



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em matemática
Mestrado Profissional em matemática-PROFMAT

Modelagem Matemática da População de Teresina e da Dengue

Anna Karla Barros da Trindade

TERESINA - PI
ANO 2018



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
Centro de Ciências da Natureza
Departamento de matemática

Modelagem Matemática da População de Teresina e da Dengue

Anna Karla Barros da Trindade

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito obrigatório para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite

TERESINA - PI
ANO 2018

FICHA CATALOGRÁFICA

Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco

T832m Trindade, Anna Karla Barros da.

Modelagem matemática da população de Teresina e da
Dengue / Anna Karla Barros da Trindade. – 2018.

84 f.: il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) –
Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2018.

“Orientador: Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite”.

1. Modelagem matemática. 2. Crescimento populacional.
3. Dengue. 4. Modelagem Contínua. 5. Modelos Discretos.

I. Título.

CDD 510.7



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada: **Modelagem Matemática da População de Teresina e da Dengue**, defendida por Anna Karla Barros da Trindade em 14 / 09 / 2018 e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Presidente da Banca Examinadora

Examinador

Examinador

Dedico este trabalho a Paulo Junior, meu esposo; Anna Klara, Yully Sofia e Erza Safiri, minhas filhas; Espedito Trindade, meu pai (em memória); Francisca de Barros, minha mãe; Meus irmãos e meus avós; pelo incentivo nos momentos difíceis, pela paciência, compreensão e carinho.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, à Deus por me guiar nessa caminhada acadêmica e por me abençoar com disposição e sabedoria para conciliar o trabalho com o PROFMAT.

Agradeço ao meu esposo pela compreensão e paciência nos momentos de angústias e momentos de estudos.

Agradeço às minhas filhas pela compreensão e paciência por não estar presente nos muitos momentos que precisavam.

Agradeço aos meus pais, avós e irmãos pelos incentivos, compreensão e momentos de distrações, em especial meu irmão Esmar Trindade que deu uma força com a estadia.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Jefferson Leite, por me dar o crédito de realizar esse trabalho e pelo auxílio no decorrer do trabalho.

À todos os professores desse programa pela transferência de conhecimento que me auxiliarão no aperfeiçoamento da minha prática docente.

Aos meus colegas da turma do PROFMAT pelo companheirismo, união, troca de experiências, principalmente pelas quintas e sextas feiras de estudos realizadas semanalmente.

Aos meus colegas e professores da turma do PROFMAT UESPI pela força, apoio e troca de experiências.

À meus sogros, cunhadas e compadre Renato pela ajuda com os cuidados das minhas filhas e meu meu cachorro nos dias que eu me encontrava para o estudo em Teresina.

A Capes, pelo apoio financeiro concedido.

Ao Diretor da empresa onde trabalho SESI, pelo apoio de liberação concedido.

A Fundação Municipal de Saúde de Teresina pela disponibilização dos dados necessários para a pesquisa.

À todos que torceram pela realização de mais esse sonho e que se fizeram parte dessa jornada, muito obrigada!

“Você só vive uma vez, mas se você fizer isso direito, uma vez é suficiente.” (Mae West)

“Uma resposta aproximada para o problema certo vale muito mais do que uma resposta exata para um problema aproximado.”(John Wilder Tukey)

Resumo

Este trabalho tem como objetivo desenvolver um Modelo Matemático para o estudo do crescimento da população e dos casos diagnosticados da Dengue do município de Teresina. Para tanto, uniu-se Modelagem Matemática e suas etapas, juntamente com alguns modelos. Em seguida, para o desenvolvimento da modelagem, fez-se um levantamento dos dados do nosso problema de estudo, desenvolvendo então uma modelagem contínua e outra discreta. Observou-se que os modelos discretos se ajustam melhor aos dados e, por fim, fez-se a comparação dos modelos do crescimento populacional e do número de casos notificados da Dengue no município de Teresina.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Crescimento populacional, Dengue, Modelagem Contínua, Modelos Discretos.

Abstract

This work aims to develop a Mathematical Model for the study of population growth and diagnosed cases of Dengue in the city of Teresina. For that, joining Mathematical Modeling and its stages along with some models. Then, for the development of the modeling, we made a survey of the data of our study problem, developing a continuous and a discrete modeling. It was observed that the discrete models fit better with the data and, finally, the population growth models and the number of reported cases of Dengue in the city of Teresina were compared.

Keywords:Mathematical Modeling, Population Growth, Dengue, Continuous Modeling, Discrete Models.

Lista de Figuras

1	Principais Etapas da Modelagem	p. 5
2	Número de casos de dengue no Brasil, 1986 a 2002.	p. 25
3	Curva de incidência dos casos notificados da dengue por semana epidemiológica.	p. 30
4	Comparativo de casos notificados da dengue ao longo dos meses de 2013 a 2018.	p. 30
5	Comparativo de casos notificados da dengue nos últimos meses de 2017, por faixa etária.	p. 30
6	Curva de Tendência da população de Teresina	p. 31
7	Curva de Tendência dos casos notificados da Dengue	p. 31
8	Cálculo do valor de estabilidade de y^* com todos os dados da população.	p. 33
9	Cálculo do valor de estabilidade de y^* com todos os dados da população a partir de 1960.	p. 34
10	Curva exponencial auxiliar do Modelo 01	p. 35
11	Modelo Exponencial 01 X Dados Reais	p. 36
12	Modelo Exponencial Assintótico e Assíntota	p. 36
13	Cálculo do valor de estabilidade de y^* com todos os dados da população a partir de 1970.	p. 37
14	Curva Exponencial auxiliar do Modelo 02	p. 38
15	Modelo Exponencial 02 X Dados Reais	p. 39
16	Modelo Exponencial Assintótico e Assíntota	p. 40
17	Curva do Valor de estabilidade dos todos os casos notificados com a Dengue	p. 41
18	Curva exponencial auxiliar do Modelo Logístico 01	p. 44
19	Comparação do primeiro modelo logístico com os dados reais	p. 45
20	Projeções do primeiro modelo logístico	p. 46
21	Curva exponencial auxiliar do Modelo Logístico 02	p. 47
22	Comparação do segundo modelo logístico com os dados reais	p. 48

23	Projeções do segundo modelo logístico	p. 49
24	Relação entre valores e suas variações	p. 52
25	Relação entre valores anteriores e posteriores	p. 52
26	Modelo logístico discreto da população de Teresina	p. 54
27	Modelo Logístico Discreto x dados da população	p. 54
28	Relação entre valores e suas variações	p. 55
29	Relação entre valores anteriores e posteriores da Dengue	p. 56
30	Modelo logístico discreto de casos notificados da Dengue	p. 57
31	Modelo logístico discreto x dados sobre os casos notificados da Dengue	p. 58
32	Modelo Malthusiano da população de Teresina	p. 59
33	Relação do Modelo Malthusiano com os dados da população de Teresina	p. 60
34	Modelo Malthusiano dos casos notificados da Dengue	p. 61
35	Relação do Modelo Malthusiano com os dados notificados por Dengue na população de Teresina	p. 62
36	Casos da Dengue/População(Pn) de 2001 a 2050	p. 65
37	Pedido de autorização para a pesquisa dirigida à Fundação Municipal de Saúde - Teresina	p. 70
38	Ficha de investigação - SINAN, parte 1	p. 71
39	Ficha de investigação - SINAN, parte 2	p. 72

Lista de Tabelas

1	População Teresinense - Fonte:IBGE	p. 27
2	População Teresinense dividida por 1000	p. 28
3	Notificações da Dengue em Teresina - Fonte: SINAN	p. 28
4	Notificações da Dengue em Teresina dividida por 100	p. 29
5	Frequência por Semana Epidemiológica, notificação segundo Faixa Etária RIPSA6 do ano de 2018 - Fonte: SINAN	p. 29
6	Relação P_n (População) e P_{n+1} (Valor posterior da população)	p. 32
7	Dados para a curva exponencial auxiliar	p. 34
8	Dados do Modelo Exponencial Assintótico 01 para a população	p. 35
9	Relação P_n (População) e P_{n+1} (Valor posterior da população)	p. 37
10	Dados para a curva exponencial auxiliar do segundo Modelo Assintótico	p. 38
11	Dados do Modelo Exponencial Assintótico 02 para a população	p. 39
12	Relação entre D_n e D_{n+1}	p. 41
13	Dados para a curva auxiliar	p. 42
14	Cálculo do valor de $\frac{P_n}{y^* - P_n}$ do modelo logístico 01 da população	p. 43
15	Comparação do primeiro modelo logístico com os dados reais	p. 44
16	Cálculo do valor de $\frac{P_n}{y^* - P_n}$ do modelo logístico 01 da população	p. 45
17	Cálculo do valor de $\frac{P_n}{y^* - P_n}$ do modelo logístico 02 da população	p. 47
18	Comparação do segundo modelo logístico com os dados reais	p. 48
19	Cálculo do valor de $\frac{P_n}{y^* - P_n}$ do modelo logístico 02 da população	p. 49
20	Cálculo de $\frac{D_n}{y^* - D_n}$ para o modelo logístico 03	p. 50
21	Variação simples da população de Teresina	p. 51
22	Variação simples da população de Teresina	p. 53
23	Variação simples dos casos notificados da Dengue	p. 55
24	Variação do número de casos notificados da Dengue	p. 57

25	Modelo Malthusiano da população de Teresina	p. 59
26	Modelo Malthusiano dos casos de Dengue na cidade de Tersina	p. 61
27	Algumas projeções do modelo logístico 02	p. 63
28	Algumas projeções do modelo logístico discreto dos casos da Dengue . . .	p. 63
29	Razão entre os casos da Dengue e a população	p. 64

Lista de Siglas

FMS Fundação Municipal de Saúde

Funasa Fundação Nacional de Saúde

IBGE Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

MS Ministério de Saúde

SINAN Sistema de Informação de Agravos de Notificações

OEA Organização dos Estados Americanos

IMECC Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

UNICAMP Universidade Estadual de Campinas

UMAP Undergraduate Mathematics Application Program

UNESCO Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura

PUC-RJ Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Sumário

Introdução	p. 1
1 Modelagem Matemática	p. 3
1.1 Etapas da Modelagem	p. 4
1.2 Contexto histórico	p. 5
1.3 Precusores no Brasil	p. 6
1.3.1 Rodney Carlos Bassanezi	p. 6
1.3.2 Ubiratan D'Ambrósio	p. 7
1.3.3 Aristides C. Barreto	p. 9
1.4 Modelos Matemáticos	p. 9
1.4.1 Modelo Exponencial ou Modelo Malthusiano	p. 10
1.4.2 Modelo Logístico Contínuo (Verhurst)	p. 12
1.4.3 Modelo de Montroll	p. 15
1.4.4 Modelo de Von Bertalanffy	p. 16
1.4.5 Modelo de Gompertz	p. 18
1.4.6 Modelo de Smith	p. 19
1.4.7 Modelo Exponencial Assintótico - Método de Ford-Walford	p. 21
2 A Dengue	p. 23
2.1 Contexto histórico da Dengue	p. 23
3 Coleta de Dados	p. 27
4 Modelagem Contínua	p. 32
4.1 Modelo Exponencial Assintótico - Método Ford - Walford	p. 32
4.1.1 População de Teresina	p. 32
4.1.2 Casos notificado da Dengue	p. 40

4.2	Modelo Logístico Contínuo	p. 42
4.2.1	População de Teresina	p. 43
4.2.2	Casos notificado da Dengue	p. 50
5	Modelagem Discreta	p. 51
5.1	Modelo Logístico discreto	p. 51
5.1.1	População de Teresina	p. 51
5.1.2	Casos notificado da Dengue	p. 54
5.2	Modelo Malthusiano	p. 58
5.2.1	População de Teresina	p. 58
5.2.2	Casos notificado da Dengue	p. 60
6	Crescimento Populacional x Número de casos notificados da Dengue	p. 63
7	Considerações Finais	p. 66
	Referências	p. 67
	ANEXOS	p. 70

Introdução

Ao examinarmos a presente educação com mais exatidão, o modo que os educadores habitualmente transmitem o conhecimento aos alunos, nos deparamos como uma grande defasagem entre a forma de dar aula e as necessidades do mundo atual.

Alunos ainda nos perguntam para que serve o estudo de alguns conteúdos em matemática, considerada por muitos como sendo a matéria, da grade curricular, mais difícil. Para eles a disciplina não é atrativa pois não veem uma utilidade e por vezes nem mesmo entendem tais conteúdos.

As dificuldades para ensinar matemática vêm fazendo com que busquemos cada vez mais estratégias e metodologias para que se torne menor a dicotomia no que diz respeito ao que se é ensinado e do que realmente é aprendido pelos alunos.

Há uma carência de reforma no ensino de matemática, para que as aulas deixem de ser reproduções dos conteúdos, ou seja, as aulas devem se tornar mais práticas sendo contextualizadas com situações do cotidiano dos educandos.

E é nesse contexto, que utilizamos a Modelagem Matemática como estratégia de ensino-aprendizagem, nos possibilitando um aprendizado de forma mais contextualizado e dinâmico com o cotidiano do aluno, já que não ficamos presos ao tradicional.

A meta mais importante deste trabalho é mostrar que podemos relacionar acontecimentos diários com conhecimentos matemáticos e, a partir daí, com a criação de um modelo extrair inferências, para que possamos nos adequar a tal acontecimento.

Pensamos em vários eventos que podem ser vivenciados, entretanto decidimos fazer sobre o vírus da Dengue por se tratar de uma doença que vem se tornado manchetes nos últimos anos. Além disso foi observado que mesmo sendo discutida ainda não se fez alguns levantamentos de dados sobre tal doença. A população escolhida para o aprofundamento do estudo foi a da cidade de Teresina, a capital do estado Piauí, pois além de termos um melhor acesso aos dados, estes são mais verdadeiros.

No Capítulo 1, definimos Modelagem Matemática, suas características, etapas de uma modelagem, sua importância, alguns precursores e modelos.

No Capítulo 2, falamos sobre a Dengue e relatamos um pouco de sua história.

No Capítulo 3, expomos a coleta de dados realizada nos sites oficiais do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, Sistema de Informação de Agravos de Notificações e do Ministério de Saúde.

No Capítulo 4, apresentamos a modelagem contínua, com o modelo exponencial assintótico e o modelo logístico contínuo, dos dados da população teresinense e do número de casos notificados da Dengue.

No Capítulo 5, apresentamos a modelagem discreta, através dos modelos malthusiano e o logístico discreto, dos dados acima mencionados.

No Capítulo 6, foi feito o cruzamento de dados da população teresinense com o número de infectados pela Dengue.

No Capítulo 7, fez-se breves considerações finais.

Pretende-se assim vencer o desafio de fazer com que os alunos gostem mais da disciplina. Mostrar para os discentes que o que vivem diariamente são aprendizagens com teor matemático, e além disso fornecer dados para o conhecimento e aprofundamento da doença estudada.

1 Modelagem Matemática

Sob o olhar da psicologia cognitiva, o conhecimento matemático, nos moldes atuais, é visto como efeito da atividade própria do ser, na ação mútua com situações e pessoas do mundo que o rodeia. Dizemos em outras palavras, que tal saber - quantitativo e qualitativo - é o conjunto de relações que se obtém na interação do sujeito que pratica o ato com outro, por meio de ações físicas, intelectuais e emocionais sobre fatos e objetos do meio.

Neste ponto de vista, um caminho de orientação para o ensino da matemática é proporcionar aos alunos problemas que os motivem buscar situações da sua realidade social, colocando em prática sua reflexão no que se trata do estudo da matemática.

No ponto de vista de Bassanezi [5], (2012): “O estudo de situações e problemas reais, usando matemática como linguagem para sua compreensão, simplificação e resolução, para uma possível previsão ou modificação da situação real estudada, faz parte do processo que se convencionou chamar Modelagem Matemática.”

Segundo [2], relatamos, de modo geral, o processo envolvido no decorrer de uma atividade da modelagem matemática de seguinte forma:

Um problema, que constitui a situação inicial, um modelo matemático, que representa uma solução para o problema e caracteriza a situação final, e uma série de procedimentos, necessários para que haja a passagem da situação inicial para a final. Entre esses procedimentos, podemos citar a coleta de dados e informações, a definição de variáveis, a formulação de hipóteses, a realização de simplificações, as transições entre a linguagem natural do fenômeno e a linguagem matemática, a obtenção e validação de um modelo matemático e a comunicação dos resultados obtidos na investigação. ALMEIDA (2012).

Já para Lesh [15] (2010, p. 18), “um modelo é um sistema para descrever ou projetar algum outro sistema com algum propósito específico”. Assim um modelo serve para representar ou tornar presente o objeto matemático, podendo, portanto, assumir diversas representações, sendo exemplos: tabela, gráfico, figura, entre outras. Para aplicar a Modelagem em algum problema ou situação, seguimos algumas etapas que foram expostas a seguir.

1.1 Etapas da Modelagem

Bassanezi defende que a “Modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estarmos sempre elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele”. [5] (2012)

Bassanezi [5] (2012) ainda diz que a modelagem é um processo dinâmico, sendo composta por etapas que se complementam. De acordo com o mesmo são:

Experimentação: Método científico que, partindo de uma hipótese, consiste na observação e classificação de um fenômeno em condições controladas. É uma atividade essencialmente laboratorial onde se processa a obtenção de dados;

Abstração: Operação intelectual em que um objeto de reflexão é isolado de fatores que comumente lhe estão relacionados na realidade. É o procedimento que deve levar à formulação dos Modelos Matemáticos;

Resolução: O modelo matemático é obtido quando se substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente, é como num dicionário, a linguagem matemática admite sinônimos que traduzem os diferentes graus de sofisticação da linguagem natural;

Validação: É o processo de aceitação ou não do modelo proposto. Nesta etapa, os modelos, juntamente com as hipóteses que lhes são atribuídas, devem ser testados em confronto com os dados empíricos, comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real. O grau de aproximação desejado destas previsões será o fator preponderante para validação;

Modificação: Alguns fatores ligados ao problema original podem provocar a rejeição ou aceitação dos modelos. Quando os modelos são obtidos considerando simplificações e idealizações da realidade, suas soluções geralmente não conduzem às previsões corretas e definitivas, pois o aprofundamento da teoria implica na reformulação dos modelos. Nenhum modelo deve ser considerado definitivo, podendo sempre ser melhorado, podemos dizer que um bom modelo é aquele que propicia a formulação de novos modelos, sendo esta reformulação dos modelos uma das partes fundamentais do processo de modelagem.

Aplicação: A modelagem só se torna eficaz quando a mesma nos permite fazer previsões, tomar decisões explicar e compreender. É essencial a transferência para uma linguagem mais fácil.

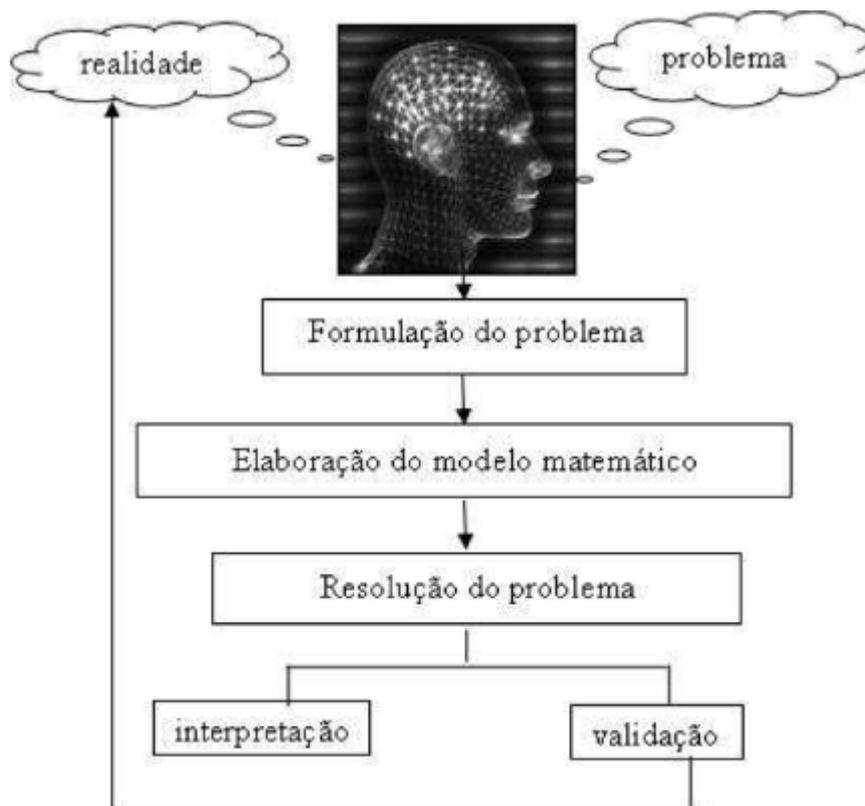


Figura 1 – Principais Etapas da Modelagem

1.2 Contexto histórico

Para traçar uma linha do tempo histórica sobre a Modelagem Matemática, é necessário muito esforço e por vez o mesmo nem chegue ao resultado esperado. As muitas interpretações desse nome (ou sua ausência) tornam o trabalho ainda mais difícil. Contudo, a noção de Aplicação e Modelagem como consideramos hoje, dificilmente teria sido visível, até mesmo pela dificuldade de separar os vários campos em que a Matemática estava envolvida.

Muitas atividades de Aplicação e Modelagem estavam relacionadas a criação de novos temas matemáticos como análise funcional, programação linear, teoria da codificação, criptografia, questões e problemas relativos ao mundo real.

O ensino da Matemática, em meados do séc. XIX se mostrava com grande dificuldade por conta da abordagem utilizada ser a da Matemática Pura e só no final do séc. XIX, uma nova tendência começava a surgir onde o foco era valorizar as aplicações da Matemática em todos os ramos das ciências naturais e técnicas, assim como seu significado na vida.

