



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
Centro de Ciências da Natureza  
Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

# Modelagem Matemática da População Teresinense e a Síndrome da Imunodeficiência Adquirida (AIDS)

Reneé Rodrigues Lima

Teresina  
2016



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
Centro de Ciências da Natureza  
Departamento de Matemática

# Modelagem Matemática da População Teresinense e a Síndrome da Imunodeficiência Adquirida (AIDS)

**Reneé Rodrigues Lima**

Dissertação apresentada ao Programa de  
Pós-Graduação – Mestrado Profissional  
em Matemática em Rede Nacional como  
requisito parcial para a obtenção do grau de  
Mestre em Matemática

Orientador  
**Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite**

**Teresina**  
**2016**

L732m Lima, René Rodrigues

Modelagem Matemática da População Teresinense e a Síndrome da Imunodeficiência Adquirida (AIDS)/ René Rodrigues Lima. - Teresina, 2016.

75 f.:fig.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2016.

Orientador: Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite

1. Modelagem Matemática. 2. População de Teresina. 3. AIDS. 4. Modelo Exponencial Assintótico. 5. Modelo Logístico Contínuo.

I. Título

CDD 511.8

FICHA CATALOGRÁFICA

Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí  
Biblioteca Setorial do CCN



**PROFMAT**



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



---

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada: Análise e Resolução de Problemas Clássicos de Probabilidade para o Ensino Médio, defendida por **Marcelo Alessandro Amorim Franco de Sá** em 31/08/2015 e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Prof. Dr. João Benício de Melo Neto  
Presidente da Banca Examinadora

Prof.ª. Dr.ª. Valmária Rocha da Silva Ferraz  
Examinador Interno

Prof. Dr. Gilvan Lima de Oliveira  
Examinador Interno

Prof. Me. Álvaro Pereira de Carvalho  
Examinador Externo

*Dedico este trabalho a Suellen Lima, minha esposa; Francisco Irandevan, meu pai; Divina Rochelly, minha mãe; Stênio Rodrigues, meu irmão; pelo incentivo nos momentos difíceis, pela paciência, compreensão e carinho.*

# Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, à Deus por me abençoar nessa caminhada acadêmica e pela disposição e sabedoria para conciliar o trabalho com o PROFMAT.

Agradeço à minha esposa pela compreensão, paciência e sabedoria nos momentos inquietações, angústias e momentos de estudos, principalmente nos finais de semana.

Agradeço aos meus pais, Francisco Irandevan e Divina Rochelly, e meu irmão, Stênio Rodrigues, pelos incentivos, compreensão e momentos de distrações.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Jefferson Leite, por me dar o crédito de realizar esse trabalho e pelo auxílio no decorrer do trabalho.

À todos os professores desse programa pela transmissão do conhecimento que vão subsidiar aperfeiçoamento na minha prática docente.

Aos meus colegas da turma do PROFMAT pelo companheirismo, união, troca de experiências durante todo o programa, principalmente pelas quintas-feiras de estudos realizadas semanalmente.

Aos amigos, colegas e alunos do IFPI - Campus Angical, pela força, apoio e compreensão.

À todos que torceram pela realização de mais esse sonho, muito obrigado!

# Resumo

Este trabalho tem como objetivo desenvolver a Modelagem Matemática no estudo do crescimento da população e dos números de casos de diagnóstico da AIDS do município de Teresina. Para tanto, definiu-se Modelagem Matemática e suas etapas juntamente com alguns modelos. Em seguida, para o desenvolvimento da modelagem, fez-se um levantamento dos dados do nosso problema de estudo e desenvolveu-se então uma modelagem contínua e discreta. Observou-se que os modelos contínuos se ajustam melhor aos dados e, por fim, fez-se a comparação dos modelos do crescimento da população e do número de casos do vírus da AIDS no município de Teresina.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática, População de Teresina, AIDS, Modelo Exponencial Assintótico, Modelo Logístico Contínuo.

# Abstract

This work aims to develop the Mathematical Modeling in the study of population growth and their number of cases of AIDS diagnosis in the Teresina city. To this end, it was decided Mathematical Modeling and its steps along with some models. Then to the development of modeling , there was a survey of data from our study of problem and then developed a continuous and discrete modeling. It was observed that the best of continuous model fits the data and eventually became a comparison of growth models of population and number of cases of AIDS virus in the Teresina city.

**Keywords:** Mathematical Modeling, Population of Teresina, AIDS, Exponential Asymptotic model, Logistic Continuous model.

# Lista de Figuras

1.1	Etapas de uma modelagem matemática . . . . .	15
2.1	Curva de Tendência da População Teresinense . . . . .	27
2.2	Curva de Tendência de casos da AIDS . . . . .	27
3.1	Curva do valor de estabilidade com todos os dados da população . . . . .	29
3.2	Curva do valor de estabilidade com dados da população a partir de 1960 . . . . .	29
3.3	Curva Exponencial Auxiliar com dados da população a partir de 1960 . . . . .	30
3.4	Cruzamento dos dados da população com o modelo exponencial assintótico . . . . .	31
3.5	Curva do valor de estabilidade com dados da população a partir de 1970 . . . . .	32
3.6	Curva do valor de estabilidade com dados da população a partir de 1970 . . . . .	33
3.7	Modelo 2 - dados da população x modelo exponencial assintótico . . . . .	34
3.8	Curva do valor de estabilidade com todos os dados dos casos da AIDS . . . . .	34
3.9	Curva do valor de estabilidade com dados de casos da AIDS a partir de 1989 . . . . .	36
3.10	Curva Exponencial Auxiliar com dados de casos da AIDS a partir de 1989 . . . . .	38
3.11	Cruzamento dos dados de casos da AIDS com o modelo exponencial assintótico . . . . .	38
3.12	Curva do valor de estabilidade com dados dos casos da AIDS a partir de 1990 . . . . .	40
3.13	Curva Exponencial Auxiliar com dados de casos da AIDS a partir de 1990 . . . . .	42
3.14	Modelo 4 - dados de casos da AIDS x modelo exponencial assintótico . . . . .	42
3.15	Curva auxiliar do modelo logístico 1 . . . . .	45
3.16	Curva de Cruzamento dos dados da população com o modelo logístico 1 . . . . .	46
3.17	Curva auxiliar do modelo logístico 2 . . . . .	48
3.18	Curva de Cruzamento dos dados da população com o modelo logístico 2 . . . . .	49
3.19	Curva auxiliar do modelo logístico 3 . . . . .	50
3.20	Curva de número de casos da AIDS com o modelo logístico 3 . . . . .	53
3.21	Curva auxiliar do modelo logístico 4 . . . . .	55
3.22	Curva Cruzamento do número de casos da AIDS com o modelo logístico 4 . . . . .	55
4.1	Modelo Malthusiano da população Teresinense ( $t=0=1872$ ) . . . . .	59

4.2	Cruzamento dos dados da população Teresinense e do modelo Malthusiano	60
4.3	Modelo Malthusiano do número de casos de AIDS (t=0=1986)	60
4.4	Cruzamento dos dados da população Teresinense e do número de casos de AIDS	61
4.5	Cruzamento de $P_n$ x Variação ( $P_{n+1} - P_n$ )	62
4.6	Curva do Modelo Logístico Discreto da população	63
4.7	Cruzamento dos dados da população com o Modelo Logístico Discreto	64
4.8	Cruzamento de $A_n$ x Variação ( $A_{n+1} - A_n$ )	64
4.9	Curva do Modelo Logístico Discreto do número de casos da AIDS	66
4.10	Cruzamento dos dados da população com o Modelo Logístico Discreto	68

# Lista de Tabelas

2.1	População Teresinense - Fonte: IBGE . . . . .	25
2.2	Diagnóstico da AIDS em Teresina - Fonte: SINAN . . . . .	26
2.3	População Teresinense dividido por 1000 . . . . .	26
3.1	Relação de $P_n$ e $P_{n+1}$ . . . . .	28
3.2	Dados para curva exponencial auxiliar . . . . .	30
3.3	Dados do modelo Exponencial Assintótico para população . . . . .	31
3.4	Dados para curva exponencial auxiliar . . . . .	32
3.5	Dados do modelo Exponencial Assintótico para população . . . . .	33
3.6	Relação entre Diagnóstico da AIDS $A_n$ e $A_{n+1}$ . . . . .	35
3.7	Dados para curva exponencial auxiliar . . . . .	37
3.8	Dados do modelo Exponencial Assintótico de casos da AIDS . . . . .	39
3.9	Dados para curva exponencial auxiliar . . . . .	41
3.10	Dados do modelo Exponencial Assintótico de casos da AIDS . . . . .	43
3.11	Cálculo de $\frac{P_n}{y^* - P_n}$ do modelo logístico 1 . . . . .	45
3.12	Dados da população com o modelo logístico 1 . . . . .	46
3.13	Dados da projeção da população com o modelo logístico 1 . . . . .	47
3.14	Cálculo de $\frac{P_n}{y^* - P_n}$ do modelo logístico 2 . . . . .	48
3.15	Dados da população com o modelo logístico 2 . . . . .	49
3.16	Dados da projeção da população com o modelo logístico 2 . . . . .	50
3.17	Cálculo de $\frac{A_n}{y^* - A_n}$ do modelo logístico 3 . . . . .	51
3.18	Dados do número de casos da AIDS com o modelo logístico 3 . . . . .	52
3.19	Dados da projeção do número de casos da AIDS com o modelo logístico 3 . . . . .	53
3.20	Cálculo de $\frac{A_n}{y^* - A_n}$ do modelo logístico contínuo 4 . . . . .	54
3.21	Dados do número de casos da AIDS com o modelo logístico 4 . . . . .	56
3.22	Dados da projeção do número de casos da AIDS com o modelo logístico 4 . . . . .	57
4.1	Dados do modelo Malthusiano da população Teresinense . . . . .	59
4.2	Variação da População Teresinense . . . . .	61
4.3	Modelo Logístico Discreto da população . . . . .	63

4.4	Variação do número de Casos da AIDS . . . . .	65
4.5	Modelo Logístico Discreto do Número de Casos da AIDS . . . . .	67
5.1	Modelo Exponencial Assintótico 2 x Modelo Logístico Contínuo 4 . . . . .	70
5.2	Modelo Logístico Contínuo 2 x Modelo Logístico Contínuo 4 . . . . .	72

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>4</b>
<b>Abstract</b>	<b>5</b>
<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>1 Modelagem Matemática</b>	<b>14</b>
1.1 Etapas da modelagem . . . . .	14
1.2 Modelos Matemáticos . . . . .	17
1.2.1 Modelo Exponencial Assintótico - Método de Ford-Walford . . . . .	17
1.2.2 Modelo Malthusiano . . . . .	18
1.2.3 Modelo Logístico Contínuo (Verhurst) . . . . .	20
1.2.4 Modelo de Montroll . . . . .	21
1.2.5 Modelo de Gompertz . . . . .	21
<b>2 Coleta de Dados</b>	<b>25</b>
<b>3 Modelagem Contínua</b>	<b>28</b>
3.1 Modelo Exponencial Assintótico - Método de Ford-Walford . . . . .	28
3.1.1 População Teresinense . . . . .	28
3.1.2 Síndrome da Imunodeficiência Adquirida (AIDS) . . . . .	34
3.2 Modelo Logístico Contínuo . . . . .	44
3.2.1 População Teresinense . . . . .	44
3.2.2 Síndrome da Imunodeficiência Adquirida (AIDS) . . . . .	50
<b>4 Modelagem Discreta</b>	<b>58</b>
4.1 Modelo Malthusiano . . . . .	58
4.1.1 População Teresinense . . . . .	58
4.1.2 Casos da Síndrome da Imunodeficiência Adquirida (AIDS) . . . . .	58
4.2 Modelo Logístico Discreto . . . . .	60
4.2.1 População Teresinense . . . . .	60

4.2.2 Casos da Síndrome da Imunodeficiência Adquirida (AIDS) . . . . .	63
<b>5 Crescimento Populacional x Número de Casos da AIDS</b>	<b>69</b>
5.1 Exponencial Assintótico 2 x Logístico Contínuo 4 . . . . .	69
5.2 Logístico Contínuo 2 x Logístico Contínuo 4 . . . . .	71
<b>6 Conclusão</b>	<b>73</b>
<b>Referências</b>	<b>74</b>

---

## Introdução

“A matemática é difícil”. Essa é uma das justificativas mais apontadas pelos alunos com relação ao fracasso na disciplina de Matemática. Para alguns estudantes, a matemática deixa de ser interessante quando os mesmos não conseguem entender os conteúdos ministrados. Acredita-se que isso se deve ao tradicionalismo. Com isso, há a necessidade de remodelar o ensino de matemática, ou seja, o ensino de matemática tem que deixar de ser reprodução de conteúdos e as aulas tornarem-se mais práticas sendo contextualizadas com situações do cotidiano dos educandos.

Nesse sentido, acredita-se a Modelagem Matemática é a alternativa de ensino que levam os alunos a construir seu próprio conhecimento por meio do desenvolvimento de atividades que fazem parte do seu cotidiano.

Ao implementar uma prática que leve o aluno a buscar as relações existentes e estabelecidas entre o cotidiano e o mundo matemático, tenta-se com isso despertar novamente o interesse pela Matemática.

O objetivo principal deste trabalho é mostrar que podemos relacionar conteúdos essencialmente não matemáticos com o conhecimento matemático e, a partir de um modelo, tirar as nossas conclusões. Com isso, pensou-se qual a relação entre uma relação entre uma determinada doença e a população de Teresina.

A escolha do tema aconteceu do seguinte modo: foi pensado em várias doenças como dengue, Chikungunya, entre outras. Entretanto decidiu-se fazer sobre a AIDS pois é uma doença que até o momento não há a cura, mesmo já existindo algum tratamento que inibe o vírus.

A população escolhida para fazer o estudo foi a cidade de Teresina, estado do Piauí, por ser uma capital de grande porte e estar relacionado com o nosso meio de convivência.

No capítulo 1 deste trabalho, definimos modelagem matemática, modelo matemático, etapas de uma modelagem matemática e alguns modelos matemáticos.

No capítulo 2, expomos a coleta de dados realizada nos sites oficiais do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística e do Ministério da Saúde.

No capítulo 3, apresentamos a modelagem contínua, com o modelo exponencial assintótico e o modelo logístico contínuo, dos dados da população Teresinense e o número de casos da AIDS.

No capítulo 4, apresentamos a modelagem discreta, através dos modelos malthusiano e o logístico discreto, dos dados acima mencionados.

No capítulo 5, será feito o cruzamento dos dados da população teresinense com o número de infectados pela Síndrome da Imunodeficiência Adquirida (AIDS).

Posteriormente, em trabalhos futuros, pretende-se formular problemas que sejam abordados no ensino médio a partir dos resultados encontrados neste trabalho, de modo que

o processo ensino-aprendizagem da matemática desperte e torne-se atraente a partir do momento que a matemática é útil para resolver problemas do dia-a-dia.

# 1 Modelagem Matemática

Fazer com que os alunos gostem mais de matemática é um desafio. Com isso acredita-se que com problemas essencialmente não-matemático, vindo do nosso cotidiano, podemos vencer esse desafio.

A modelagem matemática tem como essência resolver por meio da matemática problema não necessariamente matemático. Pode se definir que “a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando a sua solução na linguagem do mundo real”. (BASSANEZI, 2013, p.16)

No ponto de vista de Biembengut e Hein (2013, p.12),

Modelagem Matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Este, sob certa óptica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter sendo lúdico para jogar com as variáveis envolvidas.

Já para Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.15), a Modelagem Matemática visa propor soluções para problemas por meio de modelos matemáticos. O modelo matemático, nesse caso, é o que “dá forma” à solução do problema e a Modelagem Matemática é a “atividade” de busca por essa solução.

Para modelarmos algum problema ou situação real, devemos seguir algumas etapas descritas a seguir.

## 1.1 Etapas da modelagem

Segundo Bassanezi (2012), a modelagem é um processo dinâmico para se obter modelos, sendo caracterizada por etapas que se complementam.

Bassanezi (2012) ainda diz que:

modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado. O modelo pode ser considerado como uma síntese da reflexão sobre alguma parte da realidade. Seu objetivo é explicar ou entender a situação estudada para, eventualmente poder agir sobre ela e, mesmo as situações mais simples fornecem motivações para uma iniciação científica.

A modelagem matemática de um problema deve seguir as etapas conforme pode ser visto na figura 1.1.

