



Lucas Soares Marinho

Efeitos de Perda de Coerência no Experimento de Fenda-Dupla com Ondas de Matéria

Teresina - PI
8 de janeiro de 2019

Lucas Soares Marinho

Efeitos de Perda de Coerência no Experimento de Fenda-Dupla com Ondas de Matéria

Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Federal do Piauí como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Irismar Gonçalves da Paz

Universidade Federal do Piauí - Departamento de Física

Teresina - PI
8 de janeiro de 2019

The “paradox” is only a conflict between reality and your feeling of what reality “ought to be.”

Richard P. Feynman

Agradecimentos

- Ao meu orientador, Prof. Irismar Gonçalves da Paz, por ter me dado esta oportunidade, e por estar sempre presente para sanar minhas inúmeras dúvidas.
- À minha família. Meus pais, meus irmãos, minha avó e minha namorada que me apoiaram nessa etapa profissional da minha vida.
- À todos os professores que fizeram parte da minha formação acadêmica. Em especial: Prof. José Pimentel, Prof. Jonathan da Rocha Martins, Prof. André Lino, Prof. Miguel Arcanjo e a todos os outros professores que compõem o Departamento de Física da UFPI.
- Aos meus amigos Alexandre S. Santos, Carlos Henrique, Fabrício Lustosa, Gil Marcos, Nefe Brito, Orlando Ribeiro, Oziel Ribeiro de Araújo, Ramon Sampaio, dentre outros. Pela boa convivência dentro e fora do ambiente acadêmico.
- À UFPI, ao CNPQ e à CAPES pela formação, pesquisa, apoio financeiro e espaço físico.

Resumo

Nessa dissertação, estudamos efeitos de perda de coerência no experimento de fenda-dupla com ondas de matéria de grandes moléculas. Estudamos na literatura o conteúdo subjacente ao entendimento da descoerência em sistemas físicos, o que inclui o formalismo da matriz densidade, utilizado para tratar estados quânticos mistos. Tratamos posteriormente sobre equações mestras e sua utilidade no cálculo da evolução temporal da matriz densidade. Calculamos a matriz densidade na tela de detecção considerando um estado inicial Gaussiano e uma evolução dada por um propagador que inclui efeitos de perda de coerência devido à fonte e efeitos devido ao acoplamento com o ambiente. Atenção especial foi dada ao acoplamento do sistema quântico de interesse com as moléculas de ar. De posse da matriz densidade calculamos a função de Wigner na tela de detecção e estudamos seu comportamento em função da constante de acoplamento entre o sistema quântico de interesse e as moléculas de ar. Mostramos que a redução do volume da parte negativa da função de Wigner com o aumento da constante de acoplamento serve como um indicador de transição do comportamento quântico para o comportamento clássico do sistema de interesse. Calculamos a entropia de Shannon e estudamos o efeito de localização/delocalização no espaço de posição, momento e de fase produzido pelo acoplamento com o ambiente. Analisamos qual a relação entre a entropia de Shannon, que é uma medida da localização/delocalização de uma dada distribuição de probabilidade, com o número de franjas de interferência. Observamos que o aumento da entropia de Shannon em função da constante de acoplamento com o ambiente está associada com uma redução do número de franjas de interferência, devido a diminuição da região de sobreposição entre os pacotes de onda.

Palavras-chave: Descoerência, Fenda-Dupla, Função de Wigner.

Abstract

In this dissertation, we studied the effects of loss of coherence in the double-slit experiment with matter waves of large molecules. We study in the literature the content underlying the understanding of decoherence in physical systems, which includes the formalism of the density matrix, used to treat mixed quantum states. We discuss later on master equations and their usefulness in calculating the temporal evolution of the density matrix. We calculate the density matrix on the detection screen by considering an initial Gaussian state and an evolution given by a propagator which includes effects of loss of coherence due to the source and effects due to coupling with the environment. Special attention was given to the coupling of the quantum system of interest with the air molecules. With the density matrix, we calculate the Wigner function in the detection screen and study its behavior as a function of the coupling constant between the quantum system of interest and the air molecules. We show that the reduction of the volume of the negative part of the Wigner function with the increase of the coupling constant serves as a transition indicator of the quantum behavior for the classical behavior of the system of interest. We calculate the Shannon entropy and study the localization/delocalization effect on the position, moment, and phase space produced by the coupling with the environment. We analyze the relationship between the Shannon entropy, which is a measure of the location/delocalization of a given probability distribution, with the number of interference fringes. We observed that the increase of the Shannon entropy as a function of the coupling constant with the environment is associated with a reduction in the number of interference fringes due to the decrease of the overlapping region between the wave packets.

Keywords: Decoherence, Double-Slit, Wigner Function.

Sumário

Sumário	vii
Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xii
1 Introdução	1
2 Perda de Coerência em Sistemas Quânticos	7
2.1 Introdução	7
2.2 Formalismo	9
2.2.1 Matriz Densidade	9
2.2.2 Descoerência e Amortecimento do Padrão de Interferência	12
2.3 Equações Mestras	13
2.4 O Modelo de Espalhamento	15
3 Perda de Coerência e Transição Quântico-Clássico	18
3.1 Fonte Parcialmente Coerente	18
3.1.1 Modelo com Ondas de Matéria Parcialmente Coerentes	18
3.1.2 Intensidade, Grau de Coerência, Previsibilidade e Visibilidade	23
3.2 Fonte Parcialmente coerente mais Descoerência do Meio	28
3.2.1 Um Modelo com Descoerência	28
3.2.2 Intensidade, Grau de Coerência, Previsibilidade e Visibilidade	32
3.2.3 Função de Wigner	36
4 Entropia de Shannon e Descoerência	42
4.1 Entropia de Shannon na Tela de Detecção	43
4.2 Informação Mútua	50

5 Conclusão	52
6 Perspectiva	54
Referências Bibliográficas	55

Lista de Figuras

1.1	Molécula de fulereno C_{60} , formada por 60 átomos de carbonos arranjados numa estrutura icosaédrica. Ela se assemelha a uma bola de futebol. (Fig. retirada da Ref. [9]).	2
2.1	Delinear a fronteira entre o mundo quântico e o clássico é um dos problemas ainda não resolvidos na física (Fig. retirada da Ref. [49]).	8
2.2	Uma coleção de partículas tais como fótons e moléculas do ar espalham o objeto de interesse (Fig. retirada da Ref. [29]).	16
3.1	Moléculas de fulereno são ejetadas do forno com diferentes velocidades o que corresponde a diferentes comprimentos de onda.	19
3.2	Esboço do experimento de fenda-dupla. Um pacote de ondas gaussiano de largura inicial σ_0 propaga-se durante um tempo t até atingir uma fenda-dupla, depois um tempo τ da fenda-dupla para um anteparo. As fendas são gaussianas de largura β separadas por uma distância d centro a centro.	20
3.3	Perfil da função distribuição de probabilidade dos vetores de onda k_x das moléculas de fulereno que são ejetadas do forno.	22
3.4	Grau de coerência em função do parâmetro de incoerência.	24
3.5	Intensidade normalizada como função da coordenada transversa x . A linha contínua representa o caso totalmente coerente ($\delta_{k_x} = 0$) e a tracejada o caso parcialmente coerente ($\delta_{k_x} = 5 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$).	25
3.6	(a) Previsibilidade e (b) Visibilidade em função da coordenada transversa x . As curvas contínuas correspondem ao caso totalmente coerente ($\delta_{k_x} = 0$) e as curvas tracejadas ao caso parcialmente coerente ($\delta_{k_x} = 5 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$).	27

- 3.7 Esboço do experimento de fenda-dupla. Uma fonte S produz um pacote de onda incoerente de largura inicial σ_0 e comprimento de coerência transversal inicial ℓ_0 , que propaga-se livremente durante um tempo t a partir da fonte para a fenda-dupla. A partir da fenda-dupla para o detetor D a partícula propaga-se durante um tempo τ acoplada com um ambiente de constante de acoplamento Λ 29
- 3.8 Grau de coerência do feixe em função da constante de acoplamento com o ambiente Λ . Na curva pontilhada temos o caso de uma fonte ideal ($\ell_0 \rightarrow \infty$) e na curva contínua temos o caso mais realista de uma fonte parcialmente coerente ($\ell_0 = 50 \text{ nm}$). 33
- 3.9 Intensidade relativa em função da coordenada transversa x para alguns valores da constante de acoplamento com o ambiente Λ , onde consideramos $\ell_0 = 130 \text{ nm}$. (a) Para $\Lambda = 2,0 \times 10^{19} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$, (b) para $\Lambda = 2,4 \times 10^{20} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$, (c) para $\Lambda = 5,0 \times 10^{20} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ e (d) para $\Lambda = 2,0 \times 10^{21} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ 34
- 3.10 (a) Previsibilidade e (b) visibilidade em função da coordenada transversa x considerando uma fonte ideal ($\ell_0 \rightarrow \infty$). Nas curvas contínuas não consideramos a interação com ambiente ($\Lambda = 0$) e nas curvas tracejadas consideramos a interação com o ambiente ($\Lambda = 1,0 \times 10^{21} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$). 35
- 3.11 (a) Previsibilidade e (b) visibilidade em função da coordenada transversa x considerando uma fonte parcialmente coerente ($\ell_0 = 50 \text{ nm}$). Nas curvas contínuas não consideramos a interação com ambiente ($\Lambda = 0$) e nas curvas tracejadas consideramos a interação com o ambiente ($\Lambda = 1,0 \times 10^{21} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$). 36
- 3.12 Função de Wigner como função da posição x e do número de onda k para alguns valores da constante de acoplamento com o ambiente Λ , onde consideramos $\ell_0 = 130 \text{ nm}$. (a) Para $\Lambda = 2,0 \times 10^{19} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$, (b) para $\Lambda = 2,4 \times 10^{20} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$, (c) para $\Lambda = 5,0 \times 10^{20} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ e (d) para $\Lambda = 2,0 \times 10^{21} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ 39
- 3.13 Comportamento do volume da parte negativa da função de Wigner em função da constante de acoplamento com o ambiente Λ . Os pontos no gráfico correspondem aos valores do volume da função de Wigner para a Fig.3.12 (a), Fig.3.12 (b), Fig.3.12 (c) e Fig.3.12 (d), respectivamente. 40
- 4.1 (a) Entropia de Shannon de posição s_x e (b) entropia de Shannon de momento s_k como função da constante de acoplamento com o ambiente Λ . A curva contínua corresponde à entropia calculada para uma distribuição de probabilidades quântica e a tracejada para uma distribuição de probabilidades clássica, onde desconsideramos o termo de interferência. 45

- 4.2 (a) Intensidade relativa como função de x e (b) intensidade relativa como função de k para três valores de Λ . A linha contínua corresponde a $\Lambda = 0$, a pontilhada a $\Lambda = 2,0 \times 10^{20} m^{-2} s^{-1}$ e a tracejada à $\Lambda = 2,0 \times 10^{21} m^{-2} s^{-1}$ 46
- 4.3 Relação de incerteza entrópica como função da constante de acoplamento com o ambiente Λ . A curva contínua corresponde à entropia calculada para uma distribuição de probabilidades quântica e a tracejada para uma distribuição de probabilidades clássica, onde desconsideramos o termo de interferência. 47
- 4.4 (a) Parte real e (b) parte imaginária de s_w em função da constante de acoplamento com o ambiente Λ . Em (a) a parte real da entropia de Shannon da função de Wigner para uma distribuição quântica (linha contínua) e clássica (linha com triângulos), coincidem. Em (b) temos a parte imaginária da entropia de Shannon da função de Wigner para uma distribuição quântica (linha contínua) e clássica (linha tracejada). Note que a parte imaginária é nula para uma distribuição clássica. 48
- 4.5 Valor absoluto de s_w em função da constante de acoplamento com o ambiente Λ . A curva contínua corresponde à entropia calculada para uma distribuição de probabilidades quântica e a tracejada para uma distribuição de probabilidades clássica, onde desconsideramos o termo de interferência. 49
- 4.6 (a) Informação mútua definida por $I_{xk} = |s_t| - |s_w|$ e (b) informação mútua definida por $I_{xk} = |s_t - s_w|$ como função da constante de acoplamento com o ambiente Λ . As curvas contínuas correspondem à entropia calculada para uma distribuição de probabilidades quântica e as tracejadas para uma distribuição de probabilidades clássica, onde desconsideramos o termo de interferência. 51

Lista de Tabelas

3.1	Valores da constante de acoplamento Λ , do comprimento de coerência ℓ , do volume da parte negativa da função de Wigner δ e do valor máximo da visibilidade para os gráficos da Fig. 3.12.	40
-----	--	----

Capítulo 1

Introdução

O experimento de fenda-dupla é um dos exemplos mais conhecidos e utilizados para introduzir os conceitos da mecânica quântica, como por exemplo o princípio da complementaridade discutido por Niels Bohr [1], em que os sistemas quânticos sob certas condições comportam-se como partículas e sobre outras condições físicas comportam-se como ondas. Ele tem sido um tema recorrente em pesquisas científicas por mais de dois séculos desde sua concepção original por volta de 1802 por Thomas Young para explicar o comportamento ondulatório da luz [2]. Naquela época, havia um intenso debate sobre o comportamento da luz, onde uma grande parte dos cientistas defendia a ideia de Newton de que a luz tinha um comportamento corpuscular, e outros o ponto de vista de Huygens que era adepto da teoria ondulatória para a luz. De acordo com Feynman, o experimento de fenda-dupla “contém o único mistério da mecânica quântica, onde as partículas (elétrons, fótons, prótons, etc) comportam-se as vezes como partículas e outras vezes como ondas” [3]. Experimentos de fenda-dupla já foram realizados com elétrons por Jönsson [4], que descreveu de forma minuciosa como este *Gedankenexperiment* (experiência idealizada) foi finalmente realizada em laboratório, com nêutrons por Zeilinger e colaboradores [5], que relataram de forma detalhada a comparação entre o experimento e um cálculo teórico de primeiros princípios para o padrão de difração com nêutrons frios em arranjos experimentais de fenda-simples e fenda-dupla, com átomos por Carnal e Mlynek [6], que demonstraram interferometria atômica baseados em um arranjo de fenda-dupla com aplicações em espectroscopia de precisão e física atômica [7], com pequenas moléculas e *clusters* de gás nobre por uma variedade de métodos espectroscópicos, relatados por Schöllkopf e Toennies [8], etc.

Experimentos realizados pelo grupo de A. Zeilinger exibem efeitos quânticos de interferência com partículas massivas e complexas, chamadas de fulerenos [9]. Essas partículas contém cerca de 60 (fulereno C_{60}) a 70 (fulereno C_{70}) átomos de carbono, com massa de $1,2 \times 10^{-24}$ kg e

diâmetro de 7\AA . Esta nova modificação do carbono puro foi descoberta em 1985 por Kroto *et al* [10], e mostrou ser particularmente estável quando exatamente 60 átomos de carbono são arranjados em uma molécula para formar a menor estrutura natural que se assemelha a uma bola de futebol como mostrado na Fig. 1.1. Estes experimentos buscaram responder à um problema ainda não resolvido na física, a saber, qual é a fronteira entre o mundo quântico e o mundo clássico?

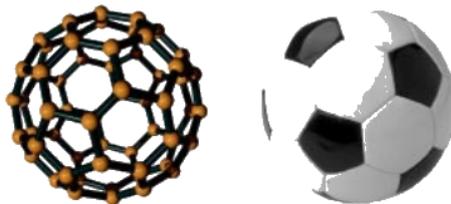


Fig. 1.1: Molécula de fulereno C_{60} , formada por 60 átomos de carbonos arranjados numa estrutura icosaédrica. Ela se assemelha a uma bola de futebol. (Fig. retirada da Ref. [9]).

A função de Wigner é uma maneira de descrever os estados quânticos de um sistema por meio de uma função de distribuição de probabilidades dentro do formalismo do espaço de fase (x, p) [11]. Em 1932 Wigner usou esta distribuição de “quase-probabilidade” no espaço de fase como uma maneira conveniente de calcular correções quânticas para a mecânica estatística clássica. Contudo, vale ressaltar que o princípio de incerteza de Heisenberg ($\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$) proíbe a existência de uma genuína distribuição de probabilidades no espaço de fase, desde que não podemos determinar simultaneamente a posição x e o momento p da partícula com uma precisão maior do que a estabelecida pelo princípio de incerteza. Apesar disto, distribuições de probabilidades no espaço de fase podem desempenhar um importante papel na mecânica quântica, permitindo entre outras coisas, o cálculo de valores esperados de observáveis da mecânica quântica de uma maneira clássica (em termos de uma integral) ao invés do formalismo de operadores. O objetivo de Wigner era substituir a função de onda que aparece na equação de Schrödinger por uma distribuição de probabilidades no espaço de fase [12].

Devido ao fato de que a função de Wigner pode assumir valores negativos, ela não pode ser interpretada como uma distribuição de probabilidade regular de duas variáveis aleatórias, assim ela é usualmente referida como sendo uma “distribuição de quase-probabilidade”. Se chegarmos a concordar com a possibilidade da existência de uma distribuição de probabilidades com valores negativos, então a mecânica quântica inteira pode ser reformulada em termos da dinâmica da função de Wigner dentro do espaço de fase [13]. Pode-se provar que a função de Wigner é limitada a um valor $|W(x, p)| \leq 1/\pi\hbar$ e além disso como toda distribuição de probabilidade é

normalizável em todo o espaço de fase, tal que $\int \int W(x, p) dx dp = 1$ [14]. As distribuições de probabilidades $P(x) = \rho(x, x)$ e $P(p) = \tilde{\rho}(p, p) = \langle p | \hat{\rho} | p \rangle$ para a posição x e para o momento p , são dadas pelas distribuições marginais de $W(x, p)$, isto é,

$$P(x) = \rho(x, x) = \int W(x, p) dp, \quad (1.1)$$

$$P(p) = \tilde{\rho}(p, p) = \int W(x, p) dx, \quad (1.2)$$

onde $\hat{\rho}$ representa o operador densidade, que desempenham um importante papel na descrição formal da descoerência, pois o emaranhamento entre o sistema de estudo e o ambiente torna impossível atribuir um único vetor de estado quântico para o sistema, e assim em geral não podemos descrever o sistema de interesse em termos de estados quânticos puros.

Vale ressaltar que a função de Wigner não é a única maneira de representar um estado quântico no espaço de fase. Outras representações bem conhecidas são as de Husimi (Q) [15] e a de Glauber-Sudarshan (P) [16, 17]. Para interpretar a função de Wigner como uma distribuição de probabilidade clássica no espaço de fase é necessário que ela seja não negativa. Este é o caso por exemplo para *coherent states* (estados coerentes), como mostrado por Hudson [18]. Neste sentido estados que possuem valores negativos em sua correspondente função de Wigner podem ser considerados estados genuinamente com características “mais quânticas”, também conhecidos como estados não-clássicos. Um exemplo é o estado de *Fock* $|1\rangle$ do oscilador harmônico. Uma revisão sobre função de Wigner na mecânica quântica pode ser encontrado na Ref. [19]. Foi salientado por Bertrand e Bertrand [20] e independentemente por Vogel e Risken [21] que a função de Wigner de um sistema pode ser reconstruída por métodos de tomografia a partir das distribuições de medidas de observáveis que são escritos como certas combinações de variáveis que não comutam e que formam o espaço de fase. Além disso, existem várias medições experimentais da função de Wigner realizadas para estados não-clássicos da luz [22, 23].

Os sistemas quânticos no mundo real nunca estão isolados de forma totalmente completa do ambiente que os cercam [24]. Assim, o termo *sistema isolado* é uma abstração e idealização do mundo real, que é construído de forma habilidosa para auxiliar o desenvolvimento de modelos físicos para fenômenos da Natureza que podem ser considerados aproximadamente isolados. Assim, em geral os sistemas físicos sempre interagem em algum nível, por menor que seja, com o ambiente que os cercam. Por exemplo, moléculas do ar, luz (fótons ópticos), radioatividade de fundo, múons cósmicos, neutrinos solares e até mesmo radiação cósmica de fundo presente em todo o universo a uma temperatura de 3 K. Enquanto alguns arranjos experimentais sofisticados são capazes de “blindar” o sistema das partículas do ambiente (tais como moléculas de ar e luz),

é difícil, senão impossível excluir as outras influências. Esta interação do sistema quântico de estudo com o ambiente que o cerca, em geral torna o sistema emaranhado com um grande número de graus de liberdade do ambiente, o qual influencia os possíveis resultados de uma medição sobre o sistema estudado. Por exemplo, a coerência quântica, fonte de efeitos quânticos tais como a interferência, pode tornar-se quase imperceptíveis. Este processo é chamado de *descoerência* [25–29]. Descoerência pode ser vista como uma simples consequência da aplicação do formalismo padrão da mecânica quântica para a interação entre o sistema de estudo com o seu ambiente. Descoerência não é nenhuma teoria nova distinta da mecânica quântica que pode ser livremente incluída ou desprezada. Descoerência é um efeito presente em toda a natureza e suas consequências devem ser levadas em conta a fim de chegarmos a uma descrição mais realística e satisfatória da natureza. De forma bastante geral, descoerência descreve como o emaranhamento com o ambiente influencia a estatística dos possíveis resultados de medidas realizadas sobre o sistema. Descoerência é um efeito puramente quântico, e deve ser distinguido da dissipação clássica [29]. Enquanto a presença de dissipação implica na presença de descoerência, o inverso não é necessariamente verdade. Quando a dissipação e a descoerência estão ambas presentes, elas ocorrem em escalas de tempo diferentes, a escala de tempo da descoerência é muitas ordens de magnitude menor do que a escala de tempo da relaxação [30]. Assim, a influência da dissipação é geralmente completamente desprezível na escala de tempo revelante para os efeitos de descoerência induzida pelo ambiente.

