Universidade Federal do Piauí

Centro de Ciências da Natureza

Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Desigualdades Elementares e suas Aplicações no Ensino Básico

Paulo Roberto Rodrigues de Araújo Júnior

Teresina - 2018

Paulo Roberto Rodrigues de Araújo Júnior

Dissertação de Mestrado:

Desigualdades Elementares e suas Aplicações no Ensino Básico

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes

Teresina - 2018

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

A663D Araújo Júnior, Paulo Roberto Rodrigues de.
Desigualdades elementares e suas aplicações no ensino básico / Paulo Roberto Rodrigues de Araújo Júnior. – Teresina, 2018.
49f.: il.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT, 2018.
Orientador: Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes

1. Matemática – Estudo e Ensino. 2. Teoria das Desigualdades. 3. Ensino Básico. I. Título.

CDD 510

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

SBM

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada: DESIGUALDADES ELEMENTARES E SUAS APLICAÇÕES NO ENSINO BÁSICO, defendida por PAULO ROBERTO RODRIGUES DE ARAUJO JUNIOR em 26 / 04 / 2018 e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Jurandir de Oliveira Lopes

Presidente da Banca Examinadora

Examinador

Francisco de Assis P. da S. do A. Junior

Examinador Externo

A Deus.

Agradecimentos

A finalização deste curso de Mestrado é a concretização de mais uma importante etapa em minha vida e é fruto de uma coletividade.

Agradeço primeiramente a Deus, que é o grande arquiteto do Universo.

Agradeço a todos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a concretização desse projeto.

Agradeço aos meus pais Paulo e Margarida, que me deram apoio e incentivo nas horas difíceis.

Obrigado a minha querida esposa Mônica Lourenço, que me estimulou durante todo esse caminho e compreendeu minha ausência pelo tempo dedicado aos estudos.

Meus agradecimentos aos meus filhos Pedro Henrique e Letícia por serem a fonte maior de minha inspiração.

Aos meus irmãos e sobrinhos, que de alguma forma também contribuíram para que o sonho do mestrado se tornasse realidade.

Sou grato também aos meus amigos e colegas de classe, que não me deixaram ser vencido pelo cansaço. Não esquecendo, claro, de todos os meus professores, em especial, ao Prof. Me. Mario Gomes dos Santos e ao meu orientador Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes.

"Na construção do sucesso a única coisa que merece mérito é a vitória conquistada sem ter ofendido e machucado as pessoas que passaram pela sua vida e que de forma direta ou indireta contribuíram para que os degraus galgados em busca deste objetivo fossem conquistados."

(Lindomar Batista).

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre algumas Desigualdades Elementares e suas aplicações no ensino básico, coletado de artigos, teses e livros acerca do tema. Inicialmente é dado o conceito de desigualdades apresentando suas demonstrações e posteriormente mostrando sua aplicabilidade por meio de um exemplo prático em detrimento de uma aprendizagem mais rigorosa. Para realização destas demonstrações foram necessários conhecimentos de álgebra elementar, geometria euclidiana, construções geométricas, indução matemática, além de vários outros conhecimentos. A apropriação e a assimilação da Teoria das Desigualdades por parte de professores e alunos do ensino médio servem como justificativa desse estudo.

Palavras-chave: Desigualdades elementares, Demonstrações, Aplicações.

Abstract

This work presents a study about some Elementary Inequalities and their applications in basic education, collected from articles, theses and books on the subject. Initially the concept of inequalities is presented by presenting their demonstrations and later showing their applicability through a practical example to the detriment of a more rigorous learning. For the accomplishment of these demonstrations it was necessary knowledge of elementary algebra, Euclidean geometry, geometric constructions, mathematical induction, besides several other knowledge. The appropriation and assimilation of the Theory of Inequalities by teachers and high school students serve as justification for this study.

Keywords: Elementary Inequalities, Demonstrations, Applications.

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

No ano de 2016 tive uma experiência bastante satisfatória e surpreendente quando comecei a dar aulas num projeto de preparação para as Olimpíadas de Matemática no Instituto de Educação Ciência e Tecnologia do Estado do Maranhão (IFMA), pois, além das medalhas e menções honrosas recebidas, que são importantes, havia alunos interessados a aprender o conteúdo matemático de forma um pouco mais aprofundada. Nesse trabalho tive que traçar alternativas para a escolha dos conteúdos do programa olímpico e refletir de que forma apresentá-los. A escolha do tema "Desigualdades"está inserida nesse contexto.

Há um leque bastante grande de aplicações envolvendo o tema Desigualdades. Inicialmente, é importante notarmos que uma boa quantidade de aplicações sobre esse tema não exige nada além de uma boa dose de criatividade. São inúmeros os casos que dispensam qualquer técnica mais sofisticada para estabelecer relações de ordem entre números que gozem de determinadas propriedades. Para começar a ilustrar esta ideia, daremos alguns exemplos de situações que empregam apenas, e tão somente, conhecimentos básicos de matemática, propondo problemas com tais características, cuja solução, apesar de bastante simples, necessita do argumento de prova indutiva (ideia pouco utilizada nas salas de aula do ensino médio) e que se destacam pela elegância e importância de suas aplicações práticas. Contudo, enfatizamos também as que lançam mão de resultados levemente sofisticados (a desigualdade entre as médias) e as que se apropriam de resultados mais fortes (como é o caso das desigualdades de Bernoulli e Cauchy-Schwarz).

Nossa intenção é percorrer este caminho com estímulos, sempre provocados por problemas que ilustrem a aplicabilidade desse conhecimento matemático, de modo bastante construtivo e motivador para o trabalho com os estudantes em sala de aula e fora dela.

