



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Fernando Alves Nunes

**Grupo de renormalização no espaço real para o modelo de Potts
quântico**

Teresina - PI
novembro de 2018

Fernando Alves Nunes

**Grupo de renormalização no espaço real para o modelo de Potts
quântico**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal do Piauí - UFPI, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. José Pimentel de Lima.

Teresina - PI
novembro de 2018

FICHA CATALOGRÁFICA

Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco

M972g Nunes, Fernando Alves.
 Grupo de renormalização no espaço real para o modelo de
 Potts quântico / Fernando Alves Nunes. – 2018.
 72 f.

 Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal do
 Piauí, Teresina, 2018.
 “Orientador: Prof. Dr. José Pimentel de Lima”.

 1. Modelo de Potts Quântico. 2. Transição de Fase
 Quântica. 3. Física. I. Título.

CDD 530.143

*Dedico esse trabalho a
Martinha,
João Batista,
Nildes e
Ana Gabriela.*

Agradecimentos

- Ao Professor José Pimentel de Lima, por dedicar parte de seu tempo e disposição ao me orientar; pelas inúmeras discussões e ensinamentos, tanto de caráter acadêmico quanto social. De modo especial, pelas aulas edificantes durante o curso.
- Ao professor Raimundo Rocha dos Santos, pelas preciosas sugestões no decorrer desse trabalho.
- Aos meus colegas da Pós-Graduação, Alexandre, Francisco, Gil, Edmundo, Ramiro, Lucas e Ramon, pelas inúmeras e enriquecedoras discussões nesse período.
- À CAPES, à FAPEPI, pelo apoio financeiro e à UFPI, pela estrutura física disponibilizada.
- À Nildes, minha esposa, pelas correções gramaticais e por ser meu ponto de equilíbrio, especialmente nos momentos mais difíceis do curso.
- Enfim, à minha família, aos meus amigos, por aceitarem minha ausência, principalmente nos últimos meses, em que estive envolvido na pesquisa.

*“Ninguém nunca descobre o que é a vida,
e isso não importa. Explore o mundo.
Quase tudo é realmente interessante
se você entra fundo o suficiente”.*

Richard Feynman

Resumo

Estudamos o modelo de Potts quântico em uma dimensão, para $q = 3, 4$ e 5 , enfatizando a determinação do expoente crítico ν , do comprimento de correlação. Inicialmente, determinamos relações de escala fenomenológicas usando cadeias finitas, através do *gap* de energia entre o estado fundamental e o primeiro estado excitado. Verificamos que o expoente ν para $q = 3$ e $q = 4$ está compatível com resultados existentes na literatura. Para o caso $q = 5$, verificamos que o *gap* de energia estabiliza em um ponto abaixo de zero, não nos permitindo constatar a natureza da transição de fase de primeira ordem como previsto na literatura. Realizamos, em seguida, via transformação de Migdal - Kadanoff, um estudo das possíveis relações de escala para dimensões maiores que um nos casos $q = 3$ e 4 . Verificamos que o expoente crítico ν tem o mesmo valor nos casos $d > 1$ e $d = 1$, evidenciando que essa transformação não captura qualquer tendência de q com a dimensão d , enquanto é previsto que, em uma transição de primeira ordem, ν deve tender para o inverso da dimensão d^{-1} . Prosseguindo, resolvemos o modelo de Potts quântico em uma dimensão usando grupo de renormalização no espaço real. Projetamos os termos da Hamiltoniana no subespaço do estado fundamental e encontramos as equações de renormalização nos casos $q = 3$ e 4 . Com isso, calculamos o expoente crítico ν linearizando as equações de renormalização no ponto crítico, encontrando $\nu = 0,846$ e $\nu = 0,796$, respectivamente, resultados que concordam com os previstos na literatura.

Palavras-chave: Modelo de Potts Quântico, Transição de Fase Quântica, Grupo de Renormalização no Espaço Real.

Abstract

We studied the quantum Potts model in one dimension, for $q = 3, 4$ and 5 , emphasizing the determination of the critical exponent ν , of the correlation length. We initially determined phenomenological scale relations using finite chains through the energy gap between the ground state and the first excited state. We verified that the exponent ν for $q = 3$ and $q = 4$ is compatible with results in the literature. For the case of $q = 5$, we found that the energy gap stabilizes at a point below zero, not allowing us to verify the nature of the first-order phase transition as predicted in the literature. Then, through the transformation of Migdal - Kadanoff, a study of the possible scale relations for dimensions larger than one for the cases $q = 3$ and 4 was carried out. We found that the critical exponent ν has the same value in cases where $d > 1$ and $d = 1$, showing that this transformation does not capture any trend of q with the dimension d , while predicted that in a first-order transition, ν must tend to the inverse of the dimension d^{-1} . Proceeding, we solved the quantum Potts model in one dimension using renormalization group in real space. We designed the Hamiltonian terms in the subspace of the ground state and found the renormalization equations in the cases $q = 3$ and 4 . Thus, we computed the critical exponent ν by linearizing the renormalization equations at the critical point, finding $\nu = 0.8464$ and $\nu = 0.7958$ respectively, which are in line with those reported in the literature.

Keywords: Quantum Potts Model, Quantum Phase Transition, Renormalization Group in Real Space.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xii
Lista de Símbolos	xiii
Introdução	1
1 Grupo de renormalização no espaço real	3
1.1 Transições de fase	3
1.2 Escala e expoentes críticos	7
1.3 Grupo de renormalização no espaço real	10
1.4 Grupo de renormalização no espaço real para o modelo de Ising com campo transversal em uma e duas dimensões	12
1.4.1 Grupo de renormalização no espaço real para o modelo de Ising com campo transversal em uma dimensão	13
1.4.2 Grupo de renormalização no espaço real para o modelo de Ising com campo transversal em duas dimensões	21
2 Escala para o modelo de Potts quântico ($q = 3, 4$ e 5) em uma dimensão	27
2.1 O modelo e relações de escala fenomenológicas	27
2.1.1 <i>Gap versus</i> campo magnético	30
2.1.2 Relação de recorrência $g'(g)$	32
2.2 Caso $q = 4$	39
2.2.1 <i>Gap versus</i> campo magnético	39
2.2.2 Relação de recorrência	41
2.3 Caso $q = 5$	48
2.4 Modelo de Potts via transformação de Migdal-Kadanoff	50

2.4.1	Caso $q = 3$	51
2.4.2	Caso $q = 4$	54
3	Estudo do modelo de Potts quântico ($q = 3, 4$) via grupo de renormalização no espaço real	55
3.1	Caso $q = 3$	55
3.2	Projeções no subespaço do estado fundamental	58
3.3	Caso $q = 4$	61
3.3.1	Projeções no subespaço de menor energia	63
4	Conclusões e perspectivas	67
	Referências	68

Lista de Figuras

1.1	a) Diagrama de fase da água; b) Parâmetro de ordem. Adaptação da Ref.(28)	4
1.2	Gráficos da magnetização para a) $T < T_c$ b) $T = T_c$ c) $T > T_c$. Adaptação da Ref.(31)	4
1.3	a) Diagrama de fase de um ferromagneto simples; b) Parâmetro de ordem, magnetização. Adaptação da Ref.(28)	5
1.4	a) Diagrama de fase do ferromagneto $LiHoF_4$; b) Comportamento crítico. Adaptação da Ref.(33)	6
1.5	Construção do modelo de Kadanoff em uma rede quadrada com um fator de escala $b = 2$.	8
1.6	Rede de sítios de Ising em duas dimensões	21
2.1	Representação dos spins de Potts.	28
2.2	Autovalores de energia para $q = 3$. Destacamos, no canto inferior esquerdo, os dois valores mais baixos de energia para o sistema.	29
2.3	Gap de energia Δ_N em função do campo g para $q = 3$ e tamanho de cadeia $N = 3, 4, 5, 6, 7$ e 8 .	31
2.4	Gap de energia $N\Delta_N$ em função do campo g com $q = 3$ e tamanho de cadeia $N = 3, 4, 5, 6, 7$ e 8 .	32
2.5	g' em função de g para $q = 3$ e pares de tamanhos de rede (N', N) e números de estados $q = 3$.	33
2.6	Transformação de escala para o modelo de Potts em um campo transversal. Curvas $\log(g)$ em função de $\log(g')$.	34
2.7	Valor da extrapolação de $f(b)$ quando $b \rightarrow 1$.	35
2.8	Extrapolação de ν quando $b \rightarrow 1$.	36
2.9	Extrapolação de $b^{1/\nu}$ quando $b \rightarrow 1$.	37

2.10	Consistência da transformação de escala proposta $g' = g^{f(b)}$, mostrada por meio do colapso de dados para o caso do modelo de Potts na presença de um campo transversal com número de estados $q = 3$	38
2.11	<i>Gap</i> de energia Δ_N em função do campo g para $q = 4$ com tamanho de cadeia $N = 3, 4, 5$ e 6	40
2.12	<i>Gap</i> de energia $N\Delta_N$ em função do campo g para $q = 4$ e tamanho de cadeia $N = 3, 4, 5$ e 6	41
2.13	g' em função de g para pares de tamanhos de rede (N', N) e número de estados $q = 4$	42
2.14	Transformação de escala para o modelo de Potts com $q = 4$ na presença de campo transversal. Curvas $\log(g)$ em função de $\log(g')$	43
2.15	Valor da extrapolação de $f(b)$ quando $b \rightarrow 1$	44
2.16	Convergência de ν quando $b \rightarrow 1$	45
2.17	Extrapolação de $b^{1/\nu}$ quando $b \rightarrow 1$	46
2.18	Consistência da transformação de escala proposta $g' = g^{f(b)}$, mostrada através do colapso de dados para o caso do modelo de Potts $q = 4$ na presença de um campo transversal.	47
2.19	<i>Gap versus g</i> para $q = 5$	49
2.20	$N \times \Delta_N$ <i>versus g</i> para $q = 5$	49
2.21	<i>Gap versus N^{-1}</i> para $q = 5$	50
2.22	As etapas da transformação de Migdal - Kadanoff para uma rede quadrada.	51
2.23	Gráfico de j^* <i>versus d</i> para o caso $q = 3$	53
2.24	Gráfico de j^* <i>versus d</i> para o caso $q = 4$	54

Lista de Tabelas

2.1	Determinação dos valores de λ para o modelo de Potts com $q = 3$, por meio do ajuste das curvas $\log(g)$ em função do $\log(g')$	35
2.2	Determinação dos valores de ν e $b^{1/\nu}$ para o modelo de Potts com $q = 3$, por meio do ajuste das curvas $\log(g)$ em função do $\log(g')$	36
2.3	Determinação dos valores de λ para o modelo de Potts com $q = 4$, por meio do ajuste das curvas $\log(g)$ em função do $\log(g')$	44
2.4	Determinação dos valores de ν e $b^{1/\nu}$ para o modelo de Potts com $q = 4$, por meio do ajuste das curvas $\log(g)$ em função do $\log(g')$	45
2.5	Determinação dos valores de ν para o modelo de Potts com $q = 3$ e $d = 2$	53
2.6	Determinação dos valores de ν para o modelo de Potts com $q = 4$ e $d = 2$	54

Lista de Símbolos

d	-	Dimensão do sistema
g	-	Campo magnético em unidades de J
b	-	Fator de transformação de escala
q	-	Número de estados possíveis
H	-	Campo magnético
h	-	Campo magnético transverso
M	-	Magnetização
T	-	Temperatura absoluta
ξ	-	Comprimento de correlação
J	-	Energia de acoplamento
\mathcal{H}	-	Hamiltoniana
Δ_N	-	<i>Gap</i> de energia
N	-	Número de sítios
G	-	Potencial de Gibbs
f	-	Energia livre do sistema
ε	-	Temperatura reduzida
Δ	-	Flutuações quânticas de energia
K	-	Parâmetro
λ	-	Autovalor
EF	-	Estado fundamental
P_N	-	Projeter

Introdução

Desde o século XIX, com a observação da opalescência crítica da água, por Andrews [1], a teoria de fenômenos críticos tem sido bastante aprofundada [2], tendo seu ápice na formulação moderna do grupo de renormalização, por Wilson [3]. É óbvio que estão incluídas, nesse estudo, todas as transições de fase clássicas de segunda ordem. Várias grandezas termodinâmicas apresentam um comportamento peculiar na região crítica, a qual pode ser caracterizada por um conjunto de expoentes críticos e, assim, é possível verificar como sistemas físicos diferentes, como por exemplo sistemas de gás-líquido e sistemas de ferromagnetos uniaxiais, pertencem à mesma classe de universalidade [2, 4]. Nas últimas décadas, constatamos um interesse substancial no estudo das transições de fase quânticas [5], que ocorrem em temperatura zero, dirigidas totalmente pelas flutuações quânticas. Além disso, o desejo de se entender e quantificar o emaranhamento quântico, importante no desenvolvimento da computação quântica, do teletransporte de estados quânticos e da criptografia quântica, tem estimulado também o estudo das transições de fase quânticas. Como podemos ver, por exemplo em [6], em uma transição de fase quântica de segunda ordem, temos um emaranhamento quântico máximo.

As transições de fase quânticas de segunda ordem, assim como os fenômenos críticos em sistemas clássicos, devido à invariância de escala na região crítica, podem ser estudados através de modelos simples, haja vista que os detalhes das interações não são relevantes nessa região [7]. Para exemplificar, citamos o modelo de Ising em um campo transversal [8, 9, 10] e o modelo de Potts quântico [11].

Com relação ao emaranhamento, é importante entender sua evolução quando nos aproximamos do ponto crítico. Há evidências [12, 13] de que o emaranhamento é perdido ao longo das trajetórias do grupo de renormalização [3, 14, 15, 16]. Com isso, faz-se necessário ainda o estudo das transformações do grupo de renormalização na região crítica das transições quânticas.

Em se tratando do modelo de Ising, foi demonstrado [17, 18, 19] que o comportamento crítico quântico do modelo com campo transversal d -dimensional é o mesmo que o comportamento crítico clássico em dimensão $d + 1$. Ou seja, o comportamento crítico quântico da cadeia de Ising com campo transversal é caracterizado pelos mesmos expoentes críticos que os do modelo

de Ising clássico em duas dimensões [20, 21, 22]. Se a dependência do comprimento de correlação divergente no parâmetro for conhecida, obtém-se uma relação de escala explicitamente, de forma que o campo pode se transformar segundo $g' = g^b$, onde b é o fator de escala do comprimento [10, 23, 24].

O Modelo de Potts de q estados é uma generalização do modelo de Ising e, portanto, atende às mesmas relações descritas: o modelo de Potts quântico em d dimensões corresponde ao modelo clássico com $d + 1$ dimensões [11]. Sabe-se que a transição de fase no modelo de Potts bidimensional é de segunda ordem se o número de componentes for $q \leq 4$, mas de primeira ordem para $q > 4$ [25].

Nessa dissertação, estudamos o modelo de Potts quântico em uma dimensão, através de uma transformação de escala fenomenológica via *gap* de energia [26, 27] e, utilizamos também o grupo de renormalização no espaço real, determinando o expoente crítico do comprimento de correlação.

No Capítulo 1, apresentamos os conceitos fundamentais de transições de fase, grupo de renormalização no espaço real usando como exemplo o modelo de Ising com campo transversal em uma e duas dimensões. No Capítulo 2, apresentamos nossos resultados para o modelo de Potts quântico em uma cadeia linear, usando transformação de escala no *gap* de energia. Seguindo, no Capítulo 3, apresentamos nossos resultados para o modelo de Potts quântico via bloco de renormalização no espaço real. Por fim, no Capítulo 4, resumimos nossas conclusões e perspectivas.

Capítulo 1

Grupo de renormalização no espaço real

Neste capítulo vamos apresentar, inicialmente, os conceitos utilizados no estudo das transições de fase clássicas e quânticas. Após isso, introduziremos os conceitos de escala e universalidade no contexto dos fenômenos críticos. Em seguida, trataremos o grupo de renormalização no espaço real, demonstrando um procedimento teórico sistemático para lidar com as características de modelos que descrevem sistemas físicos na região crítica. Como exemplos em caráter de revisão, trataremos o modelo de Ising com campo transversal em uma e duas dimensões.

1.1 Transições de fase

Matematicamente, uma transição de fase é a assinatura de uma singularidade na energia livre do sistema ou em uma de suas derivadas, o que se manifesta, macroscopicamente, como uma mudança brusca em suas propriedades. As transições de líquido para gás, de um condutor normal para um supercondutor, ou de material paramagnético para ferromagnético, são exemplos em que ocorrem transições de fase [28, 29].

De modo geral, as transições de fase governadas pelas flutuações térmicas são classificadas como transições clássicas. Consideremos, por exemplo, o diagrama de fases da água, que mostra os estados sólido, líquido e gasoso, em determinadas condições de pressão e temperatura, na Fig.(1.1 (a)), onde as linhas bem definidas separam as regiões, nas quais cada fase é estável. Seguindo a linha de coexistência líquido-gás, à medida que a temperatura aumenta, a diferença entre as densidades do líquido e do gás diminui continuamente até zero, como mostrado na Fig.(1.1 (b)). Essa diferença, chamada de parâmetro de ordem da transição líquido-gás, se anula no ponto crítico, acima do qual é possível mudar continuamente do estado líquido para

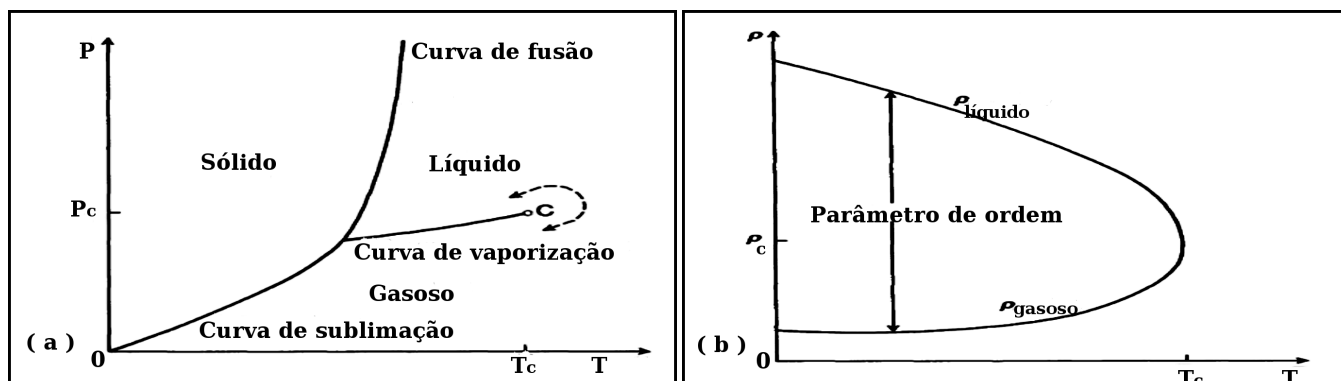


Fig. 1.1: a) Diagrama de fase da água; b) Parâmetro de ordem. Adaptação da Ref.(28)

o gasoso sem passar por uma região de coexistência. O parâmetro de ordem é uma variável definida de acordo com cada sistema físico e deve ser tratada juntamente com outras variáveis termodinâmicas, cujas correlações exibem comportamentos distintos nas fases de ambos os lados da transição [30].

Quanto às transições de fase e o comportamento crítico para sistemas magnéticos [31], estes se dão de modo semelhante ao que descrevemos para os fluidos. Por exemplo, esboçamos na Fig.(1.2 (a)) a magnetização de um bloco de ferro em um campo magnético, H . Diminuindo H a zero, M diminuirá, mas não vai a zero, de forma que o bloco apresentará uma magnetização espontânea, M_0 , conforme o gráfico, com uma descontinuidade, em $H = 0$. Se a temperatura é aumentada levemente, o gráfico de M continuará similar até que T atinja o valor crítico T_c (ponto Curie), no qual a magnetização espontânea desaparece e a função $M(H)$ se tornará contínua, com uma singularidade em $H = 0$, como mostra a Fig.(1.2 (b)). Se T é aumentado ainda mais, M permanece uma função contínua e se torna analítica em $H = 0$, como na Fig.(1.2 (c)).

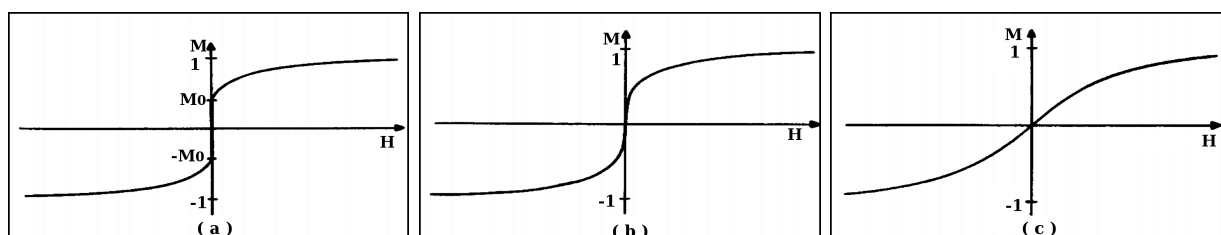


Fig. 1.2: Gráficos da magnetização para a) $T < T_c$ b) $T = T_c$ c) $T > T_c$. Adaptação da Ref.(31)

Essa descrição pode ser convenientemente resumida considerando um plano (T, H) , como mostrado na Fig.(1.3 (a)). Há um corte ao longo do eixo T de 0 a T_c , de magnetização M como função analítica de T e H em todos os pontos no plano da metade direita, exceto aqueles

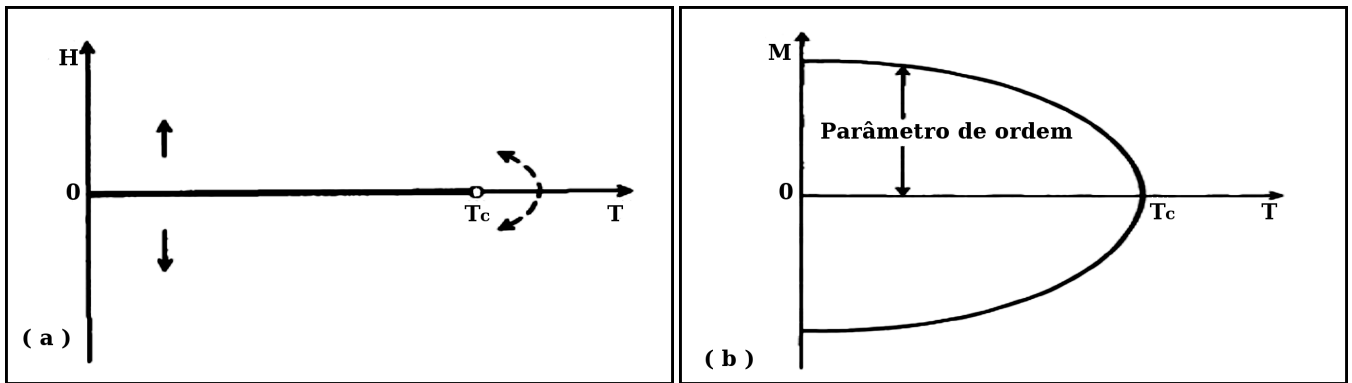


Fig. 1.3: a) Diagrama de fase de um ferromagneto simples; b) Parâmetro de ordem, magnetização. Adaptação da Ref.(28)

no corte, no qual é descontínua. Assim, como no caso da coexistência líquido-gás, há uma linha de transição de primeira ordem que termina no ponto crítico, T_c , como mostra a Fig.(1.3 (a)) [28, 31]. E, no caso da transição ferromagnética descrita, o parâmetro de ordem é a magnetização, já que, abaixo da temperatura crítica, exibe uma magnetização espontânea; e, na temperatura crítica, se anula.

Até aqui, descrevemos transições que são naturalmente governadas por flutuações térmicas, classificadas assim como transições clássicas.