A descoerência afeta de forma quase ou totalmente irreversível os estados quânticos de superposição, tornando-os difíceis de observar no mundo macroscópico, como por exemplo, os estados conhecidos como *gatos de Schrödinger*. Recentemente, estes estados foram preparados em uma variedade de plataformas experimentais, incluindo experimentos com íons aprisionados [31–35], experimentos com fótons [36–38] e circuitos supercondutores [39]. Neste sentido, a descoerência está intimamente relacionada com a transição entre a descrição do mundo quântico e clássico, um dos problemas ainda em aberto na física, dado que ainda não existe nenhum limite indicando a fronteira entre o comportamento quântico e clássico. Em alguns estudos, estes estados foram submetidos a descoerência por perda de energia para explorar a fronteira entre os mundos clássico e quântico [32, 40]. A descoerência é uma das maiores barreiras que tornam difícil a implementação de dispositivos para processamento de informação quântica em larga escala, tais como computadores quânticos, metrologia e comunicação [41], desde que tais dispositivos baseiam-se entre outras coisas, na superposição de estados quânticos, os quais são suscetíveis à descoerência.

Uma curiosidade bastante interessante, como apontada por Joos na Ref. [28], é o fato de que o papel desempenhado pelo ambiente na mecânica quântica foi analisado relativamente

tarde. De fato, os sistemas nos quais foram observados efeitos quânticos nos primeiros dias da mecânica quântica residiam no domínio microscópico no qual a aproximação de sistema isolado obteve um grande sucesso. Por exemplo, um excelente acordo entre os dados experimentais e as previsões teóricas para o espectro discreto de energia do átomo de Hidrogênio foi obtido como uma aplicação da teoria quântica para um átomo completamente isolado. Apenas na década de 1970, mais de 40 anos após a formulação da equação de Schrödinger, o efeito de emaranhamento com o ambiente foi estudado por Zeh [25].

A base matemática da teoria da comunicação ou teoria da informação foi estabelecida por Claude Shannon em 1948 [42], onde ele introduziu o conceito de entropia de informação, também denominada de entropia de Shannon em sua homenagem. Nesse trabalho, ele formalizou em termos matemáticos o problema da teoria da comunicação, a saber: um receptor é capaz de identificar quais dados foram gerados por uma fonte aleatória de dados, baseado no sinal recebido através do canal de informação? A maneira mais natural de medir a incerteza de um dado estado quântico é a entropia. Fisicamente a entropia pode ser interpretada como uma medida da falta de conhecimento (desordem) do sistema. A entropia de Shannon tem sido calculada e discutida em diferentes sistemas. A entropia de Shannon de posição e de momento foi calculada para estados estacionários e certos estados não-estacionários do Oscilador Harmônico Quântico. Foi mostrado que para grandes valores do número quântico n , a entropia de Shannon de posição do Oscilador Harmônico Quântico tende para a entropia de posição do Oscilador Harmônico Clássico. Foi também mostrado que a interferência produz mínimos na entropia de Shannon de posição para estados do tipo gato de Schrödinger [43]. A entropia de Shannon da função de Wigner foi calculada para o estado fundamental e para estados estacionários excitados de uma partícula em uma caixa e para o oscilador harmônico, com o intuito de analisar a localização da distribuição no espaço de fase e estudar a correlação entre posição e momento através da informação mútua [44]. A entropia de Shannon da função de Wigner para uma partícula em um curral quântico foi calculada para estudar o efeito de um potencial efetivo na informação mútua entre as variáveis de posição e momento [45]. A entropia de Shannon foi calculada para um poço quadrado finito, com o intuito de comparar as relações de incerteza entrópica e padrão para os estados desse sistema, com a perspectiva de determinar limites de mensurabilidade para a posição e para o momento [46]. Anteriormente estudamos, via entropia de Shannon, a localização/delocalização das distribuições de probabilidades nos espaços de posição, momento e de fase para o experimento de fenda-dupla com ondas de matéria. Consideramos uma fonte completamente coerente que produz um estado inicial Gaussiano correlacionado. Calculamos a função de onda na tela de detecção e estudamos os efeitos de localização/delocalização em função do parâmetro de correlação [47].

Um dos objetivos deste trabalho é estudar a transição quântico-clássico através da análise da diminuição da parte negativa da função de Wigner, devido a interação com o ambiente, desde que como apontado por Kenfack [48], um possível indicador de não-classicalidade de um dado estado quântico pode ser definido como sendo o volume da parte negativa da função de Wigner. Também pretendemos analisar qual a relação entre a entropia de Shannon, que é uma medida da localização/delocalização de uma dada distribuição de probabilidade, com o número de franjas de interferência, e qual o efeito do ambiente nessas quantidades. O aparato de estudo utilizado para tal análise é um arranjo de fenda-dupla. Este trabalho está organizado da seguinte maneira: No Cap. 2 tratamos sobre matriz densidade, sobre o formalismo da descoerência, sobre a utilidade das equações mestras, que descrevem a evolução da matriz densidade, e sobre o modelo de espalhamento para a descoerência. No Cap. 3 analisamos inicialmente quais alterações são causadas no padrão de interferência, no grau de coerência, na visibilidade e na previsibilidade devido a perda de coerência associada apenas a efeitos de incoerência causados pela fonte. Depois vamos aplicar o formalismo da descoerência para tratar a perda de coerência no modelo de fenda-dupla, calcular a função de Wigner para analisar a dependência do volume da parte negativa da função de Wigner em termos da constante de acoplamento com o ambiente Λ , que está associado com eventos de descoerência. No Cap. 4 calculamos as densidades de probabilidades nos espaços de posição e momento. Também calculamos as entropias de Shannon de posição, de momento e da função de Wigner na tela de detecção como função da constante de acoplamento com o ambiente Λ . Em seguida calculamos a informação mútua entre as variáveis de posição e momento para estudar suas correlações em termos de Λ . Nós delineamos nossas conclusões no Cap. 5 e no Cap. 6, nossas perspectivas.

Capítulo 2

Perda de Coerência em Sistemas Quânticos

2.1 Introdução

Os sistemas quânticos no mundo real nunca estão isolados de forma totalmente completa do ambiente que os cercam [24]. Assim, o termo *sistema isolado* é uma abstração e idealização do mundo real, que é construído de forma habilidosa para auxiliar o desenvolvimento de modelos físicos para fenômenos da Natureza que podem ser considerados aproximadamente isolados. Esta interação do sistema quântico de estudo com o ambiente que o cerca, em geral torna o sistema emaranhado com um grande número de graus de liberdade do ambiente, o qual influencia os possíveis resultados de uma medição sobre o sistema estudado. Por exemplo, efeitos quânticos tais como a interferência podem se tornar quase imperceptíveis. Este processo é chamado de *descoerência*. De forma bastante geral, descoerência descreve como o emaranhamento com o ambiente influencia a estatística dos possíveis resultados de medidas realizadas sobre o sistema. Descoerência é um efeito puramente quântico, e deve ser distinguido da dissipação clássica [29]. Enquanto a presença de dissipação implica na presença de descoerência, o inverso não é necessariamente verdade. Quando a dissipação e a descoerência estão ambas presentes, elas ocorrem em escalas de tempo diferentes, a escala de tempo da descoerência é muitas ordens de magnitude menor do que a escala de tempo da relaxação [30].

A descoerência afeta de forma quase ou totalmente irreversível os estados quânticos de superposição, tornando-os difíceis de observar no mundo macroscópico, como por exemplo, os estados conhecidos como *gatos de Schrödinger*. Neste sentido, a descoerência está intimamente relacionada com a transição entre a descrição do mundo quântico e clássico, um dos problemas ainda em aberto na física, dado que ainda não existe nenhum limite indicando a fronteira entre

o comportamento quântico e clássico (Veja a Fig. 2.1). A descoerência é uma das maiores barreiras que torna difícil a implementação de dispositivos para processamento de informação quântica em larga escala, tais como os computadores quânticos, desde que tais dispositivos baseiam-se entre outras coisas, na superposição de estados quânticos, os quais são suscetíveis à descoerência.

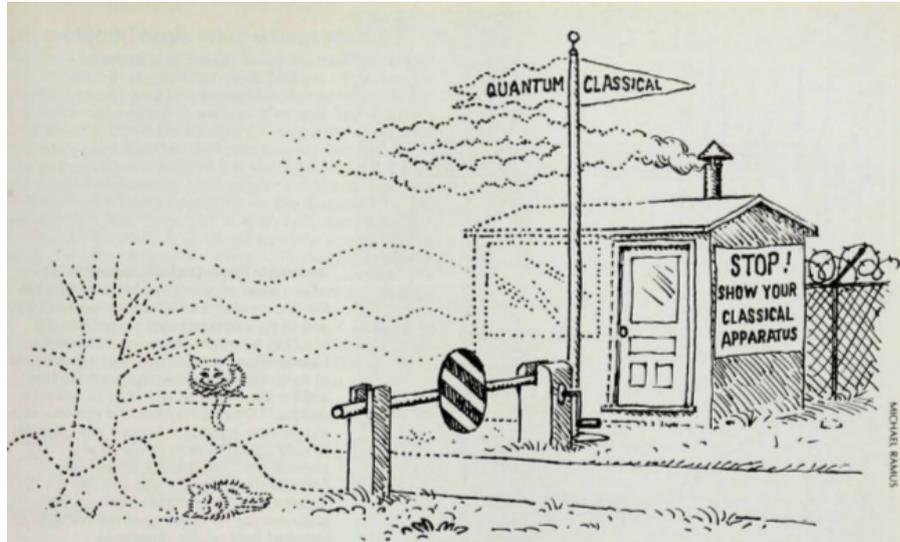


Fig. 2.1: Delinear a fronteira entre o mundo quântico e o clássico é um dos problemas ainda não resolvidos na física (Fig. retirada da Ref. [49]).

Uma curiosidade bastante interessante, como apontada por Joos na Ref. [28], é o fato de que o papel desempenhado pelo ambiente na mecânica quântica foi analisado relativamente tarde. Apenas na década de 1970, mais de 40 anos após a formulação da equação de Schrödinger, o efeito de emaranhamento com o ambiente foi estudado por Zeh [25]. Na seção 2.2 tratamos do formalismo básico sobre a descoerência, o que inclui a utilidade do formalismo da matriz densidade para a descrição do estado quântico do sistema. Na seção 2.3 discutimos as ideias fundamentais sobre equações mestras e aproximações que simplificam a descrição da evolução temporal da matriz densidade. Na seção 2.4 estudamos o modelo de espalhamento para a descoerência.

2.2 Formalismo

2.2.1 Matriz Densidade

Matrizes densidade representam um importante papel na descrição formal sobre descoerência, em especial as matrizes densidade reduzidas, pois o emaranhamento entre o sistema de estudo e o ambiente torna impossível atribuir um único vetor de estado quântico para o sistema, e assim, em geral não podemos descrever o sistema de interesse em termos de estados quânticos puros. Neste sentido, esta seção é dedicada a discutir as propriedades de estados puros e estados mistos.

Matriz Densidade para um Estado Puro

Como é bastante conhecido, um estado quântico $|\psi\rangle$ contém toda a informação física sobre o estado do sistema. Podemos definir um operador densidade $\hat{\rho}$ correspondente ao estado puro $|\psi\rangle$ como

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (2.1)$$

que representa o operador projeção sobre o estado $|\psi\rangle$. Como é bastante difundido na literatura, em geral vamos utilizar o termo matriz densidade de forma intercambiável com o termo operador densidade $\hat{\rho}$. Precisamente, a matriz densidade refere-se apenas a uma representação matricial do operador densidade $\hat{\rho}$ em relação à uma determinada base.

Se expressarmos $|\psi\rangle$ como uma superposição dos estados da base $\{|\psi_i\rangle\}$,

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |\psi_i\rangle, \quad (2.2)$$

a correspondente matriz densidade escrita na base $\{|\psi_i\rangle\}$ é

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{ij} c_i c_j^* |\psi_i\rangle\langle\psi_j|. \quad (2.3)$$

Os termos $i \neq j$ incorporam a coerência quântica entre as diferentes componentes $|\psi_i\rangle$ e são conhecidos como termos de interferência.

Vamos agora introduzir a operação traço, denotado por “ Tr ”. Esta operação atua sobre um operador \hat{A} e é calculada da seguinte maneira. Escolha uma base ortonormal $\{|\phi_i\rangle\}$ e realize a operação

$$Tr(\hat{A}) = \sum_i \langle\phi_i|\hat{A}|\phi_i\rangle. \quad (2.4)$$

Pode-se facilmente mostrar que esta operação é linear e é independente da escolha da base ortonormal $\{|\phi_i\rangle\}$ escolhida.

Para entender a motivação da utilização do operador traço, vamos considerar o operador $\hat{A} = \hat{\rho}\hat{O}$, formado pelo produto da matriz densidade do estado puro Eq. 2.1 e um operador Hermitiano \hat{O} que representa algum observável físico. Seja $|o_i\rangle$ os autoestados de \hat{O} com autovalores o_i , vamos utilizar esta base $\{|o_i\rangle\}$ para calcular o traço de $\hat{\rho}\hat{O}$, assim

$$Tr(\hat{\rho}\hat{O}) = \sum_i \langle o_i | (|\psi\rangle\langle\psi|) \hat{O} | o_i \rangle = \sum_i o_i |\langle o_i | \psi \rangle|^2. \quad (2.5)$$

Mas o termo $|\langle o_i | \psi \rangle|^2$ é a probabilidade de obtermos o resultado o_i em uma medida do observável \hat{O} . Assim, $Tr(\hat{\rho}\hat{O})$ representa uma média sobre todos os possíveis resultados de medidas o_i pesados pela correspondente probabilidade. Mas isto é precisamente o valor esperado $\langle \hat{O} \rangle$ do observável \hat{O} . Assim, os valores esperados de observáveis podem ser calculados através da conhecida regra do traço,

$$\langle \hat{O} \rangle = Tr(\hat{\rho}\hat{O}). \quad (2.6)$$

Se escolhermos o observável $\hat{O} = \hat{I}$, obtemos

$$Tr(\hat{\rho}) = 1. \quad (2.7)$$

Esta equação está relacionado ao fato de que o estado $|\psi\rangle$ é normalizado, isto é, $|\langle\psi|\psi\rangle|^2 = 1$.

Matriz Densidade para um Estado Misto

Se nós conhecemos completamente o estado do sistema, as descrições em termos de estados quânticos (puros) $|\psi\rangle$ ou da correspondente matriz densidade são totalmente equivalentes. Contudo, podemos também descrever nosso sistema por um estado misto. Um estado misto expressa a nossa informação insuficiente sobre o estado do sistema, no sentido de que o sistema está em um estado puro $|\psi_i\rangle$ (antes da medição) mas o observador simplesmente não sabe qual. Portanto nós podemos apenas atribuir probabilidades $0 \leq p_i \leq 1$ para cada um dos estados $|\psi_i\rangle$. Tais situações surgem se o procedimento físico usado para preparar um estado quântico contém elementos probabilísticos.

Assim, um estado misto é um conjunto de estados puros $|\psi_i\rangle$ associados com as probabilidades p_i , e representa um *ensemble* clássico, no sentido de que a origem das probabilidades p_i são puramente clássicas.

Uma questão bastante importante é: como um observador descreveria a estatística de medidas realizadas em um sistema descrito por um estado misto? Obviamente não podemos mais

atribuir um estado puro $|\psi\rangle$ ao sistema e calcular o valor esperado de um observável \hat{O} através da regra usual $\langle\hat{O}\rangle = \langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle$. Mas podemos combinar as probabilidades clássicas com as probabilidades intrínsecas da mecânica quântica. A ideia consiste em pesar os valores esperados $\langle\psi_i|\hat{O}|\psi_i\rangle$ para cada um dos possíveis estados puros $|\psi_i\rangle$ contidos no estado misto pela sua respectiva probabilidade clássica p_i do estado $|\psi_i\rangle$ e somar o resultado sobre todo o *ensemble*, isto é,

$$\langle\hat{O}\rangle = \sum_i p_i \langle\psi_i|\hat{O}|\psi_i\rangle. \quad (2.8)$$

Agora podemos introduzir a matriz densidade para um estado misto, que inclui elementos estatísticos clássicos e quânticos, e assim descreve completamente todas as propriedades estatísticas do sistema. Esta matriz densidade é dada por

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad (2.9)$$

com $p_i \geq 0$ e $\sum_i p_i = 1$. A matriz densidade pode ser vista como uma distribuição de probabilidade clássica de matrizes densidades de estados puros $\hat{\rho}_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$.

Desde que o conceito de probabilidade clássica já está inclusa na matriz densidade de um estado misto, o valor esperado de um observável \hat{O} pode ser calculado da mesma maneira que para estados puros, através da utilização da regra do traço, mas agora utilizando a matriz densidade para um estado misto, isto é,

$$\langle\hat{O}\rangle = Tr(\hat{\rho}\hat{O}), \quad (2.10)$$

que é equivalente ao método da Eq. 2.8 de computar os valores esperados para os estados puros $|\psi_i\rangle$ e pesá-los pelas probabilidades p_i . Também é fácil ver que a condição de normalização continua válida, pois

$$Tr\hat{\rho} = \sum_i p_i Tr(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|) = \sum_i p_i Tr(\hat{\rho}_i) = \sum_i p_i \cdot 1 = 1. \quad (2.11)$$

Devemos enfatizar que um estado misto deve ser distinguido de um estado puro de superposição da forma

$$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |\psi_i\rangle, \quad (2.12)$$

pois a correspondente matriz densidade é

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{ij} \sqrt{p_i p_j} |\psi_i\rangle\langle\psi_j|$$

$$= \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| + \sum_{i \neq j} \sqrt{p_i p_j} |\psi_i\rangle \langle \psi_j|. \quad (2.13)$$

A presença dos termos fora da diagonal $i \neq j$ (que representam a interferência entre os estados $|\psi_i\rangle$) claramente distingue esta matriz densidade de um estado puro com a de um estado misto da Eq. 2.9.

2.2.2 Descoerência e Amortecimento do Padrão de Interferência

Vamos considerar o experimento de fenda-dupla e simbolizar os estados quânticos da partícula (denotando o símbolo S para o sistema) que correspondem a passagem através da fenda 1 e 2 por $|s_1\rangle$ e $|s_2\rangle$, respectivamente. Vamos supor que a partícula interage com outro sistema E que representa o ambiente, tal que se o estado quântico da partícula antes da interação era $|s_1\rangle$, então o estado quântico de E será $|E_1\rangle$ (de forma similar para $|s_2\rangle$), resultando nos estados finais do sistema composto $|s_1\rangle|E_1\rangle$ e $|s_2\rangle|E_2\rangle$, respectivamente. Para um estado inicial dado pela superposição $\alpha|s_1\rangle + \beta|s_2\rangle$, o estado final do sistema composto será um estado emaranhado da forma,

$$|\psi\rangle = \alpha|s_1\rangle|E_1\rangle + \beta|s_2\rangle|E_2\rangle. \quad (2.14)$$

A estatística de todas as possíveis medições sobre o sistema S é dado pela matriz densidade reduzida ρ_S ,

$$\begin{aligned} \rho_S &= \text{Tr}_E(\rho_{SE}) = \text{Tr}_E|\psi\rangle\langle\psi| \\ &= |\alpha|^2|s_1\rangle\langle s_1| + |\beta|^2|s_2\rangle\langle s_2| + \alpha\beta^*|s_1\rangle\langle s_2|\langle E_2|E_1\rangle + \alpha^*\beta|s_2\rangle\langle s_1|\langle E_1|E_2\rangle. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Se desejarmos medir a posição de chegada da partícula em uma tela de detecção, estatisticamente, a densidade de probabilidade $P(x)$ é dada por

$$\begin{aligned} P(x) &= \langle x|\rho_S|x\rangle \\ &= |\alpha|^2|\varphi_1(x)|^2 + |\beta|^2|\varphi_2(x)|^2 + 2\text{Re}\{\alpha\beta^*\varphi_1(x)\varphi_2^*(x)\langle E_2|E_1\rangle\}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde $\varphi_i(x) = \langle x|s_i\rangle$, com $i = 1, 2$. O último membro representa o termo de interferência. Portanto, a visibilidade do padrão de interferência é quantificada pelo produto interno $\langle E_2|E_1\rangle$, isto é, pelo distinguibilidade entre $|E_1\rangle$ e $|E_2\rangle$. No caso em que temos um distinguibilidade perfeita, $\langle E_2|E_1\rangle = 0$, nenhum padrão de interferência é observado e obtemos a previsão clássica. Assim, nenhuma medição *local* sobre S pode revelar coerência entre os estados $|s_1\rangle$ e $|s_2\rangle$, a

coerência agora é entre os estados $|s_1\rangle|E_1\rangle$ e $|s_2\rangle|E_2\rangle$, necessitando de uma apropriada medição *global* para ser revelada. Se a interação entre S e E é tal que E é incapaz de distinguir o caminho da partícula, então $|E_1\rangle$ e $|E_2\rangle$ são indistinguíveis ($\langle E_2|E_1\rangle = 1$) e a coerência completa entre os estados $|s_1\rangle$ e $|s_2\rangle$ é obtida. No caso intermediário onde $0 < |\langle E_2|E_1\rangle| < 1$, temos um padrão de visibilidade reduzido. A descrição acima descreve de forma geral o processo de descoerência se identificarmos a partícula S como sendo um dado sistema quântico arbitrário e o segundo sistema E como sendo o ambiente de S .

2.3 Equações Mestras

De um modo geral, equações mestras são equações diferenciais que descrevem como as probabilidades de ocorrência de um dado evento evoluem quando o sistema passa de um estado inicial para um estado futuro. Equações mestras quânticas são uma generalização, ao invés de um sistema de equações diferenciais para um conjunto de probabilidades (que apenas constituem os elementos da diagonal principal da matriz densidade), equações mestras quânticas são equações diferenciais para todos os elementos da matriz densidade, incluindo os termos fora da diagonal principal.