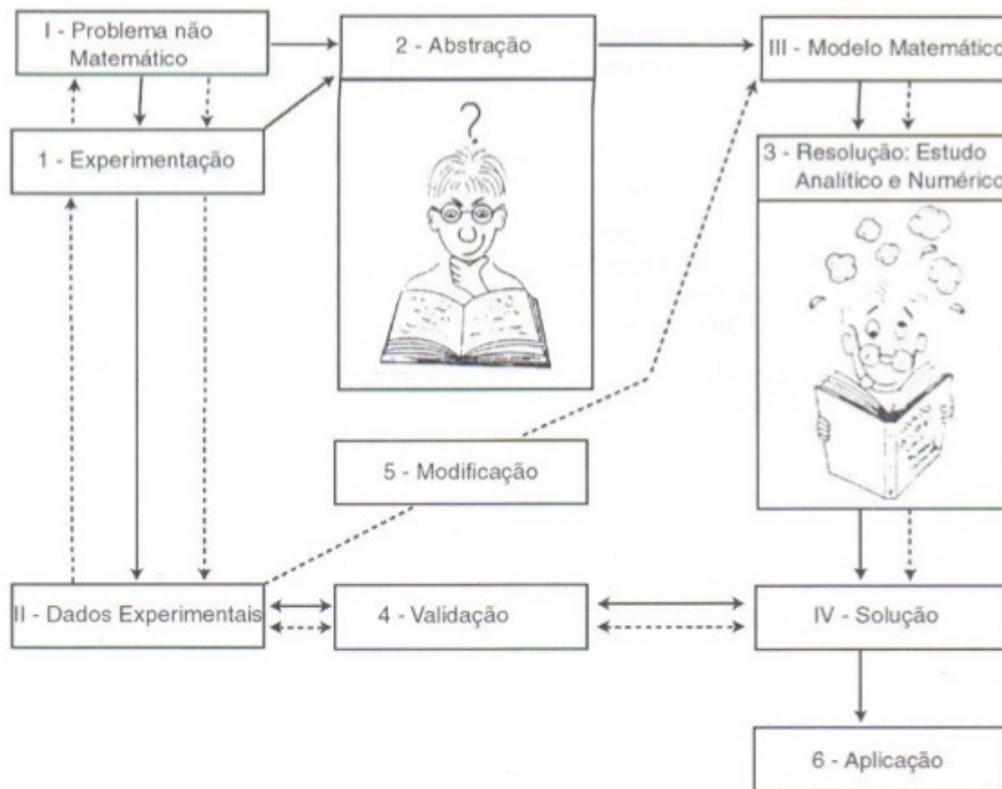


Figura 1.1: Etapas de uma modelagem matemática

A definição das etapas da Modelagem Matemática de acordo com Bassanezi (2012) são:

**Experimentação:** Quando se tem um tema de estudo, a obtenção de dados experimentais ou empíricos é fundamental para a compreensão do problema e ajudam na estruturação, formulação e modificações eventuais dos modelos. Além disso, os dados experimentais decidem a validação dos modelos.

Os métodos experimentais são ditados pela natureza do experimento e objetivo da pesquisa e, via de regra, realizados por pesquisadores de áreas específicas relacionadas aos projetos. Entretanto, no caso educacional a obtenção de dados pode facilmente ser realizada por não-especialistas, via Internet.

**Abstração:** É o processo de seleção das variáveis essenciais responsáveis pela evolução do fenômeno estudado. Nesta fase são formuladas as hipóteses e “leis” que deverão ser testadas na validação do modelo. A analogia entre sistemas é fundamental para a formulação destas leis e simplificação dos modelos.

**Formulação do modelo:** O modelo matemático é montado quando se substitui a linguagem usual por uma linguagem matemática. A construção do modelo segue de perto o uso de um dicionário que traduz as palavras-chave em alguma estrutura matemática. Assim, a variação de uma população pode ser traduzida por:

$$\frac{dP}{dt}: \text{derivada de } P(t) \text{ em relação ao tempo (variação contínua)}$$

ou

$$P(t_2) - P(t_1): \text{derivada da população em tempos distintos (variação discreta)}$$

ou

$$\frac{P(t_2) - P(t_1)}{t_2 - t_1}: \text{variação média de uma população}$$

Se tivermos como hipótese que a variação populacional é proporcional à população, usando a formulação de variação contínua, temos:

$$\frac{dP}{dt} = aP$$

**Resolução:** A resolução de um modelo depende da sua complexidade, podendo ser uma resolução analítica ou numérica. No caso de sistemas de equações diferenciais, muitas vezes, devemos nos satisfazer apenas com soluções qualitativas. No caso de um curso introdutório de EDO, o aprendizado de técnicas para resolver equações pode ser mais relevante que as demais etapas do processo de modelagem.

**Validação:** Validar um modelo matemático significa comparar a solução obtida com dados reais. A validação depende do grau de aproximação desejado e, na maioria das vezes esta etapa pode ser descartada quando se trata de um curso inicial de EDO.

**Modificação:** Se na validação do modelo o grau de aproximação desejado não é atingido, devemos inserir novas variáveis no modelo ou modificar a lei de formação, e o modelo original deve ser modificado iniciando novamente o processo. A formulação de novos modelos mais complexos, baseados em modelos simples é uma boa estratégia de ensino-aprendizagem.

**Aplicação:** A modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender; enfim, participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças. A linguagem oferecida pelas equações diferenciais e equações de diferenças é fundamental na transferência e entendimento da linguagem “natural”, uma vez que a palavra-chave variação aparece quase sempre nas situações reais.

## 1.2 Modelos Matemáticos

Conforme Bassanezi (2012), “um problema real não pode ser representado de maneira exata em toda sua complexidade por uma equação matemática ou um sistema de equações. Um modelo deve ser considerado apenas como um retrato ou uma simulação de um fenômeno e sua validação depende muito da escolha das variáveis e das hipóteses formuladas. É muito frequente em se tratando de modelar um fenômeno ou um experimento, obtermos equações para descrever as “variações” das quantidades (variáveis de estado) presentes e consideradas essenciais. Desta forma, as leis que regem tal fenômeno são traduzidas por equações de variações. Quando estas variações são instantâneas, a dinâmica do fenômeno se desenvolve continuamente e as equações matemáticas são denominadas equações diferenciais, ao passo que se as variáveis envolvidas forem discretizadas, isto é, funções de uma malha de pontos, em que temos as médias das variações, então as equações do modelo serão denominadas equações de diferenças. De qualquer forma, podemos ter situações modeladas pelos dois tipos de equações”. Para tanto, mostraremos vários modelos, onde usaremos alguns neste trabalho.

### 1.2.1 Modelo Exponencial Assintótico - Método de Ford-Walford

Sabe-se toda população não cresce infinitamente, ou seja, ela atinge certo limite. Com isso dizemos que a curva tem como solução um comportamento assintótico que é dado pelo modelo Exponencial Assintótico:

$$y = y^* - ae^{bx} \quad (y^* > 0 \text{ e } b < 0)$$

Nesse modelo, um dos passos mais importantes é o valor assintótico, denominado também de valor de equilíbrio ou de estabilidade, da variável independente. Para efetuar o ajuste assintótico é necessário conhecer *a priori* o valor de equilíbrio que é o valor limite da tendência de  $y$  quando  $x$  cresce, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} y^* - a.e^{bx} = y^*$$

Para determinar o valor assintótico usaremos o método de Ford–Walford. Ele consiste em determinar inicialmente uma função  $g$  que ajusta os pares  $(y_n, y_{n+1})$ , ou seja:

$$y_{n+1} = g(y_n)$$

e em seguida encontrar seu ponto estabilidade

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(y_n) = \lim_{x \rightarrow \infty} y_{n+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} y_n = y^*$$

A partir disto, faz-se o ajuste linear da função  $g(y) = ay + b$ . Como  $g(y) \rightarrow y^*$  e  $y \rightarrow y^*$ , tem-se que:

$$y^* = a.y^* + b$$

$$y^*(1 - a) = b$$

$$y^* = \frac{b}{1 - a}$$

Contudo, pode-se determinar o valor de assintótico  $y^*$  e, com isso, determinar o modelo exponencial assintótico.

## 1.2.2 Modelo Malthusiano

A teoria criada por Tomas Robert Malthus (1766-1834), economista e demógrafo inglês, e que ganhou o nome de “Malthusianismo” foi a primeira teoria populacional a relacionar o crescimento da população com a fome, afirmando a tendência do crescimento populacional em progressão geométrica, e do crescimento da oferta de alimentos em progressão aritmética.

No modelo Malthusiano seja  $P$  o número de indivíduos em uma população animal ou vegetal. Este número é dependente do tempo e assim podemos escrever

$$\frac{dP}{dt} = P(t)$$

Como  $P$  é a quantidade de pessoas que, por sua vez, é um número natural, então  $P(t)$  é uma função discreta. Entretanto,  $P(t)$  pode ser uma variável contínua, variando continuamente no tempo, quando o número de indivíduos é suficientemente grande.

Consideremos as taxas de natalidade ( $n$ ) e de mortalidade ( $m$ ), temos que  $\alpha = n - m$  é a taxa de crescimento específico da População  $P(t)$ , considerando-a constante. Dessa forma, temos

$$\frac{P(t+1) - P(t)}{P(t)} = n - m$$

$$\frac{P(t+1) - P(t)}{P(t)} = \alpha$$

$$P(t+1) - P(t) = \alpha P(t)$$

$$P(t+1) = \alpha P(t) + P(t)$$

$$P(t+1) = (1 + \alpha)P(t)$$

Seja a população inicial  $P(0) = P_0$ , daí temos uma recorrência:

$$\begin{cases} P(t + 1) = (1 + \alpha)P(t) \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

Resolvendo a recorrência de 1ª ordem, temos:

$$\begin{aligned} P_{t+1} - P_t &= \alpha P_t \\ P_{t+2} - P_{t+1} &= \alpha P_{t+1} \\ P_{t+3} - P_{t+2} &= \alpha P_{t+2} \\ P_{t+4} - P_{t+3} &= \alpha P_{t+3} \\ &\dots\dots\dots \\ P_{t+n} - P_{t+n-1} &= \alpha P_{t+n-1} \end{aligned}$$

Somando os membros, temos:

$$\begin{aligned} P_{t+n} - P_t &= \alpha P_t + \alpha P_{t+1} + \alpha P_{t+2} + \alpha P_{t+3} + \dots + \alpha P_{t+n-1} \\ P_{t+n} - P_t &= \alpha P_t [1 + (1 + \alpha) + (1 + \alpha)^2 + (1 + \alpha)^3 + \dots + (1 + \alpha)^{n-1}] \\ \frac{P_{t+n} - P_t}{P_t} &= \alpha [1 + (1 + \alpha) + (1 + \alpha)^2 + (1 + \alpha)^3 + \dots + (1 + \alpha)^{n-1}] \\ \frac{P_{t+n} - P_t}{P_t} &= \alpha \frac{(1 + \alpha)^n - 1}{(1 + \alpha) - 1} \\ \frac{P_{t+n} - P_t}{P_t} &= \alpha \frac{(1 + \alpha)^n - 1}{\alpha} \\ \frac{P_{t+n} - P_t}{P_t} &= (1 + \alpha)^n - 1 \\ \frac{P_{t+n} - P_t}{P_t} + 1 &= (1 + \alpha)^n \\ (1 + \alpha)^n &= \frac{P_{t+n}}{P_t} \\ \alpha &= \sqrt[n]{\frac{P_{t+n}}{P_t}} - 1 \end{aligned}$$

Por fim, quando  $t = 0$ , podemos dizer ainda que

$$\alpha = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_0}} - 1$$

$$(1 + \alpha)^n = \frac{P_n}{P_0}$$

$$P_n = P_0(1 + \alpha)^n$$

### 1.2.3 Modelo Logístico Contínuo (Verhurst)

O modelo de Verhurst supõe que uma população, vivendo num determinado meio, deverá crescer até um limite máximo sustentável, isto é, ela tende a se estabilizar. Este modelo é, essencialmente, o modelo Malthusiano modificado, considerando a taxa de crescimento como sendo proporcional à população em cada instante, ou seja,

$$\frac{dP}{dt} = \beta(P)P$$

com  $\beta(P) = r\left(\frac{P^* - P}{P^*}\right)$ ,  $r > 0$  e  $P^*$  sendo o valor limite da população.

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{P^*}\right) \\ P(0) = P_0, r > 0 \end{cases}$$

Observa-se que  $P(t) \equiv 0$  e  $P(t) \equiv P^*$  são soluções da equação diferencial. A solução analítica é obtida por integração após a separação de variáveis, ou seja,

$$\int \frac{dP}{P\left(1 - \frac{P}{P^*}\right)} = \int r dt$$

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{\frac{1}{P^*}}{\left(1 - \frac{P}{P^*}\right)}\right) = rt + K$$

$$\ln \frac{P(t)}{1 - \frac{P(t)}{P^*}} = rt + c$$

Como  $P(0) = P_0$ , temos:

$$K = \ln \frac{P_0 P^*}{P^* - P_0}$$

Com isso, segue que

$$P(t) = \frac{P_0 P^*}{(P^* - P_0)e^{-rt} + P_0}$$

A curva  $P(t)$  é chamada de logística pode se inferir que:

- Se  $P^* > P_0$ , então  $P^* > P(t) > P_0$  e  $P(t)$  cresce tendendo a  $P^*$ , pois  $\frac{dP}{dt} > 0$ .

- Se  $P^* < P_0$ , então  $P(t)$  decresce tendendo a  $P^*$ , pois  $\frac{dP}{dt} < 0$ .

### 1.2.4 Modelo de Montroll

Em 1971 Montroll propôs um modelo geral para traduzir o crescimento assintótico de uma variável, levando em conta que o posicionamento da variação máxima pode ser qualquer valor entre  $P_0$  e  $P^*$ .

Seja  $P^*$  o valor limite finito de uma população  $P(t)$  e  $\lambda$  a sua taxa de crescimento relativa quando  $P$  é “pequeno”. O modelo Montroll é dado pela equação diferencial não linear

$$\frac{dP}{dt} = \lambda \left[ 1 - \left( \frac{P}{P^*} \right)^\alpha \right], \quad \lambda > 0 \text{ e } \alpha > 0$$

O valor do parâmetro  $\alpha$  é o indicador da posição do ponto de inflexão da curva, pois quando  $\alpha = 1$  temos o modelo de Verhurst.

Como  $\frac{dP}{dt} > 0$ , pois  $0 < P < P^*$ , para encontrar o crescimento máximo, é suficiente considerar  $\frac{d^2P}{dt^2} = 0$ .

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \lambda \frac{dP}{dt} \left( 1 - \frac{P}{P^*} \right) - \alpha \lambda \frac{P}{P^*} \left( \frac{P}{P^*} \right)^{\alpha-1} \frac{dP}{dt}$$

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \lambda \frac{dP}{dt} \left[ 1 - \left( \frac{P}{P^*} \right)^\alpha - \alpha \left( \frac{P}{P^*} \right)^\alpha \right]$$

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \lambda \frac{dP}{dt} \left[ 1 - (1 + \alpha) \left( \frac{P}{P^*} \right)^\alpha \right]$$

Logo,  $\frac{d^2P}{dt^2} = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{P}{P^*} \right)^\alpha = \frac{1}{1 + \alpha} \Leftrightarrow \frac{P}{P^*} = \sqrt[\alpha]{\frac{1}{1 + \alpha}}$   
e portanto,

$$P = P^* \sqrt[\alpha]{\frac{1}{1 + \alpha}}$$

O objetivo principal deste modelo é propor diferentes formas possíveis de decréscimo das taxas de variação.

### 1.2.5 Modelo de Gompertz

O modelo de Gompertz utiliza uma taxa de inibição da variável de estado proporcional ao logaritmo desta variável. É um modelo bastante adequado para traduzir crescimentos celulares, pois no início a taxa de crescimento é grande e muda rapidamente para um crescimento lento.

Este modelo é dado pelo problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bx \ln(x) \\ x(0) = x_0, a > 0, b > 0 \end{cases}$$

A taxa de crescimento, dada por  $r(x) = a - b \ln(x) > 0$ , decresce com  $x$  e o valor de estabilidade de  $x$  é dado quando  $r(x) = 0$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 0 \\ x(a - b \ln(x)) &= 0 \\ x = 0 \text{ ou } a - b \ln(x) &= 0 \end{aligned}$$

Como  $x > 0$ , temos que

$$\begin{aligned} a - b \ln x &= 0 \\ \ln x &= \frac{a}{b} \\ x_\infty &= e^{\frac{a}{b}} \end{aligned}$$

Quando  $x$  é muito pequeno, observa-se que  $r(x)$  é muito grande, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} r(x) = +\infty$$

Com isso, como  $a - b \ln x_\infty = 0$ , podemos tomar  $a = b \ln x_\infty$ . Daí, temos que

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= bx \ln x_\infty - bx \ln x \\ \frac{dx}{dt} &= bx \ln \frac{x_\infty}{x} \\ \frac{dx}{dt} &= x \left( \ln \frac{x_\infty}{x} \right)^b \end{aligned}$$

Com isto, tem-se que  $r(x) = \ln\left(\frac{x_\infty}{x}\right)^b$ .