Há, porém, as transições que ocorrem em $T = 0$: são induzidas pela mudança de um parâmetro externo ou constante de acoplamento [29] e são impulsionadas por flutuações quânticas devidas ao princípio da incerteza de Heisenberg [32].

Como exemplo de transição de fase quântica, mostramos os dados experimentais obtidos para o paramagneto $LiHoF_4$ [5, 33]. Na Fig.(1.4 (a)), temos a curva crítica do $LiHoF_4$, separando as fases estáveis ferromagnética e paramagnética. Já na Fig.(1.4 (b)), podemos verificar que a susceptibilidade magnética, derivada da magnetização, cresce continuamente em dois pontos críticos: um mantendo $T = 1,018K$, transição clássica; e outro, em $T = 0,200K$, em um regime quântico.

O entendimento dos fenômenos críticos exige considerações a nível microscópico. No caso do ferromagnetismo, por exemplo, é importante saber como o comportamento de um spin interfere no comportamento de outros spins da rede, ou seja, a correlação spin-spin. Isso pode ser esclarecido considerando que há uma distância mínima para que as propriedades macroscópicas se manifestem, o que define comprimento de correlação (ξ). Para compreender o conceito de comprimento de correlação, façamos o seguinte experimento mental: se, conhecendo as propriedades macroscópicas de um sistema, nós o dividirmos em duas partes iguais, mantendo as variáveis externas, como pressão e temperatura constantes, as propriedades macroscópicas de

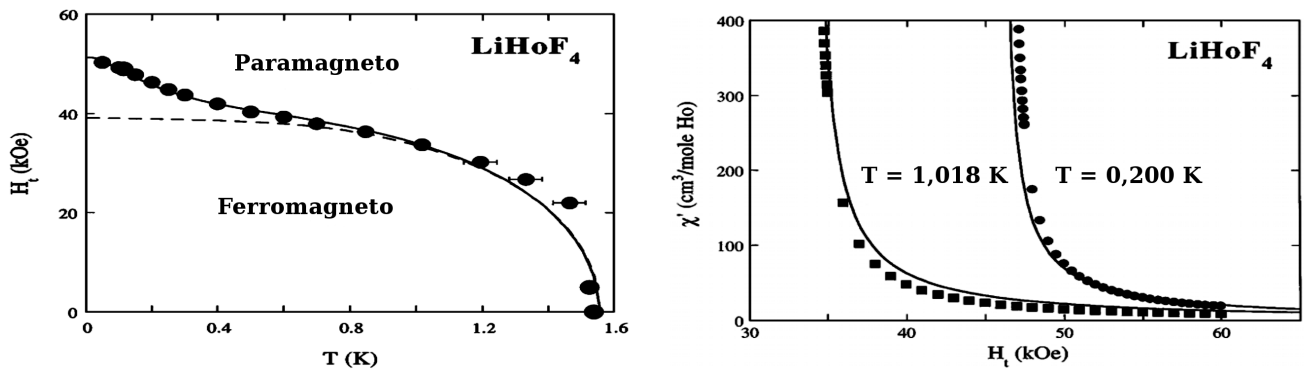


Fig. 1.4: a) Diagrama de fase do ferromagneto LiHoF_4 ; b) Comportamento crítico. Adaptação da Ref.(33)

cada subsistema permanecerão as mesmas que as do inicial; mas, se continuarmos dividindo sucessivamente, chega um momento em que essas propriedades diferem, porque a matéria é composta de átomos e moléculas, cujas propriedades individuais são bastante diferentes daquelas do conjunto de partículas que constituem. A escala de comprimento na qual as propriedades macroscópicas dos subsistemas começam a diferir significativamente daquelas do original fornece uma medida do chamado comprimento de correlação do material; ou seja, comprimento de correlação é a distância na qual as flutuações dos graus microscópicos de liberdade e as posições dos átomos estão significativamente correlacionadas entre si. As flutuações em duas partes do material com afastamento maior do que o comprimento de correlação são efetivamente descorrelacionadas uma da outra. Normalmente, o comprimento de correlação é da ordem de alguns espaçamentos interatômicos [34]. Isso significa dizer que, mesmo considerando uma coleção muito pequena de átomos, podemos obter uma boa ideia do comportamento macroscópico do material, caso tenhamos comportamento singular.

O comprimento de correlação em uma transição de primeira ordem, onde várias grandezas termodinâmicas sofrem descontinuidades ao passar pela linha de transição, é geralmente finito. No entanto, em uma transição contínua o comprimento de correlação diverge e as flutuações estão correlacionadas em todas as escalas de comprimento. Assim, na medida que nos aproximamos do ponto crítico, a correlação espacial das flutuações do parâmetro de ordem se tornam de longo alcance. Desse modo, próximo ao ponto crítico, o comprimento de correlação ξ é a escala de comprimento relevante do sistema e diverge como

$$\xi \propto |t|^{-\nu}, \quad (1.1)$$

onde t , no caso de um fluido, por exemplo, é a temperatura reduzida, $\frac{|T-T_c|}{T_c}$, em torno do

ponto crítico e ν é o expoente crítico do comprimento de correlação. Além da correlação espacial, temos uma correlação de longo alcance no parâmetro de ordem das flutuações no tempo. Tipicamente, a escala de tempo de decaimento das flutuações é a correlação τ_c que, no ponto crítico, diverge como

$$\tau_c \propto |t|^{-\nu z}, \quad (1.2)$$

onde z é o expoente crítico dinâmico.

No caso particular das transições de fase quânticas, podemos imediatamente fazer uma distinção importante entre dois regimes do diagrama de fases, caracterizando o estado fundamental pela energia Δ e uma segunda escala de energia $k_B T$, oriunda das flutuações térmicas. Se tivermos $\Delta \gg k_B T$, teremos flutuações predominantemente quânticas; caso contrário, teremos flutuações predominantemente térmicas.

Conhecendo o limiar dessas flutuações, podemos descrever o comportamento de um sistema físico próximo a um ponto crítico quântico, considerando um parâmetro externo g , como podemos ver na Ref. [5].

1.2 Escala e expoentes críticos

A teoria de escala fenomenológica tem sido extremamente útil na compreensão de fenômenos críticos em diversos sistemas físicos [7]. Vamos descrever exatamente as relações de escala perto do ponto crítico, em que o comprimento de correlação é a única escala de comprimento relevante. Assim, as propriedades físicas devem se manter inalteradas se redimensionarmos o sistema por um fator comum b , como mostra a Fig.(1.5), onde consideramos o Modelo de Ising sobre uma rede quadrada, com interação J entre os primeiros vizinhos, na presença de um campo magnético H . Assim, inicialmente, a Hamiltoniana é dada por

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - H \sum_i S_i \rightarrow S_i \pm 1, \quad (1.3)$$

após a transformação de escala, $b = 2$, será reescrita de forma semelhante em termos das novas variáveis de blocos (S_I)

$$\mathcal{H}' = -J' \sum_{\langle I,J \rangle} S_I S_J - H' \sum_I S_I \rightarrow S_I \pm 1, \quad (1.4)$$

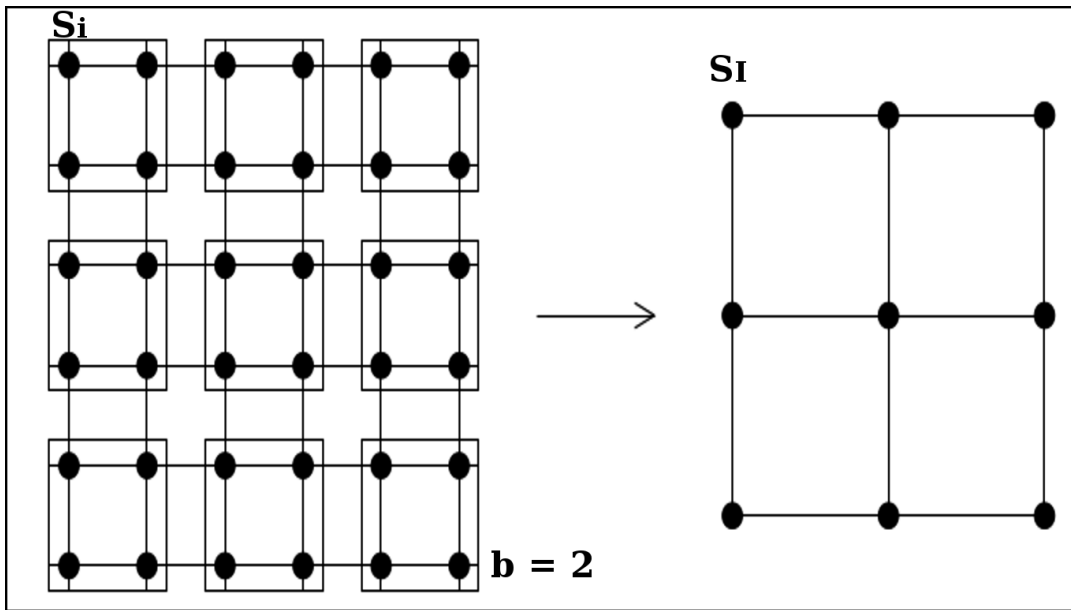


Fig. 1.5: Construção do modelo de Kadanoff em uma rede quadrada com um fator de escala $b = 2$.

onde J' e H' são os novos parâmetros em termos das variáveis de bloco S_I . Definindo

$$\varepsilon \equiv \frac{T - T_C}{T_C}, \quad (1.5)$$

como a temperatura reduzida e considerando a mudança de escala $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$ e $H \rightarrow H'$, o ponto crítico ficará localizado em $\varepsilon = 0$, $H = 0$.

Nas vizinhanças do ponto crítico, consideramos que a energia livre por spin seja dada pela soma de uma parte regular, que é pouco interessante, e de uma parte singular que contém todas as anomalias do problema. A hipótese de escala consiste em supor que a parte singular da energia livre por spin do sistema seja uma função homogênea generalizada das variáveis ε e H . Com isso, podemos relacioná-las por

$$f'_s(\varepsilon', H') = b^d f_s(\varepsilon, H), \quad (1.6)$$

e os comprimentos de correlação, como

$$\xi'(\varepsilon', H') = \frac{\xi}{b}(\varepsilon, H), \quad (1.7)$$

$$\varepsilon' = \lambda_\varepsilon \varepsilon, \quad (1.8)$$

onde

$$\lambda_t = b^{y_t}. \quad (1.9)$$

Para o campo, temos

$$H \sum_{i=1}^N S_i = H \sum_{l=1}^{N/b^d} \sum_{i \in l} S_i = H \Lambda \sum_I S_I, \quad (1.10)$$

o que nos leva a

$$H' = \Lambda H = b^{y_h} H. \quad (1.11)$$

Assim, a transformação da parte singular da energia livre será

$$f'_s(b^{y_t} \boldsymbol{\varepsilon}, b^{y_h} H) = b^d f_s(\boldsymbol{\varepsilon}, H). \quad (1.12)$$

Considerando a função de correlação

$$\Gamma(r, \boldsymbol{\varepsilon}) = \langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle \rightarrow \Gamma(r', \boldsymbol{\varepsilon}') = \langle S_I S_J \rangle - \langle S_I \rangle \langle S_J \rangle, \quad (1.13)$$

com as transformações para f e Γ , podemos obter as relações de escala

$$r' = b^{-1} r, \quad (1.14)$$

$$\Gamma(b^{-1} r, b^{y_t} \boldsymbol{\varepsilon}) = b^{2(d-y_h)} \Gamma(r, \boldsymbol{\varepsilon}). \quad (1.15)$$

Como a magnetização é a negativa da derivada do potencial de Gibbs, G , temos

$$M = - \left(\frac{\partial G}{\partial H} \right)_T, \quad (1.16)$$

então, da Eq.(1.12) temos

$$b^{y_h} M(b^{y_t} \boldsymbol{\varepsilon}, b^{y_h} H) = b^d M(\boldsymbol{\varepsilon}, H). \quad (1.17)$$

Há dois expoentes críticos associados com o comportamento da magnetização perto do ponto crítico: β , quando $H = 0$ e $\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow 0$; $1/\delta$, quando $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$ e $H \rightarrow 0$. Para o caso $H = 0$ e tomando

$$b = (-\varepsilon)^{-1/y_t},$$

$$M(\varepsilon, 0) = (-\varepsilon)^{\frac{d-y_h}{y_t}} M(-\varepsilon, 0). \quad (1.18)$$

Quando $\varepsilon \rightarrow 0^-$, $M \sim (-\varepsilon)^\beta$. Assim,

$$M(\varepsilon, 0) = (-\varepsilon)^\beta = (-\varepsilon)^{(d-y_h/y_t)} \rightarrow \beta = \frac{d-y_h}{y_t}. \quad (1.19)$$

De modo semelhante, com $\varepsilon = 0$ e $H \rightarrow 0$, temos para $1/\delta$

$$M(0, H) = b^{(y_h-d)} M(0, b^{y_h} H) \rightarrow b = H^{-1/y_h}, \quad (1.20)$$

o que nos leva a

$$M(0, H) = H^{\left(\frac{d-y_h}{y_h}\right)} M(0, -H). \quad (1.21)$$

Quando $H \rightarrow 0$, temos da expressão $M \sim H^{1/\delta}$ que $M(0, H) \sim H^{1/\delta}$, de onde obtemos

$$\delta = \frac{y_h}{d-y_h}. \quad (1.22)$$

Das expressões Eq.(1.19) e Eq.(1.22), podemos encontrar

$$y_t = \frac{d}{\beta(\delta+1)} \quad (1.23)$$

$$y_h = \frac{d\delta}{\delta+1}. \quad (1.24)$$

Através de procedimentos semelhantes, podemos determinar os demais expoentes críticos relacionados às respectivas variáveis termodinâmicas.

O conjunto dos expoentes críticos caracterizam completamente a classe de universalidade de uma transição de fase.

1.3 Grupo de renormalização no espaço real

O grupo de renormalização consiste em mudar a escala de um sistema, reduzindo seus graus de liberdade [28]. Assim, cada vez que o sistema é renormalizado, a Hamiltoniana do sistema é modificada [7, 35]. Considerando um sistema que inicialmente seja descrito pela Hamiltoniana \mathcal{H} , perto do ponto crítico, as propriedades físicas devem permanecer inalteradas

se redimensionarmos o sistema por um fator comum b . Após a transformação, devemos ter

$$\mathcal{H}' = R\mathcal{H}, \quad (1.25)$$

onde R é definido como um operador que reduz o número de graus de liberdade do sistema. O fator de escala define a redução de graus de liberdade do sistema d -dimensional, de N para N'

$$b^d = N/N'. \quad (1.26)$$

Levando em consideração que as Hamiltonianas preservam a mesma simetria, $\mathcal{H}(t, h)$ e $\mathcal{H}'(t', h')$, a função de partição deve ser preservada, já que a energia total é conservada. Assim, podemos fazer a relação

$$Z_N(\mathcal{H}) = Z_{N'}(\mathcal{H}'). \quad (1.27)$$

Definindo K como sendo um conjunto de parâmetros da Hamiltoniana, verificamos que

$$K' = R(K) \rightarrow K_n = RK_{n-1}. \quad (1.28)$$

Após várias aplicações da relação de recorrência, atingimos o ponto fixo, K^* , no qual o sistema é invariante sob mudança de escala. Desse modo,

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H}^*, \quad (1.29)$$

$$K^* = R(K^*). \quad (1.30)$$

Realizando a transformação de renormalização, o novo comprimento de correlação, ξ' , é menor que o comprimento de correlação original, ξ , por um fator de b .

$$\xi'(K') = \frac{\xi(K)}{b}. \quad (1.31)$$

O efeito de sucessivas transformações do grupo de renormalização, nesse caso, é o afastamento do sistema do seu ponto crítico, exceto naqueles em que

$$\xi'(K'^*) = \xi(K^*), \quad (1.32)$$

que são os pontos fixos. O ponto fixo instável, não trivial no qual o comprimento de correlação

diverge é chamado ponto crítico.

Assim, o comprimento de correlação é dado por

$$\xi' = \xi \equiv \xi^*. \quad (1.33)$$

Podemos calcular os valores numéricos para a escala quando tivermos uma transformação de renormalização. A escala da energia térmica pode ser determinada levando em conta que o conhecimento de $R(K)$ próximo de K^* fornece informações sobre como $\xi(K)$ se comporta em relação a K perto de K^* . Para isso, expandindo $R(K)$ em torno de K^* , temos

$$R(K) = K^* + \lambda_t(b)(K - K^*) + O(K - K^*)^2 \rightarrow K' - K^* = \lambda_t(b)(K - K^*), \quad (1.34)$$

com

$$\lambda_t(b) = \left(\frac{dR}{dK} \right)_{K=K^*}, \quad (1.35)$$

$\xi(K)$ tem uma tendência de lei de potência perto do ponto crítico

$$\xi'(K') = |K' - K_c|^{-\nu} \rightarrow |K' - K_c|^{-\nu} \sim b^{-1} |K - K_c|^{-\nu}. \quad (1.36)$$

Definindo $K^* = K_c$ como o valor de K , no qual ξ diverge, temos

$$|K' - K_c|^{-\nu} = [\lambda_t(b)]^{-\nu} |K - K_c|^{-\nu} \rightarrow \nu = \frac{\ln(b)}{\ln(\lambda_t(b))}. \quad (1.37)$$

Com isso, podemos calcular o expoente crítico do comprimento de correlação para uma cadeia e descrever seus aspectos gerais na transição de fase.

1.4 Grupo de renormalização no espaço real para o modelo de Ising com campo transversal em uma e duas dimensões

A seguir, discutiremos o modelo de Ising, utilizando as ideias de bloco de renormalização no espaço real, com o propósito de exemplificarmos a eficiência desse método, e, assim, compreendermos sua aplicação para outros modelos.

1.4.1 Grupo de renormalização no espaço real para o modelo de Ising com campo transverso em uma dimensão

O modelo de Ising clássico foi proposto por Wilhelm Lenz, em 1920, para estudar fenômenos magnéticos em materiais. Resolvido analiticamente em uma dimensão em 1925, por Ernst Ising [36], tornou-se o modelo mais conhecido e citado da Mecânica Estatística [35, 37, 38, 39]. Uma versão quântica deste modelo foi proposta por de Gennes [9] para estudar ferroelétricos com ligações de ponte de hidrogênio, o qual, em uma dimensão com campo transverso é um dos mais simples na física da matéria condensada que pode ser resolvido exatamente.

A Hamiltoniana desse modelo quântico, definida em termos dos operadores (Ω_i, M_i) , é escrita como [40]

$$\mathcal{H} = -\sum_i h_i M_i - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{i,j} \Omega_i \Omega_j, \quad (1.38)$$

em que Ω e M representam, respectivamente, as matrizes de Pauli, σ^z e σ^x , h é o campo transverso e J a constante de troca, com interações entre primeiros vizinhos [41].

Esse modelo apresenta transição de fase quântica, além de possuir resultados analíticos em uma dimensão, os quais servem como base para se comparar com os resultados obtidos por novos métodos.

Considerando a Hamiltoniana envolvendo um bloco de $(N+1)$ spins Ω_i com $i = 0, 1, 2, \dots, N$,

$$\mathcal{H}_N = \sum_{i=1}^N (-h_i M_i - J_{0,i} \Omega_0 \Omega_i), \quad (1.39)$$

onde o spin Ω_0 funciona como principal e os demais, Ω_i , como secundários; para cada autovalor do spin principal $S_0 \pm 1$, devemos diagonalizar separadamente cada um dos N termos da Hamiltoniana. Para isso, consideramos um bloco com dois spins, cuja Hamiltoniana é dada por

$$\mathcal{H}_i^{(S_0)} = -h_i M_i - J_{0,i} \Omega_0 \Omega_i = -h_i M_i - J_{0,i} S_0 \Omega_i \quad (1.40)$$

$$\mathcal{H}_i^{(S_0)} = \begin{bmatrix} -J_{0,i} S_0 & -h_i \\ -h_i & J_{0,i} S_0 \end{bmatrix}.$$

Diagonalizando essa matriz, encontramos os autovalores escritos em função de S_0 , dados por

$$\lambda^\pm(S_0) = \pm \sqrt{h_i^2 + J_{0,i}^2 S_0^2} \quad (1.41)$$

$$\lambda^+(S_0 = 1) = \lambda^+(S_0 = -1) = \sqrt{h_i^2 + J_{0,i}^2} \quad (1.42)$$

$$\lambda^-(S_0 = 1) = \lambda^-(S_0 = -1) = -\sqrt{h_i^2 + J_{0,i}^2}. \quad (1.43)$$

Como estamos trabalhando com sistema de dois níveis, os vetores de base são definidos como segue

$$|S_0 = +1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$|S_0 = -1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e os operadores são as matrizes de Pauli, as quais são expressas por

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Com isso, os autovetores normalizados, expressos em função dos vetores de base, são dados por

$$|\lambda_i^-(S_0)\rangle = \frac{|S_i = +1\rangle + c_i(S_0)|S_i = -1\rangle}{\sqrt{1 + c_i^2(S_0)}} \quad (1.44)$$

e

$$|\lambda_i^+(S_0)\rangle = \frac{-c_i(S_0)|S_i = +1\rangle + |S_i = -1\rangle}{\sqrt{1 + c_i^2(S_0)}}, \quad (1.45)$$

onde a constante $c_i(S_0)$ é dada por

$$c_i(S_0) = \frac{h_i}{\sqrt{h_i^2 + J_{0,i}^2 + J_{0,i}S_0}}. \quad (1.46)$$

Como podemos observar, a Hamiltoniana do bloco (1.40) apresenta dois autovetores duplamente degenerados, cuja degenerescência é fundamental para que possamos aplicar as técnicas de renormalização desenvolvidas aqui. Assim,

$$|\lambda_i^-(+1)\rangle = \frac{|S_i = +1\rangle + c_i(+1)|S_i = -1\rangle}{\sqrt{1 + c_i^2(+1)}} \quad (1.47)$$

e

$$|\lambda_i^-(-1)\rangle = \frac{|S_i = +1\rangle + c_i(-1)|S_i = -1\rangle}{\sqrt{1 + c_i^2(-1)}}, \quad (1.48)$$

onde

$$c_i(+1) = \frac{h_i}{\sqrt{h_i^2 + J_{0,i}^2 + J_{0,i}}} \quad (1.49)$$

e

$$c_i(-1) = \frac{h_i}{\sqrt{h_i^2 + J_{0,i}^2 - J_{0,i}}} \quad (1.50)$$

$$= \frac{1}{c_i(+1)}. \quad (1.51)$$

Dessa forma, podemos relacionar as duas constantes multiplicativas de cada autovetor, o que facilita nosso desenvolvimento no momento de projetarmos essa Hamiltoniana no espaço de menor energia, definido pelos autovetores do estado fundamental. Desse modo,

$$c_i(S_0) = \frac{1}{c_i(-S_0)}. \quad (1.52)$$

A energia do estado fundamental do sistema é a soma do menor autovalor $\lambda_i^-(S_0)$ de cada um dos N blocos, a saber

$$E_{EF}^{S_0} = \sum_{i=1}^N \lambda_i^-(S_0) = - \sum_{i=1}^N \sqrt{h_i^2 + J_{0,i}^2}. \quad (1.53)$$

Os dois estados fundamentais correspondentes são dados pelo produto direto dos autovetores de S_0 , pelos respectivos estados fundamentais do bloco,

$$|EF^{S_0}\rangle = |S_0\rangle \otimes (\otimes_{i=1}^N |\lambda_i^-(S_0)\rangle). \quad (1.54)$$

Para um bloco qualquer de dois spins, definimos os dois estados fundamentais como

$$|EF^{+1}\rangle = |+1\rangle \otimes |\lambda_i^-(+1)\rangle \quad (1.55)$$

e

$$|EF^{-1}\rangle = |-1\rangle \otimes |\lambda_i^-(-1)\rangle. \quad (1.56)$$

Podemos, então, definir o projetor utilizando os autoestados de menor energia como vetores de base. Portanto, o nosso projetor é dado por

$$P_N = \sum_{S_0=\pm 1} |EF^{S_0}\rangle\langle EF^{S_0}| \quad (1.57)$$

$$= |EF^{+1}\rangle\langle EF^{+1}| + |EF^{-1}\rangle\langle EF^{-1}| \quad (1.58)$$

$$= | +1\rangle \otimes |\lambda_i^-(+1)\rangle \langle +1| \otimes \langle \lambda_i^-(+1)| + | -1\rangle \otimes |\lambda_i^-(-1)\rangle \langle -1| \otimes \langle \lambda_i^-(-1)| \quad (1.59)$$

$$= | +1\rangle \langle +1| \otimes |\lambda_i^-(+1)\rangle \langle \lambda_i^-(+1)| + | -1\rangle \langle -1| \otimes |\lambda_i^-(-1)\rangle \langle \lambda_i^-(-1)|. \quad (1.60)$$

Como a ideia central da renormalização é substituir cada par de spins por um único spin renormalizado, podemos definir Ω_{R0} dos dois estados fundamentais por

$$\Omega_{R0} = |\Omega_{R0} = +1\rangle \langle \Omega_{R0} = +1| - |\Omega_{R0} = -1\rangle \langle \Omega_{R0} = -1|, \quad (1.61)$$

e

$$M_{R0} = |\Omega_{R0} = +1\rangle \langle \Omega_{R0} = -1| + |\Omega_{R0} = -1\rangle \langle \Omega_{R0} = +1|. \quad (1.62)$$

Assim, lembrando que os operadores são as matrizes de Pauli, podemos projetar os demais spins no bloco. Para isso, vamos observar como cada operador atua nos vetores de base. Com um pouco de algebrismo, podemos verificar que essas operações resultam em

$$\begin{cases} M|+1\rangle = |-1\rangle; & M|-1\rangle = |+1\rangle \\ \Omega|+1\rangle = +1|+1\rangle; & \Omega|-1\rangle = -1|-1\rangle. \end{cases}$$

Por simplicidade e sem perda de generalidade, vamos desenvolver aqui regras de renormalização que serão aplicadas ao modelo de Ising em uma e duas dimensões.