Durante o séc. XX, no ensino da Matemática, era ensinado Matemática Pura e Matemática Aplicada. Surgindo duas tendências que defendiam: Aplicações e Modelagem

para o aprendizado da Matemática e aprender Matemática para desenvolver competências em aplicações matemáticas e construção de modelos matemáticos.

1.3 Precusores no Brasil

As pesquisas realizadas no Brasil sobre Modelagem e Aplicações têm seu OEA percurso marcado por vários trabalhos. Na complexidade em saber quem foram todos precusores brasileiros no uso da modelagem ou construção de modelos em sala de aula, três, importantes nomes, são considerados fundamentais para incentivar e estabelecer a modelagem matemática no ensino brasileiro. São eles:

1.3.1 Rodney Carlos Bassanezi



Fonte: FONSECA.

Na década de 1980, Rodney Carlos Bassanezi coordenou um Curso com o apoio da e promovido na IMECC-UNICAMP (Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica), para 30 professores de Cálculo Diferencial Integral, de diversas Instituições de Educação Superior da região sul do Brasil. Nesse curso não havia método pré-estabelecido, ou melhor, não se pretendia fazer uso do método tradicional de ensino. Após um “bate-papo” com os participantes, foi proposto a eles que se reunissem por 2h e apresentassem um problema que envolvesse o Cálculo Diferencial e Integral para a solução. Depois de duas horas, a maioria dos problemas propostos era igual aos que se apresentava nos livros texto, sem originalidade nenhuma. Esse momento foi crucial para Bassanezi sugerir a modelagem matemática, em particular, na resolução de problemas da biologia aplicados ao Cálculo Diferencial Integral (biomatemática).

Em meados de 1982, é organizado um Curso de Pós-Graduação na Universidade Estadual de Guarapuava- PR e convidados professores da UNICAMP (Universidade

Estadual de Campinas) para ensinar, dentre eles, Bassanezi como coordenador. Assim, ele propõe uma alteração no programa tradicional de pós-graduação, que é aceita pelos participantes: fazer uma visita a empresas da cidade e, a partir do primeiro contato com as adversidades diárias, sugerir problemas de interesse da sociedade para serem examinados. Dessa forma, questões relacionadas às abelhas, ao chimarrão, a fabricação de papel, a suinocultura, em meio a outras, conduziram a realização do primeiro Curso de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e, por fim, a realização de outros Cursos sob a coordenação de Bassanezi no Brasil. Estimamos dezenas destes cursos de pós-graduação, formação continuada e palestras, em várias cidades de todas as regiões brasileiras, oferecidos por Instituições de Ensino ou Secretarias Estaduais e Municipais de Educação.

A realização dos Cursos e as orientações de alunos da iniciação científica e de pós-graduação lato e stricto sensu, durante os anos, levaram Bassanezi a (re)orientar o método, as estratégias, os instrumentos e a própria pesquisa, passando a atuar mais na Matemática Aplicada, em particular, na linha de pesquisa em biomatemática. Parte deste trabalho encontra-se no último livro que publicou - Modelagem no Ensino Aprendizagem (2002) que tem sido adotado em vários programas de graduação e pós-graduação no país.

1.3.2 Ubiratan D'Ambrósio



Fonte: FONSECA.

Na década de 1960, D'Ambrósio, professor e pesquisador na Brown University, em Providence, Rhode Island; na University of Rhode Island, em Kingston - Rhode Island e na State University of New York, em Búfalo- New York, soube do movimento que vinha ocorrendo nos Estados Unidos em relação ao ensino e a aprendizagem de matemática. Surgiu nessa época o Undergraduate Mathematics Application Program - UMAP que

tinha como objetivo preparar módulos de aprendizagem da matemática por temas. Isto é, escolhia-se um tema matemático e, então, procurava-se preparar um material de apoio didático com aplicações desse tema nas mais diversas áreas do conhecimento, com a finalidade de melhorar a aprendizagem matemática de alunos da Educação Superior.

Apesar de que não se qualificava como modelos matemáticos, os módulos apresentavam esta abordagem. Em 1972 D'Ambrósio retorna ao Brasil para atuar na UNICAMP. Com o apoio da UNESCO e OEA, D'Ambrósio tem a chance de introduzir propostas da educação matemática no Brasil. Dentre as implantadas nesse período, destacam-se duas:

A produção de materiais como apoio didático na forma de módulos. Foram produzidos novos materiais de apoio didático sobre vários temas matemáticos, todos voltados ao Ensino Fundamental.

A criação do 1º Mestrado em Ensino de Ciência e Matemática na Universidade Estadual de Campinas. O projeto da OEA, teve 4 turmas, com ingressos nos anos de 1975, 1976, 1977 e 1978. Cada turma tinha em média 32 alunos. A maioria dos mestrandos era professores de Instituições de Educação Superior dos diversos estados brasileiros e países das Américas do Sul e Central. O Curso tinha mais ou menos o modelo proposto na Universidade de Roskilde na Dinamarca, isto é, um modelo interdisciplinar, não linear. O modelo adotado nesse Mestrado deu origem a trabalhos em Modelagem e Etnomatemática.

Neste cenário, D'Ambrósio ouviu falar de um professor da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC-RJ, Aristides Camargo Barreto, matemático e que estava interessado em modelos dinâmicos integrados a música. Assim, Barreto vem a UNICAMP para uma palestra que contribuiu para aumentar a motivação de Rodney Carlos Bassanezi, em particular.

1.3.3 Aristides C. Barreto



Fonte: FONSECA.

Aristides C. Barreto tomou conhecimento sobre modelagem matemática cursando Engenharia na década de 1960. Começou a usar a modelagem na educação matemática na metade do ano de 1970, na PUC do Rio de Janeiro, onde passou a atuar como professor nesta Instituição. Na PUC-Rio, Barreto sempre procurava utilizar-se de modelos como estratégia de ensino nas disciplinas de Fundamentos da Matemática, Prática de Ensino e Cálculo Diferencial Integral. Em 1976, realizou sua primeira experiência pedagógica com 212 alunos de um Curso de Engenharia. Com os alunos, elaborou vários modelos em áreas específicas como Linguística, Biologia, dentre outras.

Essas experiências realizadas levaram-no a acreditar que a modelagem no ensino fazia com que os estudantes fossem mais motivados e interessados. Diante das teorias, ele estimulava a criatividade e o espírito crítico. A partir do ano 1989, passou a interpretar e produzir textos literários em prosa e verso, com ênfase em letras de música. Muitos desses trabalhos ele divulgou por meio de artigos e eventos. Sendo convidado, nessa época, pelo professor D'Ambrósio, para fazer uma palestra na UNICAMP, momento em que Bassanezi teve a primeiro contato com o tema e termo modelagem matemática.

1.4 Modelos Matemáticos

Um modelo matemático é uma interpretação simplificada da realidade, baseado em uma estrutura de conceitos mentais e experimentais. Para estudarmos um determinado fenômeno com grau de complexidade maior, criam-se vários modelos, sendo utilizados praticamente em todas as áreas. Por isso vale destacarmos alguns desses modelos.

1.4.1 Modelo Exponencial ou Modelo Malthusiano

A ideia de utilização da matemática para criar um modelo para o crescimento da população humana começou com o economista inglês T. R. Malthus com seu artigo *An Essay on the Principle of Population* de 1798.

Em seu modelo se torna evidente que o crescimento de uma população é proporcional à população em cada instante, ou seja, não levando em consideração fatores restritivos de crescimento e acredita que todos os indivíduos são idênticos (tem o mesmo comportamento). Para ele, o crescimento da população se organizaria por meio de uma função exponencial (progressão geométrica) enquanto os meios de sobrevivência (como comida) aumentariam com base em função linear (progressão aritmética).

Biologicamente, as condições imaginadas neste modelo são ideais, a tendência é de que as previsões pelo modelo malthusiano atinjam valores muito maiores, indicando uma explosão demográfica impossível de ocorrer na prática.

A incapacidade do modelo malthusiano de fazer previsões a longo prazo é uma das críticas principais a ele. Porém, este modelo possui importância devido à sua contribuição para a evolução dos modelos, a julgar por ter servido de base para muitos outros.

Para o modelo temos que:

$$\frac{dP}{dt} = P(t)$$

Como P (população) só assume valores inteiros, então $P(t)$ é uma função discreta de t (tempo). Mas, quando o número de indivíduos é suficientemente grande, podemos ter $P(t)$ se aproximando de uma função contínua, variando continuamente no tempo.

Seja n a taxa de fertilidade e m a taxa de mortalidade. Assim, temos que $\alpha = n - m$ é taxa de crescimento específico da população $P(t)$. Logo,

$$\frac{P(t+1) - P(t)}{P(t)} = n - m = \alpha$$

$$P(t+1) - P(t) = \alpha P(t)$$

$$P(t+1) = \alpha P(t) + P(t)$$

$$P(t+1) = (\alpha + 1)P(t)$$

considerando a população inicial $P(0) = P_0$, obtemos a seguir a recorrência:

$$\begin{cases} P_{t+1} = (\alpha + 1)P_t \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

Resolvendo a recorrência, temos:

$$P_{t+1} - P_t = \alpha P_t$$

$$P_{t+2} - P_{t+1} = \alpha P_{t+1}$$

$$P_{t+3} - P_{t+2} = \alpha P_{t+2}$$

.....

$$P_{t+n} - P_{t+n-1} = \alpha P_{t+n-1}$$

Somando membro a membro:

$$P_{t+n} - P_t = \alpha [P_t + P_{t+1} + P_{t+2} + \dots + P_{t+n-1}]$$

$$P_{t+n} - P_t = \alpha P_t [1 + (1 + \alpha) + (1 + \alpha)^2 + (1 + \alpha)^3 + \dots + (1 + \alpha)^{n-1}]$$

$$\frac{P_{t+n} - P_t}{P_t} = \alpha [1 + (1 + \alpha) + (1 + \alpha)^2 + (1 + \alpha)^3 + \dots + (1 + \alpha)^{n-1}]$$

$$\frac{P_{t+n} - P_t}{P_t} = \alpha \frac{(1 + \alpha)^n - 1}{(1 + \alpha) - 1}$$

$$\frac{P_{t+n} - P_t}{P_t} = \alpha \frac{(1 + \alpha)^n - 1}{\alpha}$$

$$\frac{P_{t+n} - P_t}{P_t} = (1 + \alpha)^n - 1$$

$$\frac{P_{t+n} - P_t}{P_t} + 1 = (1 + \alpha)^n$$

$$\frac{P_{t+n} - P_t + P_t}{P_t} = \frac{P_{t+n}}{P_t} = (1 + \alpha)^n$$

$$(1 + \alpha) = \sqrt[n]{\frac{P_{t+n}}{P_t}}$$

$$\alpha = \sqrt[n]{\frac{P_{t+n}}{P_t}} - 1$$

Seja $t = 0$, logo:

$$\alpha = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_0}} - 1$$

$$\alpha + 1 = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_0}}$$

$$(\alpha + 1)^n = \frac{P_n}{P_0}$$

$$P_n = P_0(\alpha + 1)^n$$

Neste modelo temos então que $\alpha = \sqrt[n]{\frac{P_{(t+n)}}{P_t}} - 1$, onde P_t , P_{t+n} e n são, respectivamente primeira amostra da população, última amostra da população e o tempo entre as duas amostras. Temos então que o Modelo Malthusiano é da forma $P_n = P_0(\alpha + 1)^n$ ou da forma $P_n = P_0 \cdot e^{\ln(1+\alpha)n}$.

1.4.2 Modelo Logístico Contínuo (Verhurst)

O primeiro modelo que atende à variação da taxa de crescimento foi formulado por Verhurst em 1837. O modelo acredita que uma população deverá crescer até um limite máximo sustentável graças as inibições naturais, ou seja, ela tende a se equilibrar. O modelo de Verhurst é um aperfeiçoamento do modelo de Malthus visto que supõe variáveis que Malthus não admitia. Ao passo que Malthus considerava a taxa de crescimento essencialmente constante, Verhurst considerou esta taxa decrescente de forma linear simples, ou seja,

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P$$

onde $\alpha = r \frac{P^* - P}{P^*}$, $r > 0$ sendo a taxa de crescimento, P^* a capacidade suporte da população e $P = P(0)$ o valor inicial.

Assim, temos o modelo logístico:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{P^*}\right) \\ P(0) = P_0, r > 0 \end{cases}$$

Observe que $P(t) \equiv 0$ e $P(t) \equiv P^*$ são soluções desta equação diferencial.

Resolvendo esta equação através da técnica das frações parciais, temos:

$$\int \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{P^*}\right)} = \int r dt = rt + C$$

$$\frac{1}{P \left(1 - \frac{P}{P^*}\right)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{1 - \frac{P}{P^*}} = \frac{A \left(1 - \frac{P}{P^*}\right) + BP}{P \left(1 - \frac{P}{P^*}\right)}$$

$$1 = A \left(1 - \frac{P}{P^*}\right) + BP$$

$$1 = A - \frac{AP}{P^*} + BP$$

Assim, sendo $A = 1$, então:

$$1 - \frac{P}{P^*} + BP = 1$$

$$BP = \frac{P}{P^*}$$

$$B = \frac{1}{P^*}$$

logo,

$$\frac{1}{P \left(1 - \frac{P}{P^*}\right)} = \frac{1}{P} + \frac{\frac{1}{P^*}}{1 - \frac{P}{P^*}}$$

$$\int \frac{1}{P \left(1 - \frac{P}{P^*}\right)} dP = \int \left(\frac{1}{P} + \frac{\frac{1}{P^*}}{1 - \frac{P}{P^*}} \right) dP = \int \frac{1}{P} dP + \int \frac{\frac{1}{P^*}}{1 - \frac{P}{P^*}} dP$$

$$= \ln|P| - \ln \left| 1 - \frac{P}{P^*} \right| = rt + C$$

$$\ln \left| \frac{P}{1 - \frac{P}{P^*}} \right| = rt + C$$

Temos que $P(0) = 0$, dada na equação diferencial, sendo assim:

$$\ln \left| \frac{P_0}{1 - \frac{P_0}{P^*}} \right| = \ln \left| \frac{P^* P_0}{P^* - P_0} \right| = C$$

sendo assim:

$$\ln \left| \frac{P_0}{1 - \frac{P_0}{P^*}} \right| = rt + \ln \left| \frac{P^* P_0}{P^* - P_0} \right|$$

$$\ln \left| \frac{P_0}{1 - \frac{P_0}{P^*}} \right| - \ln \left| \frac{P^* P_0}{P^* - P_0} \right| = rt$$

$$\ln \left| \frac{\frac{P_0}{1 - \frac{P_0}{P^*}}}{\frac{P^* P_0}{P^* - P_0}} \right| = rt$$

$$\ln \left| \frac{P}{1 - \frac{P}{P^*}} \cdot \frac{P^* - P_0}{P^* P_0} \right| = \ln \left| \frac{P(P^* - P_0)}{P^* P_0 - P P_0} \right| = \ln \left| \frac{P(P^* - P_0)}{P_0(P^* - P)} \right| = rt$$

$$\frac{P(P^* - P_0)}{P_0(P^* - P)} = e^{rt}$$

$$P = \frac{P_0(P^* - P)}{P^* - P_0} e^{rt} = \frac{P_0 P^* - P_0 P}{P^* - P_0} e^{rt}$$

$$P = \frac{P_0 P^*}{P^* - P_0} e^{rt} - \frac{P_0 P}{P^* - P_0} e^{rt}$$

$$P + \frac{P_0 P}{P^* - P_0} e^{rt} = \frac{P_0 P^*}{P^* - P_0} e^{rt}$$

$$P \left(1 + \frac{P_0}{P^* - P_0} e^{rt} \right) = P \left(\frac{P^* - P_0 + P_0 e^{rt}}{P^* - P_0} \right) = \frac{P_0 P^*}{P^* - P_0} e^{rt}$$

$$P(P^* - P_0 + P_0 e^{rt}) = P_0 P^* e^{rt}$$

$$P = \frac{P_0 P^* e^{rt}}{P^* - P_0 + P_0 e^{rt}} = \frac{P_0 P^*}{(P^* - P_0 + P_0 e^{rt}) e^{-rt}}$$

$$P = \frac{P_0 P^*}{(P^* - P_0) e^{-rt} + P_0}$$

$$P = \frac{P^*}{\left(\frac{P^*}{p_0}\right)e^{-rt} + 1}$$

Daí, podemos observar as seguintes características:

Os pontos de equilíbrio são:

$$P = 0 \Rightarrow \frac{P^* \cdot 0}{(P^* - 0)e^{-rt} + 0} = 0$$

$$P = P^* \Rightarrow \frac{P^* P^*}{(P^* - P^*)e^{-rt} + P^*} = \frac{P^* P^*}{P^*} = P^*$$

Sendo assim acontece que:

Se $P_0 < P^*$, então $P_0 < P(t) < P^*$ e $P(t)$ tende a P^* , crescendo, pois $\frac{dP}{dt} > 0$.

Se $P_0 > P^*$, então $P(t)$ tende a P^* , decrescendo, pois $\frac{dP}{dt} < 0$.

Porém o modelo de Verhurst tem limitações, uma delas consiste no fato que o ponto de inflexão (ou de crescimento máximo) da curva está sempre localizado no ponto $P_m = \frac{P_\infty}{2}$, o que nem sempre acontece na maioria das variáveis relacionadas a fenômenos com tendência assintótica.

1.4.3 Modelo de Montroll

Proposto em 1971, o modelo de Montroll pode ser dito como sendo uma generalização do modelo de Verhurst, contudo se torna diferente quando vemos que o índice de crescimento relativo da população não é linear.

Assim, o modelo de Montroll exibe uma avanço com relação ao de Verhurst, pois é possível moldá-lo a questões de naturezas distintas através do cálculo do ponto de inflexão, variando, quando necessário, o valor de α .

Seja P^* o valor limite de uma população $P=P(t)$ e λ a sua taxa relativa de crescimento quando P é “pequeno”.

O modelo de Montroll é dado por

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P \left[1 - \left(\frac{P}{P^*} \right)^\alpha \right]$$

com $\lambda > 0$ e $\alpha > 0$.

Se $\alpha = 1$ caímos no modelo de Verhurst 1.4.2.

Para determinar o ponto máximo de crescimento, basta tomarmos a equação $\frac{d^2P}{dt^2} = 0$. Percebamos:

$$\begin{aligned}\frac{d^2P}{dt^2} &= \lambda \frac{dP}{dt} \left[1 - \left(\frac{P}{P^*} \right)^\alpha \right] - \alpha \lambda \frac{P}{P^*} \left(\frac{P}{P^*} \right)^{\alpha-1} \frac{dP}{dt} \\ &= \lambda \frac{dP}{dt} \left[1 - \left(\frac{P}{P^*} \right)^\alpha - \alpha \frac{P}{P^*} \left(\frac{P}{P^*} \right)^{\alpha-1} \right],\end{aligned}$$

como foi dito para $\frac{d^2P}{dt^2} = 0$ tem-se:

$$1 - \left(\frac{P}{P^*} \right)^\alpha - \alpha \frac{P}{P^*} \left(\frac{P}{P^*} \right)^{\alpha-1} = 0$$

$$1 - \left(\frac{P}{P^*} \right)^\alpha - \alpha \left(\frac{P}{P^*} \right)^\alpha = 0$$

$$\left(\frac{P}{P^*} \right)^\alpha (1 + \alpha) = 1$$

$$\left(\frac{P}{P^*} \right)^\alpha = \frac{1}{1 + \alpha}$$

$$\frac{P}{P^*} = \sqrt[\alpha]{\frac{1}{1 + \alpha}}$$

$$P = P^* \sqrt[\alpha]{\frac{1}{1 + \alpha}}$$

Sendo o principal objetivo do modelo sugerir algumas formas de decréscimo das taxas de variação.

1.4.4 Modelo de Von Bertalanffy

Em 1938 Von Bertalanffy, biólogo australiano, desenvolveu um modelo para investigar o acréscimo em peso de peixes e no início dos anos setenta propôs esse modelo para tal estudo.

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \alpha N^{\frac{2}{3}} - \beta N \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Sendo $N=N(t)$ a massa do peixe em função do tempo t , N_0 a massa inicial, α

a constante de anabolismo (representando a taxa de síntese de massa por unidade de superfície do animal) e β a constante de catabolismo (que representa a taxa de diminuição da massa por unidade de massa). O termo $N^{\frac{2}{3}}$ é oriundo da correspondência alométrica do peso com área corporal do peixe. A equação é não linear e trata-se de uma Equação diferencial do tipo Bernoulli e sendo feita uma simples substituição de variáveis nos conduz à equação linear. Considerando $z = N^{\frac{1}{3}}$, temos que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{3}N^{-\frac{2}{3}}\frac{dN}{dt}$$

Substituindo em:

$$N(t) = \frac{N_0 k}{[N_0^\beta + (k^\beta - N_0^\beta)e^{-\beta\alpha t}]^{\frac{1}{\beta}}} \quad (1.2)$$

temos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{3}N^{-\frac{2}{3}}(\alpha N^{\frac{2}{3}} - \beta N) = \frac{1}{3}(\alpha - \beta z)$$

cuja a solução é dada por

$$z = \frac{\alpha}{\beta} + K e^{\frac{\beta t}{3}}$$

Agora usando a condição inicial $N(0) = N_0$ e $z = N^{\frac{1}{3}}$, obtemos

$$N(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left(1 - e^{-\frac{\beta t}{3}}\right)^3 \text{ se } N(0) \cong N_0$$

ou

$$N(t) = \left[\frac{\alpha}{\beta} \left(1 - e^{-\frac{\beta t}{3}}\right) + N_0^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{\beta t}{3}} \right]^3 \text{ se } N(0) \neq N_0 \quad (1.3)$$

Quando t cresce N tende a $N_\infty = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3$

Consideremos $N(0) = 0$. Tomando $K = \frac{\beta}{3}$ e substituindo em 1.1, temos a solução de 1.2 dada por:

$$N(t) = N_\infty(1 - e^{-Kt})^3 \quad (1.4)$$

onde N_∞ é o valor máximo do peso dos peixes.

