Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO: ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS E UMA NOVA ABORDAGEM

Wylson Almeida Carvalho de Araújo

Teresina - 2017

Wylson Almeida Carvalho de Araújo

Dissertação de Mestrado:

MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO: ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS E UMA NOVA ABORDAGEM

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Me. Mário Gomes dos Santos
Coorientador:
Prof. Dr. Gilvan Lima de Oliveira

Teresina - 2017

Dedico este trabalho à quem sempre esteve certa... minha querida Mãe. (In memoriam).

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

A663m Araújo, Wylson Almeida Carvalho de.
Matemática financeira no ensino médio: análise de livros didáticos e uma nova abordagem / Wylson Almeida Carvalho de Araújo. – Teresina, 2018.
66f.: il. color

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2018.
Orientador: Prof. Dr.Mario Gomes dos Santos
Coorientador: Prof. Dr. Gilvan Lima de Oliveira

1. Matemática – Estudo e Ensino. 2. Livros Didáticos – Matemática Financeira . 3.. I. Título.

CDD 510

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

SBM

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **Mestre em Matemática** intitulada: **Matemática Financeira no Ensino Médio: Análise de Livros Didáticos e uma Nova Abordagem** defendida por **Wylson Almeida Carvalho de Araújo** em **24 / 03 / 2017** e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Me. Mário Gomes dos Santos (UFPI)
Presidente da Banca examinadora

Dr. Gilvan Lima de Oliveira (UFPI)
Examinador Interno (Coorientador)

Jurandir de Oliveira Lopes
Dr. Jurandir de Oliveira Lopes (UFPI)
Examinador Interno

Reneé Rodrigues Lima
Me. Reneé Rodrigues de Lima (IFPI)
Examinador Externo

Agradecimentos

A Deus, que se mostrou criador. Um deus vivo em mim me foi sustento e me deu coragem para questionar realidades e propor sempre um mundo novo de possibilidades.

À minha família, em especial minha esposa Fabiana Quaresma por sua capacidade de acreditar e investir em mim. Mãe, seu cuidado e dedicação foi o que deram, em todos os momentos, a esperança pra seguir e a certeza que não estou sozinho nessa caminhada.

Agradeço as minhas filhas Cecília Emanuele e Laura Fernanda pois elas são o real motivo de minha existência e ainda as principais motivadoras deste trabalho.

Agradeço ao professor Joel do Magister e aos meus professores da minha graduação, mestrado e em especial meus orientadores: Orientador Prof. Me. Mário Gomes dos Santos e ao Co-Orientador: Prof. Dr. Gilvan Lima de Oliveira e membros da banca.

Agradeço (a CAPES, ao CNPq, a FAPEPI) pelo apoio financeiro.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo analisar a abordagem da Matemática Financeira nos livros didáticos, apresentando uma reflexão sobre o seu ensino. Foram analisadas duas obras, que por questão de ética vamos chamá-las de obras A e obra B. Estes livros foram escolhidos por fazerem parte de obras mais adotadas e difundidas nas escolas do brasil. Ao adotarmos um livro, deve-se observar a sua concordância com as orientações nacionais. Portanto, será realizado uma análise técnica, sem qualquer desprestígio com os autores das obras, apenas reflexões sobre o ensino da matemática financeira e sua concordância com os Parâmetros Curriculares Nacionais, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e o Guia Nacional do Livro Didático, além de sugerir uma proposta de ensino ressaltando uma grande questão da Matemática Financeira "A Tomada de Decisão".

Palavras - Chave : Matemática Financeira; Livro Didático; Tomada de Decisão.

Abstract

This work aims to analyze the Financial Mathematics content in textbooks, proposing a reflection on their teaching method. Two works were analyzed, which for ethical reasons we will call them work A and work B. These books were chosen because they are among the ones studied and disseminated in Brazil's schools. When choosing a book, we teachers must be sure if they follow the national guidelines. It is a technical analysis without any affection or disaffection with the authors of the works, we only propose reflections on the teaching of financial mathematics and whether they meet the National Curriculum Parameters (PCNs), the Law of Guidelines and Bases of National Education and the National Textbook Guide and insert a teaching proposal emphasizing an important issue of Financial Mathematics "Decision Making".

Keywords : Financial Mathematics; Textbook; Decision making.

Sumário

Introdução

A Matemática Financeira faz parte do nosso cotidiano e vem ganhando mais importância em nossa sociedade, isso se justifica com os altos índices de inadimplência divulgados pelas instituições de pesquisa, através dos diversos meios de comunicações, com isso, objetivando que a população torne-se mais consciente na sua tomada de decisão, deve-se usar problemas cada vez mais próximo do cotidiano das pessoas, esse é o papel da matemática financeira. Um professor, normalmente, ao ensinar essa matéria precisa ser bastante cuidadoso pois ao defini-la de forma inadequada pode levar o alunado a tomar decisões erradas, diante disso, naturalmente, surgem algumas perguntas: Como nós professores aprendemos Matemática Financeira? De onde tiramos o embasamento teórico? Onde habita o erro? Por que esta matéria é lecionada na maioria das vezes no ensino médio?. Percebe-se, que essa matéria tem grande importância no ensino básico e é talvez a mais sentida diretamente quando não a usamos de forma correta, pois ao estudar essa parte da Matemática o aluno compreende melhor financeiramente o ambiente em que vive, tornando-se um ser mais crítico, consciente financeiramente e capaz de tomar uma decisão mais racional a cerca do dinheiro.

Para a realização desse trabalho foram necessárias quatro etapas: primeiro fez-se uma pesquisa descritiva de abordagem qualitativa acerca do ensino de matemática financeira no ensino médio e como esta é abordada nos livros didáticos; em seguida analisou-se os documentos: o Guia Nacional do Livro Didático Matemática 2015, Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs, Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB estruturando-se da seguinte forma: apresento a matemática financeira no ensino médio e o livro didático, em seguida a importância da linguagem do livro didático no ensino de matemática financeira, posteriormente a análise das obras A e B e concluindo com uma proposta de ensino e considerações finais.

Sobre a análise dos livros A e B de Matemática Financeira o trabalho baseia-se em três componentes básicos: Conceituação, Manipulação e Aplicação, subdividindo-os em categorias para facilitar a compreensão, que são:

1. Conteúdos de Matemática Financeira contemplados;

2. Abordagem;

3. Nota histórica;

4. Listagem de palavras ou expressões que precisam ser melhoradas;

Capítulo 1

A Matemática Financeira e o Livro Didático

Ao longo da história, o ensino sempre esteve ligado ao livro didático. Este surgiu na Grécia, abordava conteúdos referentes à cultura grega e eram selecionados de acordo com o nível escolar. Sendo assim este persistiu ao longo dos tempos. Um exemplo clássico é "Os Elementos de Geometria", de Euclides, escrito 300 a.C, que durante mais de 20 séculos serviu como manual escolar. Percebemos a importância do livro didático desde os primórdios, portanto sendo importante tanto para quem ensina quanto para quem aprende.

O livro didático é um bom recurso para professores e alunos, pois transmite conhecimentos científicos, instiga o pensamento dos alunos, mas também é um espaço privilegiado de circulação e difusão de ideologias, por isso ao escolher um livro didático de Matemática, devemos estar atentos a três componentes básicos, conforme afirma Elon Lages (2001): Conceituação, Manipulação e Aplicação.

Quanto à conceituação, compreende-se a formulação das definições, conceitos de proposições e o estabelecimento de conexões entre os diversos conceitos. Neste item devem-se observar os erros (provenientes de desatenção, raciocínio, definição), excesso de formalismo, linguagem inadequada, obscuridade, imprecisão, confusão de conceitos, além do fato que a conceituação precisa garante o êxito das aplicações. Quando se refere à manipulação, esta é a que mais se destaca nos livros de Matemática, fazendo com que para alguns a disciplina não passe disso, que é o manuseio de equações, fórmulas, construções geométricas elementares. Esta componente deve estar presente tanto nos textos quanto nos exercícios.

A última componente a ser avaliada é a Aplicação. Ela é a razão pela qual estudamos Matemática. Refere-se ao emprego de noções e teorias Matemáticas desde problemas simples do cotidiano ate questões envolvendo outras áreas bem como gerando conexões entre conteúdos vistos anteriormente. Um bom exemplo da aplicação são os conteúdos referentes à Matemática Financeira, que além de fazerem parte do nosso cotidiano, estes podem ser relacionados com vários outros conteúdos estudados como Progressão Geométrica, funções, equações exponenciais, logaritmos.

De acordo com a LDB, o ensino médio é a etapa final da educação básica, e tem como finalidade a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, o aprimoramento como pessoa, incluindo a formação ética e o pensamento crítico, e segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais sobre os objetivos de cada área do conhecimento:

Observa-se a importância de aproximar os conteúdos trabalhados em sala com a realidade do aluno e para isso devemos estar atentos a abordagem dos livros didáticos, e no que tange ao ensino de Matemática, este tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, além de que a Matemática está presente na vida cotidiana e em quase todas as atividades humanas. Todas as áreas do conhecimento requerem alguma competência em Matemática; a compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos é necessária para o aluno, que futuramente virá a agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional, e um grande colaborador do professor para que esses objetivos sejam alcançados é o livro didático.

Geralmente nos livros de matemática do ensino médio, percebemos a ausência dos conteúdos que se referem à Matemática Financeira, e quando estes são apresentados recaem em muitas falhas, falhas essas que só serão sentidas dentro da sociedade, quando os conhecimentos necessários às finanças são cobrados. Sendo a Matemática Financeira de grande importância para a formação do cidadão, devemos explorar esse conteúdo em sua verdadeira essência, como mostra os PCN's de Matemática,

> Para compreender, avaliar e decidir sobre algumas situações da vida cotidiana, como qual a melhor forma de pagar uma compra, de escolher um financiamento, etc, é necessária trabalhar situações-problema sobre a Matemática Comercial e Financeira, como calcular juros simples e compostos e dividir em partes proporcionais, pois os conteúdos necessários para resolver essas situações já estão incorporados nos blocos.(BRASIL, 1998, p.86).

É preciso dá sentido ao que o aluno estuda em sala de aula. Na maioria das vezes os alunos saem do ensino médio com conhecimentos que talvez não cheguem a utilizar no cotidiano e são incapazes de decidir sobre o que é mais vantajoso, como por exemplo, entre uma compra à vista ou à prazo. Dessa forma fica claro que o ensino de Matemática Financeira é imprescindível, e fazer com que os alunos de hoje possam ser educados financeiramente, é contribuir para que estes não caiam em propagandas enganosas, que como consequência surge o endividamento e o atraso no desenvolvimento econômico.

1.1 A importância da linguagem do livro didático no ensino de Matemática Financeira

De acordo com Cook (2003), a linguagem está no coração da vida humana, e é por meio dela que são possíveis as relações e o conhecimento também se perpetua. Trata-se de um fenômeno natural. Quanto ao ensino de Matemática, percebemos que o conhecimento matemático é cada vez mais requisitado pela sociedade, principalmente no que se refere à parte de Matemática Financeira, e um cidadão ativo precisa ser capaz de ler, escrever e resolver problemas pertinentes às operações financeiras, além de utilizar os conhecimentos matemáticos em diversas situações cotidianas, e para que esse conhecimento seja adquirido, o professor juntamente com o livro didático tem papel fundamental.

Sabemos a importância da comunicação para o desenvolvimento da sociedade, e é papel da escola contribuir para esse desenvolvimento. Não há como sobreviver sem comunicação. E o livro didático também é uma forma de comunicação entre o autor, professor e aluno acerca de determinado conteúdo, uma vez que o professor age como mediador desse conhecimento. As informações contidas nos livros exercem grande influência sobre aqueles que os leem, pois estas são tidas como verdades absolutas, e é bastante comum nos depararmos com algumas falhas nos livros didáticos, principalmente em livros de Matemática que são adotados em varias escolas brasileiras que de acordo com BRASIL (1998, p.21-22):

> "Não tendo oportunidade e condições para aprimorar sua formação e não dispondo de outros recursos para desenvolver as práticas da sala de aula, os professores apóiam-se quase exclusivamente nos livros didáticos que, muitas vezes, são de qualidade insatisfatória".

Alguns livros apresentam conceitos matemáticos equivocados ou utilizam expressões inadequadas para determinada série, ou fazem o uso de expressões que são incompatíveis com os objetivos do Ensino Básico de acordo com a LDB e o professor acaba por transferir o que está no livro, mesmo que incorreto para o aluno e este internaliza o conhecimento e o reproduz na sociedade. Para se aprender Matemática é necessário que o aluno entenda o que está escrito nos livros didáticos. O autor deve buscar adquirir os conhecimentos necessários à construção do mesmo, devendo sempre ficar atento às informações que serão transmitidas, se estas são verdadeiras, como também à linguagem que irá utilizar.

A linguagem dos livros didáticos deve sempre se adequar ao público a que se destina, sem fazer uso de expressões que ferem à cidadania, ou que tragam implicitamente a ideia de preconceito ou coisas do gênero. Quanto a Matemática, cabe aos autores buscar equilibrar a linguagem usual com a linguagem matemática, evitando exacerbar essa última, fazendo com que a comunicação se torne clara e adequada ao nível do aluno, o que é exigido de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais,

> Falar sobre Matemática, escrever textos sobre conclusões, comunicar resultados, usando ao mesmo tempo elementos da língua materna e alguns símbolos matemáticos, são atividades importantes para que a linguagem matemática não funcione como um código indecifrável para os alunos. BRASIL (1997, p.46).

Em relação ao ensino de Matemática Financeira, a linguagem tem como função contribuir para que o aluno do Ensino Médio conheça os conceitos e aplicabilidade na atualidade, uma vez que este estará se preparando para entrar no mercado de trabalho e é essencial que ele compreenda como funcionam as operações financeiras a que será submetido, e uma das melhores formas de se adquirir esse conhecimento é por meio do livro didático, pois é imprescindível que os termos apresentados estejam corretos.

Segundo Santos (2007), conhecer os conteúdos matemáticos que estão envolvidos nas atividades financeiras é uma forma agradável de dar significado aos conteúdos estudados no Ensino Básico, que muitas vezes, são transferidos por meio de linguagem matemática exagerada, tornando-os completamente sem sentido para a vida, e como conseqüência a aprendizagem matemática fica comprometida. Os conteúdos devem ser apresentados mediante situações reais, pois é competência exigida para a Educação Básica que os alunos relacionem os conteúdos vistos em sala, com a realidade em que vive.

Capítulo 2

Análise técnica e o que os livros poderiam evitar

Os livros escolhidos para análise são bastantes difundidos em todo Brasil, a obra B, que aborda conceitos introdutórios de Matemática Comercial, Matemática Financeira e Estatística Descritiva e a outra obra é sobre Matemática Financeira.

Esses livros foram elaborados com o objetivo de oferecer ao estudante uma visão global da Matemática Financeira do ensino médio. Dirige-se também aos universitários que necessitam rever a matemática elementar, a fim de adquirir informações básicas mais nessa área.