Pretendo, nessa dissertação para conclusão do mestrado, discutir os aspectos técnicos desse tópico, analisando suas demonstrações e sempre pensando na aplicabilidade do conhecimento matemático por meio de um exemplo prático, além de ressaltar a importância do conhecimento dessas desigualdades matemáticas para a resolução de questões.

De acordo com Antonio Rodrigues Neto[1], desigualdade é importante para a matemática, principalmente nas experiências e nos problemas que abordam a necessidade de se comparar um conjunto de medidas. É a partir desse procedimento que podemos compreender como uma inequação é construída e quais são as principais regras para a sua resolução.

Um bom exemplo para ilustrar esse procedimento de comparar medidas desiguais é a leitura da temperatura durante o dia. A flutuação nas medidas da temperatura ocorrerá em função do horário e do local. Na prática, registramos essa flutuação indicando uma temperatura mínima e uma máxima, construindo, dessa forma, a ideia de intervalo, que ajuda a organizar a nossa análise nesse tipo de experiência. Assim, numericamente, se imaginarmos uma cidade com a temperatura mínima de 20°C e a máxima de 32°C, representaremos a temperatura por T e utilizaremos os símbolos convencionais de maior ou igual ($\geqslant$) e de menor ou igual($\leqslant$) para escrever a frase que expresse a temperatura dessa cidade:

$$20^{\circ}\mathsf{C} \leqslant \mathsf{T} \leqslant 32^{\circ}\mathsf{C}.$$

A inequação é mais um recurso da linguagem matemática para organizarmos problemas, situações ou experiências matemáticas. A desigualdade é uma consequência muito mais comum do que a igualdade. E isso acontece porque, por mais precisos que sejam os instrumentos, as medidas sempre serão variáveis. Assim, não esqueça que, ao comparar duas quantidades, tentando concluir qual delas é maior ou menor, você estará utilizando

[1]professor de matemática no ensino fundamental e superior, é mestre em educação pela USP e autor do livro "Geometria e Estética: experiências com o jogo de xadrez"(Editora da UNESP).

o princípio da inequação.

Segundo [9], inequação é uma sentença matemática, com uma ou mais incógnitas, expressas por uma desigualdade, diferenciando da equação, que representa uma equivalência. Assim, inequação é toda desigualdade literal que apresenta os sinais maior que ($>$), menor que ($<$), maior ou igual ($\geqslant$) ou menor ou igual ($\leqslant$) ao invés do sinal de igualdade que é o que caracteriza as equações.

Por exemplo:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \neq g(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Sendo f e g funções genéricas de n variáveis. Em alguns contextos, também se consideram inequações expressões do tipo:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_n) &> g(x_1, x_2, ..., x_n) \\ f(x_1, x_2, ..., x_n) &< g(x_1, x_2, ..., x_n) \\ f(x_1, x_2, ..., x_n) &\geqslant g(x_1, x_2, ..., x_n) \\ f(x_1, x_2, ..., x_n) &\leqslant g(x_1, x_2, ..., x_n). \end{aligned}$$

No capítulo a seguir iniciaremos o estudo a respeito de desigualdades matemáticas elementares com a apresentação de algumas desigualdades provenientes das propriedades de corpo dos números reais. É a partir delas que demonstrações de desigualdades mais complexas podem ser feitas. As principais referências utilizadas para a confecção deste trabalho foram [9],[2],[3],[6], [10] e [13].

Capítulo 2

Desigualdades Básicas (Primárias)

Há muitos fatos triviais que são a base para provar desigualdades. Alguns são os seguintes:

1. Se $x \geqslant y$ e $y \geqslant z$ então $x \geqslant z$, para qualquer $x, y, z \in \mathbb{R}$.
2. Se $x \geqslant y$ e $a \geqslant b$ então $x + a \geqslant y + b$, para qualquer $x, y, a, b \in \mathbb{R}$.
3. Se $x \geqslant y$ então $x + z \geqslant y + z$, para qualquer $x, y, z \in \mathbb{R}$.
4. Se $x \geqslant y$ e $a \geqslant b$ então $xa \geqslant yb$, para qualquer $x, y \in \mathbb{R}_+$ ou $a, b \in \mathbb{R}_+$.
5. Se $x \in \mathbb{R}$ então $x^2 \geqslant 0$, com igualdade se e somente se $x = 0$. Mais geralmente, para $A_i \in \mathbb{R}_+^*$ e $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$ possui $A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + ...A_nx_n^2 \geqslant 0$, com igualdade se e somente se $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Apesar de elementares, essas propriedades são uma ferramenta poderosa para provar desigualdades bem mais elaboradas. Os exemplos a seguir, embora muito simples, são a base para o que se segue mais tarde.

Exercício 1

(FOMIN,1996) Qual número é o maior:

$$31^{11} \text{ ou } 17^{14}?$$

Uma Solução:

$$31^{11} < 32^{11} = (2^5)^{11} = 2^{55} < 2^{56} = (2^4)^{14} = 16^{14} < 17^{14}.$$

Portanto, temos que $31^{11} < 17^{14}$.

Exercício 2

(FOMIN,1996) Qual número é o maior:

$$1234567 \cdot 1234569 \text{ ou } 1234568^2?$$

Uma Solução: Chamando 1234568 de x, poderemos reescrever o produto $1234567 \cdot 1234569$ da seguinte maneira:

$$(1234568 - 1) \cdot (1234568 + 1) = (x - 1) \cdot (x + 1) = x^2 - 1 < x^2 = 1234568^2.$$

Portanto, temos que $1234567 \cdot 1234569 < 1234568^2$.

