunto vazio e os conjuntos com um único ponto serão trivialmente convexos.*

Definição 18. (Função Convexa) *Seja* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Diz-se que* f *é convexa em* I*, se para todo* $t \in [0, 1]$*, vale:*

$$f(ta + (1 - t)b) \leqslant tf(a) + (1 - t)f(b), \forall\ a, b \in I.$$

E, f *é dita estritamente convexa se a desigualdade acima é estrita, ou seja, para* $a \neq b$*:* $f(ta+(1-t)b) < tf(a)+(1-t)f(b)$*, com* $0 < t < 1$*. (Para mais informações ver Amorin [2]).*

Geometricamente, isso significa que dados dois pontos quaisquer, $a < b$, com $a, b \in I$, o gráfico de f no intervalo $[a, b]$ fica sempre abaixo da corda de A para B. (Ver figura 1.1).

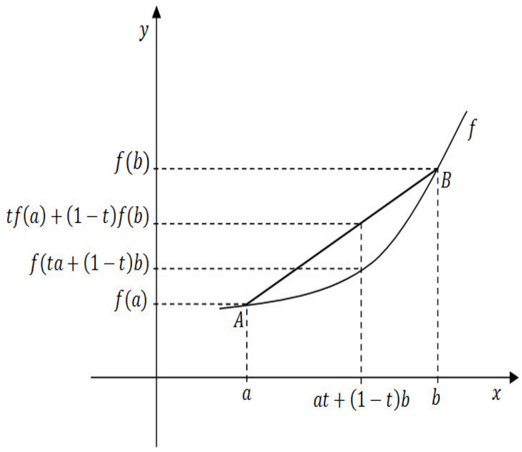

Figura 1.1: Função Convexa.

Apresentaremos agora alguns exemplos de funções convexas:

Exemplo 21. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, definida por* $f(x) = |x + 1|$*.*

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $t \in [0, 1]$. Pela desigualdade triangular, temos:

$$
\begin{aligned}
f(ta + (1-t)b) &= |ta + (1-b)b + 1| \\
&= |ta + (1-t)b + t - t + 1| \\
&= |t(a+1) + (1-t)(b+1)| \\
&\leqslant |t(a+1)| + |(1-t)(b+1)| \\
&\leqslant |t||a+1| + |(1-t)||b+1| \\
&\leqslant tf(a) + (1-t)f(b),
\end{aligned}
$$

visto que t e $(1-t)$ são positivos. Logo, $f(ta+(1-t)b) \leqslant tf(a)+(1-t)f(b)$ e, portanto, f é convexa.

Exemplo 22. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, definida por* $f(x) = x^2$*.*

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $t \in [0,1]$, devemos verificar se vale:

$$f(ta + (1-t)b) \leqslant tf(a) + (1-t)f(b) \Rightarrow (ta + (1-t)b)^2 \leqslant ta^2 + (1-t)b^2.$$

Verificando, temos:

$$\begin{aligned}
ta^2 + (1-t)\cdot b^2 - [ta + (1-t)\cdot b]^2 &\geqslant 0 \\
ta^2 + (1-t)\cdot b^2 - t^2a^2 - 2t(1-t)\cdot ab - (1-t)^2\cdot b^2 &\geqslant 0 \\
(t-t^2)a^2 - 2(t-t^2)ab + [1-(1-t)](1-t)b^2 &\geqslant 0 \\
(t-t^2)\cdot a^2 - 2(t-t^2)\cdot ab + (t-t^2)\cdot b^2 &\geqslant 0 \\
(t-t^2)\cdot [a^2 - 2ab + b^2] &\geqslant 0 \\
t\cdot(1-t)\cdot[a-b]^2 &\geqslant 0.
\end{aligned}$$

De fato, pois $t \in [0,1]$, logo $t > 0$, $(1-t) > 0$ e além disso, $(a-b)^2 > 0, \forall\ a, b \in \mathbb{R}$. Logo, vale:

$$(ta + (1-t)b)^2 \leqslant ta^2 + (1-t)b^2.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
f(ta + (1-t)b) &= (ta + (1-t)b)^2 \\
&= t^2a^2 + 2t(1-t)\cdot ab + (1-t)^2\cdot b^2 \\
&\leqslant ta^2 + (1-t)b^2 = tf(a) + (1-t)f(b).
\end{aligned}$$

Portanto, f é uma função convexa.

Definição 19. *Seja* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função e* $\alpha \in \mathbb{R}$, *os conjuntos da forma* $A_\alpha = \{x \in I; f(x) \leqslant \alpha\}$ *são chamados de conjuntos de nível.*

Proposição 6. *Se* f *é convexa, então todos seus conjuntos de nível são convexos.*

Demonstração. De fato:

i) Se $A_\alpha = \varnothing$, segue resultado, pois o conjunto vazio é trivialmente convexo;

ii) Suponha $A_\alpha \neq \emptyset$, sejam $a, b \in I$ tais que $f(a) \leqslant \alpha$ e $f(b) \leqslant \alpha$, então $\forall\ t \in [0,1]$, temos $at + (1-t)b \in I$, pois I é convexo. Agora, pela convexidade de f, temos:

$$f(at + (1-t)b) \leqslant tf(a) + (1-t)f(b) = t\alpha + (1-t)\alpha = \alpha.$$

Portanto, $at + (1-t)b \in A_\alpha$. □

Observação 10. *A recíproca da proposição acima não é verdadeira. Por exemplo, note que* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dado por* $f(x) = \sqrt{|x|}$ *possui conjuntos de nível convexo, porém não é uma função convexa.*

Proposição 7. *Toda função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *convexa é contínua.*

Demonstração. Ver p. 64 de Amorin [2]. □

Teorema 15. *Seja* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável. Então,* f *é convexa se, e somente se, vale:*

$$f(b) \geqslant f(a) + f'(a) \cdot (b - a), \forall \ a, b \in I.$$

Demonstração. $\Rightarrow$) Se f é convexa, então para todo $t \in [0, 1]$, temos que:

$$f(tb + (1 - t)a) \leqslant tf(b) + (1 - t)f(a).$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(tb + a - ta) &\leqslant tf(b) + f(a) - tf(a) \\ f(a + t(b - a)) - f(a) &\leqslant t[f(b) - f(a)] \\ \left[\frac{f(a + t(b - a)) - f(a)}{t \cdot (b - a)}\right] \cdot (b - a) &\leqslant f(b) - f(a), \end{aligned}$$

Aplicando o limite na ultima desigualdade acima, com $t \to 0_+$, temos:

$$\begin{aligned} (b - a) \cdot \lim_{t \to 0_+} \frac{f(a + t(b - a)) - f(a)}{t(b - a)} &\leqslant f(b) - f(a) \\ (b - a) \cdot f'(a) &\leqslant f(b) - f(a). \end{aligned}$$

Portanto, $f(b) \geqslant f(a) + f'(a) \cdot (b - a), \forall \ a, b \in I$.