Neste modelo o ponto de inflexão é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{d^2p}{dt^2} = \frac{2}{3}\alpha N^{-\frac{1}{3}} \frac{dp}{dt} - \beta \frac{dp}{dt} = 0 &\iff \frac{2}{3}\alpha N^{-\frac{1}{3}} - \beta = 0 \iff N^{-\frac{1}{3}} = \frac{3\beta}{2\alpha} \\ \implies N^* &= \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 N_\infty = 0.2963N_\infty \end{aligned}$$

1.4.5 Modelo de Gompertz

Uma Curva de Gompertz, proposta em 1825, assim intitulada devido a seu criador Benjamin Gompertz, é um modelo matemático relativo a séries temporais, onde o crescimento é menor no começo e no fim do período temporal. É muito usada para traduzir crescimentos celulares, sendo que, no início todas as células são meristemáticas, perdendo esta propriedade num intervalo de tempo relativamente pequeno. Também auxilia no estudo da evolução de tumores sólidos.

O modelo utiliza uma taxa de inibição da variável de estado proporcional ao logaritmo desta variável, sendo dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bx \ln x = x(a - b \ln x) \\ x(0) = x_0 \text{ com } a > 0 \text{ e } b > 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

A taxa de crescimento relativo $r(x) = a - b \ln x > 0$, decresce com x e o valor de estabilidade de x é obtido considerando-se $r(x) = 0$, isto é,

$$\frac{dx}{dt} = 0 \iff (a - b \ln x) = 0 \iff x_\infty = e^{\frac{a}{b}}, \text{ com } x > 0.$$

Observando que quando x é muito pequeno, $r(x)$ é muito grande pois

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} r(x) = +\infty$$

Agora, como $0 = a - b \ln x_\infty$, podemos tomar $a = b \ln x_\infty$. Daí temos:

$$\frac{dx}{dt} = bx \ln x_\infty - b \ln x = bx \ln \left(\frac{x_\infty}{x}\right) = x \ln \left(\frac{x_\infty}{x}\right)^b$$

e neste caso, $r(x) = \ln \left(\frac{x_\infty}{x}\right)^b$

A solução de 1.5 é obtida considerando-se a mudança de variável $z = \ln x$:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = a - bz$$

integrando,

$$\int \frac{dz}{a - bz} = \int dt \iff -\frac{1}{b} \ln|a - bz| = t + c$$

para $t = 0$ obtemos $c = -\frac{1}{b} \ln|a - b \ln x_0|$

Portanto, $\ln|a - bz| = -bt + \ln|a - b \ln x_0|$,

$$a - bz = (a - b \ln x_0) e^{-bt} \iff z(t) = \frac{1}{b} \left[a - (a - b \ln x_0) e^{-bt} \right].$$

Voltando a variável $x = e^z$, obtemos

$$x(t) = e^{\frac{a}{b}} \exp \left[- \left(\frac{a}{b} - \ln x_0 \right) e^{-bt} \right].$$

A curva $x(t)$ tem um ponto de inflexão quando

$$t = t_m = \frac{1}{b} \ln \left(\frac{a}{b} - \ln x_0 \right)$$

1.4.6 Modelo de Smith

Modelo semelhante ao de Gompertz, quando o aumento da variável y é assintótico e inibido. Em 1963, Smith questiona a equação logística do crescimento de Verhulst, pois para ele a equação não aplica adequadamente os dados experimentais devidos aos problemas associados com as retardações de tempo. Estas, nos efeitos da densidade sobre a natalidade e mortalidade distorcem a forma da curva do crescimento da população.

Segundo Smith, o principal problema em aplicar a curva logística aos dados, refere-se a um exemplo verificado da porção dos fatores limitantes ainda inutilizados, isto é, $\left(1 - \frac{N}{K}\right)$. Logo questionou-se que para ter uma população com limite de alinhamento, o termo $\left(1 - \frac{N}{K}\right)$ deveria ser substituído por outro que representasse a proporção da taxa de fonte do alimento atualmente inutilizada pela população. Se F for a taxa em que uma população do tamanho N usa o alimento e T for a taxa correspondente ao nível de saturação, então

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{F}{T} \right)$$

onde $\frac{F}{T} > \frac{N}{K}$ de modo que a população em crescimento usará o alimento mais rapidamente do que a população saturada.

F deve depender de N e do $\frac{dN}{dt}$, onde a relação mais simples será linear

$$F = aN + b \frac{dN}{dt}, a > 0, b > 0.$$

Na saturação $F = T$, $N = K$, $\frac{dN}{dt} = 0$, conseqüentemente $T = aK$, assim, para a equação de crescimento modificado temos

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(\frac{1 - \frac{N}{K}}{1 + c \frac{N}{K}} \right) \quad (1.6)$$

onde $c = r \frac{b}{a}$.

A equação (1.5) é o crescimento logístico de Verhulst escalado pelo fator de “atraso” $\left(1 + c \frac{N}{K}\right)^{-1}$ e não aceita uma solução analítica para N em função de t , mas ao oposto

$$t = \frac{1}{r} \ln \left[\frac{(K - N_0)^{1+c}}{N_0} \right] + \frac{1}{r} \ln \left[\frac{N}{(K - N)^{1+c}} \right] \quad (1.7)$$

O valor de inflexão para a equação de Smith é

$$N_{inf} = \frac{K}{1 + \sqrt{1 + c}} \quad (1.8)$$

Para $c = 0$ a forma de Smith reduz-se à forma de crescimento logístico de Verhulst com $N_{inf} = \frac{K}{2}$, enquanto que para $c > 0$, $N_{inf} < \frac{K}{2}$ e para $c < 0$, $N_{inf} > \frac{K}{2}$. Para $c = -1$, o crescimento é exponencial, $\frac{dN}{dt} = rN$, e não há nenhum ponto de inflexão.

A taxa de crescimento máximo, quando $c \neq -1$, é dada por

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{max} = \frac{rK}{(1 + \sqrt{c+1})^2} \quad (1.9)$$

A taxa relativa de crescimento, $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$, decresce não linearmente com aumento N para $c < -1$, com taxa de decrescimento sendo regulada pelo parâmetro c .

1.4.7 Modelo Exponencial Assintótico - Método de Ford-Walford

O método de Ford-Walford é aplicado a modelos de dinâmica populacional, cujas soluções apresentam um comportamento assintótico, se estabilizando com o decorrer do tempo. A finalidade do método é determinar o valor para qual uma solução irá se estabilizar, que chamaremos de valor da estabilização de solução e será denotado por y^* .

A curva para ajuste é dada pelo modelo exponencial assintótico:

$$y = y^* - ae^{bx}$$

com $y^* > 0$ e $b < 0$.

O cálculo do valor de equilíbrio y^* pode ser realizada pelo método de Ford-Walford, que, inicialmente, determina uma função g que correlaciona os pares y_n, y_{n+1} ou seja, a curva ajustada é da forma $y_{n+1} = g(y_n)$.

Temos, então, que encontrar seu ponto estável:

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} g(y_n) = \lim_{x_n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \lim_{x_n \rightarrow \infty} y_n = y^*$$

Logo, a sequência de pontos $(y_n; y_{n+1})$ converge para o ponto $(y^*; y^*)$ se y^* é um ponto fixo da função $g(y)$.

Faremos em seguida o ajuste linear da função $g(y) = ay + b$. Como $g(y^*) = y^*$, então:

$$g(y) = ay + b = y^*$$

$$y^* - ay^* = b$$

$$y^*(1 - a) = b$$

$$y^* = \frac{b}{1-a}$$

Desse modo, poderemos calcular o valor de estabilidade y^* e determinar o modelo exponencial assintótico.

2 A Dengue

A dengue é uma doença febril aguda, infecciosa, causada por vírus, sendo um dos principais problemas de saúde pública no mundo.

É transmitida pelo mosquito *Aedes aegypti*, que se encontra acomodado ao ambiente doméstico e relacionado ao crescimento demográfico, intercâmbios internacionais, variações na pluviosidade e temperatura do ambiente. Estes fatores favorecem a proliferação do mosquito e propagação dos sorotipos virais, na medida em que as populações humanas dispõem de formas favoráveis à reprodução do vetor.

Existem quatro tipos de dengue, conforme os sorotipos: DEN-1, DEN-2, DEN-3 e DEN-4. Todos os tipos de dengue causam os mesmos sintomas, porém caso ocorra um segundo ou terceiro ocorrência da dengue, o risco aumenta para formas mais graves da doença, pois pode evoluir para a dengue hemorrágica, síndrome do choque da dengue, caracterizadas por sangramento e queda de pressão arterial, o que eleva o risco de morte.

A melhor maneira de combater esse mal é atuando de forma preventiva, impedindo a reprodução do mosquito.

2.1 Contexto histórico da Dengue

No mundo, o primeiro caso de dengue data na dinastia chinesa Jin (265-420), chamada pelos chineses de “veneno da água”.

Segundo Gubler (1997) [13], a dengue é uma doença da qual são encontrados relatos clínicos e epidemiológicos potencialmente compatíveis, em uma enciclopédia chinesa datada de 600 DC. Também foram descritos surtos de uma doença febril aguda no oeste da Índia Francesa, em 1635, e no Panamá, em 1699, não havendo certeza quanto a ter sido dengue.

Todos os relatos referentes à enfermidade anteriores ao ano de 1950, quando foi isolado pela primeira vez o micro-organismo causador da mesma, se baseiam em critérios clínico-epidemiológicos, uma vez que é uma virose que se apresenta em forma de epidemias súbitas e massivas, entre as diversas enfermidades causadas por outros vírus capazes de produzir um quadro agudo de febre, mialgia e erupções cutâneas [22](Torres 1998).

Alguns autores consideram que as primeiras epidemias de que se tem informação ocorreram em 1779, na Ilha de Java em Jacarta e no Egito, seguidas pela epidemia da Filadélfia, EUA, um ano depois.

Ao longo dos três últimos séculos tem se registrado a ocorrência da dengue em várias partes do mundo.

No século XIX, o desenvolvimento do transporte comercial entre os portos do Caribe e Sul dos Estados Unidos com o resto do mundo favoreceu a ocorrência de grandes surtos epidêmicos da doença. O primeiro deles, teve início no Caribe e na Costa Atlântica dos EUA em 1827, e entre os anos de 1848 e 1850 se propagou pela região estando associado a abortos e partos prematuros. A doença, já espalhada pelo Caribe, atingiu o outro lado do mundo, com registros de epidemias na Austrália nos anos de 1879, 1885 e 1897.

No início do século XX, mais precisamente na década de 1920, o vírus da dengue predominava nas Filipinas e na Ásia. Cabe destacar, a epidemia que atingiu a Grécia, no final desta mesma década, quando 90% da população de Atenas ficou infectada, com 1 milhão de casos notificados e 1250 óbitos.

Por um longo período a dengue foi considerada doença benigna e, somente após a II Guerra Mundial, que favoreceu a circulação de vários sorotipos em uma mesma área geográfica, é que passaram a ocorrer surtos de uma febre hemorrágica severa que posteriormente seria identificada como uma forma da doença, o dengue hemorrágico. O primeiro destes eventos foi descrito nas Filipinas em 1953 [22](Torres 1990).

Progressivamente, outros países asiáticos como o Vietnã do Sul, Cingapura, Malásia e Indonésia foram apresentando surtos de dengue hemorrágico.

Em 1964, após 20 anos sem registro da doença, um pequeno surto foi diagnosticado no Taiti e nos anos seguintes, as epidemias graves reapareceram em vários países, com a circulação dos quatro sorotipos do vírus se mantendo até os dias de hoje [13](Gubler 1997).

De acordo com a [20]Organização Panamericana de Saúde 1995, durante a década de 80, o problema da dengue aumentou consideravelmente, tendo sido caracterizado por uma enorme propagação geográfica nas Américas. Diversos países, que passaram décadas sem registros da doença, sofreram grandes epidemias no período de 1980 a 1990, com destaque para a Colômbia, México e Brasil.

No Brasil, desde o século XVIII, o *Aedes aegypti* provocou a primeira epidemia de febre amarela no estado de Pernambuco em 1685 [6](FUNASA 2001). Após uma epidemia de febre amarela com 900 óbitos, ocorrida na Bahia em 1686, o governo brasileiro resolveu

lançar a 1ª Campanha Sanitária de Combate ao Vetor, em 1691. Devido ao sucesso desta campanha, o país se viu livre da doença durante mais de um século e a mesma só veio a reaparecer em 1849, em Salvador, causando 2.800 mortes. Neste mesmo ano, o *Aedes aegypti* instala-se no Rio de Janeiro, provocando a primeira epidemia da doença no estado, com 4.160 óbitos. Seguindo os caminhos da navegação marítima o vetor se propaga pelo país, levando à ocorrência de epidemias desde o Amazonas até Rio Grande do Sul [11](Franco 1976).

No início da século XX, o então Diretor-Geral de Saúde Pública, Oswaldo Cruz, criou o Serviço de Profilaxia da Febre Amarela, o que resultou na eliminação da doença do Rio de Janeiro, em 1909. Contudo, a erradicação da doença durou pouco, e perante novas epidemias em diversos estados do Nordeste e no Rio de Janeiro, em 1931, o governo brasileiro decide assinar um convênio com a Fundação Rockefeller estendendo o Serviço de Profilaxia da Febre Amarela para todo o território nacional e combatendo as larvas do *A. aegypti* mediante utilização de petróleo. Após diversas bem sucedidas campanhas de erradicação do vetor, em 1958, a XV Conferência Sanitária Panamericana, realizada em Porto Rico, declara o *A. aegypti* erradicado do território brasileiro [6] [11](Franco 1976 & FUNASA 2001). No entanto, com a explosão demográfica dos anos 60 e 70, o mosquito é reintroduzido no Brasil.

Em 1998 o número de casos chegou a 570.148 no país, com uma pequena redução para 210.000 casos em 1999. Em 2000 e 2001 uma nova explosão da enfermidade provoca 240 mil e 370 mil casos respectivamente no país inteiro conforme a Figura 2 [7](FUNASA 2002). Atualmente, a dengue está alastrada por todo o território brasileiro.

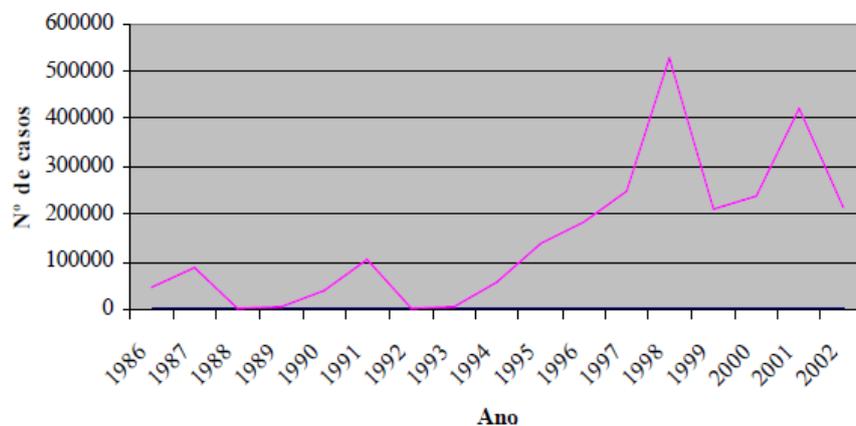


Figura 2 – Número de casos de dengue no Brasil, 1986 a 2002.

No Piauí, a presença do mosquito foi confirmada em 1986 e, em 1994, pesquisas realizadas pela Fundação Nacional de Saúde (Funasa) confirmaram a presença do mosquito no Município de Teresina-PI. Nesse mesmo ano, foram notificados os primeiros casos autóctones - quando a doença é contraída dentro do Estado - de dengue, confirmados e a primeira epidemia em 1996. No ano de 1998 foi detectada a maior epidemia, com registro de 10.081 casos e 4 óbitos. Os primeiros testes de isolamento viral foram realizados a partir do ano 2000, quando foi confirmada a circulação do sorotipo DEN-1. Em 2001 detectou-se o sorotipo DEN-2. No ano seguinte, confirmou-se a circulação de três sorotipos: DEN-1 DEN-2 e DEN-3.

No Município de Teresina, a ocorrência da dengue se dá ao longo de todos os meses do ano, com maior incidência no período chuvoso. O primeiro caso com isolamento viral em Teresina foi provocado pelo DEN-2, na década de 1990. Em maio de 2002, foram relatados os primeiros os casos do DEN-3. Posteriormente, começou a circular o DEN-1. Até início de 2011, circularam os sorotipos DEN-1, DEN-2 e DEN-3. A partir de março de 2011 foram notificados os primeiros casos do DEN-4 e atualmente circulam em Teresina os quatro sorotipos virais: DEN-1, DEN-2, DEN-3 e DEN-4 [9] (CASTRO et al., 2003).

Epidemias consecutivas e ininterruptas vêm ocorrendo. Os métodos de combate ao vetor recomendados pelo Ministério da Saúde, tais como pesquisa entomológica, tratamento, manejo ambiental e participação comunitária foram aplicados, entretanto ainda não foram suficientes para impedir o avanço da doença que tem se tornado progressivamente mais grave com aumento significativo de complicações.

3 Coleta de Dados

Os dados para a pesquisa foram obtidos em sites e órgãos oficiais. Na Fundação Municipal de Saúde de Teresina (FMS) foram coletados dados sobre a Dengue e sobre sua correlação com as pessoas infectadas por esta. Houve também a pesquisa no site do Sistema de Informação de Agravos de Notificações (SINAN) do Ministério da Saúde (MS) que são colhidos através da ficha de investigação.

Para falar em população, um dos sites mais confiáveis é o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), por isso foi com base em seus dados que fizemos conjecturas sobre a população de Teresina. Em busca de simplificar para possibilitar a compreensão e efetuar o processo de obtenção do melhor modelo, foram feitas tabelas do censo da População Teresinense de 1872 a 2010, segundo IBGE; além de gráficos e tabelas do número de casos com pessoas contaminadas com o vírus da Dengue, conforme o SINAN e FMS.

Tabela 1 – População Teresinense - Fonte:IBGE

Ano	Tempo (t_n)	População (P_n)
1872	0	21.692
1890	18	31.523
1900	28	45.316
1920	48	57.500
1940	68	67.641
1950	78	90.723
1960	88	144.799
1970	98	230.148
1980	108	388.922
1991	119	598.411
2000	128	714.583
2010	138	814.230

Objetivando uma melhor proporção e facilidade com os cálculos, fez-se uma divisão por mil dos dados da população de Teresina, sem danos quantitativos.

Tabela 2 – População Teresinense dividida por 1000

Ano	Tempo (t_n)	População (P_n)
1872	0	21,7
1890	18	31,5
1900	28	45,3
1920	48	57,5
1940	68	67,6
1950	78	90,7
1960	88	144,8
1970	98	230,1
1980	108	388,9
1991	119	598,4
2000	128	714,6
2010	138	814,2

Dos dados obtidos no SINAN e FMS podemos apresentar:

Tabela 3 – Notificações da Dengue em Teresina - Fonte: SINAN

Ano	Tempo (t_n)	População (P_n)
2001	0	4431
2002	1	4313
2003	2	4003
2004	3	122
2005	4	178
2006	5	1499
2007	6	4773
2008	7	1372
2009	8	1120
2010	9	2606
2011	10	5462
2012	11	7205
2013	12	2767
2014	13	4545
2015	14	6146
2016	15	4278
2017	16	4087
2018	17	314 (primeiro semestre)

Para garantir facilidade com os cálculos e uma melhor organização, fez-se uma divisão por 100 dos dados nos casos notificados da Dengue, sem percas qualitativas.

Tabela 4 – Notificações da Dengue em Teresina dividida por 100

Ano	Tempo (t_n)	População (P_n)
2001	0	44,31
2002	1	43,13
2003	2	40,03
2004	3	1,22
2005	4	1,78
2006	5	14,99
2007	6	47,73
2008	7	13,72
2009	8	11,20
2010	9	26,06
2011	10	54,62
2012	11	72,05
2013	12	27,67
2014	13	45,45
2015	14	61,46
2016	15	42,78
2017	16	40,87
2018	17	3,14 (primeiro semestre)

Tabela 5 – Frequência por Semana Epidemiológica, notificação segundo Faixa Etária RIPSA6 do ano de 2018 - Fonte: SINAN

Fx Etária RIPSA6	JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	Nº de casos
< 1Ano	2	3	0	0	0	0	5
1 - 4	5	1	0	0	0	0	6
5 - 9	6	3	0	0	0	0	9
10 - 19	27	19	1	0	0	0	47
20 - 39	118	48	1	0	0	0	167
40 - 59	33	22	0	0	0	0	55
60 e +	13	10	2	0	0	0	25
TOTAL	204	106	4	0	0	0	314

FONTE: FMS/SINAN

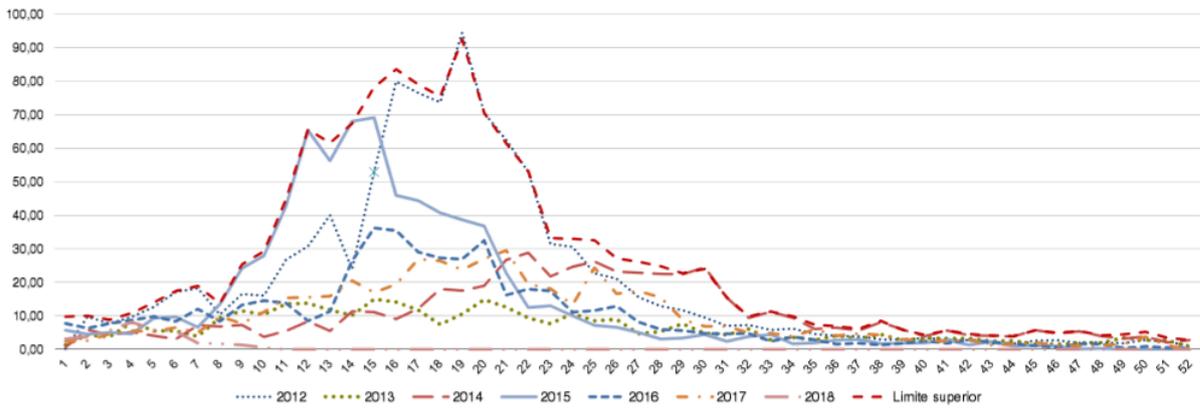


Figura 3 – Curva de incidência dos casos notificados da dengue por semana epidemiológica.