Exercício 3

(CVETKOVSKI,2012) Seja $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Prove a desigualdade $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$.
Uma solução: Da desigualdade $(x - y)^2 \geqslant 0$, temos:

$$\begin{aligned}
& x^2 - 2xy + y^2 \geqslant 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 + y^2 \geqslant 2xy \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} \geqslant \frac{2xy}{xy} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2.
\end{aligned}$$

A igualdade ocorre se e somente se $x - y = 0$, isto é, $x = y$.

Exercício 4

(CVETKOVSKI,2012)(Desigualdade de Nesbitt) Sejam a, b, c números reais positivos. Prove a desigualdade

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Prova: De acordo com o exercício 3, é claro que

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+c}{a+c}+\frac{a+b}{a+c}+\frac{a+c}{a+b}\geqslant 2+2+2=6.$$

Reescrevendo a desigualdade, temos:

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ \left(\frac{a+b}{b+c}+\frac{a+c}{b+c}\right)+\left(\frac{b+c}{a+c}+\frac{a+b}{a+c}\right)+\left(\frac{b+c}{a+b}+\frac{a+c}{a+b}\right)\geqslant 6\\
&\Leftrightarrow\ \frac{a+a}{b+c}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{b+b}{a+c}+\frac{a+c}{a+c}+\frac{c+c}{a+b}+\frac{a+b}{a+b}\geqslant 6\\
&\Leftrightarrow\ \frac{2a}{b+c}+1+\frac{2b}{a+c}+1+\frac{2c}{a+b}+1\geqslant 6\\
&\Leftrightarrow\ \frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{a+c}+\frac{2c}{a+b}\geqslant 3\\
&\Leftrightarrow\ \frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geqslant \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Exercício 5

(CVETKOVSKI,2012) Sejam a, b, c números reais. Prove a inequação

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac.$$

Prova: Sabemos que $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0$. Podemos deduzir que:

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+a^2\geqslant 0\\
&\Leftrightarrow\ 2a^2+2b^2+2c^2\geqslant 2ab+2bc+2ac\\
&\Leftrightarrow\ a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac.
\end{aligned}$$

A igualdade ocorre se e somente se $a=b=c$.

Exercício 6

(CVETKOVSKI,2012) Prove, para qualquer número real x, a seguinte desigualdade

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1>0.$$

Uma Solução: Consideramos dois casos: $x<1$ e $x\geqslant 1$.

(1) Seja $x<1$. Temos que:

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1=x^{12}+(x^4-x^9)+(1-x).$$

Para $x < 1$, temos que $1 - x > 0$ e $x^4 \geqslant x^9$, isto é , $x^4 - x^9 \geqslant 0$. Então, neste caso

$$x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0.$$

Isto é, a desigualdade desejada é válida.

(2) Para $x \geqslant 1$ temos:

$$\begin{aligned} x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 &= x^8(x^4 - x) + (x^4 - x) + 1 \\ &= (x^4 - x)(x^8 + 1) + 1 \\ &= x(x^3 - 1)(x^8 + 1) + 1. \end{aligned}$$

Sendo $x \geqslant 1$, temos que $x^3 \geqslant 1$, isto é, $x^3 - 1 \geqslant 0$.

Assim sendo, temos que $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0$ e o problema está resolvido.

Capítulo 3

Desigualdades das Médias

Nesta secção, baseado nos estudos de (Manfrino; Ortega; Delgado, 2009), primeiro mencionamos e damos uma prova de desigualdades entre meios, que são importantes para uma atualização completa do aluno na resolução de tarefas nesta área. Discutiremos inicialmente o caso que trata de duas, posteriormente o caso geral será considerado.

Teorema 3.1 (MANFRINO; ORTEGA; DELGADO, 2009) Sendo $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ vamos denotar MQ (média quadrática), MA (média aritmética), MG (média geométrica) e MH (média harmônica), na qual

$$MQ = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}, \quad MA = \frac{a+b}{2}, \quad MG = \sqrt{a.b} \text{ e } MH = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Então, $MQ \geqslant MA \geqslant MG \geqslant MH$.

Prova: Em primeiro lugar, mostraremos que $MQ \geqslant MA$. Para $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ temos:

$$\begin{aligned}
(a-b)^2 \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 \geqslant 2ab \\
&\Leftrightarrow \quad 2(a^2 + b^2) \geqslant a^2 + b^2 + 2ab \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2(a^2 + b^2)}{4} \geqslant \frac{(a+b)^2}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{a^2 + b^2}{2} \geqslant \frac{(a+b)^2}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}.
\end{aligned}$$

A igualdade é válida se, e somente se, $a - b = 0$, isto é $a = b$.

Assim sendo, para $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ temos:

$$
\begin{aligned}
& \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0 \\
\Leftrightarrow \quad & a+b-2\sqrt{ab} \geqslant 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.
\end{aligned}
$$

Então $MA \geqslant MG$, com igualdade se, e somente se, $\sqrt{a}-\sqrt{b} \geqslant 0$, isto é $a = b$.

Há um artigo do professor Elon Lages Lima, em sua obra Meu Professor de Matemática e outras histórias, intitulado "Fazendo Médias", em que o mesmo mostra uma abordagem geométrica para justificar a desigualdade $MA \geqslant MG$.

Para tanto, considere uma circunferência de diâmetro igual a $a + b$, e nesta um triângulo retângulo inscrito, como na figura 3.1.

Observe, também, a altura h relativa à hipotenusa e a mediana $m = \frac{a+b}{2}$. Tem-se, por semelhança de triângulos, o clássico resultado de que tal altura h é a média geométrica dos segmentos a e b determinados sobre a hipotenusa, ou seja, $h = \sqrt{a \cdot b}$. De forma que $m \geqslant h$, ou seja, $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$. A igualdade ocorrendo para o caso de termos um triângulo retângulo isósceles, ou seja, $h = m$, ou ainda, $a = b$.

