Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

# Existência e Unicidade de Solução Fraca para a Equação de Movimento Moderado de Fluidos de Maxwell e Kelvin-Voigt

**Leandro Silva Bittencourt**

**Teresina - 2018**

**Leandro Silva Bittencourt**

**Dissertação de Mestrado:**

# Existência e Unicidade de Solução Fraca para a Equação de Movimento Moderado de Fluidos de Maxwell e Kelvin-Voigt

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Alexandro Marinho Oliveira

**Teresina - 2018**

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**
**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ**
**CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

ATA DA DEFESA PÚBLICA DE DISSERTAÇÃO

No dia treze do mês de setembro do ano de dois mil e dezoito, às nove horas, no Auditório do Departamento de Matemática, desta Universidade, reuniram-se os membros da Banca Examinadora composta pelos professores: Dr. **Alexandro Marinho Oliveira** (Presidente e Orientador-UFPI), Dr. **Marcondes Rodrigues Clark** (membro interno), Dr. **Ronald David Ramos Guardia** (membro externo ), a fim de julgar a dissertação do mestrando **Leandro Silva Bittencourt**, intitulada "*Existência e Unicidade de Solução Fraca para a Equação de Movimento Moderado de Fluidos de Maxwell e de Kelvin-Voigt*", para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Aberta a sessão pelo presidente, coube ao candidato na forma regimental, expor o tema de sua dissertação dentro do tempo regulamentar. Após haver analisado o referido trabalho e arguido o candidato, os membros da Banca Examinadora deliberaram pela **APROVAÇÃO** do mesmo. Nada mais havendo a tratar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora.

TERESINA, 13 DE SETEMBRO DE 2018.

**Recomendações da Banca:**

Aprovado

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Alexandro Marinho Oliveira - presidente

Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark - membro interno

Prof. Dr. Ronald David Ramos Guardia - membro externo

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

B624e Bittencourt, Leandro Silva.
Existência e unicidade de solução fraca para a equação de movimento moderado de fluídos de Maxwell e Kelvin-Voigt / Leandro Silva Bittencourt. – Teresina, 2018.
53f.: il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2018.
Orientador: Prof. Dr. Alexandre Marinho Oliveira

1. Fluídos Não-newtonianos . 3. Modelo de Maxwell. 4. Modelo de Kelvin-Voigt I. Título.

CDD 510

*A todos aqueles que já tiveram um momento de fraqueza. Não vai durar para sempre, então não deixe isso afetar o que há de melhor em você.*

# Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador professor Alexandro Marinho Oliveira pelo acompanhamento desde o início de minha graduação até aqui e aos professores que me incentivaram a ingressar no mestrado no final da mesma, em especial aos meus mestres Cleyton Natanael, Israel Evangelista e Renan de Oliveira.

Agradeço aos professores dos quais fui aluno no mestrado, pelo aprendizado. Em especial, à professora Franciane Oliveira, ao professor Marcondes Rodrigues Clark e ao atual coordenador José Francisco Alves de Oliveira. Estes tiveram contribuição direta neste trabalho, não apenas pelas disciplinas que ministraram, mas pelas lições ensinadas.

Agradeço também aos colegas do mestrado que me ajudaram de alguma maneira: Antônio Luís, Rafael Carvalho, Cícero Nadiel, Lucas Cassiano, Francimauro, Arilson e Márcio Brito. Todos agradecemos à Capes e ao Cnpq pelo apoio financeiro.

Além de todos esses, sou grato sobretudo ao Deus que se revelou para mim nesse último ano, que deu sentido às coisas que antes eu não entendia, iluminando minha mente e possibilitando que eu as aceitasse e voltasse a entender a Matemática que eu já não mais entendia.

Agradeço à minha mãe, por ter me compreendido no começo, perdoado minhas atitudes falhas e imaturas e me dado força quando estive prestes a desistir, sendo minha razão de continuar.

Agradeço ao meu amigo Kelvin Jhonson por ter me acolhido, pelas nossas conversas, pela sua ajuda e pela paciência durante a nossa convivência.

Por fim, em especial, agradeço àquela que estava ali desde o começo, bem antes disso tudo, acreditando em mim e que pediu para que eu estudasse pensando nela. Talvez ela seja o sentido disso.

# Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar os modelos físicos que descrevem o movimento de fluidos não-newtonianos a partir de hipóteses sobre a relação entre o tensor de tensões de desvio e o tensor de deformações linearizado do fluido. Em particular, demonstra-se, por meio do método de Lions-Faedo-Galerkin, existência e unicidade de solução fraca para os sistemas de equações de movimento moderado de fluidos viscoelásticos descritos pelos modelos de Maxwell e de Kelvin-Voigt. Neste último, obtém-se também regularidade da solução através de uma formulação variacional do problema de Stokes.

**Palavras-Chaves:** Navier-Stokes, Fluidos não-newtonianos, Solução Fraca, Modelo de Maxwell, Modelo de Kelvin-Voigt

# Abstract

The aim of this work is to study the physical models that describe the motion of non-newtonian fluids from assumptions concerning the relation between stress deviator tensor and the linear strain tensor of the fluid. In particular, it is established, by means of Lions-Faedo-Galerkin method, existence and uniqueness of weak solution to the systems of equations on moderated motion of viscoelastics fluids described by Maxwell's model and Kelvin-Voigt's model. In this last one, it is also obtained regularity to the solution, by means of a variacional aproach of Stokes' problem.

**Key-words:** Navier-Stokes, Non-newtonian Fluids, Weak Solution, Maxwell's Model, Kelvin-Voigt's Model

# Sumário

# Capítulo 1

# Introdução

## 1.1 O Modelo de Navier-Stokes

Considere uma região do $\mathbb{R}^3$ ocupada por um fluido em movimento. Suponha-se que esta região seja um aberto limitado $\Omega$, cuja fronteira representa-se por $\Gamma$, a qual admite-se bem regular. Assim, $\Gamma$ é fronteira de uma parte aberta, conexa, limitada $\Omega$ do $\mathbb{R}^3$ contendo o fluido. A normal externa à $\Gamma$ representa-se por $\eta$. Entende-se por fluxo do fluido através de $\Gamma$ a massa de fluido que atravessa $\Gamma$ na direção da normal $\eta$ na unidade de tempo. Considere um elemento $d\Gamma$ de $\Gamma$ e seja $u$ o vetor velocidade das partículas, isto é, $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ onde $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Representando por $\rho(x,t)$ a densidade do fluido, resulta que o fluxo de fluido através de $\Gamma$ na direção da normal é

$$\int_\Gamma \rho(x,t)u(x,t)\eta \, d\Gamma.$$

A massa de fluido no interior de $\Omega$ é dada por

$$M(t) = \int_\Omega \rho(x,t)\, dx.$$

A taxa de variação da massa $M(t)$ em relação ao tempo é dada por

$$\frac{dM}{dt} = \int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx.$$

O fluxo de fluido que entra em $\Omega$ através de $\Gamma$ é

$$-\int_\Gamma \rho(x,t)u(x,t)\eta \, d\Gamma,$$

na unidade de tempo. Assim, do princípio da conservação da massa, obtém-se

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx + \int_\Gamma \rho(x,t)u(x,t)\eta \, d\Gamma = 0$$

em cada instante. Do teorema da divergência, obtém-se

$$\int_\Omega \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho u) \right\} dx = 0$$

para cada aberto limitado. Logo, tem-se a *equação da continuidade*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho u) = 0.$$

Pela regra da cadeia, tem-se

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot u.$$

Sendo $div(\rho u) = \rho\, div(u) + \nabla \rho \cdot u$, tem-se da equação da continuidade que

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\, div(u) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Sendo $\rho$ uma constante, porque supõe-se o fluido incompressível e homogêneo, obtém-se

$$div(u) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

O momento linear de $\Omega$, supondo-se $\rho = 1$, é

$$m(t) = \int_\Omega u(x,t)\, dx.$$

A taxa de variação do momento em relação ao tempo é

$$\frac{dm}{dt} = \int_\Omega \frac{du}{dt}\, dx.$$

Pela 2ª Lei de Newton, esta taxa deve ser igual à resultante das forças aplicadas em $\Omega$. Elas são de duas espécies:

(i) Volumétricas aplicadas em $\Omega$ de densidade $f(x,t) = (f_1(x,t), f_2(x,t), f_3(x,t))$.

(ii) Tensões internas e viscosidades na fronteira $\Gamma$ de $\Omega$ cujas componentes supôe-se da forma

$$F_i(x,t) = \sum_{j=1}^{3} \xi_{ij}(x,t)\eta_j, \quad i = 1,2,3,$$

onde $\eta_j$ representa as componentes do vetor unitário $\overrightarrow{\eta}$ da normal externa à fronteira $\Gamma$ e $\xi_{ij}(x,t)$ o *tensor de tensões de Cauchy*.

Do equilíbrio entre as forças e a variação do momento (2ª Lei de Newton), resulta que

$$\int_\Omega \frac{du}{dt} dx = \int_\Omega f(x,t) dx + \int_\Gamma F(x,t) d\Gamma. \tag{1.1}$$

**Observação 1.1.** *Alterações nas propriedades de um fluido em movimento podem ser medidas de duas maneiras diferentes. Pode-se medir uma determinada propriedade, quer pela realização da medição em um ponto fixo no espaço onde as partículas do fluido passam, ou seguindo uma porção de fluido ao longo da sua trajetória. A derivada de um campo no que diz respeito a uma posição fixa no espaço é chamada de* ***derivada Euleriana*** *enquanto a derivada segundo o movimento de uma porção do fluido é chamada de* ***derivada convectiva****.*

*A derivada convectiva é definida como*

$$\frac{du}{dt} := \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u. \tag{1.2}$$

*O primeiro termo do lado direito da equação acima é a derivada Euleriana ordinária, isto é, a derivada de $u$ em um ponto $(x_1, x_2, x_3)$ de referência fixo, representando mudanças da velocidade nesse ponto em relação ao tempo. Enquanto que o segundo termo representa uma quantidade de alterações no que diz respeito à posição. Esta derivada "especial" é, na realidade, a derivada ordinária da função $u = u(t, x_1, x_2, x_3)$ ao longo de um percurso na sequência do movimento do fluido e pode ser obtida facilmente através da aplicação da regra da cadeia.*

*Por exemplo, a medição das mudanças na velocidade do vento na atmosfera pode ser obtida com a ajuda de um* ***anemometer*** *em uma estação meteorológica ou montá-lo em um balão meteorológico. O anemometer, no primeiro caso, dá a medição da mudança da velocidade das partículas que se deslocam ao passar por um PONTO FIXO no espaço, enquanto que, no segundo caso, o instrumento está medindo mudanças na velocidade de uma PORÇÃO FIXA do fluido.*

$\square$

Substituindo (1.2) em (1.1) tem-se que

$$\int_\Omega \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right\} dx = \int_\Omega f(x,t) dx + \int_\Gamma F(x,t) d\Gamma. \tag{1.3}$$

Passando às componentes obtém-se:

$$\int_\Omega \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j \right\} dx = \int_\Omega f_i(x,t) dx + \int_\Gamma \sum_{j=1}^{3} \xi_{ij}(x,t) \eta_j d\Gamma, \tag{1.4}$$

$i = 1, 2, 3$.

Do teorema da divergência, segue-se que

$$\sum_{j=1}^{3} \int_\Gamma \xi_{ij}(x,t) \eta_j d\Gamma = \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial \xi_{ij}}{\partial x_j}(x,t) dx. \tag{1.5}$$

Substituindo (1.5) em (1.4) obtém-se

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u \cdot \nabla u_i \right\} dx = \int_{\Omega} f_i(x,t) dx + \sum_{j=1}^{3} \int_{\Omega} \frac{\partial \xi_{ij}}{\partial x_j}(x,t) dx \tag{1.6}$$

para $i = 1, 2, 3$ em cada instante $t$ e para cada $\Omega$. Daí, resulta que

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u \cdot \nabla u_i = f_i(x,t) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \xi_{ij}}{\partial x_j}(x,t) \tag{1.7}$$

para $i = 1, 2, 3$.

A equação (1.7) é chamada de **equação do momentum de Cauchy**. O princípio da tensão de Cauchy afirma que, quando sobre um meio contínuo agem forças, isto é, forças na superfície e no interior, existem reações internas (forças), ao longo de todo o meio, agindo entre os pontos do material. Com base neste princípio, Cauchy demonstrou que o estado de tensão em um ponto do meio está completamente definido pelas nove componentes de um tensor cartesiano de segunda ordem denominado *tensor de tensões de Cauchy*, dado por

$$(\xi_{ij})_{3\times 3} = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \xi_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \xi_{33} \end{pmatrix}$$

onde $\xi_{ii}$ são as tensões normais e $\tau_{ij}$ são as tensões de corte. Este tensor é decomposto em dois:

$$(\xi_{ij})_{3\times 3} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_{11}+p & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \xi_{22}+p & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \xi_{33}+p \end{pmatrix} = -pI + (\sigma_{ij})_{3\times 3}$$

onde $I$ é matriz identidade $3 \times 3$, $p = -\frac{1}{3}(\xi_{11} + \xi_{22} + \xi_{33})$ é a pressão do fluido e $(\sigma_{ij})_{3\times 3}$ na equação acima é chamado de **tensor de tensões de desvio**. Mais detalhes podem ser vistos em Batchelor [2].

Logo,

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \xi_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

Assim, a equação (1.7) pode ser escrita como

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u \cdot \nabla u_i = f_i(x,t) - \frac{\partial p}{\partial x_i} + div(\sigma_i)$$

para $i = 1, 2, 3$.
Escrevendo de modo compacto a equação anterior, obtém-se

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = f(x,t) - \nabla p + div(\sigma)$$

Portanto, o movimento de fluidos incompressíveis é descrito pelo sistema de equações

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u + \nabla p = div(\sigma) + f(x,t), \; x \in \Omega, \;\; t > 0, \\ &div(u) = 0, \; x \in \Omega, \;\; t > 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

onde $\sigma = (\sigma_{ij})_{3\times 3}$ é o tensor de tensões de desvio, $tr\,\sigma = 0$, $p$ é a pressão do fluido e $f$ é a força externa. A equação acima ainda está incompleta. Para a conclusão, é necessário formular hipóteses sobre a forma de $\sigma$, ou seja, necessita-se de uma lei constitutiva para o tensor tensões, que pode ser obtida para uma família de fluidos específicos.

A introdução em (1.8) do divergente do tensor de tensões $\sigma$ tem o propósito de considerar reações que surgem no fluido durante seu movimento. Estabelecendo, por meio das **Leis de Hooke Generalizadas**, a relação entre $\sigma$ e o tensor de deformações linearizado $D = (D_{ij}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ e suas derivadas, tem-se assim o tipo de fluido. Uma tal relação entre $\sigma$ e $D$ é o que chama-se de **equação reológica** ou uma **equação de estado** (veja por exemplo Serrin [12] e Clifford [6]). O exemplo mais simples de uma equação reológica correspondendo a um fluido incompressível ideal é a equação $\sigma = 0$ e, neste caso, o movimento de um fluido incompressível ideal é descrito pela equação de Euler

$$\left| \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u + \nabla p = f \\ &div(u) = 0. \end{aligned} \right. \tag{1.9}$$

O axioma de Stokes (veja Serrin [12] e Ladyzhenskaya [18]) constitui o sistema mais conhecido entre todos os axiomas que descrevem o movimento de fluidos viscosos. Um fluido o qual é definido pela equação que satisfaz o axioma de Stokes são ditos *fluidos de Stokes*. Para tais fluidos incompressíveis a equação de estado tem a forma (veja [12]-[18])

$$\sigma = \alpha D + \beta D^2, \tag{1.10}$$

onde $\alpha$ e $\beta$ são funções específicas.

Se, em (1.10), $\alpha \equiv constante = 2\nu > 0$ e $\beta \equiv 0$, tem-se a *Lei de Newton para fluidos viscosos*, dada por

$$\sigma = 2\nu D. \tag{1.11}$$

Um fluido definido pela equação (1.11) é dito um *fluido newtoniano*. Dessa relação segue-se que $tr\, D = tr\, \nabla u = 0$, onde $\nabla u$ representa a matriz jacobiana $\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$. Além disso, tem-se que $div\,(2D) = div\left[\nabla u + (\nabla u)^t\right] = \Delta u + \nabla(tr\, \nabla u) = \Delta u$. Assim, substituindo (1.11) em (1.8), obtém-se a equação de movimento de um fluido newtoniano, o qual é chamada de equação de Navier-Stokes:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p = f \\ \\ \qquad\qquad div(u) = 0. \end{array} \right. \tag{1.12}$$

A constante $\nu$ é chamada de coeficiente de viscosidade cinemática.