FONTE: FMS/SINAN

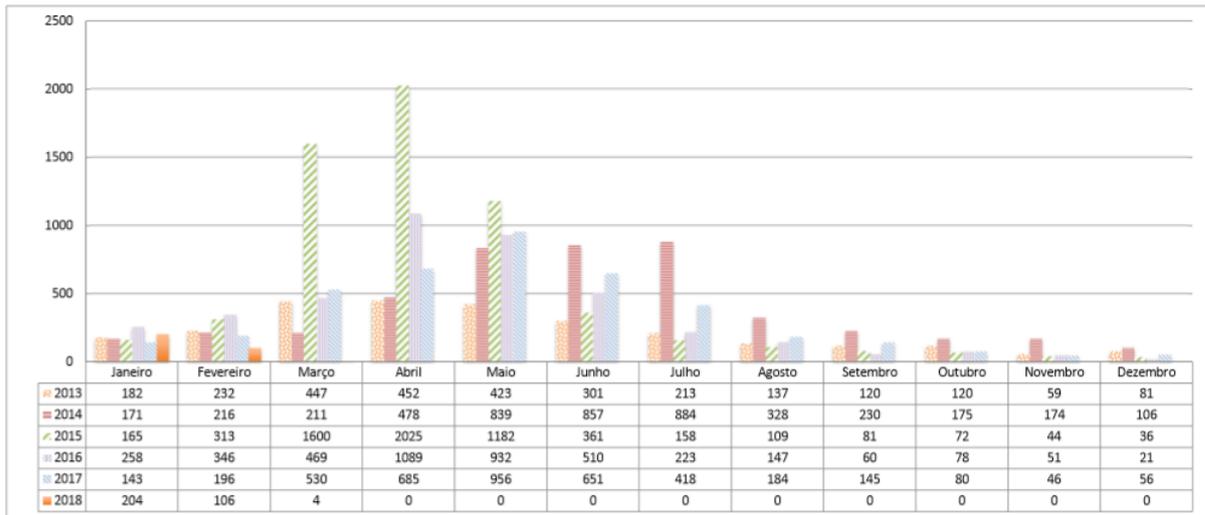


Figura 4 – Comparativo de casos notificados da dengue ao longo dos meses de 2013 a 2018.

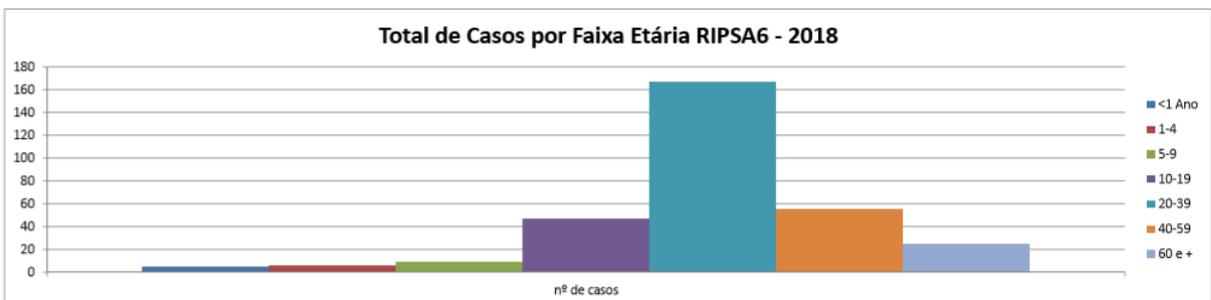


Figura 5 – Comparativo de casos notificados da dengue nos últimos meses de 2017, por faixa etária.

Fez-se também gráficos das Figuras 6 e 7 para uma breve visualização e futura análise de seus dados.

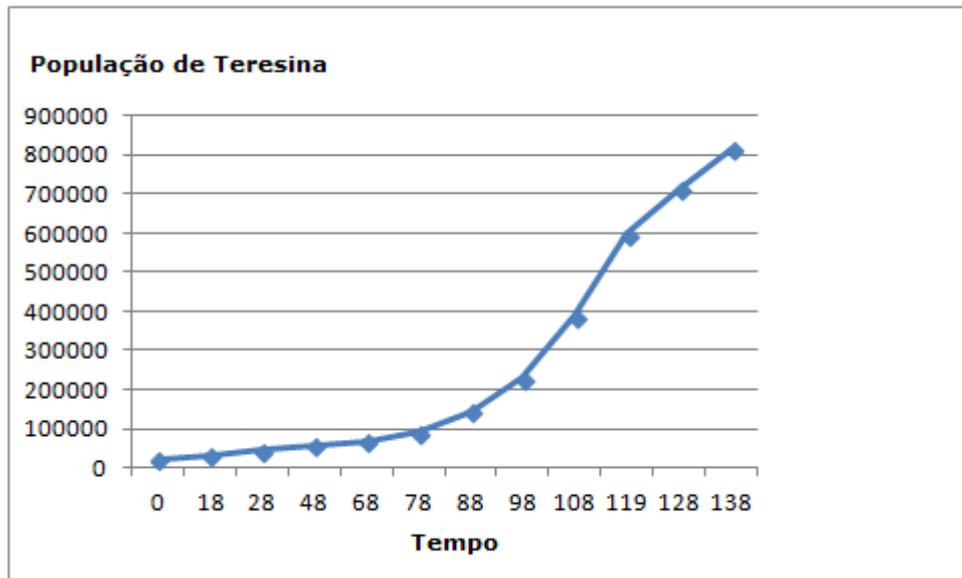


Figura 6 – Curva de Tendência da população de Teresina

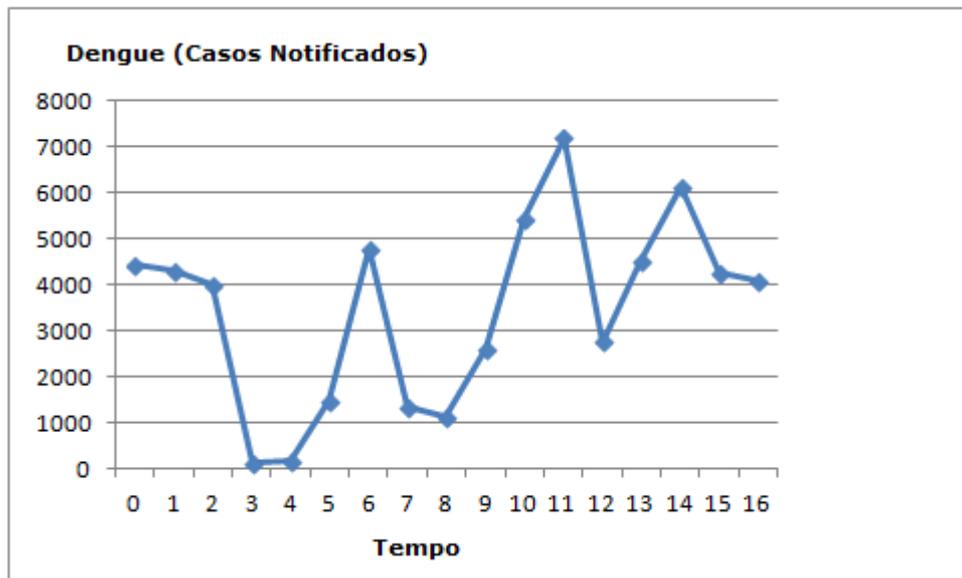


Figura 7 – Curva de Tendência dos casos notificados da Dengue

4 Modelagem Contínua

Para dar continuidade a pesquisa, neste capítulo, realizou-se um estudo dos dados coletados com base nos modelos Exponencial Assintótico - Método Ford - Walford e Logístico Contínuo.

4.1 Modelo Exponencial Assintótico - Método Ford - Walford

4.1.1 População de Teresina

Necessitamos descobrir o melhor modelo para a representação da população em estudo baseados nos dados obtidos. Para isso, objetivando encontrar o valor de estabilidade de y^* construiu-se a Tabela 6.

Tabela 6 – Relação P_n (População) e P_{n+1} (Valor posterior da população)

Tempo	População (P_n)	População (P_{n+1})
0	21,7	31,5
18	31,5	45,3
28	45,3	57,5
48	57,5	67,6
68	67,6	90,7
78	90,7	144,8
88	144,8	230,1
98	230,1	388,9
108	388,9	598,4
119	598,4	714,6
128	714,6	814,2
138	814,2	

Dando andamento ao processo e construção do modelo fez-se o gráfico $P_n \times P_{n+1}$ dando origem a Figura 8.

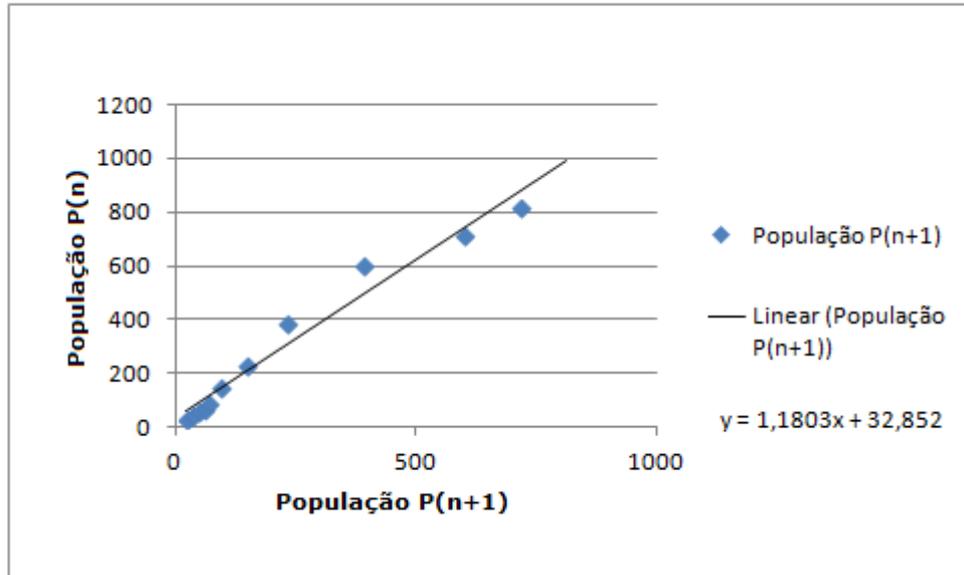


Figura 8 – Cálculo do valor de estabilidade de y^* com todos os dados da população.

Ajustando linearmente obtemos $y = 1,1803x + 32,852$. Com isso, o valor da assíntota que é dada por $y^* = \frac{32,852}{1 - 1,1803} = -182,21$. Tendo o valor de estabilidade negativo, procuraremos outro de assíntota positiva. Para que isto ocorra temos que o coeficiente angular do ajuste linear precisa ser menor que 1 ($a < 1$).

Depois da incoerência encontrada e sendo refeita a análise de dados, fez-se outras tentativas.

Modelo Exponencial Assintótico 01: Primeira tentativa para o cálculo de estabilidade y^*

Utilizando como primeira tentativa os dados sobre a população à partir de 1960 ($t = 88$), o coeficiente angular da reta passa a ser menor que 1, garantindo com que o valor de estabilidade y^* se torne positivo, o que pode ser visto na Figura 9 .

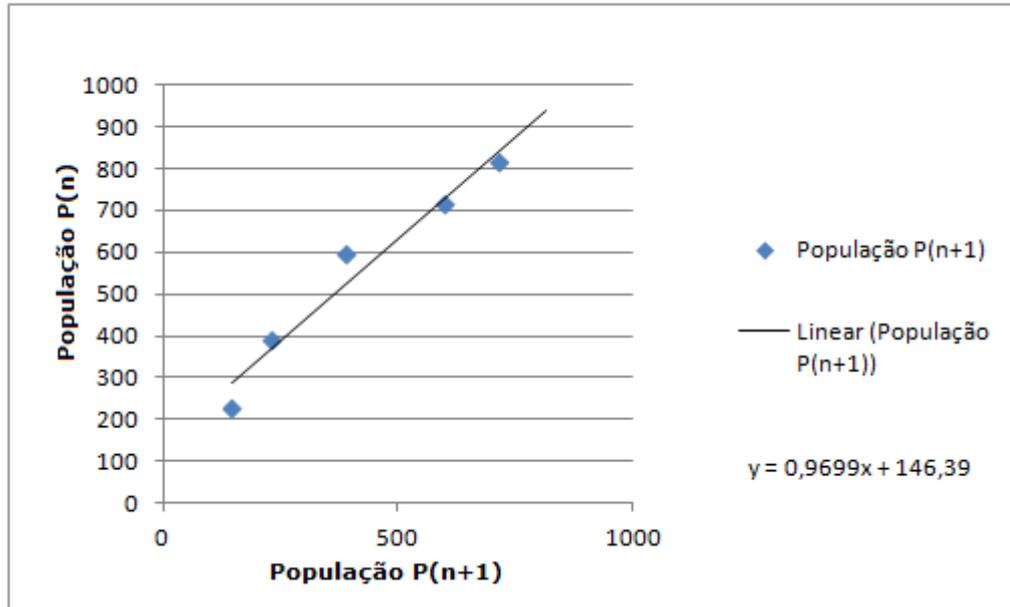


Figura 9 – Cálculo do valor de estabilidade de y^* com todos os dados da população a partir de 1960.

Ao calcularmos o ajuste linear obtemos $y = 0,9699x + 146,39$. Acarretando em $y^* = \frac{146,39}{1 - 0,9699} = 4863,45$. Encontramos assim, a assíntota para Modelo Exponencial Assintótico 01.

Logo após, toma-se $y^* - P_n$ com o objetivo de descobrirmos a curva exponencial auxiliar, e para isto fez-se a Tabela 7 .

Tabela 7 – Dados para a curva exponencial auxiliar

Tempo	População (P_n)	$(y^* - P_n)$
0	21,7	4841,75
18	31,5	4831,95
28	45,3	4818,15
48	57,5	4805,95
68	67,6	4795,85
78	90,7	4772,75
88	144,8	4718,65
98	230,1	4633,35
108	388,9	4474,55
119	598,4	4265,05
128	714,6	4148,85
138	814,2	4049,25

Baseados nos cálculo feitos no Modelo 01 e utilizando os dados à partir de $t \geq 60$, conforme podemos observar na Figura 10, encontramos assim, a curva auxiliar $y = 6329,2e^{-0,003x}$.

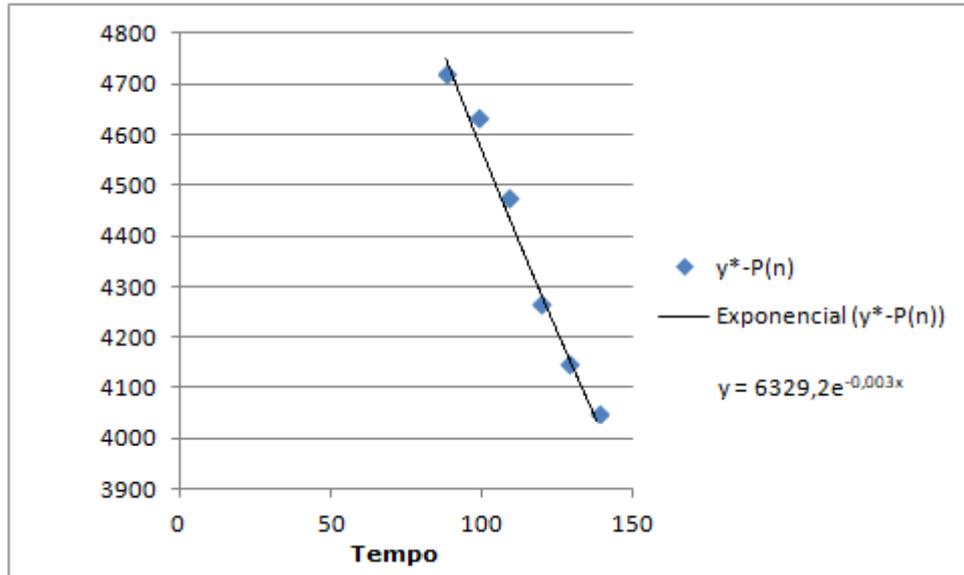


Figura 10 – Curva exponencial auxiliar do Modelo 01

Por fim tem-se que o modelo encontrado é

$$P_1(t) = 4863,45 - 6329,2e^{-0,003t}$$

com $P(t)$ referindo-se a população e t o tempo. Ratificando tal Modelo encontrado, concluímos o nosso primeiro Modelo Exponencial, gerando a Tabela 8 e que pode ser observado na Figura 11 que traz uma comparação entre Modelo Exponencial 01 e os dados reais e na Figura 12 que mostra o modelo exponencial e sua assíntota.

Tabela 8 – Dados do Modelo Exponencial Assintótico 01 para a população

Tempo	População (P_n)	Exponencial Assintótica
0	21,7	-1465,75
18	31,5	-1133,04
28	45,3	-955,81
48	57,5	-616,93
68	67,6	-297,77
78	90,7	-145,24
88	144,8	2,79
98	230,1	146,45
108	388,9	285,85
119	598,4	434,45
128	714,6	552,43
138	814,2	679,84

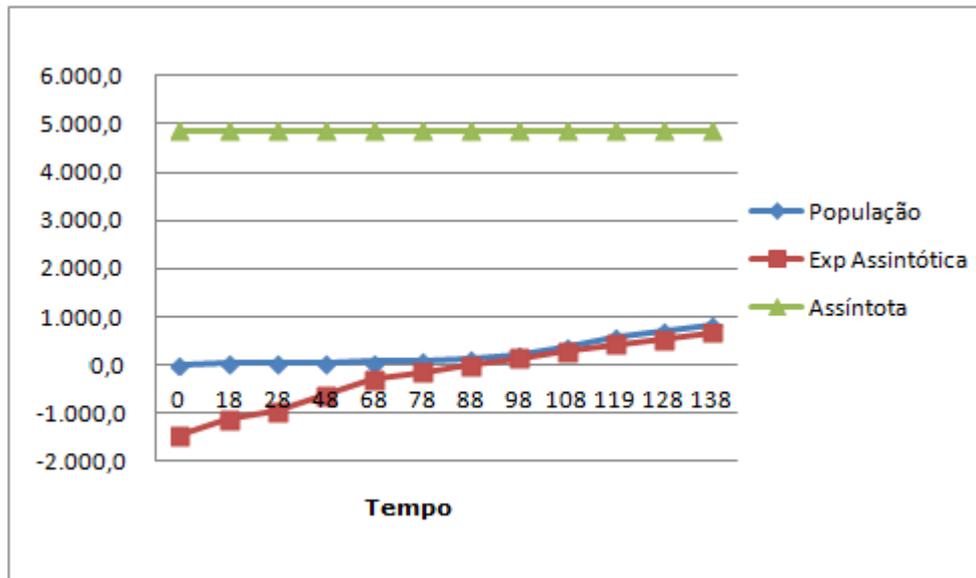


Figura 11 – Modelo Exponencial 01 X Dados Reais

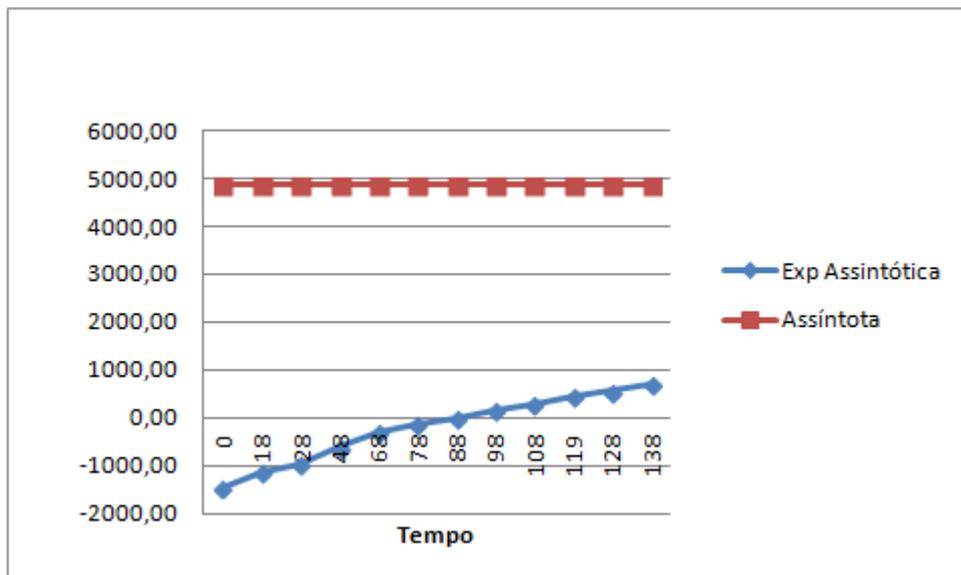


Figura 12 – Modelo Exponencial Assintótico e Assintota

Modelo Exponencial Assintótico 02: Segunda tentativa para o cálculo de estabilidade de y^*

Utilizamos como segunda tentativa os dados sobre a população à partir de 1970 ($t = 98$), assim obtemos através da Tabela 9 o gráfico da Figura 13 .