A evolução da matriz densidade reduzida $\rho_S(t)$ é dada por

$$\rho_S(t) = Tr_E[\rho_{SE}(t)] = Tr_E\left\{U(t)\rho_{SE}(0)U^\dagger(t)\right\}, \quad (2.17)$$

onde $U(t)$ é o operador evolução temporal para o sistema composto SE . Em geral, o cálculo exato de $\rho_{SE}(t)$ é frequentemente intratável, dado o número elevado de graus de liberdade do ambiente. Mas isto é desnecessário, pois estamos interessados apenas na evolução dinâmica do sistema S . Uma equação mestra nos permite calcular a evolução temporal da matriz densidade reduzida $\rho_S(t)$ a partir de uma expressão da forma

$$\rho_S(t) = \mathcal{F}(t)\rho_S(0) \quad (2.18)$$

onde $\mathcal{F}(t)$ é um operador responsável pela geração da evolução de $\rho_S(t)$. Se a equação mestra for exata, podemos fazer a identificação $\mathcal{F}(t)\rho_S(0) = Tr_E\left\{U(t)\rho_{SE}(0)U^\dagger(t)\right\}$ e nenhuma vantagem é obtida. Nesse sentido, equações mestras são baseadas em simplificações aproximativas fisicamente razoáveis. Em modelos de descoerência, as equações mestras são equações

diferenciais da forma

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \mathcal{L}[\rho_S(t)] \equiv \underbrace{-\frac{i}{\hbar}[H'_S, \rho_S(t)]}_{\text{evolução unitária}} + \underbrace{\mathcal{D}[\rho_S(t)]}_{\text{descoerência}}. \quad (2.19)$$

Aqui, \mathcal{L} é um operador atuando em $\rho_S(t)$ que depende do estado inicial do ambiente e da Hamiltoniana total. Decompomos \mathcal{L} em duas partes. O primeiro termo, $-i/\hbar[H'_S, \rho_S(t)]$, é unitário, dado pelo comutador de Liouville-von Neumann [50] com a Hamiltoniana “renormalizada” H'_S do sistema, porque o ambiente em geral leva a uma renormalização dos níveis de energia do sistema, esta Hamiltoniana em geral não coincide com a Hamiltoniana não perturbada H_S de S , a qual é responsável pela evolução temporal de S na ausência do ambiente. O segundo termo $\mathcal{D}[\rho_S(t)]$, é não unitário pois a operação de traço usada para obter a matriz densidade reduzida é uma operação não unitária, representa a descoerência devido ao ambiente.

Um dos tipos mais importantes de equações mestras, que desempenham um papel fundamental em estudos de descoerência, são as chamadas equações mestras de Born-Markov [50]. Comparações entre as previsões dos modelos baseadas em tais equações com os dados experimentais, mostram uma boa concordância. Elas são baseadas em duas aproximações que permitem uma modelagem matemática de forma mais simples. A primeira é chamada de aproximação de Born, baseada na suposição de que o acoplamento do sistema com o ambiente seja suficientemente fraco e que o ambiente seja razoavelmente grande, tais que alterações no operador densidade reduzido do ambiente ρ_E são desprezíveis, assim o operador densidade ρ_{SE} do sistema total permanece aproximadamente fatorizado para todos os tempos, $\rho_{SE}(t) \approx \rho_S(t) \otimes \rho_E$. A segunda aproximação, conhecida como aproximação de Markov, é baseada na suposição de que os “feitos de memória” do ambiente são desprezíveis, tais que quaisquer autocorrelações dentro do ambiente criadas através do acoplamento com o sistema decai rapidamente comparada com a escala de tempo característica de evolução do sistema. Tais funções de autocorrelações do ambiente quantificam a informação que o ambiente armazena sobre a sua interação com o sistema.

Uma outra classe de equações mestras de extrema importância são as equações mestras de Lindblad. Elas são um caso especial das equações mestras gerais de Born-Markov. Elas surgem a partir do requerimento de que a equação mestra deva garantir a positividade da matriz densidade reduzida para todos os tempos, isto é, que $\langle \psi | \rho_S(t) | \psi \rangle \geq 0$ para todos os tempos t e para qualquer estado puro $|\psi\rangle$ do sistema S . Este requerimento é fisicamente razoável, pois os elementos da diagonal da matriz densidade $\langle \psi | \rho_S(t) | \psi \rangle$ são interpretados como probabilidades. Tal condição é automaticamente satisfeita se a evolução é exata, enquanto equações mestras aproximativas não garantem necessariamente a positividade de $\rho_S(t)$ [51].

Vale a pena lembrar que nem sempre todas as condições sob as quais estão baseadas as equações mestras de Born-Makov são satisfeitas. Nesses casos, a evolução da matriz densidade não é regida por uma equação mestra de Born-Marov, assim sua evolução é dita não-Markoviana. Exemplos disso são sistemas fortemente acoplados com um ambiente sob baixas temperaturas, onde em tais casos efeitos de memória vão produzir fortes dependências na evolução da matriz densidade reduzida do sistema com a história passada do sistema composto [52].

2.4 O Modelo de Espalhamento

Nesse modelo consideramos um objeto (o sistema S) que espalha uma coleção de partículas (o ambiente E), veja a Fig. 2.2. Se assumirmos que as partículas do sistema S são muito mais pesadas do que as partículas do ambiente E , tal que o estado do seu centro de massa não seja perturbado por eventos de espalhamento de modo a não causar nenhum recuo, a evolução temporal da matriz densidade reduzida do sistema S no caso em que cada evento de espalhamento codifica apenas uma informação incompleta de caminho (limite de grandes comprimentos de onda), é dada por [29]

$$\frac{\partial \rho_S(x, x', t)}{\partial t} = -\Lambda(x - x')^2 \rho_S(x, x', t). \quad (2.20)$$

Esta é uma equação mestra que descreve apenas a descoerência, sem levar em conta a dissipação. O parâmetro Λ é chamado de constante de espalhamento ou constante de acoplamento e inclui todos os detalhes físicos da interação. Na obtenção desta equação mestra se supõe que não existe nenhuma correlação inicial entre o sistema e o ambiente, uma hipótese feita praticamente em todos os modelos de descoerência. A interação devido ao espalhamento é invariante sob translação do sistema composto. A taxa de espalhamento é muito mais rápida do que a taxa característica de mudança do sistema induzido pela auto-Hamiltoniana do sistema S . Além disso, se supõe que a distribuição das diferentes direções de partículas incidentes é isotrópica.

A Eq. 2.20 nos motiva a introdução da escala de tempo $\tau_{\Delta x}$ da descoerência dada por

$$\tau_{\Delta x} = \frac{1}{\Lambda(\Delta x)^2}, \quad (2.21)$$

que representa o tempo característico para a redução da coerência sobre uma distância Δx por um fator e . Portanto, a quantidade inversa $\tau_{\Delta x}^{-1}$ desempenha o papel de taxa de descoerência.

Quando a massa da partícula do sistema S torna-se comparável a massa das partículas do ambiente E , a suposição de que não acontece recuo não é mais válida e um modelo mais geral para a descoerência por espalhamento deve ser considerado [53]. Nesses casos, a dinâmica

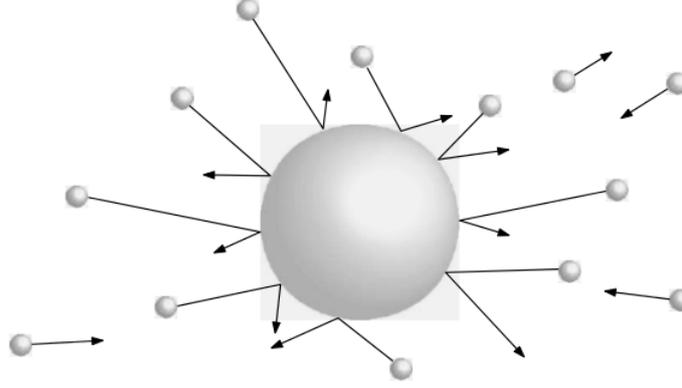


Fig. 2.2: Uma coleção de partículas tais como fótons e moléculas do ar espalham o objeto de interesse (Fig. retirada da Ref. [29]).

resultante além da descoerência inclui também a dissipação.

Para descrever completamente a evolução dinâmica da matriz densidade, vamos incluir o termo que descreve a evolução unitária sob o Hamiltoniano da “partícula livre”¹ na equação mestra acima (Eq. 2.20),

$$H = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (2.22)$$

Este termo é dado pela equação de Liouville-von Neumann [50],

$$i\hbar \frac{d\rho(t)}{dt} = [H, \rho(t)]. \quad (2.23)$$

Expressando na representação de posição, obtemos a equação de movimento para a partícula,

$$i\hbar \frac{\partial \rho_S(x, x', t)}{\partial t} = \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \rho_S(x, x', t)}_{\text{evolução unitária}} - \underbrace{i\Lambda(x - x')^2 \rho_S(x, x', t)}_{\text{descoerência}}. \quad (2.24)$$

A Eq. 2.24 é bem conhecida e suas soluções são dadas por (veja o apêndice 2 de Joos na Ref. [28])

$$\rho(x, x', t) = \int \int dx_0 dx'_0 K(x, x', t; x_0, x'_0, 0) \rho_0(x_0, x'_0), \quad (2.25)$$

¹Obviamente a partícula não está verdadeiramente livre, pois está sujeita a colisões com as partículas do ambiente.

onde

$$K(x, x', t; x_0, x'_0, 0) = \frac{m}{2\pi\hbar t} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar t} [(x - x_0)^2 - (x' - x'_0)^2] \right\} \\ \times \exp \left\{ -\frac{(x_0 - x'_0)^2}{2\ell(t)^2} - \frac{\Lambda t}{3} [(x - x')^2 + (x - x')(x_0 - x'_0)] \right\} \quad (2.26)$$

e

$$\ell(t) = \frac{\ell_0}{\sqrt{1 + \frac{2\Lambda t}{3} \ell_0^2}}. \quad (2.27)$$

Aqui $K(x, x', t; x_0, x'_0, 0)$ é o propagador para a partícula interagindo com o ambiente, $\rho_0(x_0, x'_0)$ é a matriz densidade inicial, $\ell(t)$ é o comprimento de coerência transverso dependente do tempo e ℓ_0 é o comprimento de coerência transverso inicial. Note que no propagador, a primeira exponencial descreve a dinâmica livre, enquanto a segunda leva em conta a interação com o ambiente.

Uma excelente concordância entre teoria e experimento tem sido demonstrada para a descoerência devido ao espalhamento com moléculas do ar e fótons do ambiente, em interferometria com moléculas de fulereno [54, 55]

Capítulo 3

Perda de Coerência e Transição Quântico-Clássico

3.1 Fonte Parcialmente Coerente

Nesta seção vamos estudar inicialmente quais alterações são causadas no padrão de interferência, no grau de coerência, na previsibilidade e na visibilidade devido a perda de coerência associada apenas com efeitos de incoerência causados pela fonte, tais como uma colimação imperfeita, responsável por gerar uma dispersão dos vetores de onda das moléculas ejetadas da fonte térmica. O aparato para tal estudo é o bastante conhecido experimento de fenda-dupla com ondas de matéria. Na subseção 3.1.1 tratamos sobre o modelo de fenda-dupla com ondas de matéria parcialmente coerentes. Na subseção 3.1.2 calculamos a intensidade, o grau de coerência, a previsibilidade e a visibilidade. Somente na seção 3.2 vamos considerar quais modificações são causadas ao incluir efeitos de descoerência associados à interação com o ambiente, tais como espalhamento com fótons térmicos e moléculas de ar, como também emissão de fótons devido a decaimentos de estados excitados.

3.1.1 Modelo com Ondas de Matéria Parcialmente Coerentes

Nós consideramos que moléculas de fulereno são produzidas num forno a uma temperatura absoluta aproximadamente igual a 900 K e depois ejetadas uma por uma através de uma pequena fenda colocada no forno. Com essa temperatura, as moléculas deixam o forno com uma velocidade mais provável v_{mp} da ordem de 200 m/s e uma dispersão relativa de $\Delta v/v_{mp} = 60\%$ [56]. Na Fig. 3.1, ilustramos como as moléculas de fulereno são ejetadas do forno de forma aleatória, com diferentes momentos e correspondentemente comprimentos de onda de

acordo com a hipótese de de Broglie [57], que inspirado pela teoria da relatividade e pelo efeito fotoelétrico, sugeriu no início da década de 1920 que toda partícula massiva tem um comprimento de “onda de matéria” $\lambda = h/p$, onde p representa momento do centro de massa das moléculas de fulereno e h é a constante de Planck.

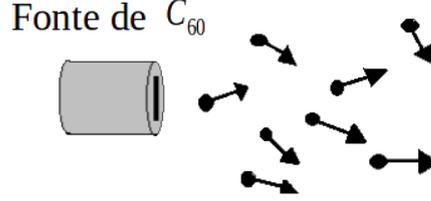


Fig. 3.1: Moléculas de fulereno são ejetadas do forno com diferentes velocidades o que corresponde a diferentes comprimentos de onda.

O feixe é enviado da fonte, com uma largura inicial transversa σ_0 , propaga-se durante um tempo t até atingir uma fenda-dupla, que o divide em dois pacotes gaussianos. Depois da fenda-dupla, os dois pacotes se propagam durante um tempo τ até chegarem a um anteparo, onde são recombinados e o padrão de interferência é observado em função da coordenada transversa x . A função de onda após as moléculas serem ejetadas do forno, de largura transversa σ_0 , conhecida como estado inicial, é dada por

$$\psi_{k_x}(x_i, 0) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_0}\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma_0^2} + ik_x x_i\right), \quad (3.1)$$

onde k_x é o número de onda transversa. A função de onda no anteparo para a onda que “passou” através da fenda 1 (+) ou da fenda 2 (-) é dada por [58]

$$\psi_{1,2k_x}(x, t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_j \int_{-\infty}^{\infty} dx_i G_{\tau}(x, t + \tau; x_j, t) F(x_j \pm d/2) G_t(x_j, t; x_i, 0) \psi_{k_x}(x_i, 0), \quad (3.2)$$

onde

$$G_t(x_j, t; x_i, 0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} \exp\left[\frac{im(x_j - x_i)^2}{2\hbar t}\right], \quad (3.3)$$

$$G_{\tau}(x, t + \tau; x_j, t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \tau}} \exp\left[\frac{im(x - x_j)^2}{2\hbar \tau}\right], \quad (3.4)$$

$$F(x_j \pm d/2) = \frac{1}{\sqrt{\beta}\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(x_j \pm d/2)^2}{2\beta^2}\right]. \quad (3.5)$$

Os termos $G_t(x_j, t; x_i, 0)$ e $G_{\tau}(x, t + \tau; x_j, t)$ são os propagadores para a partícula livre [59],

pois ainda não estamos considerando efeitos da interação com o ambiente (descoerência), as funções $F(x_j \pm d/2)$ descrevem as aberturas das fendas que são consideradas gaussianas de largura β e separadas por uma distância d centro a centro; m é a massa da partícula. O modelo está esquematizado na Fig. 3.2. Usamos fendas gaussianas ao invés de fendas tipo janelas, porque uma função de transmissão gaussiana representa uma boa aproximação da realidade experimental e também porque é matematicamente mais simples de manipular do que funções do tipo janela.

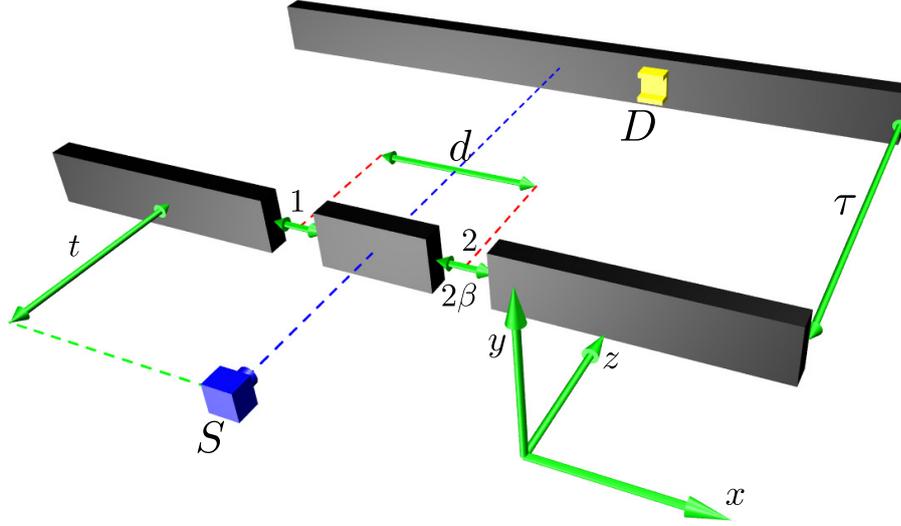


Fig. 3.2: Esboço do experimento de fenda-dupla. Um pacote de ondas gaussianas de largura inicial σ_0 propaga-se durante um tempo t até atingir uma fenda-dupla, depois um tempo τ da fenda-dupla para um anteparo. As fendas são gaussianas de largura β separadas por uma distância d centro a centro.

Após algumas manipulações algébricas, obtemos para a onda que “passou” pela fenda 1 o resultado

$$\begin{aligned} \psi_{1k_x}(x, t, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{B}\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(x + \frac{D}{2} - \Omega k_x)^2}{2B^2}\right] \\ &\quad \times \exp\left[\frac{imx^2}{2\hbar R} + i(\Delta + \gamma k_x)x + i\theta + i\mu + i\epsilon k_x + i\chi k_x^2\right], \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde

$$B^2(t, \tau) = \frac{\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 + \frac{m^2}{\hbar^2} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{r}\right)^2}{\left(\frac{m}{\hbar\tau}\right)^2 \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{b^2}\right)}, \quad R(t, \tau) = \tau \frac{\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 + \frac{m^2}{\hbar^2} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{r}\right)^2}{\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 + \frac{t}{\sigma_0^2 b^2} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{r}\right)}, \quad (3.7)$$

$$\Delta(t, \tau) = \frac{\tau \sigma_0^2 d}{2\tau_0 \beta^2 B^2}, \quad D(t, \tau) = \frac{(1 + \frac{\tau}{r})}{(1 + \frac{\beta^2}{b^2})} d, \quad (3.8)$$

$$\theta(t, \tau) = \frac{m d^2 (\frac{1}{\tau} + \frac{1}{r})}{8\hbar \beta^4 \left[\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 + \frac{m^2}{\hbar^2} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{r} \right)^2 \right]}, \quad \mu(t, \tau) = -\frac{1}{2} \arctan \left[\frac{t + \tau \left(1 + \frac{\sigma_0^2}{\beta^2} \right)}{\tau_0 \left(1 - \frac{t\tau \sigma_0^2}{\tau_0^2 \beta^2} \right)} \right], \quad (3.9)$$

$$\Omega(t, \tau) = \frac{\tau_0 \tau}{(\tau_0^2 + t^2)} \left(\sigma_0^2 + \beta^2 \frac{tD}{\tau d} \right), \quad \gamma(t, \tau) = \frac{\sigma_0^4}{b^2 B^2} \left(\frac{\beta^2 D}{\sigma_0^2 d} - \frac{t\tau}{\tau_0^2} \right), \quad (3.10)$$

$$\epsilon(t, \tau) = \frac{\sigma_0^4}{2b^2 B^2} \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^2 \left(\frac{\sigma_0^2}{\beta^2} d - \frac{t}{\tau} D \right), \quad \chi(t, \tau) = \sigma_0^4 \left(\frac{-b^2 B^2 t \tau_0^2 d + \sigma_0^2 \beta^2 (t^2 - \tau_0^2) \tau D + 2\sigma_0^4 t \tau^2 d}{2b^4 B^2 \tau_0^3 d} \right), \quad (3.11)$$

com

$$b^2(t) = \sigma_0^2 \left[1 + \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^2 \right], \quad r(t) = t \left[1 + \left(\frac{\tau_0}{t} \right)^2 \right] \quad (3.12)$$

e

$$\tau_0 = \frac{m \sigma_0^2}{\hbar}. \quad (3.13)$$

O parâmetro $B(t, \tau)$ é a largura do feixe de partículas que passaram através da fenda simples, o parâmetro $R(t, \tau)$ é o raio de curvatura das frentes de onda de matéria que passaram através da fenda simples, $\mu(t, \tau)$ é a fase de Gouy de ondas de matéria através da fenda simples [58], onde nesta publicação estudamos o seu efeito no padrão de interferência em um arranjo de fenda-dupla com larguras diferentes. $b(t)$ é a largura do feixe coerente de partículas para a propagação livre, o parâmetro $r(t)$ é o raio de curvatura das frentes de onda de matéria para a propagação livre e o parâmetro τ_0 é visto como um tempo característico para o “envelhecimento” do estado inicial [60]. Para obtermos as expressões para a onda que “passou” pela fenda 2 basta substituir o parâmetro d por $-d$ nas expressões correspondentes à onda que “passou” pela fenda 1. A função de onda total no anteparo é dado pela superposição,

$$\psi_{k_x}(x, t, \tau) = \psi_{1_{k_x}}(x, t, \tau) + \psi_{2_{k_x}}(x, t, \tau). \quad (3.14)$$

Ao tratarmos com um feixe de fulerenos, não é fisicamente razoável assumir que um pacote de ondas coerente é enviado do forno devido ao modo de produção térmica do feixe cuja colimação não é perfeita, ou seja, o feixe é uma mistura incoerente de funções de onda com vetores de onda k_x distribuído aleatoriamente de acordo com a distribuição de probabilidades $\mathbf{g}^{(0)}(k_x)$. Essa distribuição depende da geometria do objeto colimador, a fonte secundária, a qual reduz a largura produzida termicamente na direção x . O índice 0 representa o plano da fonte secundária (plano colimador), o que significa que a perda de coerência produzida no feixe é devida à fonte,

apenas. Portanto, para introduzirmos os efeitos de incoerência, vamos utilizar o formalismo do operador densidade [61].

