Universidade Federal do Piauí

Campus Ministro Reis Velloso

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -PROFMAT

Mestrado em Matemática

Derivada e Aplicações

Francisco de Assis Lima Galeno

Parnaiba - 2016

Francisco de Assis Lima Galeno

Dissertação de Mestrado:

Derivada e Aplicações

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -PROFMAT, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Profª. Drª. Sissy da Silva Souza

Parnaíba - 2016

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

SBM

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada: ***Derivada e Aplicações,*** defendida por Francisco de Assis Lima Galeno em **28/09/2016** e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Sissy da Silva Souza

Profª Drª Sissy da Silva Souza (Presidente-UFPI)

Kécia Silva Araujo

Profª M.Sc. Kécia Silva Araújo (IFPI)

Paulo Sg Mq dos S

Profº Dr. Paulo Sérgio Marques dos Santos (UFPI)

Ficha catalográfica editada pela biblioteca setorial do CCN.

Galeno, F.A.L.

Derivada e Aplicações.

Francisco de Assis Galeno – Parnaíba: 2016.

Orientador: Profª. Drª. Sissy da Silva Souza.

1. Área de Concentração: Matemática para o ensino básico.

CDD 516.36

Dedico as bênçãos e dádivas prestadas a minha existência em particular esta dissertação ao meu Deus e nosso senhor Jesus Cristo, a minha amada família, em particular, a minha mãe Maria do Rosário Lima Galeno e ao meu pai Vicente de Paulo da Costa Galeno .

Agradecimentos

A Deus por ter me mantido sempre focado e com a esperança de poder realizar esse feito.

A minha mãe Maria do Rosário Lima Galeno e meu pai Vicente de Paulo da Costa Galeno, por terem me dado amor e força para que eu seguisse o caminho certo.

Aos meus irmãos, sobrinhos e primos que também contribuiram para que a minha vida de estudante chegasse a esse ponto.

Aos amigos(as) companheiros de curso que se mostraram solidários e atenciosos nos momentos de estudo que tivemos.

A todos professores que fizeram parte da nossa formação, pela dedicação e responsabilidade com o ensino repassado.

A minha orientadora que muito contribuiu para a conclusão desse trabalho.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

"*Vencer a si próprio é a maior das vitorias*".

Platão.

Resumo

Este trabalho apresenta desde o conceito de limite, até derivadas e aplicações, de modo que esse conteúdo possa servir de base para professores de Matemática que lecionam no Ensino Médio e estudantes dos primeiros períodos de graduação. Através de aplicações em diversas áreas, de Geometria a outras ciências, esperamos alcançar o objetivo de que esse conteúdo seja melhor apresentado, despertando o interesse do aluno ao estudo de derivadas. Essa dissertação foi escrita baseada em diversos livros de cálculo diferencial e integral conhecidos na literatura.
Palavras-chave: Derivadas e suas aplicações; Ensino Médio.

Abstract

This work has provided the concept of limit, to derivatives and applications, so that content can be the basis for mathematics teachers who teach in high school and students of the first periods of graduation. Through applications in various areas of geometry to other sciences, we hope to achieve the goal of this content is better presented, arousing the interest of the student to study derived. This dissertation was written based on several books of differential and integral calculus known in the literature. This work has provided the concept of limit, to derivatives and applications, so that content can be the basis for mathematics teachers who teach in high school and students of the first periods of graduation. Through applications in various areas of geometry to other sciences, we hope to achieve the goal of this content is better presented, arousing the interest of the student to study derived. This dissertation was written based on several books of differential and integral calculus known in the literature.

Keywords: Derivative and its applications; High school.

Sumário

Introdução

As ideias transcritas nesse trabalho serão voltadas para estudo das derivadas e suas aplicações, e uma de suas metas será a exposição de métodos que viabilizem e facilitem a aproximação do aluno do ensino médio com esse conteúdo, que é de grande importância no ensino da matemática, mas que devido ao seu alto preceito teórico torna-se impraticável no cenário atual fazer uma discussão mais aprofundada a respeito. Além disso, os requisitos teóricos relacionados à ideia de limite de uma função, um pré-requisito para a introdução do estudo das derivadas, por isso, apresentação da teoria sobre limites e suas propriedades, bem como, da continuidade de uma função real.

Convém destacarmos que o padrão adotado para exemplificar as propostas vistas nos mais diversos livros de cálculo sobre a teoria dos limites de funções reais descreve tal tema por intermédio de critérios rigorosos e abstratos, o que é correto e válido, mas naquela especificidade. No entanto, aqui não pretendemos utilizar o formalismo apresentado em livros de ensino superior, pois estamos interessados em levar para o aluno do ensino médio um material que venha a lhe apresentar ideias simples e pontuais a respeito desse tema,e também porque, os professores já enfrentam o desafio de receber no ensino médio alunos que, em vez de preparados para o novo, precisam é relembrar o antigo.

Esse trabalho traz, no Capítulo 1, noções preliminares sobre limites, definições, alguns resultados voltados para as funções reais e ainda as ideias e resultados referentes as funções contínuas. No Capítulo 2, apresenta o conceito de derivação e seu uso em aplicações voltadas para a ideia de máximos e mínimos de uma função real. A abordagem de todos esses conteúdos teve sustentação teórica em livros didáticos utilizados no ensino do cálculo diferencial.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Nesse capítulo veremos ideias e embasamento teórico sobre o estudo dos limites de funções reais, a intenção é poder contribuir para que essa proposta de ensino seja abordada nas séries do Ensino médio, e que sirva de base para aqueles que pretendam ingressar em um curso superior. Mais detalhes sobre todo o assunto (definições, resultados e exemplos) que abordaremos neste capítulo podem ser encontrados, por exemplo,em [6], [8] e [5].

1.1 A ideia intuitiva de limite de uma função

Nesta seção mostraremos a ideia de limite de uma função com uma variável real por meio de alguns exemplos baseados em situações que envolva, em particular, noções básicas sobre algumas funções, usaremos essa estratégia por entendermos que esse é o caminho mais adequado para se ensinar as primeiras noções do cálculo para alunos do ensino médio.

Exemplo 1.1.1. *Consideremos a função real* $f(x) = x - 2$*, e vejamos como ela se comporta em torno do ponto* $x = 3$*. A ideia aqui é usarmos aproximações sucessivas com valores de* x *cada vez mais próximos de 3 (sem atíngi-lo), tanto pela esquerda (valores menores do que 3) quanto pela direita (valores maiores do que 3). Então recorremos aos resultados na tabela abaixo, veja:*

x	*2,7*	*2,8*	*2,9*	*2,99*	...	*3,001*	*3,01*	*3,1*	*3,2*
$f(x)$	*0,7*	*0,8*	*0,9*	*0,99*	...	*1,001*	*1,01*	*1,1*	*1,2*

Os resultados mostrados na tabela, indicam que na medida em que os valores de x se aproximam de 3, porém sem atingi-lo, os valores de $f(x)$ se aproximam de 1, então podemos assumir que o valor limite 1 descreve o comportamento da função em torno do ponto 3, ou seja, o limite da função quando x tende a 3.

Esse limite é na verdade $f(3) = 1$, porém, isso não significa que a ideia de se calcular um limite seja determinar diretamente o valor da função no ponto, até porque o que é levado em consideração são os valores x tomados bem próximos de 3 (sem atíngi-lo), neste caso devemos ter $x \neq 3$.

Intuitivamente podemos considerar que o limite de uma função num ponto a apenas diz respeito ao comportamento dela em torno do ponto. Para os casos em que o limite da função é um número A quando x se aproxima de um número a tanto pela esquerda como pela direita, temos a seguinte notação do limite de $f(x)$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Há casos em que esse valor condiz com o próprio valor da função em a, e matematicamente o expressamos escrevendo:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Exemplo 1.1.2. *Para ilustrar melhor o conceito de limite vamos mostrar um método que nos permita encontrar uma reta que tangencie à parábola* $y = x^2$ *no ponto* $P(1, 1)$.

De início nós só temos um ponto de passagem da reta, e para obtermos o coeficiente angular de uma reta são necessários dois pontos, mas podemos obter uma aproximação do coeficiente angular da reta tangente escolhendo um ponto $Q(x, x^2)$ *sobre a parábola que esteja na iminência do ponto P, e claro, com* $x \neq 1$. *Quando optamos pelos pontos P e Q ganhamos uma reta PQ secante a parábola, pois* $P \neq Q$, *porém, se tomarmos* $Q(x, x^2)$ *cada vez mais próximo de P(1, 1) iremos encontrar a aproximação do coeficiente angular da reta tangente, sendo* x *e* m *dados na tabela abaixo.*

Por definição o coeficiente angular da reta secante PQ será:

$$m = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

x	*0,8*	*0,9*	*0,99*	*0,999*	...	*1,001*	*1,01*	*1,1*	*1,11*
m	*1,8*	*1,9*	*1,99*	*1,999*	...	*2,001*	*2,01*	*2,1*	*2,11*

Fica claro que quando x *tende a 1 pela direita ou pela esquerda,* m *se aproxima de 2, logo o limite de* m *vale 2, mesmo sendo* $x \neq 1$. *E simbolicamente escrevemos:*

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Concluimos então que o coeficiente angular da reta tangente é $m = 2$*, logo a equação que procuramos será dada por:*

$$y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 1.$$

Exemplo 1.1.3. *Suponha que uma bola seja solta a partir do ponto de observação no alto de uma torre, 370 m acima do solo. Encontre a velocidade da bola após 5 segundos.*

Usando experimentos, Galileu descobriu que a distância percorrida por qualquer objeto em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo em que ele esteve caindo, ou seja, $s(t) = 4,9t^2$ *(esse modelo para a queda livre despreza a resistência do ar).*

Sabemos que nesse tipo movimento a velocidade não é constante, ou seja, ela tem um determinado valor em cada instante, além disso não temos um intervalo de tempo, mas podemos calcular a velocidade média sobre pequenos intervalos de tempo do tipo $5 < t < 5 + h$*, com* h *cada vez menor. Na física a velocidade média é dada por:*

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow v_m = \frac{s(5+h) - s(5)}{h} \Rightarrow v_m = 49 + 4,9h$$

. Veja na tabela os valores da velocidade para h *cada vez menor.*

t	$5 \leqslant t \leqslant 5,1$	$5 \leqslant t \leqslant 5,05$	$5 \leqslant t \leqslant 5,01$	$5 \leqslant t \leqslant 5,001$
v_m	*49,49*	*49,245*	*49,049*	*49,0049*

Note que, à medida em que encurtamos o intervalo de tempo, ou seja, tomando h *cada vez menor, a velocidade média vai ficando cada vez mais próxima de 49 m/s. Então podemos concluir que o valor limite da velocidade ápos 5 segundos vale 49 m/s. Usando notação de limite, temos:*

$$\lim_{h \to 0} v_m = 49.$$

É importante destacarmos que a expressão da velocidade média pode ser interpretada como sendo o coeficiente angular da reta secante à curva $s(t) = 4,9t^2$ *nos pontos do tipo* $A(5, s(5))$ *e* $B(5 + h, s(5 + h))$*, dado por:*

$$m = \frac{s(5+h) - s(5)}{h}.$$

Intuitivamente podemos dizer que quando existe o limite de uma função num ponto a, podemos descrevê-lo do seguinte modo:

Suponha que houvesse dois caminhos para se chegar muito próximo do número a, um à direita e outro à esquerda, mas sem atingi-lo, se nos dois casos o comportamento da função for direcionado para um mesmo valor A, então existe o limite da função no número a.