Conhecendo como o operador Ω atua em cada vetor de base e lembrando que rotulamos com índice 0 o primeiro sítio de cada par, Ω_0 atua, obviamente, no primeiro sítio. Assim, temos

$$P_N \Omega_0 P_N = \Omega_{R0}. \quad (1.63)$$

De modo análogo, podemos projetar os demais operadores dos sítios vizinhos. Para isso, analisaremos como o operador atua em cada estado fundamental. Rotulamos com i o sítio vizinho de cada par de spins, logo Ω_i atua no segundo sítio do par. Com isso, verificamos que

$$\Omega_i(|EF^{S_0}\rangle) = \Omega_i(|S_0\rangle \otimes |\lambda_i^-(S_0)\rangle) \quad (1.64)$$

$$= |S_0\rangle \otimes (\Omega_i|\lambda_i^-(S_0)\rangle). \quad (1.65)$$

e

$$\Omega_i |\lambda_i^-(S_0)\rangle = \frac{|S_i = +1\rangle - c_i(S_0)|S_i = -1\rangle}{\sqrt{1 + c_i^2(S_0)}}. \quad (1.66)$$

Ao projetarmos Ω_i , obtemos

$$\begin{aligned} P_N \Omega_i P_N &= \frac{1 - c_i(+1)^2}{1 + c_i(+1)^2} (|+1\rangle \langle +1| \otimes |\lambda_i^-(+1)\rangle \langle \lambda_i^-(+1)| - |-1\rangle \langle -1| \otimes |\lambda_i^-(-1)\rangle \langle \lambda_i^-(-1)|) \\ &= \frac{1 - c_i(+1)^2}{1 + c_i(+1)^2} \Omega_{R0}. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Substituindo Eq.(1.49) em Eq.(1.67), podemos expressá-lo em função do campo transversal e do fator de acoplamento, como

$$P_N \Omega_i P_N = \frac{J_{0,i}}{\sqrt{h_i^2 + J_{0,i}^2}} \Omega_{R0}. \quad (1.68)$$

Seguindo o desenvolvido acima para os operadores Ω , podemos projetar o operador M_0 no subespaço de menor energia. Assim,

$$\begin{aligned} P_N M_0 P_N &= \prod_{i=1}^N | +1\rangle \langle -1| \otimes |\lambda_i^-(+1)\rangle \langle \lambda_i^-(+1)| \langle \lambda_i^-(+1)| \lambda_i^-(-1)\rangle \langle \lambda_i^-(-1)| \\ &\quad + \prod_{i=1}^N | -1\rangle \langle +1| \otimes |\lambda_i^-(-1)\rangle \langle \lambda_i^-(-1)| \langle \lambda_i^-(-1)| \lambda_i^-(+1)\rangle \langle \lambda_i^-(+1)|. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Usando (1.47), (1.48) e (1.51), calculamos os produtos internos, que aparecem na expressão Eq.(1.69), portanto

$$\langle \lambda_i^-(+1)| \lambda_i^-(-1)\rangle = \frac{1 + c_i(+1)c_i(-1)}{\sqrt{(1 + c_i^2(+1))(1 + c_i^2(-1))}} = \frac{2c_i(+1)}{(1 + c_i^2(+1))} \quad (1.70)$$

e

$$\langle \lambda_i^-(-1)| \lambda_i^-(+1)\rangle = \frac{2c_i(+1)}{(1 + c_i^2(+1))}. \quad (1.71)$$

Substituindo Eq.(1.70) e Eq.(1.71) em Eq.(1.69), podemos expressar essa projeção também em

termos do campo transverso e do fator de acoplamento, como pode ser visto abaixo,

$$P_N M_0 P_N = \prod_{i=1}^N \left(\frac{2c_i(+1)}{1+c_i^2(+1)} \right) M_{R0}. \quad (1.72)$$

Substituindo (1.49) em (1.72), temos

$$P_N M_0 P_N = \prod_{i=1}^N \left(\frac{-h_i^3}{-h_i^2 \sqrt{h_i^2 + J_{0,i}^2} + h_i^2 J_{0,i} - h_i^2 J_{0,i}} \right) M_{R0} = \prod_{i=1}^N \left(\frac{h_i}{\sqrt{h_i^2 + J_{0,i}^2}} \right) M_{R0}. \quad (1.73)$$

A Hamiltoniana da cadeia quântica de Ising é dada por

$$\mathcal{H} = - \sum_i h(i) M_i - \sum_i J_{\bar{x}}(i) \Omega_i \Omega_{i+1}. \quad (1.74)$$

Aqui, tratamos uma cadeia linear com interação entre primeiros vizinhos e condições de contorno periódicas.

Levando em conta os termos de interação intrabloco e interbloco, podemos escrever a Eq.(1.74) como

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_i = & \sum_i (-h(2i-1)M_{2i-1} - J_{\bar{x}}(2i-1)\Omega_{2i-1}\Omega_{2i} \\ & - h(2i)M_{2i} - J_{\bar{x}}(2i-2)\Omega_{2i-2}\Omega_{2i-1}). \end{aligned} \quad (1.75)$$

A Hamiltoniana intrabloco pode ser dada por [42]

$$\mathcal{H}_{intra}^{(1)} = \sum_i (-h(2i-1)M_{2i-1} - J_{\bar{x}}(2i-1)\Omega_{2i-1}\Omega_{2i}) = \sum_i \mathcal{H}_i^{(1)},$$

com

$$\mathcal{H}_i^{(1)} = -h(2i-1)M_{2i-1} - J_{\bar{x}}(2i-1)\Omega_{2i-1}\Omega_{2i}. \quad (1.76)$$

Aplicando as regras de projeção, deduzidas acima, a cada par de sítios da Hamiltoniana intrabloco, podemos verificar que

$$\begin{aligned} P_{intra}^{(1)} \Omega_{2i} P_{intra}^{(1)} &= \Omega_{2i}, \\ P_{intra}^{(1)} \Omega_{2i-1} P_{intra}^{(1)} &= \frac{J(2i-1)}{\sqrt{h^2(2i-1) + J^2(2i-1)}} \Omega_{(2i)}, \end{aligned}$$

e

$$P_{intra}^{(1)} M_{2i} P_{intra}^{(1)} = \frac{h(2i-1)}{\sqrt{h^2(2i-1) + J^2(2i-1)}} M_{R(2i)}. \quad (1.77)$$

Como já conhecemos a Hamiltoniana total e a intrabloco em termos dos vetores de base, vamos conhecer os termos restantes que envolvem interações interblocos. Para isso, subtraímos a Hamiltoniana intrabloco da total, como segue

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'_i &= \mathcal{H}_i - \mathcal{H}_{intra} = -h(2i)M_{2i} - J_{\bar{x}}(2i-2)\Omega(2i-2)\Omega(2i-1). \quad (1.78) \\ P_{intra}^{(1)} \mathcal{H}'_i P_{intra}^{(1)} &= -h(2i)P_{intra}^{(1)} M_{2i} P_{intra}^{(1)} - J_{\bar{x}}(2i-2)P_{intra}^{(1)} \Omega(2i-2)\Omega(2i-1)P_{intra}^{(1)} \\ &= -h(2i) \frac{h(2i-1)}{\sqrt{h^2(2i-1) + J^2(2i-1)}} M_{R(2i)} \\ &\quad - J_{\bar{x}}(2i-2) \frac{J(2i-1)}{\sqrt{h^2(2i-1) + J^2(2i-1)}} \Omega_{R(2i-2)} \Omega_{R(2i)}. \quad (1.79) \end{aligned}$$

Como podemos observar, a Hamiltoniana preserva a mesma simetria da Eq.(1.74), mas com termos de renormalização no campo e no fator de acoplamento, com os quais podemos definir

$$h^R(2i) = h(2i) \frac{h(2i-1)}{\sqrt{h^2(2i-1) + J^2(2i-1)}} \quad (1.80)$$

e

$$J^R(2i-1) = J_{\bar{x}}(2i-2) \frac{J(2i-1)}{\sqrt{h^2(2i-1) + J^2(2i-1)}}, \quad (1.81)$$

como sendo o campo e o termo de acoplamento renormalizados, respectivamente. Assim, podemos pensar que, cada vez que um par de spins é renormalizado, surgem termos de correção nos termos de acoplamento e campo magnético. Isto nos permite, comparando as Hamiltonianas antes e depois da renormalização, encontrar a equação de renormalização, com a qual podemos calcular os pontos fixos e, conseqüentemente, o expoente crítico do comprimento de correlação.

Considerando o caso homogêneo e definindo $k' = \frac{J^R}{h^R}$ e $k = \frac{J}{h}$, podemos escrever

$$h^R = h \frac{h}{\sqrt{h^2 + J^2}}, \quad (1.82)$$

$$J^R = J \frac{J}{\sqrt{h^2 + J^2}}, \quad (1.83)$$

$$\frac{J^R}{h^R} = \frac{J \frac{J}{\sqrt{h^2 + J^2}}}{h \frac{h}{\sqrt{h^2 + J^2}}} = \frac{J^2}{h^2}, \quad (1.84)$$

e

$$k' = k^2 \equiv F(k). \quad (1.85)$$

De acordo com a Eq.(1.85), temos dois pontos fixos triviais, $k = 0$ e $k = \infty$, e um ponto fixo instável, não trivial, $k^* = 1$, o qual é associado ao ponto crítico. Linearizando a equação em torno do ponto crítico, temos

$$\lambda = \left(\frac{dk'}{dk} \right)_{k=k^*} = \left(\frac{dF(k)}{dk} \right)_{k=k^*} = 2. \quad (1.86)$$

$$(1.87)$$

O expoente crítico do comprimento de correlação é dado por [42]

$$\nu = \frac{\ln(\lambda)}{\ln(n)}, \quad (1.88)$$

em que n é o número de sítios por bloco, nesse caso específico, $n = 2$. Substituindo na Eq.(1.88), temos

$$\nu = \frac{\ln(2)}{\ln(2)} = 1, \quad (1.89)$$

o qual concorda com o valor obtido na solução exata do modelo [17].

Uma abordagem tradicional inclui todos os termos do bloco na Hamiltoniana intrabloco, mas isso fornece valores pouco precisos para o expoente crítico do comprimento de correlação. O melhor resultado encontrado por Jullien *et al* foi $\nu = 1,16$ para um bloco com sete sítios [43]. No entanto, removendo-se o termo de campo de um dos sítios da Hamiltoniana intrabloco, obtemos uma degenerescência no estado fundamental além da preservação da simetria da Hamiltoniana

antes e depois da renormalização. Essas são as condições que melhoram significativamente a estimativa para o valor do expoente crítico do comprimento de correlação, $\nu = 1$.

A seguir, discutiremos o modelo de Ising quântico em duas dimensões, com o objetivo de verificarmos a eficiência da técnica de bloco de renormalização em casos de dimensões mais altas [40, 44].

1.4.2 Grupo de renormalização no espaço real para o modelo de Ising com campo transverso em duas dimensões

A Hamiltoniana do modelo de Ising quântico em duas dimensões para um sistema, como representado na Fig.(1.6),

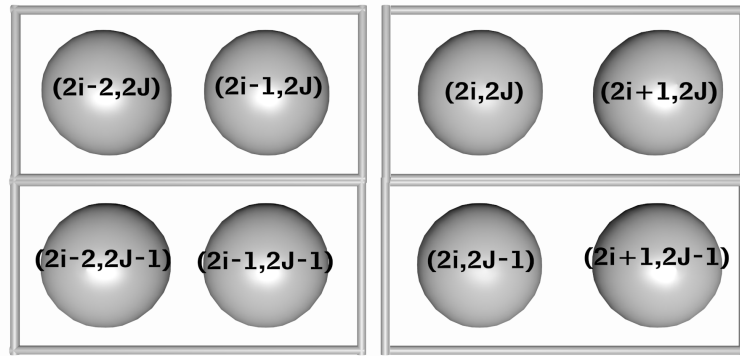


Fig. 1.6: Rede de sítios de Ising em duas dimensões

é dada por

$$\mathcal{H} = - \sum_{(i,j)} h(i,j) M_{(i,j)} - \sum_{(i,j)} J_{\bar{x}}(i,j) \Omega(i,j) \Omega(i+1,j) - \sum_{(i,j)} J_{\bar{y}}(i,j) \Omega(i,j) \Omega(i,j+1). \quad (1.90)$$

Seguindo o mesmo método que desenvolvemos para o caso unidimensional, vamos construir regras de renormalização para o caso bidimensional. Levando em conta uma rede quadrada, podemos tratar as duas dimensões, x e y uma por vez. Assim, é conveniente escrever a Eq.(1.90) para uma rede quadrada, o que nos possibilita substituir cada bloco de quatro spins por um único spin renormalizado. Para isso, podemos expressar a Hamiltoniana em função de termos

que envolvam interação nas duas dimensões, como segue

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= -h(2i, 2j)M_{(2i, 2j)} - h(2i-1, 2j-1)M_{(2i-1, 2j-1)} - h(2i-1, 2j)M_{(2i-1, 2j)} \\
&- h(2i, 2j-1)M_{(2i, 2j-1)} - J_{\bar{x}}(2i-1, 2j)\Omega_{(2i-1, 2j)}\Omega_{(2i, 2j)} - J_{\bar{y}}(2i-1, 2j)\Omega_{(2i-1, 2j)}\Omega_{(2i-1, 2j+1)} \\
&- J_{\bar{x}}(2i-2, 2j)\Omega_{(2i-1, 2j)}\Omega_{(2i-2, 2j)} - J_{\bar{y}}(2i-1, 2j-1)\Omega_{(2i-1, 2j)}\Omega_{(2i-1, 2j-1)} \\
&- J_{\bar{x}}(2i, 2j-1)\Omega_{(2i, 2j-1)}\Omega_{(2i+1, 2j-1)} - J_{\bar{y}}(2i, 2j-1)\Omega_{(2i, 2j-1)}\Omega_{(2i, 2j)} \\
&- J_{\bar{x}}(2i-1, 2j-1)\Omega_{(2i, 2j-1)}\Omega_{(2i-1, 2j-1)} - J_{\bar{y}}(2i, 2j-2)\Omega_{(2i, 2j-1)}\Omega_{(2i, 2j-2)}. \tag{1.91}
\end{aligned}$$

Com isso, podemos perceber que é conveniente trabalharmos com renormalizações em separado, para cada dimensão.

Consideramos a Hamiltoniana intrablocos em duas dimensões como sendo

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{intra}^{(1)} &= \sum_{(i,j)} (-h(2i-1, 2j)M_{2i-1, 2j} - h(2i, 2j-1)M_{2i, 2j-1} - J_{\bar{x}}(2i-1, 2j)\Omega_{(2i-1, 2j)}\Omega_{(2i, 2j)} \\
&- J_{\bar{y}}(2i, 2j-1)\Omega_{(2i, 2j-1)}\Omega_{(2i, 2j)}) = \sum_{(i,j)} \mathcal{H}_{i,j}^{(1)},
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{i,j}^{(1)} &= -h(2i-1, 2j)M_{(2i-1, 2j)} - h(2i, 2j-1)M_{(2i, 2j-1)} - J_{\bar{x}}(2i-1, 2j)\Omega_{(2i-1, 2j)}\Omega_{(2i, 2j)} \\
&- J_{\bar{y}}(2i, 2j-1)\Omega_{(2i, 2j-1)}\Omega_{(2i, 2j)}. \tag{1.92}
\end{aligned}$$

Como a Hamiltoniana da Eq.(1.92) preserva a mesma estrutura que a Hamiltoniana na Eq.(1.38) aplicada nas duas direções, x e y , podemos renormalizá-la substituindo cada grupo de três spins, no caso, $\Omega_{2i-1, 2j}$, $\Omega_{2i, 2j-1}$ e $\Omega_{2i, 2j}$, por um único spin renormalizado $\Omega_{2i, 2j}^R$, de modo semelhante ao desenvolvido no caso unidimensional. Aplicando as regras de renormalização deduzidas nas equações Eq.(1.63), Eq.(1.68) e Eq.(1.73) para a rede quadrada, podemos projetar os operadores da Hamiltoniana no subespaço de menor energia, como vemos a seguir:

$$\begin{aligned}
P_{intra}^{(1)} \Omega_{(2i,2j)} P_{intra}^{(1)} &= \Omega_{(2i,2j)}^R \\
P_{intra}^{(1)} \Omega_{(2i-1,2j)} P_{intra}^{(1)} &= \frac{J_{\bar{x}}(2i-1, 2j)}{\sqrt{h^2(2i-1, 2j) + J_{\bar{x}}^2(2i-1, 2j)}} \Omega_{(2i,2j)}^R \\
P_{intra}^{(1)} \Omega_{(2i,2j-1)} P_{intra}^{(1)} &= \frac{J_{\bar{y}}(2i, 2j-1)}{\sqrt{h^2(2i, 2j-1) + J_{\bar{y}}^2(2i, 2j-1)}} \Omega_{(2i,2j)}^R \\
P_{intra}^{(1)} M_{(2i,2j)} P_{intra}^{(1)} &= \frac{h(2i-1, 2j)}{\sqrt{h^2(2i-1, 2j) + J_{\bar{x}}^2(2i-1, 2j)}} \\
&\quad \times \frac{h(2i, 2j-1)}{\sqrt{h^2(2i, 2j-1) + J_{\bar{y}}^2(2i, 2j-1)}} M_{R(2i,2j)}. \tag{1.93}
\end{aligned}$$

A diferença das Hamiltonianas, em função dos parâmetros renormalizados, pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^R &= P_{intra}^{(1)} \left[\sum_{(i,j)} (\mathcal{H}_{i,j} - \mathcal{H}_{i,j}^{(1)}) \right] P_{intra}^{(1)} = \sum_{(i,j)} \mathcal{H}_{i,j}^R \\
\mathcal{H}_{i,j}^R &= -h(2i-1, 2j-1) M_{(2i-1,2j-1)} - h^R(2i, 2j) M_{R(2i,2j)} \\
&\quad - J_{2\bar{x}}^R(2i-2, 2j) \Omega_{R(2i-2,2j)} \Omega_{R(2i,2j)} - J_{2\bar{y}}^R(2i, 2j-2) \Omega_{R(2i,2j-2)} \Omega_{R(2i,2j)} \\
&\quad - J_{\bar{x}-\bar{y}}^R(2i, 2j) \Omega_{R(2i,2j)} \Omega_{R(2i+1,2j-1)} - J_{-\bar{x}+\bar{y}}^R(2i, 2j) \Omega_{R(2i,2j)} \Omega_{R(2i-1,2j+1)} \\
&\quad - J_{\bar{x}+\bar{y}}^R(2i-1, 2j-1) \Omega_{R(2i-1,2j-1)} \Omega_{R(2i,2j)}. \tag{1.94}
\end{aligned}$$

De posse disso, podemos observar que os novos termos renormalizados aparecem em função das constantes aditivas, que surgem da renormalização. Assim, podemos listar esses novos parâmetros, como

$$h^R(2i, 2j) = h(2i, 2j) \frac{h(2i-1, 2j)}{\sqrt{h^2(2i-1, 2j) + J_{\bar{x}}^2(2i-1, 2j)}} \frac{h(2i, 2j-1)}{\sqrt{h^2(2i, 2j-1) + J_{\bar{y}}^2(2i, 2j-1)}}, \tag{1.95}$$

que é o campo renormalizado.

O fator de acoplamento renormalizado na direção horizontal:

$$J_{2\bar{x}}^R(2i-2, 2j) = J_{\bar{x}}(2i-2, 2j) \frac{J_{\bar{x}}(2i-1, 2j)}{\sqrt{h^2(2i-1, 2j) + J_{\bar{x}}^2(2i-1, 2j)}}. \tag{1.96}$$

O fator de acoplamento renormalizado ao longo da vertical:

$$J_{2\vec{y}(2i,2j-2)}^R = J_{\vec{y}}(2i,2j-2) \frac{J_{\vec{y}}(2i,2j-1)}{\sqrt{h^2(2i,2j-1) + J^2\vec{y}(2i,2j-1)}}. \quad (1.97)$$

O fator de acoplamento renormalizado ao longo das diagonais $(\vec{x}-\vec{y})$ e $(-\vec{x}+\vec{y})$:

$$\begin{aligned} J_{\vec{x}-\vec{y}(2i,2j)}^R &= J_{\vec{x}}(2i,2j-1) \frac{J_{\vec{y}}(2i,2j-1)}{\sqrt{h^2(2i,2j-1) + J^2\vec{y}(2i,2j-1)}}, \\ J_{-\vec{x}+\vec{y}(2i,2j)}^R &= J_{\vec{y}}(2i-1,2j) \frac{J_{\vec{x}}(2i-1,2j)}{\sqrt{h^2(2i-1,2j) + J^2\vec{y}(2i-1,2j)}}. \end{aligned} \quad (1.98)$$

O acoplamento ao longo da direção diagonal $(\vec{x}+\vec{y})$, com cada par de blocos:

$$\begin{aligned} J_{\vec{x}+\vec{y}(2i-1,2j-1)}^R &= J_{\vec{x}}(2i-1,2j-1) \frac{J_{\vec{y}}(2i,2j-1)}{\sqrt{h^2(2i,2j-1) + J^2\vec{y}(2i,2j-1)}} \\ &+ J_{\vec{y}}(2i-1,2j-1) \frac{J_{\vec{x}}(2i-1,2j)}{\sqrt{h^2(2i-1,2j) + J^2\vec{x}(2i-1,2j)}}. \end{aligned} \quad (1.99)$$

Com essas expressões, podemos verificar como a Hamiltoniana remanescente preserva a simetria após a renormalização, a menos das constantes aditivas. Faremos, a seguir, com a parte intrabloco um procedimento semelhante ao desenvolvido anteriormente.