$\Leftarrow$) Temos por hipótese que:

$$f(b) \geqslant f(a) + f'(a) \cdot (b - a), \forall \ a, b \in I.$$

Sejam $a_1, a_2 \in I$ e seja $a = ta_1 + (1 - t)a_2$, com $0 < t < 1$. Quando $b = a_1$ ou $b = a_2$, temos:

$$f(a_1) \geqslant f(a) + f'(a) \cdot (a_1 - a). \tag{1.5}$$

$$f(a_2) \geqslant f(a) + f'(a) \cdot (a_2 - a). \tag{1.6}$$

Multiplicando (1.5) e (1.6) por t e $(1-t)$, respectivamente, temos:

$$t \cdot f(a_1) \geqslant t \cdot f(a) + t \cdot f'(a) \cdot (a_1 - a). \tag{1.7}$$

$$(1-t) \cdot f(a_2) \geqslant (1-t) \cdot [f(a) + f'(a) \cdot (a_2 - a)]. \tag{1.8}$$

Agora, somando as desigualdades (1.7) e (1.8) membro a membro, segue que:

$$\begin{aligned} t \cdot f(a_1) + (1-t) \cdot f(a_2) &\geqslant t \cdot f(a) + t \cdot f'(a) \cdot (a_1 - a) + (1-t) \cdot [f(a) + f'(a) \cdot (a_2 - a)] \\ &\geqslant f(a) + f'(a) \cdot (t \cdot a_1 + a_2 - t \cdot a_2 - a) \\ &\geqslant f(a) + f'(a) \cdot [t \cdot a_1 + (1-t) \cdot a_2 - a]. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Substituindo $a = t \cdot a_1 + (1-t) \cdot a_2$ em (1.9), temos:

$$t \cdot f(a_1) + (1-t) \cdot f(a_2) \geqslant f(t \cdot a_1 + (1-t) \cdot a_2), \forall \ a_1, a_2 \in I.$$

Portanto, f é convexa. □

Observação 11. *Note que, para $f'(a) = 0$ temos $f(a) \leqslant f(b), \forall \ a \in I$, ou seja, a é minimizador global da função f.*

Proposição 8. *Seja a função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável, f é convexa se, e somente se, $f'' \geqslant 0$ (se tivermos $f''(x) > 0$, f será estritamente convexa).*

Demonstração. Ver p. 18 de Chaves [10]. □

Exemplo 23. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por, $f(x) = x^4 + 3x$. Mostre que f é convexa.*

Solução.

Note que: $f'(x) = 4x^3 + 3 \Rightarrow f''(x) = 12x^2 \geqslant 0, \ \forall \ x \in \mathbb{R}$. Logo, pela (Proposição 8), f é convexa.

Exemplo 24. *Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -\log x$. Mostre que f é estritamente convexa.*

Solução.

Temos que:

$$f'(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0, \ \forall \ x \in (0, +\infty).$$

Portanto, f é estritamente convexa.

Proposição 9. *Seja* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivável. Se* f *possui um ponto de mínimo local e* f *é estritamente convexa, então esse ponto é mínimo global e único.*

Demonstração. Seja x_0 o ponto de mínimo local de f, temos que $f'(x_0) = 0$. Como f é estritamente convexa, segue que:

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \ \forall \ x \neq x_0,$$

logo,

$$f(x) > f(x_0), \ \forall \ x \in \mathbb{R} \text{ com } x \neq x_0.$$

Portanto, x_0 é ponto de mínimo global de f e é único. □

Proposição 10. *Se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função convexa e derivável, então* $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função não-decrescente.*

Demonstração. Ver p. 110 de Lima [13]. □

1.5 Funções Quase Convexas

Nesta seção faremos um breve estudo sobre funções quase convexas e seus principais resultados. Tais resultados podem ser encontrados em Apolinário [3], Bazarra [5], Brito et. al. [7], Boyd e Vandenberghe [8], Cysne e Moreira [11], Lima [13], Mangasarian [18] ou Silva [26].

Definição 20. (Função Quase Convexa) *A função* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, é dita quase convexa quando, para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$*, o conjunto de nível* $A_\alpha = \{x \in I; f(x) \leqslant \alpha\}$ *é vazio ou um intervalo, ou seja, o conjunto de nível* A_α *é convexo.*

Na Figura (1.2), temos o gráfico de uma função quase convexa, na qual dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, os conjuntos de níveis A_α e A_β são definidos, respectivamente, pelos intervalos: $[a, b]$ e $(-\infty, c]$.

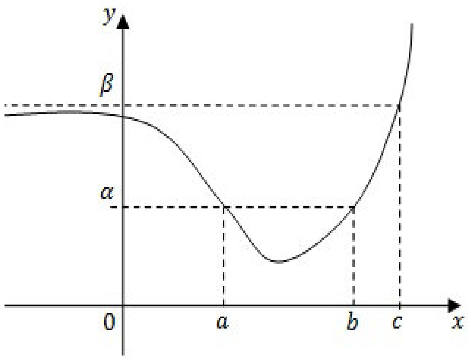

Figura 1.2: Função quase convexa em $\mathbb{R}$.

Alguns exemplos de funções quase convexas podem ser observadas abaixo:

Exemplo 25. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *com* $f(x) = x + 2$.

Como $A_\alpha = \{x \in I; f(x) \leqslant \alpha\}$, temos que $f(x) = x + 2$, daí: $x + 2 \leqslant \alpha \Rightarrow x \leqslant \alpha - 2$. Logo $A = (-\infty, \alpha - 2]$ é um intervalo. Portanto, f é quase convexa.

Exemplo 26. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definida por* $f(x) = \sqrt{|x|}$.

Note que, se $\alpha < 0 \Rightarrow A_\alpha = \varnothing$. Por outro lado, se $\alpha \geqslant 0$, temos:
i) Se $x \geqslant 0$, então $\sqrt{|x|} \leqslant \alpha \Rightarrow x \leqslant \alpha^2$;
ii) Agora, para $x < 0$ temos: $\sqrt{|x|} \leqslant \alpha \Rightarrow -x \leqslant \alpha^2 \Rightarrow x \geqslant -\alpha^2$.

