UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

# Aplicação dos Logaritmos na Matemática e Demais Ciências

**Jesse James Leite da Silva**

**Parnaíba - 2016**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

# Aplicação dos Logaritmos na Matemática e Demais Ciências

**Jesse James Leite da Silva**

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, *campus* Ministro Reis Veloso, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora
**Profª. Drª. Sissy da Silva Souza**
**Parnaíba - 2016**

S586a

SILVA, Jesse James Leite da.
Aplicação dos Logaritmos na Matemática e Demais Ciências./Jesse James Leite da Silva.
− Parnaíba: UFPI, 2016.
37f: Il

Orientadora: Profª. Drª. Sissy da Silva Souza

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional) − Universidade Federal do Piauí, 2016.

1. Logaritmos. 2. Aplicações de Matemática. 3. Ensino.
I. Silva, Jesse James Leite da. II. Universidade Federal do Piauí. III. Título.

CDD: 510.370

PROFMAT

SBM

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

---

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada: ***Aplicação dos Logaritmos na Matemática e Demais Ciências,*** defendida por Jesse James Leite da Silva em **28/09/2016** e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Sissy da Silva Souza

Profª Drª Sissy da Silva Souza (Presidente-UFPI)

Paulo Sérgio Marques dos Santos

Profº Dr. Paulo Sérgio Marques dos Santos (UFPI)

Kécia Silva Araujo

Profª M.Sc. Kécia Silva Araújo (IFPI)

Examinador Externo

*Dedico este trabalho à minha mãe Rosileida, à minha esposa Cínthia e ao meu filho Luiz Arthur.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus, por ser a fonte de todo o conhecimento e meu condutor em minhas jornadas.

À minha família, em especial minha mãe, Rosileida, que me apoiou em todos os momentos e não mediu esforços para tal feito.

Agradeço aos professores, que contribuíram com seus conhecimentos, em especial, Sissy pela sua dedicação e paciência em minha orientação.

Aos componentes da banca examinadora que dividiram comigo este momento tão importante e esperado.

Agradeço aos meus amigos do mestrado, pela amizade construída e pelo o apoio em momentos cruciais.

Agradeço à SBM e à Universidade Federal do Piauí - Campus Ministro Reis Velloso pelo PROFMAT que possibilitou meus estudos no mestrado.

*"A verdadeira viagem de descobrimento
não consiste em procurar novas paisagens,
mas em ter novos olhos."*

Marcel Proust

# Resumo

Este trabalho trata sobre logaritmos com o objetivo de apresentar uma ferramenta para os professores de matemática que lecionam no Ensino Médio. Abordamos o assunto através de aplicações que abrangem diversas áreas do conhecimento, com o intuito de mostrar o logaritmo como uma importante ferramenta para resolução de problemas que surgem na natureza, dentre outros, motivando assim o estudo do mesmo e facilitando o processo de ensino e aprendizagem.

**Palavras-chave:** Logaritmos. Aplicações de Matemática. Ensino.

# Abstract

This work treats on logarithms in order to provide a tool for maths teachers who teach in high school. We approached the subject through applications that cover different areas of knowledge, in order to show the log as an important tool for solving problems that arise in nature, among others, motivating the study of the same and facilitating the process of teaching and learning.

**Keywords:** Logarithms. Applications of Mathematics. Teaching.

# Lista de Figuras

# Lista de Tabelas

# Sumário

# 1 Introdução

Às vezes nos deparamos com grande dificuldade em reconhecer as relações que certos conteúdos de Matemática têm com o cotidiano, ou seja, não percebemos onde eles são aplicados. Isso, na maioria das vezes, torna as aulas desmotivantes para grande parte dos estudantes. Acredita-se que quanto mais ferramentas para se trabalhar um conteúdo estiverem disponíveis para o professor, maiores as possibilidades dele se mobilizar com os alunos e atingir seus objetivos.

Com o objetivo de criar um ambiente motivador para o ensino, por parte dos professores, e para a aprendizagem, por parte dos alunos, nesta dissertação apresentamos um material que visa mostrar aos leitores alguns aspectos relacionados à história, teoria e aplicação dos logaritmos na Matemática e outras ciências. Este trabalho foi baseado em livros que abordam a Matemática lecionada no ensino médio tais como [3] e [4]; História da Matemática com [5] e livros de Cálculo Diferencial e Integral como por exemplo [6] e [2].

Este trabalho está dividido como segue: No primeiro capítulo, apresentamos conteúdos preliminares ao assunto principal dessa dissertação, começando por um breve histórico sobre o que estimulou o estudo dos logaritmos e, em seguida, apresentamos propriedades básicas que serão utilizadas em todo o trabalho. No segundo capítulo são feitos comentários a cerca do logaritmo decimal e do logaritmo neperiano, culminando com uma pequena amostra de como os Logaritmos podem ser inseridos nas demais ciências, facilitando a resolução de vários cálculos e descobrindo mais rapidamente e de maneira eficiente, respostas que pareciam ser mais trabalhosas.

# 2 Um Pouco da História dos Logaritmos

Neste capítulo, apresentamos uma abordagem histórica do surgimento do logarítmo. Mais detalhes podem ser encontrados em [5] e [1].

Nos séculos XV e XVI, os navegadores enfrentavam naufrágios, fome, doenças, ataques piratas e encalhes. Essas dificuldades, assim como a expansão comercial, implicaram na necessidade de aprimorar técnicas de navegação, o que levou ao estudo de métodos práticos e rápidos que facilitassem os cálculos.

Em 1614, o escocês John Napier revolucionaria os métodos de cálculo da época com a invenção dos logarítmos. O logarítmo de Napier não era exatamente o que usamos hoje, nem era associado ao conceito de expoente, mas a essência era a mesma.

O logarítmo surgiu como instrumento para simplificar cálculos, uma vez que transformava multiplicações e divisões nas operações mais simples de adição e subtração. A fórmula trigonométrica $2 \cdot \cos A \cdot \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$.

Bem conhecida na época de Napier, é visivelmente uma predecessora dessa idéia. Neste caso, o produto dos dois números, $2 \cdot \cos A \cdot \cos B$, é substituído pela soma dos dois números, $\cos(A + B) + \cos(A - B)$. Pode-se facilmente estender essa fórmula para converter o produto de dois números quaisquer na soma de dois outros números. Suponhamos por exemplo, que se pretenda o produto de $437,64$ por $27,327$. De uma tábua de cossenos, ache, usando interpolação se necessário, os ângulos A e B, tais que $\cos A = \dfrac{(0,43764)}{2} = 0,21882$ e $\cos B = 0,27327$. Então, usando de novo a tábua de cossenos, com interpolação se necessário, encontre $\cos(A + B)$ e $\cos(A - B)$ e some esses números.