A solução do modelo de Gompertz é obtida considerando a mudança de variável  $z = \ln x$ :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = a - b \cdot z$$

Integrando tem-se

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{a - bz} &= \int dt \\ -\frac{1}{b} \ln(a - bz) &= t + c \end{aligned}$$

Para  $t = 0$ , obtêm-se  $c = -\frac{1}{b} \ln(a - b \ln x_0)$ . Com isso, tem-se

$$-\frac{1}{b} \ln(a - bz) = t - \frac{1}{b} \ln(a - b \ln x_0)$$

$$\ln(a - bz) = -bt + \ln(a - b \ln x_0)$$

$$a - bz = e^{-bt + \ln(a - b \ln x_0)}$$

$$bz = a - e^{\ln(a - b \ln x_0) - bt}$$

$$z(t) = \frac{1}{b} [a - (a - b \ln x_0) e^{-bt}]$$

Voltando para a variável  $x = e^z$ , tem-se

$$x(t) = e^{\frac{1}{b} [a - (a - b \ln x_0) e^{-bt}]}$$

$$x(t) = e^{\frac{a}{b}} e^{-\left(\frac{a}{b} - \ln(x_0)\right) e^{-bt}}$$

$$x(t) = e^{\frac{a}{b}} e^{\left(-\frac{a}{b}\right) e^{-bt}} e^{\ln(x_0) e^{-bt}}$$

$$x(t) = e^{\frac{a}{b}} \left(\frac{1}{e^{\frac{a}{b}}}\right)^{e^{-bt}} x_0 e^{-bt}$$

$$x(t) = e^{\frac{a}{b}} \left(\frac{x_0}{e^{\frac{a}{b}}}\right)^{e^{-bt}}$$

Porém, viu-se que  $x_\infty = e^{\frac{a}{b}}$ . Substituindo tem-se que

$$x(t) = x_\infty \left(\frac{x_0}{x_\infty}\right)^{e^{-bt}}$$

A curva  $x(t)$  tem ponto de inflexão quando  $t = \frac{1}{b} \ln\left(\frac{a}{b} - \ln x_0\right)$ , daí tem-se

$$x(t_m) = \frac{1}{e} x_\infty$$

$$x(t_m) = \frac{1}{e} e^{\frac{a}{b}}$$

$$x(t_m) = e^{\frac{a-b}{b}}$$

Esse modelo é bastante usado também no estudo da evolução de tumores sólidos. Neste caso, assume-se que a taxa de crescimento diminui quando a massa tumoral aumenta, pois as células centrais não recebem nutrientes e oxigênio suficientes para sua multiplicação.

Abaixo tem-se modelos equivalentes ao modelo de Gompertz:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x e^{-\alpha t}$$

ou

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \gamma x \\ \frac{d\gamma}{dt} = \alpha \gamma \end{cases}$$

Há ainda, quando o crescimento de  $y$  é assintótico e inibido, a construção de modelos particulares que tenham as características de crescimento assintótico, tais como:

- Modelo de Smith

$$\frac{dP}{dt} = \lambda \ln\left(\frac{P_\infty}{P}\right), \lambda = 0$$

- Modelo de Ayala, Ehrenfeld, Gilpin

$$\frac{dP}{dt} = P(\lambda - aP + be^{-p}), a > 0, b > 0, \lambda = 0$$

## 2 Coleta de Dados

A pesquisa foi realizada através da coleta de dados em sites oficiais. Para a população Teresinense pesquisou-se no site do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) e para os casos da Síndrome Imunodeficiência Adquirida (AIDS) pesquisou-se no site do Sistema de Informação de Agravos de Notificação (SINAN) do Ministério da Saúde (MS).

Para facilitar a compreensão e realizar o processo de obtenção do modelo foram feitas as tabelas 2.1 e 2.2, do censo da População Teresinense no intervalo de 1872 a 2010, segundo IBGE; e do número do caso de pessoas contaminadas com AIDS de 1986 a 2013, segundo SINAN, respectivamente.

Tabela 2.1: População Teresinense - Fonte: IBGE

Ano	Tempo ( $t_n$ )	População ( $P_n$ )
1872	0	21.692
1890	18	31.523
1900	28	45.316
1920	48	53.500
1940	68	67.641
1950	78	90.723
1960	88	144.799
1970	98	230.168
1980	108	388.922
1991	119	598.411
2000	128	714.583
2010	138	814.230

Por questão de estética e facilidade de cálculos, fez-se a divisão por 1000 dos dados da população Teresinense, sem perda qualitativa dos dados, conforme tabela 2.3.

Com os dados das tabelas 2.2 e 2.3, em seguida, fizemos os gráficos para visualizarmos e para posterior análise do comportamento dos dados conforme figuras 2.1 e 2.2.

Tabela 2.2: Diagnóstico da AIDS em Teresina - Fonte: SINAN

Ano	Tempo ( $t_n$ )	AIDS ( $A_n$ )
1986	0	2
1987	1	9
1988	2	16
1989	3	12
1990	4	17
1991	5	23
1992	6	19
1993	7	17
1994	8	38
1995	9	53
1996	10	50
1997	11	58
1998	12	64
1999	13	60
2000	14	112
2001	15	91
2002	16	121
2003	17	116
2004	18	183
2005	19	210
2006	20	151
2007	21	190
2008	22	201
2009	23	243
2010	24	228
2011	25	216
2012	26	268
2013	27	288

Tabela 2.3: População Teresinense dividido por 1000

Ano	Tempo ( $t_n$ )	População ( $P_n$ )
1872	0	21,7
1890	18	31,5
1900	28	45,3
1920	48	53,5
1940	68	67,6
1950	78	90,7
1960	88	144,8
1970	98	230,2
1980	108	388,9
1991	119	598,4
2000	128	714,6
2010	138	814,2

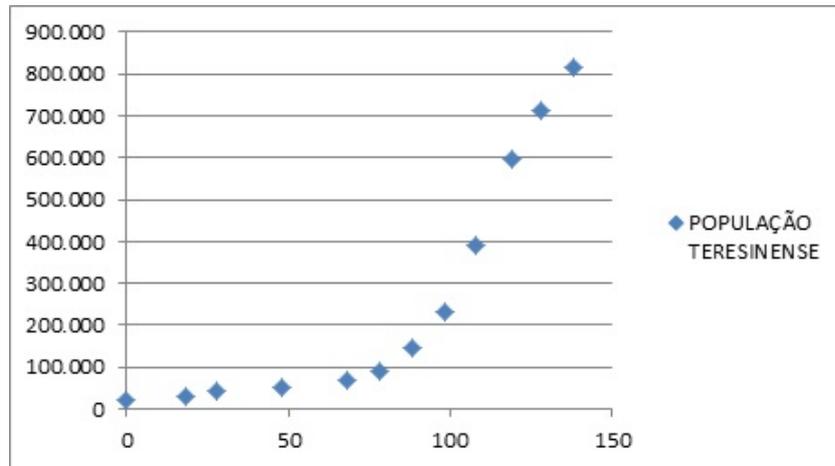


Figura 2.1: Curva de Tendência da População Teresinense

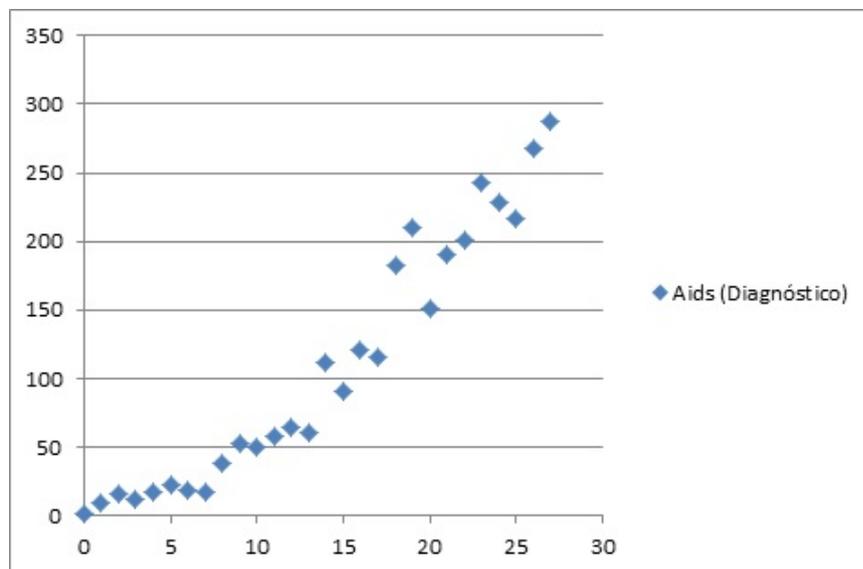


Figura 2.2: Curva de Tendência de casos da AIDS

## 3 Modelagem Contínua

Neste capítulo faremos a análise dos dados coletados através dos modelos Exponencial Assintótico - Método Ford-Walford e o Logístico Contínuo.

### 3.1 Modelo Exponencial Assintótico - Método de Ford-Walford

#### 3.1.1 População Teresinense

Com os dados coletados, precisamos encontrar o modelo que melhor representa a população em estudo. Com isso, fez-se a tabela 3.1 para tentar encontrar o valor de estabilidade  $y^*$ .

Tabela 3.1: Relação de  $P_n$  e  $P_{n+1}$

Tempo	População ( $P_n$ )	População ( $P_{n+1}$ )
0	21,7	31,5
18	31,5	45,3
28	45,3	53,5
48	53,5	67,6
68	67,6	90,7
78	90,7	144,8
88	144,8	230,2
98	230,2	388,9
108	388,9	598,4
119	598,4	714,6
128	714,6	814,2
138	814,2	

Em seguida, fez-se o gráfico de  $P_n$  x  $P_{n+1}$  resultando na figura 3.1.

Ao fazermos o ajuste linear obtemos  $y = 1,1804x + 32,8968$ . Com isso, temos que o valor da assíntota é  $y^* = \frac{32,8968}{1 - 1,1804} = -182,35$ . Como o valor da assíntota é negativo,

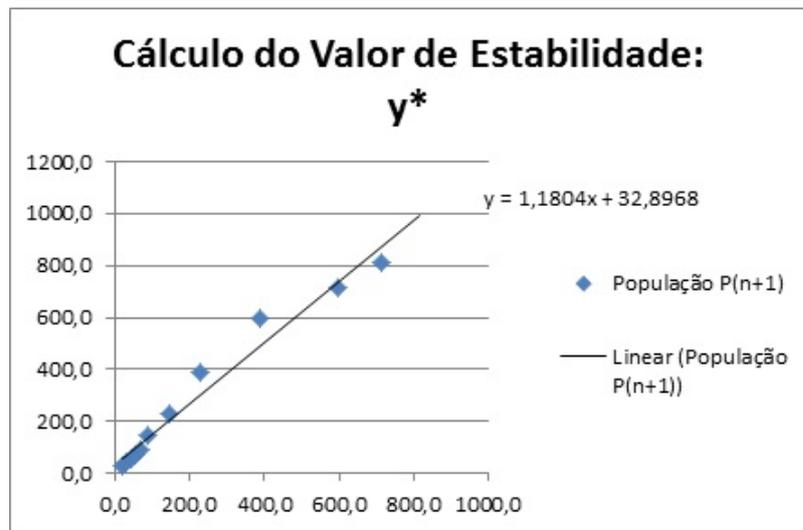


Figura 3.1: Curva do valor de estabilidade com todos os dados da população

precisamos encontrar um valor de estabilidade positivo. Para isto tem-se que o coeficiente angular do ajuste linear seja menor que 1 ( $a < 1$ ).

Após a inconsistência encontrada acima e análise dos dados, fizemos o que se denominou modelo 1.

### Modelo Exponencial Assintótico 1: Primeiro cálculo do valor de estabilidade $y^*$

Com a manipulação dos dados, a partir de 1960 ( $t = 88$ ), o coeficiente angular da reta para cálculo do valor de estabilidade  $y^*$  apresentava-se menor que 1, conforme figura 3.2.

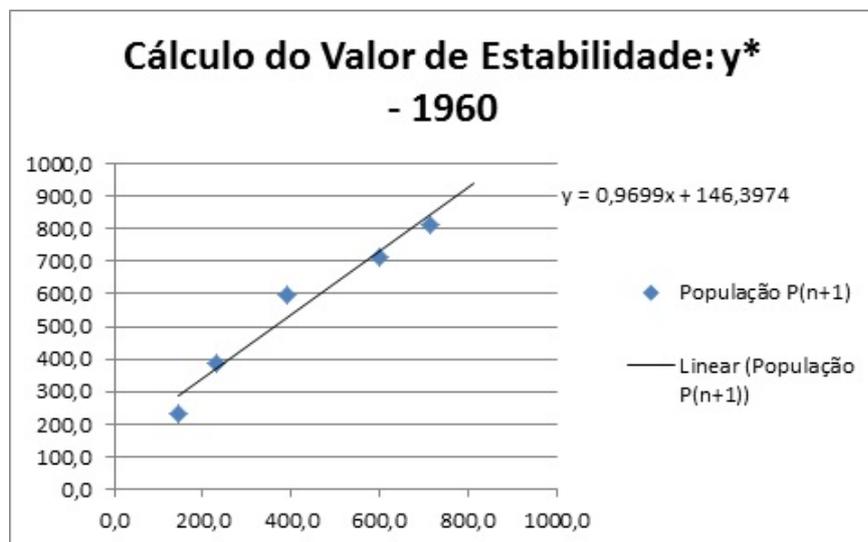


Figura 3.2: Curva do valor de estabilidade com dados da população a partir de 1960

Com isso, ao fazermos o ajuste linear obtemos  $y = 0,9699x + 146,3974$ . Isto implica que o valor de estabilidade  $y^* = \frac{146,3974}{1 - 0,9699} = 4863,7$ . Portanto, encontramos a assíntota do modelo exponencial assintótico.

Em seguida, faz-se a  $y^* - P_n$  para encontrarmos a curva exponencial auxiliar. Para calcular os dados da curva auxiliar fez-se a tabela 3.2. Com os dados a partir de  $t \geq 88$  encontramos a curva e, conseqüentemente, o ajuste exponencial, conforme figura 3.3.

Tabela 3.2: Dados para curva exponencial auxiliar

Tempo	População ( $P_n$ )	$(y^* - P_n)$
0	21,7	4842,0
18	31,5	4832,2
28	45,3	4818,4
48	53,5	4810,2
68	67,6	4796,1
78	90,7	4773,0
88	144,8	4718,9
98	230,2	4633,5
108	388,9	4474,8
119	598,4	4265,3
128	714,6	4149,1
138	814,2	4049,5

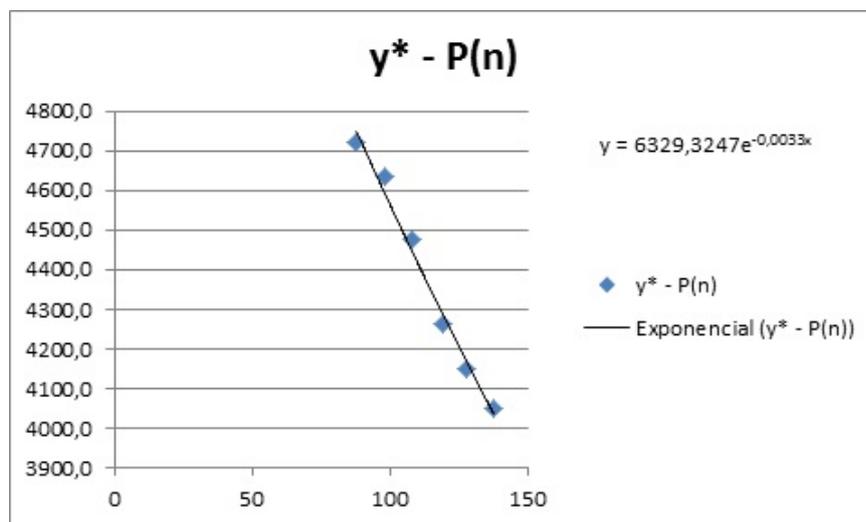


Figura 3.3: Curva Exponencial Auxiliar com dados da população a partir de 1960

Contudo, tem-se que o modelo encontrado é

$$P_1(t) = 4863,7 - 6329,32.e^{-0,0033.t}$$

Validando o modelo encontrado, fez-se a tabela 3.3 que gerou figura 3.4.