Em mais de um século e meio o modelo de fluido newtoniano tem sido o modelo básico de um fluido incompressível e viscoso tornando-se possível descrever fluxos de velocidades moderadas para fluidos incompressíveis e viscosos encontrados na prática. Entretanto, até mesmo antes do século XIX se sabia que existiam fluidos incompressíveis e viscosos não sujeitos à lei de Newton definida em (1.11), como vê-se a seguir.

Os primeiros modelos de tais fluidos nos quais se leva em conta as propriedades elásticas do fluido, subsequentemente chamados de *fluidos viscoelásticos*, foram propostos no século XIX por Maxwell [10] e [11], Kelvin [17], Voigt [40] e [41] e foram desenvolvidos na metade do século XX para uma extensão considerável por Oldroyd [23]-[26].

O primeiro a propor uma relação entre o tensor de tensões $\sigma$ e o tensor de deformações $D$ foi Maxwell, que afirmou ser possível contruir uma teoria invariante não linear de fluidos baseando-se em uma analogia com sistemas mecânicos envolvendo associações de molas e amortecedores. De fato, um elemento de Maxwell é constituído de uma mola (elemento elástico) e um amortecedor (elemento viscoso) em série, conforme a figura mostrada a seguir.

A constante da mola é chamada de $G$. A força $\sigma_1$ na mola é $G\gamma_1$, onde $\gamma_1$ é a deformação da mola. A força $\sigma_2$ no amortecedor é $\eta\left(\dfrac{\partial \gamma_2}{\partial t}\right)$ onde $\eta$ é a viscosidade e $\left(\dfrac{\partial \gamma_2}{\partial t}\right)$ é a taxa de variação da deformação $\gamma_2$ no amortecedor. Temos que a deformação total é $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ e $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, pois os elementos estão em série. Logo, a taxa de deformação total é

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_1/\partial t}{G} + \frac{\sigma_2}{\eta} = \frac{\partial \sigma/\partial t}{G} + \frac{\sigma}{\eta}.$$

Assim,

$$\lambda \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma = \eta \frac{\partial \gamma}{\partial t} \tag{1.13}$$

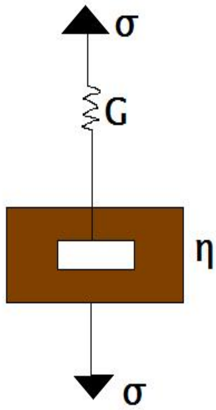


Figure 1.1: *Elemento de Maxwell*

onde $\lambda = \dfrac{\eta}{G}$ é o tempo de relaxamento.

Considerando a lei de Newton para fluidos viscosos (1.11), identifica-se por analogia a taxa de deformação $\dfrac{\partial \gamma}{\partial t}$ no elemento viscoso de Maxwell, com o tensor de deformação $D$ do fluido, mudando a interpretação física de $\sigma$ em (1.13) de força para tensão.

Dessa forma, de (1.13), obtém-se a seguinte relação entre o tensor de tensões e o tensor de deformações:

$$\lambda \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma = \eta D. \tag{1.14}$$

Resolvendo (1.14) com dado inicial $\sigma(0) = 0$, obtemos

$$\sigma(x,t) = \frac{\eta}{\lambda} \int_0^t e^{-\frac{(t-\xi)}{\lambda}} D(x,\xi) d\xi. \tag{1.15}$$

Substituindo a igualdade (1.15) em (1.8), tem-se a equação do modelo de um fluido de Maxwell, dado pelo sistema

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - \mu \int_0^t g(t-\xi) \Delta u(x,\xi) d\xi + \nabla p = f, \; x \in \Omega, \, t > 0 \tag{1.16}$$

com condição de incompressibilidade

$$div(u) = 0, \; x \in \Omega, \, t > 0 \tag{1.17}$$

e com as condições inicial e de fronteira

$$u(x,0) = u_0, \; x \in \Omega, \quad \text{e} \quad u(x,t) = 0, \; x \in \Gamma, \; t \geq 0, \tag{1.18}$$

onde $g(t) = e^{-\alpha t}$, $\mu = \frac{\eta}{2\lambda} > 0$, $\alpha = \lambda^{-1} > 0$. Para detalhes físicos e modelagem matemática consulte [1], [23], [29] e [43].

Um outro modelo interessante é o modelo proposto por Kelvin-Voigt onde a mola e o amortecedor estão em paralelo, como mostra a figura abaixo:

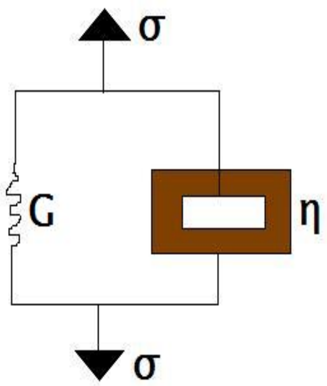


Figure 1.2: *Elemento de Voigt*

A força no elemento elástico é $G\gamma$ e a força no elemento viscoso é $\eta\dfrac{\partial\gamma}{\partial t}$. Como elas estão em paralelo, tem-se

$$\sigma = G\gamma + \eta\frac{\partial\gamma}{\partial t}. \tag{1.19}$$

Esse elemento é instantaneamente viscoso, pois a ação do amortecedor ocorre simultaneamente à deformação da mola. Se uma força constante for aplicada, o amortecedor freará o movimento e o sistema chegará ao equilíbrio com $\sigma = G\gamma$, como no corpo elástico.

Derivando a relação (1.19) com respeito a $t$ e introduzindo o tensor de deformação $D$ no papel de $\dfrac{\partial\gamma}{\partial t}$, após trocar nossa interpretação de força por tensão como no caso do fluido de Maxwell, obtém-se

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = GD + \eta\frac{\partial D}{\partial t}. \tag{1.20}$$

Resolvendo (1.20) com dado inicial $\sigma(0) = D(0) = 0$ e substituindo em (1.8), obtém-se a equação do modelo de um fluido de Kelvin-Voigt, dado pelo sistema

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\cdot\nabla u - \mu\int_0^t \Delta u(x,\xi)d\xi - \nu\Delta u + \nabla p = f,\ x\in\Omega,\ t>0 \tag{1.21}$$

com as mesmas condições iniciais e de fronteira (1.18) e de incompressibilidade (1.17), onde $\mu = \frac{G}{2}$ e $\nu = \frac{\eta}{2}$ são constantes positivas.

Os modelos de Maxwell e Kelvin-Voigt descrevem melhor sólidos que, sob certas condições, comportam-se como fluidos. Em vista disso, Oldroyd-Jeffreys propuseram um modelo em que se considera um amortecedor e um elemento de Kelvin-Voigt associados em série, conforme a figura abaixo:

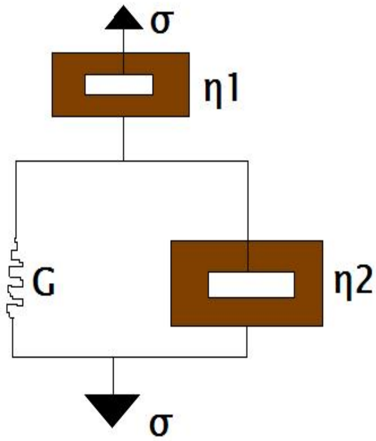


Figure 1.3: *Elemento de Oldroyd-Jeffreys*

A deformação total $\gamma$ no elemento de Oldroyd-Jeffreys é a soma da deformação no amortecedor $\eta_1$ e no elemento de Kelvin-Voigt. Logo,

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial t} \tag{1.22}$$

As forças em ambos os elementos são as mesmas, logo

$$\sigma = \eta_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} \quad \text{e} \quad \sigma = G\gamma_1 + \eta_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial t} \tag{1.23}$$

As equações (1.16) e (1.17) são três equações para $\sigma$, $\gamma$, $\gamma_1$ e $\gamma_2$. Após eliminar $\gamma_1$ e $\gamma_2$ obtém-se

$$\frac{\eta_1 + \eta_2}{G} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma = \eta_1 \left( \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\eta_2}{G} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \right) \tag{1.24}$$

O modelo de Oldroyd-Jeffreys é viscoso por que é puramente de deformação elástica do elemento. O elemento de Oldroyd-Jeffreys não pode sustentar uma força constante no equilíbrio, a força deve relaxar. A viscosidade está ativa em toda deformação. Este modelo é adequado para fluidos e não para sólidos.

Definindo-se o tempo de relaxamento

$$\lambda_1 = \frac{\eta_1 + \eta_2}{G}$$

e um retardamento no tempo

$$\lambda_2 = \frac{\eta_2}{G},$$

então, após trocar nossa interpretação de força e deformação, como no caso do fluido de Maxwell tem-se

$$\lambda_1 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma = \eta_1 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) \tag{1.25}$$

O modelo do fluido de Oldroyd-Jeffreys (veja [1], [23], [43]) pode predizer o relaxamento das tensões, bem como o retardamento de deformação, e por esse motivo este modelo se popularizou na descrição de suspensões de polímeros. De fato, para modelar o comportamento de uma solução diluída de um polímero em um solvente newtoniano, o tensor de tensões extra é frequentemente dividido em duas componentes: viscoelástico e puramente viscoso.

Neste sentido, em 1950, Oldroyd [23]-[26] propôs um modelo de fluido incompressível e viscoso o qual obedecia uma relação da forma

$$\left( 1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma = 2\nu \left( 1 + k\nu^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right) D, \tag{1.26}$$

onde $\lambda, \nu, k$ são constantes positivas com $\nu - \frac{k}{\lambda} > 0$. Aqui, $\nu$ denota a viscosidade cinemática, $\lambda$ é o tempo de relaxamento, $k$ representa o retardamento do tempo e $D = \frac{1}{2}\left(u_{ix_j} + u_{jx_i}\right)$ o tensor de deformações.

Resolvendo (1.26) com dados $\sigma(0) = D(0) = 0$, escreve-se a relação definida em (1.26) na forma de uma equação integral

$$\sigma(x,t) = 2k\lambda^{-1} D(x,t) + 2\lambda^{-1}(\nu - k\lambda^{-1}) \int_0^t e^{-\frac{(t-\xi)}{\lambda}} D(x,\xi) d\xi. \tag{1.27}$$

Substituindo a igualdade (1.27) em (1.8) tem-se a equação do modelo de um fluido de Oldroyd dado pelo sistema de equações integro-diferenciais

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - \mu \Delta u - \int_0^t g(t-\xi) \Delta u(x,\xi) d\xi + \nabla p = f, \ x \in \Omega, \ t > 0 \tag{1.28}$$

com condição de incompressibilidade

$$div(u) = 0, \ x \in \Omega, \ t > 0 \tag{1.29}$$

e com as condições inicial e de fronteira

$$u(x,0) = u_0, \ x \in \Omega, \quad \text{e} \quad u(x,t) = 0 \ x \in \Gamma, \ t \geq 0, \tag{1.30}$$

onde, $\mu = k\lambda^{-1} > 0$ e $g(t) = \beta e^{-\alpha t}$ onde $\beta = \lambda^{-1}\left(\nu - k\lambda^{-1}\right) > 0$ com $\alpha = \lambda^{-1}$. Para detalhes físicos e modelagem matemática consulte [1], [23], [29] e [43].

**Observação 1.2.** *Como a teoria dos fluidos viscoelásticos, por definição, descreve fluxos com velocidades moderadas, os sistemas apresentados admitem uma simplificação razoável. Isto é, negligencia-se (como usual na mecânica) a parte convectiva da velocidade:*

$$u \cdot \nabla u$$

$\square$

Existem muitos fluidos com esta microestrutura complexa, tais como fluidos biológicos, fluidos poliméricos, suspensões e cristais líquidos, os quais são usados frequentemente em processos industriais e mostram um comportamento viscoelástico que não pode ser descrito pelo modelo newtoniano clássico. Existem muitos autores trabalhando com este tipo de fluido, entre os principais, citamos Oskolkov [29], [30], [31], [32] e Pani [33], sendo que este último trabalha com o estudo numérico deste modelo.

O problema de valor inicial e o problema de Cauchy para as equações clássicas da hidrodinâmica de fluidos ideais e viscosos, isto é, a equação de Euler (1.9) e a equação de Navier-Stokes (1.12) têm sido estudados por um século e meio por diversos matemáticos famosos. Os trabalhos de Leray [13]-[15], Leray-Schauder [16], Sobolev [36], Hopf [8], [9], Tartar, Teman, Lions, Prodi e Ladyzhenskaya [18], [19] abriram a presente fase do estudo das equações da hidrodinâmica para um fluido viscoso. Esses matemáticos criaram métodos funcionais para resolver problemas da Física Matemática.

A característica desses métodos são a passagem a uma formulação generalizada do problema para uma na qual o teorema de existência e unicidade (se o último vale em uma formulação clássica) pode ser provado de forma mais simples, e o largo uso na prova do teorema de existência de ideias e métodos da Análise Funcional e da teoria das imersões dos espaços de funções.

## 1.2 O Propósito do Trabalho

O que propôe-se neste trabalho é estabelecer a existência e unicidade de soluções para os sistemas:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \mu\displaystyle\int_0^t \Delta u(x,\xi)\, d\xi - \nu\Delta u + \nabla p = f \quad \text{em} \quad Q \\ div(u) = 0 \quad \text{em} \quad Q, \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \end{array} \right. \tag{1.31}$$

e

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \mu\displaystyle\int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(x,\sigma)\, d\sigma + \nabla p = f \quad \text{em} \quad Q \\ div(u) = 0 \quad \text{em} \quad Q, \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \end{array} \right. \tag{1.32}$$

onde $u(x,t) = (u_1(x,t), ....., u_n(x,t))$ é o vetor velocidade do movimento moderado do fluido avaliado no ponto $(x,t)$, $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $p = p(x,t)$ é a pressão do fluido avaliada no ponto $(x,t)$, $u_0(x)$ é a velocidade inicial e $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ é dada por

$$g(t) = e^{-\alpha t}$$

com constantes $\alpha, \mu, \nu > 0$.

No capítulo 2, demonstra-se a existência e unicidade de solução fraca para o sistema (1.31). Mostra-se ainda que, assumindo mais regularidade nos dados iniciais, obtém-se mais regularidade para a solução (solução forte).

No capítulo 3, mostra-se apenas a existência e unicidade de solução fraca para o sistema (1.32), devido a ausência do termo linear no laplaciano $\Delta u$ que, juntamente com o gradiente de pressão $\nabla p$, caracteriza o problema de Stokes e possibilita obter a regularidade da solução.

Nas seções restantes deste capítulo inicial, são apresentados a seguir os conceitos básicos da teoria necessária, além de alguns resultados que serão utilizados neste trabalho. As demonstrações podem ser vistas em Milla e Medeiros [21] e [22].

## 1.3 Os espaços $L^p(\Omega)$

Nesta seção, todas as integrais tomadas sobre o conjunto $\Omega$ são integrais no sentido de *Lebesgue*. Supõe-se, portanto, serem conhecidas as noções básicas da Teoria da Medida, como conjuntos mensuráveis, funções mensuráveis a Lesbegue, etc.

**Definição 1.1.** *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável. Definimos o espaço das funções $L^p(\Omega)$ por*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}\,;\, ||f||_p < \infty\}$$

onde

$$||f||_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Para $p = \infty$, definimos

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}\,;\, ||f||_\infty < \infty\}$$

onde

$$||f||_p = \sup_{x \in \Omega} \operatorname{ess} |f(x)| = \inf\{C > 0\,; |f(x)| < C \text{ quase sempre}\}$$

**Definição 1.2.** *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $1 \leq p < \infty$. Dizemos que uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é localmente p-integrável em $\Omega$ e denotamos $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ se, para todo compacto $K \subset \Omega$, temos*

$$\left(\int_\Omega |f\chi_K(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

*onde $\chi_K$ é a função característica de $K$.*

**Teorema 1.1** (Desigualdade de Hölder)**.** *Suponhamos $1 < p, q < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e vale*

$$||fg||_1 \leq ||f||_p\, ||g||_q$$

**Teorema 1.2** (Desigualdade de Minkowiski)**.** *Sejam $1 < p < \infty$ e $f, g \in L^p(\Omega)$. Então*

$$||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$$

**Teorema 1.3.** *Os espaços $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, são de Banach.*

**Definição 1.3** (Convolução de funções). *Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Suponha que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, a integral*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$$

*exista, isto é, seja finita. Dizemos que a função $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ assim definida é a convolução de $f$ por $g$ e denotamos $u(x) = (f * g)(x)$.*

**Teorema 1.4.** *Sejam $f, g$ como acima e suponhamos que $f * g$ esteja definida. Então são válidas as seguintes propridades:*

*a) $f * g = g * f$ (Comutatividade);*

*b) $(f * g) * h = f * (g * h)$ (Associatividade);*

*c) Definindo $\tau_y f(x) = f(x-y)$ (tranlação de $f$ na direção de $y$), então $(\tau_y f) * g = f * (\tau_y g)$.*

**Teorema 1.5.** *Sejam $1 \leq p, q, r < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, então $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ e vale*

$$||f * g||_r \leq ||f||_p \, ||g||_q$$

**Definição 1.4** (Transformada de Fourier). *Seja $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Define-se a trasformada de Fourier de $u$ como sendo a função $\widehat{u}$ definida em $\mathbb{R}^n$ por*

$$\widehat{u}(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y,x)} u(x)\,dx$$

**Teorema 1.6.** *Seja $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. A sucessão de funções $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$, dada por*

$$u_k(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{B_k} e^{-i(y,x)} u(x)\,dx,$$

*onde $B_k$ é a bola aberta de $\mathbb{R}^n$ centrada na origem e raio $k$, é de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Do teorema acima, é natural então definir a transformada de Fourier de uma função $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ como a função $\widehat{u} = \lim\limits_{u \to \infty} u_k$. Claramente, se $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, essa definição coincide com a primeira.