Logo, $A_\alpha = [-\alpha^2, \alpha^2]$ é um intervalo. Portanto, $f(x) = \sqrt{|x|}$ é uma função quase convexa.

Proposição 11. *Toda função convexa é quase convexa.*

Demonstração. De fato, sejam f uma função convexa e o conjunto de nível $A_\alpha = \{x \in I; f(x) \leqslant \alpha\}$. Então, dados $a, b \in A_\alpha$ e $a < w < b$, com $w = (1-t)a + tb, t \in (0, 1)$, temos:

$$f(w) = f((1-t)a + tb) \leqslant (1-t)f(a) + tf(b) \leqslant (1-t)\alpha + \alpha t = \alpha,$$

desta forma, $w \in A_\alpha$. Logo, A_α é um intervalo.

Portanto, f é quase convexa. □

Observação 12. *Note que a recíproca da Proposição 11 não é verdadeira, conforme exemplo abaixo.*

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3$. Tomemos um $\alpha \in \mathbb{R}$ qualquer, então dados $x \in I$, temos: $f(x) \leqslant \alpha$, ou seja, $x^3 \leqslant \alpha \Rightarrow x \leqslant \sqrt[3]{\alpha}$. Logo, $A_\alpha = (-\infty, \sqrt[3]{\alpha}]$.

Portanto, A_α é um intervalo, como α é qualquer, segue que f é quase convexa.

Por outro lado, suponhamos f convexa, logo: $f(ta + (1-t)b) \leqslant tf(a) + (1-t)f(b)$. Tomando $a = -2, y = 0$ e $t = \dfrac{1}{2}$, temos:

$$-1 = f(-1) = f\left(\frac{1}{2} \cdot (-2) + \frac{1}{2} \cdot 0\right) \leqslant \frac{1}{2} \cdot f(-2) + \frac{1}{2} \cdot f(0) = \frac{1}{2} \cdot (-8) = -4.$$

Absurdo. Logo, f não é convexa.

Teorema 16. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é quase convexa se, e somente se, para* $a, b \in I$ *e* $t \in [0,1]$ *quaisquer, vale:*

$$f((1-t)a + tb) \leqslant \max\{f(a), f(b)\}.$$

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Como f é quase convexa, segue pela Definição 20 que A_α é um conjunto vazio ou um intervalo.

i) Se $A_\alpha = \varnothing$, o resultado é imediato.

ii) Se A_α é um intervalo, então $(1-t)a + tb \in A_\alpha$, com $t \in [0,1]$, onde $a, b \in A_\alpha$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ qualquer, temos: $f(a) \leqslant \alpha$ e $f(b) \leqslant \alpha$. Em particular, seja $\alpha = \max\{f(a), f(b)\}$. Assim,

$$f((1-t)a + tb) \leqslant \alpha = \max\{f(a), f(b)\}.$$

$(\Leftarrow)$ Sejam a e b tais que $f(a) \leqslant \alpha$ e $f(b) \leqslant \alpha$. Pegue $\alpha \geqslant \max\{f(a), f(b)\}$. Daí,

$$(1-t)a + tb \Rightarrow f((1-t)a + tb) \leqslant \max\{f(a), f(b)\} = \alpha.$$

Logo, f é quase convexa. □

Exemplo 27. *Mostremos que* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \textit{se} \quad x \geqslant 0 \\ -x^2, & \textit{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

é quase convexa.

Solução.

Para verificar se f é quase convexa, devemos analisar os seguintes casos:

i) $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a < b$ e $t \in [0,1]$:

De fato, como $0 < a < b$ e $t \in [0,1]$, segue que:

$$\begin{aligned}
f((1-t)a+tb) &= [(1-t)a+tb)]^2 \\
&= (1-t)^2a^2 + 2(1-t)atb + t^2b^2 \\
&\leqslant (1-t)^2b^2 + 2(1-t)btb + t^2b^2 \\
&\leqslant b^2 - 2tb^2 + t^2b^2 + 2b^2t - 2b^2t^2 + t^2b^2 \\
f((1-t)a+tb) &\leqslant b^2 = f(b) = \max\{f(a), f(b)\}.
\end{aligned}$$

Portanto, $f((1-t)a+tb) \leqslant \max\{f(a), f(b)\}$.

ii) $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b < 0$ e $t \in [0,1]$:

De fato, como $a < b < 0$ e $t \in [0,1]$, segue que:

$$\begin{aligned}
f((1-t)a+tb) &= -[(1-t)a+tb)]^2 \\
&= -[(1-t)^2a^2 + 2(1-t)atb + t^2b^2] \\
&= -(1-t)^2a^2 - 2(1-t)atb - t^2b^2 \\
&\leqslant -(1-t)^2b^2 - 2(1-t)btb - t^2b^2 \\
&\leqslant -(1-2t+t^2)b^2 - 2tb^2 + t^2b^2 - t^2b^2 \\
&\leqslant -b^2 + 2tb^2 - t^2b^2 - 2tb^2 + 2t^2b^2 - t^2b^2 \\
f((1-t)a+tb) &\leqslant -b^2 = f(b) = \max\{f(a), f(b)\}.
\end{aligned}$$

Portanto, $f((1-t)a+tb) \leqslant \max\{f(a), f(b)\}$.

iii) $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < 0$, $b > 0$ e $t \in [0,1]$:

Note que: $(1-t)a+tb \geqslant 0$ ou $(1-t)a+tb \leqslant 0$. Daí, por i) e ii), segue que:

$$f((1-t)a+tb) \leqslant f(b) = \max\{f(a), f(b)\}$$

Logo, f é quase convexa.

Proposição 12. *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua quase convexa, onde o valor mínimo de* f *é atingido no ponto* $c \in [a,b]$. *Temos:*

i) *Se* $c = b$, *então* f *é não crescente;*

ii) *Se* $c = a$, *então* f *é não decrescente;*

iii) *Se* $a < c < b$, *então* f *é não crescente em* $[a,c]$ *e não decrescente em* $[c,b]$.

Demonstração. i) Se o mínimo de f é atingido no ponto $c = b$ então, dados $x_1 < x_2$ em $[a,b]$, temos que $x_2 \in [x_1, b]$, logo $f(x_2) \leqslant \max\{f(x_2), f(b)\} = f(x_2)$, ou seja, $f(x_1) \geqslant f(x_2)$. Portanto, f é não crescente;

$ii)$ Analogamente, se o valor mínimo de f é atingido no ponto $c = a$ então, dados $x_1 < x_2$ em $[a, b]$, temos que $x_1 \in [a, x_2]$, logo $f(x_1) \leqslant max\{f(a), f(x_2)\} = f(x_2)$, ou seja, $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Portanto, f é não decrescente;

$iii)$ De $i)$ e $ii)$ segue que se f atinge seu mínimo no ponto $c \in (a, b)$ então f é não crescente em $[a, c]$ e não decrescente em $[c, b]$. □

Teorema 17. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *um função contínua,* f *é quase convexa se, e somente se, existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* f *é monótona não crescente no intervalo* $(-\infty, c]$ *e monótona não decrescente em* $[c, +\infty)$.