Tabela 3.3: Dados do modelo Exponencial Assintótico para população

Tempo	População ( $P_n$ )	Exponencial Assintótica
0	21,7	-1465,6
18	31,5	-1100,6
28	45,3	-907,0
48	53,5	-538,4
68	67,6	-193,4
78	90,7	-29,2
88	144,8	129,6
98	230,2	283,3
108	388,9	432,0
119	598,4	589,9
128	714,6	715,0
138	814,2	849,7

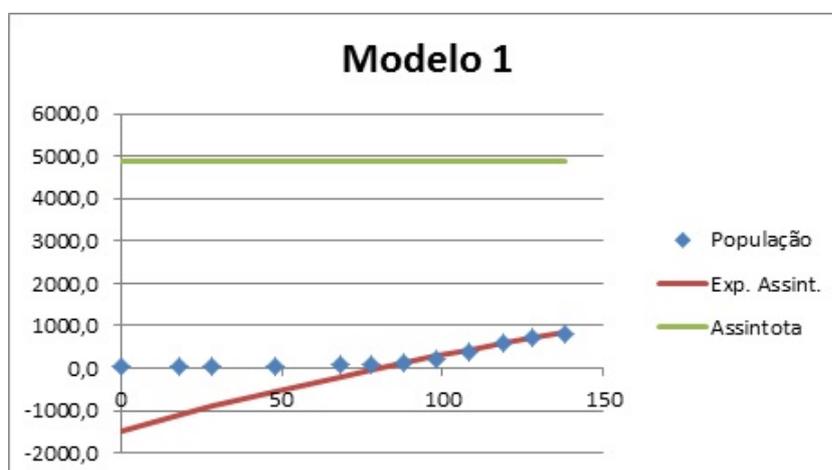


Figura 3.4: Cruzamento dos dados da população com o modelo exponencial assintótico

Observa-se que a população é negativa para  $t < 88$  o que não condiz com a realidade. Vê-se também que valor de estabilidade está muito alto.

### Modelo Exponencial Assintótico 2: Segundo cálculo do valor de estabilidade $y^*$

Neste modelo restringiu-se a população a partir de 1970 ( $t = 98$ ) para o cálculo do valor de estabilidade  $y^*$ , obtendo a figura 3.5.

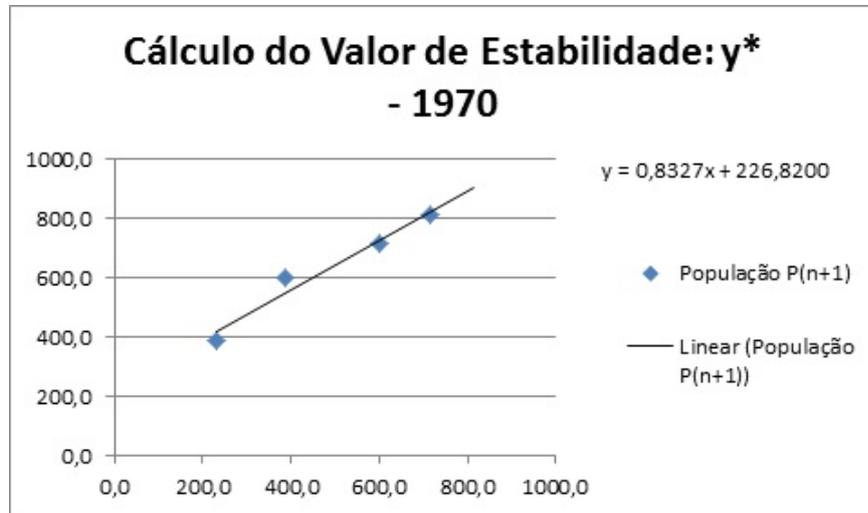


Figura 3.5: Curva do valor de estabilidade com dados da população a partir de 1970

Com isso, ao fazermos o ajuste linear obtemos  $y = 0,8327x + 226,82$ . Isto implica que o valor de estabilidade  $y^* = \frac{226,82}{1 - 0,8327} = 1355,77$ . Portanto, encontramos a assíntota do segundo modelo exponencial assintótico.

Análogo ao modelo 1, faz-se a  $y^* - P_n$  para encontrarmos a curva exponencial auxiliar. Para obtermos os dados da curva auxiliar fez-se a tabela 3.4. Com os dados a partir de  $t \geq 98$  encontramos a curva e, conseqüentemente, o ajuste exponencial, conforme figura 3.6.

Tabela 3.4: Dados para curva exponencial auxiliar

Tempo	População ( $P_n$ )	$(y^* - P_n)$
0	21,7	1334,1
18	31,5	1324,2
28	45,3	1310,5
48	53,5	1302,3
68	67,6	1288,1
78	90,7	1265,0
88	144,8	1211,0
98	230,2	1125,6
108	388,9	966,8
119	598,4	757,4
128	714,6	641,2
138	814,2	541,5

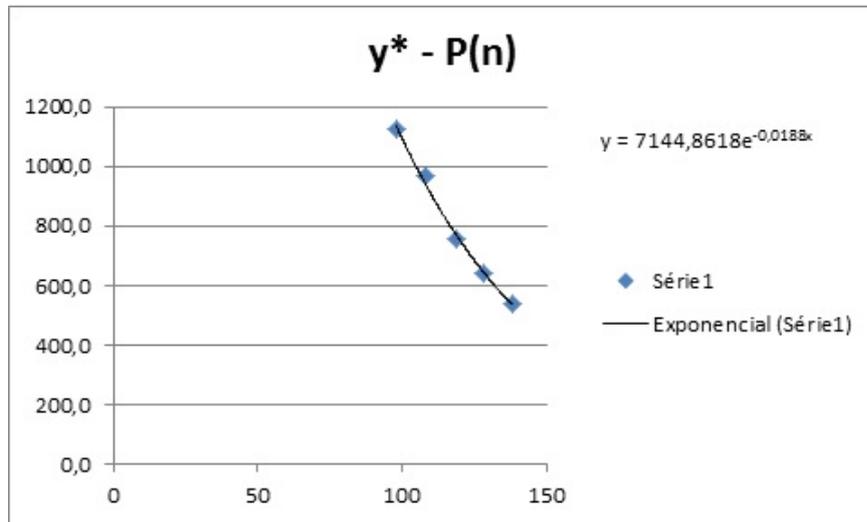


Figura 3.6: Curva do valor de estabilidade com dados da população a partir de 1970

Contudo, tem-se que o modelo encontrado é

$$P_2(t) = 1355,77 - 7144,862.e^{-0,0188.t}$$

Validando o modelo encontrado, fez-se a tabela 3.5 que gerou figura 3.7.

Tabela 3.5: Dados do modelo Exponencial Assintótico para população

Tempo	População ( $P_n$ )	Exponencial Assintótico
0	21,7	-5789,1
18	31,5	-3719,6
28	45,3	-2841,4
48	53,5	-1514,5
68	67,6	-607,1
78	90,7	-267,4
88	144,8	13,4
98	230,2	245,7
108	388,9	437,8
119	598,4	610,9
128	714,6	728,0
138	814,2	836,6

Observa-se que a população continua negativa para  $t < 88$ , entretanto o valor de estabilidade está mais próximo do real.

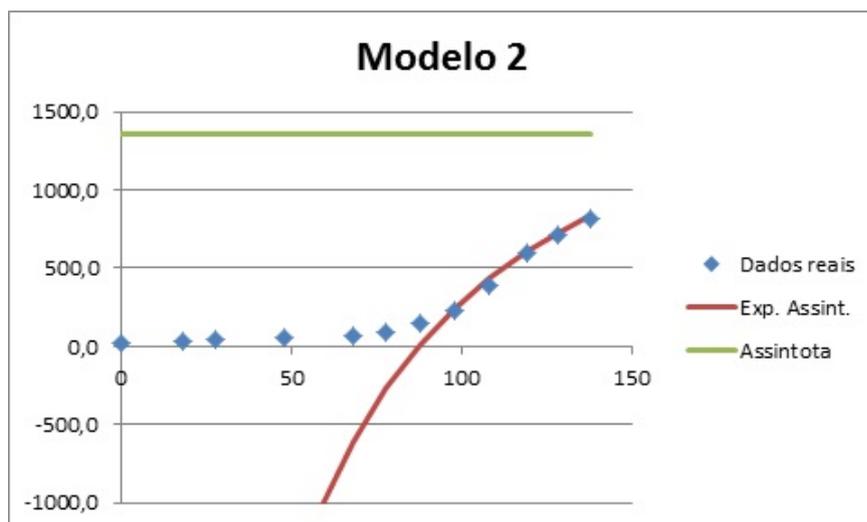


Figura 3.7: Modelo 2 - dados da população x modelo exponencial assintótico

### 3.1.2 Síndrome da Imunodeficiência Adquirida (AIDS)

Com os dados coletados, precisamos encontrar o modelo que melhor representa o número de casos de AIDS em estudo. Com isso, fez-se a tabela 3.6 para encontrarmos o valor de estabilidade  $y^*$ .

Em seguida, fez-se o gráfico de  $A_n$  x  $A_{n+1}$  resultando na figura 3.8.

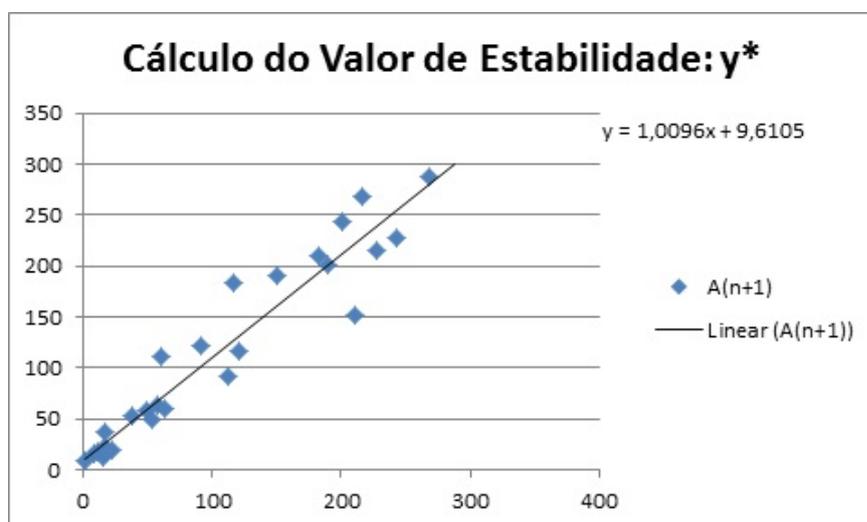


Figura 3.8: Curva do valor de estabilidade com todos os dados dos casos da AIDS

Tabela 3.6: Relação entre Diagnóstico da AIDS  $A_n$  e  $A_{n+1}$ 

Tempo	$(A_n)$	$(A_{n+1})$
0	2	9
1	9	16
2	16	12
3	12	17
4	17	23
5	23	19
6	19	17
7	17	38
8	38	53
9	53	50
10	50	58
11	58	64
12	64	60
13	60	112
14	112	91
15	91	121
16	121	116
17	116	183
18	183	210
19	210	151
20	151	190
21	190	201
22	201	243
23	243	228
24	228	216
25	216	268
26	268	288
27	288	

Ao fazermos o ajuste linear obtemos  $y = 1,009x + 9,610$ . Com isso, temos que o valor da assíntota é  $y^* = \frac{9,610}{1 - 1,009} = -1067,67$ . Como o valor da assíntota é negativo, precisamos encontrar um valor de estabilidade positivo. Para isto, tem-se que o coeficiente angular do ajuste linear seja menor que 1 ( $a < 1$ ).

Após a inconsistência encontra acima e analisamos os dados fizemos que o denominou-se modelo 3.

### Modelo Exponencial Assintótico 3: Primeiro cálculo do valor de estabilidade $y^*$

Com a manipulação dos dados, a partir de 1989 ( $t = 3$ ), o coeficiente angular da reta para cálculo do valor de estabilidade  $y^*$  apresentava-se menor que 1, conforme figura 3.9.

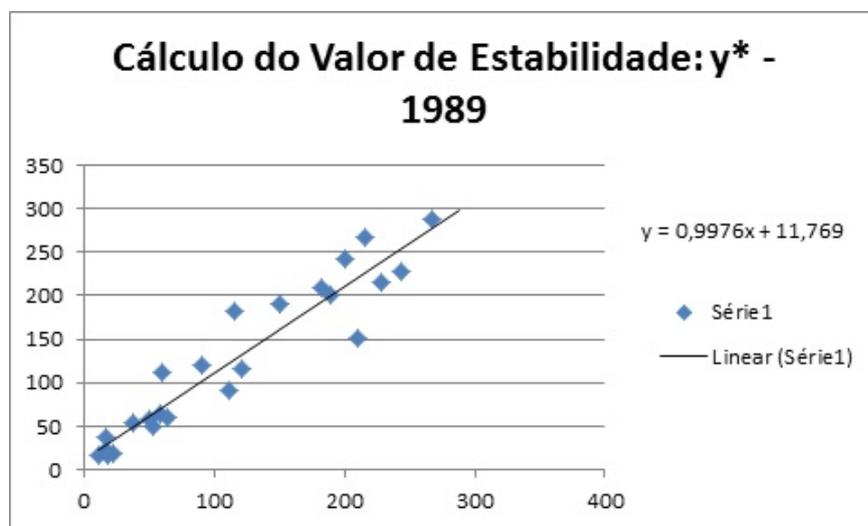


Figura 3.9: Curva do valor de estabilidade com dados de casos da AIDS a partir de 1989

Com isso, ao fazermos o ajuste linear obtemos  $y = 0,997x + 11,76$ . Isto implica que o valor de estabilidade  $y^* = \frac{11,76}{1 - 0,997} = 3920$ . Portanto, encontramos a assíntota do modelo exponencial assintótico.

Em seguida, faz-se a  $y^* - A_n$  para encontrarmos a curva exponencial auxiliar. Para obtermos os dados da curva auxiliar fez-se a tabela 3.7. Com os dados a partir de  $t \geq 3$  encontramos a curva e, conseqüentemente, o ajuste exponencial, conforme figura 3.10.

Tabela 3.7: Dados para curva exponencial auxiliar

Tempo	$(A_n)$	$(y^* - A_n)$
0	2	3918
1	9	3911
2	16	3904
3	12	3908
4	17	3903
5	23	3897
6	19	3901
7	17	3903
8	38	3882
9	53	3867
10	50	3870
11	58	3862
12	64	3856
13	60	3860
14	112	3808
15	91	3829
16	121	3799
17	116	3804
18	183	3737
19	210	3710
20	151	3769
21	190	3730
22	201	3719
23	243	3677
24	228	3692
25	216	3704
26	268	3652
27	288	3632

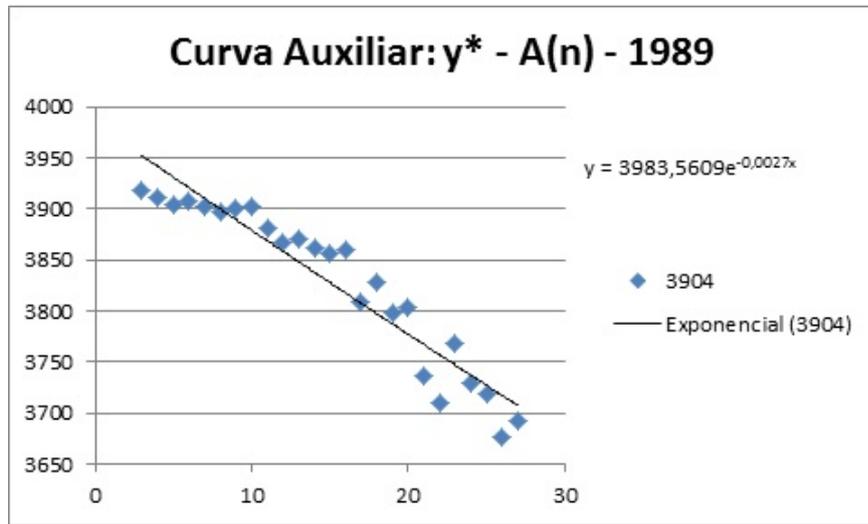


Figura 3.10: Curva Exponencial Auxiliar com dados de casos da AIDS a partir de 1989

Contudo, tem-se que o modelo encontrado é

$$A_1(t) = 3920 - 3983,56.e^{-0,0027.t}$$

Validando o modelo encontrado, fez-se a tabela 3.8 que gerou figura 3.11.

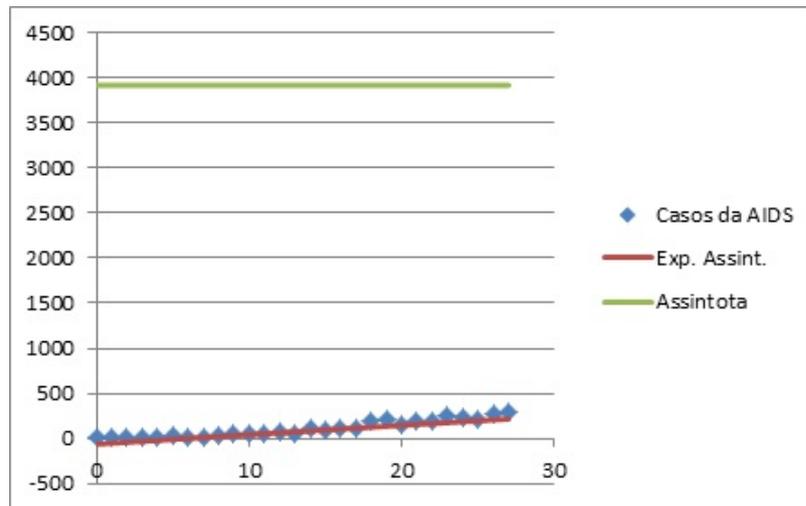


Figura 3.11: Cruzamento dos dados de casos da AIDS com o modelo exponencial assintótico

Observa-se que a população é negativa para  $t < 6$  o que não condiz com a realidade. Vê-se ainda que valor de estabilidade está muito alto.