**Teorema 1.7** (Plancherel). *A aplicação $u \mapsto \widehat{u}$ é uma isometria de $L^2(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

O teorema a seguir mostra como é possível introduzir a transformada de Fourier $\widehat{u}$ no lugar de $u$ através da chamada *transformada inversa de Fourier*. Essa ideia se revela útil em alguns problemas, tais como na resolução de certas equações diferenciais, que tornam-se mais fáceis de resolver quando a transformada de Fourier é introduzida.

**Teorema 1.8** (Transformada Inversa de Fourier). *Seja $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Se $\widehat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então*

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,y)} \widehat{u}(y)\,dy = u(x) \quad \textit{quase sempre em } \mathbb{R}^n.$$

## 1.4 Distribuições

**Definição 1.5.** *Sejam $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Define-se o suporte de $u$ como o fecho em $\Omega$ do conjunto dos pontos $x \in \Omega$ tais que $u(x) \neq 0$. Denota-se*

$$supp\ u = \overline{\{x \in \Omega\,;\, u(x) \neq 0\}}^{\Omega}.$$

Dizemos que uma $n$-upla de números inteiros não-negativos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é um multi-índice de ordem $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ e definimos o operador de derivação

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

O conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ das funções infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto contido em $\Omega$ constitui um espaço vetorial. Neste espaço estabelece-se a seguinte noção de convergência introduzida por Schwartz:

**Definição 1.6** (Noção de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$)**.** *Dizemos que uma sucessão $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge para $\varphi$ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:*

- *todas as $\varphi_m$ possuem suportes contidos em um mesmo compacto $K \subset \Omega$;*
- *$D^\alpha \varphi_m \to D^\alpha \varphi$ uniformemente em $K$ para todo multi-índice $\alpha$.*

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ munido da noção de convergência definida acima é denominado de *espaço das funções testes* e representado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

**Definição 1.7** (Distribuições sobre $\Omega$)**.** *Denomina-se distribuição sobre $\Omega$ toda aplicação linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ contínua com respeito à topologia de $\mathcal{D}(\Omega)$, no seguinte sentido: se $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge para $\varphi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $T(\varphi_m) \to T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.*

**Observação 1.3.** *Costuma-se denotar por $< T, u >$ o valor da distribuição $T$ aplicada em $u \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

**Exemplo 1.4.1.** *Seja $u \in L^p_{loc}(\Omega)$. O funcional $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por*

$$< T_u, \varphi > := \int_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx$$

*define uma distribuição sobre $\Omega$.*

**Definição 1.8.** *Consideremos o espaço vetorial de todas as distribuições sobre* $\Omega$. *Neste espaço, dizemos que a sucessão* $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *converge para* $T$, *quando* $T_m(\varphi) \to T(\varphi)$ *em* $\mathbb{R}$, $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. *Este espaço munido desta noção de convergência é denotado por* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Com a motivação do teorema seguinte, definiremos a derivada de distribuições.

**Teorema 1.9** (Green-Gauss)**.** *Seja* $\Omega \in \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto, limitado e com fronteira suave. Suponha que* $u \in C^1(\overline{\Omega})$. *Então:*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx = \int_\Gamma u\eta_i\, d\Gamma$$

*onde* $\eta_i$ *é a i-ésima coordenada da normal* $\eta$ *externa à* $\Gamma$.

**Corolário 1** (Fórmula de integração por partes de Gauss)**.** *Sejam* $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, *com* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto, limitado e com fronteira suave. Então:*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, dx = \int_\Gamma uv\eta_i\, d\Gamma - \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Em particular, tem-se que

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi\, dx, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

A motivação para o conceito de derivada fraca de uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ criado por Sobolev, se deve à relação acima, tendo sido este conceito posteriormente generalizado por Schwartz para distribuições quaisquer em $\mathcal{D}'(\Omega)$, como segue-se abaixo:

**Definição 1.9.** *Seja* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *e* $\alpha$ *um multi-índice. Define-se a derivada de indíce* $\alpha$ *de* $T$ *como a distribuição* $D^\alpha(T) : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$< D^\alpha T, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \varphi >, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

**Observação 1.4.** *Pela definição acima, segue-se que qualquer distribuição sobre* $\Omega$ *possui derivadas de todas as ordens.*

**Observação 1.5.** *A aplicação* $D^\alpha$: $\mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$, $T \mapsto D^\alpha(T)$, *é linear e contínua no sentido da convergência definida em* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

## 1.5 Os espaços $L^p(0,T;X)$

Nesta seção são apresentados alguns resultados sobre os espaços $L^p(0,T;X)$, onde $X$ é um espaço de Banach. Estes espaços são usados com frequência na teoria moderna de Equações Diferenciais Parciais onde, em geral, $X$ é algum espaço de Sobolev.

**Definição 1.10.** *Seja $X$ um espaço de Banach real e, para $T>0$, considere o intervalo $(0,T)\subset\mathbb{R}$ equipado com a medida de Lesbegue $dt$. O espaço $L^p(0,T;X)$ é definido como o espaço vetorial das (classes de) funções vetoriais $f:(0,T)\to X$, definidas quase sempre em $(0,T)$ e assumindo valores em $X$, fortemente mensuráveis e tais que a função real $t\mapsto ||f(t)||_X$ pertence a $L^p(0,T)$.*

Na definição dada acima, dizer que $f:(0,T)\to X$ é *fortemente mensurável* significa que existe uma sequência de funções simples $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f_n(t)\to f(t)$ quase sempre em $(0,T)$. Dizer que a função $t\mapsto ||f(t)||_X$ pertence a $L^p(0,T)$ significa que $\left(\int_0^T ||f(t)||_X^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$. Isto nos permite definir a seguinte norma em $L^p(0,T;X)$:

$$|f|_{L^p(0,T;X)}=\begin{cases}\left(\displaystyle\int_0^T ||f(t)||_X^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1\le p<\infty\,;\\ \displaystyle\sup_{0<t<T}\text{ess}\,||f(t)||_X\,, & \text{se } p=\infty.\end{cases}$$

A verificação de que as expressões acima definem normas em $L^p(0,T;X)$ é análoga à da norma de $L^p(0,T)$ (ou, mais geralmente, $L^p(\Omega)$, onde $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ é um aberto). Mostra-se também que, assim como $L^p(0,T)$, $L^p(0,T;X)$ é um espaço de Banach. Isso justifica o fato de termos utilizado a notação $L^p(0,T;X)$ logo de ínicio em vez de primeiramente definirmos os espaços $\mathcal{L}^p(0,T;X)$ e em seguida a relação de equivalência $g\sim f\Leftrightarrow g=f$ quase sempre, para só então considerar a classe

$$[f]=\{g\in\mathcal{L}^p(0,T;X)\,;\ g=f \text{ quase sempre}\}.$$

No caso em que $p=2$ e $X$ é um espaço de Hilbert, com o seguinte produto interno em $L^2(0,T;X)$:

$$((f,g))=\int_0^T (f(t),g(t))_X\,dt$$

onde $(\ ,\ )_X$ denota o produto interno em $X$. Ou seja, se $X$ é um espaço de Hilbert, então $L^2(0,T;X)$ é também um espaço de Hilbert. Como todo espaço de Hilbert é reflexivo, temos que, se $X$ é Hilbert, $L^2(0,T;X)$ é reflexivo. Embora simples, esse fato é fundamental na obtenção de solução de problemas elípticos pelo método de Lions-Faedo-Galerkin que será utilizado aqui para obter a solução dos problemas (1.31) e (1.32).

O resultado seguinte fornece uma relação entre as normas dos espaços $L^p(0,T;X)$ e $L^q(0,T;X)$, quando $X \hookrightarrow Y$, isto é, quando $X \subset Y$ e a aplicação de imersão $i : X \to Y$, $i(x) = x$, é contínua (ou seja, existe $C > 0$ tal que $||x||_Y \leq C||x||_X$, para todo $x \in X$).

**Teorema 1.10.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach, com $X \hookrightarrow Y$. Se $1 \leq q < p \leq \infty$, então*

$$L^p(0,T;X) \hookrightarrow L^q(0,T;X).$$

Em Análise Funcional, dado um espaço normado qualquer $(X, ||\cdot||)$, em geral estamos interessados na caracterização de seu dual, que é o espaço dos funcionais lineares e contínuos definidos em $X$, representado por $X'$. Demonstra-se que $X'$ é um espaço de Banach na norma definida por $|\varphi|_{X'} = \sup\limits_{||x|| \leq 1} |\varphi(x)|$. Para os espaços $L^p(\Omega)$, essa caracterização é dada pelo teorema seguinte:

**Teorema 1.11** (Teorema da representação de Riesz para $L^p(\Omega)$)**.** *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dada $g \in L^q(\Omega)$, considere o funcional $\varphi_g : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por*

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega fg\, dx.$$

*Note que, pela desigualdade de Hölder, $\varphi_g$ está bem-definida e é contínua. Além disso, $\varphi_g$ é linear. Logo, $\varphi_g \in [L^p(\Omega)]'$. A correspondência $\varphi : L^q(\Omega) \to [L^p(\Omega)]'$, $g \mapsto \varphi_g$ é um isomorfismo isométrico. Nesse caso, identifica-se $\varphi_g$ com $g$ e escreve-se $[L^p(\Omega)]' \simeq L^q(\Omega)$.*

Um resultado análogo pode ser provado para os espaços $L^p(0,T;X)$:

**Teorema 1.12.** *Seja $X$ um espaço de Banach e $X'$ o seu dual. Existe uma identificação entre os espaços $L^p(0,T;X)$ e $L^q(0,T;X')$, onde $p, q \in \mathbb{R}$, com $1 \leq p < \infty$, são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Isto é, $[L^p(0,T;X)]' \simeq L^q(0,T;X')$.*

Há uma notação bastante utilizada em Análise que deve ser esclarecida para evitar confusão. Trata-se de escrever $< f, x >$ em vez de $f(x)$, onde $f \in X'$ e $x \in X$. Nesse caso, diz-se que $< , >$ representa a *dualidade* entre $X'$ e $X$ e pode ser vista como uma forma bilinear definida em $X' \times X$.

Analogamente ao caso $L^p(0,T;X)$, $L^q(0,T;X')$ é o espaço vetorial das (classes de) funções vetoriais $u : (0,T) \to X'$, definidas quase sempre em $(0,T)$ com valores em $X'$, fortemente mensuráveis e tais que a função real $t \mapsto ||u(t)||_{X'}$ pertence a $L^q(0,T)$.

Sabendo disso, a dualidade entre os espaços $[L^p(0,T;X)]' = L^q(0,T;X')$ e $L^p(0,T;X)$ é definida como

$$< u, v >_{L^q(0,T;X'),L^p(0,T;X)} := \int_0^T < u(t), v(t) > dt$$

Vejamos que esta aplicação está bem definida. De fato, temos que $|< u(t), v(t) >| \leq ||u(t)||_{X'} ||v(t)||_X \ \forall t \in (0, T)$ e, portanto,

$$\left| \int_0^T < u(t), v(t) > dt \right| \leq \int_0^T |< u(t), v(t) >| \, dt \leq \int_0^T ||u(t)||_{X'} ||v(t)||_X \, dt \leq$$

$$\leq \left( \int_0^T ||u(t)||_{X'} \, dt \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_0^T ||v(t)||_X \, dt \right)^{\frac{1}{p}} = ||u||_{L^q(0,T;X')} ||v||_{L^p(0,T;X)}$$

o que mostra que a aplicação $t \mapsto < u(t), v(t) >_{X',X}$ pertence a $L^1(0, T)$.

Para finalizar, explica-se brevemente como esses espaços serão úteis para o nosso propósito. Sejam novamente $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $Q$ o cilindro $\Omega \times (0, T)$. Tomando $X = L^2(\Omega)$, afirma-se que existe uma identificação entre $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e $L^2(Q)$. Com efeito, se $u \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, então $u(t) \in L^2(\Omega) \ \ \forall t \in (0, T)$. Ou seja, para cada $t \in (0, T)$, $u(t)$ é uma função $u_t : \Omega \to \mathbb{R}$. Denotemos, para cada $t \in (0, T)$, $u_t(x)$ por $u(x, t)$, $x \in \Omega$. Dessa forma, $u$ se identifica com uma função $u : Q \to \mathbb{R}$. Além disso, temos que

$$|u|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \int_0^T ||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \, dt = \int_0^T \left( \int_\Omega |u(x, t)|^2 \, dx \right) dt$$

Utilizando o teorema de Fubini, concluímos que

$$|u|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \int_Q |u(x, t)|^2 \, dx \, dt = |u|^2_{L^2(Q)}.$$

Busca-se para os sistemas (1.31) e (1.32) uma função vetorial $u : Q \to \mathbb{R}^n$ e uma função real $p : Q \to \mathbb{R}$ que satisfaçam as condições dadas em algum sentido. Este será no sentido das distribuições em $Q$. As soluções serão obtidas num subconjunto de $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e, pela justificativa dada acima, podem ser vistas como funções de $L^2(Q)$.

## 1.6 Resultados Auxiliares

Nesta seção, são citados dois resultados que auxiliarão na obtenção da solução de (1.31) e (1.32). O primeiro deles é um importante teorema de existência local e prolongamento de solução para sistemas de equações diferenciais ordinárias e será usado para garantir a existência de solução para o problema aproximado de (1.31) e (1.32), primeira das etapas do método de Faedo-Galerkin.

### 1.6.1 Teorema de Carathéodory

Sejam $D$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ cujos elementos são denotados por $(x,t)$ onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$, e $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação. Diz-se que $f$ satisfaz as *condições de Carathéodory* sobre $D$ quando:

- $f(x,t)$ é mensurável em $t$ para cada $x$ fixo;
- $f(x,t)$ é contínua em $x$ para cada $t$ fixo;
- para cada compacto $U \subset D$, existe uma função real integrável $m_U(t)$ tal que $|f(x,t)| \leq |m_U(t)|$, para todo $(x,t) \in K$.

**Teorema 1.13** (Carathéodory)**.** *Seja $f : R \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação que satisfaz as condições de Carathéodory sobre $R = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}\,;\, |t-t_0| \leq a\,,\, |x-x_0| \leq b\}$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Então existe uma solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x'(t) = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

*sobre algum intervalo da forma $(t_0 - \beta, t_0 + \beta)$, para algum $\beta > 0$.*

**Corolário 2** (Prolongamento de solução)**.** *Sejam $D = [0,T] \times B$, com $T > 0$ e $B = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, |x| < b\}$ e $f$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre $D$. Seja $\varphi(t)$ uma solução de*

$$\begin{cases} x'(t) = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0, \quad |x| \leq b \end{cases}$$

*Se em qualquer intervalo $I$ onde $\varphi$ está definida valer $|\varphi(t)| \leq M < b, \forall\, t \in I$, onde $M$ é uma constante independente de $I$, então $\varphi$ admite um prolongamento até $[0,T]$.*

### 1.6.2 Desiguadade de Gronwall

O resultado seguinte conhecido como *Lema de Gronwall* será útil para obter estimativas para a solução do problema aproximado de (1.31), segunda das etapas do uso do método de Faedo-Galerkin que usaremos para encontrar a solução fraca do problema.

**Lemma 1.6.1** (Gronwall)**.** *Seja $z(t)$ uma função real absolutamente contínua em $[0,T)$ tal que para todo $t \in [0,T)$ tem-se*

$$z(t) \leq \int_0^t z(s)\, ds + C$$

*onde $C$ é uma constante. Então, $z(t) \leq Ce^t$ para todo $t \in [0,T)$.*

# Capítulo 2

# O Modelo de Kelvin-Voigt

O objetivo deste capítulo é estabelecer existência e unicidade de soluções fracas e fortes para o sistema (1.31).