Demonstração. Segue imediato da (Proposição 12). □

Teorema 18. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável. Então,* f *é quase convexa se, e somente se, para todo* $a, b \in \mathbb{R}$*, vale:*

$$f(a) \leqslant f(b) \Rightarrow f'(b).(a - b) \leqslant 0$$

Demonstração. Ver p. 9 de Silva [26]. □

Exemplo 28. *Mostremos que a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, definida por*

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & se \quad x \geqslant 1 \\ -(x-1)^2, & se \quad x < 1 \end{cases}$$

é quase convexa.

Solução.

$i)$ Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, tais que $a, b \geqslant 1$. Suponha que $f(a) \leqslant f(b)$, logo:

$$\begin{aligned} (a-1)^3 &\leqslant (b-1)^3 \\ (a-1)^3 - (b-1)^3 &\leqslant 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Substituindo $a - 1 = t$ e $b - 1 = w$ na desigualdade (1.10), temos:

$$t^3 - w^3 \leqslant 0 \Rightarrow (t - w) \cdot (t^2 + tw + w^2) \leqslant 0.$$

Além disso, como $a, b \geqslant 1$, segue que $t, w \geqslant 0$, logo, $t^2 + tw + w^2 \geqslant 0$. Assim, temos que $t - w \leqslant 0$, ou seja, $a - b \leqslant 0$. Por fim, como $f'(b) = 3(b-1)^2 \geqslant 0, \forall\ b \geqslant 1$.

Concluímos que, $f'(b) \cdot (a - b) \leqslant 0$. (De modo análogo, segue $f(a) \geqslant f(b)$).

$ii)$ Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, tais que $a, b < 1$. Suponha que $f(a) \leqslant f(b)$, logo:

$$\begin{aligned} -(a-1)^2 &\leqslant -(b-1)^2 \\ (b-1)^2 - (a-1)^2 &\leqslant 0 \\ (b+a-2) \cdot (b-a) &\leqslant 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Além disso, como $a, b < 1$, segue que $(b + a - 2) < 0$, assim, da desigualdade (1.11) temos que $(b - a) \geqslant 0 \Rightarrow (a - b) \leqslant 0$. Por fim, como $f'(b) = -2(b - 1) > 0, \forall\ b < 1$.

Concluímos que, $f'(b) \cdot (a - b) \leqslant 0$. (De modo análogo, segue $f(a) \geqslant f(b)$).

$iii)$ Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, tais que $a < 1$ e $b \geqslant 1$. Note que, $f(b) = (b - 1)^3 \geqslant 0$ e $f(a) = -(a - 1)^2 < 0$, logo:

$$f(a) \leqslant f(b)$$

Além disso, $(a - b) < 0$ e $f'(b) = 3(b - 1)^2 \geqslant 0$. Logo, $f'(b) \cdot (a - b) \leqslant 0$.

Portanto, pelo (Teorema 18) segue que f é quase convexa.

Capítulo 2

Método de Ponto Proximal

Neste capítulo, apresentaremos uma resolução para Problema de Minimização quase convexa utilizando o Método de Ponto Proximal. Investigaremos o comportamento dos termos da sequência, e de suas imagens, que acarreta à uma solução (caso exista) e ao valor de mínimo (ou ínfimo) da função f, respectivamente.

Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Considere o problema a seguir:

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) := \begin{cases} \text{Encontrar } x^* \in \mathbb{R} \text{ tal que} \\ f(x^*) \leqslant f(x), \forall\ x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.1}$$

O conjunto solução do Problema (2.1) será denotado por S^*, note que o conjunto S^* poderá ser vazio, e até mesmo que,

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -\infty.$$

A fim de garantir a boa definição do método que definiremos adiante, necessitaremos das seguintes hipóteses:

(H_1) f é derivável, com derivada contínua, ou seja, de classe C^1 e quase convexa;

(H_2) $f(x) \geqslant L$, ou seja, f é limitada inferiormente.

As funções citadas abaixo satisfazem as hipóteses (H_1) e (H_2).

Exemplo 29. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3}, & \textit{se} \quad x \geqslant -1, \\ \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{5x}{3} + 1, & \textit{se} \quad x < -1. \end{cases}$$

Exemplo 30. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definida por* $f(x) = x \cdot e^x$.

Exemplo 31. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definida por* $f(x) = e^{-x}$.

Sendo que os dois primeiros exemplos possuem ponto de mínimo, isto é, $(S^* \neq \varnothing)$ e o terceiro possui somente o ínfimo, $(S^* = \varnothing)$.

2.1 Algoritmo do Ponto Proximal

Com a finalidade de resolver o Problema (2.1) descreveremos o nosso algoritmo. Para isto, considere a seguinte condição:

(H_3) A sequência de números reais positivos λ_k satisfaz $0 < \lambda_k < \lambda$, para algum $\lambda > 0$.

Algoritmo:

Passo 1 (Inicialização). Escolha $x_0 \in \mathbb{R}$ *e* λ_k *satisfazendo a condição* (H_3)*;*

Passo 2 (Iteração). Dado x_{k-1}*, encontre* $x_k \in \mathbb{R}$ *minimizador da função:*

$$f_k(x) := f(x) + \lambda_k(x - x_{k-1})^2. \tag{2.2}$$

Passo 3 (Critério de parada). Se $x_k = x_{k-1}$*, pare;*

Passo 4 (Continua). Caso $x_k \neq x_{k-1}$*, faça* $k := k + 1$ *e retorne para o Passo 2.*

2.1.1 Boa Definição

Mostraremos através do resultado seguinte a boa definição do método.

Teorema 19. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função satisfazendo as hipóteses* (H_1) *e* (H_2)*. Então, para todo* k *natural existe* x_k *satisfazendo (2.2).*

Demonstração. Para provarmos a existência mostraremos que f_k definida conforme (2.2) é contínua e coerciva.

De fato, por (H_1), f é derivável, logo f é contínua (Teorema 11), além disso, como $g(x) = \lambda_k(x - x_{k-1})^2$ é contínua, segue que f_k é contínua pela Proposição 3.