Tabela 9 – Relação P_n (População) e P_{n+1} (Valor posterior da população)

Tempo	População (P_n)	População (P_{n+1}) à partir de 1970
98	230,1	388,9
108	388,9	598,4
119	598,4	714,6
128	714,6	814,2
138	814,2	

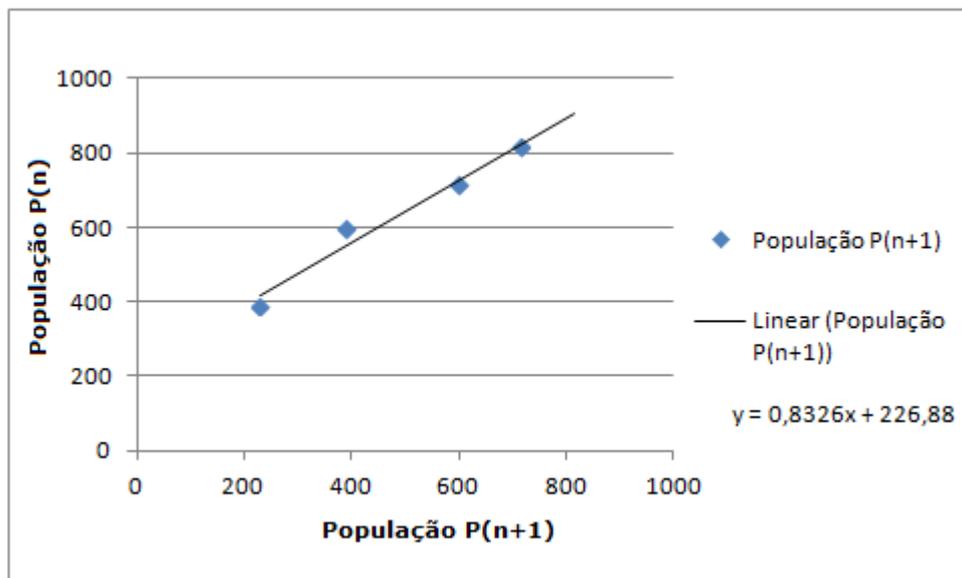


Figura 13 – Cálculo do valor de estabilidade de y^* com todos os dados da população a partir de 1970.

Dado o ajuste linear $y = 0,8326x + 226,88$ o valor de assíntota é determinado por $y^* = \frac{226,88}{1 - 0,836} = 1355,32$. Encontramos assim, a assíntota para o Modelo Exponencial Assintótico 02, semelhante ao que fizemos no Modelo 01 e com os dados à partir de $t \geq 70$ faremos uma curva auxiliar com base na Tabela 10 , originando o gráfico da Figura 14.

Tabela 10 – Dados para a curva exponencial auxiliar do segundo Modelo Assintótico

Tempo	População (P_n)	$(y^* - P_n)$
0	21,7	1333,62
18	31,5	1323,82
28	45,3	1310,02
48	57,5	1297,82
68	67,6	1287,72
78	90,7	1264,62
88	144,8	1210,52
98	230,1	1125,22
108	388,9	966,42
119	598,4	756,92
128	714,6	640,72
138	814,2	541,12

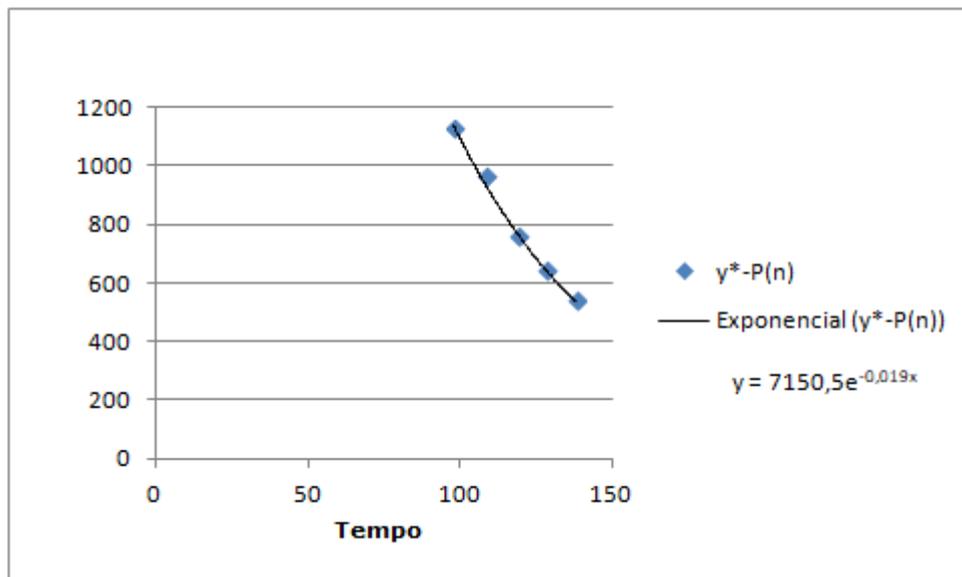


Figura 14 – Curva Exponencial auxiliar do Modelo 02

Utilizando os dados à partir de $t \geq 70$, conforme podemos observar na Figura 14, encontramos assim, a curva auxiliar $y = 7150,5e^{-0,019x}$. Por fim tem-se que o modelo encontrado é

$$P_2(t) = 1355,32 - 7150,5e^{-0,019t}$$

com $P(t)$ referindo-se a população e t o tempo. Confirmando o Modelo encontrado, concluímos o nosso segundo Modelo Exponencial, que gera a Tabela 11 e que pode ser observado nas Figuras 15 e 16.

Tabela 11 – Dados do Modelo Exponencial Assintótico 02 para a população

Tempo	População (P_n)	Exponencial Assintótica
0	21,7	-5795,18
18	31,5	-3724,02
28	45,3	-2845,09
48	57,5	-1517,18
68	67,6	-609,07
78	90,7	-269,15
88	144,8	11,95
98	230,1	244,41
108	388,9	436,64
119	598,4	609,91
128	714,6	727,07
138	814,2	835,78

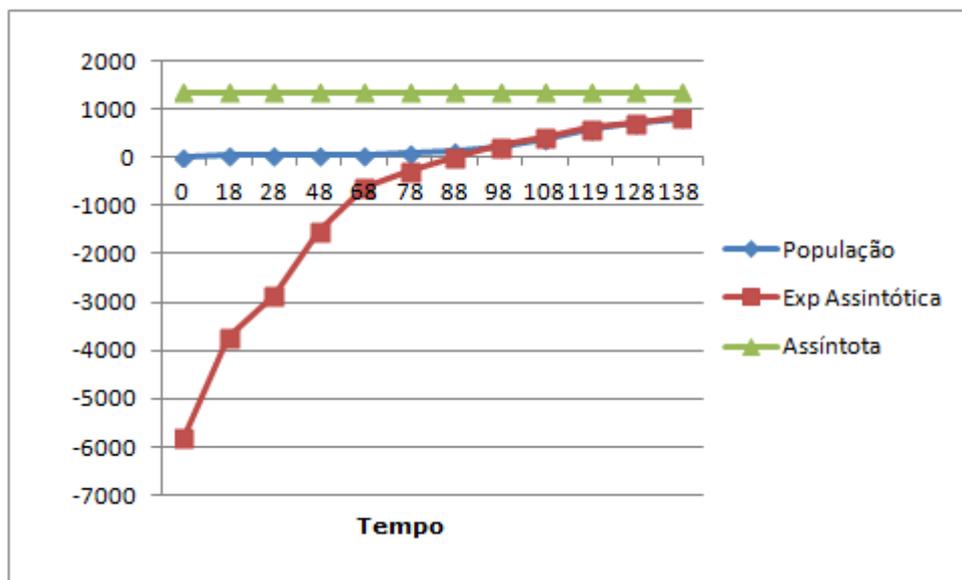


Figura 15 – Modelo Exponencial 02 X Dados Reais

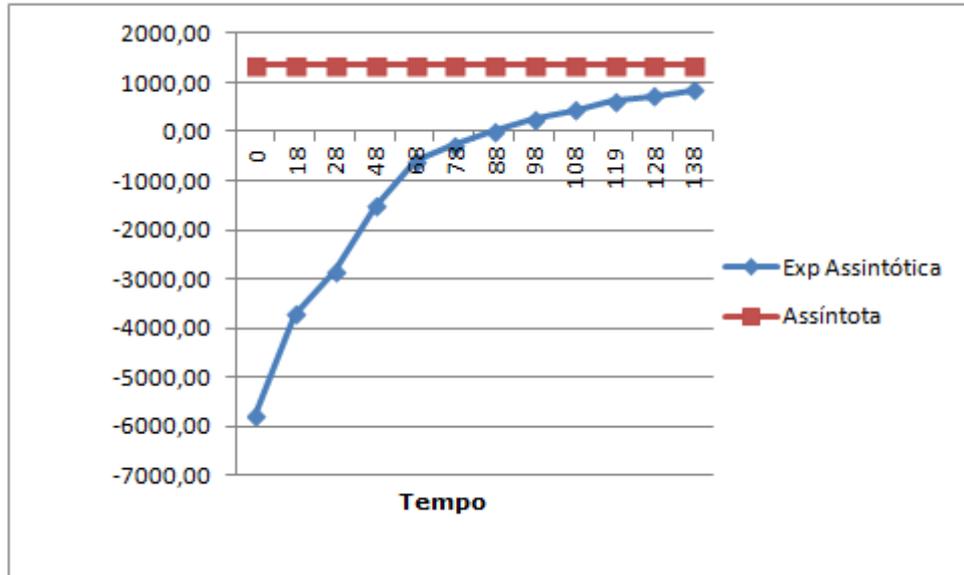


Figura 16 – Modelo Exponencial Assintótico e Assintota

4.1.2 Casos notificado da Dengue

Do mesmo modo que fizemos para a população teresinense, fez-se com os dados obtidos na Tabela 12 para conseguirmos o valor de estabilidade do y^* , em busca do melhor modelo para representarmos o número de casos notificados da Dengue, objeto de estudo. Após, construiu-se o gráfico $D_n \times D_{n+1}$, onde D_n são os casos de pessoas notificados com a Dengue e D_{n+1} são os valores posteriores, resultando na Figura 17.

Modelo Exponencial Assintótico 03: Primeira tentativa para o cálculo de estabilidade y^*

Tabela 12 – Relação entre D_n e D_{n+1}

Tempo (n)	D_n	D_{n+1}
0	44,31	43,13
1	43,13	40,03
2	40,03	1,22
3	1,22	1,78
4	1,78	14,99
5	14,99	47,73
6	47,73	13,72
7	13,72	11,20
8	11,20	26,06
9	26,06	54,62
10	54,62	72,05
11	72,05	27,67
12	27,67	45,45
13	45,45	61,46
14	61,46	42,78
15	42,78	40,87
16	40,87	

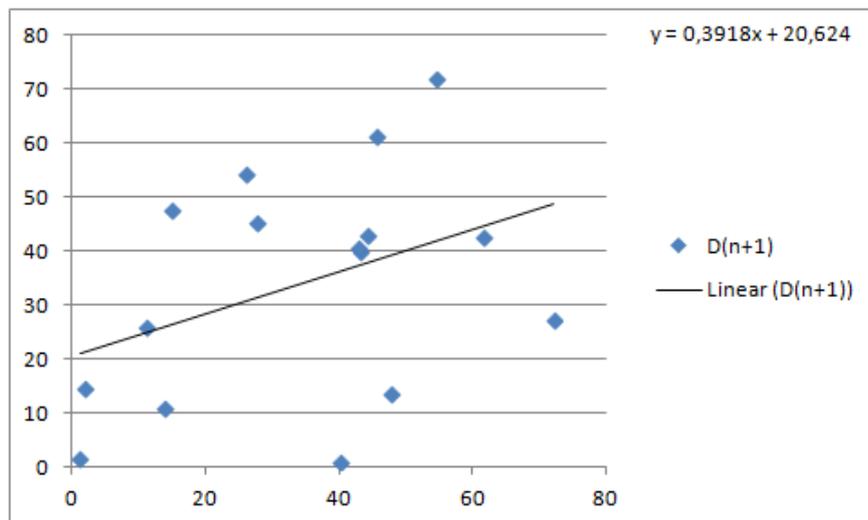


Figura 17 – Curva do Valor de estabilidade dos todos os casos notificados com a Dengue

Dada a obtenção do ajuste linear, obtemos $y = 0,3918x + 20,624$. Com isso, o valor da assíntota que é dada por $y^* = \frac{20,624}{1 - 0,3918} = 33,9099$. Tendo o valor da assíntota positiva. Já que temos o coeficiente angular do ajuste linear menor que 1 ($a < 1$).

Em seguida, faz-se $y^* - D_n$ para encontrarmos a curva exponencial auxiliar. Fez-se então a Tabela 13 com os dados para a curva auxiliar.

Tabela 13 – Dados para a curva auxiliar

Tempo (n)	D_n	$y^* - D_n$
0	44,31	-13,45
1	43,13	-12,27
2	40,03	-9,17
3	1,22	29,64
4	1,78	29,08
5	14,99	15,87
6	47,73	-16,87
7	13,72	17,14
8	11,20	19,66
9	26,06	4,80
10	54,62	-23,76
11	72,05	-41,19
12	27,67	3,19
13	45,45	-14,59
14	61,46	-30,60
15	42,78	-11,92
16	40,87	-10,01

Observamos que tal curva não pode ser obtida, pois há na Tabela 13 dados negativos para $y^* - D_n$.

4.2 Modelo Logístico Contínuo

Utilizando as assíntotas encontradas, fizemos dois modelos logísticos contínuos para a população. O objetivo desse modelo é encontrar a função $P_n = \frac{y^*}{\frac{1}{a}e^{-bt} + 1}$. Dado que

$$P_n = \frac{y^*}{\frac{1}{ae^{bt}} + 1}$$

$$P_n = \frac{y^*}{\frac{1}{a}e^{-bt} + 1}$$

$$P_n = \frac{y^*ae^{bt}}{1 + ae^{bt}}$$

$$P_n(1 + ae^{bt}) = y^*ae^{bt}$$

$$P_n + P_nae^{bt} = y^*ae^{bt}$$

$$P_n = y^*ae^{bt} - P_nae^{bt}$$

$$P_n = ae^{bt}(y^* - P_n)$$

$$\frac{P_n}{y^* - P_n} = ae^{bt}$$

4.2.1 População de Teresina

Modelo logístico contínuo 01

Sendo a primeira assíntota $y^* = 4863,45$, obteremos o valor de $\frac{P_n}{y^* - P_n}$, de acordo com a Tabela 14. Com os dados da Tabela 14 fizemos o plote da curva auxiliar, observada na Figura 18, para conseguir a função do tipo $P_n = \frac{y^*}{\frac{1}{a}e^{-bt} + 1}$. Conforme o gráfico da Figura 18, temos que o ajuste exponencial é dado por $y = 0,0034e^{0,0287x}$, obtendo $a = 0,0034$, $b = 0,0287$ e $\frac{1}{a} = 294,11$. Assim, podemos chegar ao modelo logístico 01 dado por $P_n = \frac{4863,45}{294,11e^{-0,0287t} + 1}$.

Comparando os dados reais com os dados do primeiro modelo logístico da população de Teresina, temos a Tabela 15 e Figura 19.

Tabela 14 – Cálculo do valor de $\frac{P_n}{y^* - P_n}$ do modelo logístico 01 da população

Tempo	População (P_n)	y^*	$(y^* - P_n)$	$\frac{P_n}{y^* - P_n}$
0	21,7	4863,45	4841,75	0,0044818
18	31,5	4863,45	4831,95	0,0065191
28	45,3	4863,45	4818,15	0,0094019
48	57,5	4863,45	4805,95	0,0119643
68	67,6	4863,45	4795,85	0,0140955
78	90,7	4863,45	4772,75	0,0190037
88	144,8	4863,45	4718,65	0,00306867
98	230,1	4863,45	4633,35	0,0496616
108	388,9	4863,45	4474,55	0,0869137
119	598,4	4863,45	4265,05	0,1403031
128	714,6	4863,45	4148,85	0,1722405
138	814,2	4863,45	4049,25	0,2010742

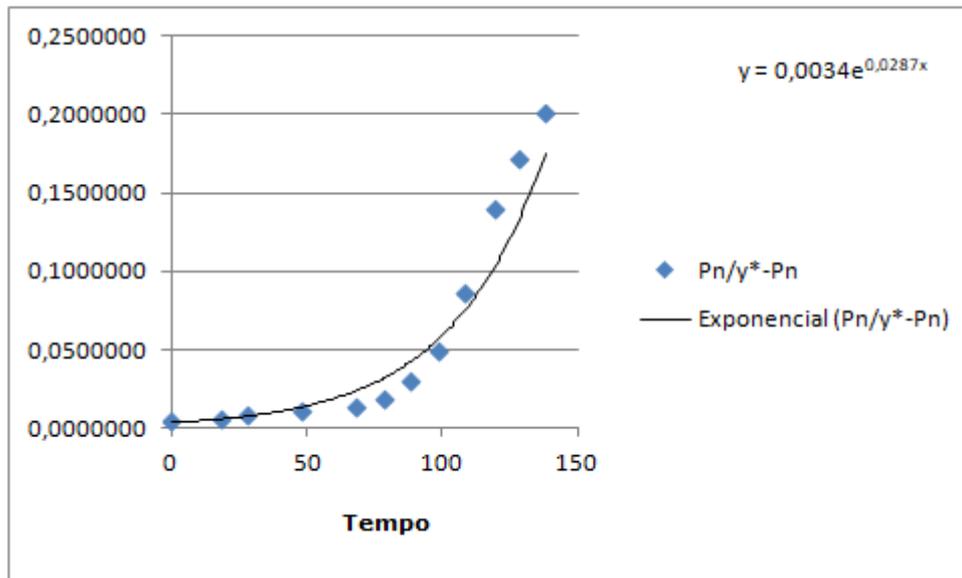


Figura 18 – Curva exponencial auxiliar do Modelo Logístico 01

Tabela 15 – Comparação do primeiro modelo logístico com os dados reais

Tempo	População (P_n)	Modelo (M)	$\left \frac{P_n - M}{P_n} \right $
0	21,7	16,48013	0,2405472
18	31,5	27,56277	0,1249913
28	45,3	36,65625	0,1908113
48	57,5	64,69973	0,1252126
68	67,6	113,6922	0,6818377
78	90,7	150,3182	0,6573115
88	144,8	198,2506	0,3691341
98	230,1	260,6223	0,132648
108	388,9	341,1817	0,1227007
119	598,4	455,9607	0,2380336
128	714,6	574,4713	0,1960939
138	814,2	736,5193	0,0954074

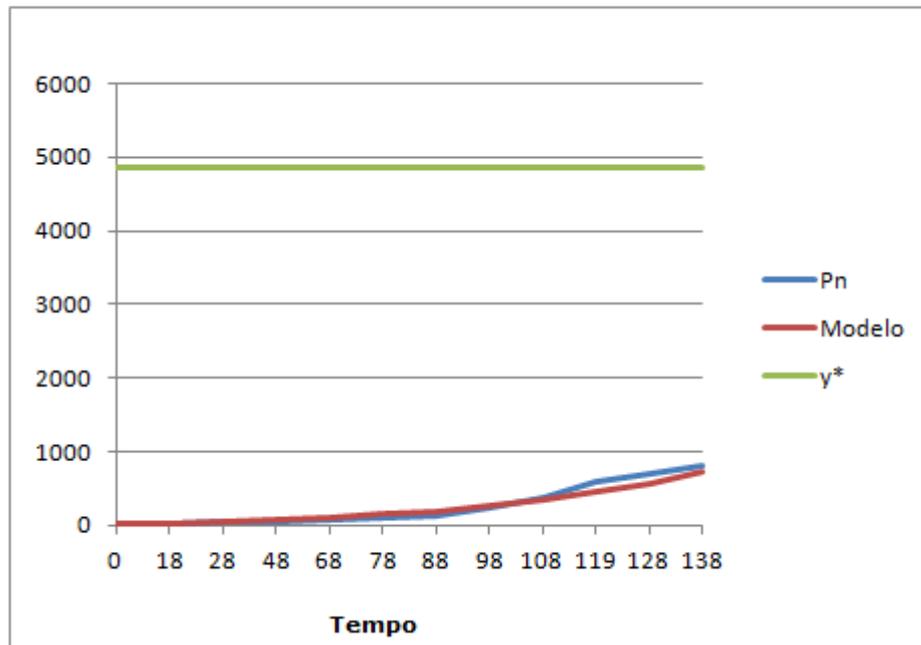


Figura 19 – Comparação do primeiro modelo logístico com os dados reais

Prosseguindo a análise de dados e calculando projeções, chegamos à Tabela 16 e a Figura 20.