1.2 Definição de Limite

Definição 1.2.1. *Diremos que a função* $f : X \to \mathbb{R}$*, com* $X \subset \mathbb{R}$*, possui limite igual a* L *no ponto* a*, e escrevemos*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

quando for possivel tomar $f(x)$ *arbitrariamente próximo de* L*, desde que se tome* $x \in X$ *suficientemente próximo de* a *(e diferente de* a*).*

Podemos enunciar também do seguinte modo: O $\lim_{x \to a} f(x) = L$, se para todo $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ tal que, se x estiver no intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$ e $x \neq a$, então $f(x)$ estará no intervalo aberto $(L - \epsilon, L + \epsilon)$.

Observação 1.2.1. *Em conformidade com tudo que já foi mencionado, faz sentido escrever* $\lim_{x \to a} f(x) = L$ *quando dado qualquer* $p > 0$ *tivermos* $(a - p, a + p) \cap X \neq \emptyset$*, com isso* a *pode não pertencer ao domínio da função, no entanto, este fato não irá impossibilitar a existência do limite, pois o limite apenas diz respeito ao comportamento da função em torno do número* a*, isto é, da tendência dos valores de* $f(x)$ *para* x *na iminência de* a*, até nos casos onde* $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$*. Em termos geométricos, veja o gráfico abaixo referente à existência de* $\lim_{x \to a} f(x) = L$*.*

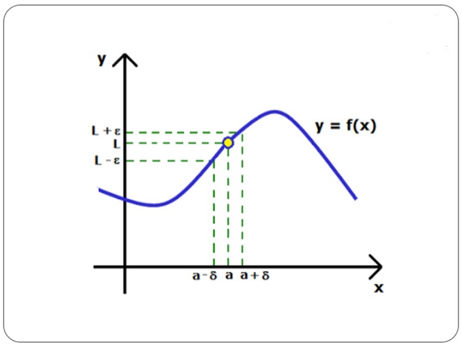

FIGURA 1: Existência de limite

Fonte: elaborado pelo próprio autor

Exemplo 1.2.1. *Considerando a função* $f(x) = 2x - 1$*, temos que* $\lim_{x \to 5}(2x - 1) = 9$*.*

Para mostrarmos esse limite, vamos usar a definição. Se $\lim_{x\to5}(2x-1)=9$ *então dado* $\epsilon>0$ *existe* $\delta>0$*, tal que se* $x\neq5$ *pertencer ao intervalo* $(5-\delta,5+\delta)$*, então* $f(x)$ *pertencerá ao intervalo* $(9-\epsilon,9+\epsilon)$*, ou melhor, se*

$$\|x-5\|<\delta\Rightarrow|f(x)-9|<\epsilon.$$

Note que

$$|(2x-1)-9|=|2x-10|=2|x-5|,$$

e queremos $2|x-5|<\epsilon$ *sempre que* $|x-5|<\delta$*. Vamos tomar* $\delta=\frac{\epsilon}{2}$*. Agora vejamos se a escolha desse* $\delta=\frac{\epsilon}{2}$ *funciona:*

Se $|x-5|<\delta$*, então*

$$\begin{aligned}|(2x-1)-9| &= |2x-10|\\ &= 2|x-5|\\ &< 2\delta\\ &= 2(\tfrac{\epsilon}{2})\\ &= \epsilon.\end{aligned}$$

Veja que tivemos $|(2x-1)-9|<\epsilon$ *sempre que* $|x-5|<\delta$*, portanto,*

$$\lim_{x\to5}(2x-1)=9.$$

Exemplo 1.2.2. *Vamos verificar se existe o limite da função* $f:R-\{0\}\longrightarrow R$ *definida por* $f(x)=\frac{|x|}{x}$ *no ponto* $x=0$.

Note que para $x>0$*, temos* $|x|=x$*, logo* $f(x)=1$.

Analogamente, se $x<0$*, temos* $|x|=-x$*. Logo* $f(x)=-1$*. Assim, podemos escrever:*

$$f(x)=\begin{cases}1 & se \quad x>0\\ -1 & se \quad x<0\end{cases}$$

Observe que:

- *Quando* x *tende a 0 para valores menores que 0, isto é, pela esquerda, o limite de* $f(x)$ *é* -1*, e o escrevemos* $\lim_{x\to0-}f(x)=-1$.

- *Quando* x *tende a 0 para valores maiores que 0, isto é, pela direita, o limite de* $f(x)$ *é* 1*, e o escrevemos* $\lim_{x\to0+}f(x)=1$.

Devido ao fato dos limites encontrados serem diferentes, a conclusão que tiramos é a de que não existe o limite da função quando x tende a zero.

Teorema 1.2.1. *(Unicidade do limite). Seja* $f : X \to R$ *uma função real. Se* $\lim_{x\to a} f(x) = A$ *e* $\lim_{x\to a} f(x) = B$*, então* $A = B$.

Dado $\epsilon > 0$, existem $p_1 > 0$ e $p_2 > 0$, tais que para $x \in X$,

$$0 < |x - a| < p_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$0 < |x - a| < p_2 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Considere $p = min\{p_1, p_2\}$ e $A - B = A - f(x) + f(x) - B$, admita que exista $\overline{x} \in X$ tal que

$$0 < |\overline{x} - a| < p.$$

Usando a desigualdade triangular em

$$|A - B| \leqslant |A - f(\overline{x})| + |f(\overline{x}) - B| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

temos que $|A - B| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad A = B$.

1.3 Propriedades de limites

As propriedades a seguir são de grande importância na obtenção de outros limites.

Proposição 1.3.1. *Se existem os limites* $\lim_{x\to a} f(x) = A$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = B$*, então:*

1. $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = A + B$;
2. $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = A \cdot B$;
3. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B}; B \neq 0$.

Exemplo 1.3.1. *Calcule o valor da expressão* $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 + 2x)$.

Conforme a Proposição 1.3.1, devemos fazer:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(x^2 + 2x) &= \lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} 2x \\ &= (1)^2 + 2(1) \\ &= 1 + 2 \\ &= 3\end{aligned}$$

Exemplo 1.3.2. *Determine o valor do limite* $\lim_{x\to 4}(x+1)(x-3)$.

Análogo ao exemplo anterior temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4}(x+1)(x-3) &= \lim_{x\to 4}(x+1)\lim_{x\to 4}(x-3)\\ &= (4+1)(4-3)\\ &= (5)(1)\\ &= 5\end{aligned}$$

Exemplo 1.3.3. *Obtenha o valor da expressão* $\lim_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x+5}$.

Usando novamente a Proposição 1.3.1, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x+5} &= \frac{\lim_{x\to 2}(x+1)}{\lim_{x\to 2}(x+5)}\\ &= \tfrac{(2+1)}{(2+5)}\\ &= \tfrac{3}{7}\end{aligned}$$

Teorema 1.3.1. *Se* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ *quando* x *está próximo de a (exceto possivelmente em a) e* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A$, *então* $\lim_{x\to a} g(x) = A$. *Esse resultado é chamado de teorema do confronto.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, existem $p > 0$ e $q > 0$, tais que para x no domínio das funções f, g e h, temos

$$0 < |x-a| < p \quad\Rightarrow\quad A-\epsilon < f(x) < A+\epsilon$$

e

$$0 < |x-a| < q \quad\Rightarrow\quad A-\epsilon < h(x) < A+\epsilon.$$

Para concluirmos, devemos tomar $\delta = \min\{p, q\}$. Assim,

$$|x-a| < \delta \quad\Rightarrow\quad A-\epsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < A+\epsilon.$$

Logo, $A-\epsilon < g(x) < A+\epsilon$. Portanto,

$$\lim_{x\to a} g(x) = A.$$

Exemplo 1.3.4. *Se* $3 \leqslant f(x) \leqslant x^2-4x+7$ *para todo* x, *encontre* $\lim_{x\to 2} f(x)$.

Note que

$$\lim_{x\to 2} 3 = 3$$

e

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - 4x + 7) = 3,$$

logo, pelo teorema do confronto temos:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3.$$

1.4 Limites laterais

Para que exista o limite de uma função em um número a, o comportamento da função deve ser o mesmo para valores próximos de a, tanto para valores maiores quanto para valores menores, ou seja, pela direita e pela esquerda. Nessas circunstâncias indicaremos cada um deles, respectivamente, pelas notações:

- $\lim_{x \to a^+} f(x) = A_1$ (limite lateral direito), que significa que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (A_1 - \epsilon, A_1 + \epsilon)$.

- $\lim_{x \to a^-} f(x) = A_2$ (limite lateral esquerdo), que significa que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) \in (A_1 - \epsilon, A_1 + \epsilon)$.

Um importante resultado sobre a existência do limite é o que descrevemos a seguir:

Teorema 1.4.1. *Temos que* $\lim_{x \to a} f(x) = A$ *se, e somente se, existem e são iguais os limites*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = A.$$

Veja a seguir a ilustração gráfica desse resultado, onde x tende para o valor a por ambos os lados, e limite de $f(x)$ é A.

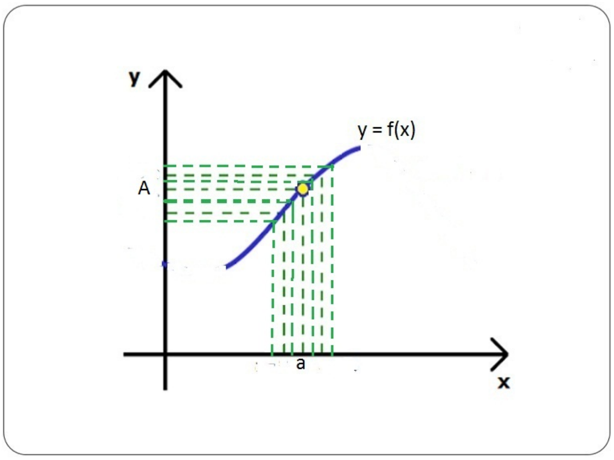

FIGURA 2: limites laterais iguais

Fonte: elaborado pelo próprio autor

1.5 Limites envolvendo os símbolos $+\infty$ e $-\infty$

O símbolo ∞ (infinito) não é especificamente um número, ele apenas representa uma ideia sucessiva de valores positivos ou negativos que tendem a se distanciar de zero infinitamente.