Tem-se agora o produto de $0,43764$ e $0,27327$. Finalmente, ajustando de maneira adequada a vírgula decimal na resposta, obtém-se o produto procurado. Assim, o problema de achar o produto $(437,54) \cdot (27,327)$ foi engenhosamente reduzido a um simples problema de adição.

A abordagem de Napier para eliminar as longas multiplicações e divisões foi associar os termos da sequência $(b^1; b^2; b^3; b^4; b^5; ...; b^n)$ aos termos da sequência $(1, 2, 3, 4, 5, ..., n)$, de forma que o produto de dois termos quaisquer da primeira sequência $(b^x \cdot b^y = b^{x+y})$ estivesse associado à soma $x + y$ dos termos da segunda sequência.

Vejamos o exemplo:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 | 2048 | 4096 |

Tabela 1: Relação de potências de base 2.

Para fazer $128 \cdot 32$ note que: o termo 128 da linha 2 corresponde ao termo 7 da linha 1; o termo 32 da linha 2 corresponde ao termo 5 da linha 1. Assim, a multiplicação $128 \cdot 32$ corresponde à soma de $7 + 5 = 12$ na linha 1, cujo correspondente na linha 2 é 4096, que é o resultado procurado.

Em linguagem atual os elementos da 1ª linha da tabela correspondem ao logaritmo de base 2 dos respectivos elementos da 2ª linha da tabela.

Em seu trabalho **Descrição da Maravilhosa Regra dos Logarítmos**, datada de 1614, Napier considerou uma outra sequência de modo que seus termos eram muito próximos uns dos outros.

Ao ter contato com essa obra, Briggs sugeriu a Napier uma pequena mudança: uso de potências de 10. Era o surgimento dos logaritmos decimais, como conhecemos até hoje.

No estudo das equações e inequações exponenciais, são vistos os casos em que se pode reduzir as potências à mesma base. Por exemplo, analisando a função $y = 2^x$: Se queremos resolver a equação $2^x = 5$, sabemos que $x$ assume um valor entre 2 e 3, pois $2^2 < 2^x = 5 < 2^3$.

# 3 Logaritmos

Neste capítulo é apresentado a definição e algumas propriedades dos Logaritmos. Mais detalhes podem ser encontrados em [4] e em [3].

## 3.1 Definição de Logaritmos

Dado um número real $a > 0$, o logarítmo de um número $x > 0$ na base $a$ é o expoente $y$ a que se deve elevar $a$ de tal modo que $a^y = x$. Escreve-se $y = \log_a x$ e lê-se $y$ é o logarítmo de $x$ na base $a$.

De forma equivalente, podemos escrever:

$$\log_a x = y \iff a^y = x.$$

Ou seja, quando $y = \log_a x$, significa que $a^y = x$.

*Exemplo 3.1.1.*

2 é o logaritmo de 9 na base 3, pois $3^2 = 9$.

Da definição obtemos a chamada propriedade fundamental dos logaritmos, a qual será apresentada na seção seguinte.

## 3.2 Propriedades dos Logaritmos

Nesta seção apresentaremos as propriedades que motivaram o emprego dos logaritmos nos cálculos.

**1ª) (Propriedade Fundamental do Logaritmo) Logaritmo do produto**

"Em qualquer base a$(0 < a \neq 1)$, o logaritmo do produto de dois fatores reais positivos é igual a soma dos logaritmos dos fatores".

Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

Fazendo $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a(b.c) = z$ provemos que $z = x + y$.

Note que:

$$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$$
$$\log_a c = y \Rightarrow a^y = c$$
$$\log_a(b.c) = z \Rightarrow a^z = b.c$$
$$a^z = a^x \cdot a^y \Rightarrow a^z = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y$$

**Observação 3.2.1.** *Esta propriedade pode ser estendida para o caso do logaritmo do produto de* $n(n \geqslant 2)$ *fatores reais e positivos, isto é:*

Se $0 < a \neq 1$ e $b_1, b_2, b_3, ..., b_n \in \mathbb{R}_+^*$ então

$$\log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot ... \cdot b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \log_a b_3 + ... + \log_a b_n$$

Faremos a demonstração por indução sobre $n$.

**i)** Para $n = 2$ é verdadeira, isto é

$\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$

**ii)** Suponhamos que a propriedade seja válida para $p \geqslant 2$ fatores, isto é: $\log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot ... \cdot b_p) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \log_a b_3 + ... + \log_a b_p$ e mostraremos que a propriedade é válida para $(p + 1)$ fatores, isto é, $\log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_p \cdot b_{p+1}) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + ... + \log_a b_p + \log_a b_{p+1}$.

Temos:
$\log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_p \cdot b_{p+1}) = \log_a[(b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_p) \cdot b_{p+1}] = \log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_p) + \log_a b_{p+1} = \log_a b_1 + \log_a b_2 + ... + \log_a b_p + \log_a b_{p+1}$.

**Observação 3.2.2.** *Note que se* $b > 0$ *e* $c > 0$ *então* $b \cdot c > 0$ *e vale a identidade* $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$*, com* $0 < a \neq 1$*. Mas, se soubermos apenas que* $b \cdot c > 0$ *então, temos:* $\log_a(b \cdot c) = \log_a |b| + \log_a |c|$*, com* $0 < a \neq 1$.

*Exemplo 3.2.1*

1. $\log_6[3 \cdot (-4) \cdot (-5)] = \log_6 3 + \log_6(-4) + \log_6(-5)$
2. $\log_3[x \cdot (x - 2)] = \log_3 x + \log_3(x - 2)$ se, e somente se, $x > 0$ e $x - 2 > 0$, isto é, $x > 2$.

### 2ª) Logaritmo do Quociente

Em qualquer base $a(0 < a \neq 1)$, o logaritmo quociente de dois números reais positivos é igual a diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor. Em símbolos, se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$.

Fazemos $\log_a b = x$, $\log_a b - \log_a c = y$ e $\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right) = z$ mostraremos que $z = x - y$.

De fato:
$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$ e $\log_a c = y \Rightarrow a^y = c$. Consequentemente,

$a^z = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow a^z = a^{x-y} \Rightarrow z = x - y$. Assim:

$\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right) = z \Rightarrow a^z = \dfrac{b}{c}$.

**Observação 3.2.3.** *Note que das propriedades acima, fazendo* $b = 1$*, escrevemos:*

$$\log_a\left(\frac{1}{c}\right) = \log_a 1 - \log_a c \Rightarrow \log_a\left(\frac{1}{c}\right) = -\log_a c.$$

Note ainda que se $b > 0$ e $c > 0$ então $\frac{b}{c} > 0$ e vale a identidade:

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c,$$

com $0 < a \neq 1$.