Tabela 3.8: Dados do modelo Exponencial Assintótico de casos da AIDS

Tempo	$(A_n)$	Exponencial Assintótica
0	2	-63,56
1	9	-52,8189
2	16	-42,1068
3	12	-31,4235
4	17	-20,7690
5	23	-10,1433
6	19	0,4538
7	17	11,0223
8	38	21,5623
9	53	32,0739
10	50	42,5571
11	58	53,0121
12	64	63,4389
13	60	73,8375
14	112	84,2082
15	91	94,5508
16	121	104,8656
17	116	115,1526
18	183	125,4118
19	210	135,6434
20	151	145,8474
21	190	156,0238
22	201	166,1729
23	243	176,2945
24	228	186,3888
25	216	196,4560
26	268	206,4960
27	288	216,5090

### Modelo Exponencial Assintótico 4: Segundo cálculo do valor de estabilidade $y^*$

Neste modelo restringiu-se o número de casos da AIDS a partir de 1990 ( $t = 4$ ) para o cálculo do valor de estabilidade  $y^*$ , obtendo a figura 3.12.

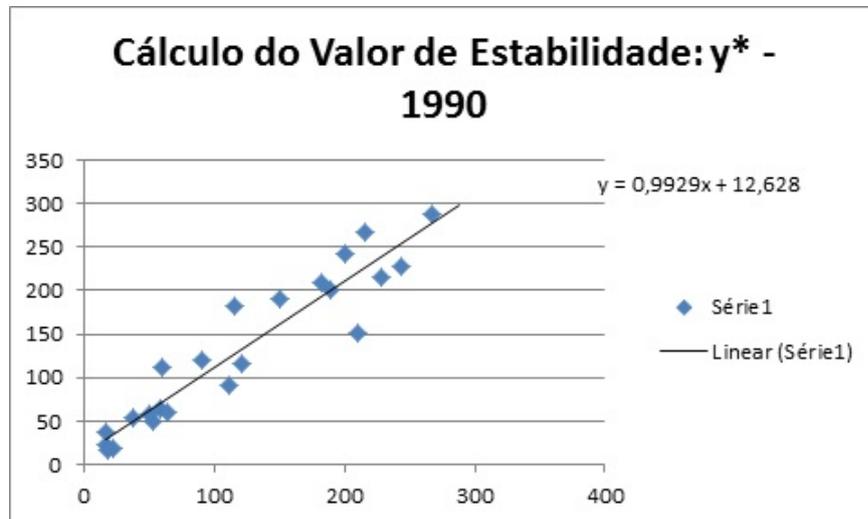


Figura 3.12: Curva do valor de estabilidade com dados dos casos da AIDS a partir de 1990

Com isso, ao fazermos o ajuste linear obtemos  $y = 0,992x + 12,62$ . Isto implica que o valor de estabilidade  $y^* = \frac{12,62}{1 - 0,992} = 1452,5$ . Portanto, encontramos a assíntota do segundo modelo exponencial assintótico.

Análogo ao modelo 3, faz-se a  $y^* - A_n$  para encontrar a curva exponencial auxiliar. Para obtermos os dados da curva auxiliar fez-se a tabela 3.9. Com os dados a partir de  $t \geq 4$  encontramos a curva e, conseqüentemente, o ajuste exponencial, conforme figura 3.13.

Tabela 3.9: Dados para curva exponencial auxiliar

Tempo	$(A_n)$	$(y^* - A_n)$
0	2	1450,5
1	9	1443,5
2	16	1436,5
3	12	1440,5
4	17	1435,5
5	23	1429,5
6	19	1433,5
7	17	1435,5
8	38	1414,5
9	53	1399,5
10	50	1402,5
11	58	1394,5
12	64	1388,5
13	60	1392,5
14	112	1340,5
15	91	1361,5
16	121	1331,5
17	116	1336,5
18	183	1269,5
19	210	1242,5
20	151	1301,5
21	190	1262,5
22	201	1251,5
23	243	1209,5
24	228	1224,5
25	216	1236,5
26	268	1184,5
27	288	1164,5

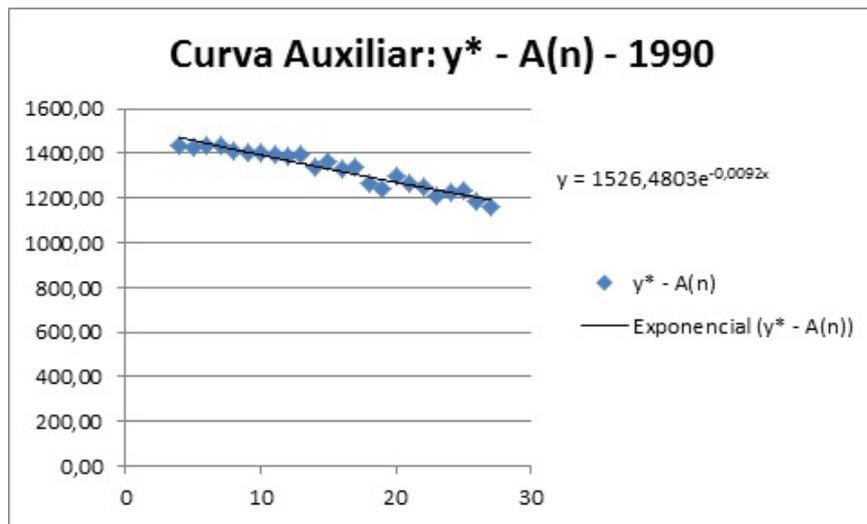


Figura 3.13: Curva Exponencial Auxiliar com dados de casos da AIDS a partir de 1990

Contudo, tem-se que o modelo encontrado é:

$$A_2(t) = 1452,5 - 1526,48.e^{-0,0092.t}$$

Validando o modelo encontrado, fez-se a tabela 3.10 que gerou figura 3.14.

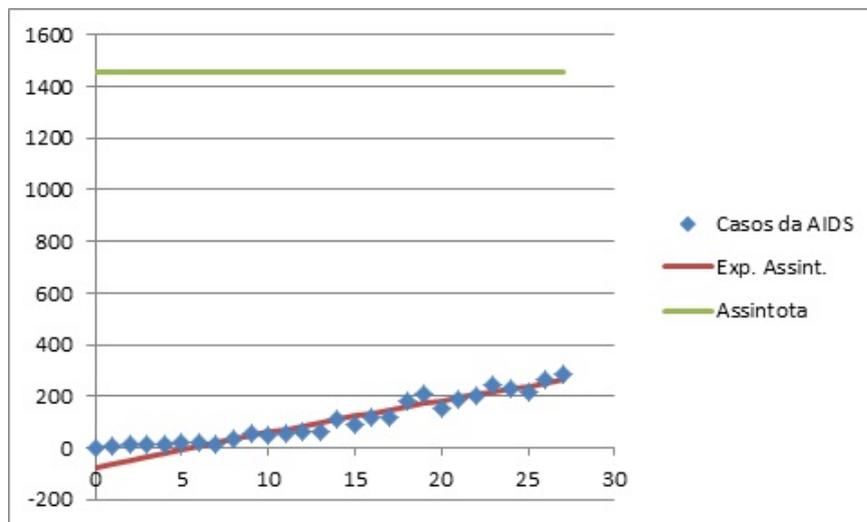


Figura 3.14: Modelo 4 - dados de casos da AIDS x modelo exponencial assintótico

Observa-se que a população continua negativa para  $t < 6$ , entretanto o valor de estabilidade continua alto.

Tabela 3.10: Dados do modelo Exponencial Assintótico de casos da AIDS

Tempo	$(A_n)$	Exponencial Assintótico
0	2	-73,9800
1	9	-60,0008
2	16	-46,1496
3	12	-32,4252
4	17	-18,8266
5	23	-5,3525
6	19	7,9983
7	17	21,2268
8	38	34,3341
9	53	47,3214
10	50	60,1897
11	58	72,9404
12	64	85,5740
13	60	98,0920
14	112	110,4954
15	91	122,7853
16	121	134,9625
17	116	147,0283
18	183	158,9836
19	210	170,8293
20	151	182,5666
21	190	194,1964
22	201	205,7197
23	243	217,1375
24	228	228,4507
25	216	239,6603
26	268	250,7673
27	288	261,7725

## 3.2 Modelo Logístico Contínuo

No mesmo raciocínio do modelo Exponencial Assintótico, este tende a se estabilizar. Para tanto, encontraremos dois modelos logísticos para a população e para o caso de diagnóstico da AIDS, utilizando os valores de estabilidade encontrados no modelo 3.1.

Neste modelo o nosso objetivo é encontrarmos uma função do tipo:

$$\frac{P_n}{y^* - P_n} = ae^{bt}$$

$$P_n = y^*ae^{bt} - P_nae^{bt}$$

$$P_n + P_nae^{bt} = y^*ae^{bt}$$

$$P_n(1 + ae^{bt}) = y^*ae^{bt}$$

$$P_n = \frac{y^*ae^{bt}}{1 + ae^{bt}}$$

$$P_n = \frac{y^*}{\frac{1}{ae^{bt}} + 1}$$

$$P_n = \frac{y^*}{\frac{1}{a}e^{-bt} + 1}$$

### 3.2.1 População Teresinense

#### Modelo Logístico Contínuo 1

A assíntota encontrada é  $y^* = 4863,7$ . Com isso, calculamos o valor de  $\frac{P(n)}{y^* - P(n)}$  conforme tabela 3.11.

Com os dados da tabela 3.11, fizemos o gráfico para obtermos o ajuste exponencial conforme figura 3.15.

Com o ajuste exponencial  $y = 0,0033.e^{0,0287x}$ , obtemos que a e b são 0,0033 e 0,0287, respectivamente. Com isso, conclui-se que o modelo logístico 1 é:

$$P_n = \frac{4863,7}{333,33e^{-0,0287t} + 1}$$

Validando o modelo com os dados da população obtemos a tabela 3.12 e a figura 3.16.

Com esse modelo podemos concluir que a população se estabilizará, com 4,864 milhões de pessoas, em meados de 2350 como pode ser visto na tabela 3.13.

Tabela 3.11: Cálculo de  $\frac{P_n}{y^* - P_n}$  do modelo logístico 1

Tempo	População ( $P_n$ )	$y^*$	$y^* - P_n$	$\frac{P_n}{(y^* - P_n)}$
0	21,7	4863,7	4842,0	0,004479959
18	31,5	4863,7	4832,2	0,006523559
28	45,3	4863,7	4818,4	0,009404811
48	53,5	4863,7	4810,2	0,011122196
68	67,6	4863,7	4796,1	0,014103452
78	90,7	4863,7	4773,0	0,01900763
88	144,8	4863,7	4718,9	0,030684892
98	230,2	4863,7	4633,5	0,049674406
108	388,9	4863,7	4474,8	0,086914236
119	598,4	4863,7	4265,3	0,140297846
128	714,6	4863,7	4149,1	0,172225278
138	814,2	4863,7	4049,5	0,201070708

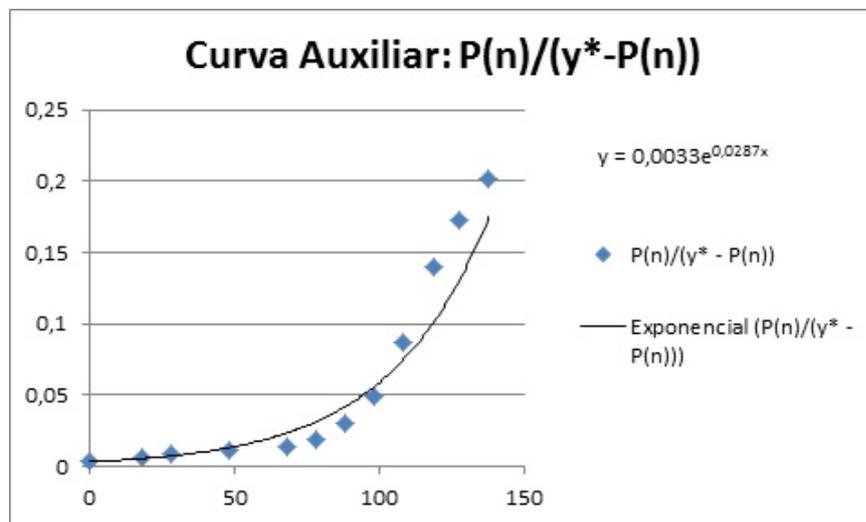


Figura 3.15: Curva auxiliar do modelo logístico 1

Tabela 3.12: Dados da população com o modelo logístico 1

Tempo	População ( $P_n$ )	$y^*$	Modelo $P_n$
0	21,7	4863,7	16,00
18	31,5	4863,7	26,76
28	45,3	4863,7	35,59
48	53,5	4863,7	62,82
68	67,6	4863,7	110,43
78	90,7	4863,7	146,03
88	144,8	4863,7	192,66
98	230,2	4863,7	253,36
108	388,9	4863,7	331,84
119	598,4	4863,7	443,79
128	714,6	4863,7	559,53
138	814,2	4863,7	718,08

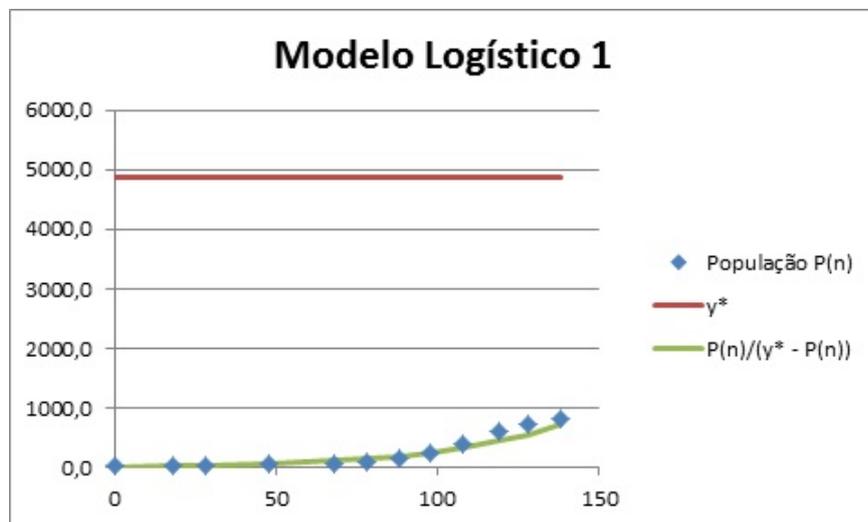


Figura 3.16: Curva de Cruzamento dos dados da população com o modelo logístico 1

Tabela 3.13: Dados da projeção da população com o modelo logístico 1

Ano	Tempo	Modelo $P_n$
2000	128	559,53
2010	138	718,08
2020	148	912,02
2030	158	1143,89
2040	168	1413,63
2050	178	1717,60
2060	188	2048,14
2070	198	2393,88
2080	208	2741,16
2090	218	3076,08
2100	228	3386,62
2150	278	4406,11
2200	328	4746,33
2250	378	4835,23
2300	428	4856,89
2350	478	4862,08
2400	528	4863,31
2450	578	4863,61
2500	628	4863,68

### Modelo Logístico Contínuo 2

A assíntota do modelo exponencial assintótico - modelo 2 - encontrada é  $y^* = 1355,77$ . Com isso, calculamos o valor de  $\frac{P(n)}{y^* - P(n)}$  conforme tabela 3.14.

Análogo ao modelo logístico 1, fizemos o gráfico e obtemos o ajuste exponencial conforme figura 3.17.

Com o ajuste exponencial  $y = 0,0103.e^{0,0333x}$ , obtemos que a e b são 0,0103 e 0,0333, respectivamente. Com isso, conclui-se que o modelo logístico 2 é:

$$P_n = \frac{1355,77}{97,09e^{-0,0333t} + 1}$$

Validando o modelo com os dados da população obtemos a tabela 3.15 e a figura 3.18.

Com esse modelo podemos concluir que a população se estabilizará, com 1,356 milhões de pessoas, em 2200 como pode ser visto na tabela 3.16.