Para exemplificar melhor o uso do símbolo ∞ no conceito de limite, analisaremos o comportamento da função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{1}{x}$, em relação a $\pm\infty$.

As melhores considerações sobre o limite dessa função podem ser feitas através do gráfico cartesiano dado abaixo:

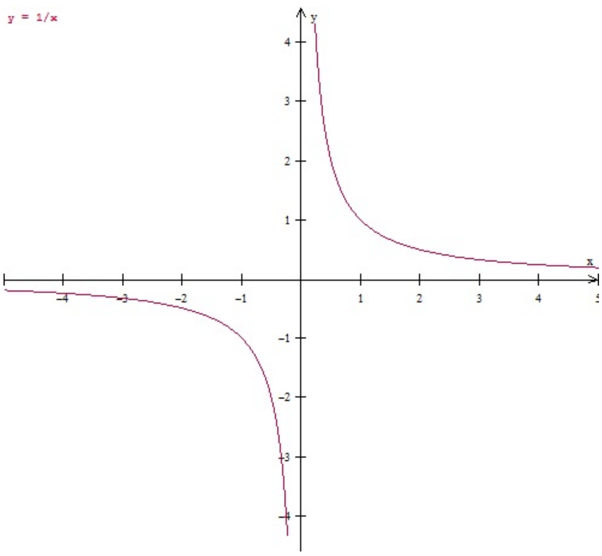

FIGURA 3: Gráfico da função $\frac{1}{x}$

Fonte: elaborado pelo próprio autor

Como observamos no gráfico, quando x tende a zero pela direita, temos

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty,$$

no entanto, para x tendendo a zero pela esquerda, temos

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty.$$

Por outro lado, quanto mais distante de zero for o valor x, positivo ou negativo, teremos os resultados $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ considerados válidos.

1.6 Limite fundamental exponencial

O limite fundamental exponencial tem muitas aplicações na área da biologia, química e em matemática financeira, e é bastante útil na hora de estabelecer a taxa de variação de funções que crescem ou decrescem exponencialmente, como por exemplo, o montante obtido no sistema de juros contínuos.

Nesta seção, analisaremos de maneira simples o limite da função $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$, quando a variável x tende a zero. Antes disso, destacaremos que na história da matemática é muito comum as citações ao número de Euler cujo valor é $e = 2,71828...$, isto é, um número irracional. Tentaremos responder a seguinte pergunta:

Haverá alguma semelhança entre o limite da função f *no ponto zero e o número de Euler?*

Teremos idéia da resposta quando computarmos esse limite usando os resultados da tabela abaixo:

x	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001	...	0,0001	0,001	0,01	0,1
$f(x)$	2,8679	2,7319	2,7196	2,7184	...	2,7181	2,7169	2,7048	2,5937

Com os resultados da tabela notamos que

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Se tomarmos $x = \frac{1}{u}$ teremos:

$$(1 + x)^{\frac{1}{x}} = (1 + \frac{1}{u})^u,$$

com isso se $x \to 0$, $u \to \infty$, e assim:

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{u \to \infty} (1 + \frac{1}{u})^u = e.$$

Exemplo 1.6.1. *Quanto vale* $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{3x}$*?*

Podemos escrever

$$f(x) = [(1+\frac{1}{x})^x]^3,$$

daí,

$$\lim_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{x})^x]^3 = e^3.$$

1.7 Funções contínuas

Considerar a grosso modo que uma função é contínua em seu domínio significa que não há saltos e nem furos em seu gráfico. É o mesmo que dizer que a continuidade de uma função é algo que ocorre gradualmente, sem interrupções ou mudanças abruptas, por outro lado, só faz sentido afirmar que uma função é contínua em um número a se ela estiver definida em a, e, além disso, existir o limite da função em a.

Exploraremos mais a ideia de continuidade expressando que muitas situações no nosso cotidiano são interligadas por algum fenômeno contínuo: é só imaginarmos por exemplo, uma pessoa que hoje tenha 1,50 m de altura e passado-se 10 anos ela chegue a 1,70 m. É óbvio que seria impossível ela ter chegado a 1,70 m, sem antes, ter atingido a altura de 1,60 m, poucos se certificam de que uma ideia simples como essa pode contribuir para a elaboração de teorias e resultados.

Ao nosso entendimento a capacidade intuitiva é peculiar aos seres pensantes, nesse sentido não temos dificuldades em aceitar que uma função contínua num intervalo assume todos os valores x pertencentes a ele, em consequência disso, sua imagem agrega todos os valores $f(x)$, e como não há lacunas no gráfico de uma função contínua, é natural nos convencermos de que sua imagem seja um intervalo, desde que seu domínio também seja um intervalo. Segue uma definição mais formal sobre a continuidade de uma função.

Definição 1.7.1. *Diremos que uma função* $f : A \longrightarrow R$ *é contínua em* $a \in A$ *se, e somente se,* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

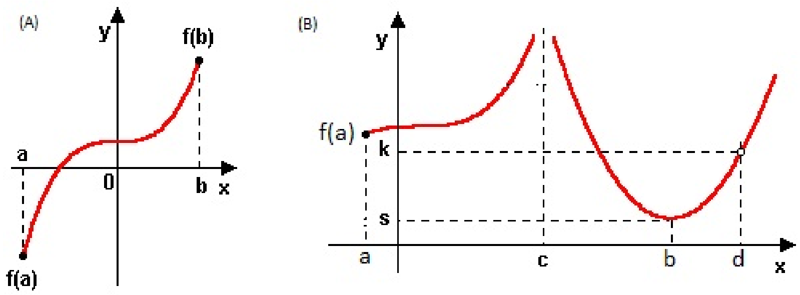

FIGURA 4: Continuidade e descontinuidade

Fonte: Print de figura da página Wikimedia Commons [1]

Os seguintes gráficos ilustram continuidade e descontinuidade de uma função.

Teorema 1.7.1. *Se as funções* f *e* g *forem contínuas em um ponto* a *e* c *uma constante, então as seguintes funções são também contínuas em* a*:*

1. $f \pm g$
2. $c \cdot f$
3. $f \cdot g$
4. $\frac{f}{g}$, *desde que se tenha* $g(a) \neq 0$.

Exemplo 1.7.1. *As funções do tipo* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, *são contínuas em* $\mathbb{R}$, *se* n *for um número natural.*

Basta verificar que a função $g(x) = kx^n$ *é contínua, de fato*

$$\lim_{x \to a} g(x) = ka^n = g(a),$$

e como $f(x)$ *é uma soma de funções contínuas, então,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

portanto, $f(x)$ *é contínua.*

Alguns resultados conhecidos do Cálculo Diferencial são aplicados em situações do nosso cotidiano, principalmente se o ”fenômeno” chamado continuidade estiver presente. D’ evido a essa importante conjuntura apresentaremos a seguir um resultado conhecido como Teorema do Valor Intermediário (o qual estabelece que uma função contínua num intervalo $[a, b]$ assume todos os valores que estiverem entre $f(a)$ e $f(b)$).

Teorema 1.7.2. *Seja* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *contínua. Se* $f(a) < d < f(b)$, *então existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = d$.

Note que o gráfico abaixo ilustra bem esse resultado, pois qualquer reta $y = k$; $f(a) < y < f(b)$, não pode ser traçada sem tocar o gráfico da função.

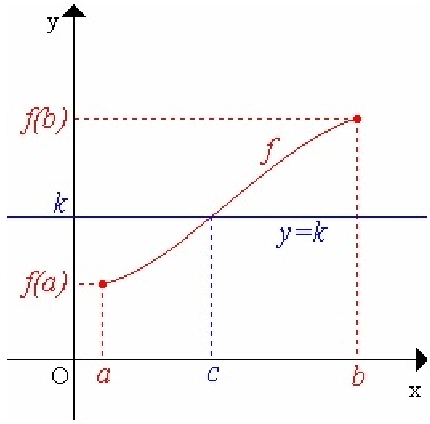

FIGURA 5: Ilustração do TVI

Fonte: Print de figura da página Wikimedia Commons

O Teorema do Valor Intermediário (TVI), por estabelecer que uma função contínua num intervalo assume todos os valores intermediários situados entre os pontos imagens dos extremos desse intervalo, desempenha um papel muito importante em muitas situações, como exemplo, verificar se uma equação possui alguma raiz em dado intervalo, como apresentamos a seguir.

Exemplo 1.7.2. *Mostre que existe um número real* $c > 0$ *tal que* $c^2 = 2$, *(isso prova a existência do número* $\sqrt{2}$*).*

Considere a função

$$f(x) = x^2 - 2,$$

contínua em $\mathbb{R}$, *com* $f(0) = -2$ *e* $f(2) = 2$, *e pelo fato de* f *ser contínua, parte de sua imagem percorre toda a extenssão do intervalo* $[-2, 2]$ *centrado em zero, logo* $\exists\ c \in (0, 2)$ *tal que* $f(c) = 0$, *assim:*

$$f(c) = c^2 - 2 = 0 \Rightarrow c^2 = 2 \Rightarrow c = \sqrt{2}.$$

Exemplo 1.7.3. *Mostre que a função* $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 5$ *tem pelo menos uma raíz no intervalo* $(1, 2)$.

Note que $f(1) = -3$ *e* $f(2) = 9$*, veja que no intervalo* $(1, 2)$ *a função passou de um valor negativo para um valor positivo, e como a função é contínua em* R*, então existe* $c \in (1, 2)$ *tal que* $f(c) = 0$*, e portanto, a função tem pelo menos uma raíz no intervalo* $(1, 2)$.

Exemplo 1.7.4. *Mostre que existe um número real que é exatamente um a mais que seu cubo.*

Podemos admitir a função dado por:

$$f(x) = x^3 - x + 1$$

contínua, com $f(-2) = -5$ *e* $f(0) = 1$*, ora,* $f(-2) < 0 < f(0)$ *daí existe* $c \in (-2, 0)$ *tal que* $f(c) = 0 \Rightarrow c^3 - c + 1 = 0 \Rightarrow c = c^3 + 1$.

Encerramos este capítulo lembrando que nosso foco aqui foi apresentar alguns conceitos, resultados e exemplos de limites e continuidade de funções. Aqui a teoria exposta sobre esses dois temas importantes do cálculo foi baseada em exemplos e noções intuitivas. Tentamos apresentar exemplos que possam basear algum tipo aplicação, visto que a nossa intenção é oferecer ao estudante do ensino médio algo que possa contribuir no ensino da matemática em sua vida estudantil. Todo o conteúdo tratado aqui leva em conta a sua grande importância e participação no tema que será abordado no capítulo a seguir, para tanto, não se estuda a taxa variação de funções sem ter a noção do que seja limite e continuidade.