## 2.1 Notações

Denota-se por $\Omega$ um aberto, conexo, limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\Gamma$ de classe $C^2$, $Q$ é o cilindro $\Omega \times (0, T)$ com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$, $T > 0$. No espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ denota-se por $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \cdots, 0), ....... ....., e_n = (0, \cdots, 0, 1)$ a base canônica do $\mathbb{R}^n$ e $x = (x_1, \cdots, x_n)$ pontos deste espaço.

O operador diferencial

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(1 \leq i \leq n)$$

será denotado por $D_i$ e se $\alpha = (\alpha_1, ......, \alpha_n)$ é um multi-índice, $\alpha_i$ números inteiros não negativos, $D^\alpha$ será o operador diferencial

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

onde $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, em particular, se $|\alpha| = 0$ segue-se que $D^0$ é o operador identidade.

Denota-se por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ o espaço das funções reais definidas sobre $\Omega$ com a $p-$ésima potência integrável segundo Lebesgue $dx = dx_1 \cdots dx_n$. Este, é um espaço de Banach com a norma

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left( \int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{ou} \quad ||u||_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess}\, |u(x)|.$$

Para $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$(u, w) = \int_\Omega u(x) w(x) dx.$$

O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é o espaço das funções pertencentes a $L^p(\Omega)$ com derivadas, no sentido das distribuições, de todas as ordens menor ou igual a $m$ pertencentes a $L^p(\Omega)$ ($m$ um inteiro não negativo e $1 \leq p \leq \infty$). Este, é um espaço de Banach com a norma

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$((u, v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

Seja $\mathcal{D}(\Omega)$ o espaço das funções $C^\infty$ com suporte compacto contido em $\Omega$. O fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$ será denotado por $W_0^{m,p}(\Omega)$ ou $H_0^m(\Omega)$ quando $p = 2$.

Relembra-se, quando necessário, algumas propriedades clássicas desses espaços. Por conveniência, devido ao uso frequente de funções com $n$ componentes, serão usadas as seguintes notações no texto:

$$\mathbf{D}(\Omega) = \{\mathcal{D}(\Omega)\}^n, \qquad \mathbf{H}_0^m(\Omega) = \{H_0^m(\Omega)\}^n$$

$$\mathbf{H}^m(\Omega) = \{H^m(\Omega)\}^n, \qquad \mathbf{L}^2(\Omega) = \{L^2(\Omega)\}^n.$$

Todos esses espaços são equipados com a norma natural do produto de espaços ou uma equivalente, exceto em $\mathbf{D}(\Omega)$, o qual não é espaço normado.

Sendo $u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, relembra-se que, se $\Omega$ é limitado em alguma direção, então, pela desigualdade de Poincaré, tem-se $|u_i|_{L^2(\Omega)} \leq c|Du_i|_{L^2(\Omega)}$, para cada $u_i \in H_0^1(\Omega)$. Logo,

$$|u|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq c|Du|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \forall\ u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega),$$

onde $D$ é a derivada em alguma direção e $c = c(\Omega)$ é uma constante que depende somente de $\Omega$. Em particular, considerando as direções $e_1, e_2, \ldots e_n$ e fazendo-se o somatório das respectivas desigualdades, temos que

$$n|u|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq c^2 \sum_{j=1}^{n} |D_j u|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \Rightarrow |u|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq c_0 \left[ \sum_{j=1}^{n} |D_j u|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \forall\ u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$$

onde $c_0 = \dfrac{c}{\sqrt{n}}$. Nesse caso, a norma de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ sobre $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ é equivalente à norma:

$$||u|| = \left[ \sum_{j=1}^{n} |D_j u|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |D_j u_i|^2_{L^2(\Omega)} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \sum_{i=1}^{n} |\nabla u_i|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right]^{\frac{1}{2}} = |\nabla u|_{\left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n}$$

que está associada ao produto escalar:

$$((u,v)) = \sum_{j=1}^{n} (D_j u, D_j v)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{\left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n},$$

para o qual o espaço $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert. Assim, equipa-se o espaço $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ com produto escalar $((\,,\,))$ e norma $||\cdot||$. Também $\mathbf{L}^2(\Omega)$ será equipado com produto interno e norma dados respectivamente por

$$(u,v)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} (u_i, v_i)_{L^2(\Omega)}\,, \ |u| = \left( \sum_{i=1}^{n} |u_i|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Seja $\mathcal{V}$ o espaço (sem topologia)

$$\mathcal{V} = \{u \in \mathbf{D}(\Omega),\ div(u) = 0\}.$$

O fecho de $\mathcal{V}$ em $\mathbf{L}^2(\Omega)$ e $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ serão representados respectivamente por $H$ e $V$. Em Lions [20] e Teman [37], caracteriza-se $H$ e $V$ como

$$H = \{u \in \mathbf{L}^2(\Omega),\ div(u) = 0, \ \ u \cdot \nu|_\Gamma = 0\} \ \text{ e } \ V = \{u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega),\ div(u) = 0\}.$$

O espaço $V$ está contido em $H$ com imersão contínua e densa. Denota-se por $H'$ e $V'$ os duais fortes de $H$ e $V$, respectivamente. Seja $\tau$ a imersão de $V$ em $H$. O operador adjunto $\tau^* : H' \to V'$ é linear, um a um e contínuo. Além disso, $\tau^*(H')$ é denso em $V'$ (pois, dado $f \in H'$, temos $\tau^*(f)(u) = f(\tau(u)) = f(u), \forall\ u \in V \Rightarrow \tau^*(f) = f|_V$, isto é, $\tau^*$ coincide com a imersão de $H'$ em $V'$ que é contínua e densa, pois $|f|_{V'} \leq |f|_{H'}$). Portanto, $H'$ pode ser identificado com um subespaço denso de $V'$. Por outro lado, pelo Teorema da Representação de Riesz, pode-se identificar $H$ e $H'$ e chegar às seguintes inclusões

$$V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V', \tag{2.1}$$

onde as inclusões são densas e contínuas.

□

## 2.2 Existência e Unicidade de Soluções para (1.31)

Sejam $H$ e $V$ os dois espaços de Hilbert da seção anterior, com produtos internos $(\,,\,)$, $((\,,\,))$ e normas $|\,.\,|$, $||\,.\,||$, respectivamente.

Investiga-se nesta seção, a existência, unicidade e regularidade das soluções do problema (1.31) com $f \in [L^2(Q)]^n = [L^2(\Omega\times(0,T))]^n \simeq [L^2(0,T;L^2(\Omega))]^n \simeq L^2(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))$.

Para tal, necessita-se obter uma base apropriada para o espaço funcional $V$. De fato, em Temam [37] é conhecido que, se $\Omega$ é um aberto limitado de classe $C^2$, as seguintes asserções são equivalentes:

[ i ] Existe uma única $u \in V$ satisfazendo

$$\nu\left((u,v)\right) = (f,v), \quad \forall\, v \in V.$$

[ ii ] Existem $u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, $p \in L^2(\Omega)$ satisfazendo

$$\left|\begin{array}{l} -\nu\Delta u + \nabla p = f \;\text{ em }\; \Omega \\ div(u) = 0 \;\text{ em }\; \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma, \end{array}\right.$$

no sentido das distribuições em $\Omega$, onde $f$ é dada em $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Esta caracterização do problema de Stokes motiva definir o operador

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbf{L}^2(\Omega) &\longrightarrow V \\ f &\longrightarrow \Phi f = u, \end{aligned}$$

onde $u$ é uma função satisfazendo $[i]$ para cada $f$.

Faz-se notar que $\Phi$ está bem definida, é linear e contínua de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ em $V$ (pois, $\nu||\Phi(f)||^2 = ((\Phi(f),\Phi(f))) = (f,\Phi f) \le |f|\,|\Phi(f)| \le c\,|f|\,||\Phi(f)|| \Rightarrow ||\Phi(f)|| \le \frac{c}{\nu}|f|$ ). Portanto, $\Phi$ é contínua de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ em $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

Tem-se que $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$ com imersão densa, contínua e compacta. Portanto, $\Phi$ considerado como um operador de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ é compacto. Além disso, $\Phi$ é auto-adjunto (pois, $(\Phi(f),g) = (g,\Phi(f)) = \nu((\Phi(g),\Phi(f))) = \nu((\Phi(f),\Phi(g))) = (f,\Phi(g))$ ).

Portanto, esse operador $\Phi$ possui uma sequência ortonormal de auto-funções $\{w_j\}_{j\ge 1}$, $\Phi w_j = \frac{1}{\lambda_j} w_j$, $\lambda_j > 0$, $\lambda_j \to \infty$ quando $j \to \infty$. Além disso, tem-se

$$w_j \in V,\;\; \nu\left((w_j,v)\right) = \lambda_j (w_j,v) \;\; \forall\, v \in V. \tag{2.2}$$

Em particular,

$$(w_j,w_k) = \delta_{jk} \;\text{ e }\; \nu\left((w_j,w_k)\right) = \lambda_j\delta_{jk} \quad \forall\, j,k.$$

### 2.2.1 Soluções Fracas

Nesta seção, procura-se uma função que resolva o problema (1.31) em algum sentido. No entanto, precisa-se definir o conceito de solução, uma vez que a função a ser procurada vai ser uma solução no sentido fraco, isto é, caracteriza-se o conceito de solução a ser procurada por:

**Definição 2.1.** *Diz-se que*

$$u : Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

*é solução fraca de* (1.31), *quando*

$$u \in L^2(0,T;V), \;\; u' \in L^2(0,T;V')$$

*e satisfaz*

$$\frac{d}{dt}(u(t),v) + \nu\,((u(t),v)) + \mu\int_0^t ((u(\sigma),v))\,d\sigma = (f(t),v)\ \forall\ v\ \in V \ \textit{ no sentido de } \mathcal{D}'(0,T) \tag{2.3}$$

*com*

$$u(0) = u_0.$$

**Observação 2.1.** *A princípio, é estranho não aparecer nesta definição nada relacionado à pressão $p$. No entanto, após achar uma função $u$ satisfazendo esta definição é que encontra-se a função $p$ satisfazendo o problema* (1.31) *em algum sentido.*

□

A definição acima permite enunciar o primeiro resultado desta seção:

**Teorema 2.1.** *Se $f \in L^2(0,T;H)$ e $u_0 \in H$, o problema misto* (1.31) *tem uma única solução fraca $u$, além disso*

$$u \in C^0([0,T];H).$$

**Demonstração:**

Emprega-se o método de Faedo-Galerkin com uma base para o espaço $V$. De fato, considere a sequência $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ construída em (2.2). Seja $V_m = [w_1, \cdots, w_m]$ o subespaço de $V$ gerado pelos $m$ primeiros vetores de $\{w_j\}_{j\geq 1}$. Primeiramente, note que, no sentido das distribuições, para toda $\varphi \in \mathcal{V} \subset \mathbf{D}(\Omega)$, tem-se

$$(\nabla p, \varphi) = \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i}\varphi_i\ dx = \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega (-p)\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}\ dx = -\int_\Omega p\, div\,\varphi\ dx = -(p, div\,\varphi) = 0$$

pois $div\,\varphi = 0$ em $\Omega$.

Como $\mathcal{V}$ é denso em $V$ ($V$ é o fecho de $\mathcal{V}$ em $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$), essa relação pode ser estendida para todo $v \in V$. Em particular, $\forall\, j \in \{1, ..., m\}$, temos que

$$(\nabla p, w_j) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i} w_{ji}\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega (-p) \frac{\partial w_{ji}}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega p\, div\, w_j\, dx = -(p, div\, w_j) = 0$$

Assim, considere o problema aproximado de (1.31) que consiste em:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Encontrar } u_m(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t) w_j \in V_m \ \text{ tal que} \\ (u_m'(t), v) \ + \nu\,((u_m(t), v)) + \mu \displaystyle\int_0^t ((u_m(\sigma), v))\, d\sigma = (f(t), v) \ \ \forall\, v \in V_m \\ u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \ \ em \ \ H, \ m \to +\infty. \end{array} \right. \tag{2.4}$$

Tomando $v = w_j$ e usando a ortonormalidade de $\{w_1, ..., w_m\}$, obtemos o sistema

$$\left| \begin{array}{l} h_{jm}'(t) + \lambda_j h_{jm}(t) + \dfrac{\mu}{\nu} \lambda_j \displaystyle\int_0^t h_{jm}(\sigma) d\sigma = (f(t), w_j) \ \ \forall\, j \in \{1, ..., m\} \\ h_{jm}(0) = h_{j0m} \end{array} \right.$$

que na forma matricial é escrito como

$$\begin{pmatrix} h_{1m}' \\ h_{2m}' \\ \vdots \\ h_{mm}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{1m} + \frac{\mu}{\nu} \int_0^t h_{1m}(\sigma)\, d\sigma \\ h_{2m} + \frac{\mu}{\nu} \int_0^t h_{2m}(\sigma)\, d\sigma \\ \vdots \\ h_{mm} + \frac{\mu}{\nu} \int_0^t h_{mm}(\sigma)\, d\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f(t), w_1) \\ (f(t), w_2) \\ \vdots \\ (f(t), w_m) \end{pmatrix}$$

ou, fazendo $\begin{pmatrix} h_{1m} \\ h_{2m} \\ \vdots \\ h_{mm} \end{pmatrix} = X,$

$$\left| \begin{array}{l} X'(t) + AX(t) + \dfrac{\mu}{\nu} A \displaystyle\int_0^t X(\sigma)\, d\sigma = \tilde{f}_w(t) \\ X(0) = X_0 \end{array} \right.$$

onde $A$ é a matriz diagonal formada pelos $\lambda_j$, $\tilde{f}_w(t)$ é a matriz coluna dos $(f(t), w_j)$ e $X_0$ é a matriz coluna dos dados iniciais $h_{j0m}$.

Considerando a função definida por $F(X,t) = \tilde{f}_w(t) - AX(t) - \dfrac{\mu}{\nu} A \displaystyle\int_0^t X(\sigma)\, d\sigma$, o sistema acima se reduz a forma

$$\left| \begin{array}{l} X'(t) = F(X,t) \\ X(0) = X_0 \end{array} \right. \quad (*)$$

Note que $F$ satisfaz as condições de Carathéodory. De fato,

- $F(X,t)$ é mensurável em $t$, pois cada uma das funções $t \mapsto (f(t), w_j)$ está em $L^2(\Omega)$.
- para $t$ fixado, $F(X,t)$ é contínua em $X$, pois as funções $h_{jm}$ são contínuas.
- $|F(X,t)| = \left| \tilde{f}_w(t) - AX(t) - \dfrac{\mu}{\nu} A \displaystyle\int_0^t X(\sigma)\, d\sigma \right| \leq K|f(t)| + |A||X(t)| + \dfrac{\mu}{\nu} |A| \displaystyle\int_0^t |X|\, d\sigma$, onde $K$ é uma constante. Assim, para todo compacto contido no domínio de $F$ existe uma função integrável $m(t)$, tal que $|F(X,t)| \leq m(t)$.

Logo, pelo Teorema de existência de soluções de Carathéodory, o sistema $(*)$ possui uma solução sobre um intervalo $(0, t_m)$, com $t_m < T$. A dependência de $t$ com respeito a $m$ se deve ao fato de que o sistema $(*)$ está relacionado ao problema aproximado (2.4). Portanto, retornando a esse sistema, sendo $u_m$ uma solução local de (2.4) sobre $(0, t_m)$, temos que

$$(u_m'(t), v) \ + \nu\, ((u_m(t), v)) + \mu \int_0^t ((u_m(\sigma), v))\, d\sigma = (f(t), v) \ \ \forall\, v \in V_m$$

Tomando, $v = u_m(t) \in V_m$ obtém-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \nu ||u_m(t)||^2 + \mu \int_0^t \left( \int_\Omega \nabla u_m(x,t) \nabla u_m(x,\sigma)\, dx \right) d\sigma \leq |f(t)|\, |u_m(t)|.$$

A partir disso, logo adiante nas estimativas mostra-se com o uso do Lema de Gronwall que $|u_m(t)| < C \ \forall\, t \in (0, t_m)$. Logo, pelo colorário do Teorema de Carathéodory, $u_m$ pode ser estendida até $[0,T]$ e, portanto, o sistema (2.4) tem uma solução definida em $[0,T]$.

Busca-se, a seguir, estimativas para $u_m$ que permitirão tomar o limite quando $m \to \infty$ e verifica-se que a função limite satisfaz a Definição 2.1. Essa é a ideia chave em que se baseia o método de Lions-Faedo-Galerkin.