Quanto aos aspectos gráfico-editoriais, as obras estão bem organizadas por capítulos, com um bom sumário, o que facilita a localização dos conteúdos. A obra B apresenta no final do livro as respostas dos exercícios e dos testes de vestibulares. Já se observa na obra A que esta já é mais completa e com uma suave ascenção do nível de dificuldade. Prosseguimos com a análise dos livros com base em quatro categorias:

(1) Conteúdos de Matemática Financeira contemplados;
(2) Como os conceitos básicos de Matemática Financeira são abordados;
(3) História da Matemática Financeira;
(4) Listagem de palavras ou expressões consideradas equivocadas no que se refere ao ensino de Matemática Financeira.

2.1 Conteúdos contemplados

Os conteúdos abordados na obra B, atualmente são muitos solicitados em concursos e vestibulares. A obra se estrutura em 3 capítulos, dos quais analisamos somente o capitulo 2, dedicado à Matemática Financeira. Nele estão descritos no quadro abaixo os conteúdos contemplados no capítulo:

Tabela 2.1: Conteúdos abordados no livro didático

Livro	**conteúdos abordados**
Obra B	Capital, juros, taxa de juros e montante. Regimes de capitalização, juros simples, descontos simples, juros compostos, juros compostos com taxa de juros variáveis, valor atual de um conjunto de capitais, sequência uniforme de pagamentos e Montante de uma sequência uniforme de depósitos.

Observamos na obra B que o conteúdo é bem dividido que facilita o aprendizado e a busca por uma parte específica da Matemática Financeira. Em seguida vemos os conteúdos abordados pela obra A, vejamos.

Tabela 2.2: Conteúdos abordados no livro didático

Livro	**Conteúdos abordados**
Obra A	Juro simples, Desconto simples, Juro composto, Desconto composto, Capitalização e amortização, Empréstimos

A escolha dos capítulos 8 ao 13 do livro do A, deve-se por expressarem mais fortemente a Matemática Financeira. Vale a pena ressaltar que a obra A é bastante sub-dividida o que facilita mais ainda uma consulta específica, a exemplo do capítulo 8 que é dividido em dez partes: *introdução, juro-capital-taxa, Regimes de capitalização, Juro simples, Cálculo de juro simples, Taxas proporcionais, Taxas equivalentes, Juro comercial e juro exato, Determinação do número exato de dias entre duas datas, Montante*

Ainda sobre o livro A, este tem o mérito de um apêndice que trás consigo conteúdos para embasamento, que são eles: Medidas de Tempo, Potenciação, Funções, Progressões, Logaritmos Decimais. Por fim, a obra encerra com tabelas financeiras que sempre são muito úteis ao ensino.

Esses conteúdos são de grande importância para a formação do cidadão, mas notamos em ambas a ausência de alguns conteúdos importantes, tais como: o Valor do Dinheiro no Tempo, A Tomada de Decisão e Rendas Perpétuas. Já no livro B, notamos também a ausência dos conteúdos: Financiamentos e Amortizações, onde destacamos o Sistema de Amortização Constante (SAC), Sistema Francês de Amortização (SAF), uso da Tabela Price e do poder de compra que são bastante utilizados no mundo todo.

Esses conteúdos merecem atenção especial, pois diariamente são realizadas operações de financiamento de veículos e imóveis, bem como também contratos de aluguéis e empréstimos. Ter conhecimento de como funciona essas operações é essencial para um aluno do Ensino Médio, uma vez que o ensino de matemática nessa etapa da educação deve contribuir para a formação do aluno como cidadão crítico e consciente de seus direitos e deveres.

2.2 Abordagem dos conceitos básicos de Matemática Financeira

Ao analisar os conteúdos em ambas as obras, percebemos que estão de acordo com os PCN's (1998), no que ressalta que o ensino de Matemática Financeira deva abordar os conteúdos de juros simples e compostos, como mencionado anteriormente. Também é mencionado o uso da calculadora para a realização de cálculos de juros compostos, indicando as teclas que deverão ser usadas para calcular as potências.

Ao tratar o conteúdo valor atual de um conjunto de capitais, no livro B utiliza-se o eixo das setas e essa forma gráfica facilita a aprendizagem desse conteúdo, pois ajuda na visualização de qualquer operação financeira. Esta consiste em um eixo horizontal que funciona como uma escala de tempo e setas verticais, posicionadas sobre datas indicando valores que podem ser pagamentos ou recebimentos, o que não acontece na obra A. Entretanto em momento algum os autores fazem referência ao valor do dinheiro no tempo e nem afirma que há somente um único problema de Matemática Financeira, que é deslocar as quantias no tempo. Sabe-se que o dinheiro não pára no tempo e que muitos fatores do cotidiano contribuem para esse fato. Portanto, devemos estudar a Matemática Financeira em sua essência, conforme menciona MORGADO:

> O verdadeiro objetivo do estudo de Matemática Financeira, é o valor do dinheiro no tempo, que com isso não há muitos problemas de Matemática Financeira, mas somente um, que é deslocar as quantias no tempo...só se pode comparar capitais em uma esma época... se estão em épocas distintas basta trazer tudo pra mesmsa data.[a]

[a]MORGADO, Declaração Verbal no PAPMEM 2002 - Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio

2.3 Contexto Histórico da Matemática Financeira

Os PCNs trazem a História da Matemática como um recurso didático para facilitar o trabalho do professor e nestes livros observa-se a ausência desse recurso em quase todos os conteúdos do capítulo. O livro B, apenas ao tratar sobre Sequência uniforme de pagamentos o autor busca situar o conteúdo em um contexto histórico por meio de um texto no final do capítulo sobre Richard Price e a sequência uniforme de capitais e o livro A nem isso, pois ainda há uma tentativa de falar sobre moeda, mas sem êxito.

Sabe-se que a Matemática Financeira surgiu da necessidade do homem em realizar trocas, possibilitando o desenvolvimento do comércio. Seu desenvolvimento está ligado diretamente com a utilidade do dinheiro e ao seu custo, estando presente no cotidiano de todos, onde exerce grande influência sobre aqueles que detêm o conhecimento financeiro, podendo assim permitir lucros ou prejuízos.

É necessário apresentar aos alunos a história da matemática. É importante trabalhar os conteúdos com significados, mostrando aos alunos como surgiu cada conteúdo e quais as contribuições do mesmo para sua vida em sociedade, fazendo com que o aluno veja a matemática como um assunto útil e prático e não apenas como uma disciplina sem sentido, cheia de fórmulas, que não acrescentam em nada para sua vida. Nas orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) referentes à matemática destaca-se o seguinte trecho:

> O ensino da história da Matemática permite recuperar sentido, e símbolo que foram ensinados tão arbitrários, seus traços, suas origens e a sua histórica permitem-nos restabelecer os novos conceitos que a mesma visa. Neste sentido dois aspectos são fundamentais no ensino da Matemática: tais como: o primeiro refere-se à visão da matemática que em geral norteia o ensino.

Por não elaborar e não destacar um contexto histórico da Matemática Financeira, percebemos que uma grande oportunidade é perdida, pois ao se relatar um contexto evolutivo e matemático, deixamos de lado a imersão do alunado no momento crucial do ensino, onde ele se coloca na posição de utilizar tais conhecimentos ou como se deu a evolução humana na perspectiva da Matemática Financeira. Vejamos o que diz Carvalho (1994, p.15).

> No ensino onde é necessário submeter-se à autoridade da Matemática, é impossível entender, pois, compreender Matemática torna-se privilégio das cabeças mais bem dotadas; acaba-se por negar todas as vivências anteriores relativas à qualificação já que não se enquadram na perfeição da Matemática.

Aulas de matemática onde se usam números, fórmulas e mais fórmulas tendem a ser um pouco tediosas, daí a importancia de costurar a Matemática Financeira com toques de história, atraindo assim mais atenção do discente, até porque todos gostam de uma boa história.

Como estratégia de ensino, a História da Matemática pode inserir um dinamismo na sala de aula. O docente mostra o porquê de determinados conteúdos fazerem parte do seu currículo escolar, permitindo a construção do pensamento crítico sobre o assunto em questão, viabilizando reflexões sobre as relações entre a História e a Matemática.

2.4 Palavras ou expressões que podem ser melhoradas

Inicia aqui a parte mais delicada do livro por considerar a linguagem do livro didático um fator essencial para o processo de ensino-aprendizagem. Apresentaremos algumas palavras e expressões encontradas nos livros, que de acordo com a pesquisa e interpretação, não deveriam ser apresentadas dessa forma, ou não poderiam estar presentes no livro didático.

Percebemos que os exercícios das livros analisados buscam uma aproximação com a realidade, ao citar exemplos de compra, venda e empréstimo, mas os exemplos são ilusórios e o autor não deixa claro isso. O que pode gerar uma "falsa" ideia por parte dos alunos quanto às operações financeiras, já que os livros também são voltados para estudantes do Ensino Médio, que estão se preparando para entrar no mercado de trabalho e o contato com essas operações se tornará mais sólido. Encontramos em vários exercícios nas duas obras a seguinte expressão: **"Um banco concedeu a uma empresa um empréstimo a juros simples..."** vejam os exemplos:

Percebemos a tentativa dos autores em contextualizar o conteúdo, mas estes recaem em falhas, principalmente porque o livro didático deve se aproximar da realidade do

Um banco concedeu a uma empresa um empréstimo a juros simples por 15 meses. Qual a taxa mensal do empréstimo sabendo-se que o montante é igual a 160% do capital emprestado?

Figura 2.1: Obra B pág. 51

aluno, contemplando conteúdos que favoreçam o desenvolvimento deste, sendo que ao exemplificar que um banco empresta a juros simples, essa situação em nosso país, onde o regime de **capitalização composta** é o que prevalece, fazendo com que o aluno tenha a ideia de que um banco poderá emprestar a juros simples, e nós sabemos que na realidade **"isso não acontece"**. Logo adiante explicaremos em que casos específicos ocorre essa modalidade de juros.

Vejamos outros casos em que os autores enfatizam que o banco financia a juros simples.

4º) Um investidor aplicou 80% de seu capital num fundo *A* e o restante num fundo *B*, pelo prazo de 1 ano. Nesse período, o fundo *A* rendeu 16%, enquanto o fundo *B* rendeu 10%. Vamos determinar a taxa global de juros ao ano recebida pelo investidor.

Seja *C* o capital total aplicado, a parte aplicada no fundo *A* é $C_A = 0{,}80 \cdot C$ e a parte aplicada no fundo *B* é $C_B = 0{,}20 \cdot C$.

Os juros recebidos por meio do fundo *A* foram:

$$J_A = 0{,}16 \cdot C_A = 0{,}16 \cdot (0{,}80C) = 0{,}128C$$

Os juros recebidos por meio do fundo *B* foram:

$$J_B = 0{,}10 \cdot C_B = 0{,}10 \cdot (0{,}20C) = 0{,}02C$$

Assim, os juros totais recebidos foram:

$$J_A + J_B = 0{,}128C + 0{,}02C = 0{,}148C$$

Finalmente, a taxa global de juros recebida na aplicação foi:

$$i = \frac{J}{C} = \frac{0{,}148C}{C} = 0{,}148 = 14{,}8\% \text{ a.a.}$$

Figura 2.2: Obra B pág. 42

Aqui no livro B, o autor faz uma tentativa de aplicar a Matemática Financeira usando investimentos, mas em que situação um investidor utiliza 80% de seu capital a juro simples?

A população usa cotidianamente a Matemática Financeira, por isso é imprescindível seu ensino de forma correta. Ao estudar essa parte da Matemática, o aluno compreende melhor financeiramente o mundo em que vive e torna-se um cidadão mais crítico, consciente financeiramente e capaz de promover o desenvolvimento da sociedade. Uma vez que ele foi educado financeiramente, as chances de se tomar decisões erradas ou precipitadas no campo financeiro são menores. Como aponta Bigode (2013) ao ressaltar sua preocupação com o entendimento do aluno no que se refere à Matemática Financeira:

> Nos dias de hoje, é muito comum um cidadão, a partir de certa idade, utilizar a Matemática para tomar decisões em atividades cotidianas que envolvem dinheiro. Ao passarmos os olhos pelos jornais diários e páginas de notícias da internet constatamos frequentemente, tabelas e gráficos relacionados à economia do país, que é repleta de matemática. Temos de estar preparados para interpretar esses índices, tabelas, gráficos e cálculos.

O próximo exemplo fala sobre o financiamento de um veículo.

5. Uma concessionária vende um automóvel por R$ 15.000,00 à vista. A prazo, vende por R$ 16.540,00, sendo R$ 4.000,00 de entrada e o restante após 4 meses. Qual é a taxa de juro mensal cobrada?

Resolução:

Se o cliente resolver comprar a prazo, receberá financiamento para apenas R$ 11.000,00 (15.000 – 4.000). O fato se passa, então, como se o cliente tivesse recebido R$ 11.000,00 emprestados com o compromisso de devolver R$ 12.540,00 (16.540 – 4.000) após o prazo de 4 meses.

Temos, então:

$$\begin{cases} M = 12.540{,}00 \\ C = 11.000{,}00 \\ n = 4 \text{ me} \end{cases}$$

Como:

$$M = C(1 + in)$$

vem:

$$12.540 = 11.000\,(1 + 4i)$$

ou:

$$11.000\,(1 + 4i) = 12.540 \Rightarrow 1 + 4i = \frac{12.540}{11.000} \Rightarrow 1 + 4i = 1{,}14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4i = 1{,}14 - 1 \Rightarrow i = \frac{0{,}14}{4} \Rightarrow i = 0{,}035,$$

isto é:

$$i = 0{,}035 \text{ a.m.}$$

Logo, a taxa de juro cobrada é de:

3,5% ao mês

Figura 2.3: Obra A pág. 98

Aqui há uma ótima oportunidade do autor da obra A, aplicar definitivamente a matemática financeira, pois, certamente, nos deparamos com a compra de um carro e o autor nos aliena, uma vez que ao consultar-se o livro vai achar que é assim que funciona.

De acordo com o professor Augusto César Morgado, falecido em 2006, em uma aula no PAPMEM ocorrida em julho de 2002, o contexto ideal para a apresentação do conteúdo de Juros Simples é o seguinte:

> "Havia um reino encantado e nesse reino havia um velho cheio da grana e um príncipe muito elegante, muito bonito e pobre. O príncipe pediu um empréstimo de 100 reais ao velho. Eles combinaram juros de 10% ao mês. Passado um mês o príncipe foi até o velho que lhe disse muito bem, veio me pagar os 110 reais? E o príncipe respondeu Não! Não posso pagar os 110 reais porque não tenho dinheiro. Nesse exato momento, quando o velho ia ter um ataque nervoso, surge uma fada encantada. A fada joga um pouco de pó de pirlimpimpim no velho. Então o velho diz para o príncipe: tudo bem príncipe, nós prorrogamos o empréstimo mais um mês, nas mesmas condições: juros de dez por cento. Mas eu estou me sentindo muito bondoso e não vou cobrar os juros de 10% sobre os 110 que o senhor me deve agora, vou cobrar os juros só sobre os 100 que o senhor me devia no mês passado?. O príncipe acha ótimo. Passa mais um mês, o príncipe novamente vai até o velho. O velho está lá esfregando as mãos: veio me pagar hoje os 120 reais que me deve? O príncipe diz: Não! Não vim, porque não tenho dinheiro. Quando o velho ia ter novamente um ataque, a fada encantada surge outra vez e joga pó de pirlimpimpim no velho. A fada trabalha com doses crescentes de pó de pirlimpimpim. Ela agora coloca uma dose dupla de pó pirlimpimpim no velho, pois se ela colocasse uma dose simples, o velho provavelmente proporia que os juros corressem não sobre os 120 reais devidos atualmente, mas sim sobre os 110 reais passados. Contudo, como a dose é dupla, o velho propõe que os juros corram só sobre os 100 reais iniciais. O príncipe acha ótimo. Quando o príncipe voltou depois de um mês, a sua dívida era de 130 reais, mas daí o príncipe havia ganhado na loteria. Pagou o velho e foram felizes para sempre". (INFORMAÇÃO VERBAL, MORGADO, PAPMEM 2002).