Capítulo 2

Derivadas e aplicações

Nesse capitulo será visto taxa de variação e um estudo de derivadas, seguido de aplicações por intermédio do uso dos resultados ligados a teoria de máximos e mínimos de uma função real. Mais uma vez, a intenção é poder contribuir para a melhoria do ensino do cálculo, em especial, para o bom uso desses conteúdos nas series do ensino médio.
Mais detalhes sobre todo o assunto (definições, resultados e exemplos) que abordaremos neste capítulo podem ser encontrados em [6], [8], [5] e [1].

2.1 Taxas de variação

A ideia inicial sobre as derivadas nasce do que chamamos de taxa de variação de uma função, que para muitas ciências é um instrumento de auxílio na elaboração de pesquisas, assim, devido a sua grande importância torna-se o nosso objeto de estudo a partir de agora.

Quando se deseja calcular uma taxa de variação, o objetivo principal é comparar o fluxo de variação de uma grandeza em relação a outra, e o caminho ideal para se chegar a esse resultado é obter o quociente entre as duas grandezas.

Para elucidar melhor, considere a situação na qual um carro em movimento sobre uma rodovia tenha em seu odômetro a indicação de 15000 km às 13 horas e 15600 km às 17 horas. Conforme essa informação, qual deve ser a taxa média de variação da distância em relação ao tempo?

Sabemos que a distância e o tempo são grandezas contínuas, e se indicarmos s para a distância em quilômetros (km) e t para o tempo em horas (h), teremos:

$\Delta s = 15600 - 15000 = 600$ km.

$\Delta t = 17 - 13 = 4$ h.

E consequentemente:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{600}{4} = 150 km/h.$$

Observação 2.1.1. *Essa taxa de 150 km/h não significa que o carro tenha andado o tempo todo assim, pode ser que em algum instante ele tenha diminuído sua velocidade para 59 km/h, depois pode ter subido para 95 km/h etc.*

A taxa obtida anteriormente indica a velocidade média e pode ser interpretada geometricamente como sendo o coeficiente angular de uma reta secante ao gráfico da função de posição $s(t)$ nos pontos $(t_0, s(t_0))$ e $(t_1, s(t_1))$ dada por:

$$v_m = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

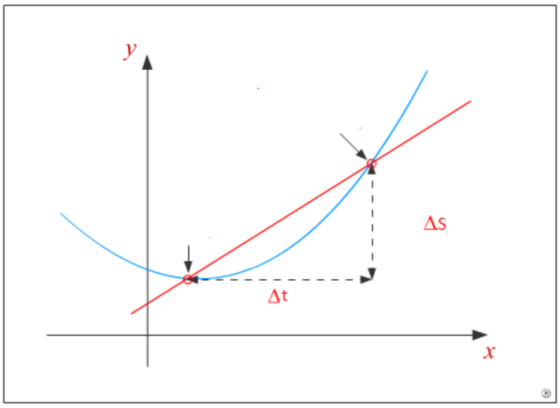

FIGURA 6: Interpretação geométrica da velocidada média

Fonte: Print de figura da página Wikimedia Commons

Quando uma função tem a taxa média de variação definida num intervalo, sua imagem se estende continuamente ponto a ponto, tornando-se também um intervalo. Esse intervalo é formado por uma infinidade de pontos, e se a função for de posição $s(t)$, então, cada ponto representa um valor da velocidade num instante de tempo t no decorrer do trajeto, isso porque a função de posição é contínua.

Desse modo a velocidade média é na verdade uma média de todas as velocidades desenvolvidas pelo ponto móvel durante todo o percurso, no entanto, para cada instante de tempo t a velocidade associada será chamada de velocidade instantânea que obtemos quando tomamos o limite da velocidade média em um pequeno intervalo de tempo.

Para definirmos a taxa média de variação de uma função $f(x)$ é preciso que uma pequena variação em x produza uma pequena variação em $f(x)$, ou seja, se x sofre um pequeno acréscimo de valor h, então $f(x)$ também sofre um acréscimo de valor $f(x+h)$, desse modo, definimos a taxa média de variação assim:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Exemplo 2.1.1. *Determine a taxa média de variação da função $f(x) = x^2$ de $x = 2$ até $x = 5$.*

Note que $\Delta x = 3$ e, de acordo com a definição, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+3) - f(2)}{3} = \frac{f(5) - f(2)}{3} = \frac{25-4}{3} = \frac{21}{3} = 7.$$

Exemplo 2.1.2. *Vamos considerar novamente a função $y = x^2$, e para cada acréscimo $\Delta x = h$ sobre o valor $x = 3$, temos a taxa média de variação na tabela a seguir:*

h	*0,1*	*0,01*	*0,001*	*0,0001*	*0,00001*
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	*6,1*	*6,01*	*6,001*	*6,0001*	*6,00001*

Em relação a definição da taxa média de variação temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = 6 + h$$

e de acordo com a tabela quanto mais próximo de zero for o valor h, mais próximo de 6 será a taxa média de variação, daí, segue-se que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}(6+h) = 6$$

e por isso, o chamaremos de taxa de variação instantânea da função. Por outro lado, observamos que

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

representa o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = x^2$ no ponto de coordenadas $A(3,9)$, note que esse valor é equivalente ao da taxa de variação instantânea.

O modo como esses resultados foram obtidos nos levam a pequenas dúvidas quanto ao uso de um dos termos: Taxa de variação instantânea ou coeficiente angular da reta tangente, o ideal é compactarmos esses limites a um só resultado, por intermedio de um termo que chamaremos de derivada da função no ponto x cuja definição será dada na próxima seção.

2.2 Derivada de uma função

Definição 2.2.1. *[6]Seja* f *uma função definida no intervalo aberto I e* x *um elemento de I. Chama-se derivada de* f *no ponto* x *o limite*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

desde que exista e seja finito.

Exemplo 2.2.1. *Calcularemos a derivada da função* $f(x) = x$*.*

Usando a definição da derivada temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 1 \\
f'(x) &= 1
\end{aligned}$$

Exemplo 2.2.2. *Qual é a derivada da função* $f(x) = x^2$*? Usando novamente a definição da derivada temos:*

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 2x+h \\
f'(x) &= 2x
\end{aligned}$$

Exemplo 2.2.3. *Derive a função* $f(x) = x^3$*.*

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (3x^2+3xh+h^2) \\
f'(x) &= 3x^2
\end{aligned}$$

Exemplo 2.2.4. *Mostraremos agora que para* $n \in \mathbb{N}^*$ *a derivada da função* $f(x) = x^n$ *é* $f'(x) = nx^{n-1}$*.*

Usando o binômio de Newton e a mesma ideia vista nos exemplos anteriores temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^n + C_{n,1}\cdot x^{n-1}\cdot h + C_{n,2}\cdot x^{n-2}\cdot h^2 + ... + C_{n,n}\cdot h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{C_{n,1}\cdot x^{n-1}\cdot h + C_{n,2}\cdot x^{n-2}\cdot h^2 + ... + C_{n,n}\cdot h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(C_{n,1}\cdot x^{n-1} + C_{n,2}\cdot x^{n-2}\cdot h + ... + C_{n,n}\cdot h^{n-1}) \\
f'(x) &= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

Vamos apresentar o significado geométrico da derivada, para isso é preciso saber a definição sobre o coeficiente angular de uma reta, que na verdade é a tangente do ângulo que a reta forma com o eixo x. Na figura abaixo temos o gráfico da função contínua $f(x)$, e uma reta r passando por $P_0(x_0, f(x_0))$ e $P(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, com $tg(\beta) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Se $\Delta x \to 0$, teremos $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$, daí, a reta r coincidira-se com a reta t, com isso, concluimos que:

$$f'(x_0) = tg(\alpha).$$

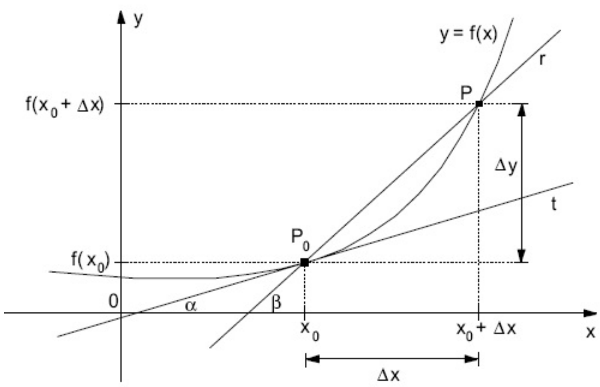

FIGURA 7: Interpretação geométrica da derivada

Fonte: Print de figura da página Wikimedia Commons

Exemplo 2.2.5. *Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função* $f(x) = x^2$ *no ponto de abscissa* $x = 3$.

A equação da reta tangente em $(3, 9)$ *tem coeficiente angular igual a* $f'(3)$, *e como* $f'(x) = 2x$, *segue-se que* $f'(3) = 6$, *portanto, a equação da reta tangente será*

$$\frac{y-9}{x-3} = 6 \Rightarrow y = 6x - 9.$$

Exemplo 2.2.6. *Um resultado de grande valia é a derivada da função* $y = \log_a(x)$, *com* $x > 0$ *e* $0 < a \neq 1$.

Por definição temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})\\
&= \lim_{h\to 0}\log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}}
\end{aligned}$$

para exemplificar melhor seja $h = mx$, *e se* $h \to 0$, *então,* $m \to 0$, *daí,*

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}} &= \lim_{m\to 0}\log_a(1+m)^{\frac{1}{mx}}\\
&= \log_a e^{\frac{1}{x}}.
\end{aligned}$$

Daí:

$$f'(x) = \frac{1}{x}\log_a e.$$

Assim, se a base do logaritmo for o número de Euler e, *teremos*

$$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}.$$

Teorema 2.2.1. *Toda função* f *derivável num ponto* a *é contínua em* a.

Prova. *Se considerarmos*

$$[f(x)-f(a)] = \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}(x-a),$$

então,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)] &= \lim_{x\to a}\tfrac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\\
\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)] &= f'(a)\lim_{x\to a}(x-a)|\\
\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}f(a) &= f'(a)\cdot 0\\
\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}f(a) &= 0\\
\lim_{x\to a}f(x) &= f(a)
\end{aligned}$$

Exemplo 2.2.7. *Mostre que a derivada da função* $f(x) = ax + b$ *é* $f'(x) = a$.