*Exemplo 3.2.2.*

1. Se $x > 0$ então $\log_2\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \log_2 x - \log_2(x+1)$.
2. Temos $\log_3\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \log_3(x+1) - \log_3(x-1)$ se, e somente se, $x + 1 > 0$ e $x - 1 > 0$, isto é, $x > 1$.

**3ª) Logaritmo da Potência**

Em qualquer base a$(0 < a \neq 1)$, o logaritmo de uma potência de base real positiva e expoente real é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência. Em símbolos: Se $0 <\neq 1$, $b > 0$ e $k \in \mathbb{R}$ então $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$.

Fazendo $\log_a b = x$ e $\log_a b^k = y$, provemos que $y = k \cdot x$. De fato: $\log_a b = x$, logo $a^x = b$, e $a^y = (a^x)^k$, e consequentemente $a^y = a^{k \cdot x}$ e assim $y = k \cdot x$. Daí $\log_a b^k = y \Rightarrow a^y = b^k$.

**4ª) Mudança de Base**

Se $a, b$ e $N$ são números reais positivos e $a, b \neq 1$, então tem-se: $\log_b N = \dfrac{\log_a N}{\log_a b}$.

Consideramos $\log_b N = p$; $\log_a N = q$ e $\log_a b = r$. Daí segue que: $b^p = N$; $a^q = N$ e $a^r = b$. Assim: $N = a^q = b^p = (a^r)^p = a^{rp}$. Se $a^q = a^{rp}$, então $q = rp$ e daí $p = \dfrac{q}{r}$ ou $\log_b N = \dfrac{\log_a N}{\log_a b}$. **Observação:** Nessa propriedade de mudança de base, fazendo

$N = a$, temos um caso importante:

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}.$$

Então podemos escrever que, quando existirem os logaritmos envolvidos:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \text{ ou } \log_b a \cdot \log_a b = 1.$$

*Exemplo 3.2.3.*

1. $\log_3 7 = \dfrac{\log 7}{\log 3}$ (na base 10)
2. $\log_a b = \dfrac{5}{2} \Rightarrow \log_b a = \dfrac{2}{5}$

# 4 A Função Logarítmica

Sendo $a$ um número real, positivo e diferente de 1 $\left(a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}\right)$, chamamos função logarítmica de base $a$ a função $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \log_a x.$$

Observe que o domínio da função é $\mathbb{R}_+^*$, ou seja, somente valores positivos poderão ser atribuídos a $x$. Vamos analisar dois exemplos. No primeiro, a base é maior que 1 e, no segundo, a base está entre 0 e 1 (os dois únicos tipos possíveis de base).

*Exemplo 4.1.*

Atribuindo valores arbitrários a $x$ e calculando $f(x)$, obtemos pontos $(x, f(x))$ que pertencem ao gráfico da função $y = \log_a x$. Apresentamos alguns exemplos:

1. $y = \log_2 x$. Passa pelos pontos $(1, 0), (2, 1)$.

2. $y = \log_3 x$. Passa pelos pontos $(1, 0), (3, 1)$.

3. $y = \log_4 x$. Passa pelos pontos $(1, 0), (4, 1)$.

4. $y = \log_5 x$. Passa pelos pontos $(1, 0), (5, 1)$.

5. $y = \log_6 x$. Passa pelos pontos $(1, 0), (6, 1)$.

*Exemplo 4.2.*

Consideremos a função definida por $y = \log_3 x$.

Atribuindo valores arbitrários a $x$ e calculando $f(x)$, obtemos uma tabela de pontos que pertencem ao gráfico da função $y = \mathsf{log}_3 x$.

| $x$ | $y$ | $\text{Ponto}(x, y)$ |
|---|---|---|
| $\dfrac{1}{9}$ | $-2$ | $A\left(\dfrac{1}{9}, -2\right)$ |
| $\dfrac{1}{3}$ | $-1$ | $B\left(\dfrac{1}{3}, -1\right)$ |
| $1$ | $0$ | $C\,(1, 0)$ |
| $3$ | $1$ | $D\,(3, 1)$ |
| $9$ | $2$ | $E\,(9, 2)$ |

Tabela 2: Pontos da função $\log_3 x$

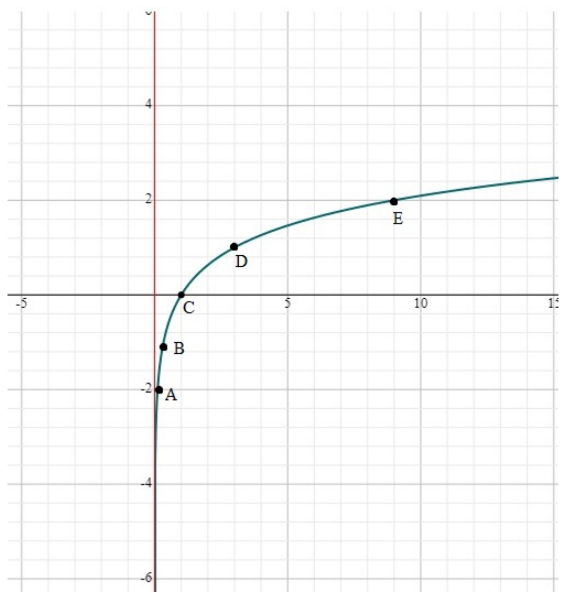


Figura 1: Gráfico da função $\log_3 x$

Observe que, quanto mais o valor de $x$ (positivo) se aproxima de zero, mais os pontos do gráfico se aproximam do eixo $y$, sem, porem, atingí-lo. Desse modo, a reta suporte do eixo $y$ é assíntota à curva.