Como podemos perceber, o contexto ideal para juros simples é este: conto de fadas, pois na vida real essa prática não existe, e logicamente é muito mais vantajoso cobrar juros sobre juros do que cobrar juros apenas sobre o capital inicial. Vivemos em uma sociedade capitalista onde seu principio mais importante é o lucro. Morgado ainda faz um apelo aos professores, quanto ao ensino da Matemática Financeira.

> Professor, ao ensinar apenas juros simples é melhor não ensinar, assim pelo menos você não cria no aluno a falsa impressão de que ele entende daquilo. Desnecessário é perguntar se em algum problema de vida real os juros são compostos ou simples. Os juros são compostos! Que os professores sejam então cautelosos no ensino da Matemática Financeira e que deixem claro aos alunos a inutilidade prática dos juros simples. (Informação Verbal, MORGADO, PAPMEM 2002)

Verdade seja dita: Juros simples é usado pelo banco por um simples motivo: ele sempre ganha, já que para prazos curtíssimos antes da primeira capitalização, é interessante para ele cobrar juros simples, veja:

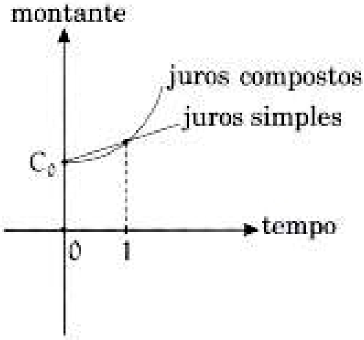


Figura 2.4: Gráfico de juros simples e composto enfatizando que o juro simples tem vantagem antes do primeiro período

Antes do primeiro período o montante a juros simples supera o montante a juros compostos. Isso é um clássico da Matemática Financeira, o que ambos não evidenciam.

O autor do livro B reforça que os juros simples é um problema da vida real.

Um capital de R$ 20 000,00 é aplicado a juros simples, durante 2 anos, à taxa de 2% a.m. Qual o montante obtido?

Qual o capital que, aplicado a juros simples, à taxa de 2% a.m., durante 8 meses, resulta em um montante de R$ 6 000,00?

Determine o capital que, aplicado a juros simples, à taxa de 2,5% a.m., durante 2 anos, resulta em um montante de R$ 16 000,00.

Calcule o capital que, aplicado a juros simples, durante 11 meses, e à taxa de 1,5% a.m., proporciona juros de R$ 700,00.

O banco RST empresta R$ 2 000 000,00 a uma firma pelo prazo de 120 dias, cobrando juros simples à taxa de 3% a.m. Simultaneamente, ele paga aos aplicadores dessa quantia juros simples com prazo de 120 dias, à taxa de 2% a.m.
a) Qual a diferença entre os juros recebidos e os pagos após os 120 dias?
b) Qual o valor dos juros pagos aos aplicadores?

Figura 2.5: Obra B pág. 49

Sobre a formação do cidadão com senso crítico, a LDB diz que:

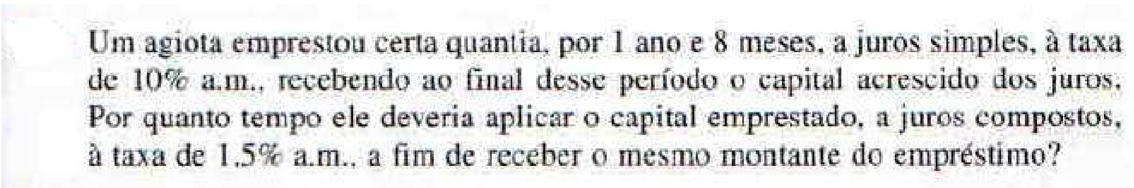
> art.2 A educação é dever da família e do Estado, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho.
>
> art.22 A educação básica tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores.

Os artigos acima mostra que os exemplos antes citados, pouco contribuem para o mercado de trabalho, pois ao se deparar com um emprego em concessionárias, financeiras ou imobiliárias os alunos que assim aprenderem irão se deparar com uma realidade totalmente diferente da que a encontrada nos livros didáticos.

A finalidade citada no artigo, vem estimular o desenvolvimento em conhecimentos de natureza Formativa, ou seja, coletiva, fornecendo aos leitores uma base científica e técnica que o habilitam a tomar decisões racionais acerca do conteúdo e ainda podemos citar conhecimentos de natureza Funcional, que são voltados para a prática da matemática cotidiana, interdisciplinaridade e tecnologias.

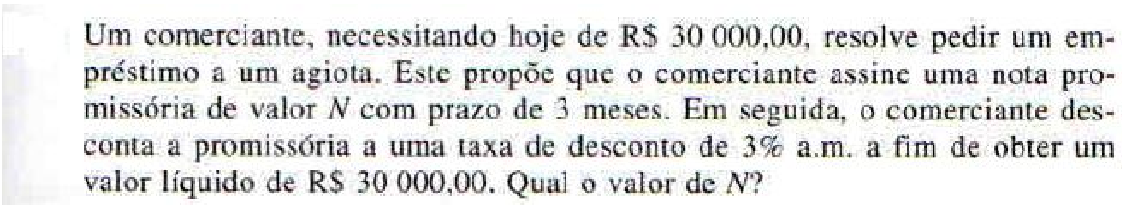
Ao tratar de juros em um livro didático, acredita-se que convém mostrar a realidade e que na prática os juros são compostos na **imensa maioria dos casos** como afirma Morgado, uma vez que nossa sociedade se organiza com base na posição em que cada indivíduo ocupa na produção ou no mercado, além da capacidade de consumo, o que faz com que todos busquem o lucro a fim de garantirem seu espaço na sociedade, e consequentemente os juros compostos **"sobressaem"** aos juros simples.

Além disso, encontramos a palavra agiota. Veja nas figuras 2.6 e 2.7 o uso desta expressão:



Um agiota emprestou certa quantia, por 1 ano e 8 meses, a juros simples, à taxa de 10% a.m., recebendo ao final desse período o capital acrescido dos juros. Por quanto tempo ele deveria aplicar o capital emprestado, a juros compostos, à taxa de 1,5% a.m., a fim de receber o mesmo montante do empréstimo?

Figura 2.6: livro B pág. 61



Um comerciante, necessitando hoje de R$ 30 000,00, resolve pedir um empréstimo a um agiota. Este propõe que o comerciante assine uma nota promissória de valor *N* com prazo de 3 meses. Em seguida, o comerciante desconta a promissória a uma taxa de desconto de 3% a.m. a fim de obter um valor líquido de R$ 30 000,00. Qual o valor de *N*?

Figura 2.7: livro B pág. 55

Segundo o dicionário, agiota é aquele que pratica a agiotagem, e esta se configura pela prática de empréstimo de dinheiro com cobrança de juros excessivos, geralmente aproveitando-se da vulnerabilidade do tomador do empréstimo.

Consideramos de mau uso o emprego da palavra agiota no livro didático, por este ser considerado espaço de difusão de ideologias e fala normalmente de uma prática criminosa em um livro, onde as informações serão transmitidas para vários alunos que internalizarão esse conteúdo.

O certo é que se trata de um problema real que sempre temos conhecimentos de casos, faltando uma explicação sobre como podemos proceder quanto a este assunto. Veja o que diz os PCN's,

> Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido.(Brasil, 2000, p.113).

O autor B toca num ponto importande da nossa realidade, mas na ilegalidade, e aqui sim, estes usam uma modalidade de juros simples mas apenas com um contrato muitas vezes de forma verbal pois temos que perceber a importância de problemas contextualizados na formação do estudante.

> Bigode (2013) faz um apelo quanto ao ensino de Matemática, dizendo que "este deve dar-se de forma contextualizada, para que sejamos capazes de compreender o mundo a nossa volta, e isso é possível graças à contribuição do livro didático, já que este tem papel importante na educação. Quanto mais o livro didático se aproxima da realidade do aluno, mais estará contribuindo para a sua formação".

Vemos também que no ensino médio onde esse conteúdo é mais difundido, há uma forte tradição das escolas de ensino básico usarem o ensino da Matemática Financeira, quase que exclusivamente, para treinamento de alunos para provas de vestibulares, sem se preocupar com suas aplicações e transversalização dos conteúdos e de carona embarcam os Livros Didáticos, agravando ainda mais o problema.

Capítulo 3

Sobre o Uso da Calculadora

Os autores tem êxito em mostrar o uso da calculadora, ferramenta fundamental nessa disciplina, fazendo exemplos e demonstrações indicando qual teclas usar e o resultado esperado. Porém nem todos podem ter em mãos uma calculadora científica. Poder-se-ia tratar esse quesito com uma calculadora convencional, como por exemplo: Muitos professores não gostam de trabalhar com a Matemática Financeira porque acreditam ser necessário o uso de calculadora financeira ou científica para efetuar os cálculos. Isso não é verdade, com um pouco de habilidade é possível se trabalhar esses cálculos com o uso de uma calculadora comum. Bastando para isso usar os seus recursos de cálculos constantes e as teclas de memória, indicadas na Figura a seguir.

Figura 3.1: Calculadora popular com função de memória

1. Para calcular a potência $1,03^{10}$, em uma calculadora simples, seguir os seguintes passos:

   (a) Digitar $1,03$

(b) Pressionar $\boxed{\text{x}}$ e em seguida $\boxed{=}$ 9 vezes.

Observação: Para elevar o número dado a uma determinada potência n, basta pressionar $\boxed{\text{x}}$ e em seguida $\boxed{=}$ $n-1$ vezes.

2. Funções das teclas de memória:

- A tecla $\boxed{\text{M+}}$ adiciona o número à atual memória.
- A tecla $\boxed{\text{M-}}$ subtrai o número atual da memória.
- A tecla $\boxed{\text{MR}}$ ou a tecla $\boxed{\text{MCR}}$ permite acessar o número que está guardado na memória.

3. A Figura a seguir mostra, passo a passo, como se pode calcular o coeficiente de amortização, para o caso de um pagamento postecipado, usando uma calculadora comum.

- As setas vermelhas indicam a ordem das inserções de dados e das operações;
- Primeiro se calcula o denominador e memoriza o resultado;
- Depois se calcula o numerador e por fim se faz a divisão pelo resultado guardado na memória.

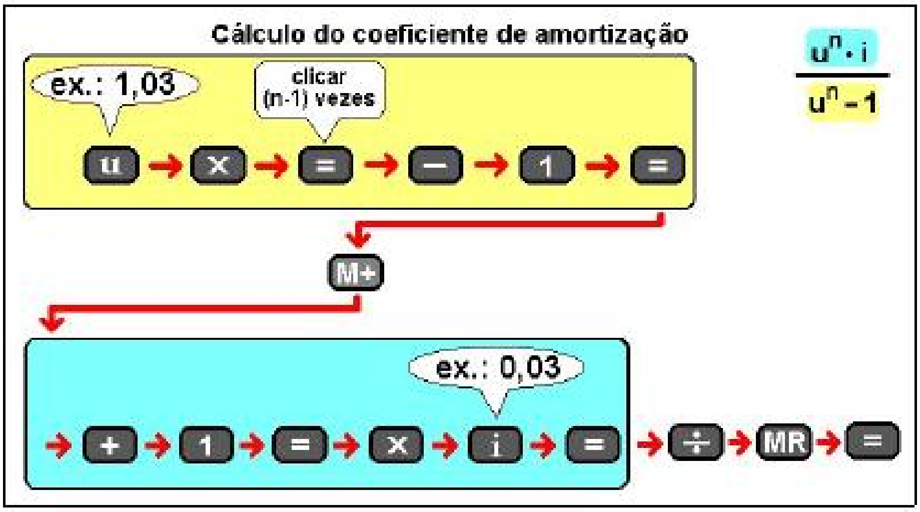


Figura 3.2: Sequência de teclas para calcular o coeficiente de amortização

Se tivesse feito isso, com certeza despertaria a curiosidade dos alunos, além de fazer entender o significado de algumas teclas da calculadora, que depois de adulto ainda é um mistério para muitos.

Capítulo 4

Proposta

4.1 Problemas Aparentemente Difíceis

Nesta seção mostraremos uma proposta que contemple as pendências apresentadas e discutidas nas seções anteriores. Serão apresentados exemplos baseados em situações reais do mercado financeiro, discutindo-se os conteúdos matemáticos e as altenartivas didáticas de traballho com cada um deles.

A proposta aqui enaltece uma forma diferente da trabalhadar os conteúdos, visto que, tradicionalmente são introduzidos com conceitos e definições de Juros Simples e Compostos. O conceito de Juros Compostos é apresentado e enfatizado, pois sugere ao aluno uma ideia de predominância de aplicações que realmente fazem sentido.

A minha proposta é tentar mostrar uma outra forma de abordar este conteúdo, pois estes livros estiveram presente em minhas consultas por muitos anos, mas pela importância do livro didático. Para alunos ou professores que seguem estas obras tornam-se, raras as exceções, incapazes de resolver alguns problemas do tipo:

1. Pedro tem três opções de pagamento na compra de vestuário.

    (a) À vista com 3% de desconto;

    (b) Em duas prestações mensais, e iguais, sem desconto, vencendo a primeira um mês após a compra;

    (c) Em três mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira no ato da compra; Qual a melhor opção para Pedro, se o dinheiro valea, pra ele, 2,5% ao mês?

2. Uma geladeira custa R$ 1 000,00 à vista e pode ser paga em três prestações mensais iguais. Se são cobrados juros de 6% ao mês sobre o saldo devedor, determine o valor da prestação, supondo que a primeira prestação é paga:

   (a) no ato da compra;

   (b) um mês após a compra;

   (c) dois meses após a compra.

3. Supondo juros de 0,5% ao mês, quanto você deve investir mensalmente,durante 35 anos, para obter, ao fim desse prazo, uma renda perpétua de R$ 100,00.

Esses problemas retratam a essência da Matemática Financeira, pois faz com que o aluno reflita com a questão que sempre nos norteia, O Valor do Dinheiro no Tempo. Sem conhecer estes problemas que são considerados clássicos os alunos saem do ensino médio perdendo uma grande oportunidade de compreender o mundo financeiro à sua volta.