Tabela 16 – Cálculo do valor de $\frac{P_n}{y^* - P_n}$ do modelo logístico 01 da população

Ano	Tempo	Modelo
2020	148	934,3204
2030	158	1170,181
2040	168	1443,704
2050	178	1750,854
2060	188	2083,536
2070	198	2430,079
2080	208	2776,689
2090	218	3109,561
2100	228	3416,995
2150	278	4418,117
2200	328	4749,457
2300	428	4856,841

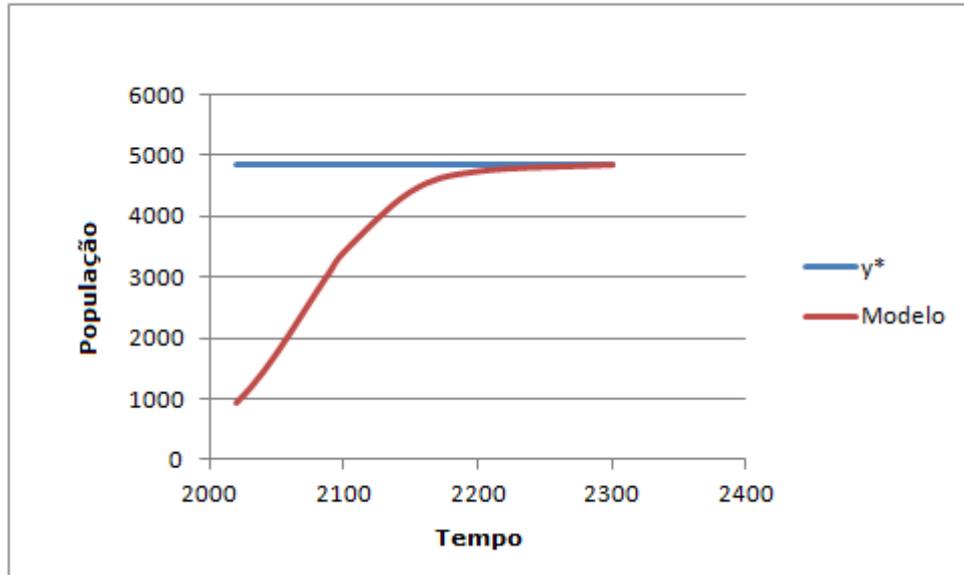


Figura 20 – Projeções do primeiro modelo logístico

Fundamentados neste modelo, concluímos que a população Teresinense deve se tornar estável por volta de 2300, com a população aproximada de 4856 mil habitantes, conforme a Tabela 16 e Figura 20.

Modelo logístico contínuo 02

Sendo a segunda assíntota $y^* = 1355,32$, calculamos o valor de $\frac{P_n}{y^* - P_n}$, dando origem a Tabela 17. Com os dados desta plotamos a Figura 21. Conseguimos, assim, o gráfico da Figura 21, onde o ajuste exponencial é dado por $y = 0,0104e^{0,0332x}$. Observe que $a = 0,0104$ e $b = 0,0332$, portanto $\frac{1}{a} = 96,15$. Chegamos então ao modelo logístico 02, onde $P_n = \frac{1355,32}{96,15e^{-0,0332t} + 1}$.

Comparando os dados reais com os dados do segundo modelo logístico da população de Teresina, temos a Tabela 18 e Figura 22.

Tabela 17 – Cálculo do valor de $\frac{P_n}{y^* - P_n}$ do modelo logístico 02 da população

Tempo	População (P_n)	y^*	$(y^* - P_n)$	$\frac{P_n}{y^* - P_n}$
0	21,7	1355,32	1333,62	0,0162715
18	31,5	1355,32	1323,82	0,0237947
28	45,3	1355,32	1310,02	0,00345796
48	57,5	1355,32	1297,82	0,0443050
68	67,6	1355,32	1287,72	0,0524958
78	90,7	1355,32	1264,62	0,0717211
88	144,8	1355,32	1210,52	0,1196180
98	230,1	1355,32	1125,22	0,2044933
108	388,9	1355,32	966,42	0,402413
119	598,4	1355,32	756,92	0,7905723
128	714,6	1355,32	640,72	1,1153077
138	814,2	1355,32	541,12	1,504657

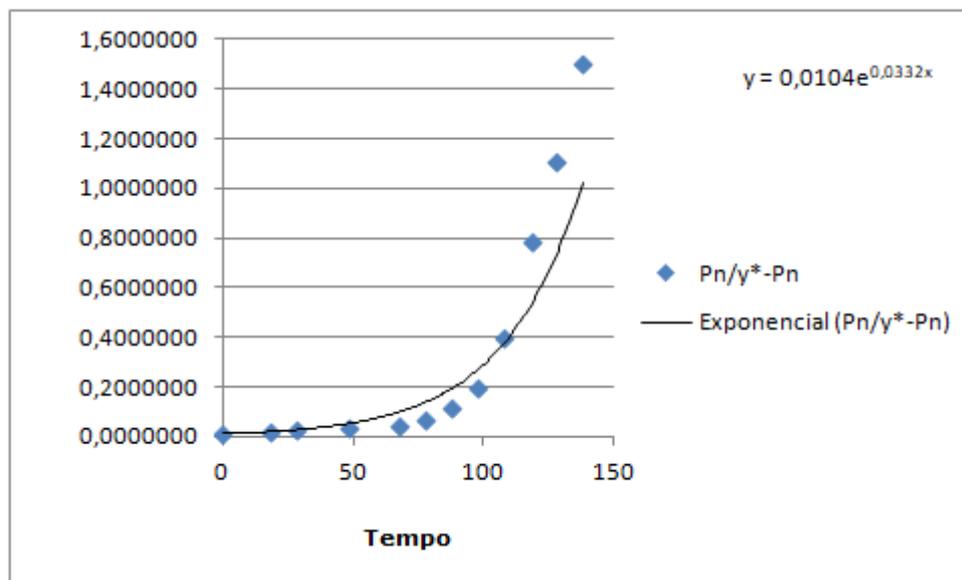


Figura 21 – Curva exponencial auxiliar do Modelo Logístico 02

Tabela 18 – Comparação do segundo modelo logístico com os dados reais

Tempo	População (P_n)	Modelo (M)	$\left \frac{P_n - M}{P_n} \right $
0	21,7	13,9508	0,3571061
18	31,5	25,1474	0,2016698
28	45,3	34,7950	0,2318973
48	57,5	65,9941	0,1477235
68	67,6	122,5712	0,8131838
78	90,7	164,9598	0,8187408
88	144,8	219,3986	0,5151834
98	230,1	287,4642	0,2493014
108	388,9	369,7725	0,0491837
119	598,4	475,5744	0,2052567
128	714,6	571,3696	0,2004344
138	814,2	682,9763	0,1611689

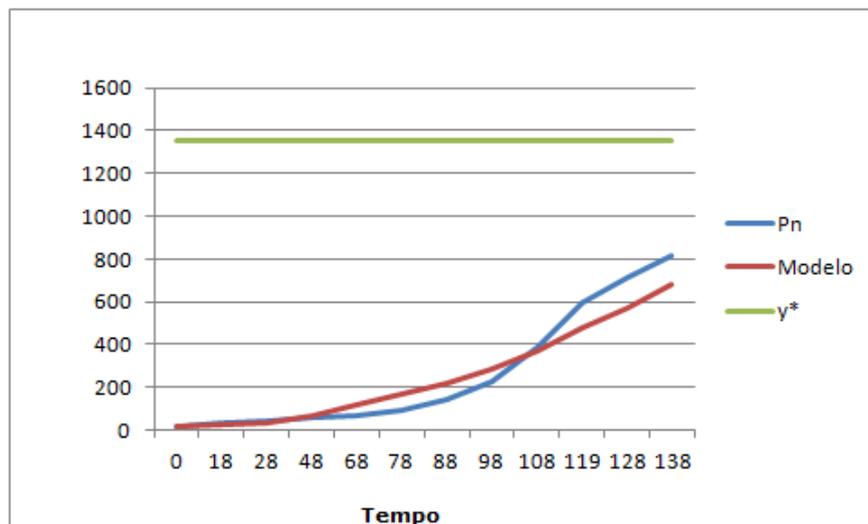


Figura 22 – Comparação do segundo modelo logístico com os dados reais

Feitos cálculos e projeções, fizemos a Tabela 19 e a Figura 23.

Tabela 19 – Cálculo do valor de $\frac{P_n}{y^* - P_n}$ do modelo logístico 02 da população

Ano	Tempo	Modelo
2020	148	794,2954
2030	158	899,4847
2040	168	993,9251
2050	178	1074,899
2060	188	1141,631
2070	198	1194,853
2080	208	1236,203
2090	218	1267,679
2100	228	1291,268
2150	278	1342,657

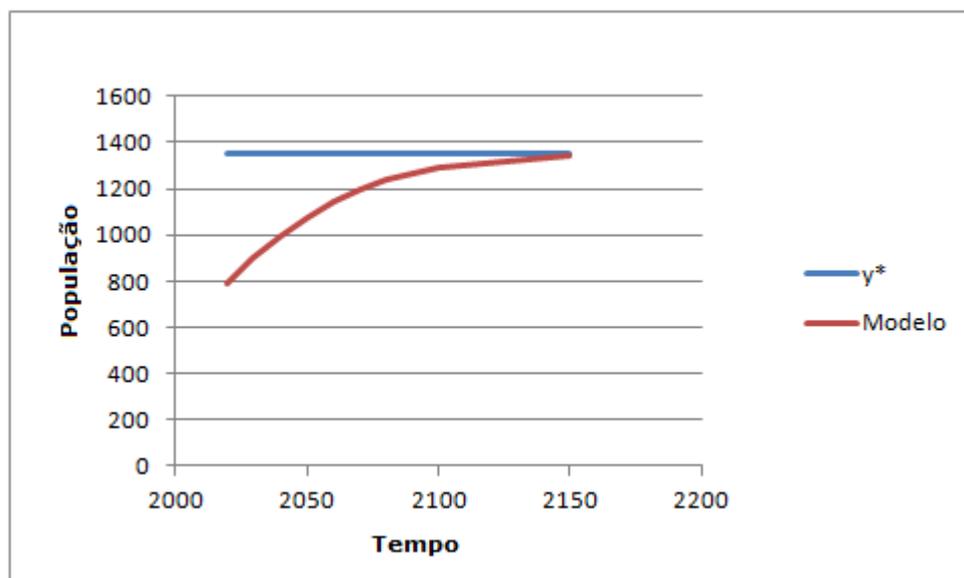


Figura 23 – Projeções do segundo modelo logístico

Considerando este modelo, temos que a população Teresinense deve se estabilizar perto do ano de 2150, com a população aproximada de 1350 mil habitantes, conforme a Tabela 19 e Figura 23.

4.2.2 Casos notificado da Dengue

Modelo logístico contínuo 03

A assíntota do modelo exponencial assintótico 03 encontrada é $y^* = 33,90999$, assim temos o valor de $\frac{D_n}{y^* - D_n}$ dado na Tabela 20.

Ao construirmos a tabela obtemos inconsistência para a plotagem do gráfico. Conclui-se então que não é viável esse tipo de modelo para os dados apresentados.

Tabela 20 – Cálculo de $\frac{D_n}{y^* - D_n}$ para o modelo logístico 03

Tempo	Casos notificados da Dengue (D_n)	y^*	$(y^* - D_n)$	$\frac{D_n}{y^* - D_n}$
0	44,31	33,91	-10,40	-4,26
1	43,13	33,91	-9,22	-4,68
2	40,03	33,91	-6,12	-6,54
3	1,22	33,91	32,69	0,04
4	1,78	33,91	32,13	0,06
5	14,99	33,91	18,92	0,79
6	47,73	33,91	-13,82	-3,45
7	14,72	33,91	19,19	0,77
8	11,2	33,91	22,71	0,42
9	26,06	33,91	7,85	3,32
10	54,62	33,91	-20,71	-2,64
11	72,05	33,91	-38,14	-1,89
12	27,67	33,91	6,24	4,43
13	45,45	33,91	-11,54	-3,94
14	61,46	33,91	-27,55	-2,23
15	42,78	33,91	-8,87	-4,82
16	40,87	33,91	-6,96	-5,87

5 Modelagem Discreta

5.1 Modelo Logístico discreto

5.1.1 População de Teresina

Para este modelo, fez-se ajustes quadráticos das variações discretas com base na Tabela 21 que nos proporciona o plote do gráfico dado pela Figura 24.

Tabela 21 – Variação simples da população de Teresina

Tempo	População (P_n)	P_{n+1}	Variação
0	21,7	31,5	9,8
18	31,5	45,3	13,8
28	45,3	57,5	12,2
48	57,5	67,6	10,1
68	67,6	90,7	23,1
78	90,7	144,8	54,1
88	144,8	230,1	85,3
98	230,1	388,9	158,8
108	388,9	598,4	209,5
119	598,4	714,6	116,2
128	714,6	814,2	99,6
138	814,2		

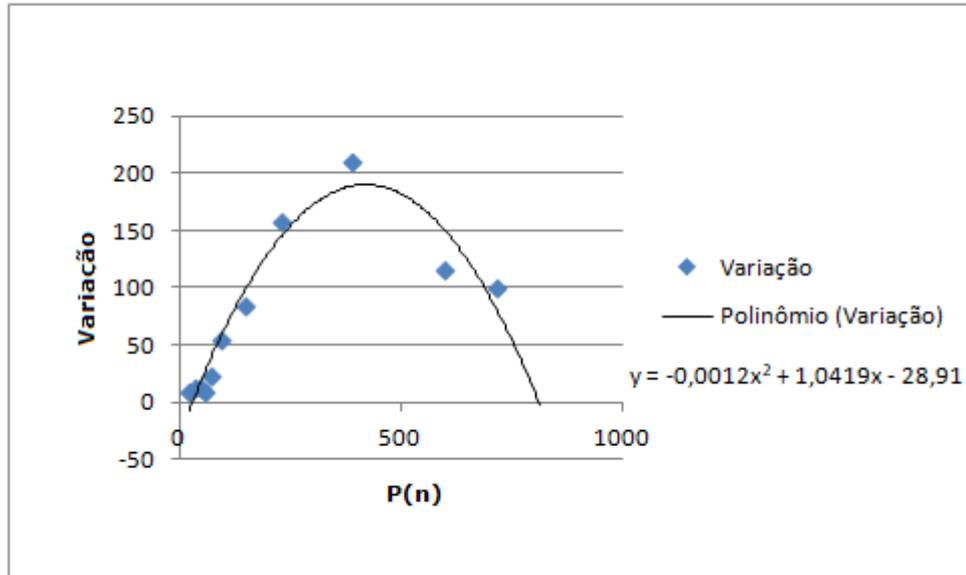


Figura 24 – Relação entre valores e suas variações

Conforme podemos observar na Figura 24 de P_n x Variação ($P_{n+1} - P_n$), obtemos a parábola $y = -0,0012x^2 + 1,0419x - 28,91$, modelo de regressão.

Fazendo uma relação entre valores P_n (anteriores) e valores P_{n+1} (posteriores), temos a Figura 25. Observe que um dos zeros da função está na vizinhança do zero, por isso consideraremos somente uma equação logística discreta.

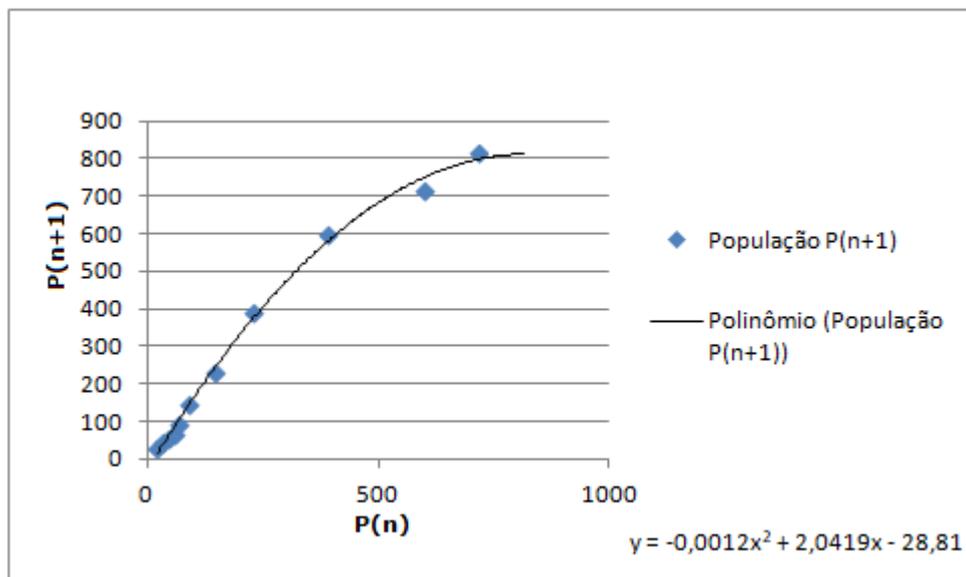


Figura 25 – Relação entre valores anteriores e posteriores

Façamos $y = P_{n+1} - P_n$ e $x = P_n$, então: $P_{n+1} - P_n = -0,0012P_n^2 + 1,0419P_n$
 $\Rightarrow P_{n+1} = -0,0012P_n^2 + 1,0419P_n + P_n \Rightarrow P_{n+1} = -0,0012P_n^2 + 2,0419P_n$

Quando tratamos do modelo em questão e com base nos cálculos, temos que os

pontos de equilíbrio são encontrados quando não há variação de n para $n + 1$, onde $P_{n+1} = P_n = P^*$, ou seja:

$$P^* = -0,0012P^{*2} + 2,0419P^*$$

$$0 = -0,0012P^{*2} + 2,0419P^* - P^*$$

$$0 = -0,0012P^{*2} + 1,0419P^*$$

$$0 = (-0,0012P^* + 1,0419)P^*$$

$$P^*(0,0012P^* - 1,0419) = 0$$

Assim, temos que $P^* = 0$ ou $0,0012P^* - 1,0419 = 0 \implies P^* = 868,25$, conforme podemos observar na Tabela 22 e no gráfico da Figura 26, para validar o modelo.

Tabela 22 – Variação simples da população de Teresina

Tempo	População (P_n)	P_{n+1}	Variação	Modelo
0	21,7	31,5	9,8	21,7
18	31,5	45,3	13,8	43,74
28	45,3	57,5	12,2	87,02
48	57,5	67,6	10,1	168,61
68	67,6	90,7	23,1	310,17
78	90,7	144,8	54,1	517,89
88	144,8	230,1	85,3	735,62
98	230,1	388,9	158,8	852,70
108	388,9	598,4	209,5	868,61
119	598,4	714,6	116,2	868,23
128	714,6	814,2	99,6	868,25
138	814,2			868,25

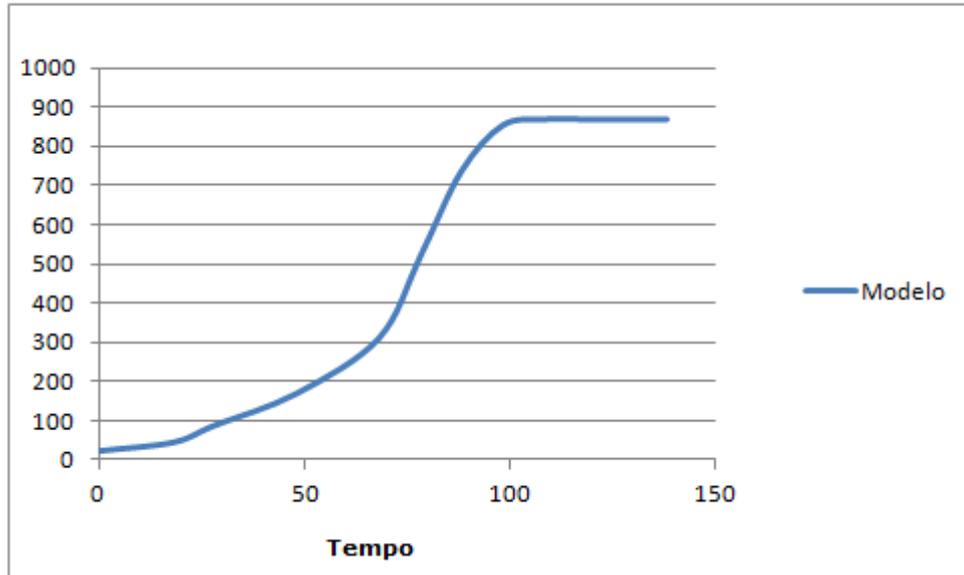


Figura 26 – Modelo logístico discreto da população de Teresina

Vemos na Figura 27 o cruzamento entre modelo logístico discreto e dados da população em função do tempo.

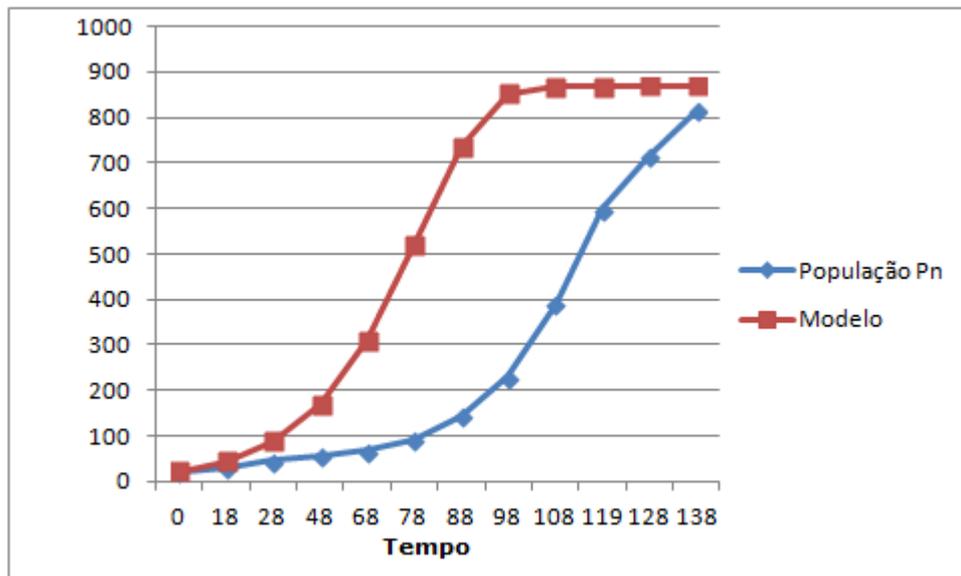


Figura 27 – Modelo Logístico Discreto x dados da população

5.1.2 Casos notificado da Dengue

De maneira análoga ao realizado em 5.1.1 fez-se a Tabela 23 que nos proporciona o plote do gráfico dado pela Figura 28.