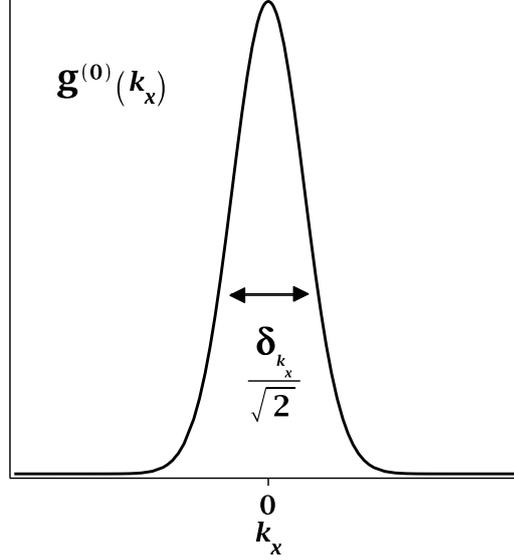


Fig. 3.3: Perfil da função distribuição de probabilidade dos vetores de onda k_x das moléculas de fulereno que são ejetadas do forno.

Para simplificar a análise, vamos adotar uma hipótese matematicamente conveniente e fisicamente razoável de assumir uma distribuição de probabilidades dos vetores de onda k_x que seja dada por uma função Gaussiana centrada no ponto $k_x = 0$ e de largura $\Delta k_x = \delta_{k_x}/\sqrt{2}$ (Fig. 3.3), isto é,

$$\mathbf{g}^{(0)}(k_x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\delta_{k_x}} \exp\left(-\frac{k_x^2}{\delta_{k_x}^2}\right), \quad (3.15)$$

o que de certa forma está de acordo com a distribuição de probabilidades de Maxwell-Boltzmann das velocidades das moléculas de uma gás [62]. Assim, a matriz densidade do feixe no anteparo é dada por

$$\rho(x, x', t, \tau) = \int dk_x \mathbf{g}^{(0)}(k_x) \psi_{k_x}(x, t, \tau) \psi_{k_x}^*(x', t, \tau), \quad (3.16)$$

e após algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\rho(x, x', t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\tilde{B}} \left[\exp(u_1 + iv_1) + \exp(u_2 + iv_2) + \exp(u_3 + iv_3) + \exp(u_4 + iv_4) \right], \quad (3.17)$$

onde,

$$u_1 = -\frac{\left[(x+x')^2 + \mathcal{M}(x-x')^2 + 2(x+x')D + D^2\right]}{4\tilde{B}^2}, \quad v_1 = \frac{m}{2\hbar\tilde{R}}(x^2-x'^2) + \mathcal{N}(x-x'), \quad (3.18)$$

$$u_2 = -\frac{\left[(x+x')^2 + \mathcal{M}(x-x')^2 - 2(x+x')D + D^2\right]}{4\tilde{B}^2}, \quad v_2 = \frac{m}{2\hbar\tilde{R}}(x^2-x'^2) - \mathcal{N}(x-x'), \quad (3.19)$$

$$u_3 = -\frac{\left[(x+x')^2 + \mathcal{M}(x-x')^2 + \mathcal{Q}(x-x') + \mathcal{J}\right]}{4\tilde{B}^2}, \quad v_3 = \frac{m}{2\hbar\tilde{R}}(x^2-x'^2) + \zeta(x+x'), \quad (3.20)$$

$$u_4 = -\frac{\left[(x+x')^2 + \mathcal{M}(x-x')^2 - \mathcal{Q}(x-x') + \mathcal{J}\right]}{4\tilde{B}^2}, \quad v_4 = \frac{m}{2\hbar\tilde{R}}(x^2-x'^2) - \zeta(x+x'), \quad (3.21)$$

$$\mathcal{N} = \frac{2\Delta B^2 + 2\Delta\Omega^2\delta_{k_x}^2 + \delta_{k_x}^2 D\Omega\gamma}{2\tilde{B}^2}, \quad \zeta = \frac{\Delta B^2 + \Delta\Omega^2\delta_{k_x}^2 + \delta_{k_x}^2 D\Omega\gamma}{\tilde{B}^2}, \quad (3.22)$$

$$\mathcal{Q} = 4\delta_{k_x}^2\gamma B^2\epsilon + \frac{2D\Omega^2\delta_{k_x}^2}{B^2} + 2D, \quad \mathcal{J} = D^2 + \frac{D^2\Omega^2\delta_{k_x}^2}{B^2} + 4\delta_{k_x}^2\epsilon^2 B^2, \quad (3.23)$$

$$\tilde{B}(t, \tau) = \sqrt{B^2(t, \tau) + \delta_{k_x}^2\Omega^2}, \quad \tilde{R}(t, \tau) = \frac{mR(t, \tau)\tilde{B}^2(t, \tau)}{m\tilde{B}^2(t, \tau) + \hbar\delta_{k_x}^2\Omega\gamma R(t, \tau)} \quad (3.24)$$

e

$$\mathcal{M} = 1 + \left(\frac{\Omega^2}{B^2} + B^2\gamma^2\right)\delta_{k_x}^2. \quad (3.25)$$

3.1.2 Intensidade, Grau de Coerência, Previsibilidade e Visibilidade

De posse da matriz densidade, obtemos a intensidade no detetor fazendo $x' = x$, isto é,

$$I(x, t, \tau) = \rho(x, x, t, \tau) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \exp\left(\frac{D^2 - \mathcal{J}}{4\tilde{B}^2}\right) \cos(2\zeta x), \quad (3.26)$$

onde

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\tilde{B}} \exp\left[-\frac{(x + D/2)^2}{\tilde{B}^2}\right] \quad (3.27)$$

e

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\tilde{B}} \exp\left[-\frac{(x - D/2)^2}{\tilde{B}^2}\right]. \quad (3.28)$$

Aqui I_1 e I_2 representam as intensidades obtidas na tela de observação quando apenas a fenda 1 ou 2 estão abertas, respectivamente, e o último termo do membro direito da Eq. 3.26 representa o termo de interferência, responsável pelos máximos e mínimos do padrão de interferência

observado na tela.

Comparando a expressão acima com a intensidade genérica para a interferência entre dois campos elétricos [63] dada por

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re}\{\gamma_{12}\}, \quad (3.29)$$

obtemos, por meio dessa analogia a função de coerência mútua normalizada de primeira ordem,

$$\gamma_{12} = \exp\left(\frac{D^2 - \mathcal{J}}{4\tilde{B}^2}\right) \exp(2i\zeta x), \quad (3.30)$$

que é uma medida da correlação entre os dois pacotes de onda produzidos na fenda-dupla. O grau de coerência do feixe é definido como sendo o módulo da função de coerência mútua normalizada de primeira ordem [63],

$$|\gamma_{12}| = \exp\left(\frac{D^2 - \mathcal{J}}{4\tilde{B}^2}\right) = \exp\left[-\frac{\left(\frac{D^2 \Omega^2}{B^2} + 4\epsilon^2 B^2\right) \delta_{k_x}^2}{4\tilde{B}^2}\right]. \quad (3.31)$$

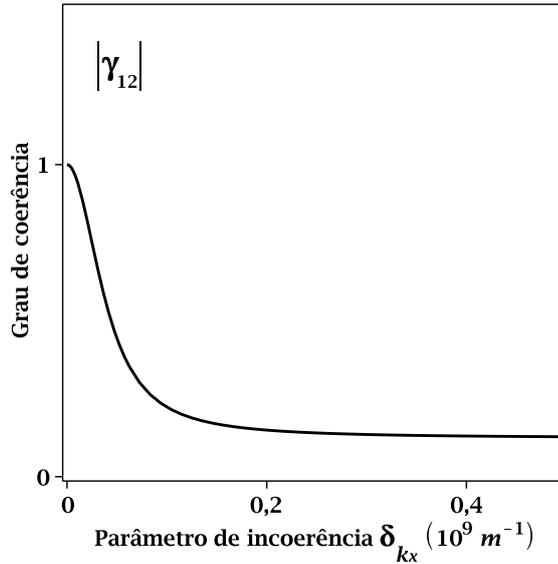


Fig. 3.4: Grau de coerência em função do parâmetro de incoerência.

Então para uma colimação ideal ($\delta_{k_x} = 0$), ou no caso mais realista de uma colimação imperfeita ($\delta_{k_x} > 0$), temos um feixe coerente ou parcialmente coerente, respectivamente, isto é,

$$|\gamma_{12}| = 1 \quad (\text{Coerência Completa; } \delta_{k_x} = 0), \quad (3.32)$$

$$|\gamma_{12}| < 1 \quad (\text{Coerência Parcial; } \delta_{k_x} > 0). \quad (3.33)$$

No limite em que $\delta_{k_x} \rightarrow \infty$, temos um feixe completamente incoerente,

$$|\gamma_{12}| = 0 \quad (\text{Incoerência Completa}). \quad (3.34)$$

Na Fig. 3.4. observamos o comportamento do grau de coerência $|\gamma_{12}|$ em função da largura (δ_{k_x}) da curva de distribuição de probabilidades ($\mathbf{g}^{(0)}(k_x)$) dos vetores de onda k_x . A largura (δ_{k_x}) da curva de distribuição de probabilidades dos vetores de onda é chamada de parâmetro de incoerência. Para $\delta_{k_x} = 0$, que corresponde a uma fonte com uma colimação ideal, temos uma coerência completa. O intervalo em que $\delta_{k_x} > 0$ corresponde a uma situação de coerência parcial. Portanto, quanto mais ideal for a fenda de colimação maior será o grau de coerência observado.

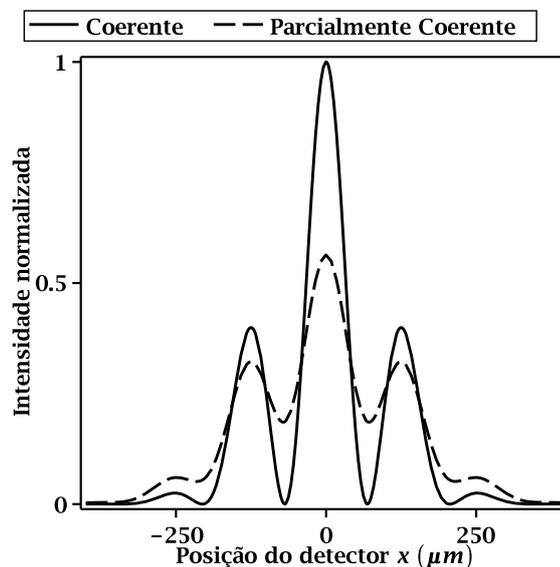


Fig. 3.5: Intensidade normalizada como função da coordenada transversa x . A linha contínua representa o caso totalmente coerente ($\delta_{k_x} = 0$) e a tracejada o caso parcialmente coerente ($\delta_{k_x} = 5 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$).

Para as Fig. 3.4, Fig. 3.5 e Fig. 3.6 consideramos ondas de fulerenos, onde adotamos os seguintes parâmetros: massa $m = 1,2 \times 10^{-24} \text{ kg}$, largura inicial do pacote $\sigma_0 = 7,0 \text{ } \mu\text{m}$, largura das fendas $\beta = 16,0 \text{ nm}$, distância entre as fendas $d = 100 \text{ nm}$, tempo de propagação da fonte até a fenda $t = 17,0 \text{ ms}$ e da fenda até o anteparo $\tau = 25,0 \text{ ms}$, que correspondem respectivamente a uma distância da ordem de $z_t \simeq 3,4 \text{ m}$ e $z_\tau \simeq 5,0 \text{ m}$, onde parâmetros desta mesma ordem de grandeza já foram utilizados nos experimentos de interferência com moléculas

de fulereno pelo grupo de A. Zeilinger [56].

A Fig. 3.5. mostra o padrão de interferência em função da coordenada transversa x . A linha contínua corresponde ao caso totalmente coerente ($\delta_{k_x} = 0$) e a linha tracejada ao caso parcialmente coerente ($\delta_{k_x} = 5 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$). Verificamos que devido a perda de coerência associado a fonte, quanto menor for o grau de coerência, menor será o número de franjas de interferência na tela de observação. Assim no caso coerente (curva contínua) podemos observar com maior clareza os picos de primeira e segunda ordem, mas no caso de um feixe parcialmente coerente (curva tracejada), visualizamos com menos clareza o pico de segunda ordem.

Com o intuito de quantificar a dualidade onda-partícula, isto é, os comportamentos de onda e partícula para cada posição x no anteparo, Greenberger e Yasin definiram as quantidades previsibilidade \mathcal{P} e visibilidade \mathcal{V} , que variam, respectivamente, de conhecimento puramente de partícula para conhecimento puramente de onda, preservando o caso geral no qual podemos ter considerável conhecimento de ambos os comportamentos, satisfazendo a relação

$$\mathcal{P}^2 + \mathcal{V}^2 \leq 1, \quad (3.35)$$

onde a igualdade se mantém para estados puros e a desigualdade para estados quânticos mistos [64]. A previsibilidade \mathcal{P} e a visibilidade \mathcal{V} , que medem respectivamente o comportamento de partícula e onda, são definidas por

$$\mathcal{P}(x) = \left| \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} \right| = \left| \tanh \left(\frac{Dx}{\widetilde{B}^2} \right) \right|, \quad (3.36)$$

e

$$\mathcal{V}(x) = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{|\gamma_{12}|}{\cosh \left(\frac{Dx}{\widetilde{B}^2} \right)}, \quad (3.37)$$

onde I_{max} e I_{min} são as intensidades máximas e mínimas, respectivamente.

A Fig. 3.6 (a) mostra o comportamento da previsibilidade em função da coordenada transversa x . A Fig. 3.6 (b) mostra o comportamento da visibilidade em função da coordenada transversa x . As curvas contínuas correspondem ao caso totalmente coerente ($\delta_{k_x} = 0$) e as curvas tracejadas ao caso parcialmente coerente ($\delta_{k_x} = 5 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$). Podemos notar que quanto maior o parâmetro de incoerência (δ_{k_x}), menor será a visibilidade das franjas do padrão de interferência, e portanto o comportamento ondulatório será menos evidente. Note que no ponto $x = 0$, a visibilidade é igual ao grau de coerência ($\mathcal{V}(0) = |\gamma_{12}|$). Assim a visibilidade no ponto $x = 0$ nos dá informação sobre o grau de coerência. A partir da Eq. 3.37 podemos obter experimentalmente o grau de coerência medindo I_{max} e I_{min} em $x = 0$, o que é fácil de ser realizado.

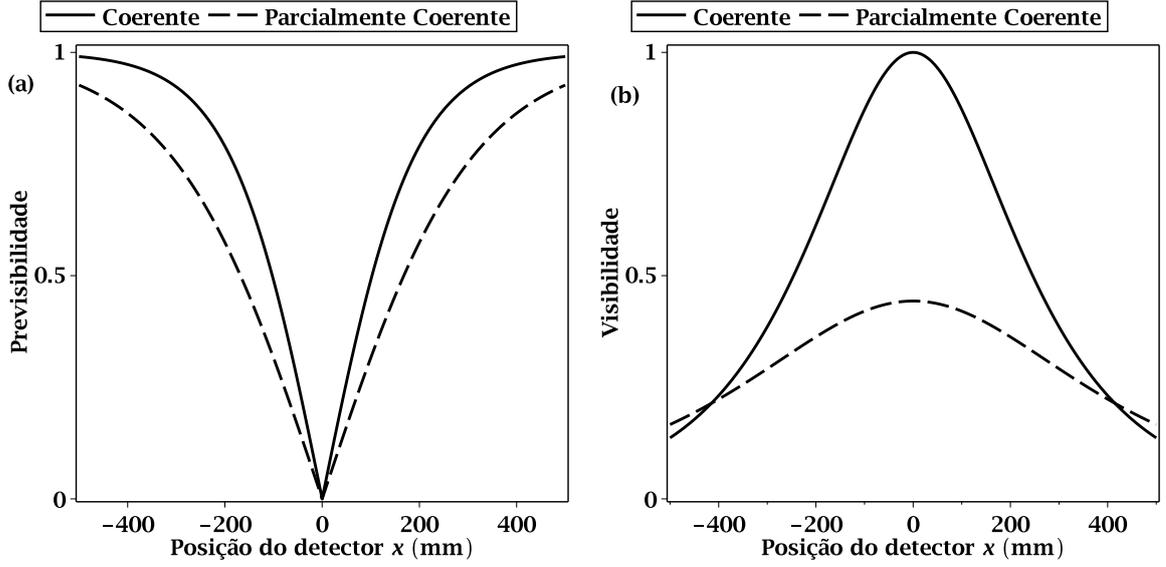


Fig. 3.6: (a) Previsibilidade e (b) Visibilidade em função da coordenada transversa x . As curvas contínuas correspondem ao caso totalmente coerente ($\delta_{k_x} = 0$) e as curvas tracejadas ao caso parcialmente coerente ($\delta_{k_x} = 5 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$).

No caso de estados quânticos puros, onde a coerência é completa ($|\gamma_{12}| = 1$), temos uma situação em que a igualdade é válida,

$$\mathcal{P}^2 + \mathcal{V}^2 = 1. \quad (3.38)$$

pois

$$\left| \tanh \left(\frac{Dx}{\tilde{B}^2} \right) \right|^2 + \frac{1}{\cosh^2 \left(\frac{Dx}{\tilde{B}^2} \right)} = 1. \quad (3.39)$$

Para estados mistos, temos a relação

$$\mathcal{P}^2 + \mathcal{V}^2 = \left| \tanh \left(\frac{Dx}{\tilde{B}^2} \right) \right|^2 + \frac{|\gamma_{12}|^2}{\cosh^2 \left(\frac{Dx}{\tilde{B}^2} \right)} < 1. \quad (3.40)$$

desde que $|\gamma_{12}| < 1$ para um feixe parcialmente coerente.

A partir da Fig. 3.6, observamos que no ponto $x = 0$ a visibilidade é reduzida devido a perda de coerência, enquanto a previsibilidade não é alterada. Assim, no ponto $x = 0$ o comportamento de partícula não é observado, enquanto o comportamento ondulatório é menos evidente devido a incoerência da fonte. Além disso, é fácil notar que tanto a visibilidade

quanto a previsibilidade são reduzidas devido a perda de coerência, o que explica o fato de que $\mathcal{P}^2 + \mathcal{V}^2 < 1$ para estados mistos.

3.2 Fonte Parcialmente coerente mais Descoerência do Meio

O modelo e os resultados obtidos na seção 3.1, não levam em consideração qualquer possível perda de coerência do feixe envolvida no experimento através de sua interação com o ambiente, que torna o sistema com propriedades mais clássicas, um processo chamado de descoerência [28]. Nesta seção vamos considerar os efeitos da perda de coerência e analisar suas consequências. Inicialmente vamos aplicar os conceitos e resultados do Cap. 2 para incluir a interação com o ambiente no modelo teórico. Calculamos a intensidade, o grau de coerência, a previsibilidade e a visibilidade e analisamos seus comportamentos e termos da constante de acoplamento com o ambiente. Posteriormente calculamos a função de Wigner e o correspondente volume da sua parte negativa, o qual está associado como um indicador de características não-clássicas do sistema, para analisar a transição entre o mundo quântico e clássico através da redução da parte negativa da função de Wigner. Na subseção 3.2.1 incluímos os efeitos de descoerência no modelo. Na subseção 3.2.2 calculamos a intensidade relativa, o grau de coerência, a previsibilidade e a visibilidade. Na subseção 3.2.3 calculamos a função de Wigner e analisamos a transição quântico clássico através da redução do volume da parte negativa da função de Wigner. Os resultados dessa seção foram publicados em *Europhysics Letters*[65].

3.2.1 Um Modelo com Descoerência

Vamos considerar que uma fonte S com abertura de largura σ_0 , produz um pacote de onda parcialmente coerente de comprimento de coerência transversal inicial ℓ_0 , enquanto na direção Oz o feixe é monocromático, que propaga-se livremente durante um tempo t a partir da fonte para a fenda-dupla. A partir da fenda-dupla para o detetor D a partícula propaga-se durante um tempo τ acoplada com um ambiente de constante de acoplamento Λ (Fig. 3.7). Para espalhamento com moléculas do ar, esta constante é dada por $\Lambda = (8/3\hbar^2)\sqrt{2\pi M}(k_B T)^{3/2}\rho w^2$ [29], onde ρ é a densidade total do ar, M é a massa de cada molécula de ar, w é o tamanho da molécula do sistema quântico, k_B é a constante de Boltzmann e T é a temperatura. Consideramos uma propagação paraxial, isto é, que o momento na direção de propagação é bem definido, tal que $p_x \ll p_z$, assim podemos considerar o movimento clássico na direção Oz tal que $z = v_z t$, onde v_z é velocidade da partícula. Assim, os efeitos quânticos são observados apenas na direção

Ox [58].