*Exemplo 4.3.*

Vejamos agora a função definida por $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Procedendo de maneira análoga, tomamos a seguinte tabela de pontos pertencentes ao gráfico da função:

| $x$ | $y$ | $\text{Ponto}(x, y)$ |
|---|---|---|
| $\frac{1}{9}$ | 2 | $A\left(\frac{1}{9}, 2\right)$ |
| $\frac{1}{3}$ | 1 | $B\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ |
| 1 | 0 | $C\,(1, 0)$ |
| 3 | $-1$ | $D\,(3, -1)$ |
| 9 | $-2$ | $E\,(9, -2)$ |

Tabela 3: Pontos da função $\log_{\frac{1}{3}} x$

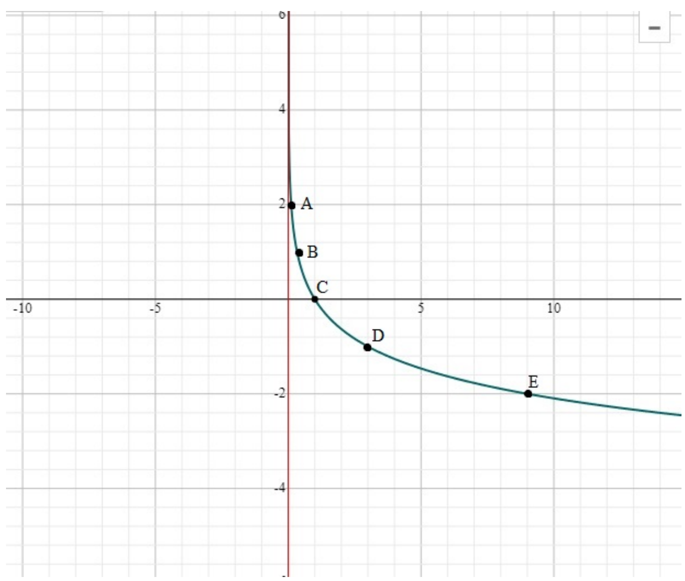


Figura 2: Gráfico da função $\log_{\frac{1}{3}} x$

Os exemplos nos motivam à seguinte classificação da função definida por $y = \log_a x$ como:

**Crescente** quando $a > 1$;

**Decrescente** quando $0 < a < 1$.

# 5 Logarítmos e Sua Aplicabilidade

Os logaritmos possuem várias aplicações em Matemática e em diversas outras áreas do conhecimento, como Biologia, Física, Geografia, Medicina, Química entre outras. Veremos neste capítulo alguns exemplos que demonstram a utilização das técnicas de logaritmos na busca dos resultados nas mais variadas situações.

*Exemplo 5.1.1.*

Calcule o número de algarismos da potência $500^{23}$. Se necessário, utilize $\log 2 = 0,301$.
**Solução:**

$10^n = 500^{23} \Rightarrow \log_{10} 500^{23} = n \Rightarrow n = 23 \cdot \log \frac{1000}{2} \Rightarrow n = 23 \cdot (\log 10^3 - \log 2) \Rightarrow n = 23 \cdot (3 - 0,301) \Rightarrow n = 23 \cdot 2,699 = 62,077$

$$\overbrace{10^{62}}^{63 algarismos} < \overbrace{10^{62,077}}^{63 algarismos} < \overbrace{10^{63}}^{64 algarismos}$$

Portanto, como $500^{23}$ é inteiro, ele possui 63 algarismos.

*Exemplo 5.1.2.*

Uma pessoa aplicou um capital $C$ a uma taxa de juro de 40% a.a. Determine o prazo para que se receba o dobro do capital aplicado.
Use $\log 2 = 0,30103$ e $\log 7 = 0,84510$. **Solução:** $2C = C \cdot (1 + 0,4)^t$

$2 = (1,4)^t$
Aplicando logaritmo nos dois membros:
$\log 2 = \log (1,4)^t$
$\log 2 = t \cdot \log 1,4$

$$t = \frac{\log 2}{\log 1,4}$$

$$t = \frac{\log 2}{\log (2 \cdot 0,7)}$$

$$t = \frac{\log 2}{\log 2 + \log \left(\frac{7}{10}\right)}$$

$$t = \frac{\log 2}{\log 2 + (\log 7 - \log 10)}$$

$$t = \frac{0,30103}{0,30103 + 0,84310 - 1}$$

$$t = \frac{0,30103}{0,14613} \simeq 2,10 \text{ anos.}$$

Logo $t = 2,10$

*Exemplo 5.1.3.*

(Unesco-SP) Os átomos de um elemento químico radioativo possuem uma tendência natural a se desintegrar ( emitindo partículas e se transformando em outro elemento). Assim, sendo com o passar do tempo, a quantidade original desse elemento diminui. Suponhamos que certa quantidade de um elemento radioativo com inicialmente m0 gramas de massa, se decomponha segundo a equação matemática $m(t) = m_0 \cdot 10^{-\frac{t}{70}}$, onde $m(t)$ é a quantidade de massa radioativa no tempo t (em anos). Usando a aproximação $\log 2 = 0,3$, determine quantos anos demorará para que esse elemento se decomponha até atingir um oitavo da massa inicial.

**Solução:** $m(t) = m_0 \cdot 10^{-\frac{t}{70}}$

$m_0 \cdot 10^{-\frac{t}{70}} = \dfrac{m_0}{8}$
$10^{-\frac{t}{70}} = \dfrac{1}{8}$
Aplicando logaritmo
$\log 10^{-\frac{t}{70}} = \log\left(\dfrac{1}{8}\right)$
$-\dfrac{t}{70} = \log\left(\dfrac{1}{8}\right)$
$-\dfrac{t}{70} = \log 1 - \log 8$
$-\dfrac{t}{70} = -\log 2^3$
$-\dfrac{t}{70} = -3 \cdot 0,3$
$-\dfrac{t}{70} = -0,9$
$t = 0,9 \cdot 70$
$t = 63$

*Exemplo 5.1.4.*
Na cidade de San James, a taxa de crescimento populacional é de 3% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população desta cidade irá dobrar, se a taxa de crescimento continuar a mesma? **Solução:**

População do ano base = Pb
População após 1 ano = $Pb \cdot (1,03) = P_1$
População após 2 anos = $Pb \cdot (1,03)^2 = P_2$
População após x anos = $Pb \cdot (1,03)^x = P_x$

Vamos supor que a população dobrará em relação ao ano base após x anos, sendo assim, temos:

$P_x = 2 \cdot Pb$

$Pb \cdot (1,03)^x = 2Pb$

$1,03^x = 2$

Aplicando logaritmo

$\log 1,03x = \log 2$

$x \cdot \log 1,03 = \log 2$

$x \cdot 0,0128 = 0,3010$

$x = \dfrac{0,3010}{0,0128}$

$x = 23,5$

A população de San James dobrará em aproximadamente 23,5 anos.