Tabela 23 – Variação simples dos casos notificados da Dengue

Tempo	População (D_n)	D_{n+1}	Variação
0	44,31	43,13	-1,18
1	43,13	40,03	-3,1
2	40,03	1,22	-38,81
3	1,22	1,78	0,56
4	1,78	14,99	13,21
5	14,99	47,73	32,74
6	47,73	14,72	-33,01
7	14,72	11,20	-3,52
8	11,20	26,06	14,86
9	26,06	54,62	28,56
10	54,62	72,05	17,43
11	72,05	27,67	44,38
12	27,67	45,45	-17,78
13	45,45	61,46	-16,01
14	61,46	42,78	18,68
15	42,78	40,87	1,91
16	40,87		

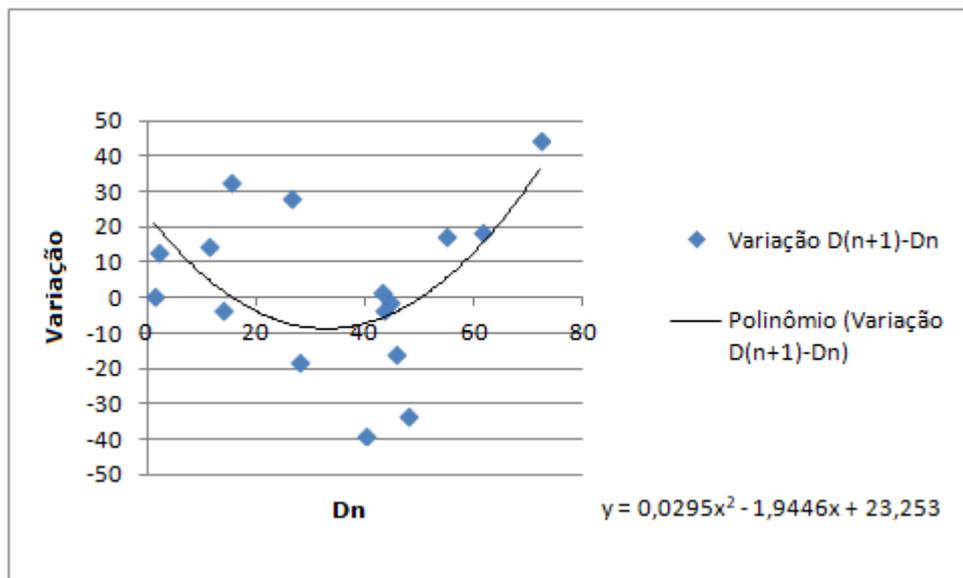


Figura 28 – Relação entre valores e suas variações

Conforme podemos observar na Figura 28 de D_n x Variação ($D_{n+1} - D_n$), obtemos com o ajuste quadrático a parábola $y = 0,0295x^2 - 1,9446x + 23,253$.

Fazendo uma relação entre valores D_n (anteriores) e valores D_{n+1} (posteriores), temos a Figura 29.

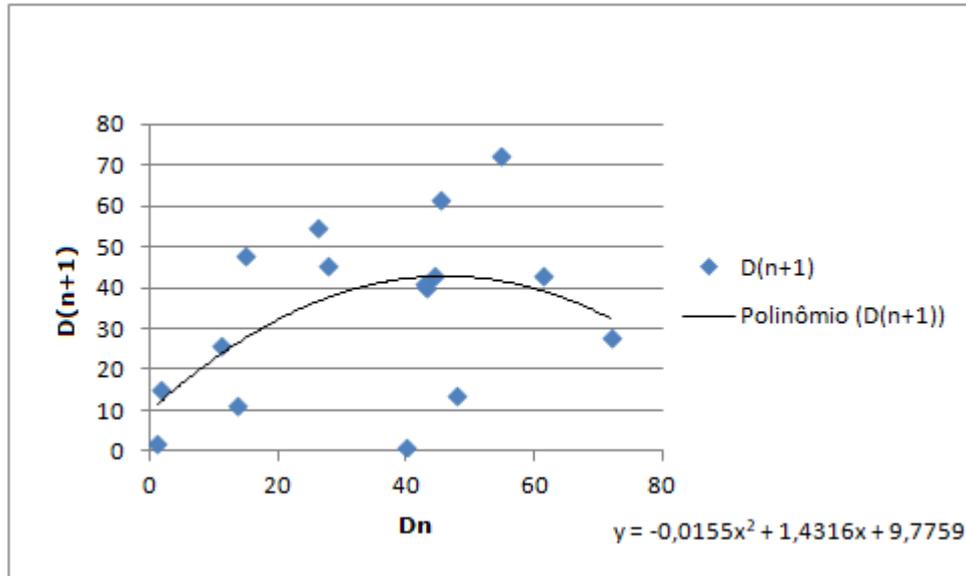


Figura 29 – Relação entre valores anteriores e posteriores da Dengue

Façamos $y = D_{n+1} - D_n$ e $x = D_n$, então: $D_{n+1} - D_n = 0,0295D_n^2 - 1,9446D_n$
 $\implies D_{n+1} = 0,0295D_n^2 - 1,9446D_n + D_n \implies D_{n+1} = 0,0295D_n^2 - 0,9446D_n$

Dado modelo, sabemos que os pontos de equilíbrio são encontrados quando não há variação de n para $n + 1$, onde $D_{n+1} = D_n = D^*$, ou seja:

$$D^* = 0,0295D^{*2} - 0,9446D^*$$

$$0 = 0,0295D^{*2} - 0,9446D^* - D^*$$

$$0 = 0,0295D^{*2} - 1,9446D^*$$

$$0 = (0,0295D^* - 1,9446)D^*$$

$$D^*(0,0295D^* - 1,9446) = 0$$

Assim, temos que $D^* = 0$ ou $0,0295D^* - 1,9446 = 0 \implies D^* = 65,9186$, conforme podemos observar na Tabela 24 e no gráfico da Figura 30.

Tabela 24 – Variação do número de casos notificados da Dengue

Tempo	(D_n)	Modelo Logístico Discreto
0	44,31	44,31
1	43,13	16,06
2	40,03	-7,56
3	1,22	8,83
4	1,78	-6,04
5	14,99	6,78
6	47,73	-5,05
7	14,72	5,52
8	11,20	-4,31
9	26,06	4,62
10	54,62	-3,73
11	72,05	3,93
12	27,67	-3,25
13	45,45	3,38
14	61,46	-2,85
15	42,78	2,93
16	40,87	-2,51

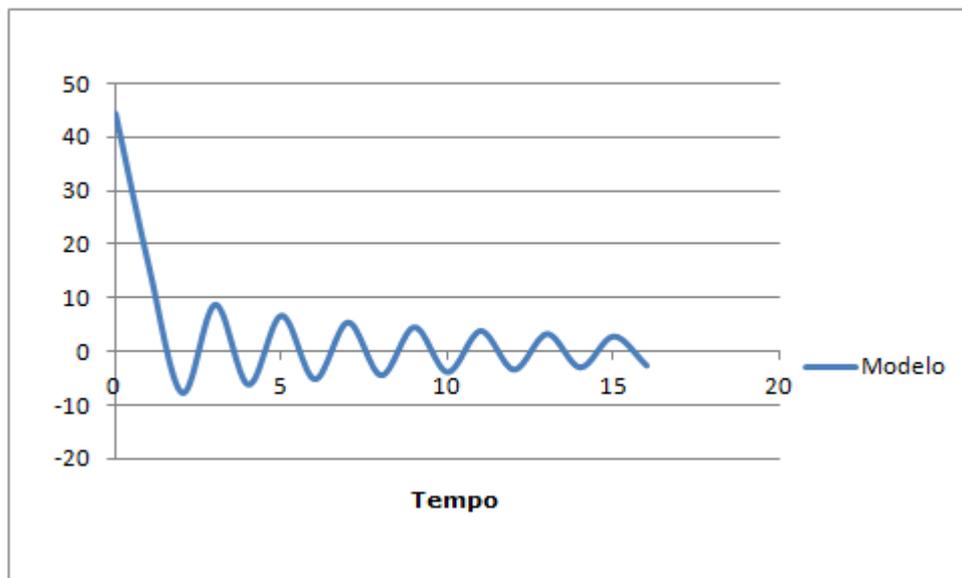


Figura 30 – Modelo logístico discreto de casos notificados da Dengue

Vemos na Figura 31 o cruzamento entre modelo logístico discreto e dados sobre os casos notificados da Dengue em função do tempo.

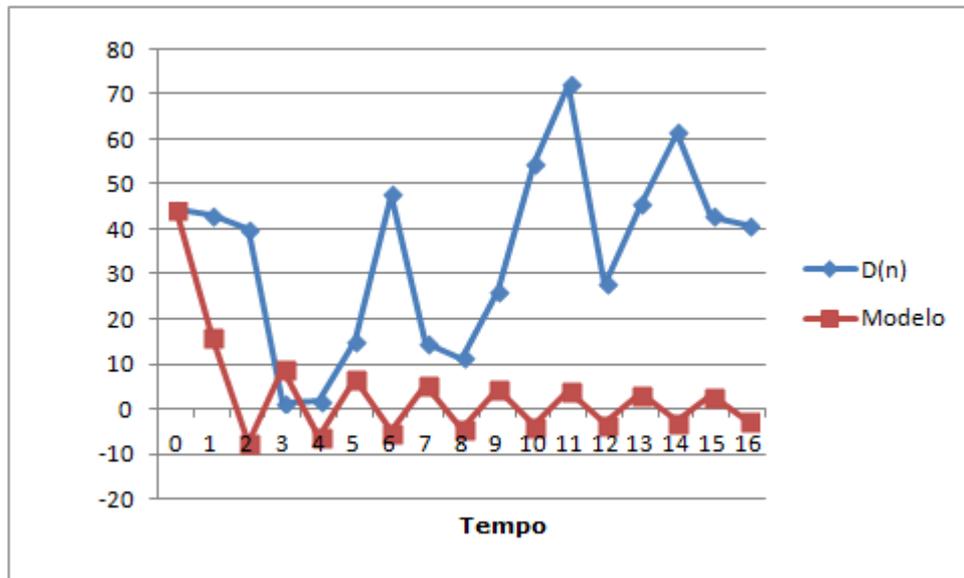


Figura 31 – Modelo logístico discreto x dados sobre os casos notificados da Dengue

5.2 Modelo Malthusiano

5.2.1 População de Teresina

O modelo malthusiano é da forma $P(t) = P(0).e^{ln(1+\alpha)t}$, tal que $\alpha = \sqrt[n]{\frac{P_{t+n}}{P_t}} - 1$.

Desta forma, com os dados que reunimos, sendo $t=0$ e $n=138$, temos:

$$\alpha = \sqrt[138]{\frac{814,2}{21,7}} - 1$$

$$\alpha = \sqrt[138]{37,52073733} - 1$$

$$\alpha = 1,026615374 - 1$$

$$\alpha = 0,026615373$$

Então $P(n) = 21,7e^{0,02627n}$, obtendo a Tabela 25 gerando gráfico da Figura 32 que representa tal modelo e o da Figura33 que configura a relação entre o modelo malthusiano e os dados da população.

Tabela 25 – Modelo Malthusiano da população de Teresina

Tempo	População (P_n)	Modelo Malthusiano
0	21,7	21,7
18	31,5	34,8
28	45,3	45,3
48	57,5	76,5
68	67,6	129,4
78	90,7	168,3
88	144,8	218,9
98	230,1	284,7
108	388,9	370,2
119	598,4	494,2
128	714,6	626,1
138	814,2	814,2

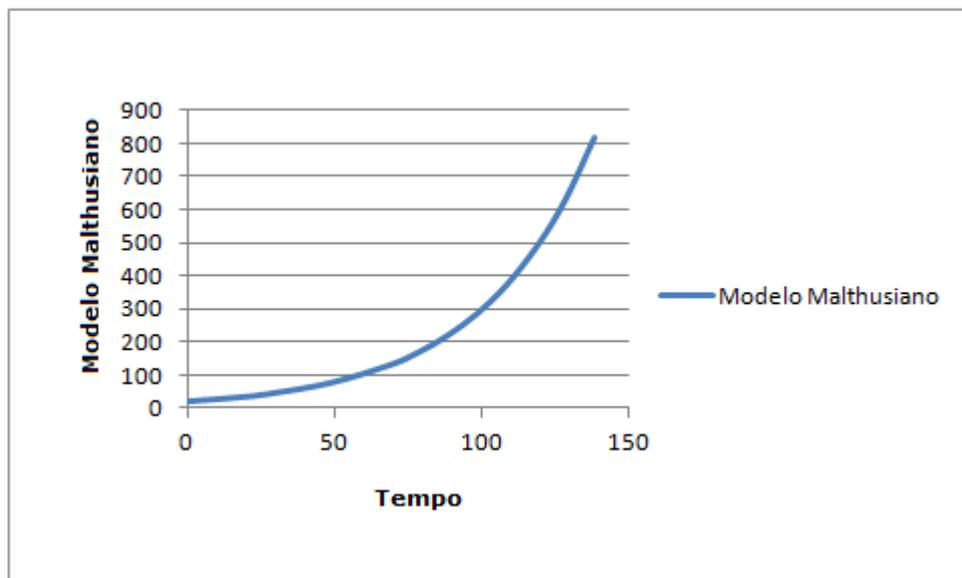


Figura 32 – Modelo Malthusiano da população de Teresina

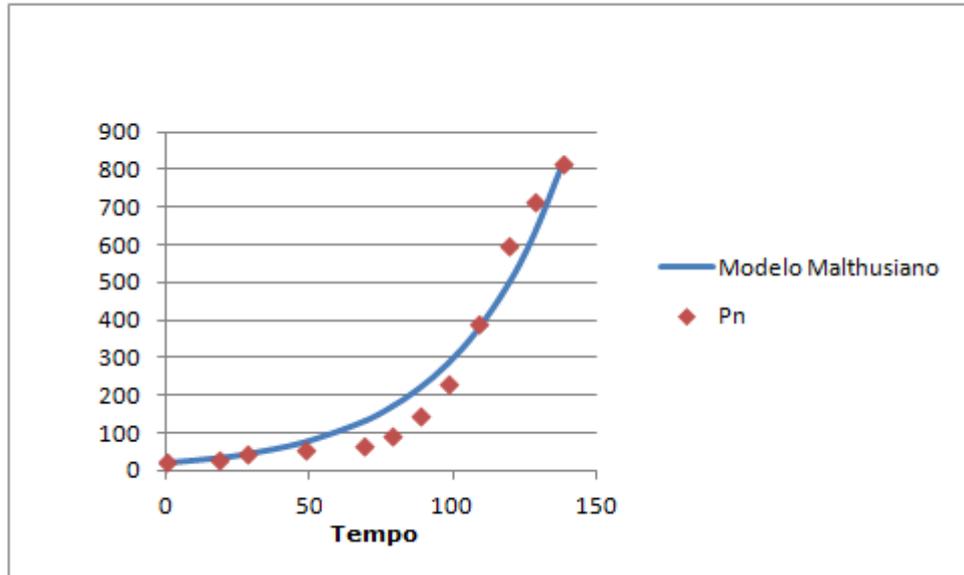


Figura 33 – Relação do Modelo Malthusiano com os dados da população de Teresina

5.2.2 Casos notificado da Dengue

Análogo ao desenvolvido em 5.2.1, com os dados da Tabela..., encontramos α , sendo

$$\alpha = \sqrt[16]{\frac{40,87}{44,31}} - 1$$

$$\alpha = \sqrt[16]{0,92236154} - 1$$

$$\alpha = 0,99496161 - 1$$

$$\alpha = -0,00503839$$

Então $D(n) = 44,31e^{-0,00505113n}$, obtendo a Tabela 26 gerando gráfico da Figura 34 que representa tal modelo e da Figura 35 que configura a relação entre o modelo malthusiano e os dados dos casos notificado da Dengue.

Tabela 26 – Modelo Malthusiano dos casos de Dengue na cidade de Tersina

Tempo	População (D_n)	Modelo Malthusiano
0	44,31	44,31
1	43,13	44,09
2	40,03	43,86
3	1,22	43,64
4	1,78	43,42
5	14,99	43,20
6	47,73	42,99
7	13,72	42,77
8	11,2	42,56
9	26,06	42,34
10	54,62	42,13
11	72,05	41,92
12	27,67	41,70
13	45,45	41,49
14	61,46	41,28
15	42,78	41,08
16	40,87	40,87

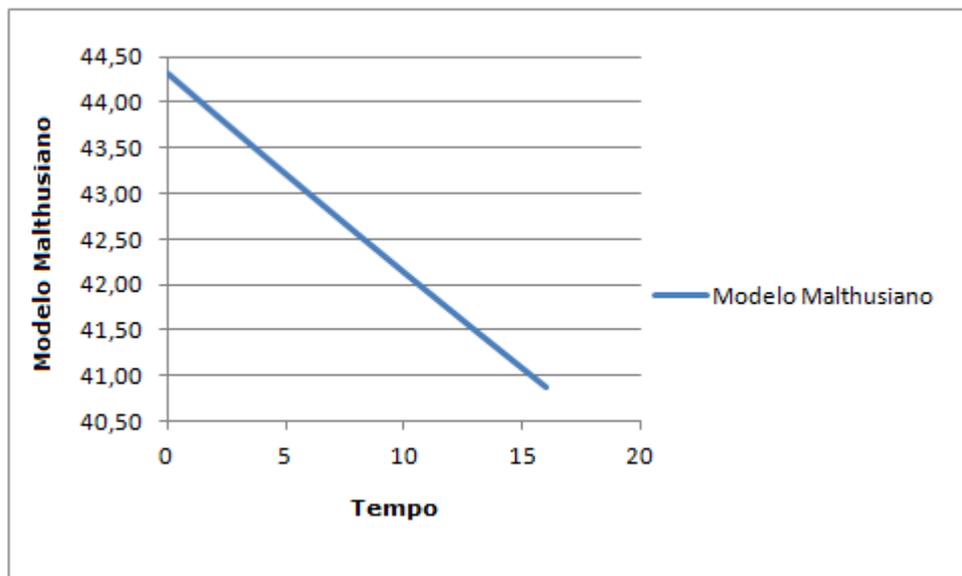


Figura 34 – Modelo Malthusiano dos casos notificados da Dengue

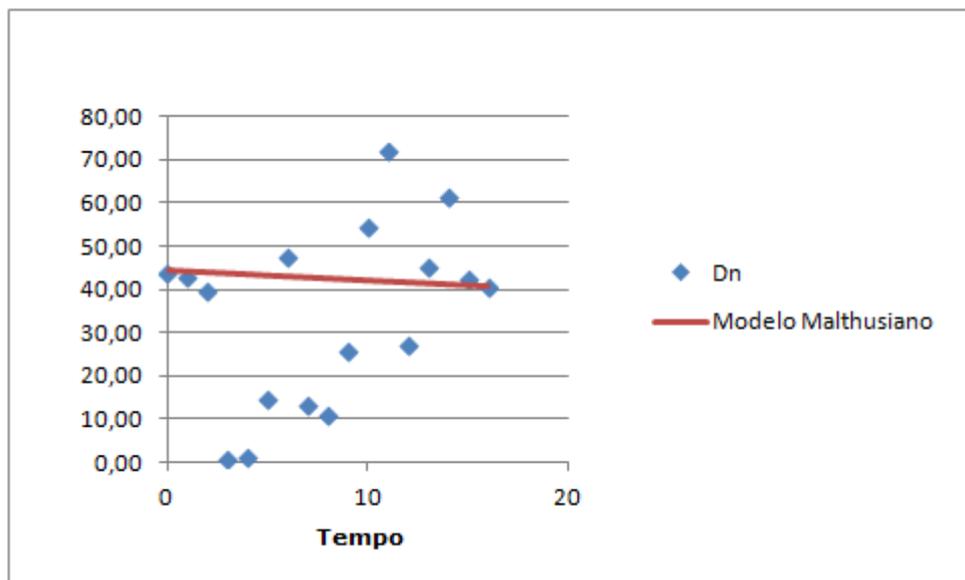


Figura 35 – Relação do Modelo Malthusiano com os dados notificados por Dengue na população de Teresina

6 Crescimento Populacional x Número de casos notificados da Dengue

Para fazermos uma comparação entre a população e os casos notificados da Dengue, tivemos que fazer um ajuste na variável tempo (t), pois os dados utilizados nas modelagens ocorreram em épocas diferentes. De acordo com os cálculos feitos no trabalho o modelo da População é $P_n = \frac{1355,32}{96,15e^{-0,0332(129+t)} + 1}$. Assim, fizemos algumas projeções relacionadas a tal modelo, que são dadas na Tabela 27.

Tabela 27 – Algumas projeções do modelo logístico 02

Ano	Tempo	Modelo
2020	19	794,2954
2030	29	899,4847
2040	39	993,9251
2050	49	1074,899
2060	59	1141,631
2070	69	1194,853
2080	79	1236,203
2090	89	1267,679
2100	99	1291,268
2150	149	1342,657

Para os casos da Dengue temos o Modelo $D_{n+1} = 0,0295D_n^2 - 0,9446D_n$.