Sabemos que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[a(x+h)+b-(ax+b)]}{h} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{ah}{h} = \lim_{h\to 0} a = a$$

Exemplo 2.2.8. *Verifique que a derivada da função* $f(x) = b$ *é nula.*

Temos que $f(x+h) = f(x) = b$, *então,* $f(x+h) - f(x) = 0$, *daí,*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

2.3 Propriedades operatórias das derivadas

Proposição 2.3.1. *Se* $u = u(x)$ *e* $v = v(x)$ *são duas funções deriváveis em* x*, então:*

I. $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$ **(derivada da soma)**

Analogamente, se $f(x) = u(x) - v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) - v'(x)$.

II. $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$. **(derivada do produto)**

III. $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}; v(x) \neq 0$, *tem-se* $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$ **(derivada do quociente)**

Aqui não apresentaremos a demonstração desses resultados, mas os interessados podem encontrar na maioria dos livros de cálculo, como por exemplo os citados na introdução do capítulo.

Exemplo 2.3.1. *A função posição de uma partícula é dada pela fórmula* $s(t) = t^3 - 4,5t^2 - 7t$ *para* $t \geqslant 0$ *em segundos e* $s(t)$ *em metros. Qual é a velocidade da partícula quando* $t = 5$ *segundos?*

Como a função é de posição, a derivada

$$s'(t) = 3t^2 - 9t - 7$$

representa a velocidade da partícula no instante t *segundos, logo,*

$$s'(5) = 3(5)^2 - 9(5) - 7 \Rightarrow s'(5) = 75 - 45 - 7 = 23,$$

cuja notação no sistema internacional de medidas é $v = 23$ *m/s.*

Uma importante propriedade é a que apresentamos a seguir: a derivada de função composta, conhecida como Regra da Cadeia.

Proposição 2.3.2. *Se as funções* f *e* g *são tais que* g *é derivável no ponto* x *e* f *derivável em* $g(x)$*, então a função* $y = f(g(x))$ *também é derivável em* x *e será dada por* $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Demonstração. Consideremos a igualdade

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

sabemos que f e g são contínuas e que $y = f(g(x))$ também é, logo se $\Delta x \Rightarrow 0$, então $\Delta u \Rightarrow 0$, daí, escrevemos:

$$[f(g(x))]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Observe que,

$$f'(u) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

então temos

$$[f(g(x))]' = f'(u) \cdot f'(x)$$

e fazendo $u = g(x)$, concluimos que:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot f'(x).$$

Exemplo 2.3.2. *Determine a derivada da função* $y = (x^2 - 1)^{100}$.

Desenvolver $y = (x^2 - 1)^{100}$ *e calcular a derivada daria muito trabalho, mas derivar usando a regra da cadeia, é mais simples, veja:*

$$y' = 100(x^2 - 1)^{99} \cdot 2x \Rightarrow y' = 200x(x^2 - 1)^{99}.$$

Exemplo 2.3.3. *Obtenha a derivada da função* $y = a^x$, *onde* $0 < a \neq 1$.

As condições da função dada nos permite fazer:

$$\ln y = \ln a^x \Rightarrow \ln y = x. \ln a,$$

e portanto, usando a regra da cadeia no primeiro membro da equação obtemos

$$\frac{y'}{y} = \ln a \Rightarrow y' = y \ln a \Rightarrow y' = a^x \ln a.$$

Exemplo 2.3.4. *Qual é derivada da função* $f(x) = e^x$*?*

Basta fazer $a = e$ *na função do exemplo anterior e usar o resultado, ou seja, de* $y' = a^x \ln a$, *teremos*

$$y' = e^x \ln e,$$

segue-se que

$$y' = e^x$$

pois $\ln e = 1$.

Dedicaremos essa pequena parte para falarmos levemente sobre a regra de L'Hôspital, que por sinal tem muitas utilidades no que diz respeito ao calculo de limites indeterminados, em particular as formas $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. A regra de L'Hôspital diz que se f e g são funções deriváveis, com $g'(x) \neq 0$ para x próximo de a (exceto possivelmente em a) e se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, então:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemplo 2.3.5. *Calcule o limite* $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ *usando a regra de L'Hôspital.*

A derivada da função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ *é* $f'(x) = \cos(x)$, *e sendo* $g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1$, *assim:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

2.4 Taxas de variação em algumas ciências

A parte mais interessante deste trabalho passa pela ideia sobre a aplicação das derivadas em outras ciências, é aqui que muitas situações abstratas da matemática ganham mais significado, e nos permitem estipular e fazer previsões sobre como determinar valores referentes a algum tipo de fenômeno previsto para se realizar tanto no presente, quanto no futuro. Sobre o estudo das derivadas, já sabemos que é um tipo de relação que compara a manifestação de uma grandeza sobre a outra, e é sem dúvida um dos temas mais expressivos e rico de significados.

Estamos num universo onde quase tudo se altera ou se converte em outras formas, podemos dizer que todos estamos constantemente interligados a um tipo de situação que vai se alterando com o passar do tempo, e dentro desse mesmo ponto de vista, há também a eficácia de algumas estruturas que facilitam o fluxo de outros elementos, trazendo inúmeras aplicações em varias áreas como economia, física e tecnologia.

2.4.1 Aplicação em Física

Na física a velocidade média sobre um período de tempo Δt é dada por $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, e quando existe $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, o resultado é chamado de velocidade instantânea. A existência de um outro limite dado por

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

assegura um novo resulta chamado de aceleração instântanea.

Exemplo 2.4.1. *Se a posição de uma partícula é dada pela função* $f(t) = \frac{t^3}{3} - 3t^2 + 8t$, *com* t *dado em segundos e* $f(t)$ *em metros. Qual é a velocidade dessa partícula depois de 1 segundo? Qual a aceleração da partícula nesse mesmo instante?*

A velocidade da partícula em 1 segundo é a taxa de variação instantânea da função f, *ou seja, a derivada da função em* $t = 1$, *que é dada por:*

$$f'(t) = t^2 - 6t + 8,$$

daí, segue-se que

$$\begin{aligned} f'(1) &= (1)^2 - 6(1) + 8 \\ &= 1 - 6 + 8 \\ &= 3 \end{aligned}$$

ou seja, $v = 3$ m/s.

Pelo resultado anterior, podemos fazer $f'(t) = v(t)$, *daí,* $v'(t) = 2t - 6$ *representa uma função aceleração, assim,* $v'(1) = 2(1) - 6 = -4$, *que indicaremos por* $a = -4$ m/s^2, *significando que há uma força contraria ao movimento da partícula.*

Exemplo 2.4.2. *No estudo da eletricidade, a corrente elétrica é o movimento ordenado de cargas elétricas através de um condutor. Aqui a intensidade média de corrente elétrica é o número de cargas elétricas que atravessam uma seção reta de um condutor em um respectivo intervalo de tempo* Δt, *gasto para percorrê-lo. Sendo* ΔQ *a quantidade de carga líquida que atravessa a seção reta do condutor durante o intervalo de tempo* Δt, *a corrente média será dada por* $i_m = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$. *É possível obter a corrente elétrica instantânea?*

Sim, basta calcular a corrente média em intervalos de tempo cada vez menores, com isso, teremos o que denominamos de corrente i *em um instante de tempo* t, *ou seja,* $i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ *(deriva da carga* Q *em relação ao tempo* t*). Assim, a corrente é a* *taxa na qual o fluxo de carga atravessa uma superfície, medida em unidades de carga por unidade de tempo (frequentemente coulombs por segundo, chamado ampères).*

Exemplo 2.4.3. *A quantidade de carga Q em coloumbs (C) que passa através de um ponto em um fio até o instante* t *(medido em segundos) é dada por* $Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$. *Determine a corrente elétrica no instante* $t = 1$ *segundo.*

Pelo que vimos no exemplo anterior, a corrente é a derivada da carga Q *em relação ao tempo* t*, assim, teremos*

$$Q'(t) = 3t^2 - 4t + 6,$$

logo, o valor da corrente é $Q'(1) = 3 - 4 + 6 = 5A$ *(ampères).*

Concluimos essa subseção destacando que além da velocidade, aceleração e da corrente elétrica, existem outras taxas de variação importantes na física, onde o processo de derivação também atua. Mais aplicações podem ser vistas em [8],[5] e [4].

2.4.2 Aplicação em Biologia

Na biologia pode ser trabalhado a questão do número de indíviduos de uma determinada população (animal ou vegetal) no instante de tempo t. Digamos que seja dado a função $n = f(t)$, com variação no tamanho da população entre os instantes $t = t_1$ e $t = t_2$ dada por $\Delta n = f(t_2) - f(t_1)$, e como já sabemos a taxa de variação média durante o período de tempo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ será dada por:

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1},$$

daí, a taxa de crescimento instantânea fica sendo o limite da taxa de variação média quando Δt tender a 0:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \lim_{t_1 \to t_2} \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = f'(t).$$

Exemplo 2.4.4. *O número de bactérias numa certa cultura aumenta segundo a fórmula* $Q(t) = 1000 \cdot 2^{\frac{t}{5}}$, *para* t *dado em horas. Determine a que taxa a população de bactérias estará crescendo em* $t = 10$ *horas.*

As funções do tipo $y = ab^{kx}$ *têm derivada dada por* $y' = a \cdot k \cdot \ln b \cdot b^x$*, logo, a derivada da função dada no exemplo é*

$$Q'(t) = 1000 \cdot \frac{1}{5} \cdot \ln 2 \cdot 2^{\frac{t}{5}} = 200(0,69) \cdot 2^{\frac{t}{5}},$$

a qual simplificada se torna:

$$Q'(t) = 138 \cdot 2^{\frac{t}{5}},$$

portanto,

$$Q'(10) = 138 \cdot 2^{\frac{10}{5}} = 138 \cdot 4 = 552,$$

mostrando que a população de bactérias cresce a taxa de 552 *bactérias por hora, para* $t = 10$*.*

Exemplo 2.4.5. *Com o avanço da medicina muitas descobertas contribuíram para o tratamento de doenças usando algum tipo de droga, desde que não cause nenhum tipo de sequela no paciente em tratamento. Digamos que a diminuição na pressão sanguínea de uma pessoa que esteja fazendo algum tipo de tratamento dependa de uma determinada droga que ela deverá ingerir. Então, se* x *mg da droga forem tomados, a queda da pressão sanguínea será uma função de* x *dada por* $f(x) = (2x - a)^2$*, tal que* $0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}$ *e* a *uma constante positiva que é dada conforme o paciente.*

a) Determine a taxa de variação da pressão sanguínea em relação a quantidade de droga x *ingerida.*

Considerando $f(x) = 4x^2 - 4ax + a^2$*, temos a taxa de variação da pressão sanguínea dada pela derivada*

$$f'(x) = 8x - 4a.$$

b) Determine a taxa de variação na pressão sanguínea quando $x = \frac{a}{2}$*.*

Sendo $f'(x) = 8x - 4a \Rightarrow f'(\frac{a}{2}) = 8(\frac{a}{2}) - 4a = 4a - 4a = 0$*.*

Exemplo 2.4.6. *Considerando agora uma população de bactérias em um meio nutriente homogêneo. Supondo que essa população a cada intervalo de tempo dado em horas duplique, determine a que taxa a população de bactérias estará crescendo depois de 2 horas.*

Podemos supor que a população tenha inicialmente Q_0 *bactérias, daí, a função para representar a população de bactérias em* t *horas será* $Q(t) = Q_0 \cdot 2^t$*, com derivada dada por*

$$Q'(t) = Q_0 \cdot 2^t \cdot \ln 2 = 0,69 \cdot Q_0 \cdot 2^t,$$

onde para $t = 2$*, temos*

$$Q'(2) = 0,69 \cdot Q_0 \cdot 2^2 = 2,76Q_0,$$

se for considerado $Q_0 = 100$*, a população cresce a uma taxa de cerca de 276 bactérias por hora.*

Concluimos essa subseção destacando que outras taxas de variação importantes na área das ciências biológicas podem ser encontradas em [8].