**Estimativas**

Considerando-se na equação aproximada (2.4), $v = u_m(t) \in V_m$ obtém-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \nu||u_m(t)||^2 + \mu\int_0^t \left(\int_\Omega \nabla u_m(x,t)\nabla u_m(x,\sigma)\,dx\right) d\sigma \leq |f(t)|\,|u_m(t)|.$$

Portanto, integrando de 0 a $t$, segue-se que

$$\begin{aligned} &|u_m(t)|^2 + 2\nu\int_0^t ||u_m(s)||^2\ dt + 2\mu\int_0^t\int_0^s \left(\int_\Omega \nabla u_m(x,s)\nabla u_m(x,\sigma)\,dx\right) d\sigma ds \leq \\ &\leq 2\int_0^t |f(s)|\,|u_m(s)|\ ds + |u_{0m}|^2 \leq 2\left(\int_0^t |f(s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t |u_m(s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} + |u_{0m}|^2. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Pelo teorema de Fubini, temos que

$$\begin{aligned} 2\int_0^t\int_0^s \left(\int_\Omega \nabla u_m(x,s)\nabla u_m(x,\sigma)\,dx\right) d\sigma ds &= \int_\Omega\int_0^t \left[2\left(\int_0^s \nabla u_m(x,\sigma)\,d\sigma\right)\nabla u_m(x,s)\right] ds\,dx \\ &= \int_\Omega\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\left(\int_0^s \nabla u_m(x,\sigma)\,d\sigma\right)^2 ds\,dx = \int_\Omega\left(\int_0^t \nabla u_m(x,\sigma)\,d\sigma\right)^2 dx \geq 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Logo, de (2.5) e (2.6), tem-se que

$$|u_m(t)|^2 \leq \int_0^t |u_m(s)|^2\,ds + \int_0^t |f(s)|^2\,ds + |u_{0m}|^2.$$

Sendo $f \in L^2(0,T;H)$, por meio da desigualdade de Gronwall, obtém-se que

$$|u_m(t)|^2 \leq Ce^t,\ \forall\ t \in (0,T) \tag{2.7}$$

onde $C = \displaystyle\int_0^T |f(t)|^2\ dt + |u_{0m}|^2$. Tem-se também que

$$\begin{aligned} &2\left(\int_0^t |f(s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t |u_m(s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{c}{\nu}\int_0^t |f(s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\nu}{c}\int_0^t |u_m(s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq\ \frac{c}{\nu}\int_0^t |f(s)|^2\,ds\ +\ \frac{\nu}{c}\int_0^t |u_m(s)|^2\,ds\ \leq\ \frac{c}{\nu}\int_0^T |f(s)|^2\,ds\ +\ \nu\int_0^t ||u_m(s)||^2\,ds \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde $c$ é a constante da desigualdade de Poincaré-Friedrichs entre as normas $|\,.\,|$ e $||\,.\,||$. Logo, de (2.5) e (2.8), tem-se que

$$\nu\int_0^t ||u_m(s)||^2\ dt \leq \frac{c}{\nu}\left(\int_0^T |f(s)|^2\,ds\right) + |u_{0m}|^2. \tag{2.9}$$

De $(2.4)_3$, tem-se que $(u_{0m})_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada. Assim, fazendo $t \to T$ no segundo membro de (2.7) e no primeiro membro de (2.9), tem-se que $|u_m(t)|^2\ \leq\ C_1,\ \forall\ t\ \in\ (0,T)$ e

$|u_m|_{L^2(0,T;V)} \leq C_2$, onde $C_1$ e $C_2$ são constantes positivas. Integrando esta primeira de 0 à $T$, segue-se que $|u_m|_{L^2(0,T;H)} \leq C_1 T$. De (2.5) e (2.6), temos também

$$\mu \int_\Omega \left( \int_0^t \nabla u_m(x,\sigma)\, d\sigma \right)^2 dx \leq \int_0^t |u_m(s)|^2\, ds + \int_0^T |f(s)|^2\, ds + |u_{0m}|^2.$$

Definindo $z_m(t) = \displaystyle\int_0^t u_m(x,\sigma)\, d\sigma$, da desigualdade acima temos que $||z_m(t)||^2 \leq \frac{C_1 T + C}{\mu}$. Integrando de 0 à $T$, obtemos $|z_m|_{L^2(0,T;V)} \leq \frac{C_1 T^2 + CT}{\mu}$. Logo,

$$(z_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(0,T;V); \tag{2.10}$$

$$(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(0,T;H); \tag{2.11}$$

$$(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(0,T;V). \tag{2.12}$$

**Passagem ao Limite**

De (2.10), (2.11) e (2.12) e do fato de $L^2(0,T;H)$ e $L^2(0,T;V)$ serem reflexivos, extrai-se subsequências de $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$, representadas pela mesma notação, tais que

$$z_m \rightharpoonup z \text{ em } L^2(0,T;V); \tag{2.13}$$

$$u_m \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0,T;H); \tag{2.14}$$

$$u_m \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0,T;V). \tag{2.15}$$

Das convergências (2.14) e (2.15), obtém-se

$$\int_0^T (u_m(t), w(t))\, dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), w(t))\, dt, \ \ \forall\, w \in L^2(0,T;H), \tag{2.16}$$

e

$$\int_0^T ((u_m(t), w(t)))\, dt \longrightarrow \int_0^T ((u(t), w(t)))\, dt, \ \ \forall\, w \in L^2(0,T;V). \tag{2.17}$$

Agora, da convergência (2.13), segue-se que $z_m' \rightharpoonup z'$. Mas, $z_m' = u_m$. Como, por (2.15), $u_m \rightharpoonup u$, pela unicidade do limite fraco, devemos ter $z' = u \Rightarrow z(t) = \int_0^t u(\sigma)\, d\sigma$. Logo,

$$\int_0^T ((z_m(t), w(t)))\, dt \longrightarrow \int_0^T ((z(t), w(t)))\, dt$$

$$\Rightarrow \int_0^T ((\int_0^t u_m(\sigma)\, d\sigma, w(t)))\, dt \longrightarrow \int_0^T ((\int_0^t u(\sigma)\, d\sigma, w(t)))\, dt$$

$$\Rightarrow \int_0^T \int_0^t ((u_m(\sigma), w(t)))\ d\sigma\, dt \longrightarrow \int_0^T \int_0^t ((u(\sigma), w(t)))\ d\sigma\, dt \tag{2.18}$$

para todo $w \in L^2(0,T;V)$.
Tomando, em (2.16), $w = v\theta$, com $v \in V$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, temos que

$$\int_0^T (u'_m(t),v)\theta(t)dt = -\int_0^T (u_m(t),v)\theta'(t)dt \longrightarrow -\int_0^T (u(t),v)\theta'(t)dt. \tag{2.19}$$

Utilizando-se as convergências (2.17) $-$ (2.19) e a densidade da união dos $V_m$ em $V$, pode-se passar o limite na equação aproximada (2.4) para $m \to \infty$ e obter

$$-\int_0^T (u(t),v)\theta'(t)dt + \nu\int_0^T ((u(t),v))\theta(t)dt + \mu\int_0^T\left(\int_0^t ((u(\sigma),v))\,d\sigma\right)\theta(t)\,dt = \int_0^T (f(t),v)\theta(t)\,dt \tag{2.20}$$

$\forall\, v \in V,\ \theta \in \mathcal{D}(0,T)$.
Dessa igualdade, obtém-se

$$\frac{d}{dt}(u(t),v) + \nu((u(t),v)) + \mu\int_0^t ((u(\sigma),v))\,d\sigma = (f(t),v)\ \ \forall\, v \in V,\ \text{ no sentido de }\ \mathcal{D}'(0,T).$$

Sendo $u \in L^2(0,T;V)$, $V \subset H \subset V'$ e observando que

$$-\nu\,((u(t),v)) = -\nu\int_\Omega (\nabla u(\sigma),\nabla v)\,dx = \nu\int_\Omega \Delta u(\sigma) v\,dx = \langle \nu\Delta u(t),v\rangle_{V'\times V}$$

$$-\mu\int_0^t ((u(\sigma),v))\,d\sigma = -\mu\int_0^t \left[\int_\Omega (\nabla u(\sigma),\nabla v)\ dx\right] d\sigma = \mu\int_0^t \left[\int_\Omega \Delta u(\sigma) v\,dx\right] d\sigma$$
$$= \int_\Omega \left[\mu\int_0^t \Delta u(\sigma)\,d\sigma\right] v\ dx = \left\langle \mu\int_0^t \Delta u(\sigma)d\sigma, v\right\rangle_{V'\times V}$$

obtém-se

$$\frac{d}{dt}\,\langle u(t),v\rangle = \langle h(t),v\rangle\ \ \forall\, v \in V, \tag{2.21}$$

onde $\langle .,.\rangle$ representa a dualidade entre $V'$ e $V$ e

$$h(t) = \nu\Delta u(t) + \mu\int_0^t \Delta u(\sigma)\,d\sigma + f(t).$$

Note que $h \in L^2(0,T;V')$, pois $f \in L^2(0,T;H) \hookrightarrow L^2(0,T;V')$ e $|\Delta u(t)|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} = ||u(t)||$ $\Rightarrow\ \Delta u \in L^2(0,T;\,\mathbf{H}^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;V')$. Logo, conforme Temam [37] pg. 261, de (2.21) segue-se que $u'(t) = h(t)$ quase sempre em $[0,T]$ e, portanto,

$$u' \in L^2(0,T;V') \tag{2.22}$$

e

$$u' - \nu\Delta u - \mu\int_0^t \Delta u(\sigma)\,d\sigma = f,\ \text{ no sentido de }\ L^2(0,T;V'), \tag{2.23}$$

Sendo $u \in L^2(0,T;V)$ e $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ segue-se, de Temam [37], que $u \in C^0([0,T];H)$. Logo, faz sentido calcular $u(0)$. Finalmente, para verificar a condição inicial de (2.3), consideremos uma função $\psi : [0,T] \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ e tal que $\psi(T) = 0$ e $\psi(0) \neq 0$. Multiplicando a equação

$$\frac{d}{dt}(u(t),v) \;+\; \nu((u(t),v)) \;+\; \mu\int_0^t ((u(\sigma),v))\,d\sigma = (f(t),v)$$

por $\psi(t)$ e integrando de 0 à $T$, fica

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u(t),v)\psi(t)\,dt + \nu\int_0^T ((u(t),v))\psi(t)\,dt + \mu\int_0^T\int_0^t ((u(\sigma),v))\,\psi(t)\,d\sigma\,dt = \int_0^T (f(t),v)\psi(t)\,dt$$

Integrando por partes o primeiro termo, obtemos que

$$-\int_0^T (u(t),v)\psi'(t)\,dt \;+\; \nu\int_0^T ((u(t),v))\psi(t)\,dt \;+\; \mu\int_0^T\int_0^t ((u(\sigma),v))\,\psi(t)\,d\sigma\,dt$$
$$= (u(0),v)\psi(0) + \int_0^T (f(t),v)\psi(t)\,dt$$

Repetindo este mesmo procedimento na equação do problema aproximado (2.4) e tomando o limite para $m \to +\infty$, obtemos também que

$$-\int_0^T (u(t),v)\psi'(t)\,dt \;+\; \nu\int_0^T ((u(t),v))\psi(t)\,dt \;+\; \mu\int_0^T\int_0^t ((u(\sigma),v))\,\psi(t)\,d\sigma\,dt$$
$$= (u_0,v)\psi(0) + \int_0^T (f(t),v)\psi(t)\,dt$$

Comparando os dois resultados obtidos, temos que $(u(0),v)\psi(0) = (u_0,v)\psi(0), \quad \forall\, v \in V$. Logo, $u(0) = u_0$. □

**Unicidade**

Sejam $u, v$ duas soluções do problema (1.31), logo $w = u - v$ satisfaz

$$w' - \nu\Delta w - \mu\int_0^t \Delta w(\sigma)\,d\sigma = 0, \quad w(0) = 0. \tag{2.24}$$

Tomando o produto escalar $((\ ,\ ))$ da igualdade acima com $w(t)$, tem-se

$$\langle w'(t), w(t)\rangle + \nu||w(t)||^2 + \mu\int_0^t ((w(\sigma),w(t)))d\sigma = 0$$

Conforme Temam [37] pp. 261, tem-se que $\langle w'(t), w(t)\rangle = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}|w(t)|^2$ e integrando de 0 a $t$, obtém-se

$$\frac{1}{2}|w(t)|^2 + \nu\int_0^t ||w(s)||^2\,ds + \int_0^t\int_0^s ((w(\sigma),w(s)))d\sigma\,ds = 0$$

Donde, de (2.6), tem-se que $|w(t)|^2 = 0$. Portanto, $w(t) = 0$ para todo $t \in [0,T]$.

■

**Observação 2.2.** *Apesar do que já foi feito, deve-se precisar em que sentido a função* $\mathbf{u}$ *definida pelo* ***Teorema*** 2.1 *é a solução do problema de valor inicial* (1.31).

□

De fato, o resultado a seguir não só vai dizer isto, como acha-se uma função $p$ satisfazendo o problema (1.31) em algum sentido.

**Proposição 2.1.** *Sobre as hipóteses do Teorema 2.1, existe uma distribuição* $p : Q \to \mathbb{R}$, *tal que a função* $\mathbf{u}$ *definida no Teorema* 2.1 *e* $p$ *satisfazem o problema* (1.31) *no sentido das distribuições em* $Q$, *além disso,* $p \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

**Demonstração**:
As igualdades $(1.31)_2$ e $(1.31)_4$ do problema (1.31) são uma consequência de $u \in L^2(0,T;V)$ e do Teorema 2.1. A igualdade $(1.31)_3$ é consequência de $u \in L^2(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega))$.

Para recuperar a pressão $p$, como $u'(t) = h(t)$ em $V'$, $h(t)$ definida anteriormente, tem-se que

$$\left\langle u'(t) - \nu\Delta u(t) - \mu\int_0^t \Delta u(\sigma)\, d\sigma - f(t), v \right\rangle = 0 \tag{2.25}$$

para todo $v \in V$ quase sempre em $[0,T]$. Em particular, como $\mathcal{V} \subset V$, tem-se

$$\left\langle u'(t) - \nu\Delta u(t) - \mu\int_0^t \Delta u(\sigma)\, d\sigma - f(t), v \right\rangle = 0, \tag{2.26}$$

para todo $v \in \mathcal{V}$ quase sempre $[0,T]$. Logo, conforme Proposição 4.1 do Apêndice, existe $p(t) \in D'(\Omega)$ tal que

$$-\nabla p(t) = u'(t) - \nu\Delta u(t) - \mu\int_0^t \Delta u(\sigma)\, d\sigma - f(t). \tag{2.27}$$

Daí conclui-se que

$$\nabla p(t) \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega). \tag{2.28}$$

Isto diz que cada $\dfrac{\partial p(t)}{\partial x_i} \in H^{-1}(\Omega)$ para cada $i = 1, 2, ...., n$. Logo, da Proposição 4.2 item $(ii)$ do Apêndice, tem-se que

$$p(t) \in L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad |p(t)|_{L^2(\Omega)} \le C||\nabla p(t)||_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}.$$

Sendo, por (2.27), $\nabla p \in L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$, obtém-se

$$p \in L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.29}$$

**Observação 2.3.** *Não se tem em geral alguma informação sobre* $p$ *além de* (2.28) *e* (2.29). *No entanto, será mostrado na seção seguinte que* $p$ *terá mais regularidade quando assume-se mais regularidade nos dados iniciais.*

□

### 2.2.2 Soluções Fortes

Nesta seção mostra-se que, exigindo mais regularidade sobre $u_0$, obtém-se mais regularidade na solução de (1.31).

**Definição 2.2.** *Diz-se que*

$$u : Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

*é uma solução forte de* (1.31)*, quando*

$$u \in L^2(0,T; V \cap \mathbf{H}^2(\Omega)),\ u' \in L^2(0,T;H),\ p \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$$

*e satisfaz*

$$u' - \nu\Delta u - \mu\int_0^t \Delta u(\sigma)\,d\sigma = f - \nabla p \quad em \quad \mathbf{L}^2(Q), \tag{2.30}$$

$$u(0) = u_0.$$

O resultado abaixo garante a existência, unicidade e regularidade de soluções.