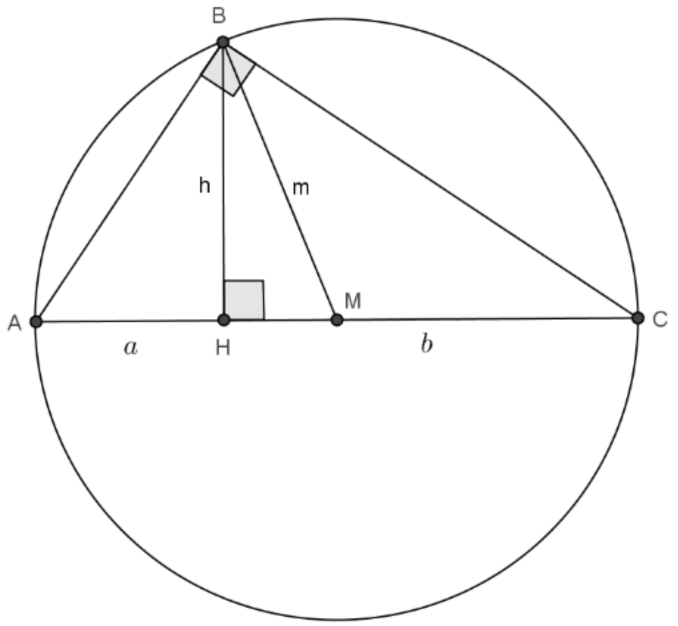

Figura 3.1: Triângulo retângulo inscrito em uma circunferência

Finalmente vamos mostrar que $MG \geqslant MH$, isto é, $\sqrt{a.b} \geqslant \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Temos que

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$$
$$\Leftrightarrow 1 \geqslant \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{ab} \geqslant \frac{2ab}{a+b}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{ab} \geqslant \frac{ab}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

A igualdade é válida se e somente se $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$, isto é $a=b$.

Exercício 7

(CVETKOVSKI,2012) Para $x, y \in \mathbb{R}_+$, prove que $x^2+y^2 \geqslant \dfrac{(x+y)^2}{2}$.

Prova: Fazendo $a = x^2$ e $b = y^2$, e aplicando a desigualdade $MA \geqslant MG$, temos que:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{2} \geqslant \sqrt{x^2.y^2}$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2 \geqslant 2xy$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+x^2+y^2 \geqslant 2xy+x^2+y^2$$
$$\Leftrightarrow 2(x^2+y^2) \geqslant (x+y)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2 \geqslant \frac{(x+y)^2}{2}$$

Capítulo 4

Desigualdades das Médias (Caso Geral)

No capítulo anterior, discutimos as desigualdades das médias com duas variáveis. Neste capítulo desenvolveremos sua generalização, ou seja, apresentaremos um teorema análogo para um número arbitrário de variáveis. Essas desigualdades são muito importantes, pois são a base para provar desigualdades mais sofisticadas.

Teorema 4.1 (Desigualdades médias) Seja $a_1, a_2, \ldots a_n$, números reais positivos. Os números

$$\begin{aligned} \mathsf{MQ} &= \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \\ \mathsf{MA} &= \frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n} \\ \mathsf{MG} &= \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \\ \mathsf{MH} &= \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \ldots + \frac{1}{a_n}} \end{aligned}$$

são chamados de média quadrática, aritmética, geométrica e harmônica para a números $a_1, a_2, \ldots a_n$, respectivamente, e nós temos $\mathsf{MQ} \geqslant \mathsf{MA} \geqslant \mathsf{MG} \geqslant \mathsf{MH}$. As equidades ocorrem se e somente se $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Prova: Em primeiro lugar, mostraremos que $\mathsf{MA} \geqslant \mathsf{MG}$, isto é,

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}. \tag{4.1}$$

Defina

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}, \text{para } i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.2}$$

Então $x_i > 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ e temos que $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$, pois

$$\left(\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}\right)\left(\frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}\right)\ldots\left(\frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}\right) = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}{\sqrt[n]{(a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)^n}} = 1.$$

Temos ainda que:

$$\begin{aligned} & \frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} \geqslant n \\ \Leftrightarrow\ & \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} + \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} \geqslant n \end{aligned}$$

isto é, para

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n. \tag{4.3}$$

E quando $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$, com igualdade se e somente se $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.

Vamos provar a desigualdade (4.3) por indução sobre n.

Para $n = 1$, a desigualdade (4.3) é verdadeira; torna-se igualdade.

Para $n = 2$, então $x_1 x_2 = 1$ e $x_1 + x_2 \geqslant 2\sqrt{x_1 x_2}$ obtemos $x_1 + x_2 \geqslant 2$.

Portanto, (4.3) é verdadeiro, e a igualdade ocorre se $x_1 = x_2 = 1$.

Para $n = k$ e números reais positivos arbitrários $x_1, x_2, \ldots x_k$ tais que $x_1 x_2 \ldots x_k = 1$, temos $x_1 + x_2 + \ldots x_k \geqslant k$, com igualdade se e somente se $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 1$.

Seja $n = k + 1$ e $x_1, x_2, \ldots x_{k+1}$ sejam números reais positivos arbitrários, tais que $x_1 x_2 \ldots x_{k+1} = 1$. Se $x_1 = x_2 = \ldots = x_{k+1} = 1$, a desigualdade (4.3) se mantém.

Portanto, vamos assumir que há números menores que 1. Então, existem também números que são maiores que 1. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $x_1 < 1$ e $x_2 > 1$. Então, vamos considerar a sequência $(x_1 x_2), x_3, \ldots, x_{k+1}$ que tem k termos, de modo que $(x_1x_2)x_3\dots x_{k+1} = 1$. De acordo com a hipótese de indução, temos que $x_1x_2+x_3+\dots+x_{k+1} \geqslant k$, e a igualdade ocorre se, e somemte se $x_1x_2 = x_3 = \dots = x_{k+1} = 1$.