*Exemplo 5.1.5.*

A densidade populacional a x quilômetros do centro de uma cidade é dada por uma função de forma $Q(x) = Ae^{-kt}$. Determine essa função, sabendo que a densidade populacional no centro da cidade é 15000 habitantes por quilômetro quadrado e a densidade populacional a 10 km do centro é 9000 habitantes por quilômetro quadrado. **Solução:**

Para simplificar os cálculos, vamos expressar a densidade populacional em milhares de habitantes por metro quadrado. O fato de que $Q(0) = 15$ significa que $A = 15$. O fato de $Q(10) = 9$ significa que

$$9 = 15e^{-10k} \text{ ou } \frac{3}{5} = e^{-10k}$$

Tomando o logaritmo de ambos os membros da equação, temos:

$$\ln\left(\frac{3}{5}\right) = -10k \text{ ou } k = -\frac{\frac{3}{5}}{10} \cong 0,051$$

Assim, a função exponencial que representa a densidade populacional é $Q(x) = 15e^{-0,051x}$

*Exemplo 5.1.6.*

Determine o tempo que leva para que 100g de uma certa substância radioativa, que se desintegra a taxa de 2% ao ano, se reduza a 20g. Utilize a seguinte expressão $Q = Q_0 \cdot e^{-rt}$, em que Q é a massa da substância, r é a taxa e t é o tempo em anos. **Solução:**

$Q = Q_0 \cdot e^{-rt}$

$20 = 100 \cdot e^{-0,02t}$

$\dfrac{20}{100} = e^{-0,02t}$

$\frac{1}{5} = e^{-0,02t}$

Aplicando logaritmos

$\mathsf{Log}_e e^{-0,02t} = \log_e \left(\frac{1}{5}\right)$
$-0,02t \cdot \log_e e = \log_e 5^{-1}$
$-0,02t = -\log_e 5 \qquad \times(-1)$
$0,02t = \ln 5$
$t = \frac{\ln 5}{0,02} \Leftrightarrow t = \frac{1,6094}{0,02} \Leftrightarrow t = 80,47$
A substância radioativa levará 80,47 anos para se reduzir a 20g.

**Exemplo 5.1.7.**
Suponha que o nível sonoro (B) e a intensidade I de um som estejam relacionados pela equação $B = 120 + 10 \cdot \log_{10} I$, em que **B** é medido em decibéis e I em watts por metros quadrados. Seja $I_1$ a intensidade sonora de 80 decibéis em um cruzamento de duas avenidas movimentadas e $I_2$ a intensidade correspondente ao nível sonoro do interior de um automóvel com ar-condicionado. Qual o valor da razão $\frac{I_1}{I_2}$?

**Vamos calcular a razão:**
Cálculo de $I_1$
$80 = 120 + 10 \cdot \log_{10} I_1$
$10 \cdot \log_{10} I_1 = 80 - 120$
$10 \cdot \log_{10} I_1 =$
$-40 \mathsf{Log}_{10} I_1 = -4$
$I_1 = 10^{-4}$

Cálculo de $I_2$
$60 = 120 + 10 \cdot \log_{10} I_2$
$10 \cdot \log_{10} I_2 = 60 - 120$
$10 \cdot \log_{10} I_2 = -60$
$\log_{10} I_2 = -6$
$I_2 = 10 - 6$

A Razão $\frac{I_1}{I_2} = \frac{10^{-4}}{10^{-6}} = 10^2 = 100$

**Exemplo 5.1.8.**

A expressão $M = A(1+i)^n$ nos permite calcular o montante **M**, resultante da aplicação do capital **A** a juros compostos, à taxa anual **i**, ao completar um período de **n** anos.

Nessas condições, se o capital de R$ 800.000,00 for aplicado a juros compostos e à taxa anual de 12%, após quanto tempo da aplicação serão obtidos juros no valor de R$ 700.000,00?

**Vamos calcular o tempo de aplicação:** $M = A \cdot (1+i)^n$

$A = R\$800.000,00$
$i = 12\% a.a.$
$j = R\$700.000,00$
$n = ?$
$M = 800.000 + 700.000 = 1.500.000$
$1.500.000 = 800.000 \cdot (1+0,12)^n$
$15 = 8 \cdot 1,12^n$

Aplicando logaritmo

$\log 15 = \log(8 \cdot 1,12^n)$
$\log 15 = \log 8 + \log 1,12^n$
$\log 1,12^n = \log 15 - \log 8$
$n \cdot \log 1,12 = 1,1761 - 0,9030$
$n \cdot \log 1,12 = 0,2731$
$n = \dfrac{0,2731}{0,0492} \cong 5,55$ anos

## 5.1. O Logaritmo Neperiano

Na Matemática, o número de Euler, denominado em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, é a base dos logaritmos naturais. Mais informações podem ser encontradas em [3]. As variantes do nome do número incluem: número de Napier, número de Neper, constante de Néper, número neperiano, constante matemática, número exponencial etc. A primeira referência à constante foi publicada em 1618 na tabela de um apêndice de um trabalho sobre logaritmos de Jonh Napier. No entanto, este não contém a constante propriamente dita, mas apenas uma simples lista de logaritmos naturais calculados a partir desta. A primeira indicação da constante foi descoberta por Jacob Bernoulli, quando tentava encontrar um valor para a seguinte expressão( muito comum em cálculo de juros compostos ):

$$K \cdot e^r = \lim_{n \longrightarrow \infty} (k(1 + r/n)^n) \text{ para r = k = 1, ou seja:}$$

$$e = \lim_{n \longrightarrow \infty} ((1 + 1/n)^n) \text{ ou ainda substituindo n por 1/h}$$

$$e = \lim_{n \longrightarrow \infty} (1 + h)^{1/h}$$

cujo valor é aproximadamente 2,7182818284590452353602887.

Sistema de logaritmos neperianos é o sistema de base $e$ ($e$ = 2,71828... número irracional), também chamados de sistema de logaritmos naturais. O nome neperiano vem de Jonh Napier, matemático escocês (1550-1617), autor do primeiro trabalho publicado sobre a teoria dos logaritmos. O nome ”natural”se deve ao fato de que no estudo dos fenômenos naturais geralmente aparece uma lei exponencial de base $e$. Indicaremos o logaritmo neperiano pelas notações $\log_e x$ ou $\ln x$.

## 5.2. O Logaritmo Decimal

Decompondo o logaritmo decimal de um número positivo x como sendo a soma de um número positivo $c$ com um racional $m(0 \leqslant m < 1)$.

O número $c$ chama-se característica e o número m chama-se mantissa, ou seja, $\log x = c + m$. Vejamos o $\log 901$.