**Teorema 2.2.** *Se $f \in L^2(0,T;H)$ e $u_0 \in V$, o problema misto* (1.31) *tem uma única solução forte $u$, além disso*

$$u \in C^0([0,T];V).$$

**Demonstração:**

Seja $v = \Delta u_m(t) \in V_m$ em (2.4), logo

$$(u_m'(t), \Delta u_m(t)) + \nu\,((u_m(t), \Delta u_m(t))) + \mu\int_0^t ((u_m(\sigma), \Delta u_m(t)))\,d\sigma = (f(t), \Delta u_m(t)) \Rightarrow$$
$$((u_m'(t), u_m(t))) + \nu\,(\Delta u_m(t), \Delta u_m(t)) + \mu\int_0^t (\Delta u_m(\sigma), \Delta u_m(t))\,d\sigma = -(f(t), \Delta u_m(t))$$

Assim, tem-se que

$$\frac{d}{dt}||u_m(t)||^2 + 2\nu\,|\Delta u_m(t)|^2 + 2\mu\int_0^t (\Delta u_m(\sigma), \Delta u_m(t))\ d\sigma\ \leq 2\,|f(t)|\,|\Delta u_m(t)| \tag{2.31}$$

Integrando (2.31) de 0 à $t$, tem-se que

$$||u_m(t)||^2 + 2\nu\int_0^t |\Delta u_m(s)|^2\,ds + 2\mu\int_0^t\int_0^s (\Delta u_m(\sigma), \Delta u_m(s))\,d\sigma\,ds$$
$$\leq 2\int_0^t |f(s)||\Delta u_m(s)|\,ds + \|u_{0m}\|^2 \leq 2\left(\int_0^t |f(s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t |\Delta u_m(s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} + ||u_{0m}||^2 \tag{2.32}$$

Analogamente ao que foi feito em (2.6), mostra-se que a integral dupla acima é positiva. Além disso, assim como em (2.8), tem-se

$$2\left(\int_0^t |f(s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t |\Delta u_m(s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\nu}\int_0^T |f(s)|^2\,ds + \nu\int_0^t |\Delta u_m(s)|^2\,ds \quad (2.33)$$

Logo, de (2.32) e (2.33),

$$||u_m(t)||^2 + \nu\int_0^t |\Delta u_m(s)|^2\,ds \leq \frac{1}{\nu}\int_0^T |f(s)|^2\,ds + ||u_{0m}||^2 \quad (2.34)$$

Sendo $f \in L^2(0,T;H)$ e escolhendo $u_{0m} \in V_m$ de modo que $u_{0m} \to u_0$ em $V$, de (2.34) vem que $||u_m(t)||^2 \leq C$ e $|\Delta u_m|_{L^2(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))} \leq \frac{C}{\nu}$. Dessa primeira, vem que $|u_m|_{L^2(0,T;V)} \leq CT$. Portanto,

$$(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(0,T;V), \quad (2.35)$$

$$(\Delta u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)). \quad (2.36)$$

Da densidade da união dos $V_m$ em $V$, pode-se ter $v \in V$ no problema aproximado (2.4). Portanto,

$$(u'_m(t),v) - \nu(\Delta u_m(t),v) - \left(\mu\int_0^t \Delta u_m(\sigma)d\sigma, v\right) = (f(t),v),\ \forall\ v \in V.$$

Logo, em particular, tem-se

$$\left\langle u'_m(t) - \nu\Delta u_m(t) - \mu\int_0^t \Delta u_m(\sigma)\,d\sigma - f(t), v\right\rangle = 0, \quad (2.37)$$

para todo $v \in \mathcal{V}$ quase sempre em $[0,T]$. Assim, conforme Proposição 4.1 do Apêndice, existe $p_m(t) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que

$$-\nabla p_m(t) = u'_m(t) - \nu\Delta u_m(t) - \mu\int_0^t \Delta u_m(\sigma)\,d\sigma - f(t). \quad (2.38)$$

Considere o problema de Stokes

$$\left|\begin{array}{l} -\nu\Delta u_m(t) + \nabla p_m(t) = \varphi_m(t) \in \mathbf{L}^2(\Omega) \\ div(u_m(t)) = 0 \text{ em } \Omega \\ u_m(t) = 0 \text{ sobre } \Gamma, \end{array}\right. \quad (2.39)$$

onde $\varphi_m(t) = -u'_m(t) + \mu\int_0^t \Delta u_m(\sigma)\,d\sigma + f(t)$.

De (2.38), tem-se que $\dfrac{\partial p_m(t)}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, donde

$$p_m(t) \in H^1(\Omega). \quad (2.40)$$

De (2.36) tem-se

$$\left|\begin{array}{l} \Delta u_m(t) \in \mathbf{L}^2(\Omega) \\ u_m(t) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \end{array}\right.$$

logo, da regularidade de problemas elíticos, segue-se que

$$u_m(t) \in \mathbf{H}^2(\Omega). \tag{2.41}$$

De (2.39), (2.40), (2.41) e a Proposição 4.3 do Apêndice obtém-se

$$\|u_m(t)\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \leq C_0 |\varphi_m(t)|^2.$$

Como $\varphi_m$ é limitada em $L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$, segue-se que

$$(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega)). \tag{2.42}$$

De (2.35) e (2.42), extrai-se uma subsequência de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$, representada pela mesma notação, tal que

$$u_m \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0,T;V); \tag{2.43}$$

$$u_m \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega)). \tag{2.44}$$

Por argumentos similares aos do Teorema 2.1, obtém-se das convergências (2.43) e (2.44), que $u$ satisfaz:

$$\frac{d}{dt}(u(t),v) - \nu(\Delta u(t),v) - \left(\mu\int_0^t \Delta u(\sigma)d\sigma, v\right) = (f(t),v) \;\; \forall\, v \in V, \text{ no sentido de } \mathcal{D}'(0,T). \tag{2.45}$$

Daí, como no Teorema 2.1, tem-se que

$$u' \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)) \tag{2.46}$$

$$u' - \nu\Delta u - \mu\int_0^t \Delta u(\sigma)\,d\sigma = f, \text{ no sentido de } L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)). \tag{2.47}$$

De (2.47), tem-se em particular que

$$\left\langle u'(t) - \nu\Delta u(t) - \int_0^t \Delta u(\sigma)\,d\sigma - f(t), v\right\rangle = 0, \tag{2.48}$$

para todo $v \in \mathcal{V}$. Portanto, a Proposição 4.1 do Apêndice, garante a existência de $p(t) \in D'(\Omega)$ tal que

$$-\nabla p(t) = u'(t) - \nu\Delta u(t) - \int_0^t \Delta u(\sigma)\,d\sigma - f(t) \in \mathbf{L}^2(\Omega), \;\; q.s. \text{ em } [0,T]. \tag{2.49}$$

Daí conclui-se que

$$\nabla p(t) \in \mathbf{L}^2(\Omega). \tag{2.50}$$

Isto diz que cada $\dfrac{\partial p(t)}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ para cada $i = 1, 2, ...., n$. Logo, da Proposição 4.2 item $(i)$ do Apêndice, obtém-se

$$p(t) \in L^2(\Omega),$$

e, portanto,

$$p(t) \in H^1(\Omega), \text{ quase sempre em } [0, T].$$

Tem-se, para quase todo $t \in [0, T]$, que

$$\left| \begin{array}{l} -\nu \Delta u(t) + \nabla p(t) = \chi(t) \in \mathbf{L}^2(\Omega); \\ div(u(t)) = 0 \text{ em } \Omega \\ u(t) = 0 \text{ sobre } \Gamma, \end{array} \right.$$

onde $\chi(t) = -u'(t) + \mu \displaystyle\int_0^t \Delta u(\sigma)\, d\sigma + f(t)$.

Portanto, invocando a Proposição 4.3 do Apêndice, com $\alpha = 2$, $m = 0, g = 0, \phi = 0$, tem-se que a aplicação

$$\chi(t) \mapsto \{u(t), p(t)\}$$

é linear e contínua de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ em $\mathbf{H}^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$. Além disso, tem-se que

$$\|u(t)\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} + \|p(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq c_0\{|\chi(t)|\},$$

donde, por $\chi \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$, tem-se que

$$p \in L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

Como

$$u \in L^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)) \text{ e } u' \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)),$$

tem-se que

$$u \in C^0\left([0, T]; \left[\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega), \mathbf{L}^2(\Omega)\right]_{\frac{1}{2}}\right).$$

Mas, $\left[\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega), \mathbf{L}^2(\Omega)\right]_{\frac{1}{2}} = \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ e $div(u) = 0$. Assim,

$$u \in C^0([0, T]; V).$$

Para mostrar que $u(0) = u_0$ e a unicidade, faz-se exatamente como no Teorema 2.1. Portanto, a prova do Teorema 2.2 está concluída.

$\blacksquare$

# Capítulo 3

# O Modelo de Maxwell

O objetivo deste capítulo é estabelecer existência e unicidade de solução fraca para o sistema (1.32). Consideram-se aqui as mesmas notações usadas no capítulo 2.

## 3.1 Lemas Técnicos

Nesta seção são apresentados alguns lemas técnicos necessários para a conclusão deste trabalho. A sua utilidade ficará clara mais adiante.

**Lemma 3.1.1.** *Seja* $1 \leq p < \infty$. *Quando* $h \in L^p(Q)$, $Q = \Omega \times (0,T)$ *e* $g \in L^1(0,\infty)$ *tem-se que*

$$||g * h||_{L^p(Q)} \leq ||g||_{L^1(0,\infty)} ||h||_{L^p(Q)}$$

*onde* $*$ *é a convolução em* $t$.

**Demonstração:**
Considere a função $F(x,t,\sigma) = g(t-\sigma)h(x,\sigma)$. Para $p = 1$, tem-se

$$\int_0^t |F(x,s,\sigma)|_{\mathbb{R}} \, ds \leq |h(x,\sigma)|_{\mathbb{R}} \int_0^t g(s-\sigma) \, ds \leq ||g||_{L^1(0,\infty)} |h(x,\sigma)|_{\mathbb{R}},$$

donde

$$\int_Q \int_0^t |F(x,s,\sigma)|_{\mathbb{R}} \, ds \, dQ \leq ||g||_{L^1(0,\infty)} ||h||_{L^1(Q)}.$$

Assim $F \in L^1(Q \times \mathbb{R}^+)$ e

$$||g * h||_{L^1(Q)} = \int_Q |g * h(x,t)|_{\mathbb{R}} \, dQ \leq \int_Q \int_0^t |F(x,s,\sigma)|_{\mathbb{R}} \, ds \, dQ \leq ||g||_{L^1(0,\infty)} ||h||_{L^1(Q)}.$$

Para $1 < p < \infty$, basta considerar a função $\sigma \mapsto |g(t-\sigma)|_{\mathbb{R}} |h(x,\sigma)|^p_{\mathbb{R}}$ e proceder como anteriormente. ∎

**Lemma 3.1.2.** *Seja $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ uma função de $L^1(0,\infty)$ e sejam $y, \zeta \in L^2(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))$. Então*

$$\int_{\Omega\times(0,T)} \left[\int_0^t g(t-\sigma)y(\sigma)\ d\sigma\right] \zeta(t)\ dt\,dx = \int_{\Omega\times(0,T)} \left[\int_t^T g(\eta-t)\zeta(\eta)\ d\eta\right] y(t)\ dt\,dx$$

**Demonstração:**

Considere

$$\tilde{y} = \left| \begin{array}{l} y \text{ em } [0,T] \\ 0 \text{ fora de } [0,T] \end{array}\right. \qquad \tilde{\zeta} = \left| \begin{array}{l} \zeta \text{ em } [0,T] \\ 0 \text{ fora de } [0,T] \end{array}\right.$$

$$\tilde{g}(s) = \left| \begin{array}{l} g(s) \text{ se } s \geq 0 \\ 0 \text{ se } s < 0 \end{array}\right. \quad \text{e} \quad \widetilde{g*y} = \left| \begin{array}{l} g*y \text{ em } [0,T] \\ 0 \text{ fora de } [0,T]. \end{array}\right.$$

Assim, $\tilde{y} \in L^2(\mathbb{R},\mathbf{L}^2(\Omega))$, $\tilde{\zeta} \in L^2(\mathbb{R},\mathbf{L}^2(\Omega))$, $\tilde{g} \in L^1(\mathbb{R})$ e pelo Lema 3.1.1 segue que $\widetilde{g*y} \in L^2(\mathbb{R};H)$. Portanto,

$$\int_{\Omega\times(0,T)} \left[\int_0^t g(t-\sigma)y(\sigma)\ d\sigma\right] \zeta(t)\ dt\,dx = \int_{\Omega\times(0,T)} (g*y)(t)\zeta(t)\ dt\,dx =$$

$$\int_{\Omega\times\mathbb{R}} (\widetilde{g*y})(t)\tilde{\zeta}(t)\ dt\,dx = \int_{\Omega\times\mathbb{R}} (\tilde{g}*\tilde{y})(t)\tilde{\zeta}(t)\ dt\,dx = \int_{\Omega\times\mathbb{R}} \tilde{y}(t)(\breve{\tilde{g}}*\tilde{\zeta})(t)\ dt\,dx =$$

$$\int_{\Omega\times\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \breve{\tilde{g}}(t-\eta)\tilde{\zeta}(\eta)\ d\eta\right] \tilde{y}(t)\ dt\,dx = \int_{\Omega\times\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(\eta-t)\tilde{\zeta}(\eta)\ d\eta\right] \tilde{y}(t)\ dt\,dx =$$

$$\int_{\Omega\times(0,T)} \left[\int_t^T g(\eta-t)\zeta(\eta)\ d\eta\right] y(t)\ dt\,dx$$

onde por $\breve{g}$, denotou-se $\breve{g}(x) = g(-x)$. ■

**Lemma 3.1.3.** *Para arbitrários $\alpha, T \in \mathbb{R}$ com $\alpha, T > 0$ e $h \in L^2(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega)) \simeq L^2(Q)$ tem-se*

$$I := \int_{\Omega\times(0,T)} \left[\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}h(x,s)\ ds\right] h(x,t)\ dt\,dx \geq 0$$

.

**Demonstração:** Do Lema 3.1.2 tem-se que

$$I = \int_{\Omega\times(0,T)} \left[\int_t^T e^{-\alpha(\eta-t)}h(x,\eta)\ d\eta\right] h(x,t)\ dt\,dx.$$

Logo,

$$I = \frac{1}{2}\int_{\Omega\times(0,T)}\left[\int_0^T e^{-\alpha|t-\eta|_{\mathbb{R}}} h(x,\eta)\; d\eta\right] h(x,t)\; dt\, dx.$$

Observe desta identidade que para $\alpha = 0$, o Lema é válido. Por outro lado, para $\alpha \neq 0$, seja $h^*(x,t) = h(x,t)$ em $\Omega\times(0,T)$ e $h^*(x,t) = 0$ fora de $\Omega\times(0,T)$. Então da identidade acima segue-se que

$$I = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha|t-\eta|_{\mathbb{R}}} h^*(x,\eta)\; d\eta\right] h^*(x,t)\; dt\, dx$$

Faz-se agora a mudança de variável $t-\eta = \xi$, para obter

$$I = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha|\xi|_{\mathbb{R}}} h^*(x,t-\xi)\; d\xi\right] h^*(x,t)\; dt\, dx$$

A ideia agora é se utilizar da Transformada inversa de Fourier de $h^*(x,t)$. De fato,

$$I = \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} h^*(x,t)\left[\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha|\xi|}\left\{\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} e^{i(x,t-\xi)\cdot(y,\eta)}\widehat{h^*}(y,\eta)\; d\eta\, dy\right\} d\xi\right] dt\, dx =$$

$$\frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} h^*(x,t)\left[\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} e^{i(x,t)\cdot(y,\eta)}\widehat{h^*}(y,\eta)\left\{\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi\eta}e^{-\alpha|\xi|}\; d\xi\right\} d\eta\, dy\right] dt\, dx =$$

$$\frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} h^*(x,t)\left[\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} e^{i(x,t)\cdot(y,\eta)}\widehat{h^*}(y,\eta)\widehat{e^{-\alpha|\xi|}}\; d\eta\, dy\right] dt\, dx =$$

$$\frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} \widehat{e^{-\alpha|\xi|}}\widehat{h^*}(y,\eta)\left[\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} e^{i(x,t)\cdot(y,\eta)}h^*(x,t)\, dt\, dx\right] d\eta\, dy =$$

$$\frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} \widehat{e^{-\alpha|\xi|}}\widehat{h^*}(y,\eta)\left[\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} e^{i(x,t)\cdot(y,\eta)}\overline{h^*(x,t)}\, dt\, dx\right] d\eta\, dy =$$

$$\frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} \widehat{e^{-\alpha|\xi|}}\widehat{h^*}(y,\eta)\overline{\left[\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} e^{-i(x,t)\cdot(y,\eta)}h^*(x,t)\, dt\, dx\right]} d\eta\, dy =$$

$$\frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} \widehat{e^{-\alpha|\xi|}}\widehat{h^*}(y,\eta)\overline{\widehat{h^*}(y,\eta)}\, d\eta\, dy =$$

$$\frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} \widehat{e^{-\alpha|\xi|}}|\widehat{h^*}(y,\eta)|^2\, d\eta\, dy.$$

Portanto,

$$I = \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \widehat{e^{-\alpha|\xi|}} |\widehat{h^*}(y,\eta)|^2 \, d\eta \, dy.$$

Sendo

$$\widehat{e^{-\alpha|\xi|}} = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi\eta} e^{-\alpha|\xi|} \, d\xi = \frac{2\alpha}{\sqrt{2\pi}(\alpha^2 + \eta^2)}$$

tem-se que

$$I = \frac{\alpha}{(2\pi)^{\frac{n}{2}+1}} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} (\alpha^2 + \eta^2)^{-1} |\widehat{h^*}(y,\eta)|^2 \, d\eta \, dy \geq 0,$$

Isso demonstra o Lema. ■

## 3.2 Existência e Unicidade de Soluções para (1.32)

Investiga-se nesta seção, a existência e unicidade de soluções do problema (1.32). Em comparação ao problema (1.31), a dificuldade neste problema advém do fator de decaimento exponencial presente no integrando da equação, daí a necessidade do uso dos lemas enunciados na seção anterior para obter as estimativas no uso do método de Faedo-Galerkin e a unicidade da solução. Além disso, não é possível obter a regularidade da solução via formulação variacional do problema de Stokes, em virtude da ausência do termo linear em $\Delta u$.