Agora temos,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots x_{k+1} = &\; x_1x_2 + x_3 + \dots + x_{k+1} + 1 + (x_2 - 1)(1 - x_1) \\ \geqslant &\; k + 1 + (x_2 - 1)(1 - x_1) \\ \geqslant &\; k + 1. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Donde, as desigualdades acima foi obtida usando a hipótese de indução e o fato de que $(x_2 - 1)(1 - x_1) > 0$. Assim, se a igualdade em (4.4) ocorre e o fato de que $x_1x_2 = x_3 = \dots = x_{k+1} = 1$, obtemos: $x_1+x_2 = 2$ e $x_1x_2 = 1$, logo $x_1 = x_2 = 1$. Portanto, a igualdade ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_{k+1} = 1$.

Assim, devido ao princípio da indução matemática, concluímos que (4.3) é verdadeiro.

Assim, por (4.2) temos

$$\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}} = \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}} = \dots = \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}},$$

isto é, $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Por isso, provamos (4.1) e acabamos.

Vamos mostrar que $MG \geqslant MH$, ou seja,

$$\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots \frac{1}{a_n}}.$$

Por $MA \geqslant MG$ segue-se que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots \frac{1}{a_n} \geqslant n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\dots\frac{1}{a_n}} = \frac{n}{\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}}.$$

Temos, portanto que

$$\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots \frac{1}{a_n}},$$

e claramente a igualdade é válida se e somente se

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = \dots = \frac{1}{a_n}$$

isto é $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Devemos demonstrar que $MQ \geqslant MA$, isto é,

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Essa demonstração será feita posteriormente, pois usaremos para tal, a desigualdade de Cauchy-Schwarz que será apresentada no próximo capítulo.

Exercício 8

(CVETKOVSKI,2012) Considere a função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+5}$. Encontre o valor máximo de f e o ponto em que tal valor é assumido.

Solução:

Pela desigualdade das médias temos que :

$$x^2 + 5 = x^2 + \frac{5}{3} + \frac{5}{3} + \frac{5}{3} \geqslant 4\sqrt[4]{x^2.\frac{5}{3}.\frac{5}{3}.\frac{5}{3}} = 4\sqrt[4]{\frac{125}{27}}.\sqrt{x}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad x^2 + 5 \geqslant 4\sqrt[4]{\frac{125}{27}}.\sqrt{x}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x^2+5}{x^2+5} \geqslant \frac{4\sqrt[4]{\frac{125}{27}}.\sqrt{x}}{x^2+5}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{x}}{x^2+5} \leqslant \frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{27}{125}}.
\end{aligned}$$

E a igualdade ocorre se, e somente se, $x^2 = \dfrac{5}{3}$. Portanto, o valor máximo de f é $\dfrac{1}{4}\sqrt[4]{\dfrac{27}{125}}$ e ocorre para $x = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

Exercício 9

Encontre o valor máximo de $x(1 - x^3)$ para $0 < x < 1$.

Solução:

A ideia é trocar o produto por outro de tal maneira que a soma dos elementos envolvidos no novo produto é constante.

Se $y = x(1-x^3)$, é claro que $3y^3 = 3x^3(1-x^3)(1-x^3)(1-x^3)$ expresso como o produto de quatro números $3x^3$,$(1-x^3)$,$(1-x^3)$ e $(1-x^3)$, que tem uma soma constante igual a 3.

A desigualdade $MA \geqslant MG$ para quatro números nos diz que

$$\begin{aligned}
&\frac{3x^3+3(1-x^3)}{4} \geqslant \sqrt[4]{3x^3(1-x^3)(1-x^3)(1-x^3)}\\
\Leftrightarrow\quad &\left(\frac{3x^3+3(1-x^3)}{4}\right)^4 \geqslant 3y^3\\
\Leftrightarrow\quad &\left(\frac{3}{4}\right)^4 \geqslant 3y^3\\
\Leftrightarrow\quad &y \leqslant \sqrt[3]{\frac{3^3}{4^4}}\\
\Leftrightarrow\quad &y \leqslant \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}.
\end{aligned}$$

Portanto, o valor máximo de $x(1-x^3)$ é $\dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}$.

Exercício 10

Deve-se construir uma caixa aberta a partir de um chapa de aço retangular de 3m de comprimento por 2m de largura. Para isso, cortam-se pedaços quadrados iguais nos cantos dessa chapa. Quais devem ser as dimensões da caixa para que seu volume seja o maior possível?

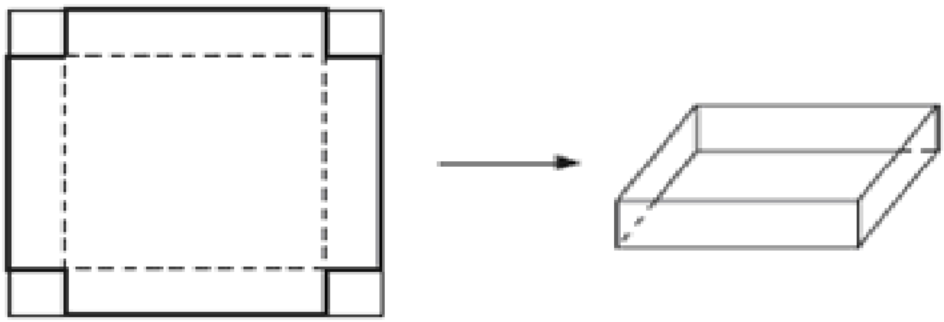

Figura 4.1: Chapa de aço retangular

Solução:

Seja x a medida do comprimento do lado do quadrado que deve ser recortado de cada canto dessa chapa. Dessa forma, temos uma caixa com dimensões $(2-2x)$, $(3-2x)$ e x, em que $0 < x < 1$. Portanto, o volume da caixa é dado por $V = (2-2x)(3-2x)x$.