Sabendo que o número 901 está compreendido entre $10^2$ e $10^3$, ou seja, $10^2 < 901 < 10^3$, podemos escrever:

$$\log 10^2 < \log 901 < \log 10^3$$

$$2 < \log 901 < 3$$

Onde concluímos que o valor do logaritmo de 901 tem parte inteira igual a 2 e parte não inteira 0,954725 que podemos extrair da tabela de logaritmo presente na figura abaixo.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 80 | 903090 | 903633 | 904174 | 904716 | 905256 | 905796 | 906335 | 906874 | 907411 | 907949 |
| 81 | 908485 | 909021 | 909556 | 910091 | 910624 | 911158 | 911690 | 912222 | 912753 | 913284 |
| 82 | 913814 | 914343 | 914872 | 915400 | 915927 | 916454 | 916980 | 917506 | 918030 | 918555 |
| 83 | 919078 | 919601 | 920123 | 920645 | 921166 | 921686 | 922206 | 922725 | 923244 | 923762 |
| 84 | 924279 | 924796 | 925312 | 925828 | 926342 | 926857 | 927370 | 927883 | 928396 | 928908 |
| 85 | 929419 | 929930 | 930440 | 930949 | 931458 | 931966 | 932474 | 932981 | 933487 | 933993 |
| 86 | 934498 | 935003 | 935507 | 936011 | 936514 | 937016 | 937518 | 938019 | 938520 | 939020 |
| 87 | 939519 | 940018 | 940516 | 941014 | 941511 | 942008 | 942504 | 943000 | 943495 | 943989 |
| 88 | 944483 | 944976 | 945469 | 945961 | 946452 | 946943 | 947434 | 947924 | 948413 | 948902 |
| 89 | 949390 | 949878 | 950365 | 950851 | 951338 | 951823 | 952308 | 952792 | 953276 | 953760 |
| 90 | 954243 | 954725 | 955207 | 955688 | 956168 | 956649 | 957128 | 957607 | 958086 | 958564 |
| 91 | 959041 | 959518 | 959995 | 960471 | 960946 | 961421 | 961895 | 962369 | 962843 | 963316 |
| 92 | 963788 | 964260 | 964731 | 965202 | 965672 | 966142 | 966611 | 967080 | 967548 | 968016 |
| 93 | 968483 | 968950 | 969416 | 969882 | 970347 | 970812 | 971276 | 971740 | 972203 | 972666 |
| 94 | 973128 | 973590 | 974051 | 974512 | 974972 | 975432 | 975891 | 976350 | 976808 | 977266 |
| 95 | 977724 | 978181 | 978637 | 979093 | 979548 | 980003 | 980458 | 980912 | 981366 | 981819 |
| 96 | 982271 | 982723 | 983175 | 983626 | 984077 | 984527 | 984977 | 985426 | 985875 | 986324 |
| 97 | 986772 | 987219 | 987666 | 988113 | 988559 | 989005 | 989450 | 989895 | 990339 | 990783 |
| 98 | 991226 | 991669 | 992111 | 992554 | 992995 | 993436 | 993877 | 994317 | 994757 | 995196 |
| 99 | 995635 | 996074 | 996512 | 996949 | 997386 | 997823 | 998259 | 998695 | 999131 | 999565 |
| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

Figura 3: Tábua de Logaritmos Decimais (Mantissas)

Então $\log 901 = 2 + 0,954725$ ou $\log 901 = 2,954725$.

Vejamos o log 8120.

$$1000 < 8120 < 10000 \Rightarrow 10^3 < 8120 < 10^4$$

$$\log 10^3 < \log 8120 < \log 10^4$$

$$3 < \log 8120 < 4$$

O valor do logaritmo de 8120 tem parte inteira igual a 3 e parte não-inteira que obtemos na tabela lendo a mantissa 812(pois 8120 não está na tabela).

Então $\log 8120 = 3 + 0,909556$ ou $\log 8120 = 3,909556$.

A ciência, nas suas várias ramificações, foi beneficiada pelo advento do logaritmo. Citaremos algumas de suas aplicações:

## 5.3. Aplicações em Diversas Áreas

Geralmente encontramos tamanha dificuldade em enxergar relações existentes entre alguns conteúdos e o cotidiano, ou seja, não percebemos onde eles são aplicados. Tal fato torna as aulas sem sentido para os alunos. Pensando nisso, este trabalho cita algumas aplicações de logaritmo no cálculo do resfriamento de um corpo, no nível sonoro, na definição do pH de substâncias na escala Richter dos abalos sísmicos e na descoberta da idade de fósseis utilizando o Carnobo 14.

### 5.3.1. Resfriamento de um Corpo

Um objeto aquecido, colocado num meio mais frio (ar ou água, por exemplo) cuja grande massa faz com que a temperatura desse meio permaneça constante, sem ser afetada pela presença do objeto mais quente. A lei do resfriamento de Newton afirma que, nessas condições a diferença de temperatura D, entre o objeto e o meio que o contém, decresce com uma taxa de variação proporcional a essa própria diferença. Como no caso da desintegração radioativa, essa lei se traduz matematicamente assim: chamando $D_0$ a diferença de temperatura no instante $t = 0$ e $D(t)$ a diferença num instante t qualquer, tem-se $D(t) = D_0 \cdot e^{-\alpha}$ onde a constante alfa depende do material de que é constituída a superfície do objeto.

*Exemplo 5.3.1.*

Num certo dia, a temperatura ambiente é de 30°C. A água que fervia numa panela, cinco minutos depois de apagado o fogo, tem a temperatura de 65°C. Quanto tempo depois de apagado o fogo a água atingirá a temperatura de 38°C? **Solução:**

No momento em que se apagou o fogo ($t = 0$), a temperatura da água era de 100°C e a do ambiente 30°C. Logo $D_0 = 100 - 30 = 70$. Passados $t$ minutos, a diferença da temperatura da água para a do meio ambiente é dada por $D(t) = 70 \cdot e^{-\alpha \cdot t}$. Para determinar a constante alfa, usamos a informação de que:

$$D(5) = 70 \cdot e^{-5\alpha} = 65 - 30 = 35$$

Portanto $e^{-5\alpha} = \frac{35}{70} = 1/2$ . Tomando logaritmos naturais, vem:

$$-5\alpha = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2, \text{ logo } \alpha = \frac{\ln 2}{5} = \frac{0,693}{5} = 0,1386.$$

Queremos saber o valor de $t$ para o qual

$$D(t) = 70 \cdot e^{-0,1386t} = 38 - 30 = 8$$

Novamente tomamos logaritmos para resolver a equação $70 - e^{-0,1386t} = 8$, obtendo

$$-0,1386t = \ln(\frac{8}{70}) = -\ln(\frac{70}{8})$$

donde

$$t = \frac{\ln(\frac{70}{8})}{0,1386} = \frac{2,1691}{0,1386} = 15,65$$

pouco mais do que 15 minutos e meio.

### 5.3.2. Acústica e Logaritmo

Ao estudar ondas sonoras, percebemos que o som apresenta características como: altura, intensidade e timbre.

No caso da intensidade I, que representa a potência de uma onda sonora por unidade de área $(W/m^2)$, encontramos detalhes interessantes como é o caso da limitação auditiva.