Tabela 3.14: Cálculo de  $\frac{P_n}{y^* - P_n}$  do modelo logístico 2

Tempo	População ( $P_n$ )	$y^*$	$y^* - P_n$	$\frac{P_n}{(y^* - P_n)}$
0	21,7	1355,8	1334,1	0,016259942
18	31,5	1355,8	1324,2	0,023804506
28	45,3	1355,8	1310,5	0,034580433
48	53,5	1355,8	1302,3	0,041082171
68	67,6	1355,8	1288,1	0,052511123
78	90,7	1355,8	1265,0	0,071715231
88	144,8	1355,8	1211,0	0,11957283
98	230,2	1355,8	1125,6	0,204484704
108	388,9	1355,8	966,8	0,402258444
119	598,4	1355,8	757,4	0,790130593
128	714,6	1355,8	641,2	1,114472281
138	814,2	1355,8	541,5	1,503550772

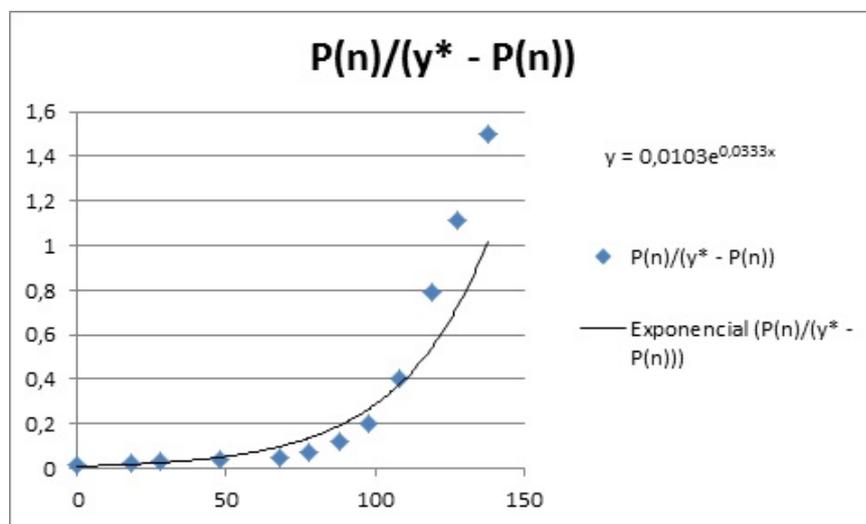


Figura 3.17: Curva auxiliar do modelo logístico 2

Tabela 3.15: Dados da população com o modelo logístico 2

Tempo	População ( $P_n$ )	$y^*$	Modelo $P_n$
0	21,7	1355,8	13,82
18	31,5	1355,8	24,96
28	45,3	1355,8	34,57
48	53,5	1355,8	65,71
68	67,6	1355,8	122,29
78	90,7	1355,8	164,74
88	144,8	1355,8	219,31
98	230,2	1355,8	287,58
108	388,9	1355,8	370,19
119	598,4	1355,8	476,41
128	714,6	1355,8	572,58
138	814,2	1355,8	684,59

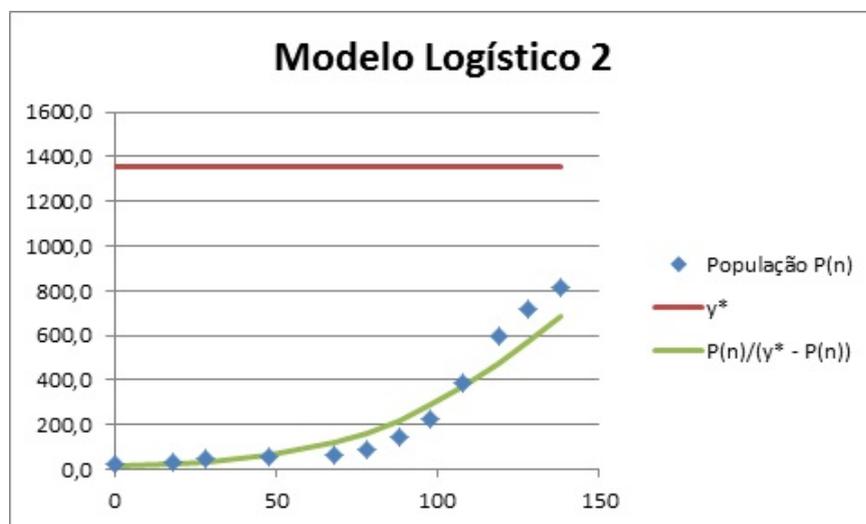


Figura 3.18: Curva de Cruzamento dos dados da população com o modelo logístico 2

Tabela 3.16: Dados da projeção da população com o modelo logístico 2

Ano	Tempo	Modelo $P_n$
2000	128	573
2010	138	685
2020	148	796
2030	158	902
2040	168	996
2050	178	1077
2060	188	1144
2070	198	1197
2080	208	1238
2090	218	1269
2100	228	1292
2150	278	1343
2200	328	1353
2250	378	1355
2300	428	1356

### 3.2.2 Síndrome da Imunodeficiência Adquirida (AIDS)

#### Modelo Logístico Contínuo 3

A assíntota do modelo exponencial assintótico - modelo 3 - encontrada é  $y^* = 3920$ . Com isso, calculamos o valor de  $\frac{A(n)}{y^* - A(n)}$  conforme tabela 3.17.

Ao fazermos o gráfico obtemos o ajuste exponencial conforme figura 3.19.

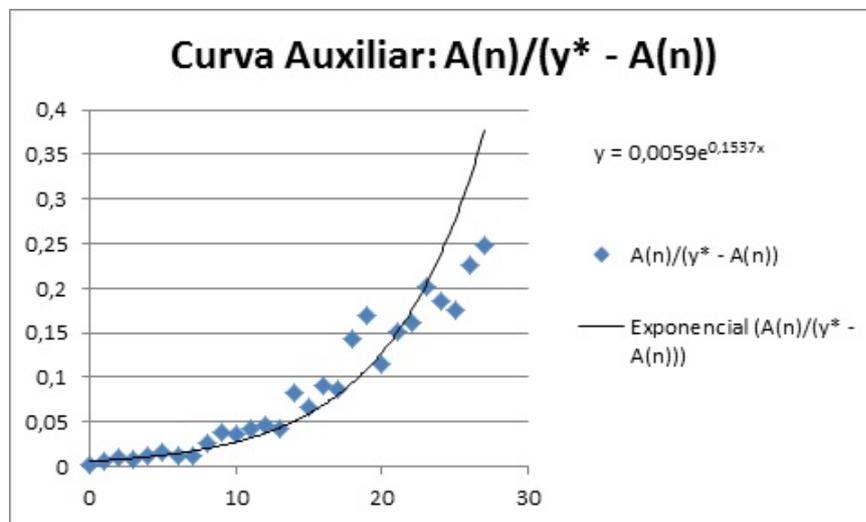


Figura 3.19: Curva auxiliar do modelo logístico 3

Com o ajuste exponencial  $y = 0,0022.e^{0,1485x}$ , obtemos que a e b são 0,0022 e 0,1485,

Tabela 3.17: Cálculo de  $\frac{A_n}{y^* - A_n}$  do modelo logístico 3

Tempo	AIDS ( $A_n$ )	$y^*$	$y^* - A_n$	$\frac{A_n}{(y^* - A_n)}$
0	2	3920	3918	0,000510465
1	9	3920	3911	0,002301202
2	16	3920	3904	0,004098361
3	12	3920	3908	0,003070624
4	17	3920	3903	0,004355624
5	23	3920	3897	0,005901976
6	19	3920	3901	0,004870546
7	17	3920	3903	0,004355624
8	38	3920	3882	0,009788769
9	53	3920	3867	0,013705715
10	50	3920	3870	0,012919897
11	58	3920	3862	0,015018125
12	64	3920	3856	0,01659751
13	60	3920	3860	0,015544041
14	112	3920	3808	0,029411765
15	91	3920	3829	0,023765996
16	121	3920	3799	0,031850487
17	116	3920	3804	0,030494217
18	183	3920	3737	0,048969762
19	210	3920	3710	0,050938338
20	151	3920	3769	0,040063677
21	190	3920	3730	0,050938338
22	201	3920	3719	0,054046787
23	243	3920	3677	0,066086484
24	228	3920	3692	0,061755146
25	216	3920	3704	0,058315335
26	268	3920	3652	0,073384447
27	288	3920	3632	0,079295154

respectivamente. Com isso, conclui-se que o modelo logístico 3 é:

$$A_n = \frac{3920}{454,55e^{-0,1485t} + 1}$$

Validando o modelo com os dados do número de casos da AIDS, obtemos a tabela 3.18 e a figura 3.20.

Tabela 3.18: Dados do número de casos da AIDS com o modelo logístico 3

Tempo	AIDS ( $A_n$ )	$y^*$	Modelo $A_n$
0	2	3920	9
1	9	3920	10
2	16	3920	12
3	12	3920	13
4	17	3920	16
5	23	3920	18
6	19	3920	21
7	17	3920	24
8	38	3920	28
9	53	3920	33
10	50	3920	38
11	58	3920	44
12	64	3920	51
13	60	3920	59
14	112	3920	68
15	91	3920	78
16	121	3920	91
17	116	3920	105
18	183	3920	121
19	210	3920	140
20	151	3920	161
21	190	3920	186
22	201	3920	214
23	243	3920	246
24	228	3920	283
25	216	3920	324
26	268	3920	371
27	288	3920	

Com esse modelo podemos concluir que o número de casos da AIDS será de 3920 infectados em 2080, como pode ser visto na tabela 3.19.

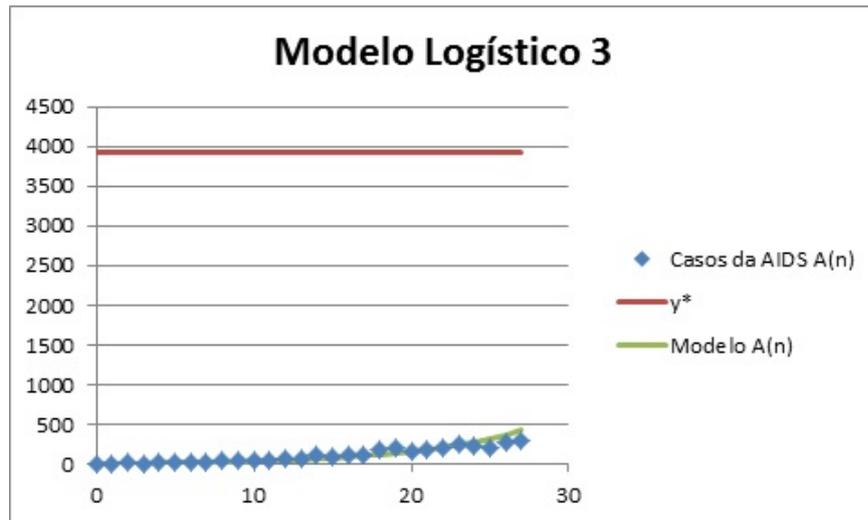


Figura 3.20: Curva de número de casos da AIDS com o modelo logístico 3

Tabela 3.19: Dados da projeção do número de casos da AIDS com o modelo logístico 3

Ano	Tempo	Modelo $A_n$
2010	24	283
2011	25	324
2012	26	371
2013	27	424
2014	28	483
2015	29	550
2016	30	624
2017	31	706
2018	32	796
2019	33	894
2020	34	1001
2025	39	1642
2030	44	2361
2035	49	2982
2040	54	3410
2045	59	3659
2050	64	3792
2055	69	3858
2060	74	3890
2065	79	3906
2070	84	3913
2075	89	3917
2080	94	3918

**Modelo Logístico Contínuo 4**

A assíntota do modelo exponencial assintótico - modelo 4 - encontrada é  $y^* = 1452,5$ . Com isso, calculamos o valor de  $\frac{A(n)}{y^* - A(n)}$  conforme tabela 3.20.

Tabela 3.20: Cálculo de  $\frac{A_n}{y^* - A_n}$  do modelo logístico contínuo 4

Tempo	AIDS ( $A_n$ )	$y^*$	$y^* - A_n$	$\frac{A_n}{(y^* - A_n)}$
0	2	1452,5	1450,5	0,001378835
1	9	1452,5	1443,5	0,006234846
2	16	1452,5	1436,5	0,011138183
3	12	1452,5	1440,5	0,0083300441
4	17	1452,5	1435,5	0,011842564
5	23	1452,5	1429,5	0,016089542
6	19	1452,5	1433,5	0,013254273
7	17	1452,5	1435,5	0,011842564
8	38	1452,5	1414,5	0,026864616
9	53	1452,5	1399,5	0,037870668
10	50	1452,5	1402,5	0,035650624
11	58	1452,5	1394,5	0,041591968
12	64	1452,5	1388,5	0,046092906
13	60	1452,5	1392,5	0,043087971
14	112	1452,5	1340,5	0,083550914
15	91	1452,5	1361,5	0,066838046
16	121	1452,5	1331,5	0,090874953
17	116	1452,5	1336,5	0,086793865
18	183	1452,5	1269,5	0,144151241
19	210	1452,5	1242,5	0,169014085
20	151	1452,5	1301,5	0,116019977
21	190	1452,5	1262,5	0,15049505
22	201	1452,5	1251,5	0,160607271
23	243	1452,5	1209,5	0,200909467
24	228	1452,5	1224,5	0,186198448
25	216	1452,5	1236,5	0,174686615
26	268	1452,5	1184,5	0,226255804
27	288	1452,5	1164,5	0,247316445

Ao fazermos o gráfico obtemos o ajuste exponencial conforme figura 3.21.

Com o ajuste exponencial  $y = 0,0059 \cdot e^{0,1537x}$ , obtemos que a e b são 0,0059 e 0,1537, respectivamente. Com isso, conclui-se que o modelo logístico 4 é:

$$A_n = \frac{1452,5}{169,49e^{-0,1537t} + 1}$$

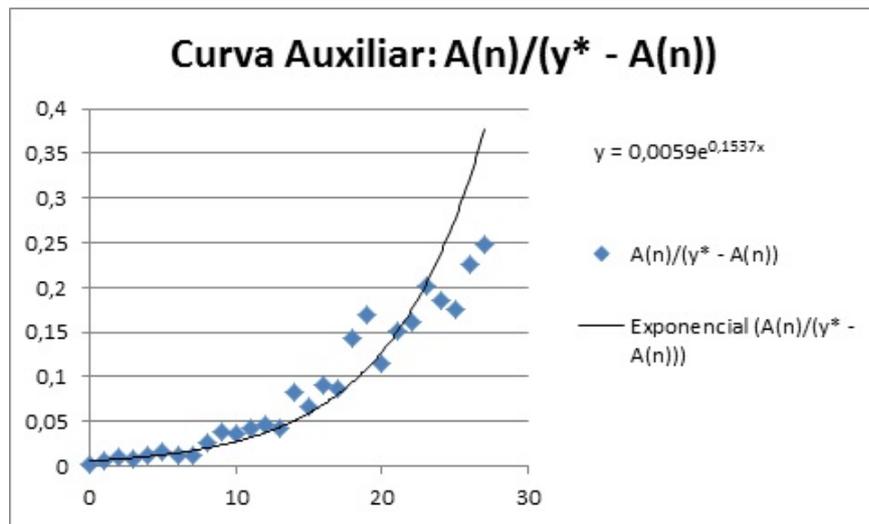


Figura 3.21: Curva auxiliar do modelo logístico 4

Validando o modelo com os dados do número de casos da AIDS, obtemos a tabela 3.21 e a figura 3.22.

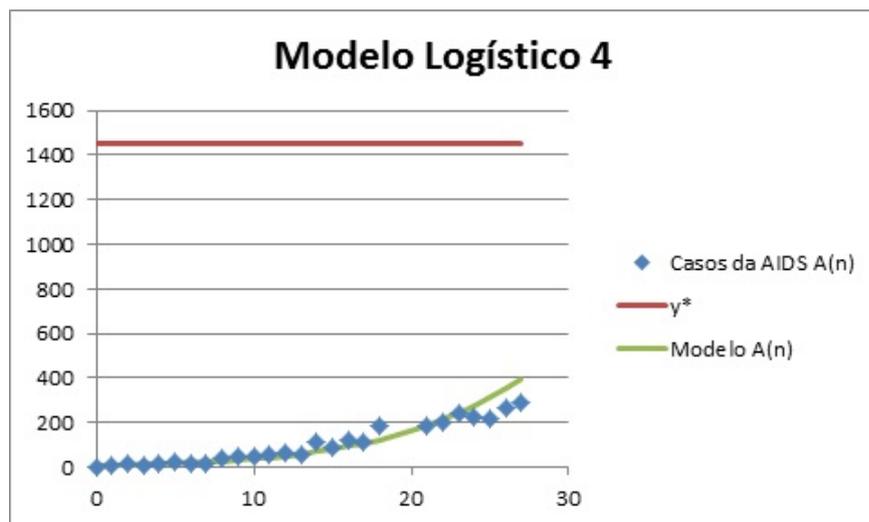


Figura 3.22: Curva Cruzamento do número de casos da AIDS com o modelo logístico 4

Tabela 3.21: Dados do número de casos da AIDS com o modelo logístico 4

Tempo	AIDS ( $A_n$ )	$y^*$	Modelo $A_n$
0	2	1453	9
1	9	1453	10
2	16	1453	12
3	12	1453	13
4	17	1453	16
5	23	1453	18
6	19	1453	21
7	17	1453	25
8	38	1453	29
9	53	1453	33
10	50	1453	39
11	58	1453	45
12	64	1453	52
13	60	1453	61
14	112	1453	70
15	91	1453	81
16	121	1453	94
17	116	1453	108
18	183	1453	125
19	210	1453	143
20	151	1453	164
21	190	1453	188
22	201	1453	215
23	243	1453	244
24	228	1453	277
25	216	1453	313
26	268	1453	353
27	288	1453	396

Com esse modelo podemos concluir que o número de casos da AIDS será de 1450 infectados em 2060, como pode ser visto na tabela 3.22.