### 3.2.1 Soluções Fracas

O teorema seguinte garante existência e unicidade de solução fraca para o sistema (1.32).

**Teorema 3.1.** *Se $f \in L^2(0,T;H)$ e $u_0 \in H$, o problema misto* (1.32) *tem uma única solução fraca $u$, além disso*

$$u \in C^0([0,T];H).$$

**Demonstração:**

O problema aproximado de (1.32) consiste em

$$\left| \begin{array}{l} \text{Encontrar } u_m(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t) w_j \in V_m \ \text{ tal que} \\ (u_m'(t), v) \ + \mu \displaystyle\int_0^t g(t-\sigma)\left((u_m(\sigma), v)\right) d\sigma = (f(t), v) \ \ \forall \ v \in V_m \\ u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \ \ em \ \ H, \ m \to +\infty. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Tomando $v = w_j$ e usando a ortonormalidade de $\{w_1, ..., w_n\}$, obtemos o sistema

$$\left| \begin{array}{l} h'_j(t) + \dfrac{\mu}{\nu}\lambda_j \displaystyle\int_0^t g(t-\sigma)h_j(\sigma)d\sigma = (f(t), w_j) \quad \forall\, j \in \{1, ..., m\} \\ h_j(0) = h_{j0} \end{array} \right.$$

que na forma matricial é escrito como

$$\begin{pmatrix} h'_{1m} \\ h'_{2m} \\ \vdots \\ h'_{mm} \end{pmatrix} + \frac{\mu}{\nu} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_0^t g(t-\sigma)h_{1m}(\sigma)\, d\sigma \\ \int_0^t g(t-\sigma)h_{2m}(\sigma)\, d\sigma \\ \vdots \\ \int_0^t g(t-\sigma)h_{mm}(\sigma)\, d\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f(t), w_1) \\ (f(t), w_2) \\ \vdots \\ (f(t), w_m) \end{pmatrix}$$

ou na forma reduzida

$$\left| \begin{array}{l} X'(t) + \dfrac{\mu}{\nu} A \displaystyle\int_0^t g(t-\sigma)X(\sigma)\, d\sigma = \tilde{f}_w(t) \\ X(0) = X_0 \end{array} \right.$$

onde $X$ é a matriz coluna dos $h_{jm}$, $A$ é a matriz diagonal dos $\lambda_j$, $\tilde{f}_w(t)$ é a matriz coluna dos $(f(t), w_j)$ e $X_0$ é a matriz coluna dos dados iniciais $h_{j0m}$.

Considerando a função definida por $F(X,t) = \tilde{f}_w(t) - \dfrac{\mu}{\nu} A \displaystyle\int_0^t g(t-\sigma)X(\sigma)\, d\sigma$, o sistema acima se reduz a forma

$$\left| \begin{array}{l} X'(t) = F(X,t) \\ X(0) = X_0 \end{array} \right. \quad (**)$$

Note que $F$ satisfaz as condições de Carathéodory. De fato,

- $F(X,t)$ é mensurável em $t$, pois cada uma das funções $t \mapsto (f(t), w_j)$ está em $L^2(\Omega)$.

- para $t$ fixado, $F(X,t)$ é contínua em $X$, pois as funções $h_{jm}$ são contínuas.

- $|F(X,t)| = \left| \tilde{f}_w(t) - \dfrac{\mu}{\nu} A \displaystyle\int_0^t g(t-\sigma)X(\sigma)\, d\sigma \right| \leq K|f(t)| + \dfrac{\mu}{\nu} |A| \displaystyle\int_0^t |X|\, d\sigma$, onde $K$ é uma constante. Assim, para todo compacto contido no domínio de $F$ existe uma função integrável $m(t)$, tal que $|F(X,t)| \leq m(t)$.

Logo, pelo Teorema de Carathéodory, o sistema $(**)$ e, portanto, o sistema (3.1) possui uma solução $u_m$ sobre um intervalo $(0, t_m)$, $t_m < T$. Além disso, pela estimativa a seguir, $|u_m(t)|$ é limitada em $(0, t_m)$. Assim, pelo seu colorário, $u_m$ pode ser estendida até $[0, T]$.

**Estimativas**

Considerando-se na equação aproximada $(3.1)_2$ $v = u_m(t) \in V_m$ obtém-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \mu\int_0^t g(t-\sigma)\left(\int_\Omega \nabla u_m(x,t)\nabla u_m(x,\sigma)\,dx\right)d\sigma \leq |f(t)|\,|u_m(t)|.$$

Portanto, integrando de 0 a $t$, segue-se que

$$\begin{aligned} &|u_m(t)|^2 + 2\mu\int_{\Omega\times(0,t)} \nabla u_m(x,s)\left(\int_0^s g(s-\sigma)\nabla u_m(x,\sigma)d\sigma\right)dx\,ds \leq \\ &2\int_0^t |u_m(s)|\,|f(s)|\,ds \ \leq \ \int_0^t |u_m(s)|^2\,ds + \int_0^T |f(s)|^2\,ds + |u_{0m}|^2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Pelo Lema 3.1.3, temos

$$\int_{\Omega\times(0,t)} \nabla u_m(x,s)\left(\int_0^s g(s-\sigma)\nabla u_m(x,\sigma)d\sigma\right)dx\,ds \geq 0.$$

Logo, de (3.2), tem-se que

$$|u_m(t)|^2 \leq \int_0^t |u_m(s)|^2\,ds + \int_0^T |f(s)|^2\,ds + |u_{0m}|^2. \tag{3.3}$$

Sendo $f \in L^2(0,T;H)$, de (3.4), por meio da desigualdade de Grownall, obtém-se

$$|u_m(t)|^2 \leq Ce^t, \ \forall\, t \in (0,T) \tag{3.4}$$

onde $C = \displaystyle\int_0^T |f(t)|^2\ dt + |u_{0m}|^2$.

De $(2.4)_3$, temos que $(u_{0m})_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada. Assim, fazendo $t \to T$ no segundo membro de (3.4), tem-se que $|u_m(t)|^2 \leq C_1, \ \forall\ t \in (0,T)$, onde $C_1$ é uma constante positiva. Integrando de 0 à $T$, obtém-se que

$$(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(0,T;H); \tag{3.5}$$

**Passagem ao Limite**

Sendo $L^2(0,T;H)$ reflexivo, de (3.5) extrai-se uma subsequência de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$, representada pela mesma notação, tal que

$$u_m \rightharpoonup u \ \text{ em } \ L^2(0,T;H). \tag{3.6}$$

Da convergência (3.6), obtém-se

$$\int_0^T (u_m(t), w(t))\, dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), w(t))\, dt, \;\; \forall\, w \in L^2(0,T;H), \tag{3.7}$$

Em particular, para $w \in L^2(0,T;V) \subset L^2(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega))$, tem-se $\nabla w \in L^2(0,T;H)$. Logo,

$$\int_0^T (\nabla u_m(t), \nabla w(t))\, dt \longrightarrow \int_0^T (\nabla u(t), \nabla w(t))\, dt \tag{3.8}$$

para todo $w \in L^2(0,T;V)$. Isso implica em $u_m \rightharpoonup u$ em $L^2(0,T;V)$.

Sejam $\tilde{u}_m$, $\tilde{w}$ as extensões em $t$ de $u_m$, $w$ pondo-se zero fora de $[0,T]$ e $\tilde{g}(\xi)$ igual a $g(\xi)$ se $\xi \geq 0$ e zero se $\xi < 0$. Logo, $\nabla \tilde{u}_m \in L^2(\mathbb{R};H)$, $\tilde{w} \in L^2(\mathbb{R};V)$ e $\tilde{g} \in L^1(\mathbb{R})$, donde segue-se que

$$\int_0^T\!\!\int_0^t g(t-\sigma)\,((u_m(\sigma), w(t)))\; d\sigma\, dt = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(t-\sigma)\left(\int_\Omega \nabla\tilde{u}_m(x,\sigma)\nabla\tilde{w}(x,t)\, dx\right) d\sigma\, dt =$$

$$\int_{\mathbb{R}}\int_\Omega \tilde{g} * \nabla\tilde{u}_m(x,t)\nabla\tilde{w}(x,t)\, dx\, dt = \int_{\mathbb{R}}\int_\Omega \nabla\tilde{u}_m(x,\sigma)\tilde{\tilde{g}} * \nabla\tilde{w}(x,\sigma)\, dx\, d\sigma,$$

onde $\tilde{\tilde{g}}(x) = \tilde{g}(-x)$.

Do Lema 3.1.1 tem-se que $\tilde{g} * \tilde{w} \in L^2(\mathbb{R};V)$, $\forall\, w \in L^2(\mathbb{R};V)$. Logo, da convergência (3.8) tem-se, em particular, que

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\nabla\tilde{u}_m(\sigma), \tilde{\tilde{g}} * \nabla\tilde{w}(\sigma)\Big)\, dt \to \int_{\mathbb{R}} \Big(\nabla\tilde{u}(\sigma), \tilde{\tilde{g}} * \nabla\tilde{w}(\sigma)\Big)\, dt.$$

Note que

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\nabla\tilde{u}(\sigma), \tilde{\tilde{g}} * \nabla\tilde{w}(\sigma)\Big)\; dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\tilde{g} * \nabla\tilde{u}(\sigma), \nabla\tilde{w}(\sigma)\right)\; dt =$$

$$\int_\Omega\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(t-\sigma)\nabla\tilde{u}(x,\sigma)d\sigma\nabla\tilde{w}(x,t)d\sigma\, dt\, dx = \int_0^T\!\!\int_0^t g(t-\sigma)\,((u(\sigma), w(t)))\, d\sigma dt.$$

Assim,

$$\int_0^T\!\!\int_0^t g(t-\sigma)\,((u_m(\sigma), w(t)))\; d\sigma\, dt \to \int_0^T\!\!\int_0^t g(t-\sigma)\,((u(\sigma), w(t)))\, d\sigma dt, \;\; \forall\, w \in L^2(0,T;V). \tag{3.9}$$

Tomando em (3.10), $w = v\theta$ com $v \in V$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, tem-se

$$\int_0^T (u_m'(t), w(t))\, dt = -\int_0^T (u_m(t), w'(t)) dt \longrightarrow -\int_0^T (u(t), w'(t))\, dt. \tag{3.10}$$

Utilizando-se as convergências (3.9), (3.10) e a densidade da união dos $V_m$ em $V$, pode-se passar o limite em $m \to \infty$ na equação aproximada 3.1 e obter

$$-\int_0^T (u(t),v)\theta'(t)\,dt + \int_0^T \left[\mu\int_0^t g(t-\sigma)\,((u(\sigma),v))\,d\sigma\right]\theta(t)\,dt = \int_0^T (f(t),v)\theta(t)\,dt \tag{3.11}$$

$\forall\, v \in V,\ \ \theta \in \mathcal{D}(0,T)$.
Dessa igualdade, obtém-se

$$\frac{d}{dt}(u(t),v) + \mu\int_0^t g(t-\sigma)\,((u(\sigma),v))\,d\sigma = (f(t),v)\ \ \forall\, v \in V,\ \ \text{no sentido de}\ \ \mathcal{D}'(0,T).$$

Sendo $u \in L^2(0,T;V)$, $V \subset H \subset V'$ e observando que

$$\begin{aligned}
-\mu\int_0^t g(t-\sigma)\,((u(\sigma),v))\,d\sigma &= -\mu\int_0^t g(t-\sigma)\left[\int_\Omega (\nabla u(\sigma),\nabla v)\ dx\right]d\sigma \\
= \mu\int_0^t g(t-\sigma)\left[\int_\Omega \Delta u(\sigma) v\,dx\right]d\sigma &= \int_\Omega\left[\mu\int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\,d\sigma\right]v\ dx \\
&= \left\langle \mu\int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)d\sigma, v\right\rangle_{V'\times V}
\end{aligned}$$

obtém-se

$$\frac{d}{dt}\langle u(t),v\rangle = \langle h(t),v\rangle\ \ \forall\, v \in V, \tag{3.12}$$

onde $\langle .,.\rangle$ representa a dualidade entre $V'$ e $V$ e

$$h(t) = \mu\int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\,d\sigma + f(t).$$

Note que $h \in L^2(0,T;V')$, pois $f \in L^2(0,T;H) \hookrightarrow L^2(0,T;V')$ e $|\Delta u(t)|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} = ||u(t)||$ $\Rightarrow$ $\Delta u \in L^2(0,T;\,\mathbf{H}^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;V')$. Logo, conforme Temam [37] pg. 261, de (3.12) segue-se que $u'(t) = h(t)$ quase sempre em $[0,T]$ e, portanto,

$$u' \in L^2(0,T;V') \tag{3.13}$$

e

$$u' = \mu(g * \Delta u) + f,\ \ \text{no sentido de}\ \ L^2(0,T;V'), \tag{3.14}$$

Sendo $u \in L^2(0,T;V)$ e $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ segue-se, de Temam [37], que $u \in C^0([0,T];H)$. Logo, faz sentido calcular $u(0)$.

Resta verificar a condição inicial. Para isso, consideremos uma função $\psi : [0,T] \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ e tal que $\psi(T) = 0$ e $\psi(0) \neq 0$. Multiplicando a equação

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) \ + \ \mu\int_0^t g(t-\sigma)\left((u(\sigma), v)\right) d\sigma = (f(t), v)$$

por $\psi(t)$ e integrando de 0 à $T$, fica

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u(t), v)\psi(t)\ dt \ + \ \mu\int_0^T\int_0^t g(t-\sigma)\left((u(\sigma), v)\right)\psi(t)\, d\sigma\ dt = \int_0^T (f(t), v)\psi(t)\ dt$$

Integrando por partes o primeiro termo, obtemos que

$$\begin{aligned} -\int_0^T (u(t), v)\psi'(t)\ dt \ + \ \mu\int_0^T\int_0^t g(t-\sigma)\left((u(\sigma), v)\right)\psi(t)\, d\sigma\, dt = \\ = (u(0), v)\psi(0) + \int_0^T (f(t), v)\psi(t)\ dt \end{aligned}$$

Repetindo este mesmo procedimento na equação do problema aproximado (3.1) e tomando o limite para $m \to +\infty$, obtemos também que

$$\begin{aligned} -\int_0^T (u(t), v)\psi'(t)\ dt \ + \ \mu\int_0^T\int_0^t g(t-\sigma)\left((u(\sigma), v)\right)\psi(t)\, d\sigma\, dt = \\ = (u_0, v)\psi(0) + \int_0^T (f(t), v)\psi(t)\ dt \end{aligned}$$

Comparando os dois resultados obtidos, temos que $(u(0), v)\psi(0) = (u_0, v)\psi(0), \quad \forall\ v \in V$. Logo, $u(0) = u_0$. □

**Unicidade**

Sejam $u, v$ duas soluções do problema (1.32), logo $w = u - v$ satisfaz

$$w' - \mu\int_0^t g(t-\sigma)\Delta w(\sigma)\, d\sigma = 0, \quad w(0) = 0. \tag{3.15}$$

Tomando o produto escalar da primeira igualdade (3.15) com $w(t)$, tem-se

$$\langle w'(t), w(t)\rangle + \mu\int_0^t g(t-\sigma)((w(\sigma), w(t)))d\sigma = 0$$

Conforme Temam [37] pp. 261, tem-se que $\langle w'(t), w(t)\rangle = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}|w(t)|^2$ e integrando de 0 a $t$, obtém-se

$$\frac{1}{2}|w(t)|^2 + \mu\int_0^t \int_0^s g(s-\sigma)((w(\sigma), w(s)))d\sigma\, ds = 0$$

Donde, do Lema 3.1.3, tem-se que $|w(t)|^2 = 0$. Portanto, $w(t) = 0$ para todo $t \in [0,T]$.