Para perceber a onda sonora, o tímpano humano necessita que ela tenha, no mínimo, uma intensidade $I_0 = 10^{-12}(W/m^2)$, chamado de *Limiar de Audibilidade* e, no máximo de $1(W/m^2)$, chamado de *Limiar da Dor.*

O nível sonoro(B) representa a comparação entre a intensidade sonora I e o limiar da audibilidade $I_0$. A sua unidade mais prática é o decibel $(dB)$.

A grandeza nível sonoro $(B)$ obedece a uma escala logarítmica, sendo definida por:

$$B = 10 \cdot \log(I/I_0)$$

Por exemplo, a intensidade correspondente a um nível de 40 dB é assim calculada:

$$40 = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \Rightarrow \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) = 4 \Rightarrow 10^4 = \frac{I}{10^{-12}} \Rightarrow I = 10^{-8} W/m^2$$

Podemos relacionar esses conceitos com algumas situações do cotidiano:

- O ouvido humano apresenta lesões irrecuperáveis sempre que é exposto, por um determinado tempo, a níveis sonoros $(B)$ superiores a 80 $(dB)$

- A unidade bel $(B)$ e decibel $(dB)$ representam uma homenagem ao físico escocês Alexander Graham Bell (1847-1922).

*Exemplo 5.4.1.*

Numa danceteria existem dois aparelhos de som exatamente iguais. Quando o aparelho A foi ligado no máximo, mediu-se o NIS (nível de Intensidade Sonora), dado por 80 dB (decibel). Determinar o número de decibels que se obtém no caso do aparelho B também ser ligado no máximo, sabendo que o NIS é dado em decibels por:

$$\text{NIS} = 10 \cdot \log(\text{IS}/\text{IR}),$$

em que IS é a intensidade sonora e IR é o índice unitário (em watt por $cm^2$)

**Solução:**
À primeira vista, poderíamos ser tentados a imaginar que NIS em decibels seria 160, pelo fato de termos dobrado a intensidade sonora ao ligarmos também o aparelho B. No entanto isso não é verdade. Vejamos por quê.

Chamamos de a o valor de (IS—IR) e de $NIS_1$ o nível de intensidade sonora em decibels quando ligado apenas o aparelho A, temos que:

$$NIS_1 = 10 \cdot \log a = 80$$

Vamos imaginar agora o aparelho B também ligado no máximo. Dessa forma, a intensidade sonora duplicou, ou seja, ficou $2 \cdot a$. Então:

$NIS = 10 \cdot \log(2 \cdot a) \Rightarrow NIS = 10 \cdot [\log 2 + \log a] \Rightarrow NIS = 10 \cdot \log 2 + 10 \cdot \log$ a

Tomando $\log 2 = 0,30103$ , temos:

$NIS = 10 \cdot (0,30103) + 80 \Rightarrow NIS = 3,0103 + 80 \Rightarrow NIS = 83,0103 dB$

Observa-se que, quando duplicada a intensidade sonora, o NIS aumentou pouco mais de 3 decibels!

## 5.3.3. A Escala de Acidez e os Logaritmos

O $pH$ é uma escala usada em Química para expressar o grau de acidez ou basicamente de uma solução aquosa. Os valores do $pH$ variam de 0 a 14.

Para o cálculo do $pH$ usa-se a expressão:

$$pH = -\log[H^+]$$

sendo $[H^+]$ a concentração de íons hidrogênio em $mol/L$.

- Quando $0 \leqslant pH < 7$, a solução é ácida.
- Quando $pH = 7$, a solução é neutra.
- Quando $7 < pH \leqslant 14$, a solução é básica.

Veja o $pH$ de algumas soluções:

- Suco de limão: 2,3;


Figura 4: PH

- Vinagre: 2,4 a 3,4;
- Vinho tinto: 3,8;
- Leite: 6,4 a 6,8;
- Água destilada: 7;
- Sangue: 7,3;
- Bicarbonato de sódio: 8,4;
- Leite de magnésia: 10,5;
- Amoníaco: 12.

O estômago humano apresenta um meio muito ácido, devido à presença e à ação do ácido clorídrico. O suco gástrico, produzido no estômago, é responsável pela digestão de alimentos e seu $\mathsf{pH}$ oscila entre $1,0$ e $3,0$.

• $\mathsf{pH} = 1 \Rightarrow -\mathsf{log}[\mathsf{H}^+] = 1 \Rightarrow \mathsf{log}[\mathsf{H}^+] = -1 \Rightarrow 10^{-1} = [\mathsf{H}^+]$

• $\mathsf{pH} = 3 \Rightarrow -\mathsf{log}[\mathsf{H}^+] = 3 \Rightarrow \mathsf{log}[\mathsf{H}^+] = -3 \Rightarrow 10^{-3} = [\mathsf{H}^+]$

Assim, a concentração, em $\mathsf{mols/L}$, de íons hidrogênio encontrada no suco gástrico varis de 0,001 a 0,1.

Do mesmo modo, se a concentração hidrogeniônica em uma solução de suco gástrico é $4 \cdot 10^{-2}$ $\mathsf{mols/l}$, o pH da solução é:

$$\mathsf{pH} = -\mathsf{log}[\mathsf{H}^+] = -\mathsf{log}(4 \cdot 10^{-2}) = -[\mathsf{log}4 + \mathsf{log}10^{-2}] = -[2 \cdot \mathsf{log}2 - 2]$$

Como $\mathsf{log}2 \cong 0,3$, temos:

$$\mathsf{pH} = -(2 \cdot 0,3 - 2) = 1,4$$

## 5.3.4. Os terremotos e os Logaritmos

O maior terremoto já registrado foi o Grande Terremoto do Chile, em 1960, que atingiu $9,5$ na escala Richter, seguido pelo da Indonésia em 2004, que atingiu $9,3$ na mesma escala.

A **escala Richter** foi desenvolvida em 1935 pelos sismólogos Charles Francis Richter e Beno Gutenberg. Ambos estudavam sismos no sul da Califórnia, utilizando um equipamento específico - o sismógrafo Wood-Anderson. Após recolher dados de inúmeras ondas sísmicas liberadas por terremotos, eles criaram um sistema para calcular as magnitudes dessas ondas. No princípio, essa escala destinava-se a medir unicamente os tremores que ocorriam na Califórnia.

A escala Richter corresponde ao logaritmo da medida da amplitude das ondas sísmicas a 100 km do epicentro. A intensidade I de um terremoto é um número que varia de $\mathrm{I} = 0$ até $\mathrm{I} = 9,5$ para o maior terremoto conhecido.

**I** é dado pela fórmula:

$\mathrm{I} = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$

Onde $E$ é a energia liberada em quilowatt-hora e $E_0 = 7 \cdot 10^{-3} kWh$.