Agora, por (H_2), temos que $f(x) \geqslant L$, para algum L e $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Além disso,

$$\lim_{|x|\to\infty} g(x) = \lim_{|x|\to\infty} \lambda_k(x - x_{k-1})^2 = +\infty \text{ pois } \lambda_k > 0.$$

Sendo assim, como $f_k(x) = f(x) + g(x) \geqslant L + g(x)$, temos:

$$\lim_{|x|\to\infty} f_k(x) = \lim_{|x|\to\infty} (f(x) + g(x)) \geqslant L + \infty = +\infty,$$

Logo, $\lim\limits_{|x|\to\infty} f_k(x) = +\infty$, ou seja, f_k é coerciva, conforme Definição 12.

Portanto, pela Proposição 5, $\forall\ k \in \mathbb{N}$ existe um mínimo global x_k de f_k, o qual pode não ser único devido a não convexidade de f. $\square$

Sendo assim, segue do Teorema 12 que se f_k assume seu valor mínimo em x_k, para todo k, então $f_k'(x_k) = 0$ e como $f_k'(x_k) = f'(x_k) + 2\lambda_k(x_k - x_{k-1})$, segue que:

$$f'(x_k) + 2\lambda_k(x_k - x_{k-1}) = 0. \tag{2.3}$$

Observação 13. *(Critério de parada) Se $x_k = x_{k-1}$, então x_k é uma solução de (2.1). Pois nesse caso, $f'(x_k) = 0$, onde x_k é um ponto crítico. Essa condição é necessária, mas não é suficiente para deduzir que x_k seja solução do Problema (2.1). Na verdade, este processo detecta possíveis candidatos à solução. Além disso, se f é convexa, então x_k é um ponto de mínimo pelo Teorema 15.*

Observação 14. *Mesmo que $S^* = \varnothing$, a equação do Algoritmo (2.2) sempre possui solução.*

2.1.2 Análise de Convergência

A partir de agora, suponhamos que $x_k \neq x_{k-1}$ para todo k natural, pois caso contrário, x_k é um ponto crítico de f, de acordo com a Observação 13.

Proposição 13. *$\{f(x_k)\}$ é uma sequência estritamente decrescente e convergente.*

Demonstração. Sendo x_k um minimizador de f_k, segue que:

$$f_k(x_k) \leqslant f_k(x) \Rightarrow f(x_k) + \lambda_k(x_k - x_{k-1})^2 \leqslant f(x) + \lambda_k(x - x_{k-1})^2, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Em particular, para $x = x_{k-1}$, temos:

$f(x_k) + \lambda_k(x_k - x_{k-1})^2 \leqslant f(x_{k-1}) + \lambda_k(x_{k-1} - x_{k-1})^2 \Rightarrow f(x_k) + \lambda_k(x_k - x_{k-1})^2 \leqslant f(x_{k-1}) \Rightarrow f(x_k) < f(x_{k-1})$, visto que $\lambda_k(x_k - x_{k-1})^2 > 0$, pois $x_k \neq x_{k-1}$ e $\lambda_k > 0$. Logo, f é estritamente decrescente.

De (H_2), temos que f é limitada inferiormente. Portanto, como f é monótona e limitada, segue do Teorema 4 que a sequência $\{f(x_k)\}$ é convergente. $\square$

Com o objetivo de analisarmos a convergência do problema, considere o conjunto:

$$B := \{\bar{x} \in \mathbb{R}; f(\bar{x}) < f(x_k), \text{ para todo natural } k\}.$$

Proposição 14. *Se* $S^* \neq \varnothing$, *então* $B \neq \varnothing$.

Demonstração. Como $S^* \neq \varnothing$, então existe $x^* \in \mathbb{R}$ tal que $f(x^*) \leqslant f(x)$, para todo x em $\mathbb{R}$. Daí, $f(x^*) \leqslant f(x_k)$, suponhamos que $f(x^*) = f(x_k)$, para algum k. Como a sequência $\{f(x_k)\}$ é estritamente decrescente, temos:

$$... < f(x_{k+1}) < f(x^*) = f(x_k) < f(x_{k-1}) < ...$$

segue que: $f(x_{k+1}) < f(x^*)$. Absurdo.

Portanto, $f(x^*) < f(x_k), \forall\ k \in \mathbb{N}$, ou seja, $x^* \in B$, assim, temos que $B \neq \varnothing$. □

Proposição 15. *Suponha que* $B \neq \varnothing$. *Seja* $\bar{x} \in B$, *então para todo natural* k, *vale:*

$$(\bar{x} - x_k)^2 \leqslant (\bar{x} - x_{k-1})^2 - (x_k - x_{k-1})^2. \tag{2.4}$$

Demonstração.

$$(\bar{x} - x_{k-1})^2 = [(\bar{x} - x_k) + (x_k - x_{k-1})]^2 = (\bar{x} - x_k)^2 + 2(\bar{x} - x_k)(x_k - x_{k-1}) + (x_k - x_{k-1})^2.$$

Assim, de (2.3), segue que:

$$(\bar{x} - x_{k-1})^2 = (\bar{x} - x_k)^2 + (\lambda_k)^{-1} f'(x_k)(x_k - \bar{x}) + (x_k - x_{k-1})^2.$$

Do Teorema 18, temos que: $f'(x_k).(\bar{x} - x_k) \leqslant 0$, ou seja, $f'(x_k).(x_k - \bar{x}) \geqslant 0$, além disso $\lambda_k > 0$. Logo,

$$(\bar{x} - x_k)^2 + (x_k - x_{k-1})^2 \leqslant (\bar{x} - x_{k-1})^2 \Rightarrow (\bar{x} - x_k)^2 \leqslant (\bar{x} - x_{k-1})^2 - (x_k - x_{k-1})^2.$$

□

Observação 15. *Como* $x_k \neq x_{k-1}$, *temos* $(x_k - x_{k-1})^2 > 0$, *assim uma consequência da Proposição 15 é que* $|\bar{x} - x_k| < |\bar{x} - x_{k-1}|$, *para todo natural* k.

Teorema 20. *Seja* $B \neq \varnothing$, *então para todo* $\bar{x} \in B$, *temos:*

i) A sequência $(|\bar{x} - x_k|)_{k \in \mathbb{N}}$ *é convergente. Consequentemente* $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *é limitada;*

ii) $\lim\limits_{k \to \infty} |x_k - x_{k-1}| = 0$;

iii) A sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *converge para um ponto crítico.*

Demonstração. $i)$ Pela Observação 15, temos que:

$$|\bar{x} - x_k| < |\bar{x} - x_{k-1}| < |\bar{x} - x_{k-2}| < ... < |\bar{x} - x_0|.$$

Logo, a sequência $(|\bar{x}-x_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ é monótona e limitada, assim do Teorema 4, a sequência $(|\bar{x} - x_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para algum limite L.