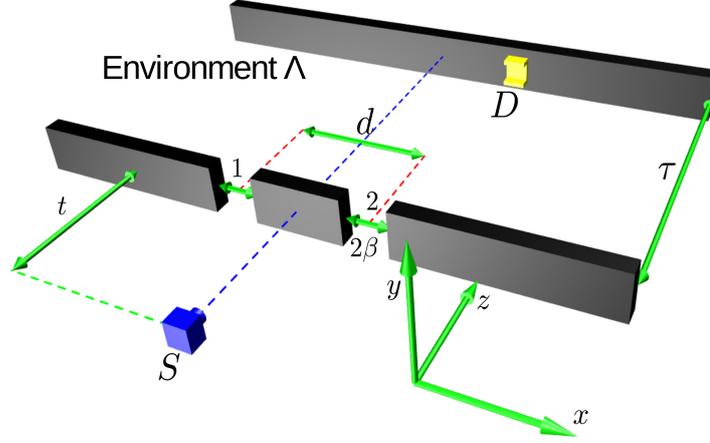


Fig. 3.7: Esboço do experimento de fenda-dupla. Uma fonte S produz um pacote de onda incoerente de largura inicial σ_0 e comprimento de coerência transversal inicial ℓ_0 , que propaga-se livremente durante um tempo t a partir da fonte para a fenda-dupla. A partir da fenda-dupla para o detector D a partícula propaga-se durante um tempo τ acoplada com um ambiente de constante de acoplamento Λ .

Para introduzir efeitos de perda de coerência vamos seguir o seguinte procedimento. Primeiro consideramos a função de onda para a propagação livre através da fenda 1 a partir da fonte para o detector que foi previamente calculada na Ref. [58], dada por

$$\psi_1(x, t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{B\sqrt{\pi}}} \exp \left[-\frac{(x + D/2)^2}{2B^2} \right] \exp \left[\frac{imx^2}{2\hbar R} + i\Delta x + i\theta + i\mu \right], \quad (3.41)$$

onde,

$$B^2(t, \tau) = \frac{\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 + \frac{m^2}{\hbar^2} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{r} \right)^2}{\left(\frac{m}{\hbar\tau} \right)^2 \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{b^2} \right)}, \quad R(t, \tau) = \tau \frac{\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 + \frac{m^2}{\hbar^2} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{r} \right)^2}{\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 + \frac{t}{\sigma_0^2 b^2} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{r} \right)}, \quad (3.42)$$

$$\Delta(t, \tau) = \frac{\tau\sigma_0^2 d}{2\tau_0\beta^2 B^2}, \quad D(t, \tau) = \frac{\left(1 + \frac{\tau}{r}\right)}{\left(1 + \frac{\beta^2}{b^2}\right)} d, \quad (3.43)$$

$$\theta(t, \tau) = \frac{md^2 \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{r} \right)}{8\hbar\beta^4 \left[\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 + \frac{m^2}{\hbar^2} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{r} \right)^2 \right]}, \quad \mu(t, \tau) = -\frac{1}{2} \arctan \left[\frac{t + \tau \left(1 + \frac{\sigma_0^2}{\beta^2} \right)}{\tau_0 \left(1 - \frac{t\tau\sigma_0^2}{\tau_0^2\beta^2} \right)} \right], \quad (3.44)$$

com

$$b^2(t) = \sigma_0^2 \left[1 + \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^2 \right], \quad r(t) = t \left[1 + \left(\frac{\tau_0}{t} \right)^2 \right] \quad (3.45)$$

e

$$\tau_0 = \frac{m\sigma_0^2}{\hbar}. \quad (3.46)$$

Para obter a função de onda para a propagação através da fenda 2, basta substituir d por $-d$ nos parâmetros que caracterizam a propagação através da fenda 1. Vamos considerar o limite $\tau \rightarrow 0$ para obtermos a função de onda imediatamente após a fenda-dupla que é dada de acordo com o princípio da superposição, isto é,

$$\psi_{fenda}(x, t, \tau \rightarrow 0) = \psi_1(x, t, \tau \rightarrow 0) + \psi_2(x, t, \tau \rightarrow 0), \quad (3.47)$$

e calcular a correspondente matriz densidade

$$\rho_0(x_0, x'_0, t) = \psi_{fenda}(x_0, t, \tau \rightarrow 0) \psi_{fenda}^*(x'_0, t, \tau \rightarrow 0). \quad (3.48)$$

Este mesmo procedimento foi adotado por I. G. da Paz na Ref. [66] para obter uma expressão analítica para a intensidade no problema do *Poisson spot* com ondas de matéria parcialmente coerentes.

Em seguida calculamos a matriz densidade para a propagação a partir da fenda-dupla para o detector dada pela Eq. 2.25 do Cap.3 [67]

$$\rho(x, x', T) = \int \int dx_0 dx'_0 K(x, x', T; x_0, x'_0, t) \rho_0(x_0, x'_0) \quad (3.49)$$

onde

$$\begin{aligned} K(x, x', T; x_0, x'_0, t) &= \frac{m}{2\pi\hbar T} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar T} [(x - x_0)^2 - (x' - x'_0)^2] \right\} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{(x_0 - x'_0)^2}{2\ell(T)^2} - \frac{\Lambda T}{3} [(x - x')^2 + (x - x')(x_0 - x'_0)] \right\} \end{aligned} \quad (3.50)$$

e

$$\ell(T) = \frac{\ell_0}{\sqrt{1 + \frac{2\Lambda T}{3} \ell_0^2}}. \quad (3.51)$$

Aqui, $K(x, x', T; x_0, x'_0, t)$ é o propagador quântico para a partícula interagindo com o ambiente, $\rho_0(x_0, x'_0, t)$ é a matriz densidade na fenda, T é o tempo de propagação a partir da fenda-dupla

até o detector onde consideramos o efeito do ambiente, $\ell(T)$ é o comprimento de coerência transversal dependente do tempo, e ℓ_0 é o comprimento de coerência transversal na fenda, que é o mesmo da fonte pois consideramos a propagação livre a partir da fonte até a fenda-dupla, isto é, $\ell_0 = \ell(t)$. A constante de acoplamento com o ambiente Λ , que pode ser chamado de taxa de localização, descreve o efeito global de muitas medições inefetivas individuais de posição por espalhamento [28], esta associado com eventos de descoerência tais como espalhamento com fótons térmicos e com moléculas do ar e possíveis emissões de fótons decorrentes do decaimento de estados excitados [67].

Depois de algumas manipulações algébricas obtemos,

$$\rho(x, x', t, T) = N \left[\exp(u_1 + iv_1) + \exp(u_2 + iv_2) + \exp(u_3 + iv_3) + \exp(u_4 + iv_4) \right], \quad (3.52)$$

onde

$$u_1 = -\mathcal{A}(x - x')^2 - \mathcal{B}(x^2 + x'^2) - \mathcal{C}(x + x') + \mathcal{F}, \quad v_1 = \mathcal{D}(x^2 - x'^2) - \mathcal{E}(x - x'), \quad (3.53)$$

$$u_2 = -\mathcal{A}(x - x')^2 - \mathcal{B}(x^2 + x'^2) + \mathcal{C}(x + x') + \mathcal{F}, \quad v_2 = \mathcal{D}(x^2 - x'^2) + \mathcal{E}(x - x'), \quad (3.54)$$

$$u_3 = -\mathcal{A}(x - x')^2 - \mathcal{B}(x^2 + x'^2) - \mathcal{G}(x - x') + \mathcal{I}, \quad v_3 = \mathcal{D}(x^2 - x'^2) - \mathcal{H}(x + x'), \quad (3.55)$$

$$u_4 = -\mathcal{A}(x - x')^2 - \mathcal{B}(x^2 + x'^2) + \mathcal{G}(x - x') + \mathcal{I}, \quad v_4 = \mathcal{D}(x^2 - x'^2) + \mathcal{H}(x + x'), \quad (3.56)$$

$$N = \frac{m}{2\tilde{\alpha}\sqrt{\pi}B\hbar Ta}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{m}{\sqrt{2}B\hbar Ta} \left[\exp\left(\frac{\mathcal{C}^2}{2B} + \mathcal{F}\right) + \exp\left(-\frac{\mathcal{H}^2}{2B} + \mathcal{I}\right) \right], \quad (3.57)$$

$$a = \left(\frac{1}{2\ell^2} + \frac{1}{2B^2} \right)^2 + \frac{m^2}{4\hbar^2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{T} \right)^2 - \frac{1}{4\ell^4}, \quad \mathcal{A} = \frac{m^2}{8a\ell^2\hbar^2 T^2} + \frac{m^2\Lambda}{12a\hbar^2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{T} \right) - \frac{\Lambda^2 T^2}{36aB^2} + \frac{\Lambda T}{3}, \quad (3.58)$$

$$\mathcal{B} = \frac{m^2}{8aB^2\hbar^2 T^2}, \quad \mathcal{C} = \frac{m\Delta}{4a\hbar TB^2} - \frac{m^2 D}{8a\hbar^2 RTB^2} - \frac{m^2 D}{8a\hbar^2 T^2 B^2}, \quad (3.59)$$

$$\mathcal{D} = \frac{m\Lambda}{12aB^2\hbar} - \frac{m^3}{8a\hbar^3 RT^2} - \frac{m^3}{8a\hbar^3 T^3} + \frac{m}{2\hbar T}, \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{mD}{4a\ell^2\hbar TB^2} + \frac{mD}{8a\hbar TB^4} - \frac{\Lambda T\Delta}{6aB^2} + \frac{m\Lambda TD}{12a\hbar RB^2} \\ & + \frac{m^2\Delta}{4a\hbar^2 RT} + \frac{m\Lambda D}{12a\hbar B^2} + \frac{m^2\Delta}{4a\hbar^2 T^2}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\mathcal{F} = \frac{D^2}{8a\ell^2 B^4} + \frac{D^2}{16aB^6} - \frac{\Delta^2}{4aB^2} + \frac{m\Delta D}{4a\hbar RB^2} + \frac{m\Delta D}{4a\hbar TB^2} - \frac{D^2}{4B^2}, \quad (3.62)$$

$$\mathcal{G} = \frac{m\Delta}{2a\ell^2\hbar T} + \frac{m\Delta}{4aB^2\hbar T} + \frac{\Lambda TD}{12aB^4} - \frac{m^2 D}{8a\hbar^2 RTB^2} + \frac{m\Delta\Lambda T}{6a\hbar R} - \frac{m^2 D}{8a\hbar^2 T^2 B^2} + \frac{m\Delta\Lambda}{6a\hbar}, \quad (3.63)$$

$$\mathcal{H} = \frac{mD}{8aB^4\hbar T} + \frac{m^2\Delta}{4a\hbar^2 RT} + \frac{m^2\Delta}{4a\hbar^2 T^2} \quad (3.64)$$

e

$$\mathcal{I} = \frac{D^2}{16aB^6} - \frac{\Delta^2}{4aB^2} + \frac{m\Delta D}{4a\hbar RB^2} + \frac{m\Delta D}{4a\hbar TB^2} - \frac{\Delta^2}{2a\ell^2} - \frac{D^2}{4B^2}. \quad (3.65)$$

3.2.2 Intensidade, Grau de Coerência, Previsibilidade e Visibilidade

A intensidade na tela de detecção é obtida fazendo $x' = x$ na matriz densidade, assim

$$I(x) = \rho(x, x) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \text{Re}\{\gamma_{12}\}, \quad (3.66)$$

onde

$$I_1 = N \exp\left(-2\mathcal{B}x^2 - 2\mathcal{C}x + \mathcal{F}\right), \quad (3.67)$$

$$I_2 = N \exp\left(-2\mathcal{B}x^2 + 2\mathcal{C}x + \mathcal{F}\right) \quad (3.68)$$

e

$$\gamma_{12} = \exp(\mathcal{I} - \mathcal{F}) \exp(2i\mathcal{H}x). \quad (3.69)$$

Aqui, I_1 e I_2 são as intensidades na tela de detecção quando apenas a fenda 1 ou a fenda 2 estão abertas, respectivamente. γ_{12} é função de coerência mútua normalizada de primeira ordem, que é uma medida da correlação entre os dois pacotes de onda produzidos na fenda-dupla [63]. O grau de coerência do feixe é definido como sendo o módulo da função de coerência mútua normalizada de primeira ordem.

Na sequência vamos considerar difração com moléculas de fulereno e espalhamento com moléculas do ar e adotar os seguintes parâmetros: massa da molécula de fulereno $m = 1,2 \times 10^{-24}$ kg, tamanho da molécula $w = 7$ Å, largura inicial do pacote $\sigma_0 = 7,8$ nm, largura da fenda $\beta = 7,8$ nm, separação entre as fendas $d = 125$ nm, tempo de propagação da fonte até a fenda-dupla $t = 0,1\tau_0$ e da fenda-dupla até a tela de detecção $T = 2,0\tau_0$, massa das moléculas do ar $M = 5,0 \times 10^{-26}$ kg e consideramos a temperatura ambiente $T = 300$ K. Parâmetros da mesma ordem de grandeza foram utilizados anteriormente em experimentos com moléculas de fulereno por A. Zeilinger e colaboradores [56].

Na Fig. 3.8 podemos analisar o comportamento do grau de coerência do feixe $|\gamma_{12}|$ em função da constante de acoplamento Λ . Na curva pontilhada temos o caso de uma fonte ideal ($\ell_0 \rightarrow \infty$)

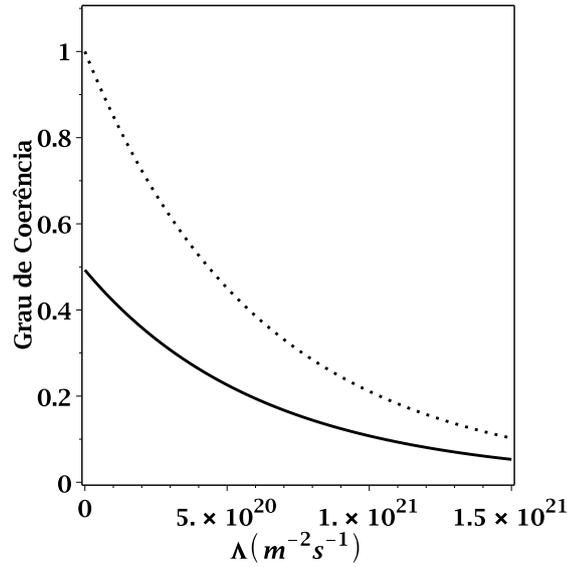


Fig. 3.8: Grau de coerência do feixe em função da constante de acoplamento com o ambiente Λ . Na curva pontilhada temos o caso de uma fonte ideal ($\ell_0 \rightarrow \infty$) e na curva contínua temos o caso mais realista de uma fonte parcialmente coerente ($\ell_0 = 50 \text{ nm}$).

e na curva contínua temos o caso mais realista de uma fonte parcialmente coerente ($\ell_0 = 50 \text{ nm}$). Podemos observar que para obtermos um feixe completamente coerente ($|\gamma_{12}| = 1$) não basta apenas isolar o sistema da interação com o ambiente, devemos também sermos capazes de produzir uma fonte com um grande comprimento de coerência inicial ℓ_0 . Além disso, podemos observar que no limite de forte interação com o ambiente $\Lambda \rightarrow \infty$, a coerência entre os pacotes de onda desaparece, isto é, $|\gamma_{12}| \rightarrow 0$.

Como todos os outros parâmetros foram fixados, a variação na constante de acoplamento Λ corresponde à variação na densidade das moléculas do ar ρ , tal que Λ da ordem de $10^{20} m^{-2} s^{-1}$ corresponde à uma densidade do ar da ordem 10^{13} moléculas/ m^3 . O valor $\Lambda = 3,2 \times 10^{15} m^{-2} s^{-1}$ para espalhamento com moléculas do ar estimado em [67], corresponde à uma densidade das moléculas do ar da ordem de $\rho = 1,8 \times 10^8$ moléculas/ m^3 que é menor do que a densidade que estamos considerando. Portanto, a densidade do ar que estamos considerando é experimentalmente viável com a tecnologia atual.

Na Fig. 3.9 exibimos a intensidade relativa ($I_{rel} = I(x)/(I_1 + I_2)$) em função da coordenada transversa x , para alguns valores da constante de acoplamento Λ , onde consideramos um comprimento de coerência inicial $\ell_0 = 130 \text{ nm}$. (a) Para $\Lambda = 2,0 \times 10^{19} m^{-2} s^{-1}$, (b) para $\Lambda = 2,4 \times 10^{20} m^{-2} s^{-1}$, (c) para $\Lambda = 5,0 \times 10^{20} m^{-2} s^{-1}$ e (d) para $\Lambda = 2,0 \times 10^{21} m^{-2} s^{-1}$. Podemos observar que com o aumento do parâmetro Λ devido a interação com o ambiente, temos uma notória redução das franjas de interferência.

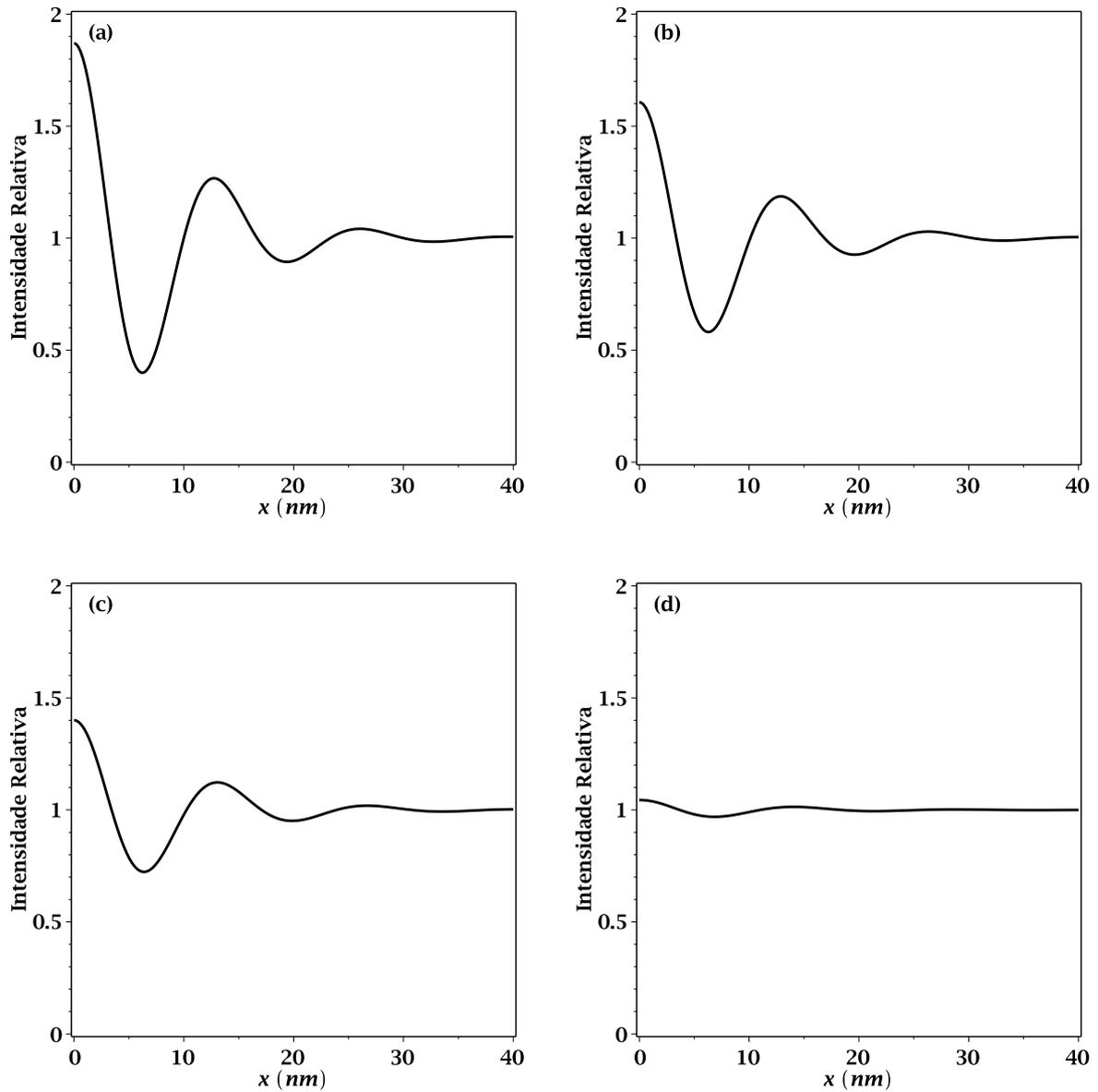


Fig. 3.9: Intensidade relativa em função da coordenada transversa x para alguns valores da constante de acoplamento com o ambiente Λ , onde consideramos $\ell_0 = 130 \text{ nm}$. (a) Para $\Lambda = 2,0 \times 10^{19} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$, (b) para $\Lambda = 2,4 \times 10^{20} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$, (c) para $\Lambda = 5,0 \times 10^{20} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ e (d) para $\Lambda = 2,0 \times 10^{21} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$.

A previsibilidade \mathcal{P} e a visibilidade \mathcal{V} , que medem respectivamente o comportamento de partícula e onda [64], são definidas por

$$\mathcal{P}(x) = \left| \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} \right| = \left| \tanh(2\mathcal{C}x) \right| \quad (3.70)$$

e

$$\mathcal{V}(x) = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{|\gamma_{12}|}{\cosh(2\mathcal{C}x)}, \quad (3.71)$$

onde I_{max} e I_{min} são as intensidades máximas e mínimas, respectivamente.