Seguindo a ideia de Fernandez-Pacheco [42], escolhemos a Hamiltoniana intrabloco para o caso bidimensional, levando em consideração o que vem expresso na Eq.(1.94). Assim, essa expressão é dada por

$$\mathcal{H}_{(i,j)}^{(2)} \equiv -h(2i-1,2j-1)M_{(2i-1,2j-1)} - J_{\vec{x}+\vec{y}}^R(2i-1,2j-1)\Omega_{(2i-1,2j-1)}\Omega_{R(2i,2j)}. \quad (1.100)$$

Observamos que temos aqui a mesma estrutura que a mostrada na Eq.(1.40), o que nos permite renormalizá-la substituindo cada bloco por um único spin renormalizado. Aplicando as regras de renormalização deduzidas nas expressões Eq.(1.63), Eq.(1.68) e Eq.(1.73) aos operadores que aparecem na Eq.(1.100), encontramos

$$P_{intra}^{(2)}\Omega_{R(2i,2j)}P_{intra}^{(2)} = \Omega_{RR(2i,2j)}, \quad (1.101)$$

$$P_{intra}^{(2)}\Omega_{(2i-1,2j-1)}P_{intra}^{(2)} = \frac{J_{\vec{x}+\vec{y}}^R(2i-1,2j-1)}{\sqrt{h^2(2i-1,2j-1) + J_{\vec{x}+\vec{y}}^2(2i-1,2j-1)}}\Omega_{RR(2i,2j)}, \quad (1.102)$$

e

$$P_{intra}^{(2)} M_{(2i,2j)} P_{intra}^{(2)} = \frac{h(2i-1, 2j-1)}{\sqrt{h^2(2i-1, 2j-1) + J_{\bar{x}+\bar{y}}^2(2i-1, 2j-1)}} M_{RR(2i,2j)}. \quad (1.103)$$

Seguindo o mesmo desenvolvimento que fizemos para o caso unidimensional, projetamos a Hamiltoniana diferença

$$\mathcal{H}^{RR} = P_{intra}^{(2)} \left[\sum_{(i,j)} (\mathcal{H}_{(i,j)}^R - \mathcal{H}_{(i,j)}^{(2)}) \right] P_{intra}^{(2)} = \sum_{(i,j)} \mathcal{H}_{(i,j)}^{(RR)}, \quad (1.104)$$

de modo que a Hamiltoniana resultante é dada em função dos operadores renormalizados,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{(i,j)}^{(RR)} = & -h^{(RR)}(2i, 2j) M_{RR(2i,2j)} - J_{2\bar{x}}^R(2i-2, 2j) \Omega_{RR(2i-2,2j)} \Omega_{RR(2i,2j)} \\ & - J_{2\bar{y}}^R(2i, 2j-2) \Omega_{RR(2i,2j-2)} \Omega_{RR(2i,2j)}. \end{aligned} \quad (1.105)$$

Esses operadores renormalizados são obtidos como nas expressões Eq.(1.101), Eq.(1.102) e Eq.(1.103).

Desse modo, definimos os parâmetros renormalizados como descrito abaixo.

O campo transversal renormalizado,

$$h^{(RR)}(2i, 2j) = h^R(2i, 2j) \frac{h(2i-1, 2j-1)}{\sqrt{h^2(2i-1, 2j-1) + (J_{\bar{x}+\bar{y}}^R(2i-1, 2j-1))^2}}; \quad (1.106)$$

$$(1.107)$$

O fator de acoplamento renormalizado ao longo da direção horizontal na distância 2,

$$J_{2\bar{x}}^{RR}(2i-2, 2j) = J_{2\bar{x}}^R(2i-2, 2j) + \frac{[J_{\bar{x}-\bar{y}}^R(2i-2, 2j)] \times [J_{\bar{x}+\bar{y}}^R(2i-1, 2j-1)]}{\sqrt{h^2(2i-1, 2j-1) + (J_{\bar{x}+\bar{y}}^R(2i-1, 2j-1))^2}}; \quad (1.108)$$

O acoplamento renormalizado ao longo da direção vertical é

$$J_{2\bar{y}}^{RR}(2i, 2j-2) = J_{2\bar{y}}^R(2i, 2j-2) + \frac{[J_{-\bar{x}+\bar{y}}^R(2i, 2j-2)] \times [J_{\bar{x}+\bar{y}}^R(2i-1, 2j-1)]}{\sqrt{h^2(2i-1, 2j-1) + (J_{\bar{x}+\bar{y}}^R(2i-1, 2j-1))^2}}. \quad (1.109)$$

Fica claro que as regras de renormalização que devemos usar para uma rede quadrada precisa contemplar as direções das ligações entre cada par de sítios e as interações entre blocos

vizinhos. Fazendo isso em cada direção da rede e levando em conta as posições dos sítios, podemos determinar a equação de renormalização, o que nos permite calcular o expoente crítico do comprimento de correlação [40].

Usando as regras de renormalização deduzidas nas equações Eq.(1.107), Eq.(1.108) e Eq.(1.109) e adotando que o campo magnético transversal e o fator acoplamento são constantes em toda a rede, obtemos

$$h^{RR} = h \frac{h^2}{\sqrt{h^2 + J^2}} \frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{4J^4}{h^2 + J^2}}}, \quad (1.110)$$

e

$$J^{RR} = \frac{J^2}{\sqrt{h^2 + J^2}} + \frac{2J^4}{\sqrt{(h^2 + J^2)(h^4 + h^2J^2 + 4J^2)}}. \quad (1.111)$$

Definindo $k' = \frac{J^{RR}}{h^{RR}}$ e $k = \frac{J}{h}$, obtemos a equação

$$k' = k^2(\sqrt{1 + k^2 + 4k^2} + 2k^2). \quad (1.112)$$

Essa equação nos fornece o ponto crítico $k_c \simeq 0,538752$. Assim, obtemos o expoente crítico do comprimento de correlação

$$2^{\frac{1}{\nu}} = \left. \frac{dk'}{dk} \right|_{k=k_c} \quad (1.113)$$

$$\nu \simeq 0,624758. \quad (1.114)$$

O valor deste expoente é próximo da estimativa numérica para o modelo de Ising clássico 3D, 0,63 [45], o que mostra a eficiência desta implementação.

Tendo em vista que os resultados da renormalização no espaço real concordam com boa precisão para o modelo de Ising com campo transversal, espera-se que esse método também funcione em outros modelos, como o modelo de Potts de q estados. No próximo capítulo, faremos uma análise de escala para o modelo de Potts quântico nos casos $q = 3$, $q = 4$ e $q = 5$, a fim de obtermos uma relação de escala eficiente e calcularmos, assim, o expoente crítico do comprimento de correlação. Mais adiante, aplicaremos o método de bloco de renormalização para obtermos a confirmação do expoente crítico do comprimento de correlação.

Capítulo 2

Escala para o modelo de Potts quântico ($q = 3, 4$ e 5) em uma dimensão

Apresentamos, neste capítulo, um estudo do modelo de Potts quântico em uma dimensão, considerando relações de escala fenomenológicas obtidas a partir do *gap* de energia entre o estado fundamental e o primeiro estado excitado. Resolvemos o modelo de Potts exatamente para cadeias finitas com $q = 3$, $q = 4$ e $q = 5$. Aplicando a transformação de escala via *gap* de energia, verificamos a consistência da lei de escala nos casos $q = 3$, $q = 4$ e $q = 5$, para os quais encontramos o valor do expoente crítico do comprimento de correlação, ν .

2.1 O modelo e relações de escala fenomenológicas

O modelo de Potts foi proposto como uma generalização do modelo de Ising para sistemas com mais de dois estados. Historicamente, uma versão de quatro estados deste modelo foi inicialmente estudada por Ashkin e Teller [46]. Depois, um modelo geral de q estados foi proposto por Domb [26] ao seu aluno de doutorado, Potts [25, 47], como um tópico de seu trabalho de doutorado.

Inicialmente, o modelo foi pouco atrativo, mas atualmente tem sido bastante estudado por sua relação com um grande número de problemas em estatística de redes, e seu comportamento crítico ter se mostrado mais rico e mais geral que o do modelo de Ising [25]. Embora tenha sido inicialmente um modelo proposto para estudos dos fenômenos críticos em Física Estatística, ele também se destacou devido à sua grande variedade de aplicações, entre elas, o estudo do crescimento de grãos metálicos e espumas de sabão [48].

A ideia original foi considerar o modelo de Ising como um sistema de spins paralelos e antiparalelos interagindo entre si. Assim, uma generalização natural seria considerar este mesmo sistema confinado em um plano, com cada spin apontando para dadas direções q , igualmente espaçadas, definidas pelos ângulos θ , como representado na Fig.(2.1)

$$\Theta_n = \frac{2\pi n}{q} \rightarrow n = 0, 1, \dots, q-1 \quad (2.1)$$

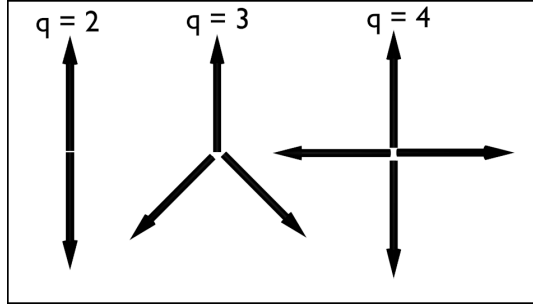


Fig. 2.1: Representação dos spins de Potts.

A Hamiltoniana para o modelo de Potts quântico sobre uma cadeia unidimensional com interação entre primeiros vizinhos é dada por [11]

$$\mathcal{H} = -\frac{\lambda}{q} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{q-1} \Omega_i^k \Omega_{i+1}^{q-k} - h \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{q-1} M_i^k, \quad (2.2)$$

onde

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \omega & & & \\ & & \omega^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \omega^{q-1} \end{bmatrix},$$

com $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{q})$ e

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & & & \\ 1 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix},$$

onde h é um campo transverso aplicado em uma das q direções possíveis [41]. O índice i rotula cada sítio e usamos sempre condições de contorno periódicas.

Para uma melhor compreensão, escrevemos a Hamiltoniana, dada na Eq.(2.2), para três sítios e $q = 3$, cuja representação possui dimensão 27×27 . Podemos expressá-la como

$$\mathcal{H} = -(\Omega_1\Omega_2^2 + \Omega_1^2\Omega_2 + \Omega_2\Omega_3^2 + \Omega_2^2\Omega_3 + \Omega_3\Omega_1^2 + \Omega_3^2\Omega_1) - g(M_1 + M_2 + M_3 + M_1^2 + M_2^2 + M_3^2). \quad (2.3)$$

Definindo $J = \frac{\lambda}{q}$ e $g = \frac{h}{J}$, em unidades de J , os autovalores da Eq.(2.3) são mostrados na Fig.(2.2) onde mostramos em destaque (no quadradado) os dois autovalores mais baixos, o estado fundamental e o primeiro estado excitado.

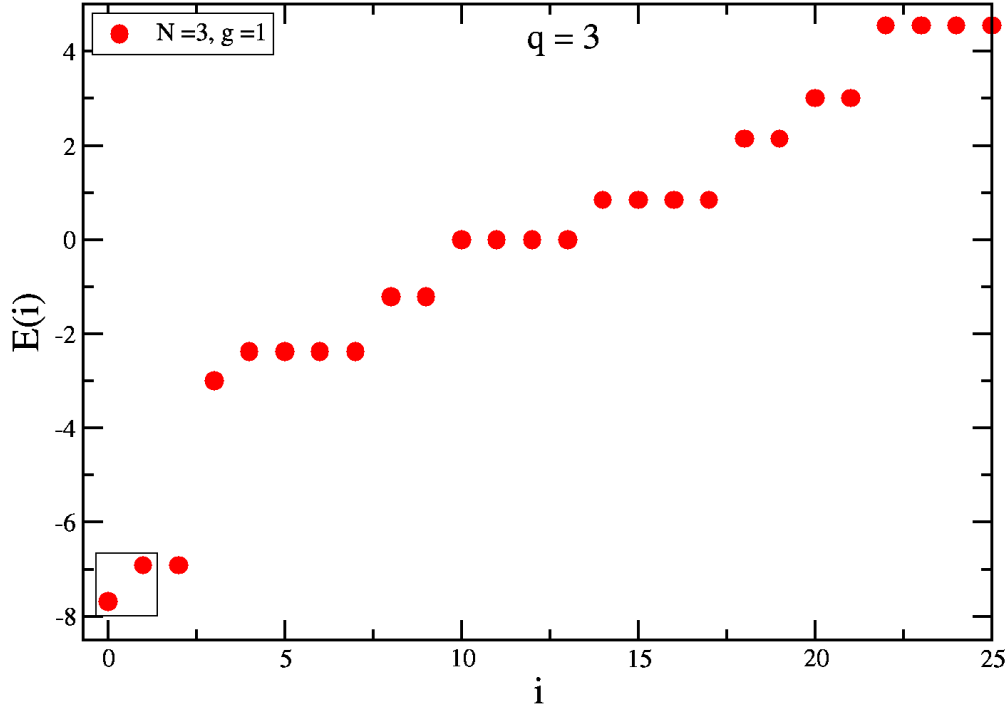


Fig. 2.2: Autovalores de energia para $q = 3$. Destacamos, no canto inferior esquerdo, os dois valores mais baixos de energia para o sistema.

Com isso, determinaremos aqui as relações de escala fenomenológicas, usando o gap de energia entre o estado fundamental e o primeiro estado excitado do modelo de Potts quântico em uma dimensão, que fornece uma escala de energia descrita pela função gap , definida por

$$\Delta_N(g) = E_1(N;g) - E_0(N;g), \quad (2.4)$$

onde N é o número de sítios da rede. Considerando que quando $N \rightarrow \infty$, $\Delta_N(g)$ vai a zero na região do ponto crítico escalando $|g - g_c|^s$ com, $g = g_c$, de modo que $|g - g_c| \rightarrow 0$ [17]. Para sistemas de tamanho finito, suas propriedades são incorporadas na forma de escala [49]

$$\Delta_N(g) = N^{-z} f(N/\xi), \quad (2.5)$$

para $N \gg 1$ e $g \rightarrow g_c$, onde z é o expoente crítico dinâmico [29], f é uma função de escala e $\xi \sim |g - g_c|^{-\nu}$ é o comprimento de correlação. Uma transformação de escala é obtida quando comparamos sistemas de tamanhos diferentes. Para $z = 1$ temos [50]

$$\Delta_{N'}(g') = \frac{N}{N'} \Delta_N(g) \Rightarrow g' = F_q(b, g), \quad (2.6)$$

de modo que $b = \frac{N}{N'}$ e F_q é uma função parametrizada por q .

No que segue, apresentaremos a relação de recorrência $g'(g)$, mostrando nossos resultados para o modelo de Potts com $q = 3$.

2.1.1 *Gap versus* campo magnético

Nossa análise se concentra na relação de escala via *gap* de energia, dado na Eq.(2.4). Após a diagonalização da Hamiltoniana, Eq.(2.3), obtemos os resultados apresentados pela Fig.(2.3).

Podemos observar que o *gap* de energia vai a zero quando o campo tende a zero. Temos também o comportamento dessa diferença de energia em relação ao número de sítios da rede: quanto maior o tamanho da rede, menor é o crescimento do *gap*.

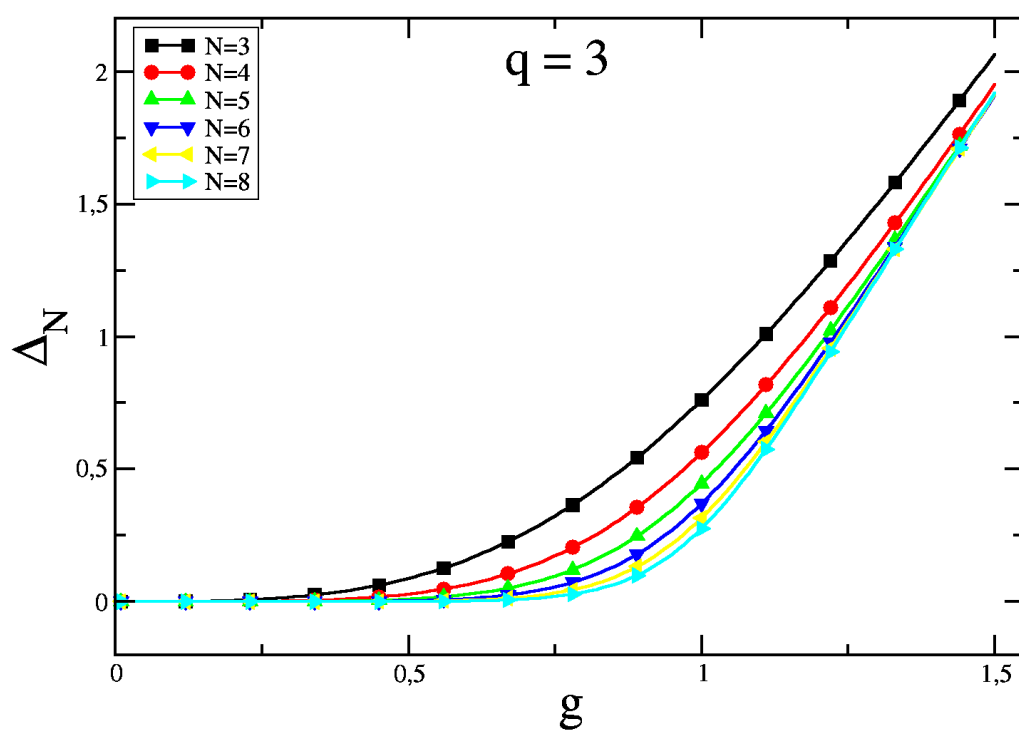


Fig. 2.3: *Gap* de energia Δ_N em função do campo g para $q = 3$ e tamanho de cadeia $N = 3, 4, 5, 6, 7$ e 8 .

Para mudar a escala de energia, multiplicamos o gap pelos respectivos tamanhos de rede, obtendo os resultados mostrados na Fig.(2.4). Verificamos que as curvas escaladas se cruzam em um ponto, $g = 1$, o qual é associado ao ponto crítico do sistema, mostrando que nesse ponto o sistema é invariante sob transformação de escala.

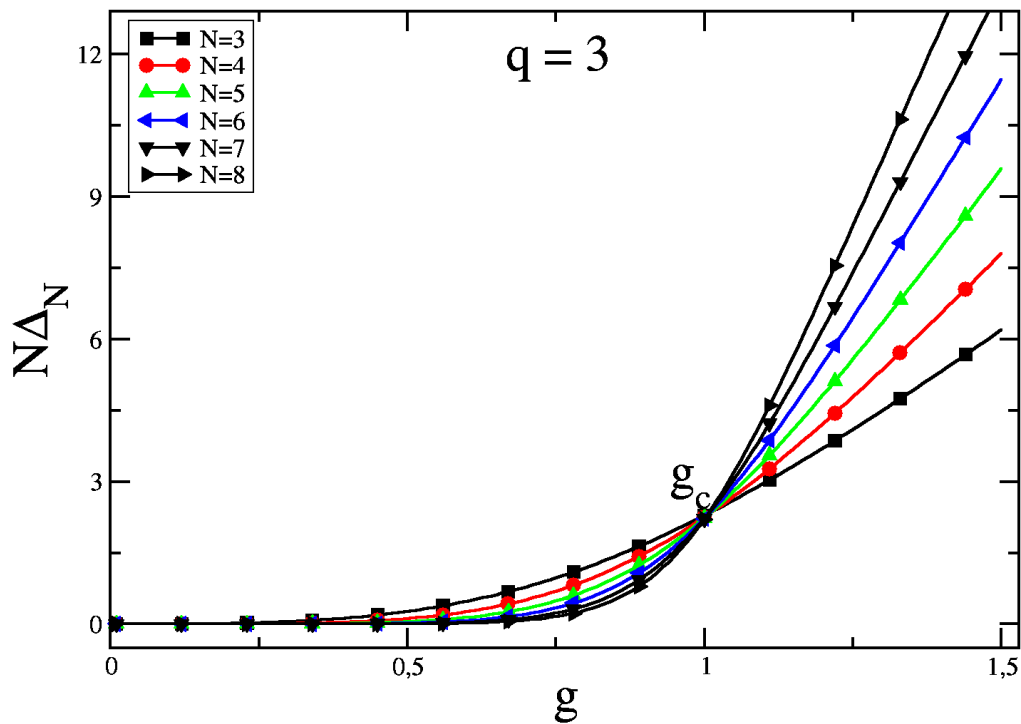


Fig. 2.4: Gap de energia $N\Delta_N$ em função do campo g com $q = 3$ e tamanho de cadeia $N = 3, 4, 5, 6, 7$ e 8 .

2.1.2 Relação de recorrência $g'(g)$

Sistemas de tamanhos diferentes podem ser relacionados, comparando-os, através da Eq.(2.7), geramos uma relação entre g associado a uma escala de tamanho N e g' associado a uma escala de tamanho N' , assim

$$\Delta_{N'}(g') = \frac{N}{N'} \Delta_N(g). \quad (2.7)$$

Resolvendo numericamente essa equação, encontramos o comportamento de g' versus g . Como podemos observar, o gráfico da Fig.(2.5) evidencia uma lei de potência. Desse modo,

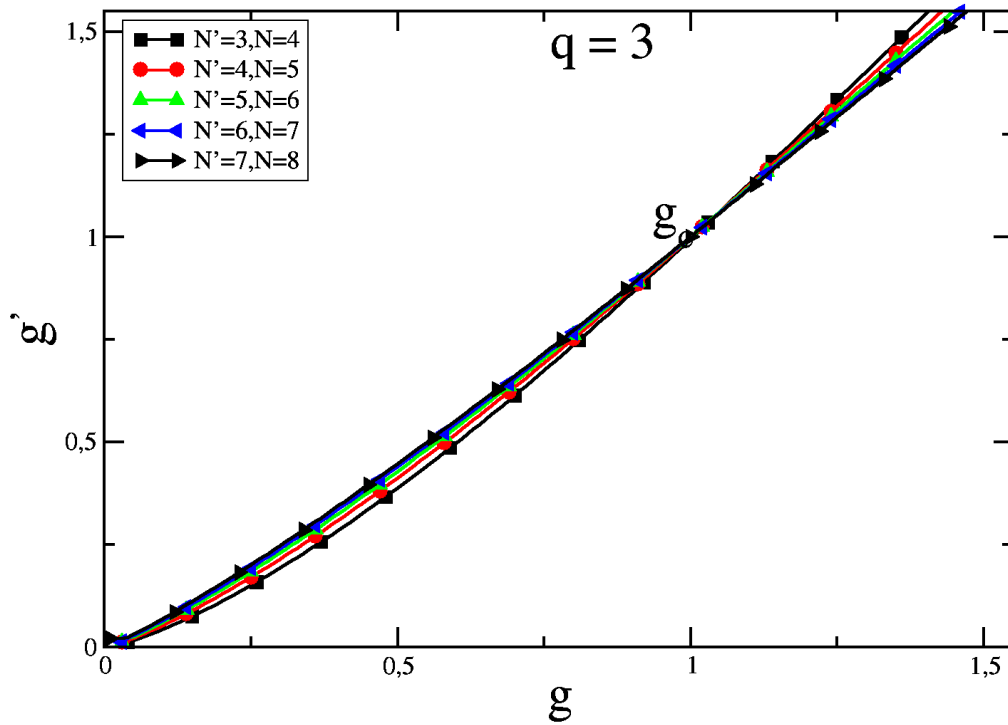


Fig. 2.5: g' em função de g para $q = 3$ e pares de tamanhos de rede (N', N) e números de estados $q = 3$.

podemos associar

$$g' = g^{f(b)} \equiv g^b, \quad (2.8)$$

onde $f(b)$ pode ser estimado pelo coeficiente angular da reta que lineariza a curva citada

$$\lim_{b \rightarrow 1} \lambda = \left. \frac{dg'}{dg} \right|_{g=1} = f(b), \quad (2.9)$$

e b é obtido da relação $b = \frac{N}{N'}$, onde $b \rightarrow 1$ quando $N \rightarrow \infty$. Após a linearização de $g'(g)$, podemos expressar $f(b)$ como

$$f(b) = \lim_{b \rightarrow 1} \frac{d \ln(g')}{d \ln(g)}. \quad (2.10)$$

Para estimarmos o valor de $f(b)$, linearizamos as curvas da Fig.(2.5), cujos resultados são

apresentados na Fig.(2.6). Extraindo o coeficiente angular de cada uma das retas, obtemos os valores de $f(b)$, como mostra a Tab.(2.1)

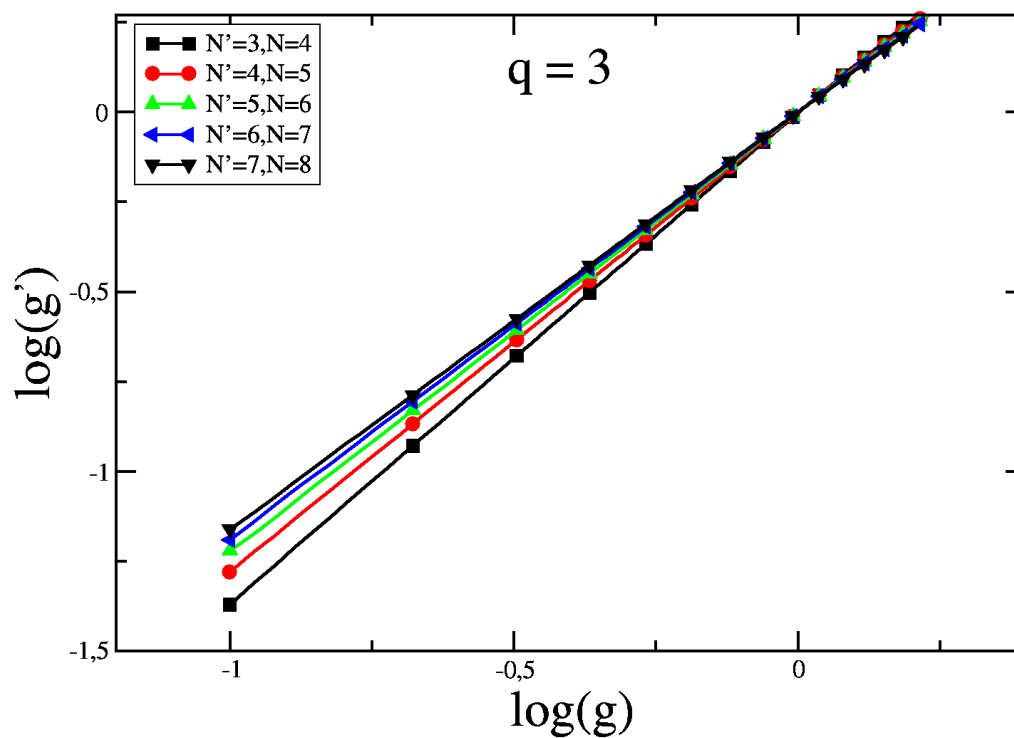


Fig. 2.6: Transformação de escala para o modelo de Potts em um campo transverso. Curvas $\log(g')$ em função de $\log(g)$.