Tabela 3.22: Dados da projeção do número de casos da AIDS com o modelo logístico 4

Ano	Tempo	Modelo $A_n$
2010	24	277
2011	25	313
2012	26	353
2013	27	396
2014	28	441
2015	29	490
2016	30	541
2017	31	594
2018	32	649
2019	33	704
2020	34	760
2025	39	1021
2030	44	1215
2035	49	1332
2040	54	1394
2045	59	1425
2050	64	1439
2055	69	1446
2060	74	1450
2065	79	1451
2070	84	1452

Contudo, conclui-se que o modelo logístico contínuo 2 e 4 são os mais próximos da realidade da população de Teresina e do número de casos da AIDS, respectivamente.

## 4 Modelagem Discreta

Neste capítulo iremos obter o modelo matemático usando o modelo Malthusiano e o modelo Logístico Discreto.

### 4.1 Modelo Malthusiano

#### 4.1.1 População Teresinense

Como visto anteriormente, neste modelo precisamos encontrar  $\alpha$  que é dado por  $\sqrt[n]{\frac{P_{t+n}}{P_t}} - 1$ , onde  $P_t$ ,  $P_{t+n}$  e  $n$  são, primeira amostra da população, a última amostra da população e o tempo entre as duas amostras, respectivamente. Daí, com base na tabela 2.3 temos que  $\alpha = \sqrt[138]{\frac{814,2}{21,7}} - 1$ . Logo,  $\alpha = 0,26618$ .

Como o modelo Malthusiano é da forma  $P_n = P_0(1 + \alpha)^n$ , temos então que

$$P_n = 21,7.(1,26618)^n$$

Com isso, para validar o modelo obtivemos a tabela 4.1 a seguir.

Gerando o gráfico no Excel, resultou na figura 4.1 que representa a curva do modelo Malthusiano para a população de Teresina. Em seguida, fez-se o cruzamento dos dados da população com o modelo Malthusiano, conforme figura 4.2.

#### 4.1.2 Casos da Síndrome da Imunodeficiência Adquirida (AIDS)

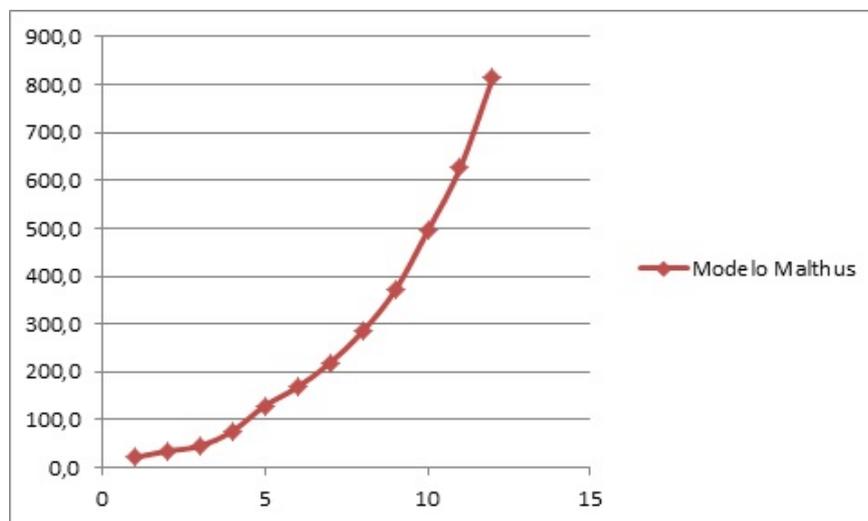
Analogamente ao desenvolvido em 4.1.1, com os dados da tabela 2.2 encontramos o valor de  $\alpha$ , ou seja,  $\alpha = \sqrt[27]{\frac{288}{2}} - 1 = 0,20209$ . Daí, temos que o modelo Malthusiano é dado por

$$P_n = 2.(1,20209)^n$$

Gerando o gráfico no Excel, resultou na figura 4.3 que representa a curva do modelo Malthusiano para os casos da AIDS. Em seguida, fez-se o cruzamento dos dados da

Tabela 4.1: Dados do modelo Malthusiano da população Teresinense

Tempo	Dados da População ( $P_n$ )	Modelo Malthusiano
0	21,7	21,7
18	31,5	34,8
28	45,3	45,3
48	53,5	76,5
68	67,6	129,5
78	90,7	168,3
88	144,8	218,9
98	230,2	284,7
108	388,9	370,2
119	598,4	494,3
128	714,6	626,1
138	814,2	814,2

Figura 4.1: Modelo Malthusiano da população Teresinense ( $t=0=1872$ )

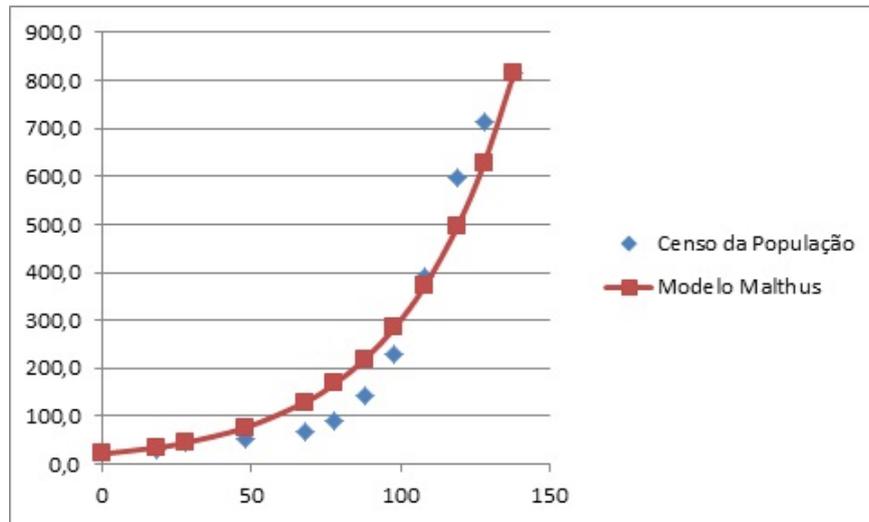


Figura 4.2: Cruzamento dos dados da população Teresinense e do modelo Malthusiano

população com o modelo Malthusiano, conforme figura 4.4.

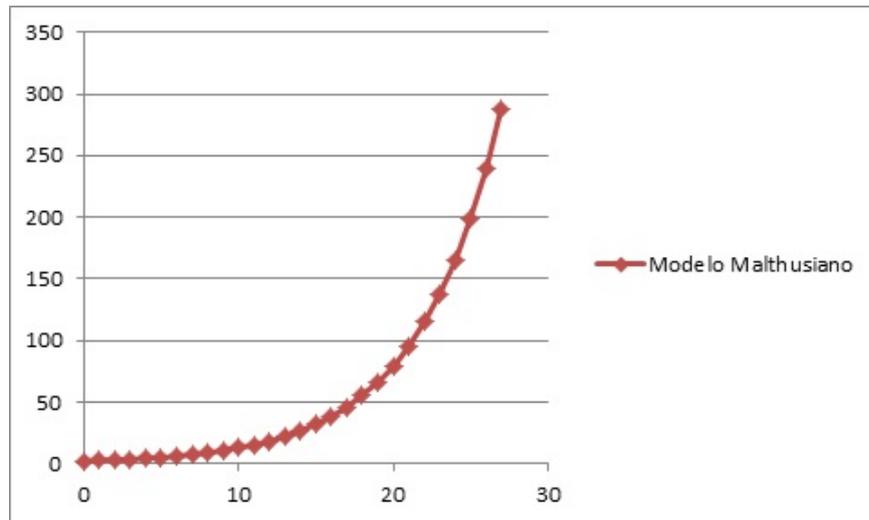


Figura 4.3: Modelo Malthusiano do número de casos de AIDS ( $t=0=1986$ )

## 4.2 Modelo Logístico Discreto

### 4.2.1 População Teresinense

Neste modelo, obtermos o modelo matemático, faz-se o ajuste quadrático das variações discretas dada pelo cruzamento de  $P_n$  x Variação ( $P_{n+1} - P_n$ ). Com isso, fez-se a tabela 4.2 para obtenção do ajuste quadrático como pode ser visto na figura 4.5.

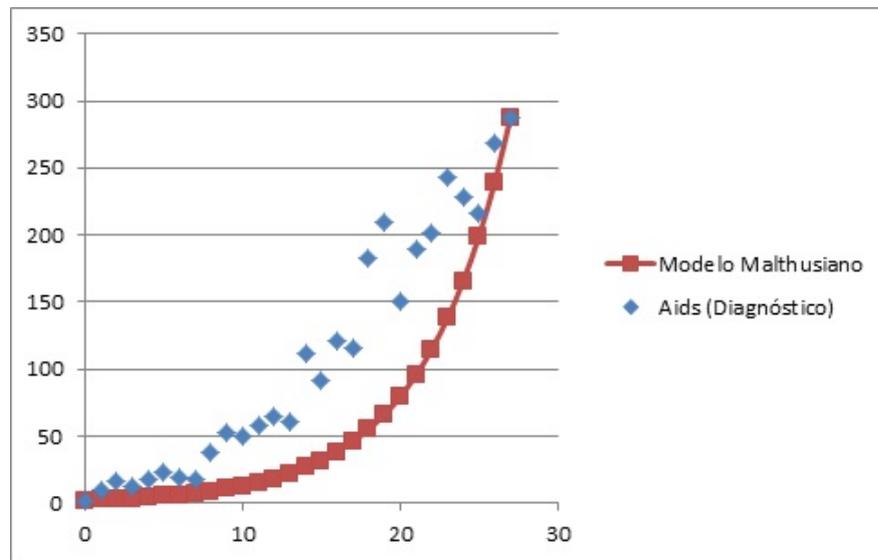


Figura 4.4: Cruzamento dos dados da população Teresinense e do número de casos de AIDS

Tabela 4.2: Variação da População Teresinense

Tempo	População ( $P_n$ )	População ( $P_{n+1}$ )	Varição ( $P_{n+1} - P_n$ )
0	21,7	31,5	9,8
18	31,5	45,3	13,8
28	45,3	53,5	8,2
48	53,5	67,6	14,1
68	67,6	90,7	23,1
78	90,7	144,8	54,1
88	144,8	230,2	85,4
98	230,2	388,9	158,8
108	388,9	598,4	209,5
119	598,4	714,6	116,2
128	714,6	814,2	99,6
138	814,2		

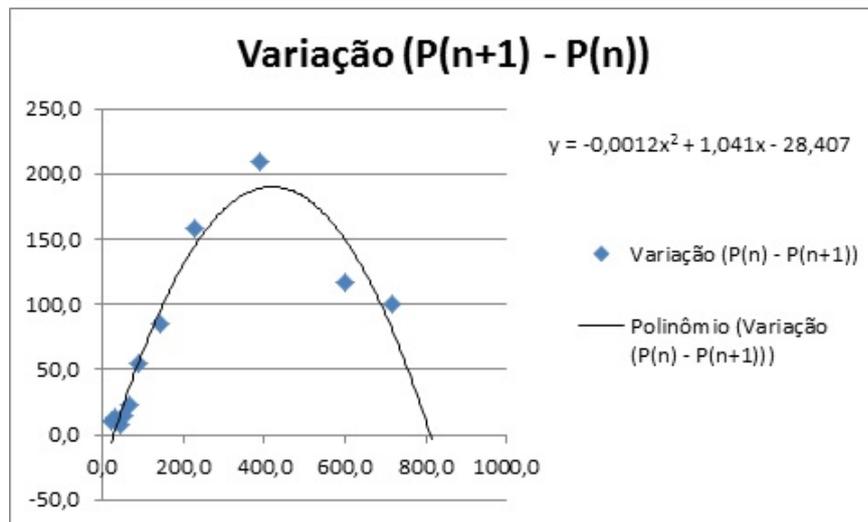


Figura 4.5: Cruzamento de  $P_n$  x Variação ( $P_{n+1} - P_n$ )

Com o ajuste quadrático obtemos a equação da parábola:

$$y = -0,0012x^2 + 1,041x - 28,407$$

Como uma das raízes da parábola é consideravelmente próxima de zero, consideremos na forma de uma equação logística discreta:

$$x_{n+1} - x_n = ax_n^2 + bx_n$$

$$x_{n+1} = ax_n^2 + (b + 1)x_n$$

Com isso, fazamos  $y = P_{n+1} - P_n$  e  $x = P_n$  obtendo:

$$P_{n+1} - P_n = -0,0012P_n^2 + 1,041P_n$$

$$P_{n+1} = -0,0012P_n^2 + 2,041P_n$$

Neste modelo, a estabilidade ou ponto de equilíbrio são obtidos quando não ocorre variação de  $(n)$  para  $(n + 1)$ , ou seja,

$$P_{n+1} = P_n = P^*$$

Com isso, encontramos o ponto de estabilidade:

$$P^* = -0,0012P^{*2} + 2,041P^*$$

$$-0,0012P^{*2} + 1,041P^* = 0$$

$$P^*(0,0012P^* - 1,041) = 0$$

$$P^* = 0 \text{ ou } P^* = 867,5$$

Para a validação do modelo, obtemos a tabela 4.3 e o gráfico 4.6.

Tabela 4.3: Modelo Logístico Discreto da população

Tempo	Dados da População ( $P_n$ )	Modelo Logístico Discreto
0	21,7	21,70
18	31,5	43,72
28	45,3	86,95
48	53,5	168,39
68	67,6	309,66
78	90,7	516,94
88	144,8	734,40
98	230,2	851,70
108	388,9	867,85
119	598,4	867,49
128	714,6	867,50
138	814,2	867,50

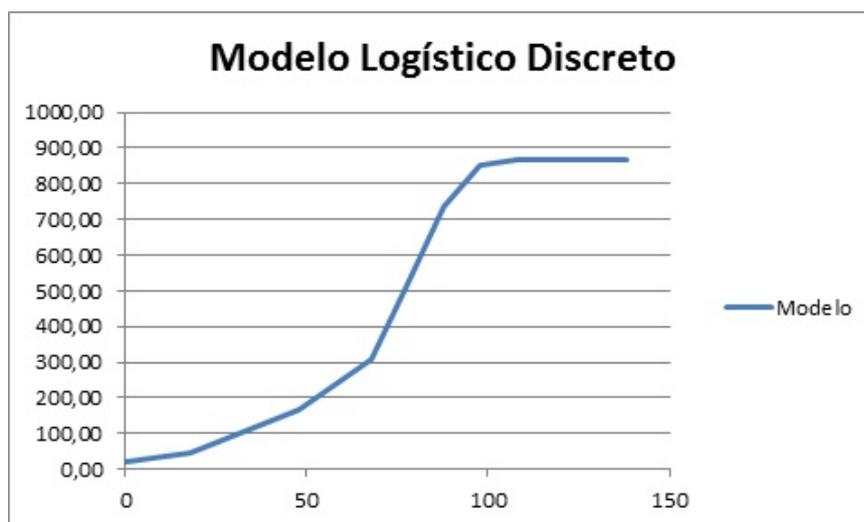


Figura 4.6: Curva do Modelo Logístico Discreto da população

Na figura 4.7 visualiza-se o cruzamento dos dados da população de Teresina com o modelo Logístico Discreto em função do tempo.

#### 4.2.2 Casos da Síndrome da Imunodeficiência Adquirida (AIDS)

De maneira análoga ao desenvolvido em 4.2.1, obtemos a tabela 4.4 para obtenção do ajuste quadrático como pode ser visto na figura 4.8.