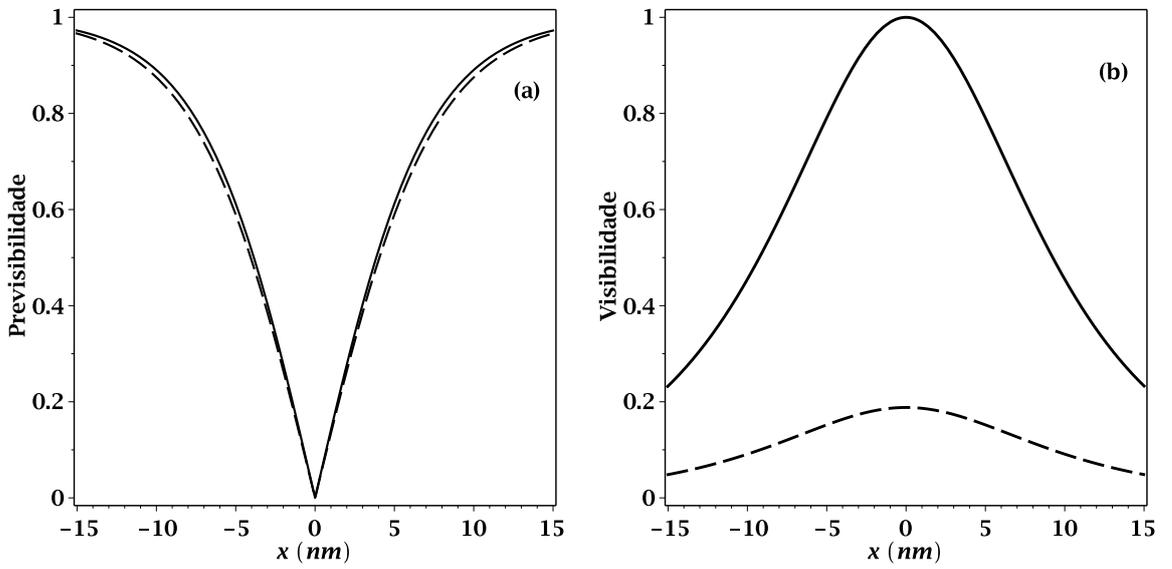


Fig. 3.10: (a) Previsibilidade e (b) visibilidade em função da coordenada transversal x considerando uma fonte ideal ($l_0 \rightarrow \infty$). Nas curvas contínuas não consideramos a interação com ambiente ($\Lambda = 0$) e nas curvas tracejadas consideramos a interação com o ambiente ($\Lambda = 1,0 \times 10^{21} m^{-2} s^{-1}$).

Na Fig. 3.10 (a) e Fig. 3.10 (b) temos os gráficos da previsibilidade e da visibilidade em função da coordenada transversal x , respectivamente, onde consideramos uma fonte ideal ($l_0 \rightarrow \infty$). Nas curvas contínuas não consideramos a interação com ambiente ($\Lambda = 0$) e nas curvas tracejadas consideramos a interação com o ambiente ($\Lambda = 1,0 \times 10^{21} m^{-2} s^{-1}$). Na Fig. 3.11 (a) e Fig. 3.11 (b) temos os gráficos da previsibilidade e da visibilidade em função da coordenada transversal x , respectivamente, onde consideramos uma fonte parcialmente coerente ($l_0 = 50 nm$). Nas curvas contínuas não consideramos a interação com ambiente ($\Lambda = 0$) e nas curvas tracejadas consideramos a interação com o ambiente ($\Lambda = 1,0 \times 10^{21} m^{-2} s^{-1}$). A partir das Fig. 3.10 e Fig. 3.11, podemos concluir que tanto o efeito de incoerência associado a

fonte, como o efeito de descoerência através da interação com o ambiente são responsáveis pela diminuição do comportamento ondulatório que é caracterizado pela visibilidade \mathcal{V} . Portanto o comportamento ondulatório que é medido pela visibilidade é destruído e o comportamento clássico se manifesta. Também observamos na Fig. 3.11 (b) que $\mathcal{V} < 1$ no máximo central em $x = 0$ para $\Lambda = 0$, que é um efeito devido a uma fonte parcialmente coerente. A previsibilidade praticamente não é alterada, o que de certa forma era esperado, pois não obtivemos diretamente nenhuma informação de caminho.

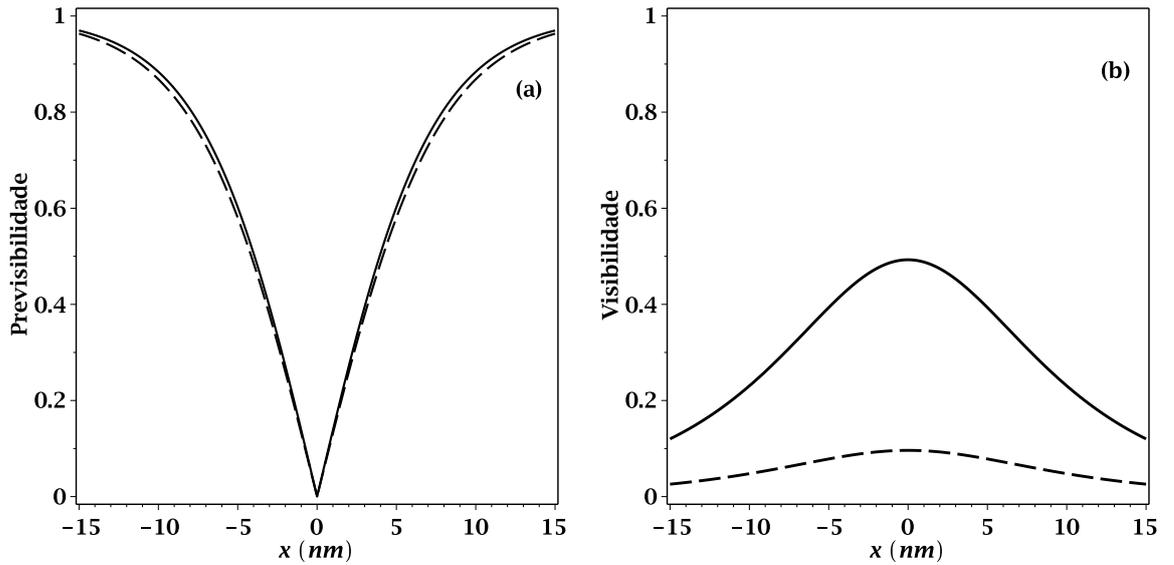


Fig. 3.11: (a) Previsibilidade e (b) visibilidade em função da coordenada transversa x considerando uma fonte parcialmente coerente ($\ell_0 = 50 \text{ nm}$). Nas curvas contínuas não consideramos a interação com ambiente ($\Lambda = 0$) e nas curvas tracejadas consideramos a interação com o ambiente ($\Lambda = 1,0 \times 10^{21} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$).

3.2.3 Função de Wigner

A função de Wigner é uma maneira de descrever os estados quânticos de um sistema por meio de uma função de distribuição de probabilidades dentro do formalismo do espaço de fase (x, p) [11]. Em 1932 Wigner usou esta “distribuição de quase-probabilidade” no espaço de fase como uma maneira conveniente de calcular correções quânticas para a mecânica estatística clássica. Contudo, vale ressaltar que o princípio de incerteza de Heisenberg ($\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$) proíbe a existência de uma genuína distribuição de probabilidades no espaço de fase, desde que não podemos determinar simultaneamente a posição x e o momento p da partícula com uma precisão maior do que a estabelecida pelo princípio de incerteza. Apesar disto, distribuições

de probabilidades no espaço de fase podem desempenhar um importante papel na mecânica quântica, permitindo entre outras coisas, o cálculo de valores esperados de observáveis da mecânica quântica de uma maneira clássica (em termos de uma integral) ao invés do formalismo de operadores. O objetivo de Wigner era substituir a função de onda que aparece na equação de Schrödinger por uma distribuição de probabilidades no espaço de fase [12].

Devido ao fato de que a função de Wigner possa assumir valores negativos, ela não pode ser interpretada como uma distribuição de probabilidade regular de duas variáveis aleatórias, assim ela é usualmente referida como uma “distribuição de quase-probabilidade”. Pode-se provar que a função de Wigner é limitada a um valor $|W(x, p)| \leq 1/\pi\hbar$ e além disso como toda distribuição de probabilidade é normalizável em todo o espaço de fase tal que $\int \int W(x, p) dx dp = 1$ [14]. Vale ressaltar que a função de Wigner não é a única maneira de representar um estado quântico no espaço de fase, outras representações bem conhecidas são as de Husimi (Q) [15] e a de Glauber-Sudarshan (P) [16, 17]. Para interpretar a função de Wigner como uma distribuição de probabilidade clássica no espaço de fase é necessário que ela seja não negativa. Este é o caso para *coherent states* (estados coerentes), como mostrado por Hudson [18]. Neste sentido estados que possuem partes negativas em sua correspondente função Wigner podem ser considerados estados genuinamente com características “mais quânticas”, um exemplo é o estado de *Fock* [1] do oscilador harmônico.

Depois de obtermos na seção 3.2.1 a matriz densidade na tela de detecção, vamos calcular a função de Wigner para estudar e caracterizar o estado quântico do sistema em termos da perda de coerência e analisar a transição quântico clássico através da redução do volume da parte negativa da função de Wigner. A caracterização do estado do sistema como clássico ou quântico é feita analisando uma possível negatividade da função de Wigner como indicador de não-classicalidade [48].

A função de Wigner para o caso geral de um estado misto é dada por [11, 68],

$$W(x, k) \equiv \frac{1}{2\pi} \int \rho\left(x - \frac{\tilde{x}}{2}, x + \frac{\tilde{x}}{2}\right) e^{ik\tilde{x}} d\tilde{x}, \quad (3.72)$$

onde k é o número de onda associado ao momento através da relação $p = \hbar k$. Para a matriz densidade dada pela Eq. 3.52, fazendo os devidos ajustes, obtemos após algumas manipulações algébricas o seguinte resultado,

$$\begin{aligned} W(x, k) = & W_1(x, k) + W_2(x, k) + 2\tilde{N} \exp(-2\mathcal{B}x^2 + \mathcal{I}) \exp\left[-\frac{(k - 2x\mathcal{D})^2}{4\mathcal{A} + 2\mathcal{B}}\right] \\ & \times \exp\left[\frac{\mathcal{G}^2}{4\mathcal{A} + 2\mathcal{B}}\right] \cos\left[2\mathcal{H}x - \frac{(k - 2\mathcal{D}x)\mathcal{G}}{2\mathcal{A} + \mathcal{B}}\right], \end{aligned}$$

$$(3.73)$$

onde,

$$W_1(x, k) = \tilde{N} \exp\left(-2\mathcal{B}x^2 - 2\mathcal{C}x + \mathcal{F}\right) \exp\left[-\frac{(k + \mathcal{E} - 2x\mathcal{D})^2}{4\mathcal{A} + 2\mathcal{B}}\right], \quad (3.74)$$

$$W_2(x, k) = \tilde{N} \exp\left(-2\mathcal{B}x^2 + 2\mathcal{C}x + \mathcal{F}\right) \exp\left[-\frac{(k - \mathcal{E} - 2x\mathcal{D})^2}{4\mathcal{A} + 2\mathcal{B}}\right] \quad (3.75)$$

e

$$\tilde{N} = \frac{N}{\sqrt{\pi(4\mathcal{A} + 2\mathcal{B})}}. \quad (3.76)$$

O resultado exibido pela Eq. 3.73 é composto pelos termos $W_1(x, k)$ e $W_2(x, k)$ que são as funções de Wigner para a partícula que “passou” através da fenda 1 e 2, respectivamente, como também um termo de interferência.

Uma possível maneira de quantificar a não-classicalidade de um dado estado pode ser baseada na negatividade da função de Wigner, que é interpretada com uma assinatura quântica. Neste sentido, um indicador de não-classicalidade de um dado estado quântico pode ser definido como sendo o *volume* da parte negativa da função de Wigner, como apontado por Kenfack [48]. Assim, o dobro do volume da parte negativa da função de Wigner é escrito como

$$\delta = \int \int \left[|W(x, k)| - W(x, k) \right] dx dk = \int \int |W(x, k)| dx dk - 1. \quad (3.77)$$

Na Fig. 3.12 mostramos a função de Wigner como função da posição x e do número de onda k para alguns valores da constante de acoplamento com o ambiente Λ , onde consideramos $\ell_0 = 130 \text{ nm}$. (a) Para $\Lambda = 2,0 \times 10^{19} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$, (b) para $\Lambda = 2,4 \times 10^{20} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$, (c) para $\Lambda = 5,0 \times 10^{20} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ e (d) para $\Lambda = 2,0 \times 10^{21} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$. Devido as oscilações do valor absoluto do cosseno, no cálculo do volume da parte negativa tornou-se praticamente impossível a integração de forma analítica, sendo assim, recorreremos a métodos numéricos aproximativos para o cálculo de tal integral. A precisão na integração foi analisada verificando a normalização da função de Wigner. A Tab. 3.1 mostra os valores da constante de acoplamento Λ , do comprimento de coerência ℓ , do volume da parte negativa da função de Wigner δ e do valor máximo da visibilidade \mathcal{V}_{max} para a Fig.3.12 (a), Fig.3.12 (b), Fig.3.12 (c) e Fig.3.12 (d), respectivamente.

A partir desses resultados observamos que, quando os pacotes de onda correspondentes a cada fenda exibem uma suficiente coerência mútua, a função de Wigner contém partes negativas, que vão tornando-se cada vez menos perceptíveis devido a interação com o ambiente. Podemos observar que o volume da parte negativa da função de Wigner diminui enquanto a interação

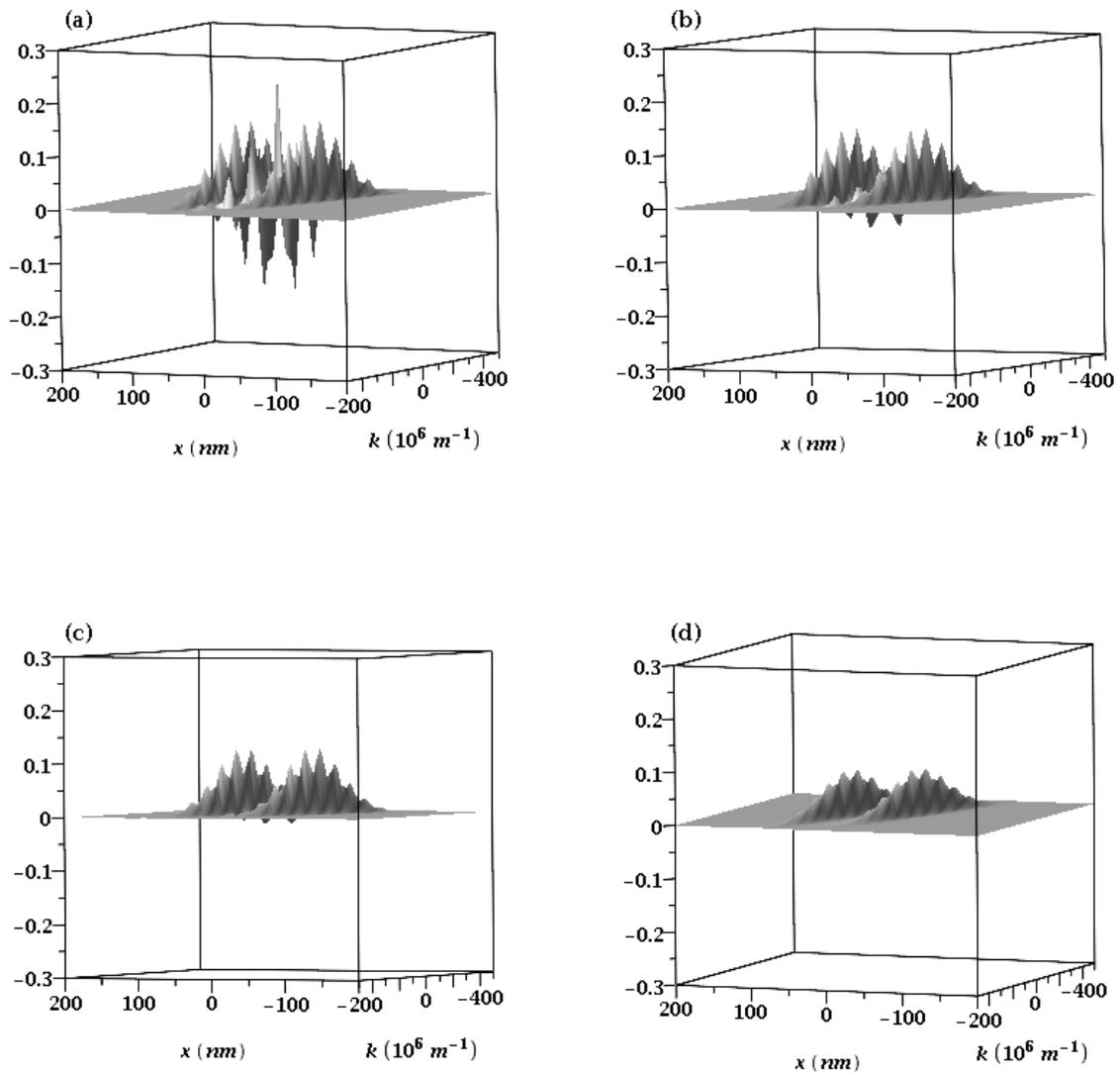


Fig. 3.12: Função de Wigner como função da posição x e do número de onda k para alguns valores da constante de acoplamento com o ambiente Λ , onde consideramos $\ell_0 = 130 \text{ nm}$. (a) Para $\Lambda = 2,0 \times 10^{19} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$, (b) para $\Lambda = 2,4 \times 10^{20} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$, (c) para $\Lambda = 5,0 \times 10^{20} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ e (d) para $\Lambda = 2,0 \times 10^{21} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$.

Tab. 3.1: Valores da constante de acoplamento Λ , do comprimento de coerência ℓ , do volume da parte negativa da função de Wigner δ e do valor máximo da visibilidade para os gráficos da Fig. 3.12.

Fig. 3.12	Λ ($m^{-2}s^{-1}$)	ℓ (nm)	δ	\mathcal{V}_{max}
(a)	$2,0 \times 10^{19}$	113 nm	0,50	0,84
(b)	$2,4 \times 10^{20}$	59,7 nm	0,15	0,60
(c)	$5,0 \times 10^{20}$	43,8 nm	0,056	0,39
(d)	$2,0 \times 10^{21}$	22,9 nm	0,0021	0,044

com o ambiente Λ aumenta. Como podemos interpretar esta redução do volume em termos da transição quântico clássico? Nós observamos que a parte negativa da função de Wigner é produzida pelo termo de interferência. Quando a interação com o ambiente aumenta, o termo de interferência é destruído, e assim levando o sistema a apresentar um comportamento clássico. Por outro lado, a redução do padrão de interferência acompanhada com a redução do volume nos permite relacionar sua redução com a transição quântico clássico.

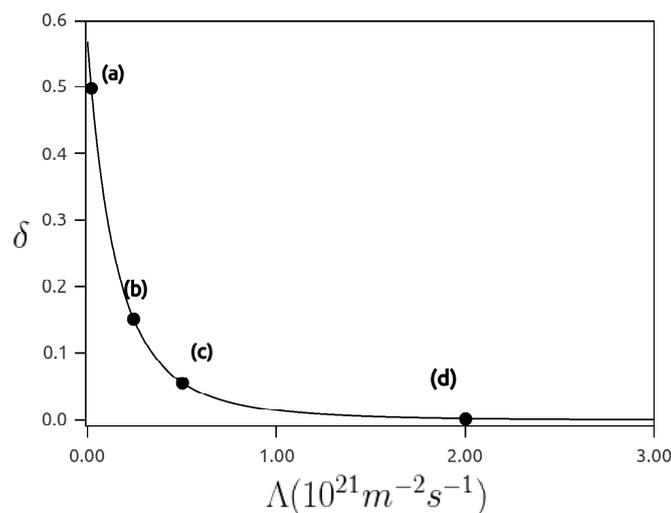


Fig. 3.13: Comportamento do volume da parte negativa da função de Wigner em função da constante de acoplamento com o ambiente Λ . Os pontos no gráfico correspondem aos valores do volume da função de Wigner para a Fig.3.12 (a), Fig.3.12 (b), Fig.3.12 (c) e Fig.3.12 (d), respectivamente.

Na Fig.3.13 mostramos de forma mais detalhada o comportamento do volume da parte negativa da função de Wigner em termos da constante de acoplamento com o ambiente Λ . Como pode ser observado, com o aumento do acoplamento com o ambiente Λ , causado pela descoerência, o volume da parte negativa da função de Wigner é reduzido, o que pode ser interpretado como uma transição do comportamento quântico para o comportamento clássico.

Os pontos ((a)-(d)) referem-se aos gráficos da Fig. 3.12. Também observamos que para $\Lambda \rightarrow 0$ temos que o volume tende para o valor $\delta \rightarrow 0,567$ e para $\Lambda \rightarrow \infty$ temos $\delta \rightarrow 0$. Esses limites correspondem aos valores extremos onde temos características de comportamentos quântico e clássico, respectivamente.

Capítulo 4

Entropia de Shannon e Descoerência

A base matemática da teoria da comunicação ou teoria da informação foi estabelecida por Claude Shannon em 1948 [42], onde ele introduziu o conceito de entropia de informação, também denominada de entropia de Shannon em sua homenagem. Nesse trabalho, ele formalizou em termos matemáticos o problema da teoria da comunicação, a saber: um receptor é capaz de identificar quais dados foram gerados por uma fonte aleatória de dados, baseado no sinal recebido através do canal de informação? Geralmente entropia refere-se a desordem ou incerteza. A unidade de medida da entropia de Shannon depende da base do logaritmo utilizado em sua definição. Para logaritmos de base 2, a unidade é denominada de *bits*, para base 10 a unidade é *bans*, para base e a unidade é *nats*, etc.