(N', N)	$b = N/N'$	$\lambda = f(b)$
(3,4)	1,333	1,3406
(4,5)	1,250	1,265
(5,6)	1,200	1,217
(6,7)	1,167	1,1837
(7,8)	1,143	1,1591

Tab. 2.1: Determinação dos valores de λ para o modelo de Potts com $q = 3$, por meio do ajuste das curvas $\log(g)$ em função do $\log(g')$.

Fazendo o gráfico de b versus $f(b)$, como mostra a Fig.(2.7), podemos extrapolá-lo para obtermos o $\lim_{b \rightarrow 1} f(b)$. O valor encontrado foi $f(b) = 1,024 \pm 0.017$.

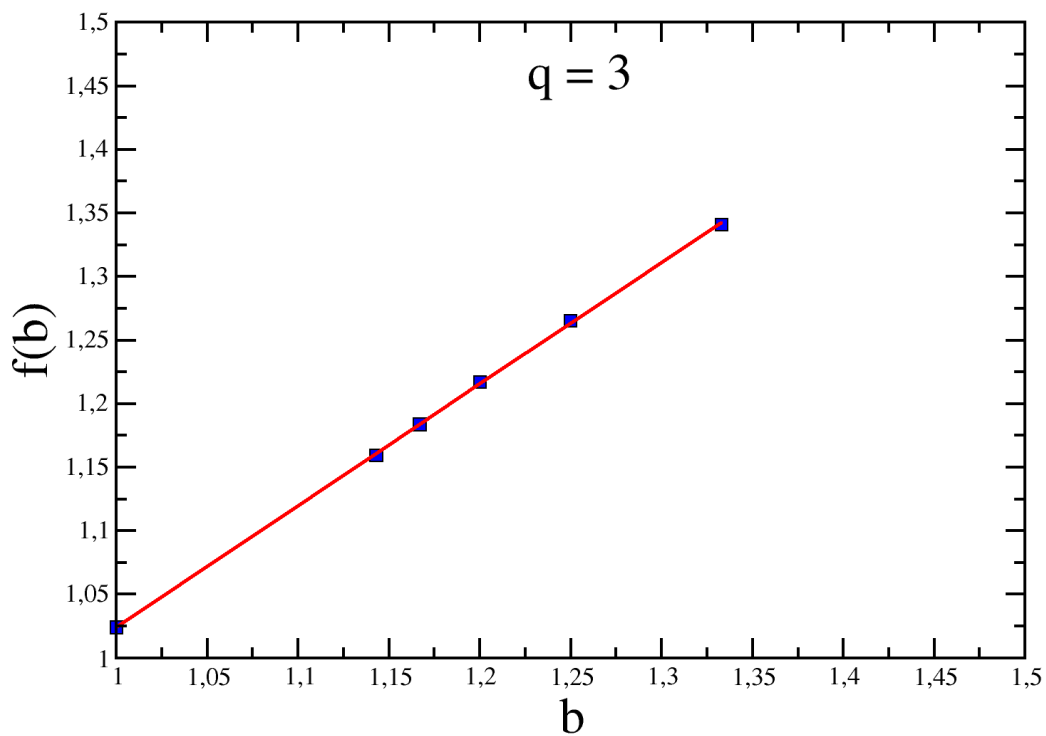


Fig. 2.7: Valor da extrapolação de $f(b)$ quando $b \rightarrow 1$.

Como ν pode ser dado por $\nu = \frac{\ln b}{\ln \lambda}$, usando os dados da Tab.(2.1) para calcular ν e $b^{1/\nu}$, encontramos os resultados mostrados na Tab.(2.2).

(N', N)	$b = N/N'$	$\nu = \ln b / \ln \lambda$	$b^{1/\nu}$
(3, 4)	1,333	0,981	1,3404
(4, 5)	1,250	0,949	1,2651
(5, 6)	1,200	0,928	1,2171
(6, 7)	1,167	0,914	1,1837
(7, 8)	1,143	0,905	1,1591

Tab. 2.2: Determinação dos valores de ν e $b^{1/\nu}$ para o modelo de Potts com $q = 3$, por meio do ajuste das curvas $\log(g)$ em função do $\log(g')$.

Extrapolando a curva de ν versus b para $b \rightarrow 1$, obtemos $\nu = 0,8462 \pm 0,0032$, como mostra a Fig.(2.8).

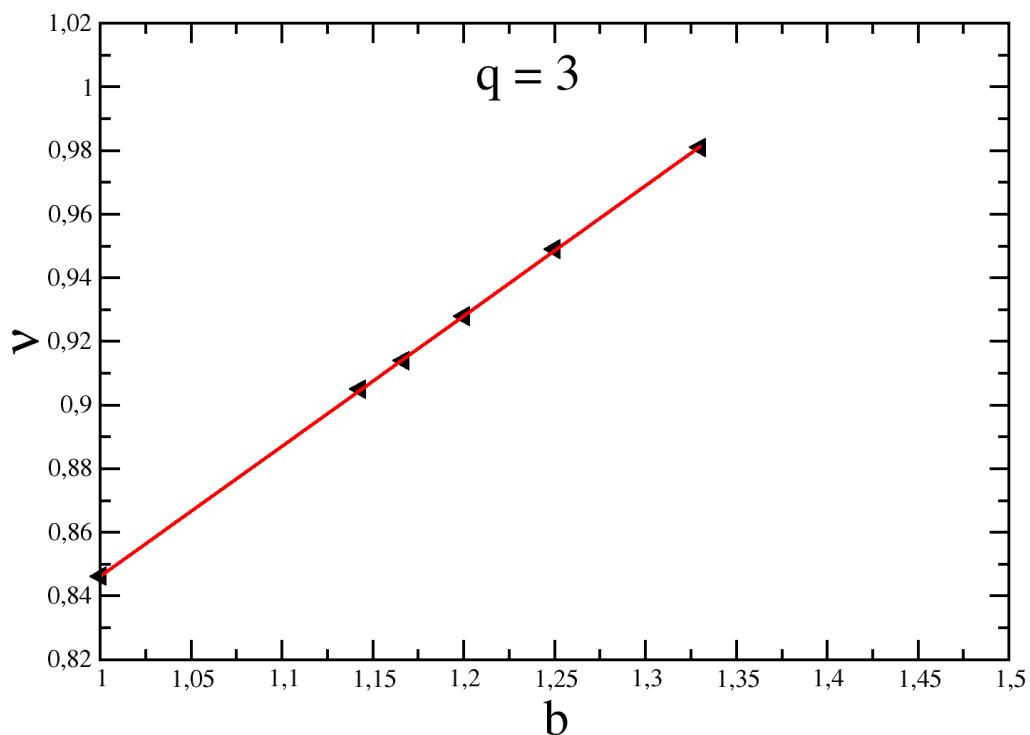


Fig. 2.8: Extrapolação de ν quando $b \rightarrow 1$.

De modo semelhante, fizemos para $b^{1/\nu}$ versus b com $b \rightarrow 1$, para o qual, obtemos $b^{1/\nu} = 1,0248 \pm 0,0144$, como vemos na Fig.(2.9)

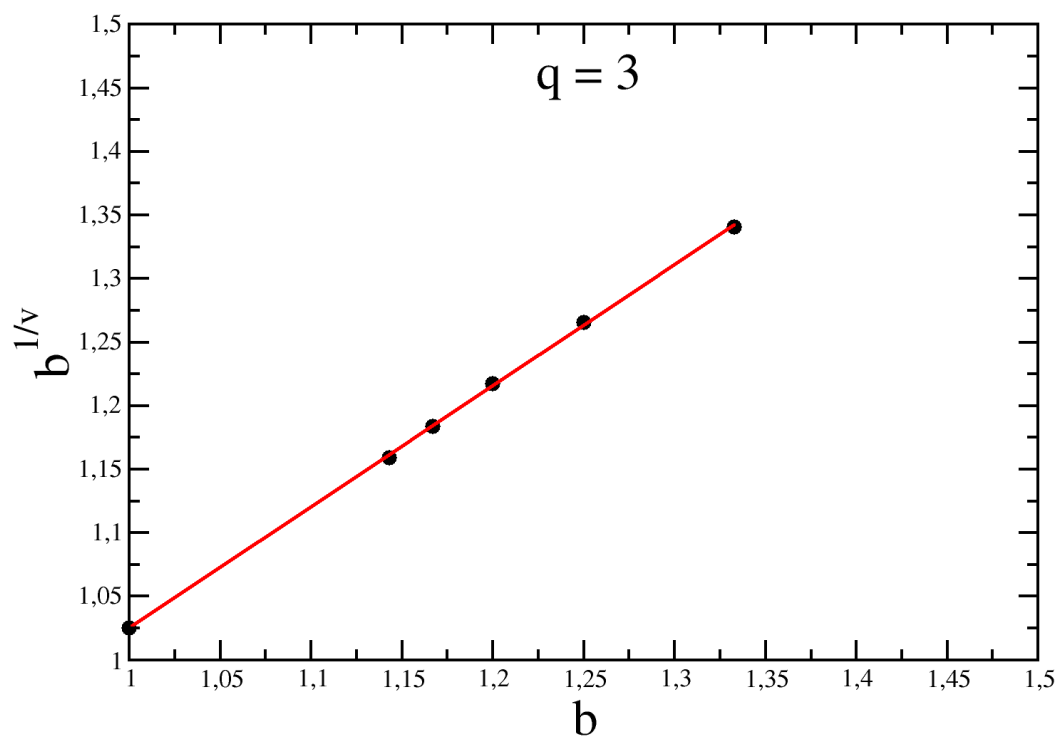


Fig. 2.9: Extrapolação de $b^{1/\nu}$ quando $b \rightarrow 1$.

Podemos constatar, na Fig.(2.10), que as curvas podem ser colapsadas, à medida que b varia e as curvas se aproximam de 1, dando consistência à proposta de escala, onde ($g' = g^{f(b)} = g^{1/\nu}$).

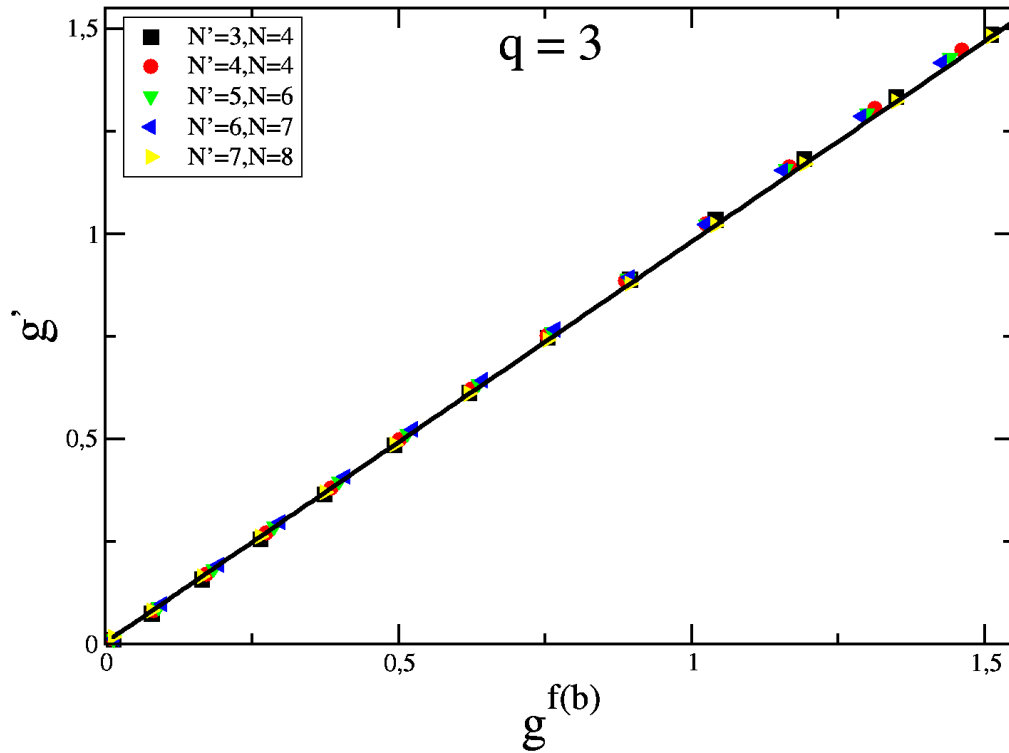


Fig. 2.10: Consistência da transformação de escala proposta $g' = g^{f(b)}$, mostrada por meio do colapso de dados para o caso do modelo de Potts na presença de um campo transversal com número de estados $q = 3$.

2.2 Caso $q = 4$

Em seguida, faremos, de modo semelhante, para o modelo de Potts com $q = 4$, para estimarmos assim o expoente crítico ν .

Para isso, realizamos numericamente as seguintes etapas:

- Escrevemos a Hamiltoniana na base dos autovetores de Ω .
- Diagonalizamos a Hamiltoniana para cada valor do campo transverso.
- Calculamos a diferença de energia entre os dois estados menos energéticos.
- Multiplicamos o valor do *gap* pelo tamanho da cadeia de spins para cada valor do campo.

Os autovalores são utilizados no cálculo dos *gaps* de energia para cada valor de campo magnético.

2.2.1 *Gap versus* campo magnético

Realizamos os cálculos para o caso $q = 4$ com números de sítios de 3 a 6, tendo em vista que os cálculos para redes maiores que essas ocupam muita memória computacional. Com os autovalores obtidos, calculamos os *gaps* de energia para cada tamanho de rede e cada valor de campo magnético.

Organizando os dados de *gap* de energia *versus* campo magnético, verificamos que os *gaps* tendem a zero quando o campo vai a zero, assim como no caso $q = 3$. Da Fig.(2.11), verificamos também que, quanto menor o tamanho da rede, maior o crescimento da diferença de energia.

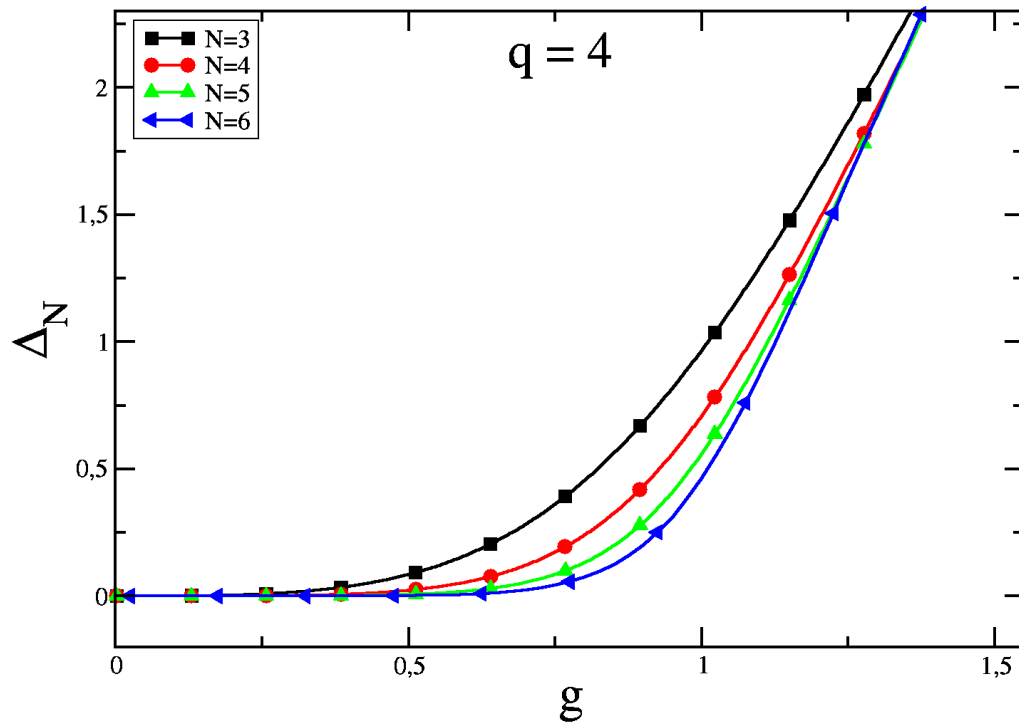


Fig. 2.11: *Gap* de energia Δ_N em função do campo g para $q = 4$ com tamanho de cadeia $N = 3, 4, 5$ e 6 .

2.2.2 Relação de recorrência

Comparando sistemas com tamanhos diferentes, obtemos uma relação de recorrência entre eles através do *gap* de energia.

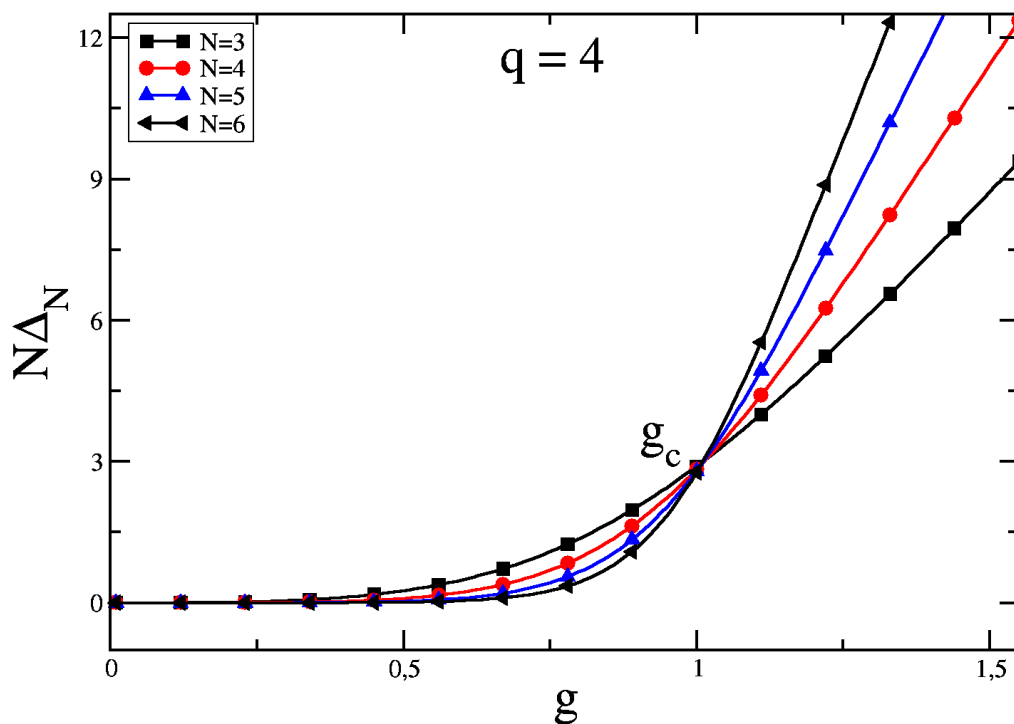


Fig. 2.12: *Gap* de energia $N\Delta_N$ em função do campo g para $q = 4$ e tamanho de cadeia $N = 3, 4, 5$ e 6 .

Como observamos na Fig.(2.12), as linhas se cruzam em um ponto que é associado ao ponto crítico. Resolvendo a Eq.2.6 para o caso $q = 4$, obtemos uma relação entre o campo g' associado a uma rede de tamanho N' , com o campo g associado a uma rede de tamanho N , a qual nos evidencia um campo crítico g_c no ponto de cruzamento das curvas, como mostra a Fig.(2.13).

Como podemos observar no gráfico de g versus g' , mostrado na Fig.2.13, as curvas sugerem uma lei de potência, como no caso $q = 3$.

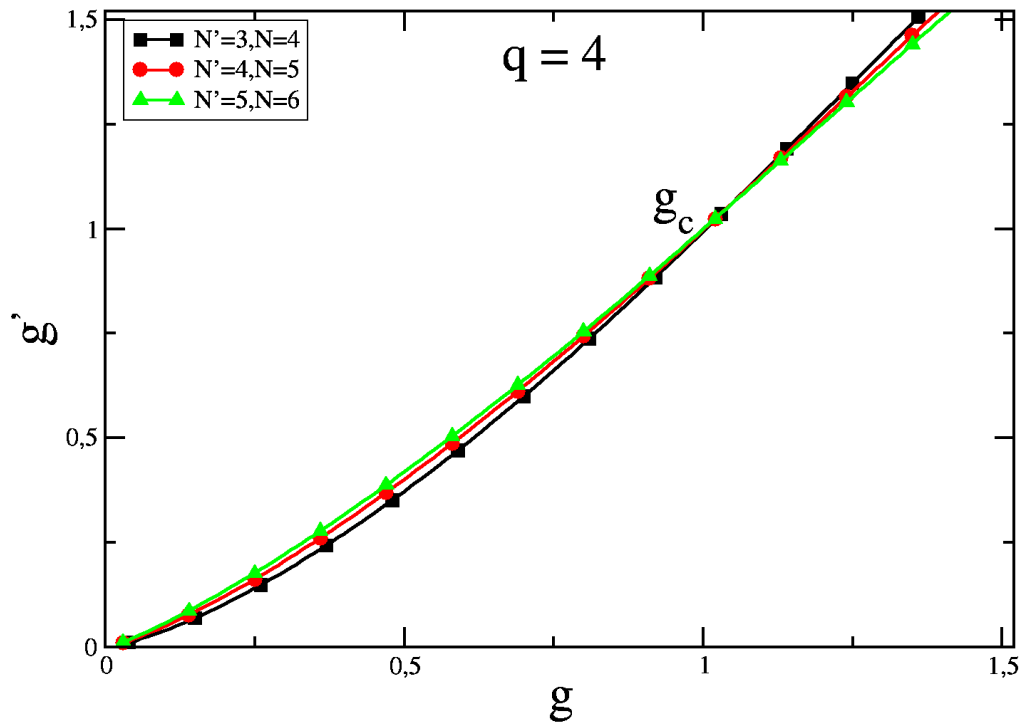


Fig. 2.13: g' em função de g para pares de tamanhos de rede (N', N) e número de estados $q = 4$.