Matemática Financeira, cuja inspiração vem da vida real. Esse conhecimento é fundamental em sociedades de consumo, como a nossa, e deve fazer parte da bagagem cultural de todo cidadão que nelas vive para que saiba defender minimamente os seus interesses.

Cotidianamente, estamos frente a problemas práticos, tais como se devemos ou não parcelar uma compra e, se for o caso, em quantas parcelas? Se devemos ou não antecipar o pagamento de uma dívida, usando o décimo terceiro salário? Esses são desafios que, se resolvidos corretamente, nos auxiliam a tomar decisões que podem proporcionar uma boa economia.

A ferramenta matemática básica que é utilizada nesse tipo de questões são as progressões geométricas, bastando, para resolvê-las, modelar corretamente cada problema. O assunto principal de que tratamos é o cálculo de juros em diversas situações decorrentes da operação de empréstimo, seja em aplicações (quando emprestamos), seja em compras a crédito (quando tomamos emprestado). Esta unidade repousa sobre um resultado (teorema) fundamental que nos diz como se transforma um capital inicial quando aplicado por um período de tempo, sendo submetido a um regime de juros compostos.

4.2 A linha do Tempo e o Esquema de Flechas

Veremos ao longo do curso, que o elemento “tempo” estará envolvido em todas as nossas questões! Será de nosso interesse sabermos como o dinheiro se comporta ao transcorrer do tempo!

São exemplos disso situações como as seguintes: "se eu tenho hoje uma quantia de R$1.000,00 (mil reais), e eu a depositar numa conta de poupança de um banco qualquera uma taxa de juros de 0.5% a.m, quanto eu irei resgatar (retirar, sacar) daqui a três meses?"

Vejamos que o fator "tempo" está no cerne da nossa questão! Aqui, estamos pegando um valor "hoje" e o "transportando" para uma data futura (três meses após hoje!).

Ora, se o dinheiro nunca fica parado na Matemática Financeira, então certamente que resgataremos na data futura um valor maior do que aquele que aplicamos (um valor maior que R$ 1.000,00)! Outro exemplo: Eu tenho uma dívida no valor de R$ 5.000,00, que será paga daqui a três meses, porém pretende-se antecipar o pagamento dessa dívida e pagá-la hoje. Quanto terei que pagar por essa obrigação sabendo que a taxa de juros é de 0.6 % a.m.? Aqui, temos a situação inversa: vamos pegar uma quantia em dinheiro que é devida numa data futura (daqui a três meses) e vamos "transportar" esse dinheiro para uma data anterior (o dia de hoje: a "data zero"). E se estamos "voltando no tempo" com o dinheiro, necessariamente que teríamos hoje que pagar um valor menor que o que era devido na data futura! Ou seja, pagaremos menos de R$ 5.000,00.

Estes dois exemplos são elucidativos: servem para nos mostrar a importância do elemento "tempo" em uma questão de Matemática Financeira.

Em nosso desenho da questão, o tempo será representado por uma linha! É a "linha do tempo". Normalmente, essa linha terá início com a data de hoje, também chamada de "data atual" ou "data zero". Então, doravante, quando falarmos em "data atual" ou em "data zero", estaremos nos referindo ao dia de hoje!

A linha do tempo é a seguinte:

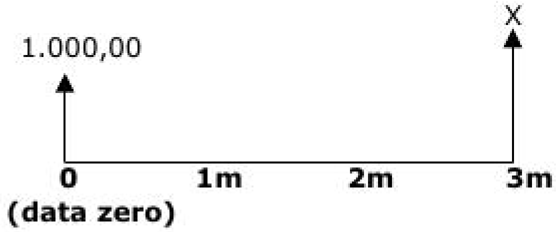
E o que se segue à data zero são as datas futuras!

Pra que serve a linha do tempo? Serve para desenharmos nela, com tracinhos verticais, os nossos valores monetários, as quantias em dinheiro, que serão fornecidas pelo enunciado da questão, colocando esses tracinhos nas datas também especificadas pelo enunciado.

Tomemos, por exemplo, os enunciados daqueles dois exemplos que criamos acima.

Exemplo 1: Se eu tenho hoje uma quantia de R$ 1.000,00 (mil reais), e eu a depositar numa conta de poupança de um banco qualquer a uma taxa de juros de 0.5% a.m, quanto eu irei resgatar (retirar, sacar) daqui a três meses?

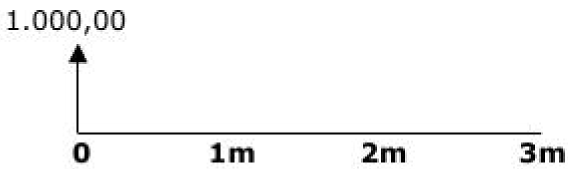
Neste caso, o desenho desta questão seria o seguinte:



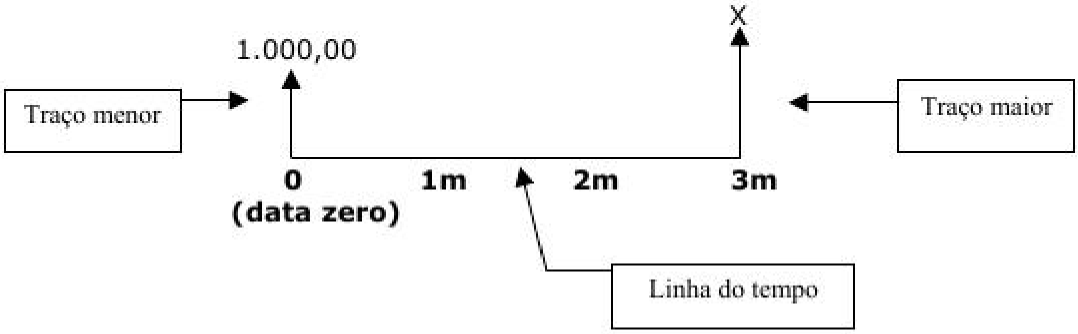
Ora, vamos analisar esse desenho: o enunciado fala que na data de hoje eu disponho de uma quantia de R$ 1.000,00. Daí, já sabemos: data de hoje é a data zero, ou seja, é onde começa a linha do tempo.

Vejamos que o valor monetário que temos hoje é esse: R$ 1.000,00, o qual será representado por esta seta vertical, exatamente sobre a data zero!

Daí, o enunciado quer saber o quanto valerá essa quantia de R$ 1.000,00 em uma data futura, qual seja, três meses após hoje. Portanto, desenharemos o tempo (os meses) sob a nossa linha. E teremos:



Por fim, o valor que desejamos saber na questão será traçado sobre a data 3 meses, que foi escolhida pelo enunciado. Como não conhecemos ainda esse valor, o chamaremos apenas de "X". E, conforme aprendemos na lei fundamental da Matemática Financeira, se "transportarmos" um valor inicial para uma data futura, sabemos que este aumentará com o passar do tempo, de modo que o valor de "X" será, necessariamente, maior que os R$ 1.000,00 iniciais. Desta forma, quando formos desenhar o X, teremos que colocar um tracinho maior que o tracinho que representava os R$ 1.000,00. Teremos:



Que resolvendo fica:

$$X = 1000 \times 1.005^3 = 1015.07$$

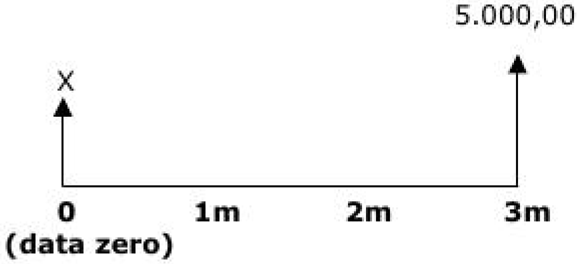
Vamos ao segundo exemplo: Eu tenho uma dívida, no valor de R$ 5.000,00, que tem que ser paga daqui a três meses, mas eu pretendo antecipar o pagamento dessa dívida e pagá-la hoje sabendo que a taxa de juros é de 0.6 % a.m.. Quanto terei que pagar hoje por essa obrigação?

Aqui, o valor monetário que nos foi fornecido pelo enunciado (R$ 5.000,00) está localizado (na linha do tempo) exatamente na data três meses! Assim, pra começar, teremos:

Só que a questão quer saber o quanto representaria o valor desta dívida de R$ 5.000,00 se eu resolvesse pagá-la hoje! Ora, conforme aprendemos, hoje é sinônimo de data zero! Então a questão quer saber, na verdade, o quanto vale estes R$ 5.000,00 na data zero.

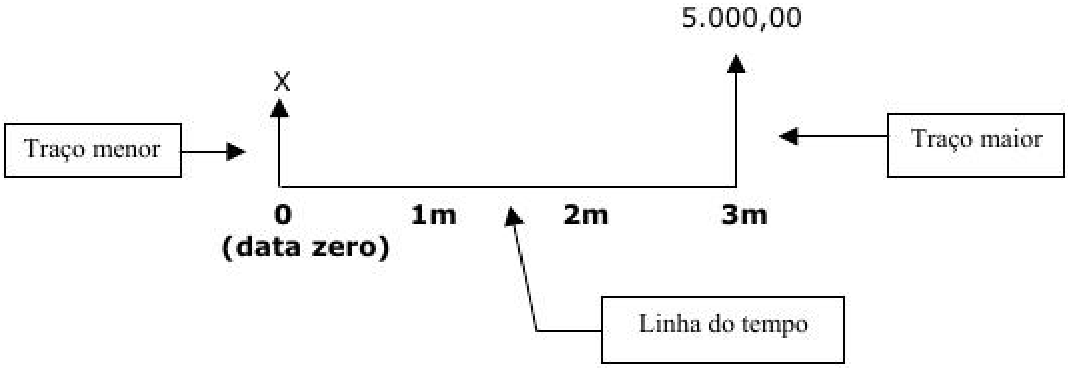
Não sabemos ainda essa resposta, portanto, representaremos essa quantia na data zero apenas por X.

Teremos:



Observemos que, como estamos "retrocedendo" no tempo, ou seja, como estamos recuando na linha do tempo, o valor de "X" será, necessariamente, um valor menor do que R$ 5.000,00. Por isso, o tracinho que representa o valor X deve ser menor que o que representa os R$ 5.000,00. Vejamos de novo:

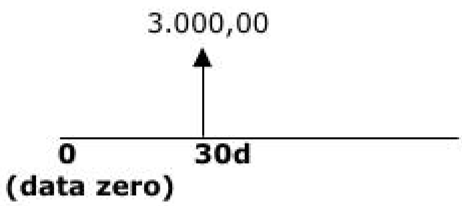
Que resolvendo fica:



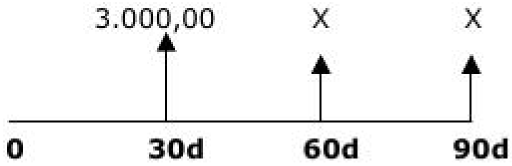
$$\mathsf{X} = \frac{5000}{1.006^3} = 4911.06$$

Vamos propor mais uma situação sem os juros para observarmos somente a questão do tempo e o esquema de flechas: Suponha que o João contraiu uma dívida. Ele se comprometeu com o seu credor que lhe pagaria daqui a 30 dias, uma quantia de R$ 3.000,00. Ocorre que, quando chegou no dia combinado. Então, João pegou o telefone e ligou para o seu credor, dizendo: —Devo, não nego! E quero pagar, só que de uma forma diferente! Agora quero pagar essa dívida em duas parcelas iguais, nas datas sessenta e noventa dias! Ora, qual seria o valor dessas duas parcelas que João vai ter que pagar agora, para substituir a dívida original (de R$ 3.000,00) que era devida (que vencia) na data 30 dias?

Vamos desenhar esse enunciado? Seria como? Fácil! A questão nos dá o valor monetário R$ 3.000,00, que é uma dívida que vencerá (ou seja, que deverá ser paga) na data 30 dias. Desenhemos, portanto os R$ 3.000,00 sobre a data fornecida. Teremos:



Estes R$ 3.000,00 representam a "obrigação original" do João. Ou seja, o valor da dívida a ser paga conforme havia sido tratado originalmente. Acontece que por não dispor da quantia suficiente, o João deseja alterar, substituir aquela forma original de pagamento, por uma outra forma de pagar a sua dívida. E qual é essa outra maneira de pagar sua dívida? Com duas parcelas iguais, as quais chamaremos apenas de X (já que são desconhecidas e iguais!), nas datas 60 e 90 dias. Nosso desenho agora será:

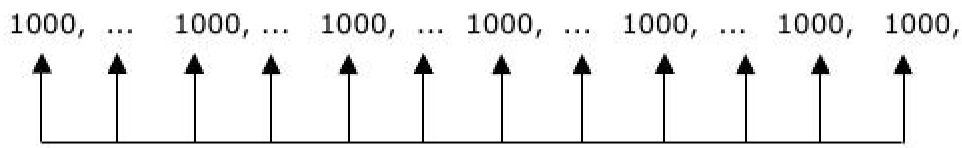


Alguém pode perguntar: os tracinhos dos X não teriam que ser maiores que o tracinho do R$ 3.000,00? Sabemos que o valor R$ 3.000,00, em uma data futura, representaria uma quantia maior! Isso é certo! Porém, como esse valor será "quebrado" em duas parcelas (são dois valores X) então não podemos afirmar, de antemão, que o valor de X será maior que R$ 3.000,00. Neste caso, basta desenhar os X nos locais corretos, designados pelo enunciado, e está tudo certo! No final da resolução, quando calcularmos o valor exato de X, saberemos se é maior ou não que os R$ 3.000,00. Ok?

Agora vejamos o seguinte exemplo:

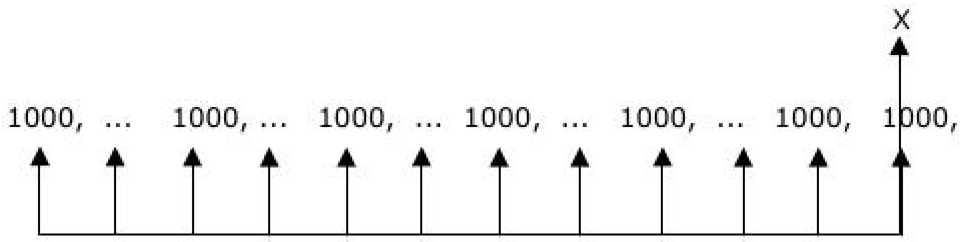
Suponhamos que o João (aquele mesmo!) passou no concurso que tanto sonhava! Está vivendo, por assim dizer, nas nuvens! E foi nomeado, e já está trabalhando. Chegou ao fim do primeiro mês, quando, finalmente, recebeu seu primeiro salário! e decide poupar todo mês uma quantia de R$1000,00 durante 12 meses.