Tabela 28 – Algumas projeções do modelo logístico discreto dos casos da Dengue

Ano	Tempo	Modelo
2020	19	2,23
2030	29	1,19
2040	39	0,63
2050	49	0,33
2060	59	0,19
2070	69	0,11
2080	79	0,06
2090	89	0,03
2100	99	0,02
2150	149	0,00

Fazendo a razão dos casos notificados da Dengue pela população, temos:

$$\frac{P_n}{D_{n+1}} = \frac{1355,32}{96,15e^{-0,0332(129+t)} + 1} \cdot \frac{1}{0,0295D_n^2 - 0,9446D_n}.$$

Através da Tabela 29 e do Gráfico 36 podemos verificar o valor da razão em determinados tempos.

Tabela 29 – Razão entre os casos da Dengue e a população

Ano	Tempo	Casos da Dengue	População	Casos da Dengue/População
2001	0	44,31	582,3696	0,076085702
2002	1	16,06	593,4211	0,027070775
2003	2	-7,56	604,5184	-0,012508353
2004	3	8,83	615,6554	0,014337903
2005	4	-6,04	626,8263	-0,009637017
2006	5	6,78	638,0251	0,010629035
2007	6	-5,05	649,2455	-0,007775672
2008	7	5,52	660,4818	0,008361402
2009	8	-4,31	671,7274	-0,006424206
2010	9	4,62	682,9763	0,006763369
2011	10	-3,73	694,2223	-0,005379246
2012	11	3,93	705,4591	0,005576211
2013	12	-3,25	716,6807	-0,004544079
2014	13	3,38	727,8808	0,004645738
2015	14	-2,85	739,0534	-0,003864035
2016	15	2,93	750,1925	0,003907962
2017	16	-2,51	761,292	-0,003302837
2018	17	2,55	772,3462	0,003310431
2019	18	-2,21	783,3492	-0,002830036
2020	19	2,23	794,2954	0,002809593
2025	24	-1,54	847,9847	-0,001813052
2030	29	1,19	899,4847	0,001330006
2035	34	-0,84	948,2664	-0,000890109
2040	39	0,63	993,9251	0,000630283
2050	49	0,33	1074,8991	0,000310935

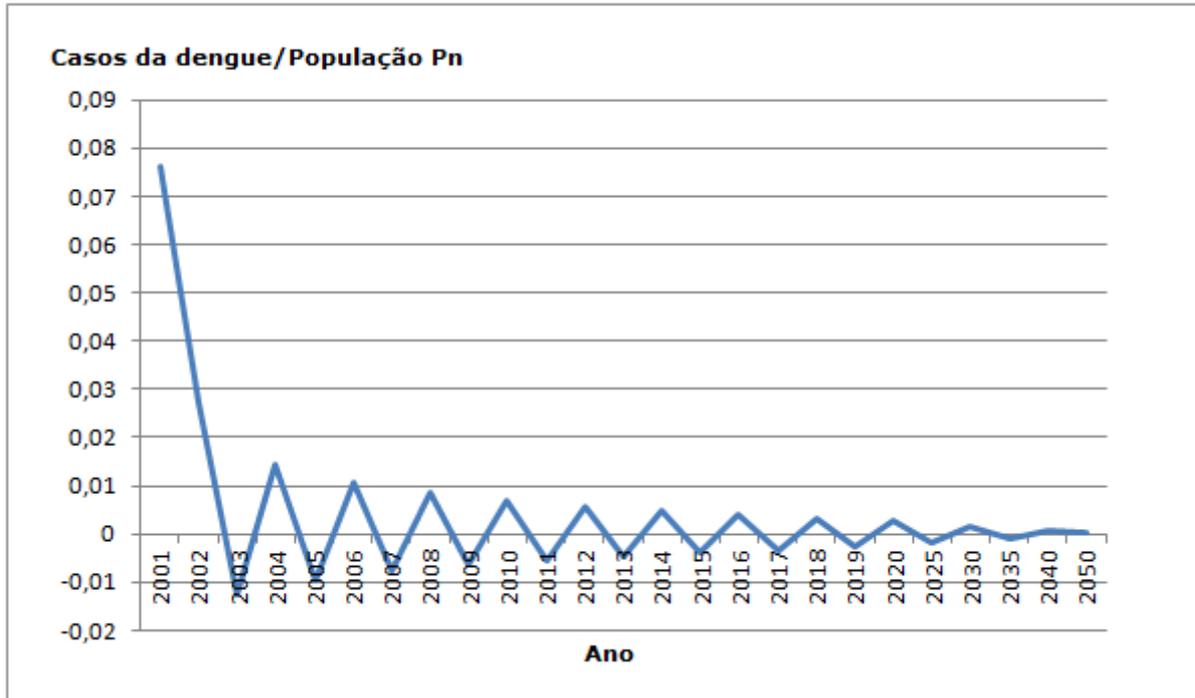


Figura 36 – Casos da Dengue/População(Pn) de 2001 a 2050

Observando a Tabela 29 podemos perceber que os casos notificados da Dengue fica oscilando, mas tende a se tornar estável, pois com o tempo os valores tendem a zerar. Veja que em 2001 a proporção de casos da Dengue comparados com a população era cerca de 0,08, ou seja, 8 pessoas infectadas para cada 100. Já em 2018, a mesma proporção passou para 0,003, houve uma redução para 3 pessoas doentes a cada 1000.

7 Considerações Finais

A Modelagem Matemática é uma sistemática alternativa para o ensinar Matemático que pode ser utilizada tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio. Tendo como base o cotidiano procura-se mostrar a importância da Matemática para o conhecimento e compreensão da realidade onde se vive. Assim, se torna uma forma eficiente no processo de ensino-aprendizagem, estabelecendo uma comparação entre o ensino tradicional e o que ocorre através da Modelagem Matemática. Essa metodologia, sendo bem aplicada, aumenta a motivação e o entusiasmo por parte dos alunos, levando o professor a refletir sobre sua metodologia de ensino.

Os dados obtidos neste estudo mostram que a população de Teresina continua aumentando, com previsão de ficar estável quando estiver, aproximadamente, com 1355,32 mil habitantes. Além disso os casos de Dengue continuarão oscilando, com anos epidêmicos e surtos de menor proporção, chegando possivelmente a zerar, claro que depende dos esforços das autoridades sanitárias para o seu controle, que tem como foco principal a eliminação do mosquito *Aedes aegypti*.

Com o desenvolvimento do trabalho podemos ver que a Modelagem Matemática vem contribuindo para a construção do pensar matemático, que deve ser elaborado pelo aluno. Neste contexto, o docente é responsável em orientar o processo de ensino-aprendizagem e pela formalização do novo para a construção do conhecimento.

Acredita-se que os resultados apresentados neste trabalho possam contribuir para que a Modelagem seja adotada como um novo recurso para o ensino da Matemática, por ser ela capaz de quebrar a linearidade curricular, o tradicionalismo da sala de aula, e ainda, propiciar melhor integração e convívio entre professor e aluno. Permitindo o desenvolvimento dos conteúdos por meio da contextualização e do cotidiano dos discentes.

Referências

- [1] ALMEIDA, L. M. W. ; BRITO, D. S. *Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir?* Ciência & Educação, v. 11, n. 3, p. 483-498, 2005.
- [2] ALMEIDA, L. M. W. ; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. *Modelagem Matemática na Educação Básica*. São Paulo: Contexto, 2012.
- [3] BASSANEZI, R. C. *Ensino - Aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2011.
- [4] BASSANEZI, R. C. *Temas e Modelos*. São Paulo: U'FABC, 2012.
- [5] BASSANEZI, R. C. *Ensino - Aprendizagem com modelagem matemática*. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2013.
- [6] BRASIL, FUNDAÇÃO NACIONAL DE SAÚDE. MINISTÉRIO DA SAÚDE. *Dengue instruções para pessoal de combate ao vetor: manual de normas técnicas*. PEAa. Brasília-DF, 2001.
- [7] BRASIL, SISTEMAS DE INFORMAÇÕES GERENCIAIS DA FUNASA. *Casos de dengue*. Disponível em: <<http://sis.funasa.gov.br>> Acesso em: setembro de 2018.
- [8] BRUMANO, C. E. P. *A Modelagem Matemática como metodologia para o estudo de análise combinatória*. 2014. 153f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal de Juiz de Fora, 2014.
- [9] CASTRO, J. A. F. D.; ANDRADE, H. M. D.; MONTE, S. J. H. D.; SILVA, A. S. D.; GOMES, K. C. B. L.; AMARAL, L. F. D. B. E.; CIPRIANO, F. D. O.; REGO, J. V. D.; ARAÚJO, M. A. D. M.; FAUSTINO, S. K. M.; NOGUEIRA, R. M. R.; SCHATZMAYR, H. G.; MIAGOSTOVICH, M. P. *Dengue viruses activity in Piauí, Brazil*. Memórias do Instituto Oswaldo Cruz, v. 98, n., p. 1021-1023, 2003.
- [10] FONSECA. S. *Modelagem Matemática: Ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade (Jonei Barbosa)*. Disponível em: <<http://simonefonsecaufal.blogspot.com/2011/03/precursos-brasileiros-da-modelagem.html>>. Acesso em: fevereiro de 2018.

- [11] FRANCO, O. *História da febre amarela no Brasil*.1976. 114p. Ministério da Saúde, Superintendência de Campanhas de Saúde Pública, Rio de Janeiro.
- [12] FREITAS, P. M. V. *Modelagem matemática da população teresinense e sua frota de carros*.2015. 69f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal do Piauí, 2015.
- [13] GUBLER, D.J.; KUNO, G.*Dengue and Dengue hemorrhagic fever: its history and resurgence as a global health problem*. CAB International, New York, p. 1-22, 1997.
- [14] INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE) *Censo da população teresinense*. Disponível em: <<http://www.ibge.gov.br/home/>>.Acesso em: julho de 2018.
- [15] LESH, R. T. *Researchable Issues & Conjectures for investigating what it means to Understand Statistics (or Other Topics)*. Meaningfully. Journal of Mathematical Modelling and Application, v.1, n. 2, 2010, p.16-48.
- [16] LIMA. R. R. *Modelagem Matemática da População Teresinense e a Síndrome da Imunodeficiência Adquirida (AIDS)*.2016. 72f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal do Piauí, 2016.
- [17] MARQUES. S. P. A. *População brasileira e a frota de carros*.2013. 69f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal do ABC. São Paulo, 2013.
- [18] MINISTÉRIO DA SAÚDE: SISTEMA DE INFORMAÇÕES DE AGRAVOS DE NOTIFICAÇÃO (SINAN) *Dengue*. Disponível em: <<http://portalsinan.saude.gov.br/dengue/>>.Acesso em: julho de 2018.
- [19] MINISTÉRIO DA SAÚDE: SISTEMA DE INFORMAÇÕES DE AGRAVOS DE NOTIFICAÇÃO (SINAN) *Número de pessoas notificadas com a Dengue*. Disponível em: <<http://tabnet.datasus.gov.br/cgi/tabcgi.exe?sinanet/cnv/denguePI.def/>>.Acesso em: julho de 2018.
- [20] ORGANIZAÇÃO PANAMERICANA DE SAÚDE. *Dengue y dengue hemorrágico en las Américas: guías para su prevención y control*. . 110p.(Publicação Científica nº 548). Washington D.C., 1995.

- [21] SOUSA. J. B. *Modelagem logística generalizada das Populações do estado do Piauí e da cidade de Teresina*. 2013. 57f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal do Piauí, 2016.
- [22] TORRES, M.T. *Dengue y dengue hemorrágico* . 1.ed. Universidad Nacional de Quilmes. Argentina, 1998.

ANEXOS

Figura 37 – Pedido de autorização para a pesquisa dirigida à Fundação Municipal de Saúde - Teresina

SOLICITAÇÃO DE AUTORIZAÇÃO PARA PESQUISA EM BANCO DE DADOS

Teresina, abril de 2018

Eu, Anna Karla Barros da Trindade, responsável principal pelo projeto de dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação- Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, o qual pertence ao curso de Matemática da Universidade Federal do Piauí (UFPI), venho pelo presente, solicitar autorização em nome do Presidente da Fundação Municipal de Saúde (FMS) para realização da coleta de dados através do banco de dados sobre a doença Dengue, o mais breve possível, para o trabalho de pesquisa sob o título Modelagem Matemática da População de Teresina e a Dengue, com o objetivo de mostrar que podemos relacionar acontecimentos cotidianos com conhecimentos matemáticos e, a partir daí, com a criação de um modelo extrair conclusões nossas, para que possamos nos adequar a tal acontecimento. Foi observado que mesmo sendo discutida, ainda não se fez alguns levantamentos sobre tal doença, principalmente ligado à matemática. Esta pesquisa está sendo orientada pelo Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite.

Contando com a autorização desta instituição, colocamo-nos à disposição para qualquer esclarecimento, além de dar uma devolutiva do trabalho para que a própria FMS possa utilizá-lo, enriquecendo ainda mais o banco de dados com gráficos e com a própria modelagem, podendo assim facilitar o estudo de tal doença para a própria Fundação.

Anna Karla Barros da Trindade

Anna Karla Barros da Trindade
RG 2677631 CPF 043465613-57

Jefferson Cruz dos Santos Leite

Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite

(Orientador- UFPI)

Figura 38 – Ficha de investigação - SINAN, parte 1

SINAN						
República Federativa do Brasil Ministério da Saúde		SISTEMA DE INFORMAÇÃO DE AGRAVOS DE NOTIFICAÇÃO				
FICHA DE INVESTIGAÇÃO		DENGUE E FEBRE DE CHIKUNGUNYA				
			Nº			
<p>Caso suspeito de dengue: pessoa que viva ou tenha viajado nos últimos 14 dias para área onde esteja ocorrendo transmissão de dengue ou tenha presença de <i>Ae. aegypti</i> que apresente febre, usualmente entre 2 e 7 dias, e apresente duas ou mais das seguintes manifestações: náuseas, vômitos, exantema, mialgias, cefaleia, dor retroorbital, petéquias ou prova do laço positiva e leucopenia.</p>						
<p>Caso suspeito de Chikungunya: febre de início súbito e artralgia ou artrite intensa com início agudo, não explicado por outras condições, que resida ou tenha viajado para áreas endêmicas ou epidêmicas até 14 dias antes do início dos sintomas, ou que tenha vínculo epidemiológico com um caso importado confirmado.</p>						
Dados Gerais	1 Tipo de Notificação 2 - Individual		3 Data da Notificação			
	2 Agravado/doença 1- DENGUE 2- CHIKUNGUNYA		Código (CID10) A 90 A 92	Código (IBGE)		
	4 UF	5 Município de Notificação		Código (IBGE)		
	6 Unidade de Saúde (ou outra fonte notificadora)		Código	7 Data dos Primeiros Sintomas		
Notificação Individual	8 Nome do Paciente		9 Data de Nascimento			
	10 (ou) Idade 1 - Hora 2 - Dia 3 - Mês 4 - Ano	11 Sexo M - Masculino F - Feminino I - Ignorado	12 Gestante 1-1º Trimestre 2-2º Trimestre 3-3º Trimestre 4- Idade gestacional Ignorada 5-Não 6- Não se aplica 9- Ignorado	13 Raça/Cor 1-Branca 2-Preta 3-Amarela 4-Parda 5-Indígena 9- Ignorado		
	14 Escolaridade 0-Analfabeto 1-1ª a 4ª série incompleta do EF (antigo primário ou 1º grau) 2-4ª série completa do EF (antigo primário ou 1º grau) 3-5ª à 8ª série incompleta do EF (antigo ginásio ou 1º grau) 4-Ensino fundamental completo (antigo ginásio ou 1º grau) 5-Ensino médio incompleto (antigo colegial ou 2º grau) 6-Ensino médio completo (antigo colegial ou 2º grau) 7-Educação superior incompleta 8-Educação superior completa 9-Ignorado 10- Não se aplica		15 Número do Cartão SUS			
	16 Nome da mãe		17 UF			
Dados de Residência	18 Município de Residência		Código (IBGE)	19 Distrito		
	20 Bairro		21 Logradouro (rua, avenida,...)		Código	
	22 Número		23 Complemento (apto., casa, ...)		24 Geo campo 1	
	25 Geo campo 2		26 Ponto de Referência		27 CEP	
	28 (DDD) Telefone		29 Zona 1 - Urbana 2 - Rural 3 - Periurbana 9 - Ignorado		30 País (se residente fora do Brasil)	
	Dados clínicos e laboratoriais					
Inv.	31 Data da Investigação		32 Ocupação			
	33 Sinais clínicos 1-Sim 2- Não					
Dados clínicos	<input type="checkbox"/> Febre <input type="checkbox"/> Cefaleia <input type="checkbox"/> Vômito <input type="checkbox"/> Dor nas costas <input type="checkbox"/> Artrite <input type="checkbox"/> Petéquias <input type="checkbox"/> Prova do laço positiva <input type="checkbox"/> Mialgia <input type="checkbox"/> Exantema <input type="checkbox"/> Náuseas <input type="checkbox"/> Conjuntivite <input type="checkbox"/> Artralgia intensa <input type="checkbox"/> Leucopenia <input type="checkbox"/> Dor retroorbital					
	34 Doenças pré-existentis 1-Sim 2- Não 9-Ignorado					
Dados laboratoriais	35 Data da Coleta da 1ª Amostra (S1)		36 Data da Coleta da 2ª Amostra (S2)		37 Exame PRNT Data da Coleta	
	38 Resultado S1 <input type="checkbox"/> S2 <input type="checkbox"/> PRNT <input type="checkbox"/> 1 - Reagente 2 - Não Reagente 3 - Inconclusivo 4 - Não Realizado					
	39 Sorologia (IgM) Dengue Data da Coleta		40 Resultado 1- Positivo 2- Negativo 3- Inconclusivo 4 - Não realizado		41 Exame NS1 Data da Coleta	
	42 Resultado 1- Positivo 2- Negativo 3- Inconclusivo 4 - Não realizado					
	43 Isolamento Data da Coleta		44 Resultado 1 - Positivo 2 - Negativo - Inconclusivo 4 - Não Realizado		45 RT-PCR Data da Coleta	
	46 Resultado 1 - Positivo 2 - Negativo - Inconclusivo 4 - Não Realizado					
47 Sorotipo 1- DENV 1 2- DENV 2 3- DENV 3 4 - DENV 4		48 Histopatologia 1- Compatível 2-Incompatível 3- Inconclusivo 4 - Não realizado		49 Imunohistoquímica 1- Positivo 2- Negativo 3- Inconclusivo 4 - Não realizado		

Figura 39 – Ficha de investigação - SINAN, parte 2

Hospitalização	50 Ocorreu Hospitalização? <input type="checkbox"/> 1 - Sim 2 - Não 9 - Ignorado		51 Data da Internação		52 UF	53 Município do Hospital	Código (IBGE)	
	54 Nome do Hospital			Código		55 (DDD) Telefone		
Conclusão	Local Provável de Infecção (no período de 15 dias)							
	56 O caso é autóctone do município de residência? <input type="checkbox"/> 1-Sim 2-Não 3-Indeterminado			57 UF		58 País		
	59 Município		Código (IBGE)		60 Distrito		61 Bairro	
	62 Classificação <input type="checkbox"/> 5- Descartado 10- Dengue 11- Dengue com Sinais de Alarme 12- Dengue Grave 13- Chikungunya			63 Critério de Confirmação/Descarte <input type="checkbox"/> 1 - Laboratório 2 - Clínico-Epidemiológico 3-Em investigação			64 Apresentação clínica <input type="checkbox"/> 1- Aguda 2- Crônica	
	65 Evolução do Caso <input type="checkbox"/> 1-Cura 2- Óbito pelo agravamento 3- Óbito por outras causas 4-Óbito em investigação 9-Ignorado			66 Data do Óbito		67 Data do Encerramento		
Preencher os sinais clínicos para Dengue com Sinais de Alarme e Dengue Grave								
Dados Clínicos - Dengue com Sinais de Alarme e Dengue Grave	68 Dengue com sinais de alarme <input type="checkbox"/> 1-Sim 2- Não 9-Ignorado		<input type="checkbox"/> Vômitos persistentes		<input type="checkbox"/> Aumento progressivo do hematócrito		69 Data de início dos sinais de alarme:	
	<input type="checkbox"/> Hipotensão postural e/ou lipotímia		<input type="checkbox"/> Dor abdominal intensa e contínua		<input type="checkbox"/> Hepatomegalia >= 2cm			
	<input type="checkbox"/> Queda abrupta de plaquetas		<input type="checkbox"/> Letargia ou irritabilidade		<input type="checkbox"/> Acúmulo de líquidos			
70 Dengue grave 1-Sim 2- Não 9-Ignorado		<input type="checkbox"/> Sangramento de mucosa/outras hemorragias		Sangramento grave:				
Extravasamento grave de plasma:		<input type="checkbox"/> Hematêmese		<input type="checkbox"/> Metrorragia volumosa				
<input type="checkbox"/> Pulso débil ou indetectável		<input type="checkbox"/> Taquicardia		<input type="checkbox"/> Melena		<input type="checkbox"/> Sangramento do SNC		
<input type="checkbox"/> PA convergente <= 20 mmHg		<input type="checkbox"/> Extremidades frias		Comprometimento grave de órgãos:				
<input type="checkbox"/> Tempo de enchimento capilar		<input type="checkbox"/> Hipotensão arterial em fase tardia		<input type="checkbox"/> AST/ALT > 1.000		<input type="checkbox"/> Miocardite <input type="checkbox"/> Alteração da consciência		
<input type="checkbox"/> Acúmulo de líquidos com insuficiência respiratória				<input type="checkbox"/> Outros órgãos, especificar:				
71 Data de início dos sinais de gravidade:								
Informações complementares e observações								
Observações Adicionais								
Investigador	Município/Unidade de Saúde					Cód. da Unid. de Saúde		
	Nome		Função		Assinatura			