2.4.3 Aplicações em Economia

Na economia, as funções que determinam o custo de produção de certo bem, e que são ainda deriváveis são chamadas marginais. Nesse cenário o conceito de derivada é aplicado na chamada análise marginal que, essencialmente, estuda os subsídios de cada produto e/ou serviço no lucro das empresas. Por isso o principal objetivo em relação a aplicação das derivadas na economia é tenta emitir respostas a perguntas direcionadas a situações benéficas para o desenvolvimento dos negócios. Para todos os efeitos se a função de custo total para produzir um certo bem for $C(x)$, então, definimos e denotamos o custo marginal por:

$$M(x) = C'(x).$$

Em geral é apropriado apresentar uma função custo por um polinômio, por exemplo, $C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, onde cada coeficiente do polinômio representa algum tipo de custo, seja ele direto ou indireto.

Exemplo 2.4.7. *Vamos supor que uma companhia tenha estimado que o custo (em reais) de produção de x itens seja dado pela função* $C(x) = 100 + 2x + 0,1x^2$*, então a função custo marginal é* $C'(x) = 2 + 0,2x$*. Qual seria o custo marginal no nível de produção de* 100 *itens?*

Neste caso faremos:

$$C'(100) = 2 + 0,2(100) \Rightarrow C'(100) = 22$$

que significa 22 *reais/item.*

Exemplo 2.4.8. *Se* $p(x)$ *for o valor da produção quando há x trabalhadores em uma fábrica, então a produtividade média da força de trabalho da fábrica é dada por* $A(x) = \frac{p(x)}{x}$. *Mostre que* $A'(x) > 0$ *se* $p'(x) > A(x)$.

Por hipótese $p'(x) > A(x) \Rightarrow p'(x) > \frac{p(x)}{x}$, *e multiplicando essa desigualdade por* $\frac{1}{x}$ *temos:*

$$\frac{p'(x)}{x} > \frac{p(x)}{x^2} \Rightarrow \frac{p'(x)}{x} - \frac{p(x)}{x^2} > 0 \Rightarrow \frac{x.p'(x) - p(x)}{x^2} > 0,$$

perceba que

$$A'(x) = \frac{x.p'(x) - p(x)}{x^2},$$

portanto, $A'(x) > 0$.

Exemplo 2.4.9. *Se uma quantia de 10000 reais for depositada em um banco onde a taxa de juros é de 1 porcento ao mês. A que taxa o dinheiro estará aumentando depois do quinto mês?*

Considere o montante $M = 10000(1,01)^t$, *para* t *dado em meses, veja que a derivada é*

$$M' = 10000 \cdot (1,01)^t \cdot \ln(1,01) = 99(1,01)^t,$$

que para $t = 5$ *vale* $M' = 104$, *ou seja, o dinheiro está aumentando a cerca de* 104 *reais ao mês.*

Concluimos essa subseção destacando que outras taxas de variação importantes na área das ciências econômicas podem ser encontradas em [8], [5] e [4].

2.5 Máximos e Mínimos

Um dos estudos mais interessantes no âmbito da teoria das derivadas vem da existência de inúmeras aplicações da mesma. Nessa seção destacamos máximos e mínimos de funções, apresentando a teoria envolvida e diversas aplicações em várias áreas do conhecimento. Mais detalhes podem ser encontrados em [8], [5], [4] e [3].

Já sabemos que a derivada de uma função num ponto pode ser vista como sendo o coeficiente angular de uma reta tangente ao gráfico da função no ponto de derivação, assim, teremos retas tangentes ao gráfico da função com o coeficiente angular positivo, negativo ou até mesmo nulo. Em se tratando de retas com o coeficiente angular igual a zero, sabemos que todas que possuem essa característica são paralelas ao eixo x.

Em geral, essa ideia sobre a nulidade da derivada num ponto abre caminhos para uma discussão sobre os locais onde uma função atinge seus possíveis valores de máximo ou de mínimo ou até mesmo nenhum desses valores. Como exemplo, vamos discutir dois casos onde as derivadas das funções são nulas, mas em apenas um desses casos a reta é de fato tangente ao gráfico da função.

Consideremos as funções $f = x^2$ e $g = x^3$, cujas derivadas são respectivamente,

$$f'(x) = 2x \qquad \text{e} \qquad g'(x) = 3x^2.$$

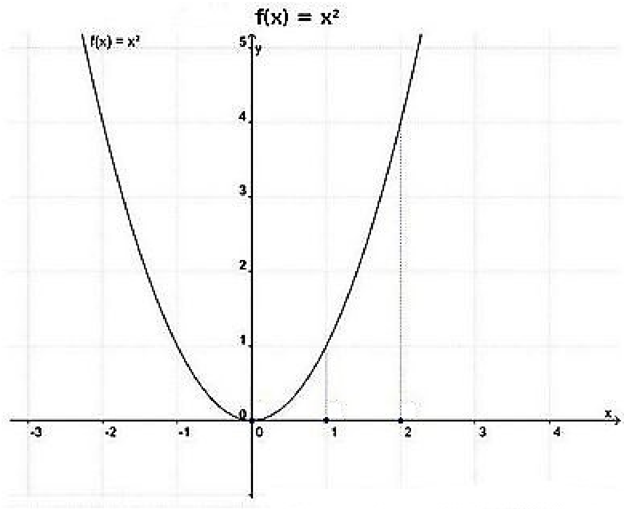

FIGURA 8: Gráfico da função $y = x^2$

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

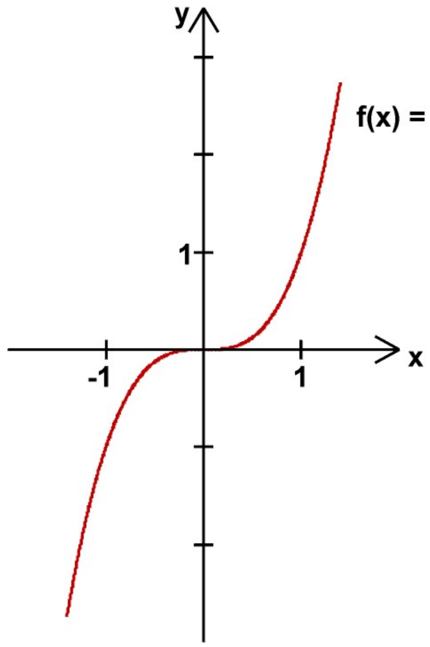

FIGURA 9: Gráfico da função $y = x^3$

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Note que as duas derivadas se anulam em $x = 0$. Assim, a reta que passa pelo ponto $P(0, 0)$ pertencente a ambas as funções é paralela ao eixo x, mas só na função f a reta é de fato tangente ao seu gráfico no ponto $x = 0$. Note que na função g a reta tem o coeficiente angular igual à zero, contudo, é paralela ao eixo x mas não é tangente ao gráfico de g.

Uma observação sobre esse fato é que se a derivada da função f for nula no ponto $x = a$, é natural que a reta que passa pelo ponto $P(a, f(a))$ seja paralela ao eixo x, e, se, além disso, ela tangenciar o gráfico de f em $P(a, f(a))$, então, $x = a$ é ponto de máximo ou de mínimo da função f. No caso das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$, podemos dizer que f tem valor mínimo em $x = 0$, mas g não tem nem mínimo e nem máximo em $x = 0$. Ressaltamos que o fato de uma função ter um valor máximo ou mínimo em um dado ponto $x = a$, não significa que ela seja derivável nesse ponto, como prova disso, citemos, por exemplo, a função $f(x) = |x|$, que tem seu valor mínimo em $x = 0$, mas não é derivável em $x = 0$, veja no gráfico abaixo.

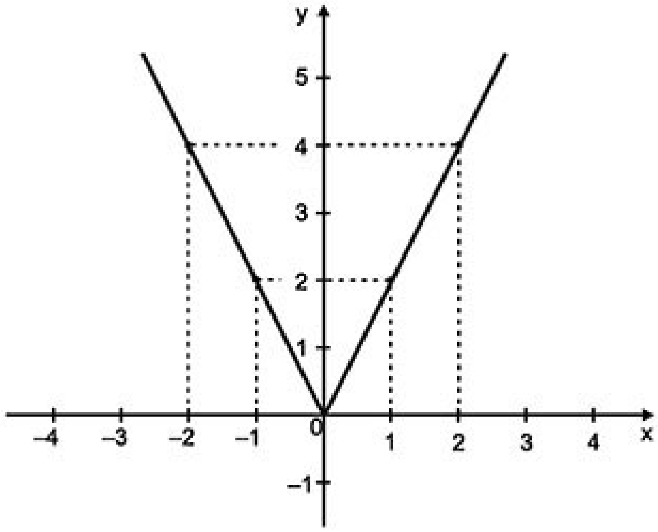

FIGURA 10: Gráfico da função $y = |x|$

Fonte: elaborado pelo próprio autor

Às vezes a derivada existe num ponto $x = a$, mas $f'(a)$ não é precisamente o coeficiente angular de uma reta tangente ao gráfico da função no ponto $(a, f(a))$, como foi visto com a função $g(x) = x^3$. Ora, o fato da derivada existir num ponto $x = a$ não garante que sempre vá existir uma reta tangente ao gráfico da função em $(a, f(a))$ e com o coeficiente angular igual ao valor da derivada no ponto.

Todas essas citações abrem caminho para um enunciado importante, conhecido como teorema de Fermat, que iremos descrever mais à frente. Mas antes, é importante afirmar que a contribuição de Pierre de Fermat serviu para o desenvolvimento de ideias importantes dentro da matemática, nesta visão podemos dizer que em meio às aplicações mais notáveis do cálculo estão aquelas que buscam valores de máximos ou mínimos de funções. Com relação as aplicações de máximos e mínimos destacamos os problemas que têm na sua estrutura o valor máximo ou mínimo de algum tipo de variável tal como: área, volume, força, potência, tempo, lucro ou custo, dentre outros.