Desenhando este enunciado, teríamos o seguinte:

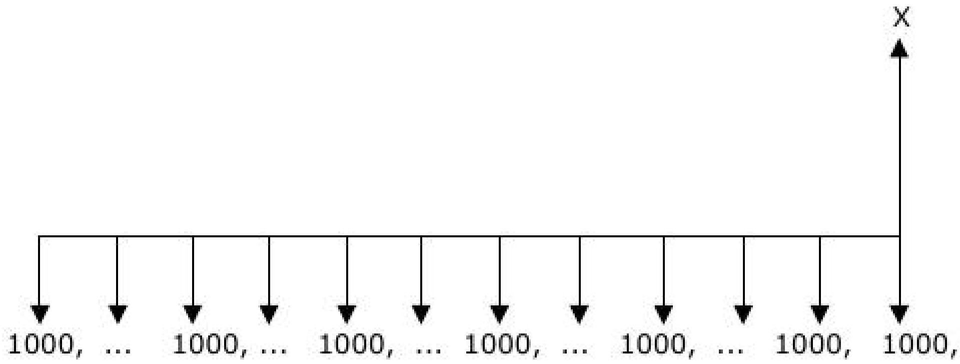


Como foram doze aplicações de R$ 1.000,00, todas feitas no início de cada mês, significa que a distância de tempo entre uma aplicação e a seguinte é sempre um espaço de tempo constante (um mês, neste caso). Se a questão quer saber o resultado desta seqüência de aplicações na data da última parcela de R$ 1.000,00, então chamaremos esse resultado de "X" (porque é desconhecido) e o colocaremos na data designada pelo enunciado.

Teremos:



Se quiséssemos, apenas para efeitos didáticos, poderíamos desenhar essa questão de uma outra forma, colocando as setas das aplicações para baixo, e deixando a seta do resultado para cima. Teríamos, portanto:

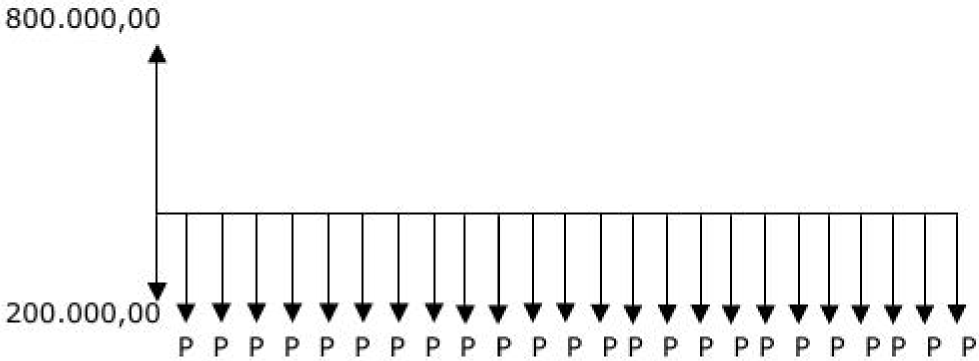


Por fim, imaginemos mais uma situação: O João (aquele nosso amigo) resolveu comprar um apartamento de luxo, na avenida Beira Mar, em Fortaleza. (Esse cara sabe mesmo o que é bom!). Ora, o valor do imóvel é R$ 800.000,00 (oitocentos mil reais)! Mas o João só dispõe, hoje, de uma quantia ínfima de R$ 200.000,00 (duzentos mil reais). Propôs, então, ao vendedor o seguinte: vai pagar os duzentos mil como uma entrada, e o saldo restante será quitado em vinte e quatro parcelas mensais e de mesmo valor, sendo a primeira delas paga ao final do primeiro mês após a compra. A questão perguntará qual o valor dessa prestação mensal que o João irá pagar!

Vamos ao desenho. Quanto custa o apartamento? Custa R$ 800.000,00, se for pago hoje, certo? E hoje é data zero! Então, temos na data zero, um imóvel cujo valor monetário é de R$ 800.000,00. O desenho inicial será, portanto:

Agora, vamos raciocinar o seguinte: se o enunciado falou que será paga uma entrada, em que data se paga uma entrada numa compra qualquer? Ora, obviamente que se paga a entrada no dia da compra, certo? Certíssimo! Daí, também para efeitos didáticos, desenharemos o valor da entrada (assim também como os valores das parcelas mensais) com uma seta para baixo. Teremos:

E o que está faltando agora ao nosso desenho? É claro que apenas o valor da entrada não paga todo o nosso apartamento, de modo que o João financiou o saldo que ainda falta pagar em vinte e quatro prestações iguais! Desenhando agora as prestações, chamando-as todas de "P", por exemplo, teremos o seguinte:



E concluímos o desenho de mais este enunciado!

– Aqui fica claro que um bom desenho e o esquema de flechas ajuda muito na compreensão da Matemática Financeira, esta, vem da vida real, pois sem o conecimento mínimo, o cidadão fica a margem de tomar decisões racionais a respeito do seu próprio dinheiro.

4.3 O Valor do Dinheiro no Tempo

A operação básica da metemática financeira é a operação de empréstimo. Alguém que dispõe de um capial C (chamado de principal), empresta-o a outrem por um certo período de tempo. Após esse período, ele recebe o seu capital C de volta, acrescido de uma remuneração J pelo empréstimmo. Essa remuneração é chamada de *juro*. A soma $\mathsf{C}+\mathsf{J}$ é chamada de *montante* e será representada por M. A razão $\mathsf{i}=\frac{\mathsf{J}}{\mathsf{C}}$, que é a taxa de crescimemto do capital, é sempre referida ao período da operação e chamada de *taxa de juros*.

Exemplo 1 Pedro tomou um empréstimo de R$100,00. Dois meses depois, pagou R$140,00. Os juros pagos por Pedro são de R$40,00 e a taxa de juros é = 0,40 = 40% ao bimestre. O principal, que é a dívida inicial de Pedro, é R$100,00 e o montante, que é a dívida de Pedro na época do pagamento, é igual a R$140,00.

O leitor deve ficar atento para o fato que Pedro e quem lhe emprestou o dinheiro concordaram que R$100,00 no início do bimestre têm o mesmo valor que R$140,00 no final do referido bimestre. E importante perceber que o valor de uma quantia depende da época à qual ela está referida. Neste exemplo, quantias diferentes (R$100,00 e R$140,00), referidas à épocas diferentes, têm o mesmo valor.

São exemplos de erros comuns em raciocínios financeiros:

1. Achar que R$140,00 têm valor maior que R$100,00., R$140,00 têm maior valor que R$100,00, se referidos à mesma época. Referidos a épocas diferentes, R$140,00 podem ter o mesmo valor que R$100,00 (veja o exemplo anterior) ou até mesmo um valor inferior. Todos nós preferiríamos receber R$100 000,00 agora do que R$140 000,00 daqui a seis anos. Com efeito, R$100 000,00 colocados em uma caderneta de poupança, a juros de 0,5% ao mês, cresceriam à taxa de 0,5% ao mês e transformar-se-iam, depois de 72 meses, em 100 000,00(1 + 0,005)72 = R$ 143 204,43.

2. Achar que R$100,00 têm sempre o mesmo valor que R$100,00 em uma outra data. Na verdade, R$100,00 hoje valem mais que R$100,00 daqui a um ano.

3. Somar quantias referidas a épocas diferentes. Pode não ser verdade, como mostrará o Exemplo 5, que comprar em três prestações de R$50,00 seja melhor que comprar em cinco prestações de R$31,00, apesar de $50 + 50 + 50 < 31 + 31 + 31 + 31 + 31$.

Exemplo 2 Pedro tomou um empréstimo de $100,00 a juros de taxa 10% ao mês. Após um mês, a dívida de pedro será acrescida de $0,10 \times 100$ reais = 10 reais de juros (pois $J = i \times C$), passando a 110 reais.Se pedro e seu credor concordarem em adiar a liquidação da dívida por ais um mês, mantida a mesma taxa de juros, o empréstimo será quitado, dois meses depois de contraído, por 121 reais, pois o juros relativos ao segundo mês serão de $0,10 \times 110 = 11$ reais. Esses juros assim calculados são chamados de *juros compostos*. Mais precisamente, no regime de juros compostos os juros em cada período são calculados, conforme é natural, sobre a dívida do início desse período.

No regime de juros compostos de uma taxa i*, um principal* C_0 *transforma-se após* n *períodos de tempo, em um montanate* $C_n = C_0(1+i)^n$.

Para cada k, seja C_k a dívida após k períodos de tempo. Ora ,$C_{k+1} = C_K + iC_K = (1+i)C_k$. Portanto, a cada período de tempo a dívida sofre uma multiplicação por $1+i$. Após n períodos de tempo a dívida sofrerá n multiplicações por $1+i$, ou seja, será multiplicada por $(1+i)^n$. Logo $C_n = C_0(1+i)^n$.

Exemplo 3 Pedro toma um empréstimo de R$ 1500,00 a juros de 1% ao mês. Qual será a dívida de Pedro três meses depois?

$$C_3 = C_0(1+i)^3 = 1500 \times (1+0,01)^3 = 1545,45.$$

Outro modo de ler a fórmula $C_n = C_0(1+i)^n$ é: uma quantia, hoje igual a C_0, transformar-se-á, depois de n períodos de tempo, em uma quantia $C_n = C_0(1+i)^n$. Isto é, uma quantia, cujo valor atual é A, equivalerá no futuro, depois de n períodos de tempo, a $F = A(1+i)^n$. Essa é a fórmula fundamental da equivalência de capitais:

- Para obter o valor futuro, basta multiplicar o atual por $(1+i)^n$.
- Para obter o valor atual, basta dividir o futuro por $(1+i)^n$

Exemplo 4 Pedro tomou um empréstimo de R$300,00 a juros de R$15% ao mês. Um mês após, Pedro pagou R$150,00 e, dois meses após esse pagamento, Pedro liquidou seu débito. Qual o valor desse último pagamento?

Os esquemas de pagamento abaixo são equivalentes. Logo, R$300,00, na data 0, têm o mesmo valor de R$150,00, um mês após, mais um pagamento igual a P, na data 3.

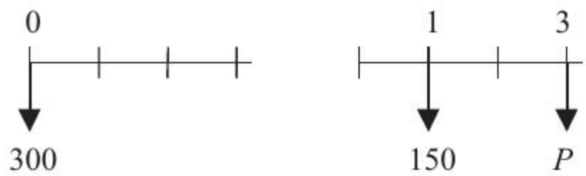


Figura 4.1

Igualando os valores, na mesma época (0, por exemplo), dos pagamentos nos dois esquemas, obtemos: $300 = \frac{150}{1+0,15} + \frac{P}{(1+0,15)^3}$, ou seja $300 = 150.1,15^{-1} + P.1,15^{-3}$.. Finalmente, $P = [300 - 150.1,15^{-1}].1,15^{-3} = 257,89$ reais.

Exemplo 5 Pedro tem duas opções de pagamento na compra de um eletrodoméstico: três prestações mensais de R$ 50,00 cada, ou cinco prestações mensais de R$ 31,00. Em qualquer caso, a primeira prestação é paga no ato da compra. Se o dinheiro vale 5% ao mês para Pedro, qual é a melhor opção que Pedro possui?

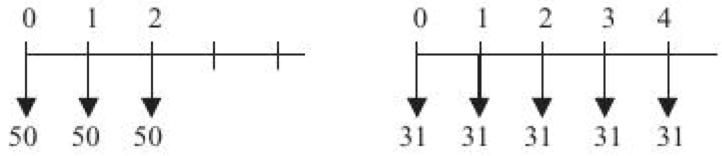


Figura 4.2

Para comparar, determinaremos o valor das duas séries de pagamentos na mesma época, por exemplo na época 2. Temos

$V_1 = 50(1 + 0,05)^2 + 50(1 + 0,05)^1 + 50 = 157,63$

$V_2 = 31(1 + 0,05)^2 + 31(1 + 0,05)^1 + 31 + \frac{31}{(1+0,05)} + \frac{31}{(1+0,05)^2} = 155,37$

Note que a escolha da época é uma convenção do aluno...

Pedro deve preferir o pagamento em cinco prestações.

Atenção!!! dizer que o dinheiro vale 5% ao mês para Pedro, significa dizer que, Pedro tem competência pra fazer seu diheiro render 5% a.m.

Exemplo 6 Pedro tem três opções de pagamento na compra de vestuario.

1. À vista, com 3% de desconto.

2. Em duas prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira um mês após a compra.

3. Em três prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira no ato da compra.

Qual a melhor opção para Pedro, se o dinheiro vale, para ele, 2,5% ao mês?

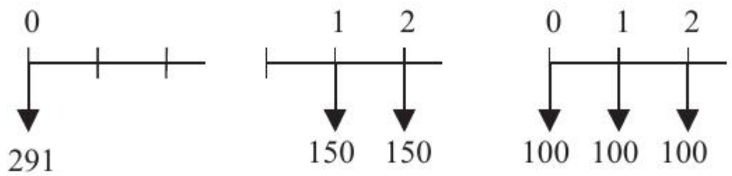


Figura 4.3

Fixando o preço do bem em 300, temos os três esquemas acima.

Comparando os valores na época 0, obtemos:

$V_1 = 291$

$V_2 = \frac{150}{1{,}025} + \frac{150}{(1{,}025)^2} = 289,11$

$V_3 = 100 + \frac{100}{1{,}025} + \frac{100}{(1{,}025)^2} = 292,74$

A melhor alternativa para Pedro é a compra em dois pagamentos, e a pior é a compra em três prestações.

É interessante observar que a melhor alternativa para Joaquim pode não ser a melhor alternativa para João. Se Joaquim é uma pessoa de poucas posses e decide comprar a prazo, tendo dinheiro para comprar à vista, é provavel que ele invistao dinheiro que sobrou, em um fundo de investimento que lhe renderia, digamos, 1,5% ao mês. Entao, para ele seria indiferente comprar à vista ou a prazo com juros de 1,5% ao mês.

Se João tiver acesso a investimentos melhores, ele poderia fazer render a sobra de dinheiro a, digamos, 2,5% ao mês. Entao, seria atrativo para João comprar a prazo com juros de 1,5% ao mês. Logo, o dinheiro tem valores diferentes para João e Joaquim. Essa taxa de juros que representa o valor do dinheiro para cada pessoa e que é, em suma, a taxa à qual a pessoa consegue fazer render seu dinheiro, é chamada de taxa mínima de atratividade. O motivo do nome é claro: para essa pessoa, um investimento só é atrativo se render, no mínimo, a essa taxa.

Exemplo 7 Uma loja oferece duas opções de pagamento:

1. À vista com 30% de desonto.

2. Em duas prestações mensais iguais, sem desconto, a primei- ra prestação sendo paga no ato da compra.

Qual a taxa mensal dos juros embutidos nas vendas a prazo?

Fixando o valor do bem em 100, temos os esquemas de pagamento abaixo:

Igualando os valores na época 0, obtemos $70 = 50 + \frac{50}{1+i}$. Daí $1 + i = 2,5$ e $i = 1,5 = 150\%$ a loja cobra juros de 150% ao mês nas vendas a prazo.

Exemplo 8 Investindo seu capital a juros mensais de 8%, em quanto tempo você dobrará o seu capital inicial?