Além disso, $|\bar{x} - x_k| < |\bar{x} - x_0|$, logo (x_k) é limitada. Portanto, temos que a sequência $(|\bar{x} - x_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente e $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada.

$ii)$ De (2.4), temos que:

$$(\bar{x} - x_k)^2 \leqslant (\bar{x} - x_{k-1})^2 - (x_k - x_{k-1})^2,$$

ou seja, $0 \leqslant (x_k - x_{k-1})^2 \leqslant (\bar{x} - x_{k-1})^2 - (\bar{x} - x_k)^2$. Assim,

$$0 \leqslant |x_k - x_{k-1}| \leqslant \sqrt{(\bar{x} - x_{k-1})^2 - (\bar{x} - x_k)^2} \tag{2.5}$$

Aplicando o limite na desigualdade (2.5), com $k \to \infty$, temos:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \lim_{k\to\infty} |x_k - x_{k-1}| &\leqslant \lim_{k\to\infty} \sqrt{(\bar{x} - x_{k-1})^2 - (\bar{x} - x_k)^2} \\ &\leqslant \sqrt{\lim_{k\to\infty} [(\bar{x} - x_{k-1})^2 - (\bar{x} - x_k)^2]} \\ &\leqslant \sqrt{\lim_{k\to\infty} (\bar{x} - x_{k-1})^2 - \lim_{k\to\infty} (\bar{x} - x_k)^2}. \end{aligned}$$

Daí, como $(|\bar{x} - x_k|) \to L$, segue que, $(|\bar{x} - x_k|^2) \to L^2$, logo:

$$0 \leqslant \lim_{k\to\infty} |x_k - x_{k-1}| \leqslant 0.$$

Portanto, pelo item $iii)$ do Teorema 3, temos que:

$$\lim_{k\to\infty} |x_k - x_{k-1}| = 0.$$

$iii)$ Seja $D = \{x_k; k \in \mathbb{N}\}$. Note que k tende a mais infinito e pelo item $i)$ a sequência (x_k) é limitada, logo o conjunto infinito D é limitado. Daí, pelo Teorema 7, D possui ao menos um ponto de acumulação. Seja x^* o ponto de acumulação do conjunto D, logo pelo Teorema 6 existe uma subsequência (x_{k_i}) de (x_k) tal que:

$$\lim_{i\to\infty} x_{k_i} = x^* \quad \text{e} \quad x_{k_i} \in D - \{x^*\}.$$

Assim,

$$f(x^*) = \lim_{i\to\infty} f(x_{k_i}) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) < f(x_k).$$

Logo, $x^* \in B$. Daí, como $(|x^* - x_k|)$ é convergente e $(|x^* - x_{k_i}|)$ converge a zero. Temos pelo Corolário 1 que: $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$.

Além disso, temos que: $f'(x^*) = \lim_{k\to\infty} f'(x_k) = \lim_{k\to\infty} 2\lambda_k(x_{k-1} - x_k) = 0$, pois λ_k é limitado e $\lim_{k\to\infty} (x_{k-1} - x_k) = 0$, ver item ii) do Teorema 3.

Logo, x^* é um ponto crítico.

Portanto, a sequência (x_k) converge para um ponto crítico, x^*. $\square$

Teorema 21. *Se* $B = \varnothing$, *então:*

i) $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência ilimitada;*

ii) $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

Demonstração. i) Suponha que (x_k) é uma sequência limitada. Assim, seja x^* um ponto de acumulação da sequência (x_k), logo existe uma subsequência (x_{k_i}) de (x_k), tal que $x_{k_i} \to x^*$. Daí, pela continuidade da função f e como $\{f(x_k)\}$ é uma sequência estritamente decrescente, temos:

$$f(x^*) = \lim_{i\to\infty} f(x_{k_i}) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) < f(x_k), \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Logo, $x^* \in B$. Absurdo!

Portanto, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência ilimitada.

ii) Suponha que $\lim_{k\to\infty} f(x_k) \neq \inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) < \alpha < \lim_{k\to\infty} f(x_k).$$

Logo, pela definição de ínfimo (ver definição, p. 76 de Lima [12]) existe x^*, tal que:

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) \leqslant f(x^*) < \alpha < \lim_{k\to\infty} f(x_k) \leqslant f(x_k),$$

assim, $f(x^*) < \alpha < f(x_k), \forall\ k \in \mathbb{N}$. Logo, $x^* \in B$. Absurdo!

Portanto, $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$. $\square$

Observação 16. *Note que,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definida por* $f(x) = c$, *onde* $c \in \mathbb{R}$, *não satisfaz a condição do conjunto* B. *No entanto, pelo Algoritmo (2.2) o critério de parada ocorre na primeira iteração.*

Teorema 22. *Assumindo* (H_1), (H_2) *como verdadeira e que* $B \neq \varnothing$. *Se* $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$, *então a sequência* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, *gerada pelo algoritmo (2.2), converge para a solução de (2.1).*

Demonstração. Pelo item $\mathtt{iii}$) do Teorema 20, a sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para um ponto crítico, ou seja, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$.

Seja x_k o minimizador da função $f(x) + \lambda_k(x - x_{k-1})^2$. Logo, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$f(x_k) + \lambda_k(x_k - x_{k-1})^2 \leqslant f(x) + \lambda_k(x - x_{k-1})^2.$$

Aplicando o limite, com $k \to \infty$, na desigualdade acima, temos:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) + \lim_{k\to\infty} \lambda_k(x_k - x_{k-1})^2 \leqslant f(x) + \lim_{k\to\infty} \lambda_k(x - x_{k-1})^2.$$

Por outro lado, como $x_k, x_{k-1} \to x^*$ e $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = 0$, temos:

$$f(x^*) \leqslant f(x), \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, x^* é a solução do problema (2.1). □

2.1.3 Ilustração do Método

Apresentaremos algumas ilustrações prática do método a fim de exemplificar a eficiência do mesmo.

$\mathtt{i}$) Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{-x}$, na qual de acordo com o método temos que encontrar a solução da equação:

$$f'(x_k) + 2\lambda_k(x_k - x_{k-1}) = 0, \text{ ou seja, } -e^{-x_k} + 2\lambda_k(x_k - x_{k-1}) = 0.$$

Solução.