Linearizando-as, podemos obter o comportamento para cada tamanho de rede, como mostra a Fig.(2.14).

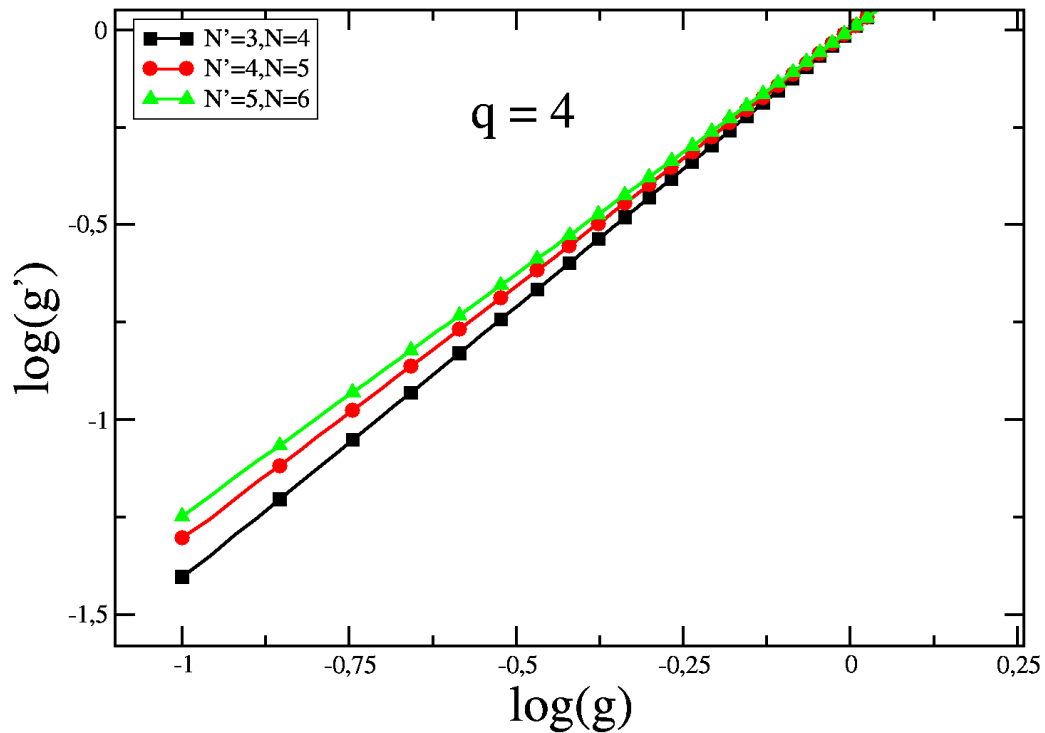


Fig. 2.14: Transformação de escala para o modelo de Potts com $q = 4$ na presença de campo transversal. Curvas $\log(g')$ em função de $\log(g)$.

$$\begin{aligned}
 g' &= g^{b^{\frac{1}{v}}} & (2.11) \\
 \frac{\partial g'}{\partial g} &= b^{\frac{1}{v}} g^{b^{\frac{1}{v}} - 1} = b^{\frac{1}{v}} \frac{g'}{g},
 \end{aligned}$$

No ponto crítico g^* , temos

$$\frac{\partial g'}{\partial g} = b^{\frac{1}{v}} \quad (2.12)$$

Através de um ajuste linear para cada curva, calculamos as declividades das retas, o que nos dá os valores de $f(b)$, como vemos na Tab.(2.3).

(N', N)	$b = N/N'$	$\lambda = f(b)$
(3,4)	1,333	1,3354
(4,5)	1,250	1,2778
(5,6)	1,200	1,2348

Tab. 2.3: Determinação dos valores de λ para o modelo de Potts com $q = 4$, por meio do ajuste das curvas $\log(g)$ em função do $\log(g')$.

Construindo o gráfico de b versus $f(b)$ e extrapolando para $b \rightarrow 1$, encontramos $f(b) = 1,0869 \pm 0,0556$, como podemos verificar na Fig.(2.15). Isso nos mostra que $f(b)$ e b se aproximam à medida que b tende a 1.

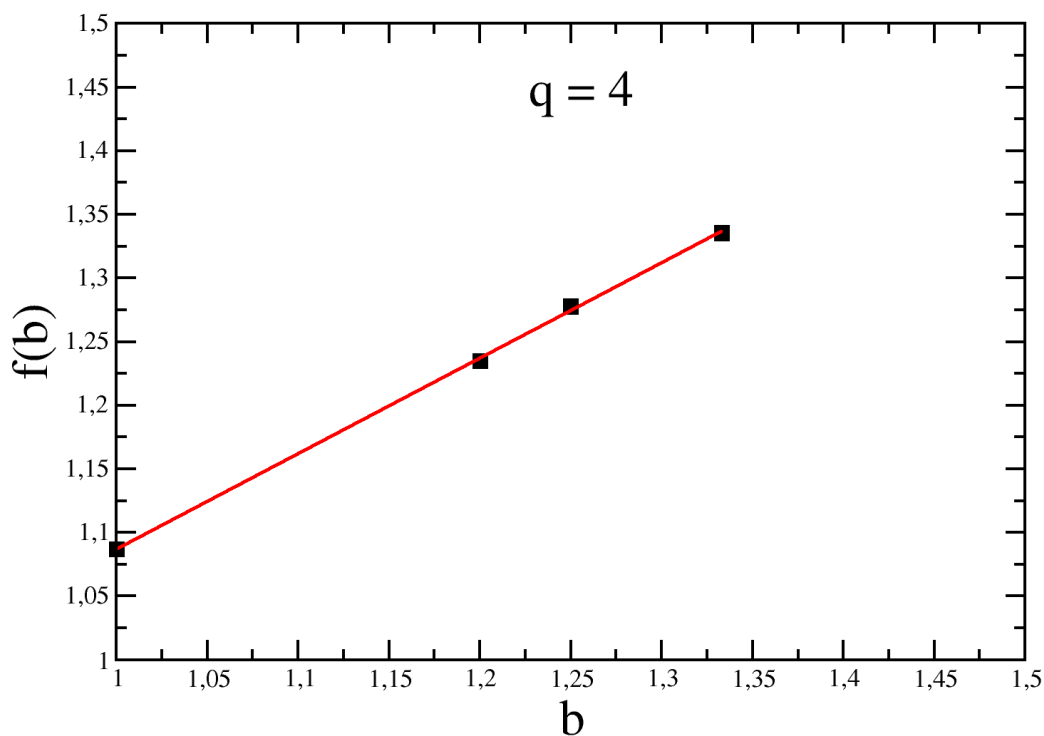


Fig. 2.15: Valor da extrapolação de $f(b)$ quando $b \rightarrow 1$.

Como vimos anteriormente, ν pode ser dado por $\nu = \frac{\ln b}{\ln \lambda}$. Calculando ν e $b^{1/\nu}$, a partir dos dados da Tab.(2.3), obtemos os valores mostrados na Tab.(2.4), a qual nos permite extrapolar os valores de ν e $b^{1/\nu}$. Desse modo, encontramos $\nu = 0,667 \pm 0,044$, como notamos na Fig.(2.16). Observamos que concorda com o valor encontrado em[25] que é $\nu = \frac{2}{3}$ para o modelo de Potts com $q = 4$.

(N', N)	$b = N/N'$	$\nu = \ln b / \ln \lambda$	$b^{1/\nu}$
(3,4)	1,333	0,994	1,33531
(4,5)	1,250	0,9102	0,27782
(5,6)	1,200	0,864	1,23494

Tab. 2.4: Determinação dos valores de ν e $b^{1/\nu}$ para o modelo de Potts com $q = 4$, por meio do ajuste das curvas $\log(g)$ em função do $\log(g')$.

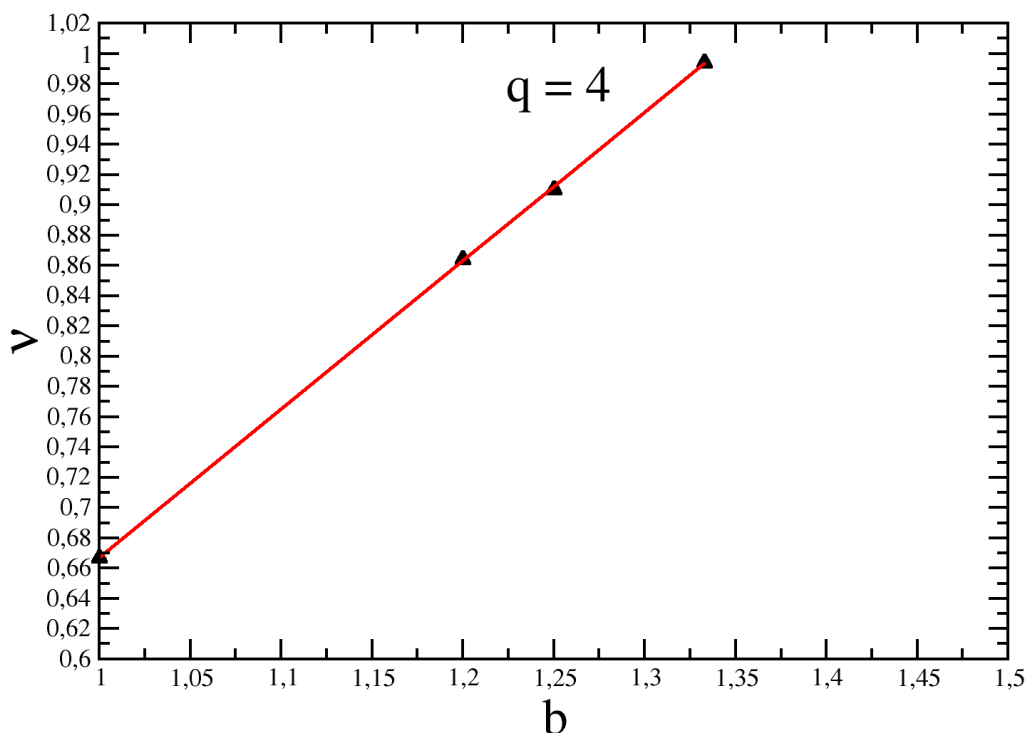


Fig. 2.16: Convergência de ν quando $b \rightarrow 1$.

Extrapolando $b^{1/\nu}$ para $b \rightarrow 1$, temos que $b^{1/\nu} = 1,0874 \pm 0,044$, como exposto na Fig.(2.17).

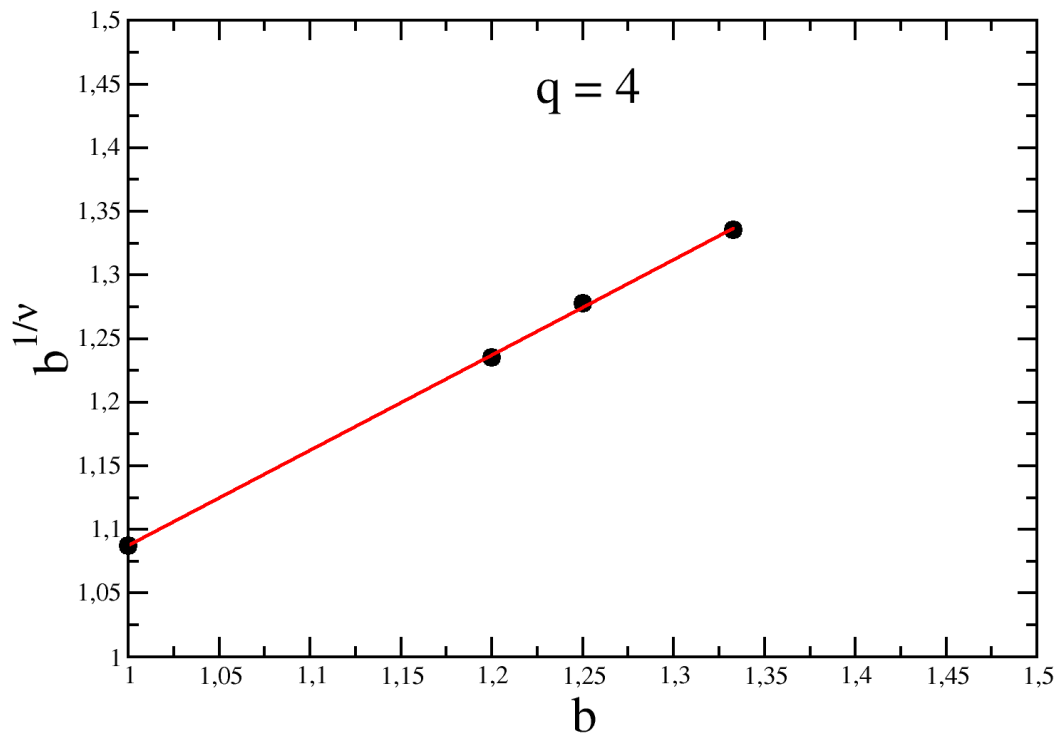


Fig. 2.17: Extrapolação de $b^{1/\nu}$ quando $b \rightarrow 1$.

Ao traçarmos o gráfico de $g^{f(b)}$ versus g' , verificamos que curvas para diferentes valores de b , quanto mais próximas a 1, colapsam para uma única curva, como fica evidente na Fig.(2.18). Isso fortalece a lei de escala para o modelo de Potts com $q = 4$, semelhante ao que foi constatado para o caso $q = 3$.

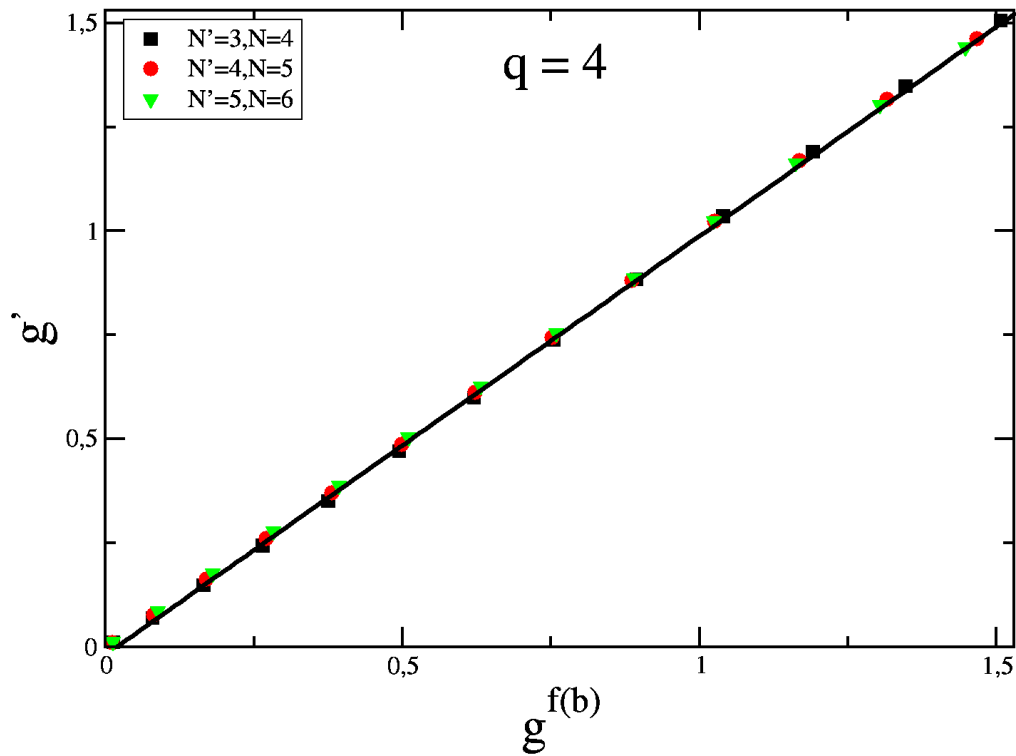


Fig. 2.18: Consistência da transformação de escala proposta $g' = g^{f(b)}$, mostrada através do colapso de dados para o caso do modelo de Potts $q = 4$ na presença de um campo transversal.

2.3 Caso $q = 5$

Para o caso $q = 5$, a Hamiltoniana na Eq.(2.2) é dada por

$$\mathcal{H} = -\frac{\lambda}{q} \sum_{i=1}^N (\Omega_i^1 \Omega_{i+1}^4 + \Omega_i^2 \Omega_{i+1}^3 + \Omega_i^3 \Omega_{i+1}^2 + \Omega_i^4 \Omega_{i+1}^1) - h \sum_{i=1}^N (M_i^1 + M_i^2 + M_i^3 + M_i^4), \quad (2.13)$$

onde

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \omega & & & \\ & & \omega^2 & & \\ & & & \omega^3 & \\ & & & & \omega^4 \end{bmatrix},$$

com $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{5})$ e

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

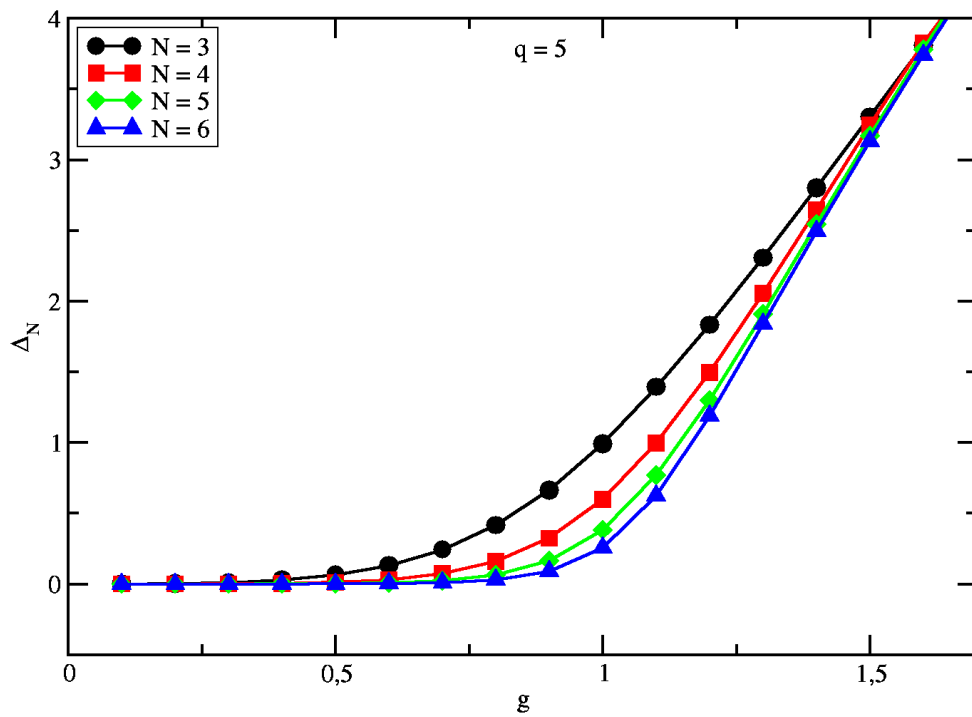
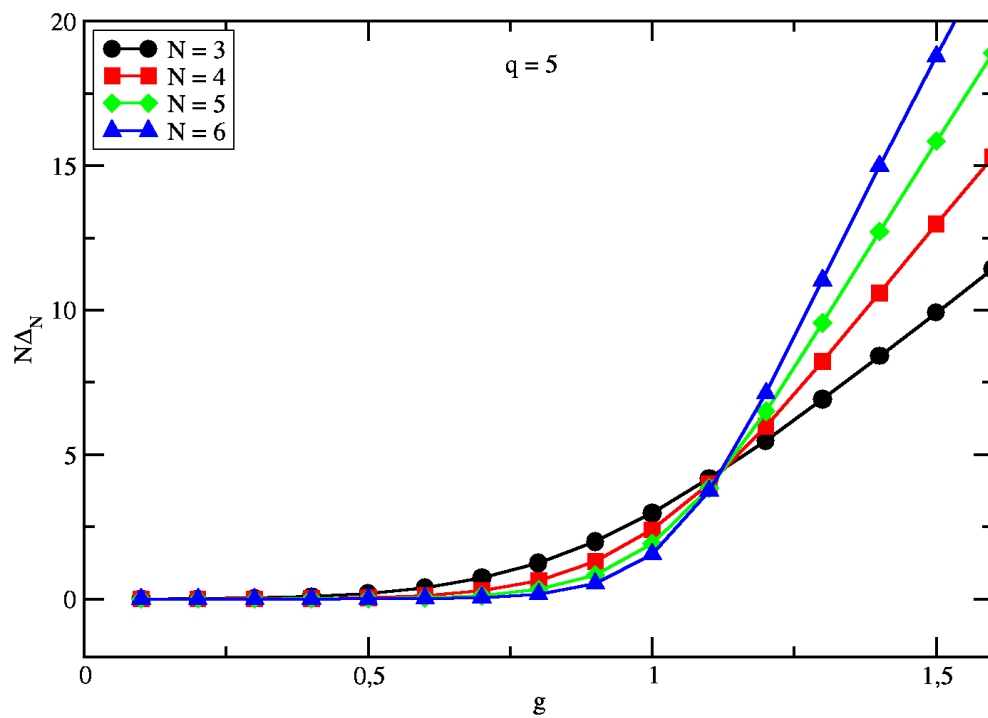
Definindo $J = \frac{\lambda}{q}$ e o campo em unidades de J como $g = \frac{h}{J}$, temos

$$\mathcal{H} = -\sum_{i=1}^N (\Omega_i^1 \Omega_{i+1}^4 + \Omega_i^2 \Omega_{i+1}^3 + \Omega_i^3 \Omega_{i+1}^2 + \Omega_i^4 \Omega_{i+1}^1) - g \sum_{i=1}^N (M_i^1 + M_i^2 + M_i^3 + M_i^4), \quad (2.14)$$

onde N indica o número de sítios da rede e i rotula a posição do sítio.

Com isso, os autovalores da Hamiltoniana dada na Eq.(2.14) são utilizados para calcular os *gaps* de energia do sistema para cada valor de campo, g , e variando N de 3 a 6, obtemos as curvas descritas na Fig.(2.19).

Como podemos observar, o *gap* tende a zero quando g vai a zero, exatamente como acontece para os casos $q = 3$ e $q = 4$.

Fig. 2.19: *Gap versus g para $q = 5$.*Fig. 2.20: *$Nx\Delta_N$ versus g para $q = 5$.*

Multiplicando os *gaps* pelos respectivos tamanhos de rede, obtemos os resultados mostrados na Fig.(2.20), onde verificamos que as curvas escaladas se cruzam no ponto $g^* = 1,1207$ o qual está acima dos pontos críticos dos casos $q = 3$ e $q = 4$, visto que o caso $q = 5$ não é uma transição contínua, mas de primeira ordem[25].

Fazendo a extrapolação do gráfico *gap versus* N^{-1} [51], verificamos que o *gap* tende a um ponto abaixo de zero no caso $g = 1$, evidenciando assim que a quantidade de pontos que adquirimos, nesse caso, é insuficiente para constatarmos a transição de primeira ordem no caso $q = 5$.