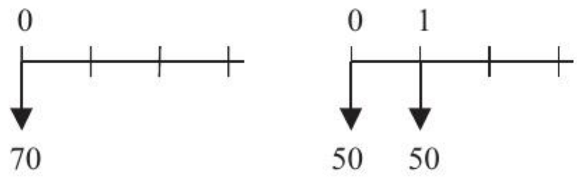


Figura 4.4

Temos $C_0(1+i)^n = 2C_0$. Daí, $1,08^n = 2$ e $n = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}08} \cong 9$ Em aproximadamente 9 meses você dobra seu capital inicial.

Os exemplos acima ilustram situações próximo da realidade, complemento esta proposta com uma seleção de exercícios que vem coroar a teoria em si.

PROBLEMAS PROPOSTOS

1 Investindo R\$ 450,00 você retira, após 3 meses, R\$ 600,00. A que taxa mensal de juros rendeu o seu investimento?

2 Investindo a 8% ao mês, você obtém, depois de 6 meses um montante de R\$ 1 480,00. Quanto havia sido investido?

3 Qual o montante produzido em 3 meses por um principal de R\$ 2 000,00 a juros de 10% ao mês?

4 Em que prazo um principal de R\$ 1 400,00 gera um montante de R\$ 4 490,00 a juros de 6% ao mês?

5 Laura quer comprar um violão em uma loja que oferece um desconto de 30% nas compras à vista ou pagamento em três prestações mensais, sem juros e sem desconto. Determine a taxa mensal de juros embutida nas vendas a prazo, supondo o primeiro pagamento no ato da compra.

6 Malu contraiu um empréstimo de R\$ 9 000,00 para ser pago em duas prestações, com vencimentos três e cinco meses depois do empréstimo. Se a segunda prestação é o dobro da primeira e os juros são de 2% ao mês, determine as prestações.

7 Regina tem duas opções de pagamento:

1. à vista, com x% de desconto.

2. em duas prestações mensais iguais, sem juros, vencendo a primeira um mês após a compra.

Se a taxa mínima de atratividade de Regina é de 5% ao mês, para que valores de x ela preferirá a primeira alternativa?

8 Certa loja, no natal de 2014, oferecia a seus clientes duas alternativas de pagamento:

1. pagamento de uma só vez, um mês após a compra.
2. pagamento em três prestaçõees mensais iguais, vencendo a primeira no ato da compra.

Se você fosse cliente dessa loja, qual seria a sua opção?

9 Certa loja convidou, em dezembro de 2014, os seus clientes a liquidarem suas prestações mensais vincendas, oferecendo-lhes em troca um desconto. O desconto seria dado aos que pagassem, de uma só vez, todas as prestações a vencer em mais de 30 dias e seria de 15% para os que pagassem duas prestações. Supondo uma taxa mínima de atratividade de 4% ao mês, a oferta era vantajosa?

10 Lucia comprou um exaustor, pagando R$ 180,00, um mês após a compra, e R$ 200,00, dois meses após a compra. Se os juros são de 2,5% ao mês, qual é o preço à vista?

4.4 Taxa de Juros

Os leigos costumam achar que juros de 10% ao mês equivalem a juros de 20% ao bimestre, de 30% ao trimestre, de 120% ao ano, etc.

Isso não é verdade, como mostra a tabela a seguir, que dá a evolução de um principal igual a 100, a juros de 10% ao mês.

MÊS	**0**	**1**	**2**	**3**
CAPITAL	**100**	**110**	**121**	**133,1**

Observe que juros de 10% ao mês equivalem a juros de 21% ao bimestre e de 33,1% ao trimestre. Se a taxa de juros relativamente a um determinado período de tempo é igual a i, a taxa de juros relativamente a n períodos de tempo é I tal que $1+I=(1+i)^n$. Basta calcular quanto valerá no futuro, depois de n períodos de tempo, um principal igual a A. Se usamos a taxa i, devemos avançar n períodos de tempo e, se usamos a taxa I, devemos avançar 1 período de tempo. Logo, $A(1+I)^1 = A(1+i)^n$ e $1+I=(1+i)^n$.

Exemplo 1 A taxa anual de juros equivalente a 12% ao mês é I tal que $1+I = (1+0,12)^{12}$. Daí, $I = 1,12^{12} - 1 \cong 2,90 = 290\%$.

Exemplo 2 Exemplo 2. A taxa mensal de juros equivalente a 40% ao ano é i tal que $1+0,40 = (1+i)^{12}$. Daí, $1+i = 1,4^{\frac{1}{12}}$ e $i = 1,4^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,0284 = 2,84\%$". Um erro muito comum é achar que juros de 12% ao mês equivalem a juros anuais de $12 \times 12\% = 144\%$ ao ano. Taxas como 12% ao mês e 144% ao ano são chamadas de taxas proporcionais, pois a razao entre elas é igual à razao dos períodos aos quais elas se referem. Taxas proporcionais nao são equivalentes.

Exemplo 3 As taxas de 20% ao mês, 60% ao trimestre e 240% ao ano são taxas proporcionais. Um (péssimo) hábito em Matemática Financeira é o de anunciar taxas proporcionais como se fossem equivalentes. Uma expressão como "12% ao ano, com capitalização mensal" significa que a taxa usada na operação não é a taxa de 12% anunciada e sim a taxa mensal que lhe é proporcional. Portanto, a tradução da expressão "12% ao ano, com capitalização mensal" é "1% ao mês".

Exemplo 4 "24% ao ano com capitalização trimestral" significa "6% ao trimestre"; "1% am mês" com capitalização semestral significa "6% ao semestre" e "6% ao ano com capitalização mensal" significa "0,5% ao mês".

Exemplo 5 Verônica investe seu dinheiro a juros de 6% ao ano com capitalização mensal. Qual a taxa anual de juros à qual está investido o capital de Verônica? Ora, o dinheiro de Verônica está, na realidade, investido a juros de taxa $i = 6\%/12 = 0,5\%$ ao mês. A taxa anual equivalente é I tal que $1+I = (1+0,005)^{12}$. Daí, $I = 1,005^{12} - 1 = 0,0617 = 6,17\%$ ao ano. A (falsa) taxa de 6% ao ano é dita nominal. A taxa (verdadeira) de 6,17% ao ano é dita efetiva.

Exemplo 6 A taxa efetiva semestral correspondente a 24% ao semestre com capitalização mensal é I tal que $1+I = (1+0,04)^6$. Daí, $I = 1,04^6 - 1 = 26,53\%$ ao semestre.

Neste quisito deixamos claro que precisamos mostrar bastante exemplos para esclarecer a diferença entre taxa proporcional e taxa equivalente.

4.5 Anuidades

Aqui temos uma grande lacuna nos livros didáticos no Brasil, este conteúdo é usado com bastante frequência no dia a dia, pois quem nunca ouviu fafar de aluguel? Quem nunca ouviu falar em aposentadoria? E se você alugasse uma roupa, e por acaso do destino, você mudasse de endereço e em sua mala estivesse a roupa alugada, após algum tempo esta roupa não lhe serve mais por estar muito usada, e nem serve mais para a locadora de roupas... Qual o preço justo a pagar pela roupa? São essas questões que nos cercam e venho aqui mostrar como proceder diante de tais problemas.

Uma lista de quantias (chamadas usualmente de pagamentos ou termos), referidas a épocas diversas, é chamada de série ou anuidade ou, ainda, renda certa. Se esses pagamentos forem iguais e igualmente espaçados no tempo, a série diz-se uniforme.

O valor atual (isto é, o valor da série uma unidade de tempo antes do primeiro pagamento) de uma série uniforme de n pagamentos iguais a P, é, sendo i a taxa de juros, igual a $A = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$.

Atenção significado das letras na fórmula acima: i é a taxa de juros (referida unidade de tempo, à qual é o tempo entre prestações consecutivas), n é o número de prestações,P é o valor de cada prestação e A é o valor da série uma unidade de tempo antes do primeiro pagamento.

Com efeito, para determinar o valor da série um tempo antes do primeiro pagamento, devemos retroceder um tempo com o primeiro pagamento, dois tempos com o segundo, $\cdots$, n tempos com o n-ésimo pagamento. Logo,

$$A = \frac{P}{(1+i)} + \frac{P}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^n}$$

Multiplicando por $(1 + i)$ obtemos

$$A(1 + i) = P + \frac{P}{(1+i)} + \frac{P}{(1+i)^2} + \cdots \frac{P}{(1+i)^{-1}}$$

Subtraindo obtemos;

$A(1+i) - A = P - \frac{P}{(1+i)^n}$

$Ai = P - P(1+i)^{-n}$

$A = P \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$

Exemplo 1 Um bem, cujo preço à vista é R$1 200,00, é vendido em 8 prestações mensais iguais, postecipadas (isto é, a primeira é paga um mês após a compra). Se os juros são de 8% ao mês, determine o valor das prestações.

Temos $A = 1200$, $n = 8$ $i = 0,08$. Aplicando a fórmula, $A = P \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, obtemos: $1200 = P \times \frac{1-(1{,}08)^{-8}}{0{,}08}$; $P = 1200 \times \frac{0{,}08}{1-1{,}08^{-8}} = 208,82$.

As prestações são de R$ 208,82.

Exemplo 2 Um bem, cujo preço à vista é R$1 200,00, é vendido em 6 prestações mensais iguais, antecipadas (isto é, a primeira é paga no ato da compra). Se os juros são de 8% ao mês, determine o valor das prestações.

O valor da série de prestações um mês antes do pagaento da primeira prestação (ou seja, um mês antes da compra) é $A = P \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = P \times \frac{1-(1{,}08)^{-6}}{0{,}08}$. Esse valor é igual ao preço à vista, um mês atrás, isto é, é igual a $\frac{1200}{1{,}08}$. Logo,

$P \times \frac{1-1{,}08^{-6}}{0{,}08} = \frac{1200}{1{,}08}$ e $P = \frac{1200}{1{,}08} \times \frac{0{,}08}{1-1{,}08^{-6}} = 240,35.$

As prestações são de R$ 240,35.

Às vezes necessitamos calcular o valor futuro (ou montante) de uma série uniforme, isto é, o valor da série na época do último pagameto. Para isso, basta avançar n temos o valor A, isto é:

O valor de uma série na época do último pagamento é $F = P \times \frac{(1+i)^n-1}{i}$.

Exemplo 3 Investindo mensalmente R$ 150,00 em um fundo de investimentos que rende 0,5% ao mês, qual é o montante imediatamente após o 120o depósito?

O montante da série é

$$\mathsf{F} = \mathsf{P}\frac{(1+\mathsf{i})^{\mathsf{n}}-1}{\mathsf{i}} = 150\frac{1,005^{120}-1}{0,005} = 24581,90.$$

Trataremos agora de rendas perpétuas. Rendas perpétuas aparecem em locações. Com efeito, quando se aluga um bem, cede-se a posse do mesmo em troca de um aluguel, digamos, mensal. Então, a série dos aluguéis constitui uma renda perpétua ou perpetuidade. Para obter o valor atual de uma renda perpétua, basta fazer n tender para infinito na fórmula

$$\mathsf{A} = \mathsf{P}\frac{1-(1+\mathsf{i})^{-\mathsf{n}}}{\mathsf{i}}$$

O valor de uma perpetuidade de termos iguais a P*, um tempo antes do primiro pagamento, é, sendo* i *a taxa de juros* $\mathsf{A} = \frac{\mathsf{P}}{\mathsf{i}}$

Exemplo 4 Se o dinheiro vale 1% ao mês, por quanto deveser alugado um imóvel que vale R$ 40 000,00?

Quando você aluga um imóvel, você cede a posse do imóvel em troca de uma renda perpétua cujos termos são iguais ao valor do aluguel. Então, o valor do imóvel deve ser igual ao valor da série de aluguéis.

Logo, como $\mathsf{A} = \frac{\mathsf{P}}{\mathsf{i}}$, temos $\mathsf{P} = \mathsf{A}\mathsf{i} = 4000 \times \mathsf{x}0,01 = 400$.

Deve ser alugado por R$ 400,00.

Exemplo 5 Helena tem duas alternativas para obter uma copia- dora:

1. Alugá-la por R$ 480,00 por mês. No caso, o locador se responsabiliza pelas despezas de manutenção.

2. Comprá-la por R$ 8.000,00. Nesse caso, já que a vida económica da copiadora é de 2 anos, Helena venderá a copiadora após 2 anos, por R$ 1.100,00. As despesas de manutenção são de responsabilidade de Helena e são de R$ 100,00 por mês no primeiro ano e de R$ 150,00 por mês, no ano seguinte, se o dinheiro vale 1% ao mês, qual a melhor opção para Helena?

   Na alternativa b), vejamos o valor, na época da compra, dos gastos de Helena durante esses dois anos. Temos:

(a) uma parcela de R$ 8000,00;

(b) o valor atual de uma série de 12 pagamentos de R$ 100,00 igual a $100\frac{1-1{,}01^{-12}}{0{,}01} =$ R$$1125,51$;

(c) o valor, na época da compra, dos gastos no segundo ano. Para determiná-lo, calculamos o valor atual dos gastos no segundo ano, $150\frac{1-1{,}01^{-12}}{0{,}01} = 1688,26$ e dividimos esse valor por $1,01^{12}$, para trazê-lo um ano para trás, obtendo finalmente R$ 1498,25;

(d) o valor, na época da compra, da receita auferida com a venda, R$ 1000,00 trazidos dois anos para trás, isto é, $\frac{1000}{1{,}01^{24}} = 787,57$.

Portanto, os gastos são de $8000 + 1125,51 + 1498,25 + 787,57 = 9836,19$.

Na alternativa a), o valor dos gastos na época de 24 pagamentos iguais a R$ 480,00, $480\frac{1-1{,}01^{-24}}{0{,}01} =$ R$$10196,83$.

A melhor alternativa é a compra.

PROBLEMAS PROPOSTOS

1 Um televisor, cujo preço à vista é R$900,00, é vendido em dez prestações mensais iguais. Se forem pagos juros de 4% ao mês, determine o valor das prestações, supondo a primeira prestação paga:

(a) no ato da compra;

(b) um mês após a compra;

(c) dois meses após a compra.

2 Se a taxa de juros é de 0,6% ao mês, por quanto se aluga um imóvel cujo preço à vista é R$ 80 000,00, supondo o aluguel mensal pago vencido? E se fosse pago adiantadamente?

3 Supondo juros de 1% ao mês, quanto você deve investir mensalmente durante 10 anos para obter ao fim desse prazo, por 30 anos, uma renda mensal de R$500,00?

4 Supondo juros de 1% ao mês, quanto você deve investir mensalmente durante 35 anos para obter, ao fim desse prazo, uma renda perpétua de R$1 000,00?

5 Considere uma renda perpétua cujos termos crescem a uma taxa constante j e cujo primeiro termo é igual a P. Supondo juros de taxa i ($i > j$), determine o valor da renda na época do primeiro pagamento.

6 Minha mulher acha que devemos vender o carro novo que compramos por R$ 18 000,00 quando ele estiver com dois anos de uso. Conseguiríamos vendê-lo por R$ 14 000,00 e compraríamos outro igual, zero quilômetro. Eu acho que seria melhor esperar quatro anos para vender o carro, caso em que só conseguiríamos R$ 10 000,00 na venda, mesmo levando em conta que gastaríamos em consertos cerca de R$ 1 000,00 no terceiro ano e de R$ 2 000,00 no quarto ano. Supondo que o dinheiro valha 15% ao ano, quem tem razão?