Definição 2.5.1. *Seja a função* $f : A \to \mathbb{R}$ *e* c *um ponto no domínio de* f*, diremos que* c *é ponto de:*

i) Máximo relativo (ou local) de f *se* $f(c) \geqslant f(x)$ *para todo* x *pertencente ao conjunto A.*

ii) Mínimo relativo (ou local) de f *se* $f(c) \leqslant f(x)$ *para todo* x *pertencente ao conjunto A.*

Os resultados a seguir nos dão alternativas de como determinar pontos extremos de uma função utilizando-se da derivada da função. As provas serão omitidas.

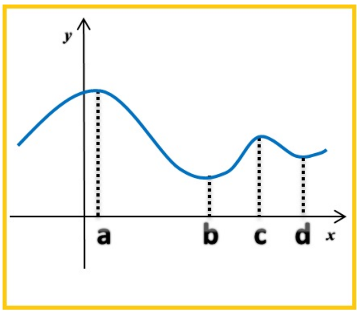

FIGURA 11: Gráfico da função f

Fonte: Print de figura da página Wikimedia Commons

Teorema 2.5.1. *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua derivável em todos os pontos do intervalo* (a, b)*, exceto possivelmente em um ponto* $c \in (a, b)$*. Admitindo a existência de um número real* $q > 0$ *tal que* $(c - q, c + q) \subset (a, b)$*, temos que:*

a) *Se* $f'(c - q) > 0$ *e* $f'(c + q) < 0$*, então a função* f *tem máxino relativo no ponto* c

b) *Se* $f'(c - q) < 0$ *e* $f'(c + q) > 0$*, então a função* f *tem mínimo relativo no ponto* c*.*

Teorema 2.5.2. *(Weiesrtrass) Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *for uma função contínua, então existem* c *e* d *em* $[a, b]$ *onde* f *assume um valor máximo absoluto* $f(c)$ *e um mínimo absoluto* $f(d)$*.*

Teorema 2.5.3. *Se uma função* f *tiver um máximo ou um mínimo local em* c*, e* $f'(c)$ *existir, então* $f'(c) = 0$*. Esse resultado é conhecido como teorema de Fermat.*

Demonstração. Por hipótese c é ponto de máximo da função f e existe $f'(c)$, neste caso $\forall\ x$ escrevemos

$$f(x) \leqslant f(c),$$

Agora vamos admitir duas possibilidades:

i) Se $x < c$ temos $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0$.

ii) Se $x > c$ temos $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant 0$.

Veja que nos dois casos podemos fazer

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant \lim_{x \to c} 0 = 0.$$

E como
$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$
segue-se que, $f'(c) \geqslant 0$ e $f'(c) \leqslant 0$, nesse caso a única possibilidade é $f'(c) = 0$. □

Exemplo 2.5.1. *Mostre que se uma função* f *tem mínimo local em* c*, então a função* $g(x) = -f(x)$ *tem um valor máximo em* c*. Use esse resultado para provar o teorema de Fermat para o caso no qual* f *tenha um mínimo local em* c*.*

Demonstração. Como c é ponto de mínimo, temos $f(x) \geqslant f(c)$ para todo x pertencente ao domínio de f. Faça $-f(x) \leqslant -f(c)$ e considere o fato de $g(x) = -f(x)$ e obtenha $g(c) = -f(c)$, então:
$$-f(x) \leqslant -f(c) \Rightarrow g(x) \leqslant g(c),$$
portanto, c é ponto de máximo de g. □

Agora vamos usar esse resultado e provar o teorema de Fermat para o caso no qual f *tenha um mínimo local em* c*. Veja a prova que será dada abaixo.*

Demonstração. Por hipótese c é ponto de mínimo de f e ponto de máximo de g, e além disso, existe $f'(c)$. Sendo $g(x) = -f(x)$ e f derivável em c, então
$$g'(c) = -f'(c),$$
neste caso existe também $g'(c)$, e como c é ponto de máximo de g, então pela parte que já foi provada do teorema de Fermat para o caso onde c é ponto de máximo, temos $g'(c) = 0$, consequentemente, $-f'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = 0$. □

Definição 2.5.2. *Diremos que um valor real* c *pertencente ao domínio de uma função* f *é um número crítico de* f *se* $f'(c) = 0$ *ou* $f'(c)$ *não existe.*

Conforme a definição acima podemos afirmar que se uma função f tiver um valor máximo ou mínimo local em um número c pertencente ao seu domínio, então c é um número crítico de f. Essa afirmação é fácil de ser observada, pois se f tiver um valor máximo ou mínimo em c e $f'(c)$ existir, então pelo teorema de Fermat temos $f'(c) = 0$, e portanto, c é um número crítico de f. E se $f'(c)$ não existir, então, pela definição acima c é um número crítico de f.

No estudo das funções reais existem muitas aplicações interessantes que nasce de situações do cotidiano do homem. No presente cenário estamos interessados na busca da melhor situação, da melhor aplicação para os negócios gerarem o maior lucro em operações de baixo custo, enfim, estamos constantemente na busca da melhor aplicação matemática que visa o aperfeiçoamento das nossas atividades. Em termos técnicos o que queremos é encontrar o ponto ótimo de uma função matemática, para isso é importante destacarmos que grande parte dos problemas relacionados a otimização de funções reais contínuas tem suas soluções encontradas ou baseadas na teoria de máximos e mínimos apresentadas aqui.

Ressaltamos que já no âmbito do ensino fundamental a otimização é apresentada aos alunos, através do estudo das funções quadráticas, que tem como representação gráfica uma curva chamada parábola, cujo vértice é o ponto de máximo ou de mínimo global da função, de acordo com a concavidade da parábola.

Finalizando a parte teórica referente a máximos e mínimos, apresentamos resultados que envolvem funções que admitem pelo menos até a segunda derivação. Isto é, estudaremos a taxa de variação da taxa de variação de uma grandeza. Um exemplo simples desse tipo de situação é a aceleração de um automóvel, que é a taxa de variação da velocidade com o tempo, que por sua vez é a taxa de variação da distância com o tempo.
Já sabemos que a taxa de variação da função $f(x)$ em relação a x é $f'(x)$, da mesma forma, podemos dizer que a taxa de variação da função $f'(x)$ em relação a x é a derivada de $f'(x)$, que indicamos por $(f'(x))' = f''(x)$. Essa notação é chamada de derivada segunda, e com ela podemos obter mais informações sobre a função, como veremos a seguir.

Proposição 2.5.1. (Teste da derivada segunda) *Suponhamos que* f *admite derivada de segunda ordem contínua em um intervalo aberto* I *e* a *é um ponto de* I *tal que* $f'(a) = 0$. *Temos:*

1. *Se* $f''(a) > 0$*,* f *possui um mínimo relativo em* $x = a$*.*

2. *Se* $f''(a) < 0$*,* f *possui um máximo relativo em* $x = a$*.*

Caso $f''(a) = 0$ ou $f''(a)$ não exista, o teste não pode ser aplicado; a pode ser um máximo relativo, um mínimo relatvo ou um ponto de inflexão, que no caso, é o ponto onde não há uma reta tangente a curva.

2.5.1 Aplicações

Os exemplos apresentados nesta subseção podem ser encontrados em [8], [5] e [2].

Exemplo 2.5.2. *Mostre que a função quadrática* $f(x) = ax^2+bx+c$*, com* $a \neq 0$*, assume valor máximo ou mínimo em* $x = \frac{-b}{2a}$.

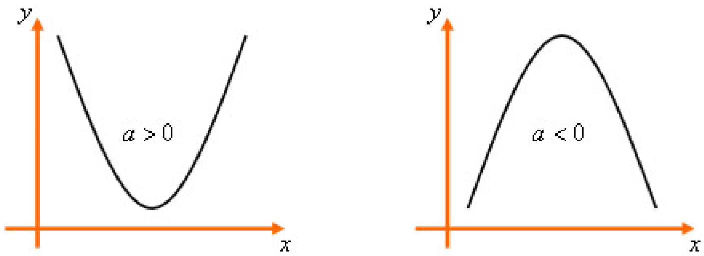

FIGURA 12: Gráfico ilustrativo da função quadrática

Fonte: elaborado pelo próprio autor

A função quadrática tem derivada em todos os pontos, dada por

$$f'(x) = 2ax + b,$$

devido a existência da derivada faremos

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a},$$

nosso candidato a ponto máximo ou mínimo da função. Vamos mostrar que esse é um critério que depende do coeficiente numérico de x^2*, para isso, considere*

$$x_v = \frac{-b}{2a},$$

e em seguida tomemos $q > 0$ *de modo que* $x_v - q < x_v < x_v + q$*, e como* $f'(x) = 2ax+b$*, segue-se que* $f'(x_v - q) = -2aq$ *e* $f'(x_v + q) = 2aq$*, daí, se:*

i) $a > 0 \Rightarrow f'(x_v-q) < 0$ *e* $f'(x_v+q) > 0$*, então a função assume valor mínimo em* x_v.

ii) $a < 0 \Rightarrow f'(x_v - q) > 0$ *e* $f'(x_v + q) < 0$*, e como já era esperado a função assume valor máximo em* x_v.

Exemplo 2.5.3. *Em um quadrado ABCD de lado* L *suponha que a partir do vértice A sejam marcados dois pontos P e Q que se deslocam sobre os segmentos AB e AD respectivamente, de modo que AP=*x *e AQ=2*x*. Mostre que o quadrilátero BCQP atinge área máxima quando* $x = L/2$.

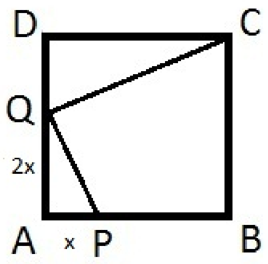

FIGURA 13: Retângulo ABCD

Fonte: elaborado pelo próprio autor

Conforme a figura, precisamos obter a área do quadrilátero BCQP em função de x*, para isso, tomemos a área do quadrado ABCD subtraída das áreas dos triângulos APQ e DCQ. Indicaremos tal área como sendo:*

$$\begin{aligned} A(x) &= L^2 - [\frac{2x \cdot x}{2} + \frac{L(L-2x)}{2}] \\ &= L^2 - x^2 - \frac{L^2}{2} + Lx \\ &= -x^2 + Lx + \frac{L^2}{2}, \end{aligned}$$

a derivada será a função

$$A'(x) = -2x + L,$$

cujo valor máximo acontece quando

$$A'(x) = 0 \Rightarrow -2x + L = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{2}.$$

Exemplo 2.5.4. *Determine o ponto sobre a parábola* $y^2 = 2x$ *mais próximo de* $(1, 4)$.