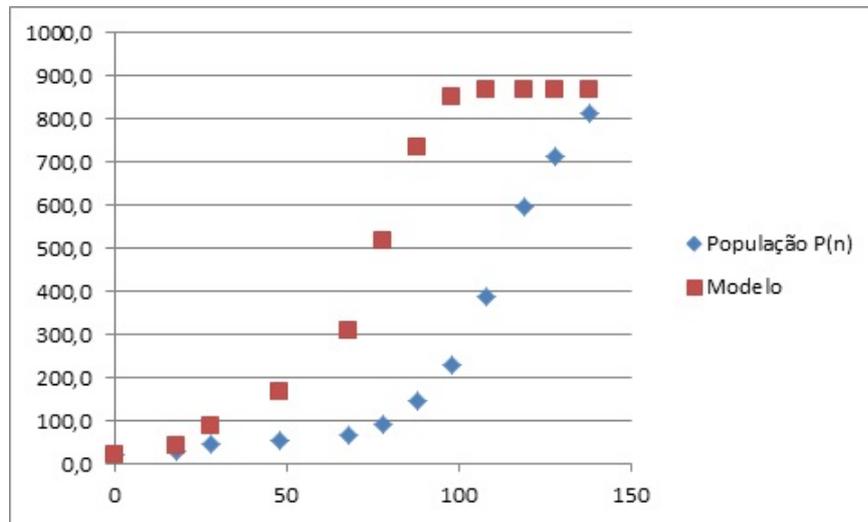


Figura 4.7: Cruzamento dos dados da população com o Modelo Logístico Discreto

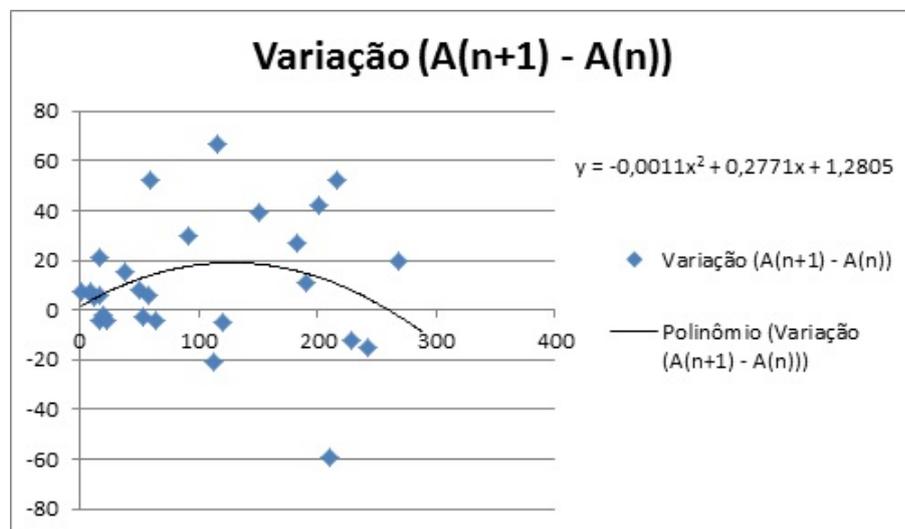


Figura 4.8: Cruzamento de  $A_n$  x Variação ( $A_{n+1} - A_n$ )

Tabela 4.4: Variação do número de Casos da AIDS

Ano Diagnóstico	Tempo ( $t_n$ )	$A_n$	$A_n$	Variação ( $A_{n+1} - A_n$ )
1986	0	2	9	7
1987	1	9	16	7
1988	2	16	12	-4
1989	3	12	17	5
1990	4	17	23	6
1991	5	23	19	-4
1992	6	19	17	-2
1993	7	17	38	21
1994	8	38	53	15
1995	9	53	50	-3
1996	10	50	58	8
1997	11	58	64	6
1998	12	64	60	-4
1999	13	60	112	52
2000	14	112	91	-21
2001	15	91	121	30
2002	16	121	116	-5
2003	17	116	183	67
2004	18	183	210	27
2005	19	210	151	-59
2006	20	151	190	39
2007	21	190	201	11
2008	22	201	243	42
2009	23	243	228	-15
2010	24	228	216	-12
2011	25	216	268	52
2012	26	268	288	20
2013	27	288		

Com o ajuste quadrático dos dados obtemos a equação da parábola:

$$y = -0,0011x^2 + 0,2771x + 1,2805$$

Com isso, façamos  $y = A_{n+1} - A_n$  e  $x = A_n$  obtendo:

$$A_{n+1} - A_n = -0,0011A_n^2 + 0,2771A_n$$

$$A_{n+1} = -0,0011A_n^2 + 1,2771A_n$$

A estabilidade ou ponto de equilíbrio são obtidos quando não ocorre variação de  $(n)$  para  $(n + 1)$ , ou seja,

$$A_{n+1} = A_n = A^*$$

Com isso, o ponto de estabilidade é:

$$A^* = -0,0011A^{*2} + 0,2771A^*$$

$$-0,0011A^{*2} + 0,2771A^* = 0$$

$$A^*(0,0011A^* - 0,2771) = 0$$

$$A^* = 0 \text{ ou } A^* = 251,9$$

Para a validação do modelo, obtemos a tabela 4.5 e o gráfico 4.9.

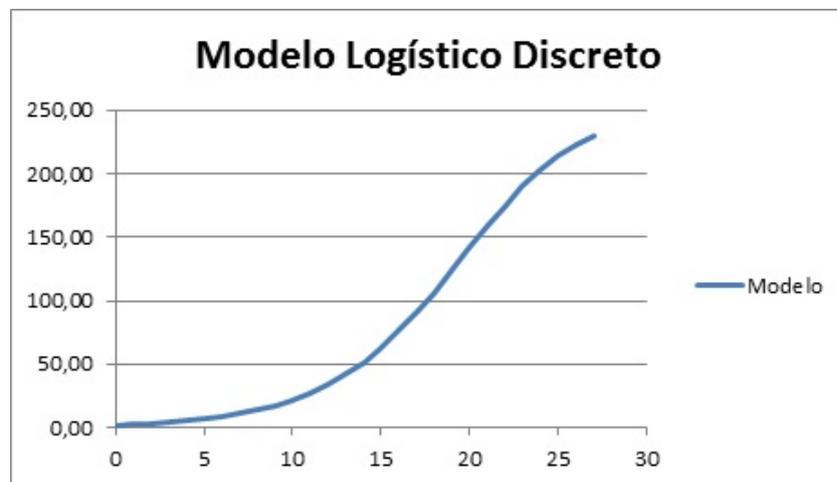


Figura 4.9: Curva do Modelo Logístico Discreto do número de casos da AIDS

Tabela 4.5: Modelo Logístico Discreto do Número de Casos da AIDS

Tempo ( $t_n$ )	$A_n$	Modelo Logístico Discreto
0	2	2,00
1	9	2,55
2	16	3,25
3	12	4,14
4	17	5,27
5	23	6,69
6	19	8,50
7	17	10,78
8	38	13,63
9	53	17,21
10	50	21,65
11	58	27,13
12	64	33,84
13	60	41,96
14	112	51,65
15	91	63,03
16	121	76,13
17	116	90,84
18	183	106,94
19	210	123,99
20	151	141,44
21	190	158,63
22	201	174,90
23	243	189,72
24	228	202,70
25	216	213,67
26	268	222,66
27	288	229,82

Na figura 4.10 visualiza-se o cruzamento dos dados do número de casos da AIDS com o modelo Logístico Discreto em função do tempo.

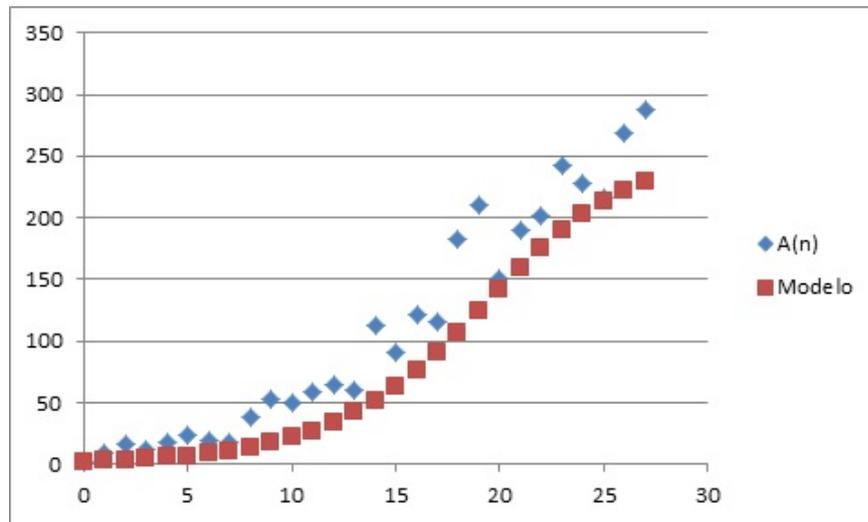


Figura 4.10: Cruzamento dos dados da população com o Modelo Logístico Discreto

# 5 Crescimento Populacional x Número de Casos da AIDS

## 5.1 Exponencial Assintótico 2 x Logístico Contínuo 4

O modelo Exponencial Assintótico 2 da população de Teresina é dado por:

$$P_2(t) = 1355,77 - 7144,862.e^{-0,0188.(t+114)}$$

Enquanto que o modelo Logístico Contínuo 4, que representa o número de casos da AIDS por ano, é dado por:

$$A_n = \frac{1452,5}{169,49e^{-0,1537t} + 1}$$

Para efetuarmos a projeção da relação dos dados da população de Teresina e do número de casos da AIDS, fizemos um ajuste no tempo pois os dados coletados são de épocas distintas.

A relação entre o número do casos de AIDS e a População de Teresina é dado por:

$$\frac{A_n}{P_2(t)} = \frac{\frac{1452,5}{169,49e^{-0,1537t} + 1}}{1355,77 - 7144,862.e^{-0,0188.(t+114)}}$$

Com essa relação fez-se a tabela 5.1.

Tabela 5.1: Modelo Exponencial Assintótico 2 x Modelo Logístico Contínuo 4

Ano	Tempo ( $t_n$ )	Casos da AIDS $A_n$	População $P_n$	$\sum_{i=0}^n \frac{A_n}{P_n}$
1986	0	9	517828	0,000016452
1987	1	10	533434	0,000034578
1988	2	12	548750	0,000054681
1989	3	13	563780	0,000077105
1990	4	16	578530	0,000102237
1991	5	19	593006	0,000130515
1992	6	21	607212	0,000162435
1993	7	25	621153	0,000198562
1994	8	29	634835	0,000239535
1995	9	33	648262	0,000286083
1996	10	39	661439	0,000339029
1997	11	45	674370	0,000399310
1998	12	52	687061	0,000467980
1999	13	61	699515	0,000546233
2000	14	70	711738	0,000635406
2001	15	81	723732	0,000736998
2002	16	94	735504	0,000852678
2003	17	108	747056	0,000984294
2004	18	125	758393	0,001133883
2005	19	143	769519	0,001303666
2006	20	164	780437	0,001496046
2007	21	188	791152	0,001713597
2008	22	215	801668	0,001959040
2009	23	244	811988	0,002235208
2010	24	277	822115	0,002545000
2015	29	490	869993	0,004695820
2020	34	760	913576	0,008027003
2025	39	1021	953248	0,012520331
2030	44	1215	989362	0,017842987
2035	49	1332	1022235	0,023579680
2040	54	1394	1052159	0,029430046
2045	59	1425	1079398	0,035237714
2050	64	1439	1104193	0,040941758

## 5.2 Logístico Contínuo 2 x Logístico Contínuo 4

O modelo Logístico Contínuo 2 da população de Teresina é dado por:

$$P_n = \frac{1355,77}{97,09e^{-0,0333t} + 1}$$

Enquanto que o modelo Logístico Contínuo 4, mostrado anteriormente, é dado por:

$$A_n = \frac{1452,5}{169,49e^{-0,1537t} + 1}$$

A relação entre o número de casos de AIDS e a População de Teresina é dada por:

$$\frac{A_n}{P_2(t)} = \frac{\frac{1452,5}{169,49e^{-0,1537t} + 1}}{\frac{1355,77}{97,09e^{-0,0333t} + 1}}$$

Com essa relação fez-se a tabela 5.2.

De acordo com as tabelas 5.1 e 5.2, observa-se que a relação de pessoas com AIDS e população de Teresina só cresce. Em 2010, tem-se que para cada 1000 pessoas, 3 estavam infectadas. Com as tabelas pode-se prever que em 2050, para cada 1000 pessoas, 42 estarão infectadas. Vale ressaltar que o número de pessoas infectadas é o somatório de todos os casos desde 1986. Isso se deve ao fato que o número de casos é constatado anualmente e a doença até o momento não tem cura.

Tabela 5.2: Modelo Logístico Contínuo 2 x Modelo Logístico Contínuo 4

Ano	Tempo ( $t_n$ )	Casos da AIDS $A_n$	População $P_n$	$\sum_{i=0}^n \frac{A_n}{P_n}$
1986	0	9	426310	0,000019984
1987	1	10	436101	0,000042295
1988	2	12	446010	0,000067277
1989	3	13	456033	0,000095323
1990	4	16	466165	0,000126881
1991	5	19	476403	0,000162460
1992	6	21	486743	0,000202638
1993	7	25	497180	0,000248074
1994	8	29	507711	0,000299512
1995	9	33	518330	0,000357796
1996	10	39	529032	0,000423882
1997	11	45	539813	0,000498844
1998	12	52	550668	0,000583894
1999	13	61	561590	0,000680387
2000	14	70	572575	0,000789840
2001	15	81	583617	0,000913937
2002	16	94	594710	0,001054544
2003	17	108	605849	0,001213707
2004	18	125	617027	0,001393665
2005	19	143	628238	0,0015966838
2006	20	164	639477	0,001825819
2007	21	188	650737	0,002083355
2008	22	215	662012	0,002372312
2009	23	244	673296	0,002695635
2010	24	277	684583	0,003056290
2015	29	490	740835	0,005514497
2020	34	760	796226	0,009210042
2025	39	1021	850034	0,014040598
2030	44	1215	901619	0,019579411
2035	49	1332	950451	0,025360561
2040	54	1394	996127	0,031085479
2045	59	1425	1038374	0,036629869
2050	64	1439	1077047	0,041973646

## 6 Conclusão

A modelagem matemática tem se destacado nos últimos anos, pois está mudando o cenário do processo ensino-aprendizagem. Esta foge do tradicionalismo, pois busca a solução de problemas essencialmente não-matemático dando sentido ao porquê da existência da matemática. Vale mencionar ainda que a modelagem matemática é interdisciplinar, pois são diversos problemas que ela resolve envolvendo outras áreas, como biologia, química, física, engenharias, entre outras.

Analogamente ao desenvolvido neste trabalho, com a utilização da modelagem podemos tornar o estudo da matemática mais prático, pois podemos relacionar problemas do cotidiano ou fenômenos com os conteúdos ministrados fazendo com que os alunos compreendam a importância do conhecimento e despertando neles o gosto pela disciplina.

Neste trabalho fez o estudo da população de Teresina e do número de casos de diagnóstico da AIDS através dos modelos contínuo, modelo Exponencial Assintótico método de Ford-Walford e Logístico Contínuo, e dos modelos discretos, modelo Malthusiano e Logístico Discreto. Dentre os modelos encontrados, os que melhores representam o crescimento da população Teresinense são o Exponencial Assintótico 2 e o Logístico Contínuo 2. Já para o número de casos da AIDS o modelo mais representativo é o Logístico Contínuo 4.

Com os melhores modelos matemáticos encontrados, fez-se a razão entre os modelos e observou-se que para cada 1000 pessoas 3 estão infectadas em 2010. Projetando os dados baseado nos modelos, conclui-se que para cada 1000 pessoas 42 estarão infectadas em 2050.

Contudo, percebe-se a importância da modelagem matemática e, a partir disso, como ela pode contribuir para um processo ensino-aprendizagem mais significativo. Isto depende, essencialmente, de interesse dos professores, pois esse método requer mais disposição e dedicação. Com essa mudança de interesse, acredite-se que os alunos vão deixar de ver a disciplina como difícil.

# Referências

- [1] ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. *Modelagem Matemática na Educação Básica*. São Paulo: Contexto, 2012.
- [2] ALVES, J. E.D. *A polêmica Malthus versus Condorcet reavaliada à luz da transição demográfica*. Texto para discussão da Escola Nacional de Ciências Estatísticas, ENCE/IBGE, nº4, Rio de Janeiro, 2002.
- [3] BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2011.
- [4] BASSANEZI, R. C. *Equações Diferenciais Ordinárias: Um curso introdutório*. Coleção BC&T. São Paulo: UFABC, 2012.
- [5] BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem Matemática no Ensino*. São Paulo: Contexto, 2013.
- [6] INFOESCOLA: *Navegando e Aprendendo*. Disponível em: <<http://www.infoescola.com/geografia/teoria-populacional-malthusiana/>>. Acesso em agosto de 2015.
- [7] INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). *Censos da população teresinense*. Disponível em: <<http://www.ibge.gov.br/home/>>. Acesso em: setembro de 2015.
- [8] ———, MINISTÉRIO DA SAÚDE: SISTEMA DE INFORMAÇÕES DE AGRAVOS DE NOTIFICAÇÃO (SINAN). *Números de pessoas diagnosticadas com Síndrome da Imunodeficiência Adquirida*. Disponível em: <<http://dtr2004.saude.gov.br/sinanweb/>>. Acesso em: setembro de 2015.
- [9] MARQUES, S. P. A. *População brasileira e a frota de Carros*. 2013. 69f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal do ABC. São Paulo. 2013.

- 
- [10] FREITAS, P. M. V. *Modelagem matemática da população teresinense e sua frota de carros*. 2015. 69f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal do Piauí. Piauí. 2015.