4.6 Sistema de Amortização

Em suma Amortizar uma dívida significa pagar uma dívida e esta pode ser feita de muitos modos. Vamos dá um rápido e breve exemplo de um desconto. Quando um banco empresta dinheiro (crédito pessoal ou desconto de duplicatas), o tomador do empréstimo emite uma nota promissória, que é um papel no qual o tomador se compromete a pagar ao banco, em uma data fixada, uma certa quantia, que é chamada de valor de face da promissória.

O banco então desconta a promissória para o cliente, isto é, recebe a promissória de valor de face F e entrega ao cliente uma quantia A (menor que F, naturalmente). A diferença $F - A$ é chamada de desconto.

Os bancos efetuam o desconto de acordo com a fórmula $A = F(1 - i.n)$,onde i é uma taxa fixada pelo banco e chamada de taxa de desconto bancário (ou taxa de desconto simples por fora) e n é o prazo da operação, medido na unidade de tempo a que se refere a taxa.

Veja o exemplo: Pedro desconta uma promissória de valor 100, com vencimento em 60 dias, em um banco cuja taxa de desconto é de 12% ao mês.

a) Quanto Pedro receberá?

b) Qual a taxa mensal de juros que Pedro está pagando?

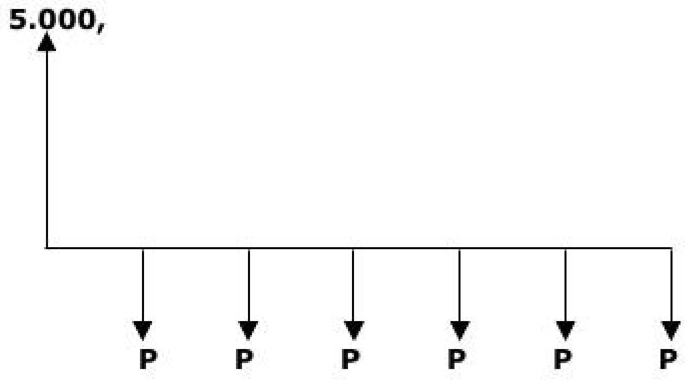
Solução: Ora,$A = F(1 - i.n) = 100(1 - 0,12.2) = 76$. Logo pedro reberá agora 76, para pagar 100 daqui a 60 dias. Se i é a taxa mensa de juros à qual cresce a dívida de Pedro, temos que $100 = 76(1 + i)^2$. Daí. $i = 0,1471 = 14,71\%$.

Observe que anunciar a taxa de desconto e não a taxa de juros é um modo sutil de fazer crer aos mais ingênuos estarem eles pagando juros menores que os que realmente lhes estão sendo cobrados.

Agora falaremos de dívidas pagas de forma parcelada.

Quando se paga parceladamente um débito, cada pagamento efetuado tem dupla finalidade. Uma parte do pagamento quita os juros e outra parte amortiza (abate) a dívida.

Vejamos um exemplo na compra de um notebook. Supondo que o valor do notebook seja, à vista, de R$ 5.000,00, e queremos dividir em 6 pagamentos iguais, a uma taxa de juros de 3% a.m., teremos que o desenho desta situação será exatamente o seguinte:



A respeito da taxa dessa operação, vocês acham que o comércio trabalha com taxas simples ou compostas? Ora, obviamente que com taxas compostas!

Pois bem! Olhando para a situação acima, identificamos três características, que irão marcar uma operação de Amortização. São elas:

1. Parcelas (prestações) de mesmo valor;

2. Parcelas em intervalos de tempo iguais;

3. Taxa no Regime Composto (taxa de juros compostos).

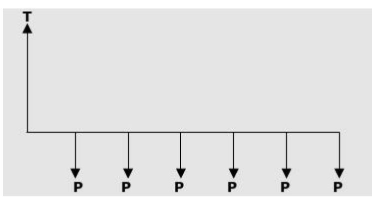
Essas são as mesmas três características presentes em uma operação de Rendas Certas! Não é isso? Exatamente! A diferença é que nas Rendas Certas, usamos aquelas parcelas para acumular,acumular, acumular, e resgatar no final.

Já aqui, na Amortização, essas parcelas estarão sendo usadas para pagar, para liquidar, para amortizar um valor anterior! Só isso!

É fácil notar, portanto, que não haverá nenhuma dificuldade em identificarmos uma questão de Amortização. Serão várias parcelas, de mesmo valor, mesma periodicidade e no regime composto, servindo para liquidar um valor anterior!

Desenho-Modelo da Questão de Amortização

Da mesma forma que aprendemos um "desenho-modelo" para as Rendas Certas, também haverá um para as operações de Amortização. E é o seguinte:



Para que serve esse "desenho-modelo"? Para nos lembrarmos de uma lei da Amortização, que será usada por nós sempre que formos aplicar a Fórmula da Amortização.

Lei da Amortização

Para efeito de utilização da fórmula de Amortização, a primeira parcela deverá estar sempre ao final do primeiro período!

Em outras palavras: não poderá existir pagamento de entrada, para efeito de aplicação da fórmula da Amortização.

E a quem chamamos de período, nesta lei acima? Período será o intervalo entre as parcelas. Ou seja: se as parcelas são mensais, o período é o mês (e a primeira parcela terá que estar ao final do primeiro mês!); se as parcelas são bimestrais, o período da questão é o bimestre (e a primeira parcela terá que estar ao final do primeiro bimestre); e assim por diante.

Esta Lei é a informação crucial do assunto Amortização. Não podemos esquecê-la sob hipótese alguma!

Quando dissemos "para efeito de aplicação da fórmula" é porque só haverá uma única fórmula para resolvermos as questões de Amortização. Vejamos!

Fórmula da Amortização

É a seguinte:

$$\mathsf{T} = \mathsf{P}.\mathsf{A}_{\overline{n}|i}$$

Lê-se: **Total** é igual a A de "n" cantoneira "i".

Analisemos cada elemento da fórmula:

→ T: é o valor Total, que será amortizado, ou seja, é aquele valor cujo pagamento será diluído em várias prestações! Caso a questão forneça o valor das prestações e pergunte o valor que foi amortizado, então esse valor T, uma vez calculado, representará sozinho todas aquelas parcelas P.

→ P: é o valor das parcelas (ou prestações), com as quais amortizaremos um valor anterior. Da mesma forma que nas Rendas Certas, aqui também terão de ser parcelas de mesmo valor! Esta é a primeira característica de uma operação de Amortização!

→ A: este A participa de um fator. Sozinho, ele não representa ninguém, mas quando está no formato $T = P.A_{\overline{n}|i}$, então ele passa a significar o que chamaremos de Fator de Amortização. É fácil distinguir esse Fator de Amortização do Fator de Rendas Certas ($S_{\overline{n}|i}$). Basta associarmos a letra A à palavra Amortizacao! Daqui a pouco falaremos mais acerca deste Fator!

→ n: o significado deste n na Amortização será o mesmíssimo que lhe atribuímos no estudo das Rendas Certas, ou seja, aqui também n será o número de parcelas!

→ i: taxa de **juros compostos**, e não se fala mais nisso!

Quando identificarmos que a questão é de Amortização, lembraremos que a fórmula da Amortização traz uma exigência a ser cumprida antes de ser aplicada.

Trata-se da mesma exigência da fórmula das Rendas Certas: é preciso que a unidade da taxa seja a mesma que há entre o intervalo das parcelas. Se as parcelas da amortização são mensais, então teremos que trabalhar com uma taxa ao mês; se as parcelas da amortização são trimestrais, teremos que trabalhar com uma taxa ao trimestre, e assim por diante.

Caso essa exigência já não venha observada no enunciado, teremos que alterar a unidade da taxa, pelo conceito de Taxas Equivalentes!

Na maioria das vezes (para não dizer "sempre") as questões já trazem cumprida essa exigência. O que não quer dizer que isso seja uma regra: é possível que na próxima prova a questão traga essa incompatibilidade, e nos obrigue a alterar a unidade da taxa, usando o conceito de Taxas Equivalentes.

Alguns meros detalhes adicionais serão acrescentados na resolução dos primeiros exemplos, que se seguem.

Exemplo Uma loja vende um determinado notebook por R$ 5.000,00. Uma pessoa resolve comprá-lo, pagando por ele seis prestações mensais e iguais, a primeira delas com vencimento em um mês. Considerando uma taxa de juros compostos de 3% ao mês, qual será o valor da prestação?

Sol.: 1º Vamos tentar identificar a questão! Existem várias prestações de mesmo valor? Sim! Daí, já sabemos que podemos estar diante (eventualmente) de uma questão de Rendas Certas ou de Amortização! Vamos procurar pelas outras duas características:

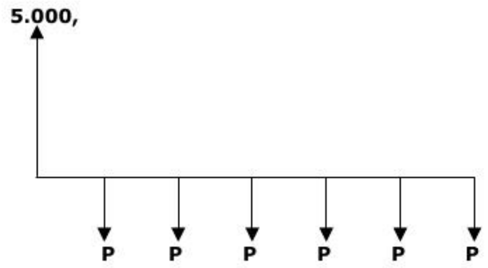
2º O intervalo entre as parcelas é sempre o mesmo? Sim!

3º A taxa da operação é de juros compostos? Sim!

Uma última pergunta? Para que estão servindo essas parcelas? Será que é para acumular, acumular, acumular e resgatar ao final? Não! Estão servindo para pagar, liquidar, amortizar um valor anterior!

Identificamos: trata-se de uma questão de Amortização!

Desenhando a questão, conforme dispõe o enunciado, teremos:



Agora nos perguntamos: esse desenho acima já está de acordo com o desenho-modelo da Amortização? Em outras palavras: a primeira parcela está ao final do primeiro período? Sim! Observemos que o período é o mês, porque as parcelas são mensais; e a primeira parcela está ao final do primeiro mês, logo, ao final do primeiro período!

Constatado isso, a fórmula está pronta para ser empregada! Teremos:

$$T = P.A_{\overline{n}|i}$$

Onde:

- $T = 5000$ (o valor a ser aortizado);
- $p = ?$ (o valor da prestação, que estamos procurando!)
- $n = 6$ (são seis parcelas)
- $i = 3\%$ ao mês (juros compostos!)

Aqui já temos cumprida a exigência da fórmula: a taxa é mensal e as parcelas são mensais! Lançando os dados na fórmula, teremos que:

$$T = P.A_{\overline{n}|i} \rightarrow 5000 = P.A_{\overline{6}|3\%}$$

E agora? Como faremos para calcular esse Fator de Amortização? Recorrendo à Tabela Financeira. A qual delas? Àquela que ainda não tínhamos utilizado até aqui: **a Tabela da Amortização!**

Tabela I: FATOR DE VALOR ATUAL DE UMA SÉRIE DE PAGAMENTOS $A_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i.(1+i)^n}$

n \ i	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	0,990099	0,980392	0,970874	0,961538	0,952381	0,943396	0,934579	0,925926	0,917431	0,909091
2	1,970395	1,941561	1,913469	1,886094	1,859410	1,833393	1,808018	1,783265	1,759111	1,735537
3	2,940985	2,883883	2,828611	2,775091	2,723248	2,673012	2,624316	2,577097	2,531295	2,486852
4	3,091965	3,807728	3,717098	3,629895	3,545951	3,465105	3,387211	3,312127	3,239720	3,169865
5	4,853431	4,713459	4,579707	4,451822	4,329476	4,212364	4,100197	3,992710	3,889651	3,790787
6	5,795476	5,601431	5,417191	5,242137	5,075692	4,917324	4,766539	4,622879	4,485918	4,355261
7	6,728194	6,471991	6,230283	6,002054	5,786373	5,582381	5,389289	5,206370	5,032953	4,868419
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
18	16,398268	14,992031	13,753513	12,659297	11,689587	10,827604	10,059087	9,371887	8,755625	8,201412

A forma de consultar essa Tabela de Amortização é exatamente a mesma a qual já estamos acostumados. Conhecendo dois elementos, encontraremos um terceiro elemento, desconhecido! Neste caso, temos o fator $A_{\overline{6}|3\%}$, de modo que nossa consulta será feita da seguinte forma:

Tabela I*: FATOR DE VALOR ATUAL DE UMA SÉRIE DE PAGAMENTOS $A_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i.(1+i)^n}$

n \ i	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	0,990099	0,980392	0,970874	0,961538	0,952381	0,943396	0,934579	0,925926	0,917431	0,909091
2	1,970395	1,941561	1,913469	1,886094	1,859410	1,833393	1,808018	1,783265	1,759111	1,735537
3	2,940985	2,883883	2,828611	2,775091	2,723248	2,673012	2,624316	2,577097	2,531295	2,486852
4	3,091965	3,807728	3,717098	3,629895	3,545951	3,465105	3,387211	3,312127	3,239720	3,169865
5	4,853431	4,713459	4,579707	4,451822	4,329476	4,212364	4,100197	3,992710	3,889651	3,790787
6	5,795476	5,601431	5,417191	5,242137	5,075692	4,917324	4,766539	4,622879	4,485918	4,355261
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
18	16,398268	14,992031	13,753513	12,659297	11,689587	10,827604	10,059087	9,371887	8,755625	8,201412

Daí, teremos que:

$$5000 = P.A_{\overline{6}|3\%} \rightarrow 5000 = P.5,417191 \rightarrow P = \frac{5000}{5,417191} \rightarrow P = 922,88$$

Será esse o valor das prestações! Agora, se quiséssemos saber o quanto de Juros iremos pagar nessa compra a prazo, teremos que fazer o seguinte:

1. Somar as prestações! Foram 6 parcelas, cada uma a R$922,98. Daí:

   $\rightarrow$ Total das Parcelas $= \sum P = 6 \times 922,28 \rightarrow E: \sum P = 5.533,68$

2. Subtrair esse total das parcelas pelo valor do bem à vista! $\rightarrow$ 5.533,68 - 5000 = R$ 533,68 = Juros!

   É esse o valor adicional que teremos que desembolsar, por estarmos financiando a nossa compra. É esse o valor dos Juros!

Outro sistema de amortização é o sistema de amortização constante (SAC)

Este é mais simples porém também é utilizado quando se trata de casa própria, pra efeito de simplicidade vejamos uma dívida de 100 é paga, com juros de 15% ao mês, em 5 meses, pelo SAC. Faça a planilha de amortização.

Solução Na planilha abaixo, A_k, J_K, P_K, D_K são, respectivamente, a parcela de amortização, a parcela de juros, a prestação e o estado da dívida (isto é, o valor da dívida após o pagamento da prestação) na época k.