Agora, como $MA \geqslant MG$, considerando de maneira conveniente as variáveis $2(2-2x)$,

$(3-2x)$ e $6x$, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{2(2-2x)(3-2x)6x} \leqslant \frac{2(2-2x)+(3-2x)+6x}{3}\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt[3]{12(2-2x)(3-2x)x} \leqslant \frac{7}{3}\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt[3]{12V} \leqslant \frac{7}{3}\\
\Leftrightarrow\ &12V \leqslant \frac{343}{27}.
\end{aligned}$$

De onde obtemos $V \leqslant \frac{343}{324}$.

Portanto, o volume máximo é $\frac{343}{324}m^3$ e ocorre quando as variáveis forem iguais, isto é, $2(2-2x) = (3-2x) = 6x$, o que implica $x = 0,375m$. Logo, as dimensões da caixa devem ser, aproximadamente, $1,2m$; $2,2m$ e $0,4m$.

Exercício 11

(APMO, 1991) Sendo $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$, números positivos com

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$$

.

Prove que $\frac{a_1^2}{a_1+b_1} + ... + \frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geqslant \frac{1}{2}(a_1 + ... + a_n)$.

Prova:

Sendo $S_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_i+b_i}$ e $S_b = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{a_i+b_i}$, temos que

$$S_a - S_b = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2 - b_i^2}{a_i+b_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i - b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i = 0.$$

Assim, $S_a = S_b = S$. Portanto, temos:

$$2S = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2 + b_i^2}{a_i+b_i} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i+b_i)^2}{a_i+b_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & S = S_a \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i\\
\Leftrightarrow\ & \frac{a_1^2}{a_1+b_1} + ... + \frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geqslant \frac{1}{2}(a_1 + ... + a_n).
\end{aligned}$$

Capítulo 5

Desigualdade de Bernoulli, Cauchy-Shuwarz e Triangular

5.1 Desigualdade de Bernoulli

A primeira desigualdade remonta os irmãos Bernoulli (Jacob e Johann Bernoulli, matemáticos suiços do século XVIII), sendo conhecida como a desigualdade de Bernoulli. Apesar de sua aparente simplicidade, veremos que ela se revela bastante útil em aplicações.

Figura 5.1: Jacob I - (1654-1705)

FONTE: https://kids.britannica.com/students/assembly/view/137300

Figura 5.2: Johan I - (1667-1748)

FONTE: http://ecalculo.if.usp.br/historia/bernoulli1.htm

Teorema 5.1 (Desigualdade de Bernoulli) Seja $x_1, x_2, ..., x_n$, números reais com o mesmo sinal e maiores que -1. Então, temos:

$$(1 + x_1)(1 + x_2)...(1 + x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + ... + x_n. \tag{5.1}$$

Prova:

Comprovaremos a desigualdade dada por indução.

Para $n = 1$, temos $1 + x_1 \geqslant 1 + x_1$.

Suponha que para $n = k$ e números reais arbitrários $x_i > -1, i = 1, 2, ..., k$, com os mesmos sinais, a desigualdade (5.1) detém, ou seja,

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_k) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k. \tag{5.2}$$

Seja $n = k + 1$ e $x_i > -1$, $i = 1, 2, \cdots, k + 1$, sejam números reais arbitrários com os mesmos sinais. Então, se $x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}$ têm os mesmos sinais, temos

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)x_{k+1} \geqslant 0. \tag{5.3}$$

Consequentemente,

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_{k+1}) \overset{(5.2)}{\geqslant} (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k)(1 + x_{k+1})$$

$$1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} + (x_1 + x_2 + \cdots + x_k)x_{k+1} \overset{(5.3)}{\geqslant} 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1}.$$

isto é, a desigualdade (5.1) é válida para $n = k + 1$ e estamos finalizados.

Corolário 5.1 (Desigualdade de Bernoulli) Seja $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \geqslant -1$. Então

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx$$

Prova: Para $x=-1$, é claro que $0=(1+(-1))^n \geqslant 1+n(-1)=1-n$. Agora, para $x>-1$, defina $x=x_1=x_2=...=x_n$. Como x_i tem o mesmo sinal e são maiores que -1 para $i=1,2,..,n$, então pelo Teorema Bernoulli, segue-se que

$$(1+x)^n=(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n) \geqslant 1+x_1+x_2+...+x_n=1+nx.$$

Exercício 12

Qual é o maior dentre os números: $2^{100}+3^{100}$ ou 4^{80}?

Uma solução: Inicialmente podemos notar que $2^{100}+3^{100}<3^{100}+3^{100}=2\cdot 3^{100}$. Devemos mostrar que $4^{80}>2\cdot 3^{100}$, ou seja, $\left(\frac{4^4}{3^5}\right)^{20}=\left(\frac{256}{243}\right)^{20}>2$.