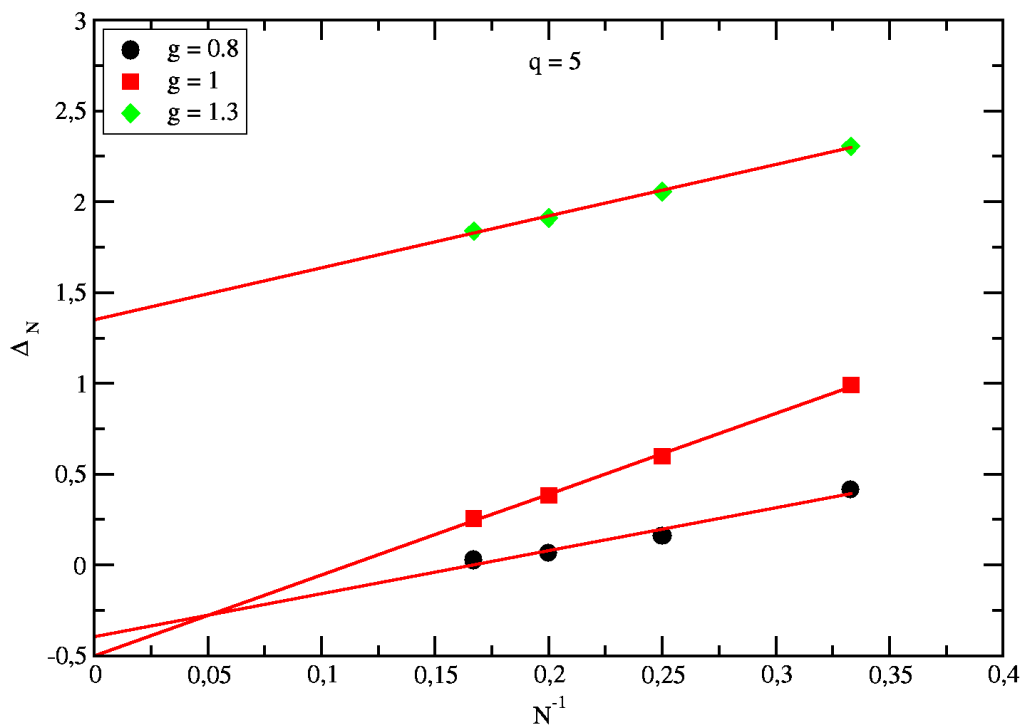


Fig. 2.21: *Gap versus* N^{-1} para $q = 5$.

2.4 Modelo de Potts via transformação de Migdal-Kadanoff

Nesta seção vamos utilizar o método de transformação de Migdal-Kadanoff para avaliarmos o expoente crítico do comprimento de correlação, ν , em dimensões maiores que um. Com

os resultados que obtivemos através da escala do *gap* de energia, vamos analisar, com essa aproximação, o modelo de Potts com $q = 3$ e $q = 4$.

2.4.1 Caso $q = 3$

A aproximação de Migdal-Kadanoff [52, 53], como exemplificada na Fig(2.22), para uma rede quadrada consiste nas seguintes etapas: combinar as ligações em série e movê-las, em seguida, fazer uma combinação das ligações em paralelo, as quais são resultantes das em série. As ligações removidas aparecem como “reforço” nas ligações entre os sítios remanescentes.

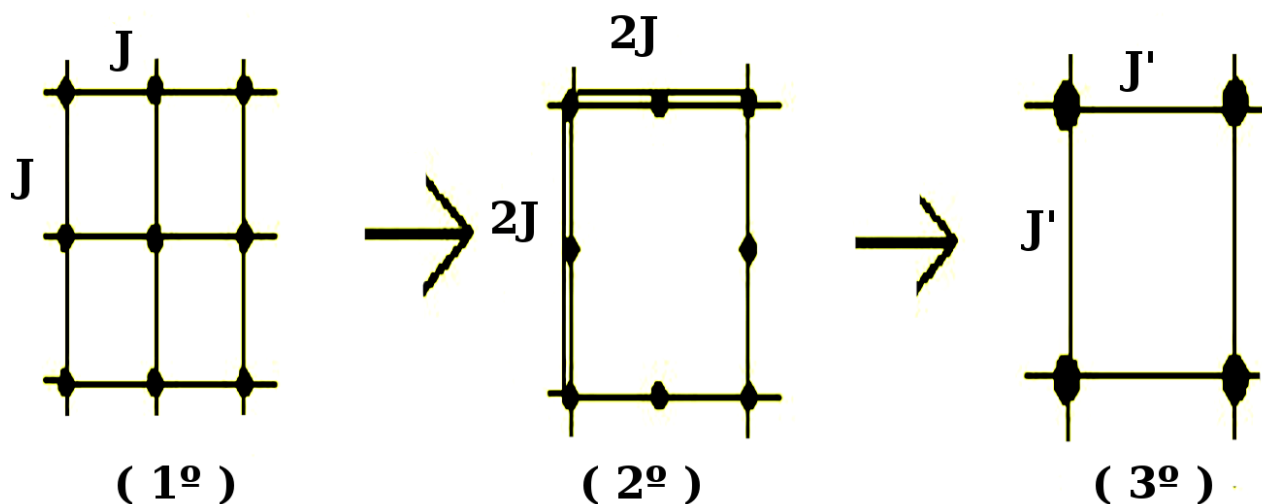


Fig. 2.22: As etapas da transformação de Migdal - Kadanoff para uma rede quadrada.

Desde que a rede após a dizimação tenha a mesma simetria que a original, podemos obter as relações de recorrência entre as ligações antes e depois da dizimação. Para o modelo de Potts quântico, as ligações em série podem ser dadas, definindo $j \equiv \frac{J}{h} = \frac{1}{g}$, por

$$j_s = j^{\lambda_q} \rightarrow \lambda_q = b^{\frac{1}{\nu_q}}, \quad (2.15)$$

onde j_s representa a combinação das ligações em série; b , o fator de transformação de escala; e ν_q , o expoente crítico do comprimento de correlação. Como a combinação em paralelo é a

soma das ligações resultante das em série, de modo geral, temos

$$j' = bj^{\lambda_q}. \quad (2.16)$$

Com isso, podemos calcular o ponto fixo da Eq.(2.16), para o qual, obtemos

$$j^* = b(j^*)^{\lambda_q} \rightarrow j^* = b^{-\left(\frac{1}{\lambda_q-1}\right)}. \quad (2.17)$$

Para uma generalização em d dimensões, podemos pensar em uma sequência de ligações em todas as d dimensões. Desse modo, podemos utilizar o argumento de dizimação, onde podemos reduzir os graus de liberdade do sistema retirando algumas ligações e reforçando as ligações entre os sítios remanescentes por uma fator de b^{d-1} . Assim, a Eq.(2.17) se torna

$$j^* = b^{-\left(\frac{d-1}{\lambda_q-1}\right)}. \quad (2.18)$$

Como podemos verificar na Fig.(2.23), o ponto fixo do fator de acoplamento diminui à medida que d aumenta, como era de se esperar.

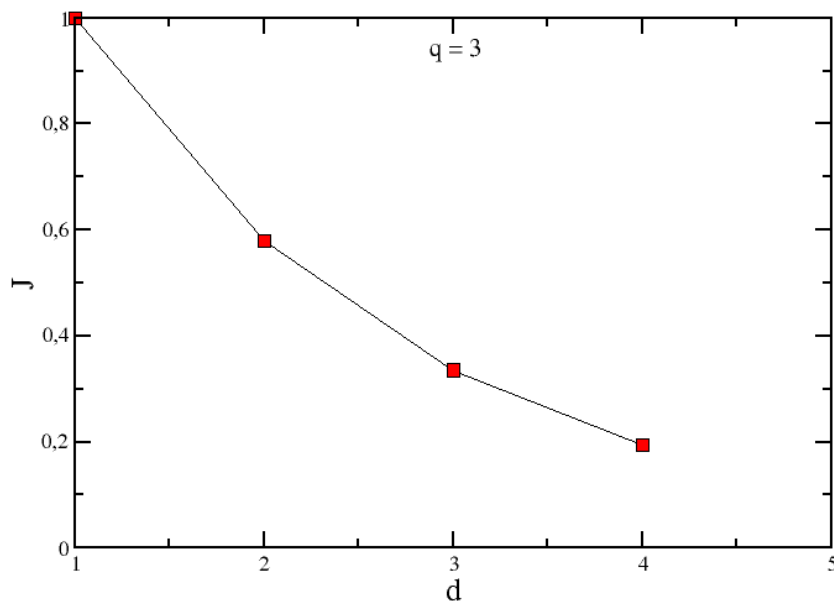


Fig. 2.23: Gráfico de j^* versus d para o caso $q = 3$.

Lembrando que

$$\nu = \frac{\ln(b)}{\ln\left(\left.\frac{dj'}{dj}\right|_{j=j^*}\right)}, \quad (2.19)$$

podemos analisar o expoente crítico ν para cada valor dos fatores de transformação encontrados através dos *gap* de energia para a cadeia linear e, assim, calcularmos o expoente para uma rede em duas dimensões.

Para uma rede quadrada para cada valor de b , linearizamos a Eq.(2.16) no ponto fixo e calculamos o expoente para duas dimensões, como mostrado na Tab.(2.5)

b	j^*	ν
1,167	0,431	0,916

Tab. 2.5: Determinação dos valores de ν para o modelo de Potts com $q = 3$ e $d = 2$.

2.4.2 Caso $q = 4$

Com o mesmo método desenvolvido anteriormente, vamos discutir o modelo de Potts com $q = 4$. Como podemos observar na Fig.(2.24), o ponto fixo da Eq.(2.16) diminui com o aumento da dimensão de forma muito semelhante ao caso $q = 3$. Para o caso de uma rede quadrada

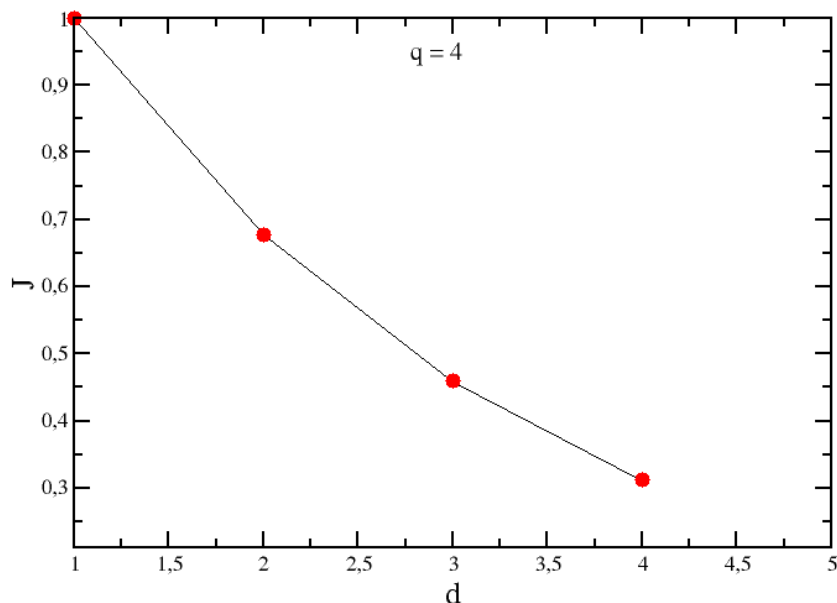


Fig. 2.24: Gráfico de j^* versus d para o caso $q = 4$.

podemos obter os valores de ν linearizando a Eq.(2.17) nos pontos para o caso $q = 4$.

b	j^*	ν
1,200	0,460	0,864

Tab. 2.6: Determinação dos valores de ν para o modelo de Potts com $q = 4$ e $d = 2$.

Embora os resultados para o expoente crítico do comprimento de correlação desse modelo em uma dimensão concordem com os valores previstos na literatura, quando se aplica o método de Migdal-Kadanoff, que é utilizado em redes quadradas, verificamos que o expoente crítico ν tem o mesmo valor nos casos $d > 1$ e $d = 1$, evidenciando que essa transformação não captura qualquer tendência de q com a dimensão d .

Capítulo 3

Estudo do modelo de Potts quântico ($q = 3, 4$) via grupo de renormalização no espaço real

Neste capítulo, vamos resolver o modelo de Potts quântico unidimensional com $q = 3$ e $q = 4$ usando o grupo de renormalização no espaço real e calculamos o expoente crítico do comprimento de correlação. Para isso, usamos a Hamiltoniana descrita no capítulo anterior, Eq.(2.2).

3.1 Caso $q = 3$

No caso $q = 3$, para realizarmos a renormalização [54], considerando a Hamiltoniana total \mathcal{H} separada em blocos de dois sítios, \mathcal{H}_n , onde $n = \frac{i+1}{2}$, com $i = 1, 3, 5, \dots$, e, mais adiante o complemento, representando a Hamiltoniana responsável pela interação interblocos, sendo

$$\mathcal{H}_n = -J(\Omega_i^2 \Omega_{i+1} + \Omega_i \Omega_{i+1}^2) - h(M_i + M_i^2). \quad (3.1)$$

Aqui Ω é uma matriz diagonal dada por

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \omega & \\ & & \omega^2 \end{bmatrix},$$

com $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{3})$, e M dado por

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde h é um campo transverso e J o acoplamento entre os spins vizinhos [41]. O índice i é utilizado para rotular as posições de cada sítio na rede.

Da expressão dada na Eq.(3.1), temos

$$\Omega_1 = \Omega \otimes \mathbb{1}, \quad \Omega_2 = \mathbb{1} \otimes \Omega, \quad M_1 = M \otimes \mathbb{1} \quad e \quad M_1^2 = M^2 \otimes \mathbb{1}, \quad (3.2)$$

que nos fornece a Hamiltoniana

$$\mathcal{H}_n = \begin{bmatrix} -2J & 0 & 0 & -h & 0 & 0 & -h & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 & 0 & -h & 0 & 0 & -h & 0 \\ 0 & 0 & J & 0 & 0 & -h & 0 & 0 & -h \\ -h & 0 & 0 & J & 0 & 0 & -h & 0 & 0 \\ 0 & -h & 0 & 0 & -2J & 0 & 0 & -h & 0 \\ 0 & 0 & -h & 0 & 0 & J & 0 & 0 & -h \\ -h & 0 & 0 & -h & 0 & 0 & J & 0 & 0 \\ 0 & -h & 0 & 0 & -h & 0 & 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & -h & 0 & 0 & -h & 0 & 0 & -2J \end{bmatrix},$$

com a qual determinamos que os autovalores são triplamente degenerados, onde essa degenerência é fundamental para preservar a simetria da Hamiltoniana na renormalização. Nesse caso, obtemos as autoenergias

$$\lambda_0 = \frac{-h - J - \sqrt{9h^2 - 6hJ + 9J^2}}{2} \rightarrow \text{três vezes degenerado}, \quad (3.3)$$

$$\lambda_1 = \frac{-h - J + \sqrt{9h^2 - 6hJ + 9J^2}}{2} \rightarrow \text{três vezes degenerado}, \quad (3.4)$$

e

$$\lambda_2 = h + J \rightarrow \text{três vezes degenerado}. \quad (3.5)$$

$$(3.6)$$

Selecionando $\lambda_0 = \frac{-h - J - \sqrt{9h^2 - 6hJ + 9J^2}}{2}$, o menor autovalor, e rotulando-o simplesmente por λ , podemos adotar seus autovetores como estados da base para projetarmos os termos restantes da Hamiltoniana no subespaço de mais baixa energia. Com isso, podemos proceder a renormalização no espaço real. Os autovetores renormalizados desse subespaço são dados por

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{c_3^2 + 2}} \begin{bmatrix} c_3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |\Psi_2\rangle = \frac{c_3}{\sqrt{c_3^2 + 2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{c_3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{c_3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad |\Psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{c_3^2 + 2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ c_3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Considerando a representação inicial da Hamiltoniana, definindo

$$|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad |3\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

podemos concluir que a base para os estados fundamentais pode ser escritas como

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{c_3^2 + 2}} (c_3|11\rangle + |21\rangle + |31\rangle), \quad (3.7)$$

$$|\Psi_2\rangle = \frac{c_3}{\sqrt{c_3^2 + 2}} (|12\rangle + c_3|22\rangle + |32\rangle), \quad (3.8)$$

$$|\Psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{c_3^2 + 2}} \left(\frac{1}{c_3}|13\rangle + \frac{1}{c_3}|23\rangle + |33\rangle \right), \quad (3.9)$$

onde

$$c_3 = \frac{\lambda + J - h}{h} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{-h + J - \sqrt{9h^2 - 6hJ + 9J^2}}{2}. \quad (3.10)$$

Assim, podemos definir o projetor neste subespaço degenerado,

$$P = |\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| + |\Psi_2\rangle\langle\Psi_2| + |\Psi_3\rangle\langle\Psi_3|. \quad (3.11)$$

Para o nosso sistema, consideramos as Hamiltonianas intra e interbloco, respectivamente,

como

$$\mathcal{H}_{intra} = -J(\Omega_i \Omega_{i+1}^2 + \Omega_i^2 \Omega_{i+1}) - h(M_i + M_i^2), \quad (3.12)$$

e

$$\mathcal{H}_{inter} = -J(\Omega_{i+1} \Omega_{i+2}^2 + \Omega_{i+1}^2 \Omega_{i+2}) - h(M_{i+1} + M_{i+1}^2). \quad (3.13)$$

Seguindo Fernandes-Pacheco [42], vamos projetar cada uma das partes acima no subespaço de mais baixa energia e verificarmos como os spins se comportam após a renormalização.

3.2 Projeções no subespaço do estado fundamental

Utilizando o projetor descrito na Eq.(3.11), vamos projetar as Hamiltonianas \mathcal{H}_{intra} e \mathcal{H}_{inter} e verificarmos como elas se comportam após o passo de renormalização. Para isso, façamos,

$$P_I \mathcal{H}_{intra(i)} P_I = \lambda \mathbf{1}_I = -\frac{1}{2}(J + h + \sqrt{9J^2 - 6Jh + 9h^2}) \mathbf{1}_I, \quad (3.14)$$

$$P_I(\Omega_{i+1})P_I = P_I(\mathbf{1}_i \otimes \Omega_{i+1})P_I = 1|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| + \omega|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2| + \omega^2|\Psi_3\rangle\langle\Psi_3|, \quad (3.15)$$

$$P_I(\Omega_{i+1}^2)P_I = P_I(\mathbf{1}_i \otimes \Omega_{i+1}^2)P_I = 1|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| + \omega^2|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2| + \omega|\Psi_3\rangle\langle\Psi_3|. \quad (3.16)$$

Definindo os operadores renormalizados como

$$\Omega_{R(I)} \equiv 1|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| + \omega|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2| + \omega^2|\Psi_3\rangle\langle\Psi_3|, \quad (3.17)$$

$$\Omega_{R(I)}^2 \equiv 1|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| + \omega^2|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2| + \omega|\Psi_3\rangle\langle\Psi_3|, \quad (3.18)$$

$$M_{R(I)} \equiv (|\Psi_3\rangle\langle\Psi_1| + |\Psi_1\rangle\langle\Psi_2| + |\Psi_2\rangle\langle\Psi_3|), \quad (3.19)$$

$$M_{R(I)}^2 \equiv (|\Psi_2\rangle\langle\Psi_1| + |\Psi_3\rangle\langle\Psi_2| + |\Psi_1\rangle\langle\Psi_3|), \quad (3.20)$$

vemos claramente que as projeções no bloco fornecem

$$P_I(\mathbf{1}_i \otimes \Omega_{i+1})P_I = \Omega_{R(I)}, \quad (3.21)$$

$$P_I(\mathbf{1}_i \otimes \Omega_{i+1}^2)P_I = \Omega_{R(I)}^2. \quad (3.22)$$

Vamos agora analisar a projeção dos termos da Hamiltoniana \mathcal{H}_{inter} . Precisamos nos certificar de que a Hamiltoniana, depois da renormalização, preserva a mesma simetria que a inicial. Isso garante a eficiência do esquema de transformação, bem como da escolha da Hamiltoniana

adequada. Para isso, vamos primeiro projetar a parte diagonal como

$$\begin{aligned}
P_{I+1}(\Omega_{i+2} \otimes \mathbb{1}_{i+3})P_{I+1} &= \left(\frac{1}{\sqrt{c_3^2 + 2}} \right)^2 (c_3^2 + \omega + \omega^2) |\Psi_1\rangle \langle \Psi_1| \\
&+ \left(\frac{c_3}{\sqrt{c_3^2 + 2}} \right)^2 (1 + c_3^2 \omega + \omega^2) |\Psi_2\rangle \langle \Psi_2| \\
&+ \left(\frac{1}{\sqrt{c_3^2 + 2}} \right)^2 \left(\frac{1}{c_3^2} + \frac{\omega}{c_3} + \omega^2 \right) |\Psi_3\rangle \langle \Psi_3| \\
&= \left(\frac{c_3^2 - 1}{c_3^2 + 2} \right) (|\Psi_1\rangle \langle \Psi_1| + \omega |\Psi_2\rangle \langle \Psi_2| + \omega^2 |\Psi_3\rangle \langle \Psi_3|) \\
&= \left(\frac{c_3^2 - 1}{c_3^2 + 2} \right) \Omega_{R(I+1)}, \tag{3.23}
\end{aligned}$$

$$P_{I+1}(\Omega_{i+2}^2 \otimes \mathbb{1}_{i+3})P_{I+1} = \left(\frac{c_3^2 - 1}{c_3^2 + 2} \right) \Omega_{R(I+1)}^2. \tag{3.24}$$

De modo semelhante, vamos agora fazer o procedimento para os termos não-diagonais

$$\begin{aligned}
P_I(\mathbb{1}_i \otimes M_{i+1})P_I &= \left(\frac{2c_3 + 1}{c_3^2 + 2} \right) (|\Psi_3\rangle \langle \Psi_1| + |\Psi_1\rangle \langle \Psi_2| + |\Psi_2\rangle \langle \Psi_3|) \\
&= \left(\frac{2c_3 + 1}{c_3^2 + 2} \right) M_{R(I)} \tag{3.25}
\end{aligned}$$

e

$$P_I(\mathbb{1}_i \otimes M_{i+1}^2)P_I = \left(\frac{2c_3 + 1}{c_3^2 + 2} \right) M_{R(I)}^2. \tag{3.26}$$

Comparando a Hamiltoniana interbloco antes e depois do procedimento, podemos encontrar a equação de renormalização, a qual nos fornece os pontos fixos, possibilitando assim calcular o expoente crítico do comprimento de correlação. Desse modo,

$$\begin{aligned}
P_I \mathcal{H}_{inter(i)} P_I &= -JP_I(\Omega_{i+1} \Omega_{i+2}^2 + \Omega_{i+1}^2 \Omega_{i+2})P_I - hP_I(M_{i+1} + M_{i+1}^2)P_I \\
\mathcal{H}_{R(inter)} &= -J \left(\frac{c_3^2 - 1}{c_3^2 + 2} \right) (\Omega_{R(I)} \Omega_{R(I)}^2 + \Omega_{R(I)}^2 \Omega_{R(I)}) \\
&- h \left(\frac{2c_3 + 1}{c_3^2 + 2} \right) (M_{R(I)} + M_{R(I)}^2). \tag{3.27}
\end{aligned}$$

Como podemos observar, a Hamiltoniana preserva a mesma simetria que a vista na Eq.(3.13) a menos de constantes aditivas. Assim, definindo

$$h_R = h \left(\frac{2c_3 + 1}{c_3^2 + 2} \right) \quad \text{e} \quad (3.28)$$

$$J_R = J \left(\frac{c_3^2 - 1}{c_3^2 + 2} \right), \quad (3.29)$$

a nova Hamiltoniana torna-se

$$\mathcal{H}_{R(inter)} = J_R(\Omega_{R(I)}\Omega_{R(I)}^2 + \Omega_{R(I)}^2\Omega_{R(I)}) - h_R(M_{R(I)} + M_{R(I)}^2). \quad (3.30)$$

Com isso, definindo $k' = \frac{J_R}{h_R}$ e $k = \frac{J}{h}$, podemos encontrar a equação de renormalização

$$\frac{J_R}{h_R} = \frac{J \left(\frac{c_3^2 - 1}{c_3^2 + 2} \right)}{h \left(\frac{2c_3 + 1}{c_3^2 + 2} \right)} \rightarrow k' = k \left(\frac{c_3^2 - 1}{2c_3 + 1} \right). \quad (3.31)$$

Considerando a expressão dada na Eq.(3.10), a Eq.(3.31) pode ser escrita como

$$k' = \frac{-2k^2(3 + \sqrt{9k^2 - 6k + 9})}{(k - 3)\sqrt{9k^2 - 6k + 9} - 3k^2}. \quad (3.32)$$

Essa equação fornece dois pontos fixos triviais, $k = 0$ e $k = \infty$, e um ponto fixo instável, não trivial, $k^* = 1$, o qual é associado ao ponto crítico.