A entropia de Shannon tem sido calculada e discutida em diferentes sistemas. A entropia de Shannon de posição e de momento foi calculada para estados estacionários e certos estados não-estacionários do Oscilador Harmônico Quântico. Foi mostrado que para grandes valores do número quântico n , a entropia de Shannon de posição do Oscilador Harmônico Quântico tende para a entropia de posição do Oscilador Harmônico Clássico. Foi também mostrado que a interferência produz mínimos na entropia de Shannon de posição para estados do tipo gato de Schrödinger [43]. A entropia de Shannon da função de Wigner foi calculada para o estado fundamental e para estados estacionários excitados de uma partícula em uma caixa e para o oscilador harmônico, com o intuito de analisar a localização da distribuição no espaço de fase e estudar a correlação entre posição e momento através da informação mútua [44]. A entropia de Shannon da função de Wigner para uma partícula em um curral quântico foi calculada para estudar o efeito de um potencial efetivo na informação mútua entre as variáveis de posição e momento [45]. A entropia de Shannon foi calculada para um poço quadrado finito, com o intuito de comparar as relações de incerteza entrópica e padrão para os estados desse sistema, com a perspectiva de determinar limites de mensurabilidade para a posição e para o

momento [46]. Anteriormente estudamos, via entropia de Shannon, a localização/delocalização das distribuições de probabilidades nos espaços de posição, momento e de fase para o experimento de fenda-dupla com ondas de matéria. Consideramos uma fonte completamente coerente que produz um estado inicial Gaussiano correlacionado. Calculamos a função de onda na tela de detecção e estudamos os efeitos de localização/delocalização em função do parâmetro de correlação [47].

Neste capítulo, vamos considerar novamente o experimento de fenda-dupla com ondas de matéria, e analisar os efeitos da descoerência na localização/delocalização das distribuições de probabilidades no espaço de posição, de momento e de fase, via entropia de Shannon. Na seção 4.1 calculamos as densidades de probabilidades nos espaços de posição e momento a partir da função de Wigner. Calculamos as entropia de Shannon de posição, de momento e da função de Wigner na tela de detecção como função da constante de acoplamento com o ambiente Λ . Na seção 4.2 calculamos a informação mútua entre as variáveis de posição e momento para estudar suas correlações em termos de Λ .

4.1 Entropia de Shannon na Tela de Detecção

A partir da função de Wigner obtida no Cap. 3 (Eq. 3.73), calculamos as densidades de probabilidades de posição e momento. Também calculamos a entropia de Shannon de posição, de momento e da função de Wigner na tela de detecção como função da constante de acoplamento com o ambiente Λ , que está relacionada com eventos de descoerência.

A densidade de probabilidade no espaço das posições é dada por

$$\begin{aligned}\rho(x, x) &= \int W(x, k) dk \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \text{Re}\{\gamma_{12}\},\end{aligned}\quad (4.1)$$

onde

$$I_1 = N \exp\left(-2\mathcal{B}x^2 - 2\mathcal{C}x + \mathcal{F}\right), \quad (4.2)$$

$$I_2 = N \exp\left(-2\mathcal{B}x^2 + 2\mathcal{C}x + \mathcal{F}\right) \quad (4.3)$$

e

$$\gamma_{12} = \exp(\mathcal{I} - \mathcal{F}) \exp(2i\mathcal{H}x). \quad (4.4)$$

A densidade de probabilidade no espaço dos momentos é dada por

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(k, k) &= \int W(x, k) dx \\ &= \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + 2\sqrt{\tilde{I}_1 \tilde{I}_2} \operatorname{Re}\{\tilde{\gamma}_{12}\},\end{aligned}\quad (4.5)$$

onde

$$\tilde{I}_1 = \bar{N} \exp(-\tilde{A}k^2 - \tilde{B}k + \tilde{C}), \quad (4.6)$$

$$\tilde{I}_2 = \bar{N} \exp(-\tilde{A}k^2 + \tilde{B}k + \tilde{C}), \quad (4.7)$$

$$\tilde{\gamma}_{12} = \exp(\tilde{D} - \tilde{C}) \exp(i\tilde{E}k), \quad (4.8)$$

$$\bar{N} = \sqrt{\frac{\pi(2\mathcal{A} + \mathcal{B})}{4\mathcal{A}\mathcal{B} + 2\mathcal{B}^2 + 2\mathcal{D}^2}} \tilde{N}, \quad \tilde{A} = \frac{\mathcal{B}}{4\mathcal{A}\mathcal{B} + 2\mathcal{B}^2 + 2\mathcal{D}^2}, \quad (4.9)$$

$$\tilde{B} = \frac{\mathcal{E}\mathcal{B} + \mathcal{C}\mathcal{D}}{2\mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}^2 + \mathcal{D}^2}, \quad \tilde{C} = \frac{\mathcal{B}^2\mathcal{F} + \mathcal{C}^2\mathcal{B} + 4\mathcal{F}\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{E}^2\mathcal{B} + 2\mathcal{D}^2\mathcal{F} - 2\mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{E} + 2\mathcal{A}\mathcal{C}^2}{4\mathcal{A}\mathcal{B} + 2\mathcal{B}^2 + 2\mathcal{D}^2}, \quad (4.10)$$

$$\tilde{D} = \frac{2\mathcal{B}^2\mathcal{I} + (4\mathcal{L}\mathcal{A} + \mathcal{G}^2 - \mathcal{H}^2)\mathcal{B} + 2\mathcal{D}^2\mathcal{I} - 2\mathcal{D}\mathcal{G}\mathcal{H} - 2\mathcal{A}\mathcal{H}^2}{4\mathcal{A}\mathcal{B} + 2\mathcal{B}^2 + 2\mathcal{D}^2}, \quad \tilde{E} = \frac{\mathcal{B}\mathcal{G} - \mathcal{D}\mathcal{H}}{2\mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}^2 + \mathcal{D}^2}. \quad (4.11)$$

As expressões nas Eqs. 4.1 e 4.5 são as mesmas, mostrando que a mecânica quântica pode ser formulada nos espaços de posição ou momento. Os resultados acima nos permitem calcular as entropias de Shannon de posição, de momento e da função de Wigner, respectivamente, por

$$s_x(\Lambda) = - \int dx \rho(x, x) \ln(\rho(x, x)), \quad (4.12)$$

$$s_k(\Lambda) = - \int dk \tilde{\rho}(k, k) \ln(\tilde{\rho}(k, k)) \quad (4.13)$$

e

$$s_w(\Lambda) = - \int \int dx dk W(x, k) \ln(W(x, k)). \quad (4.14)$$

que são dependentes da constante de acoplamento com o ambiente Λ .

Na sequência vamos considerar difração com moléculas de fulereno e espalhamento com moléculas do ar e adotar os seguintes parâmetros: massa da molécula de fulereno $m = 1, 2 \times 10^{-24}$ kg, tamanho da molécula $w = 7 \text{ \AA}$, largura inicial do pacote $\sigma_0 = 7, 8 \text{ nm}$, comprimento de coerência transversal inicial $\ell_0 = 50 \text{ nm}$, largura da fenda $\beta = 7, 8 \text{ nm}$, separação entre as

fendas $d = 125$ nm, tempo de propagação da fonte até a fenda-dupla $t = 0, 1\tau_0$ e da fenda-dupla até a tela de detecção $T = 2, 0\tau_0$, massa das moléculas do ar $M = 5.0 \times 10^{-26}$ kg e consideramos a temperatura ambiente $T = 300$ K. Parâmetros da mesma ordem de grandeza foram utilizados anteriormente em experimentos com moléculas de fulereno por A. Zeilinger e colaboradores [56]. Calculamos numericamente os resultados das Eqs. 4.12 e 4.13. A precisão nas integrações foi analisada verificando a normalização das densidades de probabilidades no espaço das posições e dos momentos. As unidades das quantidades entrópicas são dadas em nats (unidade natural de informação).

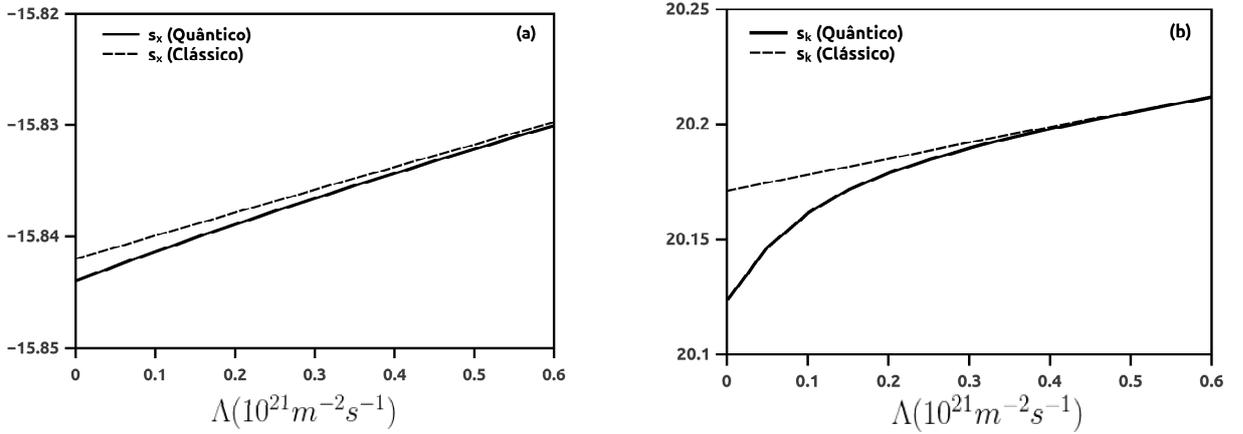


Fig. 4.1: (a) Entropia de Shannon de posição s_x e (b) entropia de Shannon de momento s_k como função da constante de acoplamento com o ambiente Λ . A curva contínua corresponde à entropia calculada para uma distribuição de probabilidades quântica e a tracejada para uma distribuição de probabilidades clássica, onde desconsideramos o termo de interferência.

Na Fig. 4.1 (a) e 4.1 (b) exibimos a entropia de Shannon de posição s_x e a entropia de Shannon de momento s_k como função da constante de acoplamento com o ambiente Λ , respectivamente. A curva contínua corresponde à entropia calculada para uma distribuição de probabilidades quântica e a tracejada para uma distribuição de probabilidades clássica, onde desconsideramos o termo de interferência das respectivas densidades de probabilidades. Analisando estas figuras podemos observar que a partir de um determinado valor da constante de acoplamento com o ambiente Λ , as entropias de Shannon calculadas a partir de uma distribuição de probabilidades quânticas tendem para o mesmo comportamento quando calculadas com densidades de probabilidades clássicas, o que corresponde a uma transição de um comportamento quântico para um comportamento clássico a partir de um determinado valor de Λ . O fato de termos obtido s_x assumindo valores negativos tem uma simples explicação como na Ref. [69]: como no espaço das posição x é da ordem de 10^{-9} m, então a densidade de probabilidade

torna-se grande, de acordo com a condição de normalização. Assim $\rho(x, x) > 1$, e portanto $-\rho(x, x) \ln \rho(x, x) < 0$, então s_x é negativo. Note que no trabalho original de Shannon, a entropia pode ser negativa para distribuições contínuas (veja pg. 631 na Ref. [42]).

Na Fig. 4.2 (a) e 4.2 (b) exibimos a intensidade relativa no espaço das posições, obtida a partir da Eq. 4.1 $I_r(x) = \rho(x, x)/(I_1(x) + I_2(x))$, e a intensidade relativa no espaço dos momentos, obtida a partir da Eq. 4.5 $\tilde{I}_r(k) = \tilde{\rho}(k, k)/(\tilde{I}_1(k) + \tilde{I}_2(k))$, para três valores de Λ . A linha contínua corresponde a $\Lambda = 0$, a pontilhada a $\Lambda = 2,0 \times 10^{20} m^{-2} s^{-1}$ e a tracejada a $\Lambda = 2,0 \times 10^{21} m^{-2} s^{-1}$. Podemos observar que o número de franjas no padrão de interferência diminui com o aumento da constante Λ , ou seja, devido a interação com o ambiente através do espalhamento com moléculas do ar.

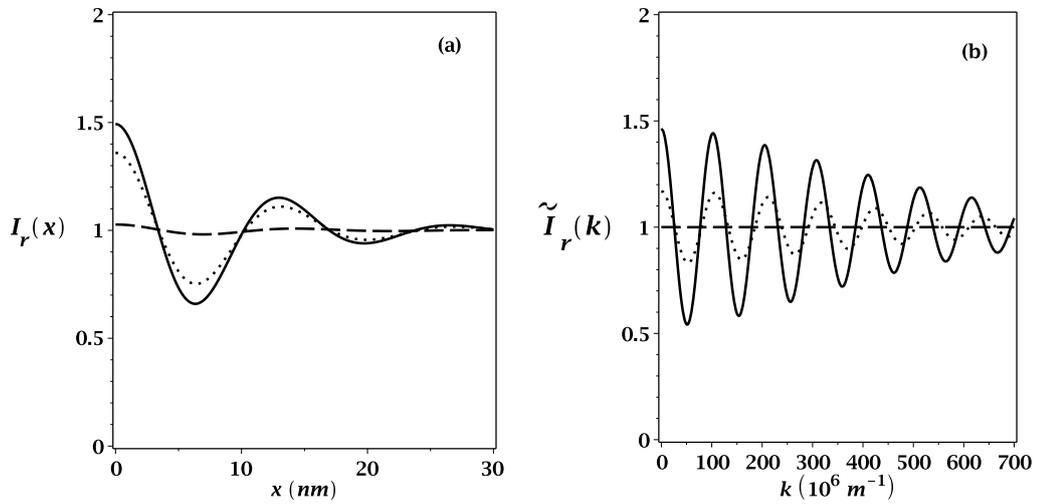


Fig. 4.2: (a) Intensidade relativa como função de x e (b) intensidade relativa como função de k para três valores de Λ . A linha contínua corresponde a $\Lambda = 0$, a pontilhada a $\Lambda = 2,0 \times 10^{20} m^{-2} s^{-1}$ e a tracejada à $\Lambda = 2,0 \times 10^{21} m^{-2} s^{-1}$.

Os resultados apresentados na Fig. 4.1 e Fig. 4.2 têm a seguinte interpretação: é conhecido que a entropia de Shannon mede a localização/delocalização de uma distribuição, tal que pequenos valores são indicativos de uma distribuição mais localizada e grandes valores associados com uma que é mais delocalizada. Assim, no experimento de fenda-dupla nos espaços de posição e momento, localização/delocalização implica aumento/diminuição na região de sobreposição dos pacotes de onda, como pode ser observado pela redução no número de franjas de interferência com o aumento das entropias de Shannon. Portanto, a interação com o ambiente produz uma redução na região de sobreposição entre os pacotes de onda, nos espaços de posição e momento.

Outra quantidade de grande importância no contexto de entropia de Shannon que vamos discutir é a relação de incerteza entrópica, que tem sido mostrada expressar mais adequadamente

o princípio de incerteza do que a relação de incerteza padrão em alguns aspectos [70, 71]. Ela é formulada em termos da entropia de informação para uma distribuição separável no espaço de fase $[\rho(x, x)\tilde{\rho}(k, k)]$ [44], como

$$\begin{aligned} s_t(\Lambda) &= - \int \int dx dk [\rho(x, x)\tilde{\rho}(k, k)] \ln[\rho(x, x)\tilde{\rho}(k, k)] \\ &= s_x(\Lambda) + s_k(\Lambda) \geq 1 + \ln \pi, \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde a igualdade é obtida, por exemplo, para o estado fundamental do oscilador harmônico.

Na Fig. 4.3 exibimos a relação de incerteza entrópica como função da constante de acoplamento com o ambiente Λ para os mesmos parâmetros usados anteriormente para a fenda-dupla. A curva contínua corresponde à entropia calculada para uma distribuição de probabilidades quântica e a tracejada para uma distribuição de probabilidades clássica, onde desconsideramos o termo de interferência. Novamente as entropias de Shannon calculadas a partir de uma distribuição de probabilidades quânticas tendem para o mesmo comportamento quando calculadas com densidades de probabilidades clássicas, o que corresponde a uma transição de um comportamento quântico para um comportamento clássico a partir de um determinado valor de Λ . Os resultados mostram que a evolução temporal como também a superposição produzida na fenda-dupla aumentam a relação entrópica acima de seu valor mínimo $1 + \ln \pi \simeq 2,1247$ nats.

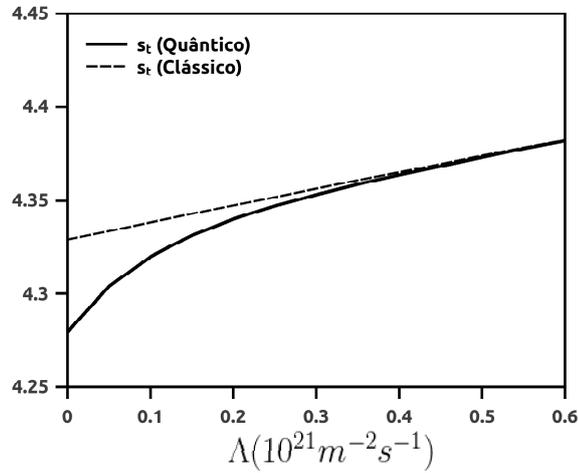


Fig. 4.3: Relação de incerteza entrópica como função da constante de acoplamento com o ambiente Λ . A curva contínua corresponde à entropia calculada para uma distribuição de probabilidades quântica e a tracejada para uma distribuição de probabilidades clássica, onde desconsideramos o termo de interferência.

Em seguida, vamos calcular a entropia de Shannon da função de Wigner como função da

constante de acoplamento com o ambiente Λ . Como a função de Wigner pode assumir valores negativos, a expressão de s_w , na Eq. 4.14, é uma quantidade complexa. Mas, felizmente, ela pode ser dividida em regiões onde a função de Wigner é positiva (W^+) e negativa (W^-) da seguinte maneira [44, 45]

$$s_w(\Lambda) = - \int \int dx dk W^+(x, k) \ln(W^+(x, k)) - \int \int dx dk W^-(x, k) \ln(|W^-(x, k)|) - i\pi \int \int dx dk W^-(x, k), \quad (4.16)$$

onde a parte imaginária é proporcional ao volume da parte negativa da função de Wigner produzida pela interferência [72] e utilizada como um indicador de não-classicalidade [48]. Calculamos numericamente a integral na Eq. 4.16 como função de Λ para os mesmos parâmetros usados anteriormente para a fenda-dupla. A precisão nas integrações foi analisada verificando a normalização da função de Wigner. As unidades das quantidades entrópicas são dadas em nats (unidade natural de informação). Com o intuito de obtermos um número real para esta quantidade para medir a localização/delocalização desta distribuição, podemos usar a parte real, imaginária ou valor absoluto deste número complexo.

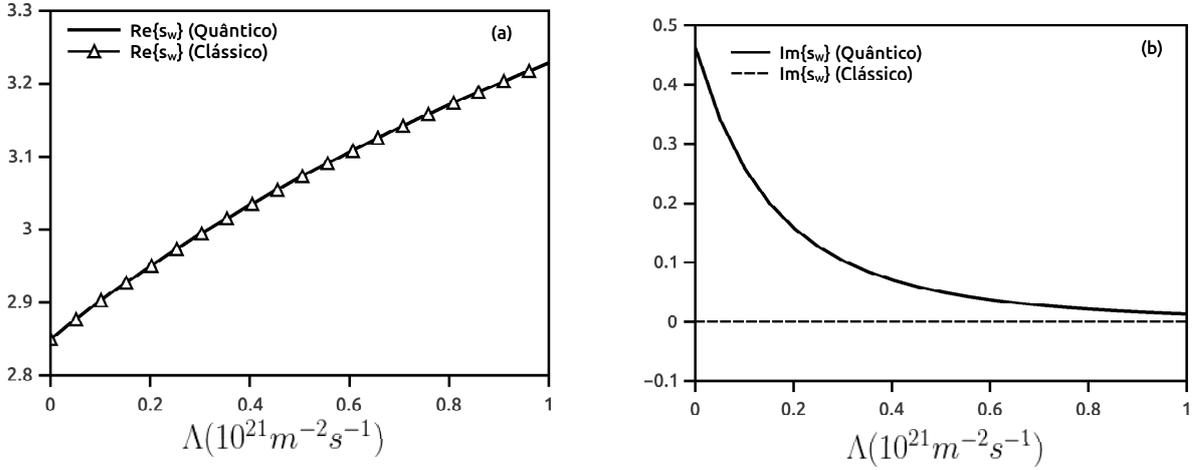


Fig. 4.4: (a) Parte real e (b) parte imaginária de s_w em função da constante de acoplamento com o ambiente Λ . Em (a) a parte real da entropia de Shannon da função de Wigner para uma distribuição quântica (linha contínua) e clássica (linha com triângulos), coincidem. Em (b) temos a parte imaginária da entropia de Shannon da função de Wigner para uma distribuição quântica (linha contínua) e clássica (linha tracejada). Note que a parte imaginária é nula para uma distribuição clássica.

Na Fig. 4.4 (a) e Fig. 4.4 (b) temos a parte real e imaginária de s_w em função da constante de

acoplamento com o ambiente Λ , respectivamente. Em (a) a parte real da entropia de Shannon da função de Wigner para uma distribuição quântica (linha contínua) e clássica (linha com triângulos), coincidem. Em (b) temos a parte imaginária da entropia de Shannon da função de Wigner para uma distribuição quântica (linha contínua) e clássica (linha tracejada). Note que a parte imaginária é nula para uma distribuição clássica, o que implica que o volume da parte negativa da função de Wigner é nulo, ou seja, a função de Wigner não exibe partes negativas para uma distribuição clássica, podendo assim ser interpretada como um genuína distribuição de probabilidades no espaço de fase. Portanto, a parte real de s_w não serve para distinguir uma distribuição clássica de uma distribuição quântica, no espaço de fase, como função do efeito do ambiente. Por outro lado, a parte imaginária carrega uma excelente distinção entre as distribuições quântica e clássica em função do efeito do ambiente. O volume máximo ocorre para um estado puro com $\Lambda = 0$ e o mínimo para $\Lambda \rightarrow \infty$, que coincide com o valor obtido para uma distribuição clássica. Este resultado foi usado no capítulo anterior para mostrar a transição quântico-clássico produzida pela descoerência.