Como as amortizações são iguais, cada amortização será de $\frac{1}{5}$ da dívida inicial. A planilha é, portanto:

k	P_K	A_K	J_K	D_K
0	-	-	-	100
1	35	20	15	80
2	32	20	12	60
3	29	20	9	40
4	26	20	6	20
5	23	20	3	-

Teorema 1 No SAC, sendo n o número de pagamentos e i a taxa de juros, temos:

$$A_K = \frac{D_0}{n}, \quad D_K = \frac{n-k}{n} D_0, \quad J_K = iD_{k-1}, \quad P_K = A_K + J_K$$

Demonstração: Se a dívida D_0 é amortizada em n quotas iguais, cada quota é igual a

$$A_K = \frac{D_0}{n}$$

O estado da dívida, após k amortizações, é

$$D_K = D_0 - K\frac{D_0}{n} = \frac{n-k}{n} D_0$$

.

Eis aqui um exemplo que sempre deve aparecer nos livros, afim de esclarecer algumas idéias.

4.7 Inflação e Taxa Real de Juros

Exemplo

Em um mês cuja inflação foi de 25%, Paulo Jorge investiu seu capital a juros de 30% ao mês. Evidentemente, isso não significa que Paulo Jorge tenha aumentado seu poder de compra em 30%, pois, embora a quantidade de reais de Paulo Jorge tenha crescido 30%, o valor do real sofreu uma redução. Dizemos nesse caso que 30% ao mês é a taxa nominal de juros mensais de Paulo Jorge.

Suponhamos que, no início do referido mês, o capital C de Paulo Jorge pudesse comprar x artigos de preço unitário igual a p. No fim do mês, o capital passou a ser $1,3C$ e o preço unitário passou a ser $1,25p$. Logo, Paulo Jorge poderá agora comprar

$$\frac{1,3C}{1,25p} = 1,04x$$

artigos.

O poder de compra de Paulo Jorge aumentou de 4% nesse mês.

Essa taxa de 4% ao mês, à qual cresceu o poder de compra de Paulo Jorge, é chamada de taxa real de juros.

Esta variação costuma referir-se a um aumento contínuo e generalizado dos preços de bens e serviços em um sistema econômico, representada normalmente através de uma porcentagem.

É importante notarmos que a Inflação afeta diretamente o poder de compra, embora o que muitos pensam que a Inflação diminui o salário.

Outro ponto importante são as variações sucessivas em uma moeda. Observe o exemplo a seguir:

Exemplo *Os dados a seguir mostram a variação do preço do dólar durante cinco meses. Qual foi a taxa de variação acumulada? Houve valorização ou desvalorização ao final desses cinco meses?*

mês 1: -2,35 % mês 2: 1,37 % mês 3: 1,05 % mês 4: -0,13 % mês 5: 0,21 %

Solução

Se I é a taxa acumulada dos cinco meses, então: $1 + I = 0,9765 \times 1,0137 \times 1,0105 \times 0,9987 \times 1,0021 = 1,00107 = I = 0,107\%$

Ou seja, houve valorização aproximada do dólar de $0,107\%$.

MULTA E JUROS DE MORA

Muitas pessoas possuem dificuldade de saber o valor correto daquela conta que está atrasada, não é? Nunca aconteceu com vocês? Comigo sim.

Vamos mostrar como se calcular o valor da multa e os juros de mora de contas, principalmente boletos bancários. Claro que nem todos são iguais, por isso a primeira coisa que vocês precisam observar são as "instruções" que existem no boleto de cobrança. Nessa parte do boleto irão existir informações sobre seus valores e suas formas de pagamento. Geralmente estão escritos os percentuais de multa por atraso e o valor da mora diária.

Em termos legais, a multa por atraso é de 2% o valor daquele boleto e o juros moratórios (ou mora) corresponde a 1% pró-rata. Pró-rata significa um valor fracionado que irá refletir sobre a quantidade de dias em atraso. Vejamos o exemplo:

Exemplo

Valor do Boleto em atraso =R$ 100,00

Vencimento: 20/09/2012

Data de Pagamento: 25/09/2012

MULTA de 2% = $\text{R\$}100,00 \cdot 2\% = \text{R\$}2,00$

JUROS DE MORA OU MORATÓRIO = 1% AO MÊS. Se é ao mês, considere que o mês comercial possua 30 dias, logo o valor será igual $\frac{1}{30}$ multiplicado pela quantidade de dias em atraso. Nesse caso 5 dias. Então o valor será igual a:

R$ 100,00 · 1% = R$ 1,00

R$ $\frac{1,00}{30}$ = R$ 0,03

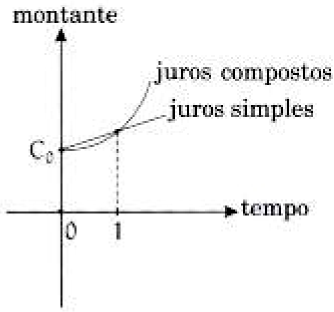
R$ 0,03 · 5(quantidade de dias em atraso)=R$ 0,15.

Qual será o valor da minha conta em atraso então?

Agora é só somar o Valor da Conta + MULTA + Juros de Mora: R$ 100,00 + R$ 2,00 + R$ 0,15 = Total que deverá ser pago no dia 25/09/2012 é de R$ 102,15.

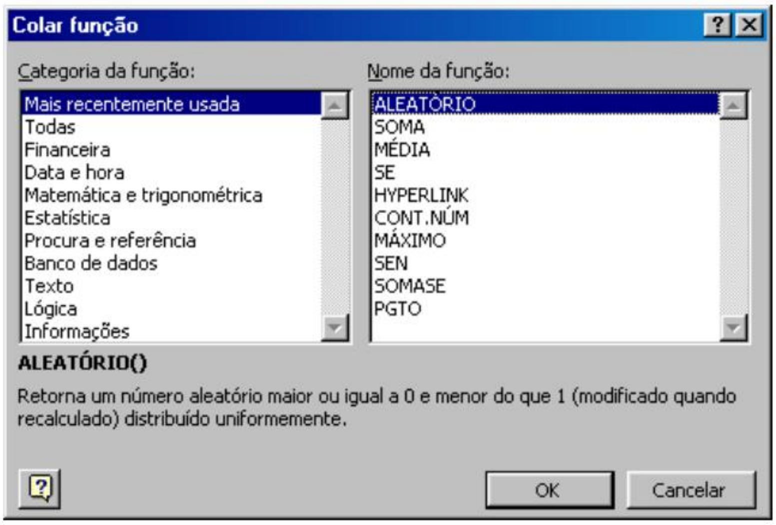
Veja bem a intenção do bancos ... ele cobra juros compostos, mas se o pagamento da dívida estiver a menos de 1 período da incidência dos juros o Banco cobra juros simples ... porquê?

Veja a esperteza dos bancos, o gráfico acima diz que a juros simples só há vantagem pra eles (Os Bancos), quando o pagamento antes do primeiro período de atraso ... e é exatamente o que ele faz.



4.8 Usando o Excel

Para calcular a taxa de juros em séries uniformes de pagamentos, inicialmente, deve-se clicar na tecla do menu $\boxed{f_x}$.Com esta operação aparecerá na tela:



Role o cursor no quadro à esquerda e clique em Financeira, como mostra a figura abaixo.

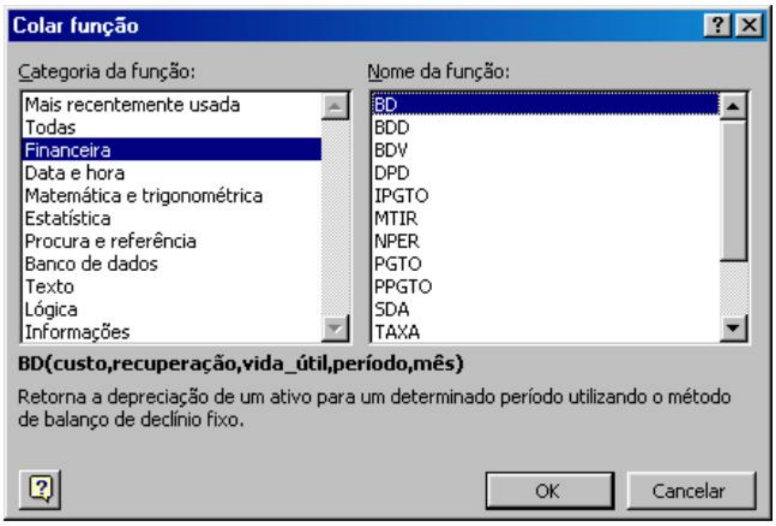
Em seguida no quadro à direita procure a função TAXA . Clique OK.

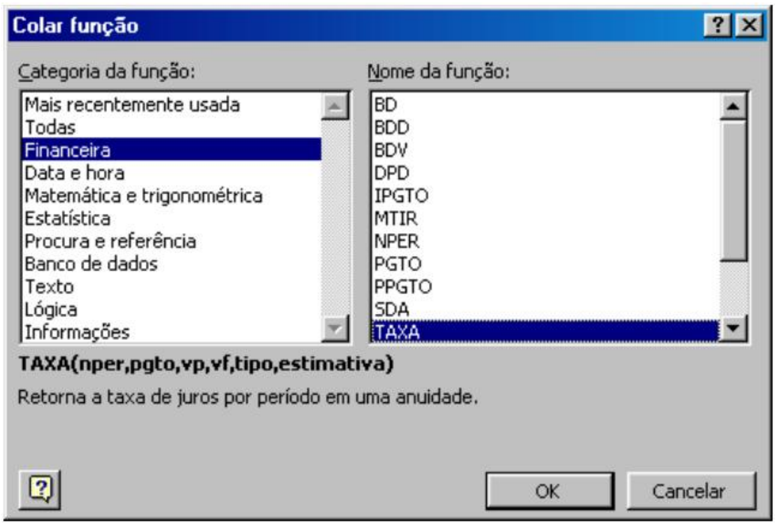
Aparecerá uma caixa de diálogo e será necessário preencher algumas janelas:

Nper coloque nesta lacuna o número total de termos da série uniforme.

Pgto coloque nesta lacuna o número total de termos da série uniforme.

VP preencha este quadro com o valor presente (valor atual), com sinal contr ? ario ao pagamento. Se o VF é preenchido esta célula deve ficar em branco.





Vf preencha este quadro com o valor futuro, com sinal contrário ao pagamento. Se o **Vp** é preenchido esta célula deve ficar em branco.

Tipo é o número 0 ou 1, conforme os pagamentos sejam postecipados ou antecipados. Se for deixado em branco, o Excel assumirá 0, considerando os pagamentos postecipados.

Estimativa é a sua estimativa para a taxa. Deixe em branco. Observação.

O Excel trabalha com a lógica do contador, na qual os pagamentos e os recebimentos devem ter sinais contrários.Logo, se o valor presente é um valor positivo, o valor das prestações é obrigatoriamente negativo.

Exemplo 1. Qual é a taxa de juros na compra de um veículo cujo preço à vista é de R$$8000,00$ e é pago em 24 pagamentos mensais de R$400,00, o primeiro sendo efetuado um mês após a compra?

Preencha Nper $= 24$, Pgto $= -400$ e Vp $= 8\,000$. Aparecerá TAXA (24; -400; 8000) $=$ 0,015130844, ou seja, 1,51% ao mês.

Exemplo 2. Qual é a taxa de juros na compra de um veículo cujo preço à vista é de R$8 000,00 e é pago em 24 pagamentos mensais de R$400,00, o primeiro sendo efetuado no ato da compra?

Preencha Nper $= 24$, Pgto $= -400$ e Vp $= 8\ 000$ e Tipo $= 1$. Aparecerá TAXA (24; -400; 8000) $=$ 0,015130844, ou seja, 1,51% ao mês.

Aqui encerro minha proposta, e que no mínimo esses conteúdos e exercícios (ou a ideia deles) devem estar presente nos livros de Matemática Financeira, minimizando as deficiências do aprendizado e do quê realmente tem que se saber sobre a Matemática Financeira.

Capítulo 5

Conclusão

A escolha do livro didático envolve vários fatores e estes requerem tempo para serem analisados. Não basta verificar somente os aspectos gráfico-editoriais, é necessário também analisar como os conteúdos são abordados e de que forma contribuirão para a formação do aluno. Embora um livro didático seja de qualidade, este ainda contém falhas que contradizem os objetivos da educação básica, como por exemplo, ao contemplar nos exercícios exemplos ilusórios, sem mencionar que estes não correspondem à realidade. O ideal seria aproximar os conteúdos com a realidade, trazendo informações que contribuam para a vida do aluno.

Quanto à Matemática Financeira, é necessário que dados referentes às taxas de juros cobrados pelos bancos, bem como o regime de capitalização usado por eles sejam verdadeiros, pois o aluno do Ensino Médio estará se preparando para o mercado de trabalho, onde passará a ter mais contato com essas operações financeiras.

Acredita-se que ao omitir essas informações, o livro estará contribuindo para que o aluno saia da educação básica com conhecimentos equivocados a respeito das operações financeiras do país e, consequentemente, não saberão agir frente a essas situações. Sabemos também que o professor não deve ater-se somente ao livro didático, mas este também tem papel fundamental no processo de ensino-aprendizagem.

Portanto, esperamos que esse trabalho contribua para que os professores de Matemática sejam mais atentos ao analisar um livro didático, levando em consideração a abordagem dos conteúdos, bem como os exercícios, para que estes não tragam informações equivocadas para a sala de aula.

Referências Bibliográficas

[1] AMORIM, C.M.I. - *Matemática Financeira Abordagem voltada para cidadania.* (Dissertação - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada), Rio de Janeiro,2014.

[2] BIGODE, A.J.L. - *Matemática.* Editora Scipione - 1ª edição, 2013.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. Secretatia de Educação e Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais*, PCNEM (Ensino Médio). Brasília: MEC, 2000.

[4] BRASIL.*LDB. Lei 9394/96 - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*

[5] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental.- *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.PCN(3 º e 4 º do Ensino Fundamental).* Brasília: MEC, 1998.

[6] BRASIL. Programa Nacional do Livro Didático PNLD 2015: Matemática. Brasilia: MEC 2014.

[7] CARVALHO, D. L.- *Metodologia do ensino da matemática.* São Paulo: Cortez, 1994.

[8] COOK, Guy. Applied Linguistics. In: *Cook, G. Applied Linguistics.* Oxford: Oxford University Press 2003. Chapter 1, p.3 e 11.

[9] LIMA, Elon Lages de. Et al.*Exame de textos*: Analise de Livros de Matemática para o Ensino Médio. São Paulo, Editora SBM , 2001.

[10] MORGADO, Augusto César. Matemática Financeira. *Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio.* Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[11] SANTOS, E.A. dos. *Matemática Financeira. Uma Abordagem Contextual.* UEL, 2007. PDE.

[12] CARVALHO, Sérgio cursos online - *Matemática Financeira* - prof. Sérgio Carvalho

[13] SILBEP, Acessoria e Cálculos Judiciais

[14] Gonçalves, Jean Piton *A História da Matemática Comercial e Financeira*, Agosto de 2005

[15] A Matemática do Ensino Médio, vols. 1, 2 e 4, E. Lima, P. C. Carvalho, A. Morgado, E. Wagner, SBM.

[16] Paulo Cezar Pinto Carvalho e Augusto César Morgado. *Matemática Discreta*. SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

[17] Epaminondas Alves dos Santos, *Matemática Financeira Uma abordagem contextual*. Trabalho desenvolvido junto ao PDE.