O melhor caminho é considerar

$$x = \frac{1}{2}y^2$$

e usar a fórmula para calcular a distância entre dois pontos dado por

$$d^2 = (\frac{1}{2}y^2 - 1)^2 + (y-4)^2$$

para facilitar os cálculos consideremos

$d^2 = f(y)$*, pois derivar* d^2 *é o mesmo que derivar* $f(y)$*, então:*

$$f(y) = (\frac{1}{2}y^2 - 1)^2 + (y-4)^2$$

$$= \frac{1}{4}y^4 - y^2 + 1 + y^2 - 8y + 16$$

$$= \frac{1}{4}y^4 - 8y + 17,$$

daí, segue-se que

$$f'(y) = \frac{4}{4}y^3 - 8 \Rightarrow f'(y) = y^3 - 8,$$

e

$$f'(y) = 0 \Rightarrow y^3 - 8 = 0 \Rightarrow y^3 = \sqrt[3]{8} \Rightarrow y = 2$$

que resulta em $x = 2$*, e portanto, o ponto da parábola mais próximo de* $(1,4)$ *é* $(2,2)$*.*

Exemplo 2.5.5 (Economia). *É bastante comum na economia às empresas simularem equações que expressem de maneira quase real as suas atividades de funcionamento, como por exemplo, os gastos e os lucros que se pode ter. Digamos que uma empresa para produzir* x *unidades de um certo artigo tenha função de custo total dada por* $C(x) = 0.01x^2 + 100x$*, e a de receita total sendo* $R(x) = -0.02x^2 + 400x$*. Nessas condições qual deve ser o lucro máximo que a empresa pode obter em suas atividades de funcionamento?*

O lucro da empresa será dado por:

$$L(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow$$

$$L(x) = -0,03x^2 + 300x,$$

cuja derivada é

$$L'(x) = -0,06x + 300,$$

fazendo $L'(x) = 0 \Rightarrow$

$$-0,06x + 300 = 0 \Rightarrow x = 5000,$$

portanto o lucro ideal para a empresa é

$$L(5000) = -0,03(5000)^2 + 300(5000) = 750000$$

Exemplo 2.5.6 (Economia). *Um fabricante estima que quando* x *unidades de certa mercadoria são produzidas por mês, o custo total é* $C(x) = 0,2x^2 + x + 20$ *reais e que* x

unidades podem ser vendidas por um preço $P(x) = 8 - 0,3x$ *reais a unidade. Determine o lucro máximo que o fabricante pode obter.*

Conforme os dados do problema, a receita que o fabricante pode obter é $R(x) = x(8 - 0,3x)$*, com isso, o lucro dele passa a ser*

$$L(x) = R(x) - C(x) = x(8 - 0,3x) - (0,2x^2 + x + 20) \Rightarrow$$

$$L(x) = -0,5x^2 + 7x - 20,$$

cuja derivada é

$$L'(x) = -x + 7,$$

que se anula em $x = 7$*, com isso, o lucro máximo é* $L(7) = 4,5$.

Exemplo 2.5.7 (Economia)**.** *Em uma indústria o custo em reais para a produção de* x *toneladas de vigas de metal é dado pela fórmula* $C(x) = 20+60x-0,75x^2$*. Nas condições do problema, determine o custo máximo que a indústria pode ter.*

A derivada da função de custo é

$$C'(x) = 60 - 1,5x,$$

desse modo para

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 60 - 1,5x = 0 \Rightarrow x = 40,$$

portanto, o custo máximo será $C(40) = 20 + 60(40) - 0,75(40)^2 = 1220$ *reais.*

Exemplo 2.5.8 (Economia)**.** *Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu de cada passageiro 800 reais e mais 10 reais por cada lugar vago no avião. Para que número de passageiros a rentabilidade da empresa é máxima?*

Digamos que por um motivo qualquer x *passageiros desistam de ir a excursão, então o valor a ser pago por cada passageiro que irá participar da excursão é* $(800 + 10x)$ *e o número de lugares ocupados* $(100 - x)$*, assim, a rentabilidade da empresa será*

$$R(x) = (800 + 10x)(100 - x)$$

$$= -10x^2 + 200x + 80000$$

, que resulta em

$$R'(x) = -20x + 200,$$

tomando $R'(x) = 0$, *segue-se que*

$$-20x + 200 = 0 \Rightarrow 20x = 200 \Rightarrow x = 10.$$

portanto, o número de passageiros é $(100 - 10) = 90$.

Exemplo 2.5.9 (Economia). *João tem uma fábrica de sorvetes. Ele vende, em média, 300 caixas de picolés por 20 reais. Entretanto, percebeu que, cada vez que diminuía 1 real no preço da caixa, vendia 40 caixas a mais. Quanto ele deveria cobrar pela caixa para que sua receita fosse máxima?*

Para cada real diminuído no preço da caixa, ele vende 40 caixas a mais, então se for diminuído x *reais no preço da caixa ele vende* $40x$ *caixas a mais. E a receita pode ser dada por:*

$$\begin{aligned} R(x) &= (20 - x)(300 + 40x) \\ &= -40x^2 + 500x + 6000 \end{aligned}$$

que resulta na derivada

$$R'(x) = -80x + 500$$

de modo que

$$R'(x) = 0 \Rightarrow -80x + 500 = 0 \Rightarrow x = 6,25$$

portanto, o preço da caixa para que a receita seja máxima é $13,75$.

Exemplo 2.5.10 (Física). *Em Física, a potência elétrica lançada pelo gerador no resistor é dada por* $P(i) = Ei - ri^2$, *sendo* i *a intensidade de corrente que atravessa o gerador elétrico,* r *a resistência interna e* E *é a força eletromotriz. Um exemplo de força eletromotriz é a notação 12 v, muito comum nas baterias de automóveis. Determine a corrente* i *que torna a potência elétrica lançada pelo gerador no resistor máxima?*

Sendo $P(i) = Ei - ri^2$, *a derivada é*

$$P'(i) = E - 2ri,$$

e se $P'(i) = 0$, *teremos*

$$E - 2ri = 0 \Rightarrow 2ri = E \Rightarrow i = \frac{E}{2r},$$

ou seja, a corrente é $i = \frac{E}{2r}$ *A (ampère).*

Exemplo 2.5.11 (Química). *O nível* N *de óleo em um reservatório varia com o tempo* t, *contado em horas, conforme a lei* $\mathsf{N}(\mathsf{t}) = -0,6\mathsf{t}^2 + 0,25\mathsf{t} + 0,70$. *Em quanto tempo o nível de óleo no reservatório será máximo?*

A derivada da função dada é

$$\mathsf{N}'(\mathsf{t}) = -1,2\mathsf{t} + 0,25$$

e fazendo $\mathsf{N}'(\mathsf{t}) = 0$ *resulta em*

$$-1,2\mathsf{t} + 0,25 = 0 \Rightarrow \mathsf{t} = \frac{5}{24}$$

e se for dado em minutos corresponde a 12 min e 30 s.

Exemplo 2.5.12 (Biologia). *Um certo modelo biológico sugere que a reação do corpo humano a uma dose de medicamento pode ser representada por uma equação da forma* $\mathsf{F}(\mathsf{m}) = \frac{1}{3}(\mathsf{k}\mathsf{m}^2 - \mathsf{m}^3)$ *onde k é uma constante postiva e m a quantidade de medicamento presente no sangue. A derivada* F' *pode ser considerada como uma medida da sensibilidade do organismo ao medicamento.*

a) Determine a sensibilidade $\mathsf{F}'(\mathsf{m})$.

A derivada da função dada é

$$\mathsf{F}'(\mathsf{m}) = \frac{1}{3}(2\mathsf{k}\mathsf{m} - 3\mathsf{m}^2).$$

b) Verifique se há uma quantidade de medicamento m que faz com que a reação do corpo humano a essa quantidade seja máxima.

Neste caso devemos fazer $\mathsf{F}'(\mathsf{m}) = 0$, *ou seja,*

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}(2\mathsf{k}\mathsf{m} - 3\mathsf{m}^2) &= 0 \\ \tfrac{\mathsf{m}}{3}(2\mathsf{k} - 3\mathsf{m}) &= 0 \\ \mathsf{m}_1 &= 0 \\ \mathsf{m}_2 &= \tfrac{2\mathsf{k}}{3} \end{aligned}$$

Agora devemos fazer o teste da derivada segunda, que será $\mathsf{F}''(\mathsf{m}) = \frac{1}{3}(2\mathsf{k} - 6\mathsf{m})$. *Vamos ao teste:*

i) Para m=0, temos

$$\mathsf{F}''(0) = \frac{2\mathsf{k}}{3} > 0.$$

ii) Para m=$\frac{2\mathsf{k}}{3}$, *temos*

$$\mathsf{F}''(\frac{2\mathsf{k}}{3}) = \frac{-2\mathsf{k}}{3} < 0.$$

Pelo teste da derivada segunda temos que $m = \frac{2k}{3}$ *é a quantidade de medicamento que faz com que a reação do corpo humano seja máxima.*

2.6 Considerações finais

Este trabalho visa contribuir significativamente nas atividades estabelecidas e compartilhadas por alunos e professores que atuam no ensino médio. São muitas são as dificuldades encontradas pelos mesmos em relação ao ensino de derivadas e, a apresentação da resolução de diversos problemas em diferentes áreas, usando esta ferramenta matemática, teve como objetivo servir como base para motivação e mostrar a importância desse estudo. Vale ressaltar que diversas outras aplicações do Cálculo Diferencial podem ser encontradas nas referências bibliográficas apresentadas neste trabalho.

Referências Bibliográficas

[1] Boyer, C.B., Merzbach, U,C.. *História da Matemática*, Blucher, 2009.

[2] Filho, B.B., Silva, C.X.. *Matemática Aula por Aula*, FTD, 2003.

[3] Flemming, D.M. e Gonçalves, M.B.. *Cálculo A: funções, limite, derivação, noções de integração*, Pearson, 2007.

[4] Guidorizzi, H. L.. *Um Curso de Cálculo*, vol. 1. LTC Editora, 2001.

[5] Hoffmann, L.D., Bradley, G.L.. *Cálculo: Um Curso Moderno e Suas Aplicações*, LTC Editora, 2002.

[6] Iezzi, G., Murakami, C., Machado N.J.. *Coleção Fundamentos de Matemática Elementar*, vol. 8. Atual Editora, 2005.

[7] Lima, E.L., Carvalho, P.C.P., Wagner, E.,Morgado, A.C.. *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 1. SBN, 2000.

[8] Stewart, J.. *Cálculo*, vol. 1. Cengage Learning, 2008.