Afirmação 1: $x_k > x_{k-1}$.

Demonstração. Suponha que $x_k \leqslant x_{k-1}$, logo $x_k - x_{k-1} \leqslant 0$. E, como $\lambda_k > 0$, temos que: $2\lambda_k(x_k - x_{k-1}) \leqslant 0$. Além disso, $-e^{-x_k} < 0, \forall\ x_k \in \mathbb{R}$. Logo, $-e^{-x_k} + 2\lambda_k(x_k - x_{k-1}) < 0$. Absurdo!

Portanto, $x_k > x_{k-1}$. □

Afirmação 2: $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência ilimitada.

Demonstração. Suponha que (x_k) é limitada, logo (x_k) é convergente, visto que (x_k) é uma sequência monótona e limitada. Assim,

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} x_{k-1} = x^*.$$

Daí, $\lim\limits_{k\to\infty} [-e^{-x_k} + 2\lambda_k(x_k - x_{k-1})] = -e^{-x^*} = 0$. Absurdo! Logo, (x_k) é ilimitada. Portanto, $x_k \to +\infty$ e com isso, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = \lim\limits_{k\to\infty} e^{-x_k} = 0 = inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$. □

$ii)$ Agora, consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x \cdot e^x$, analogamente ao caso anterior teremos de encontrar a solução da equação:

$$f'(x_k) + 2\lambda_k(x_k - x_{k-1}) = 0, \text{ ou seja, } (x_k + 1) \cdot e^{x_k} + 2\lambda_k(x_k - x_{k-1}) = 0.$$

Solução.

Afirmação 1: Se $x_{k-1} = -1$ implicar em $x_k = -1$. Pare!

Demonstração. Dado $x_{k-1} = -1$, temos:

$$(x_k + 1) \cdot e^{x_k} + 2\lambda_k(x_k + 1) = 0 \Rightarrow (x_k + 1) \cdot (e^{x_k} + 2\lambda_k) = 0,$$

ou seja, $(x_k + 1) = 0$ ou $(e^{x_k} + 2\lambda_k) = 0$. Como $(e^{x_k} + 2\lambda_k) > 0$, segue que:

$$(x_k + 1) = 0 \Rightarrow x_k = -1.$$

□

Afirmação 2: Se $x_{k-1} > -1$, então $x_k \leqslant x_{k-1}$.

Demonstração. Suponha que $x_k > x_{k-1}$, logo $x_k - x_{k-1} > 0$, daí:

$$(x_k + 1) \cdot e^{x_k} + 2\lambda_k(x_k - x_{k-1}) > 0. \text{ Absurdo!}$$

Portanto, $x_k \leqslant x_{k-1}$. □

Afirmação 3: Se $x_{k-1} < -1$, então $x_k \geqslant x_{k-1}$.

Demonstração. Suponha que $x_k < x_{k-1} \Rightarrow x_k - x_{k-1} < 0$, logo:

$$(x_k + 1) \cdot e^{x_k} + 2\lambda_k(x_k - x_{k-1}) < 0. \text{ Absurdo!}$$

Portanto, $x_k \geqslant x_{k-1}$. □

Daí, das **Afirmações** (2) e (3), a sequência (x_k) é limitada e monótona, portanto, convergente. Seja $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$, com isso $\lim\limits_{k\to\infty} 2\lambda_k(x_k - x_{k-1}) = 0$, logo:

$$\lim_{k\to\infty} [(x_k + 1) \cdot e^{x_k} + 2\lambda_k(x_k - x_{k-1})] = (x^* + 1) \cdot e^{x^*} = 0 \Rightarrow x^* = -1.$$

Assim, (x_k) tende para o ponto crítico da função f, que a saber é -1.

Por outro lado, temos que: $f(x_k) + \lambda_k(x_k - x_{k-1})^2 \leqslant f(x) + \lambda_k(x - x_{k-1})^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, isto é,

$$x_k \cdot e^{x_k} + \lambda_k(x_k - x_{k-1})^2 \leqslant x \cdot e^x + \lambda_k(x - x_{k-1})^2.$$

Agora, Aplicando o limite, com $k \to \infty$, na desigualdade acima e considerando $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$, temos:

$$-e^{-1} \leqslant x \cdot e^x, \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $x^* = -1$ é o ponto ótimo da função.

Uma boa aplicação do Método na educação básica é a resolução do problema abaixo.

Aplicação: Qual a solução da equação $e^x = x^2$?

Não é difícil ver que a equação acima possui uma única solução, bastando para isso construirmos o gráfico da função $g(x) = e^x$ que é uma curva que tem como assíntota o eixo x e toca o eixo y no ponto $(0,1)$ e $h(x) = x^2$ que é uma parábola com vértice na origem e concavidade voltada para cima. A utilização de gráficos para ilustrar o problema, torna a álgebra mais significativa, no entanto essa técnica só é bem sucedida com o auxílio do cálculo. Observe a figura:

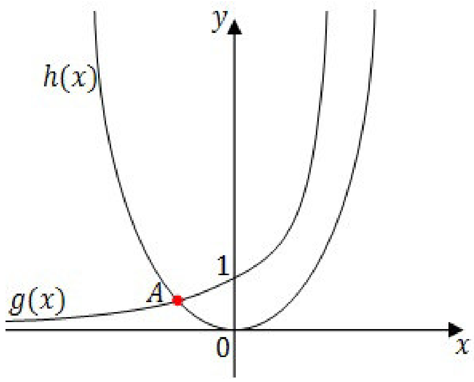

Figura 2.1: $h(x) = x^2$ e $g(x) = e^x$.

Nosso objetivo é encontrar uma "boa"aproximação para o ponto A da figura, fazendo uso do nosso Método.

Para encontrarmos essa solução, tomemos a função auxiliar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x - \frac{1}{3}x^3$, note que $f(x)$ é uma função convexa, logo quase convexa. Além disso, f satisfaz as hipóteses (H_1) e (H_2), assim utilizando nosso algoritmo encontraremos a solução para o problema.

De fato, sejam $x_0 = -2$ e $\lambda_k = \frac{1}{2^k}$, devemos encontrar x_1 tal que:

$$f'(x_1) + 2\lambda_1(x_1 - x_0) = 0,$$

ou seja,

$$e^{x_1} - {x_1}^2 + x_1 + 2 = 0.$$

Para resolver o problema acima, utilizaremos recursos computacionais (consideremos apenas 4 casas decimais) até encontrarmos a condição desejada. Geralmente, utilizamos um critério de parada específico, no nosso caso, consideremos que $|x_k - x_{k-1}| < 10^{-4}$. Assim, como estamos levando em conta apenas 4 casas decimais, nossa condição de parada será equivalente a $x_k = x_{k-1}$.