Note que

$$\left(\frac{256}{243}\right)^{20}=\left(1+\frac{13}{243}\right)^{20}>\left(1+\frac{1}{19}\right)^{20}>\left(1+\frac{1}{20}\right)^{20}.$$

Ou ainda,

$$\left(\frac{256}{243}\right)^{20}>\left(1+\frac{1}{20}\right)^{20}.$$

Agora, usando a desigualdade de Bernoulli na desigualdade acima, obtém-se

$$\left(\frac{256}{243}\right)^{20}>\left(1+\frac{1}{20}\right)^{20}\geqslant 1+20\cdot\frac{1}{20}=2.$$

Donde se conclui, finalmente que

$$4^{80}>2\cdot 3^{100}>2^{100}+3^{100} \therefore 4^{80}>2^{100}+3^{100}.$$

Exercício 13

(LOZANSKY, 1996). Seja $a=\dfrac{m^{m+1}+n^{n+1}}{m^m+n^n}$ com m e n inteiros positivos. Prove que $a^m+a^n \geqslant m^m+n^n$.

Prova:

$$a^m+a^n=m^m.\left(\frac{a}{m}\right)^m+n^n\left(\frac{a}{n}\right)^n$$

$$
\begin{aligned}
&= m^m.\left(1+\frac{a-m}{m}\right)^m + n^n.\left(1+\frac{a-n}{n}\right)^n \\
&\geqslant m^m.\left(1+m\left(\frac{a-m}{m}\right)\right) + n^n.\left(1+n\left(\frac{a-n}{n}\right)\right) \\
&\geqslant m^m.(1+(a-m)) + n^n.(1+(a-n)) \\
&= (m^m+n^n) + a(m^m+n^n) - (m^{m+1}+n^{n+1}).
\end{aligned}
$$

Substituindo o valor de a na desigualdade, obtemos $a^m + a^n \geqslant m^m + n^n$. Como queríamos demonstrar.

5.2 Desigualdade de Cauchy-Shuwarz

Figura 5.3: Augustin-Louis Cauchy(1789-1857)

FONTE: https://pt.wikipedia.org/wiki/Augustin-Louis.cauchy

O primeiro avanço na matemática moderna por ele produzido, foi a introdução do rigor na análise matemática e segundo foi na análise combinatória. Além disso, partindo do ponto central do método de Lagrange, na teoria das equações, Cauchy tornou-a abstrata e começou a sistemática criação da teoria dos grupos.

Na Álgebra linear e Geometria analítica, a desigualdade de Cauchy-Schwarz, também conhecida como a desigualdade de Schwarz, a desigualdade de Cauchy, ou a desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, é uma desigualdade muito útil que aparece em vários contextos diferentes, tais como em análise, aplicando-se a séries infinitas e integração de produtos, e na teoria de probabilidades aplicando-se as variâncias e covariâncias.

Teorema 5.2 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_n$ e $b_1, b_2, \cdots, b_n$ números reais. Então

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2,$$

isto é, $(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \geqslant (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$. A igualdade ocorre se, e somente se, existe um μ tal que $a_i = b_i\mu \;\; i = 1, 2, 3, \cdots, n)$.

Prova:

Consideremos o trinômio quadrado

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i x)^2 = \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 - 2a_i b_i x + b_i^2 x_i^2) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2x\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + x^2\sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Como $\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i x)^2 \geqslant 0$, então o discriminante dessa equação do 2º grau deve ser não positivo, ou seja $(-2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 - 4(\sum_{i=1}^{n} b_i^2)(\sum_{i=1}^{n} a_i^2) \leqslant 0$.

$$\Leftrightarrow \;\; 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \;\; \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2.\right)$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $a_i - b_i\mu = 0$, isto é, se, e somente se, $a_i = b_i\mu$, para todo $i = 1, 2, \cdots, n$.

Isso nos permite concluir a demonstração sugerida no capítulo 4. Vejamos:

Devemos demonstrar que $MQ \geqslant MA$, isto é $\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

Usaremos a desigualgade de Cauchy-Schwarz para as sequências $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ e $(1, 1, \cdots, 1)$. Então, temos:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2) \geqslant (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$$

$$\Leftrightarrow \;\; n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \geqslant (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$$

$$\Leftrightarrow \;\; \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \;\; \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

A igualdade é válida se, e somente se,

$$\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{1} = \cdots = \frac{a_n}{1},$$

isto é, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Como consequência dessa desigualdade, temos os seguintes corolários:

Corolário 5.2: Sejam $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x, y > 0$. Então,

1. $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y} \geqslant \dfrac{(a+b)^2}{x+y}$
2. $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y} + \dfrac{c^2}{z} \geqslant \dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$

Prova de 1.:

Temos que .

$$
\begin{aligned}
& \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geqslant \frac{(a+b)^2}{x+y} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{(x+y)a^2}{x(x+y)} + \frac{(x+y)b^2}{y(x+y)} \geqslant \frac{xy(a+b)^2}{xy(x+y)} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{y(x+y)a^2 + x(x+y)b^2}{xy(x+y)} \geqslant \frac{xy(a+b)^2}{xy(x+y)} \\
\Leftrightarrow\ & y(x+y)a^2 + x(x+y)b^2 \geqslant xy(a+b)^2 \\
\Leftrightarrow\ & yxa^2 + y^2a^2 + x^2 + xyb^2 \geqslant xya^2 + 2abxy + xyb^2 \\
\Leftrightarrow\ & y^2a^2 + x^2b^2 - 2abxy \geqslant 0 \\
\Leftrightarrow\ & (ay - bx)^2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

E a última desigualdade é sempre verdadeira . Note que a igualdade ocorre se, e somente se, $ay - bx = 0 \Leftrightarrow ay = bx \Leftrightarrow \dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$.

Prova de 2.:

Por 1., temos:

$$
\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} = \left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}\right) + \frac{c^2}{z} \geqslant \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geqslant \frac{((a+b)+c)^2}{(x+y)+z} = \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}
$$

Portanto $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y} + \dfrac{c^2}{z} \geqslant \dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$. Como queríamos demonstrar.