■

Finalmente, o resultado seguinte recupera a pressão e torna preciso o sentido em que a função $\boldsymbol{u}$ definida no Teorema 3.1 satisfaz o problema (1.32).

**Proposição 3.1.** *Sobre as hipóteses do Teorema 3.1, existe uma distribuição* $p : Q \to \mathbb{R}$*, tal que a função* $\mathbf{u}$ *definida no Teorema 3.1 e* $p$ *satifazem o problema* (1.32) *no sentido das distribuições em* $Q$*, além disso,* $p \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

**Demonstração**:
As igualdades $(1.32)_2$ e $(1.32)_4$ do problema (1.32) são uma consequência de $u \in L^2(0,T;V)$ e do Teorema 3.1. A igualdade $(1.32)_3$ é consequência de $u \in L^2(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega))$.

Para introduzir a pressão, como $u'(t) = h(t)$ em $V'$, $h(t)$ definida anteriormente, tem-se que

$$\left\langle u'(t) - \mu\int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\,d\sigma - f(t), v \right\rangle = 0 \tag{3.16}$$

para todo $v \in V$ quase sempre em $[0,T]$. Em particular, como $\mathcal{V} \subset V$, tem-se

$$\left\langle u'(t) - \mu\int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\,d\sigma - f(t), v \right\rangle = 0, \tag{3.17}$$

para todo $v \in \mathcal{V}$ quase sempre $[0,T]$. Logo, conforme Proposição 4.1 do Apêndice, existe $p(t) \in D'(\Omega)$ tal que

$$-\nabla p(t) = u'(t) - \mu\int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)\,d\sigma - f(t). \tag{3.18}$$

Daí conclui-se que

$$\nabla p(t) \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega). \tag{3.19}$$

Isto diz que cada $\dfrac{\partial p(t)}{\partial x_i} \in H^{-1}(\Omega)$ para cada $i = 1, 2, ...., n$. Logo, da Proposição 4.2 item $(ii)$ do Apêndice, tem-se que

$$p(t) \in L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad |p(t)|_{L^2(\Omega)} \leq C||\nabla p(t)||_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}.$$

Sendo, por (3.18), $\nabla p \in L^2(0,T;\left[\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right]^n)$, obtém-se

$$p \in L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.20}$$

# Capítulo 4

# Apêndice

Neste apêndice se encontram os resultados básicos que foram citados no capítulo 2. Não apresentaremos as demonstrações, apenas citaremos a referência onde se encontram. Sejam

$$\begin{aligned} &\mathcal{V} = \{u \in \mathbf{D}(\Omega), div(u) = 0\}, \\ &H = \text{o fecho de } \mathcal{V} \text{ em } \mathbf{L}^2(\Omega), \\ &V = \text{o fecho de } \mathcal{V} \text{ em } \mathbf{H}_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Considera-se $\Omega$ um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $p$ uma distribuição sobre $\Omega$, $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Logo, para algum $\nu \in \mathcal{V}$, temos

$$< \nabla p\,, \nu >= \sum_{i=1}^{n} < D_i, \nu_i >= -\sum_{i=1}^{n} < p, D_i\nu_i >= - < p, div(\nu) >= 0, \tag{4.1}$$

porque, $\nu \in \mathcal{V}$.

Nota-se também que a recíproca desse resultado é verdadeira, isto é,

**Proposição 4.1.** *Sejam $\Omega$ um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $f = \{f_1, \cdots, f_n\}$, $f_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $i = 1, 2, \cdots, n$. Uma condição necessária e suficiente para*

$$f = \nabla p,\ p \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

*é que*

$$< f, \nu >= 0, \quad \forall\ \nu \in \mathcal{V}.$$

Este resultado foi provado por De Rham em [37]. Em situações práticas ele é muito importante, pois, graças a este, pode-se recuperar a pressão nas equações de Navier-Stokes.

Apesar da Proposição 4.1 ser uma boa forma de caracterizar a gradiente da pressão, deve-se obter mais propriedades para fins práticos. De fato, seja

$$L_0^2(\Omega) := \left\{ p \in L^2(\Omega), \quad \int_\Omega p(x)dx = 0 \right\},$$

as seguintes proposição dão caraceterísticas melhores para a pressão.

**Proposição 4.2.** *Seja $\Omega$ uma aberto limitado Lipschitziano do $\mathbb{R}^n$.*

*(i) Se a distribuição $p$ tem todas as derivadas de primeira ordem $D_ip$, $1 \leq i \leq n$, em $L^2(\Omega)$, então $p \in L^2(\Omega)$ e*

$$||p||_{L_0^2(\Omega)} \leq c(\Omega)||\nabla p||_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}. \tag{4.2}$$

*(ii) Se a distribuição $p$ tem todas as derivadas de primeira ordem $D_ip$, $1 \leq i \leq n$, em $H^{-1}(\Omega)$, então $p \in L^2(\Omega)$ e*

$$||p||_{L_0^2(\Omega)} \leq c(\Omega)||\nabla p||_{\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)}. \tag{4.3}$$

*(iii) Em ambos os casos, se $\Omega$ é apenas um aberto do $\mathbb{R}^n$, $p \in L^2_{loc}(\Omega)$.*

**Demonstração:** Veja Temam [37]. ∎

**Observação 4.1.** *Seja $\Omega$ apenas um aberto do $\mathbb{R}^n$, então, combinando as proposições 4.1 e 4.2, vemos que, se $f \in \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$ (ou $f \in \boldsymbol{L}^2_{loc}(\Omega)$) e $(f, \nu) = 0, \;\; \forall\, \nu \in \mathcal{V}$, então $f = \nabla p$ com $p \in L^2_{loc}(\Omega)$. Entretanto, se $\Omega$ for um aberto limitado Lipschtziano, então $p \in L^2(\Omega)$ (ou $p \in H^1(\Omega)$).*

**Observação 4.2.** *A parte (ii) da proposição 4.2 implica que o operador gradiente é um isomorfismo de $L_0^2(\Omega)$ em $H^{-1}(\Omega)$; portanto a imagem desse operador linear é fechada.*

Denotaremos o expoente de Sobolev por $\alpha$ para que não haja confusão com a pressão $p$.

**Proposição 4.3.** *Sejam $\Omega$ um aberto limitado de classe $C^r$, $\;\; r = max(m+2, 2)$, $m$ inteiro positivo. Vamos supor que*

$$u \in \boldsymbol{W}^{2,\alpha}(\Omega), \quad p \in W^{1,\alpha}(\Omega), \quad 1 < \alpha < \infty,$$

*são soluções do problema de Stokes:*

$$\left| \begin{array}{l} -\eta\Delta(u) + \nabla p = f \quad em \quad \Omega \\ div(u) = g \quad em \quad \Omega \\ \gamma_0 u = \phi \;\; isto\ é \;\; u = \phi \quad sobre \quad \Gamma. \end{array} \right.$$

*Se* $f \in \boldsymbol{W}^{m,\alpha}(\Omega),\ g \in \boldsymbol{W}^{m+1,\alpha}(\Omega)$ *e* $\phi \in \boldsymbol{W}^{m+2-\frac{1}{\alpha},\alpha}(\Gamma)$, *então*

$$u \in \boldsymbol{W}^{m+2,\alpha}(\Omega),\ p \in \boldsymbol{W}^{m+1,\alpha}(\Omega)$$

*e existe uma constante* $c_0(\alpha, \nu, m, \Omega)$ *tal que*

$$\begin{aligned}&||u||_{\boldsymbol{W}^{m+2,\alpha}(\Omega)} + ||p||_{\boldsymbol{W}^{m+1,\alpha}(\Omega)\backslash\mathbb{R}} \leq \\ &\leq c_0\big\{||f||_{\boldsymbol{W}^{m,\alpha}(\Omega)} + ||g||_{\boldsymbol{W}^{m+1,\alpha}(\Omega)} + \\ &+||\phi||_{\boldsymbol{W}^{m+2-\frac{1}{\alpha},\alpha}(\Gamma)} + d_\alpha ||u||_{\boldsymbol{L}^{\alpha}(\Omega)}\big\},\end{aligned}$$

*onde* $d_\alpha = 0$ *para* $\alpha \geq 2,\ d_\alpha = 1$ *para* $1 < \alpha < 2$ *e* $\boldsymbol{W}^{m+2-\frac{1}{\alpha},\alpha}(\Gamma) = \gamma_0 \boldsymbol{W}^{m+2,\alpha}(\Omega)$ *está equipado com a norma*

$$||\psi||_{\boldsymbol{W}^{m+2-\frac{1}{\alpha},\alpha}(\Gamma)} = \inf_{\gamma_0 u = \psi} ||u||_{\boldsymbol{W}^{m+2,\alpha}(\Omega)}.$$

**Observação 4.3.** *Faz-se notar que a Proposição 4.3 não é um teorema de existência para uma solução regular* $(u, p)$ *do problema de Stokes, ela fornece somente um resultado sobre a regularidade de uma eventual solução.*

# Bibliografia


[1] Astarita, G. and Marruci, G. Principles of non-Newtonian fluid mechanics. McGraw-Hill, 1974.

[2] Batchelor, G.K. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press, ISBN 0521663962

[3] Bland, D.R. The theory of linear viscoelasticity. Pergamon Press,Oxford, 1960.

[4] Brezis, H., Functional Analysis, Sobolev Spaces and partial Diferential Equations, Rutgers University, March (2010).

[5] Cavalluci, A. Sulle proprieta differenziali delle soluzioni delle equazioni quasi-ellitiche, Ann. Mat. Pura Appl. 4(1965) 143-168.

[6] Clifford Ambrose Truesdell- A first course in rational continuum mechanics, Vol. I(Part 1), Academic Press, 1977; Vols. II(Parts 2,3), III(Parts 4-6)(to appear); French transl. of Parts 1-4, Masson, Paris, 1973; Russian transl. of Parts 1-5, "Mir", Moscow, 1975.

[7] Duvaut, G. and Lions, J.L. Les inequations en mechanique et en physique. Dunod, Paris 1972; English transl., Springer-Verlag, 1976.

[8] Ebehard Hopf. Uber die Anfangswertaufgabe fur die hydrodynamischen Grundgleichungen. Math. 4(1951), 213-251.

[9] Ebehard Hopf. Statical hydromechanics and functional calculus. J.Rational Mech. Anal. 1(1952), 87-123.

[10] James Clerk Maxwell. On the dynamical theory of gases. Philos. Trans. Roy. Soc. London 157(1868), 35(1867), 49-88.

[11] James Clerk Maxwell. On the dynamical theory of gases.Philos. Magazine 129-145[Reprint of the first half of [10]].

[12] James Serrin. Mathematical principles of classical fluid mechanics. Handbuch der Physik, Vol. 8/1, Springer-Verlag, 1959, pp. 125-263.

[13] Jean Leray. Étude sur les diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problémes quipose l'hydrodynamique. J. Math. Pures Appl. (9)12(1933), 1-82.

[14] Jean Leray. Essay sur les mouvements plans d'un liquide visceux que limitent des parois. J. Math. Pures Appl. (9)13(1934), 331-418.

[15] Jean Leray. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'space. Acta Math. 63(1934), 193-248.

[16] Jean Leray and Jules schauder. Topologie et équations fonctionnelles. Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) 51 (1934), 45-78.

[17] Kelvin(Thomson) W. On the theory viscoelastic fluids. Math. a. Phys. Pap. 1875. Vol. 3. P. 27-84.

[18] Ladyzhenskaya, O.A. Mathematical problems inthe dynamics of a viscous incompressible mathematical theory of viscous incompressible flow. Gordon and Breach, New York, 1963; rev. 1969.

[19] Ladyzhenskaya, O.A. Matthematical Analysis of the Navier-Stokes equations for incompressible liquids. Ann. Rev. Fluid Mech. vol. 7(M. van Dyke et al., editors), Ann. Rev., Inc., Palo Alto, Calif., 1975, pp. 249-272.

[20] Lions, J.L. Equations Differenhelles Operationelles dans des Espaces de Hilbert. CIME, Verena 1963.

[21] Medeiros, L. A., Milla Miransa, M., Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elípticos não Homogêneos), Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, (2000).

[22] Medeiros, L. A., Milla Miranda, M., Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, (2011).

[23] Oldroyd, J.G. Non-Newtonian flow of liquids and solids, Rheology: Theory and Applications. Vol. 1(F.R. Eirich Editor), Academic Press, 1959, pp. 653-682.

[24] Oldroyd, J.G. On the formulation of rheological equations of state. Proc. Roy. Soc. London Ser. A200(1950), 253-541.

[25] Oldroyd, J.G. The elastic and viscous proprieties of emulsions and suspensions. Proc. Roy. Soc. London Ser. A218(1953), 122-132.

[26] Oldroyd, J.G. Non-linear stress, rate of strain relations at finite rates of shear in so-called linear elastico-viscous liquids, Second-order Effects in Elasticity, Plasticity and Fluid Dynamics (Internat. Sympos., Haifa, 1962; M. Reiner and D. Abir Editors). Jerusalem Academic Press, Jerusalem, and Pergamon Press, Oxford, 1964, pp. 520-529.

[27] Oliveira, A.M. Controlabilidade aproximada e controle hierárquico para a equação do movimento moderado de fluidos de Oldroyd. Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 2008.

[28] Oskolkov, A.P. initial boundary value problems for the equations of motion of Kelvin-Voigt fluids and Oldroyd fluids. Proc. of the Steklov, Institute of Mathematics, 1989, Issue 2.

[29] Oskolkov, A.P. Initial boundary value problems for the equations of motion of Kelvin-Voigt fluids and Oldroyd fluids. Proc. of the Steklov, Institute of Mathematics, 1989, Issue 2.

[30] Oskolkov, A.P. and Akhmatov, M.M. Convergent difference schemes for equations of motion of oldroyd fluids. J. Sov. Math. 2, No. 4 (1974).

[31] Oskolkov, A.P. and Kotsiolis, A.A. Solvability of the basic initial boundary problem for the equations of motion of an Oldroyd fluid on $(0, \infty)$ and the behavior of its solutions as $t \to \infty$. Inst. V. A. Steklova AN SSSR, Vol. 150, pp. 48-52, 1986.

[32] Oskolkov, A.P., Karazeeva, N.A and Kotsiolis, A.A. Dynamical system generated by the equations of motion of an Oldroyd fluid of order $L$. Inst. V. A. Steklova AN SSSR, Vol. 164, pp. 47-53, 1987.

[33] Pani, A.K., Jin Yun Yuan and Pedro D. Damazio. On a linearized backward euler method for the equations of motion of Oldroyd fluids of order one. Siam J. Numer. Anal. Vol. 44, No. 2, pp. 804-825.

[34] Raymond, X. S. Elementary Introduction to the Theory of Pseudodifferential Operators. CRC Press, London 1991.

[35] Silva, R.O. Controlabilidade aproximada da equação de Navier-Stokes. UFPI, Teresina, 2010.

[36] Sobolev, S.L. Applications of functional analysis in mathematical physiscs. Izdat. Leningrad. Gos. Univ. Leningrad, 1950; English translate.

[37] Temam, R. Navier-Stokes Equations vol 2. North-Holland 1979.

[38] Temam, R. and Ekeland, I. Analyse convexe et problémes variationnelles. Dunod, Gautier Villars 1974.

[39] Vinogradov, G.V. and Malkin, A. Yah. Rheology of Polimers. Khimiya, Moscow, 1977; English Transl., Springer-Verlag, 1981.

[40] Voigt, W. Uber die innere Reinbung der festen Korper, insbessondere der Krystalle. Abh. Konigl. Ges. Wiss. Gottingen 36(1889), no. 1.

[41] Voigt, W. Uber innere fester Korper, insbessondere der Metalle. Ann. Phys. und Chen. 283(Neue Folge 47)(1892), 671-693.

[42] Walters, K. Non-Newtonian effects in some general elastico-viscous, Second order Eefects in elasticity, plasticity and fluid dynamics(Internat. Sympos. Haifa, 1962; M. Reider and D. Abir, editors), Jerusalem Academic Press, Jerusalem, and Pergamon Press, Oxford, 1964, pp. 507-519.

[43] Wilkinson, W.L. Non-Newtonian fluids. Pergamon Press, Oxford, 1960.