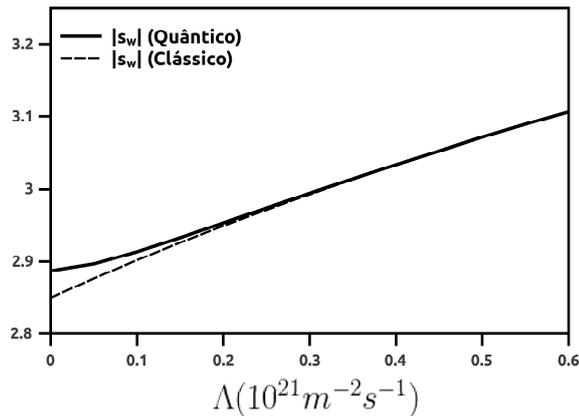


Fig. 4.5: Valor absoluto de s_w em função da constante de acoplamento com o ambiente Λ . A curva contínua corresponde à entropia calculada para uma distribuição de probabilidades quântica e a tracejada para uma distribuição de probabilidades clássica, onde desconsideramos o termo de interferência.

Na Fig. 4.5 exibimos o valor absoluto de s_w em função da constante de acoplamento com o ambiente Λ para os mesmos parâmetros usados anteriormente para a fenda-dupla. A curva contínua corresponde à entropia calculada para uma distribuição de probabilidades quântica e a tracejada para uma distribuição de probabilidades clássica, onde desconsideramos o termo de interferência. Podemos observar que o valor absoluto de s_w também serve para distinguir uma distribuição clássica de uma distribuição quântica, no espaço de fase, como função da descoerência. Os resultados mostram que assim como no espaço das posições e dos momentos,

no espaço de fase a entropia cresce como função de Λ , que é indicativo de uma distribuição de Wigner mais delocalizada, associada com uma diminuição na região de sobreposição entre os pacotes de onda.

4.2 Informação Mútua

Da teoria da informação, informação mútua fornece uma maneira de medir a dependência ou correlação estatística entre variáveis. Se duas variáveis são independentes, então sua informação mútua é nula. Se as variáveis são fortemente dependentes, então a informação mútua é grande. A informação mútua entre duas variáveis é definida como sendo a diferença nas entropias de Shannon de uma e de duas variáveis, e é uma medida da distância estatística entre uma distribuição conjunta e uma distribuição separável formada pelo produto de suas marginais [44]. Intuitivamente ela nos informa o quanto o conhecimento de uma variável aleatória nos diz sobre a outra.

A informação mútua usando a função de Wigner pode ser definida como,

$$I_{xk}(\Lambda) = \int \int dx dk W(x, k) \ln \frac{W(x, k)}{\rho(x, x) \tilde{\rho}(k, k)} = s_x + s_k - s_w = s_t - s_w. \quad (4.17)$$

As possíveis definições (de valor real) para a entropia de Shannon da função de Wigner na seção anterior, nos permite diferentes definições para a informação mútua, por exemplo, $|s_t| - |s_w|$ ou $|s_t - s_w|$ [44].

Na Fig. 4.6 (a) temos a informação mútua definida por $I_{xk} = |s_t| - |s_w|$ e na Fig. 4.6 (b) temos a informação mútua definida por $I_{xk} = |s_t - s_w|$ como função da constante de acoplamento com o ambiente Λ para os mesmos parâmetros usados anteriormente para a fenda-dupla. As curvas contínuas correspondem à entropia calculada para uma distribuição de probabilidades quântica e as tracejadas para uma distribuição de probabilidades clássica, onde desconsideramos o termo de interferência. Observamos que a partir de um determinado valor de Λ , as informações mútuas calculadas para uma distribuição de probabilidades quântica tendem ao mesmo comportamento de uma distribuição de probabilidades clássica.

Notamos que a correlação entre posição e momento, medida através da informação mútua, é reduzida devido a interação com o ambiente. Como a informação mútua é uma medida de quanto o conhecimento de uma variável nos diz sobre o valor da outra, o fato dela estar diminuindo em função de Λ , deve-se aos inúmeros espalhamentos que o sistema sofre com as moléculas do ambiente, e tais espalhamentos causam perda de informação sobre o conhecimento das variáveis de posição e momento, pois são totalmente aleatórios e incontrolláveis.

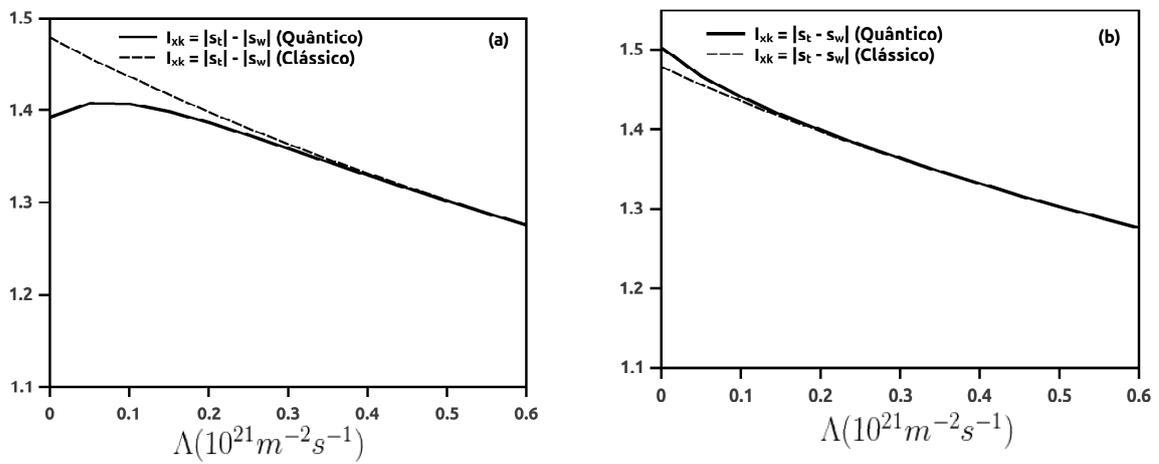


Fig. 4.6: (a) Informação mútua definida por $I_{xk} = |s_t| - |s_w|$ e (b) informação mútua definida por $I_{xk} = |s_t - s_w|$ como função da constante de acoplamento com o ambiente Λ . As curvas contínuas correspondem à entropia calculada para uma distribuição de probabilidades quântica e as tracejadas para uma distribuição de probabilidades clássica, onde desconsideramos o termo de interferência.

Capítulo 5

Conclusão

Estudamos o experimento de fenda-dupla com ondas de matéria incluindo efeitos de perda de coerência. Consideramos que uma fonte produz um pacote de ondas parcialmente coerente que propaga-se livremente a partir da fonte até a fenda-dupla. A partir da fenda-dupla até o detector incluímos o efeito do acoplamento com o ambiente produzido pelo espalhamento com moléculas do ar e calculamos a matriz densidade. A partir da matriz densidade, obtemos a intensidade e a função de Wigner no detector. Então, calculamos a intensidade relativa, a visibilidade, a previsibilidade e o volume da parte negativa da função de Wigner e estudamos seus comportamentos em função da constante de acoplamento com o ambiente. Observamos que a interação com o ambiente destrói o padrão de interferência e conseqüentemente reduz o volume da parte negativa da função de Wigner, o que nos leva a interpretar como sendo uma transição do comportamento quântico para um comportamento clássico.

Também calculamos a entropia de Shannon de posição, de momento e da função de Wigner para o experimento de fenda-dupla como função da constante e acoplamento com o ambiente Λ . Observamos que localização/delocalização de uma distribuição de probabilidade no espaço de posição, de momento e de fase, via entropia de Shannon, implica aumento/diminuição na região de sobreposição dos pacotes de onda, como pode ser observado pela redução no número de franjas de interferência com o aumento das entropias de Shannon. Portanto, a interação com o ambiente produz uma redução na região de sobreposição entre os pacotes de onda, nos espaços de posição, momento e de fase.

Calculamos a informação mútua com o intuito de estudar a correlação entre as variáveis de posição e momento, e observamos que ela é reduzida devido a interação com o ambiente. Como a informação mútua é uma medida de quanto o conhecimento de uma variável nos diz sobre o valor da outra, o fato dela está diminuindo em função de Λ , deve-se aos inúmeros espalhamentos que o sistema sofre com as moléculas do ambiente, e tais espalhamentos causam perda de informação

sobre o conhecimento das variáveis de posição e momento, pois são totalmente aleatórios e incontroláveis.

Capítulo 6

Perspectiva

Como é amplamente conhecido que estados do tipo gato de Schrödinger são bastantes sensíveis a perdas por descoerência, foi mostrado experimentalmente por Laurat [73] que uma possível maneira de reduzir tais perdas consiste em realizar uma compressão (*squeezing*) em tais estados de superposição. De forma específica, Laurat observou uma descoerência reduzida para uma superposição de estados coerentes ópticos. Como perspectivas pretendemos investigar se uma compressão em momento ou posição, sobre o estado inicial do nosso modelo teórico para ondas de matéria é capaz de reduzir os efeitos de descoerência, mantendo assim as características quânticas desses estados.

Pretendemos também analisar quais são os efeitos causados pela descoerência sobre o fator de Sorkin [74], que é um parâmetro que indica uma possível existência de trajetórias com *loops* exóticos em torno das fendas de um aparato de fenda-dupla de Young.

Referências Bibliográficas

- [1] N. Bohr. The Quantum Postulate and the Recent Development of Atomic Theory. *Nature*, 121:580–590, (1928).
- [2] T. Young. The Bakerian Lecture: On the Theory of Light and Colours. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 92:12–48, (1802).
- [3] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman lectures on physics. Vol. 3: Quantum Mechanics*. (1965).
- [4] C. Jönsson. Electron diffraction at multiple slits. *Am. Jour. Phys.*, 42(1):4–11, (1974).
- [5] A. Zeilinger, R. Gähler, C. G. Shull, W. Treimer, and W. Mampe. Single- and double-slit diffraction of neutrons. *Rev. Mod. Phys.*, 60:1067–1073, (1988).
- [6] O. Carnal and J. Mlynek. Young’s double-slit experiment with atoms: A simple atom interferometer. *Phys. Rev. Lett.*, 66:2689–2692, (1991).
- [7] P. Berman. *Atom Interferometry*. Academic, San Diego, (1997).
- [8] W. Schöllkopf and J. P. Toennies. Nondestructive mass selection of small van der waals clusters. *Science*, 266(5189):1345–1348, (1994).
- [9] O. Nairz, M. Arndt, and A. Zeilinger. Quantum interference experiments with large molecules. 71:319–325, 04 (2003).
- [10] H. W. Kroto, J. R. Heath, S. C. O’Brien, R. F. Curl, and R. E. Smalley. C60: Buckminsterfullerene. *Nature*, 318, (1985).
- [11] E. Wigner. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Phys. Rev*, 40:749–759, (1932).
- [12] G. A. Baker. Formulation of quantum mechanics based on the quasi-probability distribution induced on phase space. *Phys. Rev.*, 109:2198–2206, (1958).

- [13] J. E. Moyal. Quantum mechanics as a statistical theory. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 45(1):99–124, (1949).
- [14] A. J. Bracken, H.-D. Doebner, and J. G. Wood. Bounds on integrals of the wigner function. *Phys. Rev. Lett.*, 83:3758–3761, (1999).
- [15] K. Husimi. Some formal properties of the density matrix. *Proc. Phys. Math. Soc. of Jpn.*, 22(4):264–314, (1940).
- [16] R. J. Glauber. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Phys. Rev.*, 131:2766–2788, (1963).
- [17] E. C. G. Sudarshan. Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams. *Phys. Rev. Lett.*, 10:277–279, (1963).
- [18] R.L. Hudson. When is the wigner quasi-probability density non-negative? *Rep. Math Phys*, 6(2):249 – 252, (1974).
- [19] M. Hillery, R.F. O’Connell, M.O. Scully, and E.P. Wigner. Distribution functions in physics: Fundamentals. *Physics Reports*, 106(3):121 – 167, (1984).
- [20] J. Bertrand and P. Bertrand. A tomographic approach to wigner’s function. *Foundations of Physics*, 17(4):397–405, (1987).
- [21] K. Vogel and H. Risken. Determination of quasiprobability distributions in terms of probability distributions for the rotated quadrature phase. *Phys. Rev. A*, 40:2847–2849, (1989).
- [22] D. T. Smithey, M. Beck, M. G. Raymer, and A. Faridani. Measurement of the wigner distribution and the density matrix of a light mode using optical homodyne tomography: Application to squeezed states and the vacuum. *Phys. Rev. Lett.*, 70:1244–1247, (1993).
- [23] G. Breitenbach, T. Müller, S. F. Pereira, J.-Ph. Poizat, S. Schiller, and J. Mlynek. Squeezed vacuum from a monolithic optical parametric oscillator. *J. Opt. Soc. Am. B*, 12(11):2304–2309, (1995).
- [24] Ke-Hsueh Li. Physics of open systems. *Physics Reports*, 134(1):1 – 85, (1986).
- [25] H. D. Zeh. On the interpretation of measurement in quantum theory. *Foundations of Physics*, 1(1):69–76, (1970).
- [26] W. H. Zurek. Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse? *Phys. Rev. D*, 24:1516–1525, (1981).

- [27] W. H. Zurek. Environment-induced superselection rules. *Phys. Rev. D*, 26:1862–1880, (1982).
- [28] E. Joos and H. D. Zeh. The Emergence of classical properties through interaction with the environment. *Z. Phys.*, B59:223–243, (1985).
- [29] M. A. Schlosshauer. *Decoherence and the Quantum-To-Classical Transition*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1st edition, (2007).
- [30] W. H. Zurek. Frontiers of nonequilibrium statistical physics. *Springer US*, 1, (1986).
- [31] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, and D. J. Wineland. A “schrödinger cat” superposition state of an atom. *Science*, 272(5265):1131–1136, (1996).
- [32] C. J. Myatt, B. E. King, Q. A. Turchette, C. A. Sackett, D. Kielpinski, W. M. Itano, C. Monroe, and D. J. Wineland. Decoherence of quantum superpositions through coupling to engineered reservoirs. *Nature*, 403:269, (2000).
- [33] M. J. McDonnell, J. P. Home, D. M. Lucas, G. Imreh, B. C. Keitch, D. J. Szwer, N. R. Thomas, S. C. Webster, D. N. Stacey, and A. M. Steane. Long-lived mesoscopic entanglement outside the lamb-dicke regime. *Phys. Rev. Lett.*, 98:063603, (2007).
- [34] H-Y. Lo, D. Kienzler, L. de Clercq, M. Marinelli, V. Negnevitsky, B. C. Keitch, and J. P. Home. Spin-motion entanglement and state diagnosis with squeezed oscillator wavepackets. *Nature*, 521:336, (2015).
- [35] D. Kienzler, C. Flühmann, V. Negnevitsky, H.-Y. Lo, M. Marinelli, D. Nadlinger, and J. P. Home. Observation of quantum interference between separated mechanical oscillator wave packets. *Phys. Rev. Lett.*, 116:140402, (2016).
- [36] A. Ourjoumtsev, H. Jeong, R. Tualle-Brouiri, and P. Grangier. Generation of optical “schrödinger cats” from photon number states. *Nature*, 448:784, (2007).
- [37] J. Etesse, M. Bouillard, B. Kanseri, and R. Tualle-Brouiri. Experimental generation of squeezed cat states with an operation allowing iterative growth. *Phys. Rev. Lett.*, 114:193602, (2015).
- [38] K. Huang, H. Le Jeannic, J. Ruaudel, V. B. Verma, M. D. Shaw, F. Marsili, S. W. Nam, E Wu, H. Zeng, Y.-C. Jeong, R. Filip, O. Morin, and J. Laurat. Optical synthesis of large-amplitude squeezed coherent-state superpositions with minimal resources. *Phys. Rev. Lett.*, 115:023602, (2015).

- [39] B. Vlastakis, G. Kirchmair, Z. Leghtas, S. E. Nigg, L. Frunzio, S. M. Girvin, M. Mirrahimi, M. H. Devoret, and R. J. Schoelkopf. Deterministically encoding quantum information using 100-photon schrödinger cat states. *Science*, 342(6158):607–610, (2013).
- [40] S. Deléglise, I. Dotsenko, C. Sayrin, J. Bernu, M. Brune, J-M. Raimond, and S. Haroche. Reconstruction of non-classical cavity field states with snapshots of their decoherence. *Nature*, 455:510, (2008).
- [41] S. Haroche and J. M. Raimond. *Exploring the Quantum: Atoms, Cavities, and Photons*. Oxford University Press, Oxford, (2006).
- [42] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 27(3):379–423, (1948).
- [43] V. Majerník and T. Opatrný. Entropic uncertainty relations for a quantum oscillator. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 29(9):2187, (1996).
- [44] H. G. Laguna and R. P. Sagar. Shannon entropy of the wigner function and position-momentum correlation in model systems. *International Journal of Quantum Information*, 08(07):1089–1100, (2010).
- [45] H. G. Laguna and R. P. Sagar. Phase-space position-momentum correlation and potentials. *Entropy*, 15(5):1516–1527, (2013).
- [46] V. Majerník and E. Majerníková. Standard and entropic uncertainty relations of the finite well. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 35(27):5751, (2002).
- [47] O. R. de Araujo, L. S. Marinho, H. A. S. Costa, Marcos Sampaio, and I. G. da Paz. Shannon entropy and interference in the double-slit experiment with matter waves. *Modern Physics Letters A*, 0(0):1950017, 2019.
- [48] A. Kenfack and K. Zyczkowski. Negativity of the wigner function as an indicator of non-classicality. volume 6, (2004).
- [49] W. H. Zurek. Decoherence and the transition from quantum to classical. *Phys. Today*, 44, (1991).
- [50] F. Petruccione H. P. Breuer. The theory of open quantum systems. *OUP Oxford*, 1, (2002).
- [51] R. Dümcke and H. Spohn. The proper form of the generator in the weak coupling limit. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, 34(4):419–422, (1979).

- [52] I. S. Tupitsyn, N. V. Prokof'ev, and P. C. E. Stamp. Effective hamiltonian in the problem of a “central spin”; coupled to a spin environment. *International Journal of Modern Physics B*, 11(24):2901–2926, (1997).
- [53] K Hornberger. Master equation for a quantum particle in a gas. *Phys. Rev. Lett.*, 97:060601, (2006).
- [54] K Hornberger and J E. Sipe. Collisional decoherence reexamined. *Phys. Rev. A*, 68:012105, (2003).
- [55] K Hornberger, S Uttenthaler, B Brezger, L Hackermüller, M Arndt, and A Zeilinger. Collisional decoherence observed in matter wave interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, 90:160401, (2003).
- [56] O. Nairz and A. Arndt, M. Zeilinger. Experimental verification of the heisenberg uncertainty principle for fullerene molecules. *Phys. Rev. A*, 65:032109, (2002).
- [57] De Broglie, L. Recherches sur la théorie des quanta. *Ann. Phys.*, 10(3):22–128, (1925).
- [58] C.J.S. Ferreira, L.S. Marinho, T.B. Brazil, L.A. Cabral, J.G.G. de Oliveira Jr., M.D.R. Sampaio, and I.G. da Paz. Gouy phase and visibility in the double-slit experiment. *Annals of Physics*, 362:473 – 481, (2015).
- [59] R. P. Feynman and A. R. Hibbs. *Quantum mechanics and path integrals*. International series in pure and applied physics. (1965).
- [60] G. Glionna, A. H. Blin, B. Hiller, M. C. Nemes, Marcos Sampaio, and A. F. R. de Toledo Piza. Dispersion and uncertainty in multislit matter wave diffraction. (2008).
- [61] L.E. Ballantine. *Quantum Mechanics: A Mordern Development*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., (1998).
- [62] S. R. A. Salinas. *Introdução à Física Estatística*. Edusp - Editora da Universidade de São Paulo, (1999).
- [63] C. C. Gerry and P. L. Knight. *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, New York, (2005).
- [64] D. M. Greenberger and A. Yasin. Simultaneous wave and particle knowledge in a neutron interferometer. *Physics Letters A*, 128(8):391 – 394, (1988).

- [65] L. S. Marinho, H. A. S. Costa, Marcos Sampaio, and I. G. da Paz. Quantum-to-classical transition measure of large molecule diffraction. *EPL (Europhysics Letters)*, 122(5):50007, (2018).
- [66] I. G. da Paz, Rodolfo Soldati, L. A. Cabral, J. G. G. de Oliveira, and Marcos Sampaio. Poisson's spot and gouy phase. *Phys. Rev. A*, 94:063609, (2016).
- [67] A. Viale, M. Vicari, and N. Zanghi. Analysis of the loss of coherence in interferometry with macromolecules. *Phys. Rev. A*, 68, (2003).
- [68] U. Leonhardt. *Measuring The Quantum State of Light*. Cambridge University Press, (2005).
- [69] Wallas S. Nascimento and Frederico V. Prudente. Shannon entropy: A study of confined hydrogenic-like atoms. *Chemical Physics Letters*, 691:401 – 407, (2018).
- [70] V. Majerník and L. Richterek. Entropic uncertainty relations for the infinite well. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 30(4):L49, (1997).
- [71] V. Majerník, R. Charvot, and E. Majerníková. The momentum entropy of the infinite potential well. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 32(11):2207, (1999).
- [72] D. Dragoman. Phase-space interferences as the source of negative values of the wigner distribution function. *J. Opt. Soc. Am. A*, 17(12):2481–2485, (2000).
- [73] H. Le Jeannic, A. Cavallès, K. Huang, R. Filip, and J. Laurat. Slowing quantum decoherence by squeezing in phase space. *Phys. Rev. Lett.*, 120:073603, (2018).
- [74] I. G. da Paz, C. H. S. Vieira, R. Ducharme, L. A. Cabral, H. Alexander, and M. D. R. Sampaio. Gouy phase in nonclassical paths in a triple-slit interference experiment. *Phys. Rev. A*, 93:033621, (2016).