O expoente crítico do comprimento de correlação é calculado linearizando a equação de renormalização dada na Eq.(3.32) no ponto crítico [42, 55]

$$\begin{aligned} \lambda &= \left. \frac{dk'}{dk} \right|_{k=k^*} = 2,267949195, \\ \nu^{-1} &= \log_2(\lambda) \rightarrow \nu = \frac{\ln(2)}{\ln(\lambda)} = 0,8464617274, \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde usamos base dois, porque o sistema foi escalado por um fator 2. Como podemos observar, esse resultado concorda, com boa aproximação, com o que já foi encontrado utilizando leis de escala para o *gap* de energia, $\nu = 0,84623$, e ambos se aproximam do previsto por Wu, $\nu = \frac{5}{6}$, para o correspondente modelo clássico em duas dimensões [25].

Agora, repetiremos este cálculo de Grupo de Renormalização no Espaço Real para $q = 4$.

3.3 Caso $q = 4$

Para o modelo de Potts quântico com $q = 4$, a Hamiltoniana para um bloco com dois sítios é dada por

$$\mathcal{H}_n = -J(\Omega_i \Omega_{i+1}^3 + \Omega_i^2 \Omega_{i+1}^2 + \Omega_i^3 \Omega_{i+1}) - h(M_i + M_i^2 + M_i^3), \quad (3.34)$$

onde os operadores são as matrizes

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & i & & \\ & & -1 & \\ & & & -i \end{bmatrix},$$

e

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seguindo os mesmo procedimento que desenvolvemos no caso $q = 3$, a Hamiltoniana do bloco é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n &= -J[(\Omega \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes \Omega^3) + (\Omega^2 \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes \Omega^2) + (\Omega^3 \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes \Omega)] \\ &\quad - h(M \otimes \mathbf{1} + M^2 \otimes \mathbf{1} + M^3 \otimes \mathbf{1}), \end{aligned} \quad (3.35)$$

a qual diagonalizada nos fornece os seguintes autovalores:

$$\lambda_0 = -J - h - 2\sqrt{J^2 - Jh + h^2} \rightarrow \text{quatro vezes degenerado}, \quad (3.36)$$

$$\lambda_1 = -J - h + 2\sqrt{J^2 - Jh + h^2} \rightarrow \text{quatro vezes degenerado}, \quad (3.37)$$

$$(3.38)$$

e

$$\lambda_2 = h + J \rightarrow \text{oito vezes degenerado}. \quad (3.39)$$

Consideramos apenas os autovetores do estado fundamental, λ_0 , como geradores de um subespaço de menor energia, em que pretendemos projetar a Hamiltoniana interbloco.

Para isso, definimos os vetores de base de Ω na Hamiltoniana inicial como

$$|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |3\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad |4\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Com isso, os autovetores do estado fundamental podem ser escritos como

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{c_4^2 + 3}}(c_4|11\rangle + |21\rangle + |31\rangle + |41\rangle), \quad (3.40)$$

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{c_4^2 + 3}}(|12\rangle + c_4|22\rangle + |32\rangle + |42\rangle), \quad (3.41)$$

$$|\Psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{c_4^2 + 3}}(|13\rangle + |23\rangle + c_4|33\rangle + |43\rangle), \quad (3.42)$$

e

$$|\Psi_4\rangle = \frac{c_4}{\sqrt{c_4^2 + 3}}\left(\frac{1}{c_4}|14\rangle + \frac{1}{c_4}|24\rangle + \frac{1}{c_4}|34\rangle + |44\rangle\right). \quad (3.43)$$

A constante c_4 é dada por

$$c_4 \equiv \frac{3h}{-3J - \lambda_0}. \quad (3.44)$$

Essas relações são fundamentais para que possamos projetar os operadores de maneira a encontrarmos expressões mais simples e, assim, trabalharmos a equação de renormalização de forma mais objetiva. Para esse caso, definimos o projetor em função dos estados fundamentais tal que

$$P_I = |\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| + |\Psi_2\rangle\langle\Psi_2| + |\Psi_3\rangle\langle\Psi_3| + |\Psi_4\rangle\langle\Psi_4|. \quad (3.45)$$

Definindo as Hamiltonianas intra e interbloco, respectivamente, como

$$\mathcal{H}_{intra} = -J(\Omega_i\Omega_{i+1}^3 + \Omega_i^2\Omega_{i+1}^2 + \Omega_i^3\Omega_{i+1}) - h(M_i + M_i^2 + M_i^3) \quad (3.46)$$

e

$$\mathcal{H}_{inter} = -J(\Omega_{i+1}\Omega_{i+2}^3 + \Omega_{i+1}^2\Omega_{i+2}^2 + \Omega_{i+1}^3\Omega_{i+2}) - h(M_{i+1} + M_{i+1}^2 + M_{i+1}^3), \quad (3.47)$$

vamos projetar cada um de seus termos no subespaço de menor energia.

3.3.1 Projeções no subespaço de menor energia

Com o projetor descrito na Eq.(3.45), projetamos as Hamiltonianas e comparamo-as antes e depois da renormalização. Os termos projetados nos permitem encontrar a equação de renormalização, com a qual calculamos o expoente crítico do comprimento de correlação. Para a parte intrablocos, temos

$$P_I \mathcal{H}_{intra(i)} P_I = \lambda_0 \mathbb{1}_I = -(J + h + 2\sqrt{J^2 - Jh + h^2}) \mathbb{1}_I, \quad (3.48)$$

$$P_I(\Omega_{i+1})P_I = P_I(\mathbb{1}_i \otimes \Omega_{i+1})P_I = \Omega_{R(I)}, \quad (3.49)$$

$$P_I(\Omega_{i+1}^2)P_I = P_I(\mathbb{1}_i \otimes \Omega_{i+1}^2)P_I = \Omega_{R(I)}^2 \quad (3.50)$$

e

$$P_I(\Omega_{i+1}^3)P_I = P_I(\mathbb{1}_i \otimes \Omega_{i+1}^3)P_I = \Omega_{R(I)}^3, \quad (3.51)$$

onde os operadores renormalizados são dados por

$$\Omega_{R(I)} = 1|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| + i|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2| - 1|\Psi_3\rangle\langle\Psi_3| - i|\Psi_4\rangle\langle\Psi_4|, \quad (3.52)$$

$$\Omega_{R(I)}^2 = 1|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| - 1|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2| + |\Psi_3\rangle\langle\Psi_3| - |\Psi_4\rangle\langle\Psi_4|, \quad (3.53)$$

$$\Omega_{R(I)}^3 = 1|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| - i|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2| - 1|\Psi_3\rangle\langle\Psi_3| + i|\Psi_4\rangle\langle\Psi_4|, \quad (3.54)$$

$$M_{R(I)} = (|\Psi_4\rangle\langle\Psi_1| + |\Psi_1\rangle\langle\Psi_2| + |\Psi_2\rangle\langle\Psi_3| + |\Psi_3\rangle\langle\Psi_4|), \quad (3.55)$$

$$M_{R(I)}^2 = (|\Psi_3\rangle\langle\Psi_1| + |\Psi_4\rangle\langle\Psi_2| + |\Psi_1\rangle\langle\Psi_3| + |\Psi_2\rangle\langle\Psi_4|), \quad (3.56)$$

e

$$M_{R(I)}^3 = (|\Psi_2\rangle\langle\Psi_1| + |\Psi_3\rangle\langle\Psi_2| + |\Psi_4\rangle\langle\Psi_3| + |\Psi_1\rangle\langle\Psi_4|). \quad (3.57)$$

Com isso, podemos agora projetar os termos interbloco M , M^2 e M^3 , respectivamente,

$$P_I(\mathbb{1}_i \otimes M_{i+1})P_I = \left(\frac{2c_4 + 1}{c_4^2 + 3} \right) M_{R(I)}, \quad (3.58)$$

$$P_I(\mathbb{1}_i \otimes M_{i+1}^2)P_I = \left(\frac{2c_4 + 1}{c_4^2 + 3}\right) M_{R(I)}^2 \quad \text{e} \quad (3.59)$$

$$P_I(\mathbb{1}_i \otimes M_{i+1}^3)P_I = \left(\frac{2c_4 + 1}{c_4^2 + 3}\right) M_{R(I)}^3. \quad (3.60)$$

Para finalizar, vamos agora projetar os operadores diagonais Ω , Ω^2 e Ω^3 do bloco seguinte.

$$P_{I+1}(\Omega_{i+2} \otimes \mathbb{1}_{i+3})P_{I+1} = \left(\frac{c_4^2 - 1}{c_4^2 + 3}\right) \Omega_{R(I+1)}, \quad (3.61)$$

$$P_{I+1}(\Omega_{i+2}^2 \otimes \mathbb{1}_{i+3})P_{I+1} = \left(\frac{c_4^2 - 1}{c_4^2 + 3}\right) \Omega_{R(I+1)}^2 \quad \text{e} \quad (3.62)$$

$$P_{I+1}(\Omega_{i+2}^3 \otimes \mathbb{1}_{i+3})P_{I+1} = \left(\frac{c_4^2 - 1}{c_4^2 + 3}\right) \Omega_{R(I+1)}^3. \quad (3.63)$$

Comparando a Hamiltoniana interbloco antes e depois da renormalização, podemos verificar que ela preserva a mesma simetria que a expressão vista na Eq.(3.34) a menos de constantes aditivas. Assim, vemos que

$$\mathcal{H}_{inter} = -J(\Omega_{i+1}\Omega_{i+2}^3 + \Omega_{i+1}^2\Omega_{i+2}^2 + \Omega_{i+1}^3\Omega_{i+2}) - h(M_{i+1} + M_{i+1}^2 + M_{i+1}^3) \quad (3.64)$$

tem simetria de

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{inter}^R &= P_I \mathcal{H}_{inter} P_I = -J^R(\Omega_{R(i+1)}\Omega_{R(i+2)}^3 + \Omega_{R(i+1)}^2\Omega_{R(i+2)}^2 + \Omega_{R(i+1)}^3\Omega_{R(i+2)}) \\ &\quad - h^R(M_{R(i+1)} + M_{R(i+1)}^2 + M_{R(i+1)}^3), \end{aligned} \quad (3.65)$$

onde

$$h_R = h \left(\frac{2c_4 + 1}{c_4^2 + 3} \right), \quad (3.66)$$

e

$$J_R = J \left(\frac{c_4^2 - 1}{c_4^2 + 3} \right). \quad (3.67)$$

Definindo $k' = \frac{J_R}{h_R}$ e $k = \frac{J}{h}$, encontramos a equação de renormalização

$$k' = k \left(\frac{c_4^2 - 1}{2c_4 + 1} \right) = \frac{4k(2k\sqrt{k^2 - k + 1} - 2k^2 - \sqrt{k^2 - k + 1} + 2k + 1)}{(7 - 2k + 2\sqrt{k^2 - k + 1})(1 - 2k + 2\sqrt{k^2 - k + 1})}, \quad (3.68)$$

que apresenta dois pontos fixos triviais, $k = 0$ e $k = \infty$, e um ponto fixo instável não trivial $k = 0,908$, o ponto crítico. Linearizando essa equação no ponto crítico, encontramos o expoente crítico do comprimento de correlação ν [55].

$$\nu^{-1} = \log_2 \left. \frac{dk'}{dk} \right|_{k=k^*} = \log_2(\lambda) \rightarrow \lambda = \left. \frac{dk'}{dk} \right|_{k=k^*} = 2,3891$$

e

$$\nu = \frac{\ln(2)}{\ln(\lambda)} = 0,7958 \quad (3.69)$$

Um fato interessante observado aqui é que, quando substituímos o ponto crítico previsto na Eq.(3.68) pelo ponto crítico previsto para esse modelo através leis de escala, $k^* = 1$, obtemos o expoente crítico muito próximo do valor previsto por Wu [25], $\nu = \frac{2}{3}$, para o caso $q = 4$ do correspondente modelo clássico em duas dimensões,

$$\lambda = \left. \frac{dk'}{dk} \right|_{k=k^*} = 2,73464$$

e

$$\nu = \frac{\ln(2)}{\ln(\lambda)} = 0,688. \quad (3.70)$$

Como podemos verificar, as técnicas de grupo de renormalização no espaço real fornecem resultados satisfatórios para o expoente crítico do comprimento de correlação para o modelo de Potts descrito acima, concordando com boa aproximação com o previsto por Wu [25], $\frac{2}{3}$; e do

valor encontrado anteriormente via escala do *gap* de energia, 0,667.

Capítulo 4

Conclusões e perspectivas

Nesse trabalho, resolvemos o modelo de Potts quântico em uma dimensão com o objetivo de analisar a relação de escala através da lei de escala fenomenológica do *gap* de energia, bem como aplicar a ideia do grupo de renormalização no espaço real para calcular o expoente crítico do comprimento de correlação para esse modelo. Foram estudados os casos $q = 3$ e $q = 4$ com ambas as técnicas. No caso da escala fenomenológica do *gap* de energia, verificamos que a escala proposta, $g' = g^{f_q(b)}$, fornece valores muito próximos dos previstos na literatura, tanto para o caso $q = 3$, $\nu = 0,846 \pm 0,003$, quanto para o $q = 4$, $\nu = 0,667 \pm 0,044$. Esses cálculos foram realizados numericamente com tamanhos de rede N , com $N = 1, \dots, 8$ no caso $q = 3$ e $N = 1, \dots, 6$ no caso $q = 4$.

Com o grupo de renormalização no espaço real, calculamos os valores do expoente crítico do comprimento de correlação, também, para os dois casos citados acima, e verificamos que os valores encontrados concordam com boa aproximação nos dois casos, $\nu = 0,846$ e $\nu = 0,796$.

Foi feita também uma análise para o caso $q = 5$, onde há transição de primeira ordem, e verificamos que, os dados obtidos aqui não nos fornecem um *gap* maior que zero em $g = 1$, dificultando assim uma análise mais precisa desse tipo de transição.

Com base em Migdal-Kadanoff, analisamos a possibilidade de tratarmos o modelo em duas dimensões, o que nos forneceu os mesmos valores encontrados para o caso unidimensional, evidenciando ser preciso um mecanismo que nos permita ampliar esse estudo para dimensões mais altas.

Dessa forma, uma proposta para uma investigação futura é utilizar um mecanismo que nos permita estudar o modelo em duas dimensões, descrever as curvas críticas do modelo, e desenvolver um programa com redes maiores para os casos $q = 4$ e $q = 5$ para que assim possamos descrever o comportamento crítico do modelo. Isso será implementado através do método do traço parcial da matriz densidade com descrito na Ref [56].

Referências Bibliográficas

- [1] Andrews, T. The continuity of the gaseous and liquid states of matter. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **159**:575–590, 1869.
- [2] Pelissetto, A. and Vicari, E. Critical phenomena and renormalization-group theory. *Physics Reports*, **368(6)**:549 – 727, 2002.
- [3] Wilson, K. G. Renormalization group and critical phenomena. *Physics Review B*, **4**:3174, 1971.
- [4] Amico, L. ; Fazio, R. ; Osterloh, A. and Vedral, V. Entanglement in many-body systems. *Review of Modern Physics*, **80**:517–576, 2008.
- [5] Sachdev, S . Quantum phase transitions. *Cambridge University Press*, 2011.
- [6] Osborne, T. J. and Nielsen, M. A. Entanglement in a simple quantum phase transition. *Physical Review A*, **66(3)**:032110, 2002.
- [7] Stanley, H. E. Scaling, universality, and renormalization: Three pillars of modern critical phenomena. *Reviews of Modern Physics*, **71(2)**:S358, 1999.
- [8] Blinc, R. On the isotopic effects in the ferroelectric behaviour of crystals with short hydrogen bonds. *Journal of Physics Chemistry of Solids*, **13**:204, 1960.
- [9] de Gennes, P. G. Collective motions of hydrogen bonds. *Solid State Communications*, **1(6)**:132–137, 1963.
- [10] Stinchcombe, R. B. Exact scalings of pure and dilute quantum transverse Ising chains. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, **14(16)**:2193, 1981.
- [11] Sólyom, J. and Pfeuty, P. Renormalization-group study of the Hamiltonian version of the Potts model. *Physical Review B*, **24(1)**:218, 1981.

- [12] Latorre, J. I. ; Lütken, C. A. ; Rico, E. and Vidal, G. Fine-grained entanglement loss along renormalization-group flows. *Physical Review A*, **71(3)**:034301, 2005.
- [13] Orús, R. Entanglement and majorization in (1+ 1)-dimensional quantum systems. *Physical Review A*, **71(5)**:052327, 2005.
- [14] Kogut, J. and Wilson, K. The renormalization group and the ϵ expansion. *Physics Report. C*, **12(2)**:75–200, 1974.
- [15] Goldenfeld, N. Lectures on phase transitions and the renormalization group. *CRC Press*, 1992.
- [16] Goldenfeld, N. Lectures on phase transitions and the renormalization group. *CRC Press*, 2018.
- [17] Pfeuty, P. The one-dimensional Ising model with a transverse field. *Annals of Physics*, **57(1)**:79–90, 1970.
- [18] Young, A. P. Quantum effects in the renormalization group approach to phase transitions. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, **8(15)**:L309, 1975.
- [19] Hertz, J. A. Quantum critical phenomena. *Physical Review B*, **14(3)**:1165, 1976.
- [20] Onsager, L. Crystal statistics. A two-dimensional model with an order-disorder transition. *Physical Review*, **65(3-4)**:117, 1944.
- [21] Yang, C. N. The spontaneous magnetization of a two-dimensional Ising model. *Physical Review*, **85(5)**:808, 1952.
- [22] Wu, T. T. Theory of Toeplitz determinants and the spin correlations of the two-dimensional Ising model. I. *Physical Review*, **149(1)**:380, 1966.
- [23] Suzuki, M. Relationship between d-dimensional quantum spin systems and (d+ 1)-dimensional Ising systems: equivalence, critical exponents and systematic approximants of the partition function and spin correlations. *Progress of Theoretical Physics*, **56(5)**:1454–1469, 1976.
- [24] Stinchcombe, R. B and dos Santos, R. R. Critical dynamics of quantum chains by position space renormalisation group. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **18(10)**:L597, 1985.
- [25] Wu, F. Y. The Potts model. *Review Modern Physics*, **54**:235–268, 1982.

- [26] Domb, C. Configurational studies of the Potts models. *Journal of Physics A: Mathematical, Nuclear and General*, **7(11)**:1335, 1974.
- [27] dos Santos, R. R. ; Sneddon, L. and Stinchcombe, R. B. The 2D transverse Ising model at $T=0$: a finite-size rescaling transformation approach. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **14(12)**:3329, 1981.
- [28] Yeomans, J. M. Statistical mechanics of phase transitions. *Clarendon Press*, 1992.
- [29] Sachdev, S . Quantum phase transitions. *Physics World*, **12(4)**:33, 1999.
- [30] Sachdev, S . Quantum impurity in a magnetic environment. *Journal of Statistical Physics*, **115(1-2)**:47–56, 2004.
- [31] Baxter, R. J. Exactly solved models in statistical mechanics. *Elsevier*, 2016.
- [32] Vojta, T. Quantum phase transitions in electronic systems. *Annalen der Physik*, **9(6)**:403–440, 2000.
- [33] Bitko, D. ; Rosenbaum, T. F and Aeppli, G. Quantum critical behavior for a model magnet. *Physical Review Letters*, **77(5)**:940, 1996.
- [34] Cardy, J. Scaling and renormalization in statistical physics. *Cambridge University Press*, 1996.
- [35] Salinas, R. A. Introdução à física estatística. *Edusp São Paulo*, 2013.
- [36] Ising, E. Beitrag zur theorie des ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik*, **31(1)**:253–258, 1925.
- [37] Huang, K. Statistical mechanics. *Massachusetts Institute of Technology*, 1964.
- [38] de Oliveira, M. J. Dinâmica estocástica e irreversibilidade. *Edusp São Paulo*, 2001.
- [39] Niss, M. History of the Lenz-Ising model 1920–1950: from ferromagnetic to cooperative phenomena. *Archive for history of exact sciences*, **59(3)**:267–318, 2005.
- [40] Monthus, C. Block renormalization for quantum Ising models in dimension $d=2$: applications to the pure and random ferromagnet, and to the spin-glass. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, **2015(1)**:P01023, 2015.
- [41] Mittag, L. and Stephen, M. J. Dual transformations in many-component Ising models. *Journal of Mathematical Physics*, **12(3)**:441–450, 1971.

- [42] Fernandez-Pacheco, A. Comment on the SLAC renormalization-group approach to the Ising chain in a transverse magnetic field. *Physics Review D*, **19**:3173–3175, May 1979.
- [43] Jullien, R. ; Pfeuty, P. ; Fields, J. N. and Doniach, S. Zero-temperature renormalization method for quantum systems. Ising model in a transverse field in one dimension. *Physical Review B*, **18**(7):3568, 1978.
- [44] Miyazaki, R. ; Nishimori, H. and Ortiz, G. Real space renormalization group for the transverse field Ising model in two and three dimensions. *Physics Review E*, **83**:051103, 2011.
- [45] Blote, H. W. J. ; Luijten, E. and Heringa, J. R. . Ising universality in three dimensions: a Monte Carlo study. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **28**(22):6289, 1995.
- [46] Ashkin, J. and Teller, E. Statistics of two-dimensional lattices with four components. *Physics Review*, **64**:178–184, 1943.
- [47] Potts, R. B. Some generalized order-disorder transformations. **48**(1):106–109, 1952.
- [48] Baxter, R. J. Potts model at the critical temperature. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, **6**(23):L445, 1973.
- [49] dos Santos, R. R and Sneddon, L. Finite-size rescaling transformations. *Physical Review B*, **23**(7):3541, 1981.
- [50] dos Santos, R. R. , dos Santos, R. Z. and Kischinhevsky, M. Transverse Ising spin-glass model. *Physical Review B*, **31**(7):4694, 1985.
- [51] Campostrini, M. ; Nespolo, J. ; Pelissetto, A. and Vicari, E. Finite-size scaling at the first-order quantum transitions of quantum Potts chains. *Physics Review E*, **91**:052103, 2015.
- [52] Kadanoff, L. P. Notes on Migdal's recursion formulas. *Annals of Physics*, **100**(1-2):359–394, 1976.
- [53] Stinchcombe, R. B. Diluted quantum transverse Ising model. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, **14**(10):L263, 1981.
- [54] Miyazaki, R. and Nishimori, H. Real space renormalization group approach to the random transverse-field Ising model in finite dimensions. *Physics Review E*, **87**:032154, 2013.

-
- [55] Kubica, A. and Yoshida, B. Precise estimation of critical exponents from real-space renormalization group analysis. *arXiv preprint arXiv:1402.0619*, 2014.
- [56] dos Santos, R. R. The pure and diluted quantum transverse Ising model. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, **15(14)**:3141, 1982.