Desta forma, temos: $x_1 = -1.1065$, $x_2 = -0.7853$, $x_3 = -0.7495$, $x_4 = -0.7281$, $x_5 = -0.7162$, ..., $x_{10} = -0.7039$, $x_{11} = -0.7035$, $x_{12} = -0.7035$ e assim sucessivamente. Note que, $x_{11} = x_{12} = -0.7035$ será a raiz para nosso problema, pois satisfaz o nosso critério de parada. Verificando, temos que: $0.49485 \approx e^{-0.7035} = (-0.7035)^2 \approx 0.49491$. Portanto, $x_k = -0.7035$ é o ponto procurado.

Capítulo 3

Considerações Finais

Esse trabalho foi dedicado ao estudo do Método de Ponto Proximal para Otimização Quase Convexa, para tanto foi apresentado o Algoritmo (2.2) e comprovado sua eficiência para resolução do problema. O método consiste em resolver a equação: $f'(x_k) + 2\lambda_k(x_k - x_{k-1}) = 0$, que é quase sempre dada de forma implícita e onde é necessário o uso de recursos computacionais para ser resolvida, por exemplo o método de Newton. (Ver p. 105 de Izmailov [17]).

Além disso, mostramos que a sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gerada pelo Algoritmo (2.2), converge para um ponto crítico, e sob a condição $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = 0$, obtemos a convergência desta sequência para solução do problema (2.1). Por fim, foram apresentados alguns problemas de matemática na qual fizemos uso do método para resolução do mesmos.

Referências Bibliográficas

[1] AMARAL, José Henrique Salazar; BENTO, Glaydston de Carvalho. *O Método de Ponto Proximal para Otimização Convexa*, Goiás-GO. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Campus II.

[2] AMORIN, Ronan Gomes. *Introdução à Análise Convexa: Conjuntos e Funções Convexas*, Dissertação de Mestrado. Goiás-GO, 2013.

[3] APOLINÁRIO, Helena C. Fernandes. *Método de Ponto Proximal para Minimização Multiobjetivo Quase-Convexa.* Tese de Doutorado. Rio de Janeiro-RJ, 2014.

[4] ATTOUCH, H.; TEBOULLE, M.. *Regularized Lotka-Volterra Dynamical System as Continuous Proximal-Like Method in Optimization.* Journal of Optimization Theory and Applications, 2004.

[5] BAZARRA, M. S.; SHERALI, H. D.; SHETTY, C. M.. *Nonlinear Programming:* theory and algorithms. 3ª ed., John Wiley and Sons, Inc., New York, 2006.

[6] BELLO CRUZ, J. Y.; LUCAMBIO PÉREZ, L. R.; MELO, J. G.. *Convergence of the Projected Gradient Method for Quasiconvex Multiobjective Optimization.* Nonlinear Analysis, 2011.

[7] BRITO, A. S.; CRUZ NETO, J. X. da; LOPES, J. de O.; OLIVEIRA, P.R.. *Interior Proximal Algorithm for Quasiconvex Programming Problems and Variational Inequalities with Linear Constraints.* Journal of Optimization Theory and Applications, 2012.

[8] BOYD, Stephen P.; VANDENBERGHE, Lieven. *Convex Optimization.* Cambridge University Press, Cambridge. UK, 2004.

[9] CARVALHO, Francisco G. de Sousa. *Algoritmo do Ponto Proximal Generalizado em Espaços de Hilbert para Problema de Desigualdade Variacional.* Dissertação de Mestrado. Teresina-PI, 2010.

[10] CHAVES, Francisco Jones dos Reis. *O Método do Ponto Proximal para Otimização Convexa*, Dissertação de Mestrado. Teresina-PI, 2014.

[11] CYSNE, Rubens Penha; MOREIRA, Humberto de Athuyde. *Curso de Matemática para Economistas, Capítulo III:* calculo no $\mathbb{R}^n$. 1996.

[12] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise*, Volume 1. Coleção Projeto Euclides. 14ª Ed., Rio de Janeiro, IMPA, 2013.

[13] LIMA, Elon Lages. *Funções de uma Variável*, Volume 1. 12ª ed., Rio de Janeiro, IMPA, 2013.

[14] GUIDORIZZI, Hamilton, *Curso de Cálculo*, Volume 1, Quinta Edição, Rio de Janeiro, RJ, Editora LTC.

[15] HARREL, Charles R.; GHOSH, Biman K.; BOWDEN, Royce. *Simulation Using Promodel.* New York, McGraw-Hill, 2000.

[16] IZMAILOV, Alexey; SOLODOV, Mikhail V.. *Otimização:* condições de otimização, elementos de análise convexa e de Dua, Volume 1, 3ª ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[17] IZMAILOV, Alexey; SOLODOV, Mikhail V.. *Otimização:* métodos computacionais, Volume 2, 2ª ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[18] MANGASARIAN, O. L.. *Nonlinear Programming.* McGraw-Hill, New York, 1969.

[19] MARTINET, B. *Régularisation d'inéquations variationnelles par approximations successives.* (French)Rev. Française Informat. Recherche Opérationnelle 4 , Ser. R-3, 154-158, (1970).

[20] MUNIZ NETO, Antônio Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar:* introdução à análise. Volume 3, 2ª ed., Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[21] MUROLO, Afrânio Carlos; BONETTO, Giácomo Augusto. *Matemática aplicada à administração, economia e contabilidade.* São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

[22] NETO ANTAR, Aref; SAMPAIO, José L. P.; LAPA, Nilton; CAVALLANTE, Sidney Luiz. *Introdução à Análise.* Editora: moderna, São Paulo, 1985.

[23] PENOT, J. P.. *Characterization of solution sets of quasiconvex programs.* J. Optim. Theory Appl. 2006.

[24] QUIROZ, E. A. P.; OLIVEIRA, P. R. *Convergence of the Proximal Point Method for Quasiconvex Minimization.* Submitted, 2006.

[25] ROCKAFELLAR, R. T.. *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control. Optim. 14, 877-898, (1976).

[26] SILVA, Renata Batista e. *Método do Ponto Proximal Interior para Minimização Quase-Convexa.* Dissertação de Mestrado. Teresina-PI, 2013.

[27] SOUZA, Matheus; DINIZ-EHRHARDT, Maria A.. *Otimização e Análise Convexa:* aspectos teóricos e aplicações. 2011.