### 5.3.5. O Carbono 14 nos Seres Vivos

Os átomos de Carbono 14 criados por raios cósmicos combinam-se com oxigênio para formar dióxido de carbono, que as plantas absorvem naturalmente e incorporam as suas fibras por meio da fotossíntese. Como os animais e humanos comem plantas, acabam ingerindo o Carbono 14 também. A relação de carbono normal (carbono 12) pela de Carbono 14 no ar e em todos os seres vivos mantém-se constante durante quase todo o tempo. Talvez em cada trilhão de átomos de carbono seja um átomo de Carbono 14. Os átomos de Carbono 14 estão sempre decaindo, más são substituídos por novos átomos de Carbono 14, sempre em uma taxa constante. Nesse momento, seu corpo tem uma certa porcentagem de átomo de Carbono 14 nele, e todas as plantas e animais vivos têm a mesma porcentagem que você.

Abaixo descrevemos a técnica matemática utilizada para datar um fóssil.

Assim que um organismo morre, ele pára de absorver novos átomos de carbono. A relação de carbono 12 por carbono 14 no momento da morte é a mesma que nos outros organismos vivos, mas o carbono 14 continua a decair e não é mais reposto. Numa amostra a meia-vida do carbono 14 é de 5700 anos, enquanto a quantidade de carbono 12, por outro lado, permanece constante. Ao olhar a relação entre carbono 12 e carbono 14 na amostra e compará-la com a relação em um ser vivo, é possível determinar a idade de algo que viveu em tempos passados de forma bastante precisa. Observe a figura abaixo:

Uma fórmula usada para calcular a idade de uma amostra usando a datação por carbono 14 é:

$$t = \frac{\ln(\frac{N_f}{N_0})}{-0,693} \times t_{\frac{1}{2}}$$

Em que ln é o logaritmo neperiano, $N_f/N_0$ é a porcentagem de carbono 14 na amostra comparada com a quantidade em tecidos vivos e $t_{\frac{1}{2}}$ é a meia vida do carbono 14 (5700 anos).

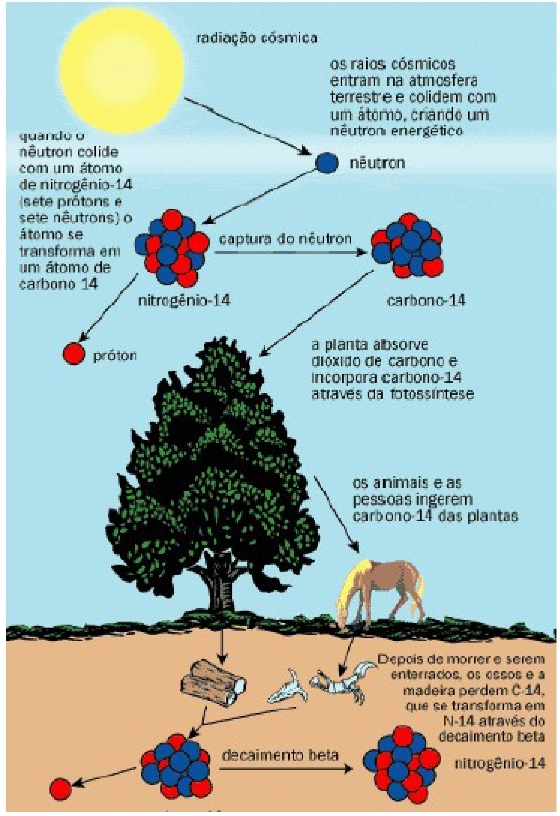


Figura 5: Processo do carbono 14

Por isso, se você tivesse um fóssil com 10% de Carbono 14 em comparação com a amostra viva, o fóssil teria:

$t = \dfrac{\ln(0,10)}{-0,693} \times 5700$ anos

$t = \frac{-2,303}{-0,693} \times 5700$ anos

$t = 3,323 \times 5700$ anos

$t = 18941$ anos de idade.

*Exemplo 5.7.1.*

Sabendo que a meia-vida de uma substância radioativa que decai segundo a equação $Q(t) = Q_0 e^{-kt}$ é dada por $\bar{t} = (\ln 2)/k$. Responda.

Um arqueólogo encontrou um fóssil na qual a razão entre as massas de $14_C$ e $12_C$ era $\dfrac{1}{5}$ da razão observada na atmosfera. Qual a idade aproximada do fóssil? **Solução:**

A idade do fóssil é o valor de t para o qual $R(t) = \frac{R_0}{5}$, isso é, para o qual

$$\frac{1}{5R_0} = R_0 e^{-kt}$$

Dividindo ambos por $R_0$ e tomando o logaritmo de ambos os membros, temos:

$$\frac{1}{5} = e^{-kt}$$

$$\ln\left(\frac{1}{5}\right) = -kt$$

$$t = -\frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{k} = \frac{\ln 5}{k}$$

Como a meia-vida $\bar{t}$ satisfaz a equação $\bar{t} = \frac{\ln 2}{k}$. Como o $14_C$ tem uma meia-vida $\bar{t} = 5730$, temos:

$$K = \frac{\ln 2}{\bar{t}} = \frac{\ln 2}{5730} = 0,000121$$

Assim, a idade do fóssil é

$$T = \frac{\ln 5}{k} = \frac{\ln 5}{0,000121} \cong 13300$$

O fóssil tem, portanto, aproximadamente 13300 anos de idade.

# 6 Considerações Finais

Com a elaboração deste trabalho, esperamos disponibilizar aos professores, mais rescursos a serem utilizados na sala de aula na hora de transmitir ao alunoo assunto de Logaritmo. Logaritmo é, sem dúvida, um tema que os docentes têm dificuldades de passar para o aluno do 1º ano do ensino médio. Essa dissertação contém atividades que podem levar o aluno a compreender o conceito, as propriedades fundamentais e algumas aplicações do Logaritmo na Matemática e nas demais ciências.

# Referências


[1] BOYER, C. *História da matemática*, São Paulo. Editora da USP, 1974.

[2] GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo*, vol 1. 5 ed. Rio de Janeiro. LTC. 2001.

[3] Iezzi, G.,Dolce, O.,Murakami, C. *Fundamentos de Matemática Elementar*, Vol. 2. Atual Editora, 2013.

[4] Lima, E.L., *Logaritmos*, Coleção Professor de Matemática, 6ª edição. Editora SBM, 2016.

[5] Eves, H.-*introdução à história da matemática*, Unicamp Editora, 2008.

[6] Hoffmann, L. D.,Bradley, G. L.-*Cálculo: Um Curso Moderno e Suas Aplicações*, 7ª Edição. LTC Editora, 2002.