Generalizando o Corolário 5.2, temos:

Corolário 5.3: Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_n$, $b_1, b_2, \cdots, b_n$ números reais tais que $b_i > 0$, para $i = 1, 2, \cdots, n$. Então

$$
\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}. \tag{5.4}
$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$.

Prova:

Provamos este resultado usando o Princípio de Indução Finita. Para $n = 1$, temos $\frac{a_1^2}{b_1} = \frac{a_1^2}{b_1}$ e portanto $\frac{a_1^2}{b_1} \geqslant \frac{a_1^2}{b_1}$.

Suponhamos que, para algum k natural maior do que 1, a desigualdade (5.4) é verdadeira, isto é

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_k^2}{b_k} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_k}.$$

Para completar a demonstração, vamos verificar que a desigualdade (5.4) é verdadeira para $n = k + 1$. Com efeito, da hipótese de indução, segue que:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_k^2}{b_k} + \frac{a_{k+1}^2}{b_{k+1}} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_k} + \frac{a_{k+1}^2}{b_{k+1}} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1})^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_{k+1}}.$$

Como queríamos demonstrar.

Exercício 14

Achar o valor máximo de $f(x) = 3senx + 4cosx$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Uma solução:

Na desigualdade de Cauchy-Schwarz para dois números, temos:

$$|a_1.b_1 + a_2.b_2| \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2},$$

façamos $a_1 = 3, a_2 = 4, b_1 = senx$ e $b_2 = cosx$. O que nos leva a

$$|3senx + 4cosx| \leqslant \sqrt{3^2 + 4^2}.\sqrt{sen^2x + cos^2x} = 5.$$

Desse modo, $|3senx + 4cosx| \leqslant 5$, com igualdade ocorrendo se, e somente se,

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n},$$

logo $\frac{3}{senx} = \frac{4}{cosx} \rightarrow tgx = \frac{3}{4}$.

Exercício 15

(ENGEL, 1998) Estabelecer uma majoração para a função $y = asenx + bcosx$ com $a > 0, b > 0$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

A desigualdade de Cauchy-Schwarz garante que

$$(a\,\mathrm{sen}x + b\cos x)^2 \leqslant (a^2+b^2)(\mathrm{sen}^2x+\cos^2x) = a^2+b^2,$$

o valor máximo $Y_{max} = \sqrt{a^2+b^2}$ é satisfeito se, e somente se, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\mathrm{sen}x}{\cos x} = \mathrm{tg}x$.

Exercício 16

Prove a desigualdade de Nesbitt: $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b} \geqslant \dfrac{3}{2}$.

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para três números, temos:

$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \geqslant (a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3)^2$, façamos

$a_1 = \sqrt{b+c}, a_2 = \sqrt{c+a}, a_3 = \sqrt{a+b}, b_1 = \dfrac{1}{\sqrt{b+c}}, b_2 = \dfrac{1}{\sqrt{c+a}}$ e $b_3 = \dfrac{1}{\sqrt{a+b}}$, temos

$$\begin{aligned}
& ((b+c)+(c+a)+(a+b))\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geqslant (1+1+1)^2 = 9\\
\Leftrightarrow\;& 2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geqslant 9\\
\Leftrightarrow\;& \frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b} \geqslant \frac{9}{2}\\
\Leftrightarrow\;& \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{9}{2}-3\\
\Leftrightarrow\;& \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

A igualdade ocorre se $(b+c)^2 = (a+c)^2 = (a+b)^2$, isto é $a=b=c$.

5.3 Desigualdade Triangular

Sejam $a, b \in \mathbb{R}^*$. Então $|a+b| \leqslant |a|+|b|$.

É fato relativamente natural que num triângulo qualquer cada lado é menor que a soma dos outros dois lados ou, o que nada mais é, cada lado é maior que a diferença dos outros dois lados. Com efeito, sendo a, b e c as medidas dos lados de um triângulo, deve valer:

$$\begin{cases} a < b+c \\ b < a+c \rightarrow b-c < a \\ c < a+b \rightarrow c-b < a. \end{cases}$$

Donde podemos escrever: $|b-c| < a < b+c$.

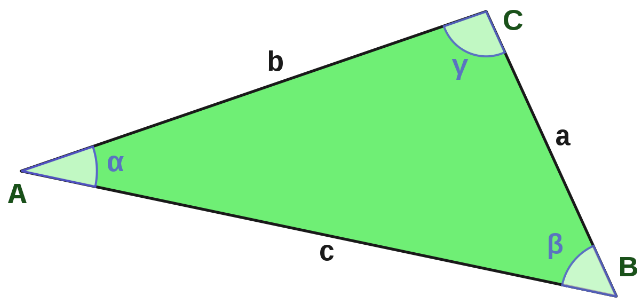

Figura 5.4: Triângulo de lados a, b, c

FONTE: https://pt.wikipedia.org/wiki/Desigualdade_triangular

Equivalentemente, podemos reescrever tal desigualdade usando a notação de módulo (ou valor absoluto) para a e b números reais quaisquer. Para isso definamos:

$$|x| = \begin{cases} x, se\, x \geqslant 0 \\ -x, se\, x < 0. \end{cases}$$

Disto decorre que $x = |x|$ ou $x = -|x|$, e assim $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$ e $-|b| \leqslant b \leqslant |b|$.

Somando ambas as desigualdades simultâneas, membro a membro, chegamos a

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|$$

e assim $|a + b| \leqslant |a| + |b|$, chamada de desigualdade triangular para os números a e b. Bem como,

$$|a| = |(a - b) + b| \leqslant |a - b| + |b| \therefore |a| - |b| \leqslant |a - b|$$

.

Afirmamos, agora, que dados números não nulos a, b e c, vale ainda a desigualdade triangular. Com efeito,

$$|a + b + c| \leqslant |a + b| + |c| \leqslant |a| + |b| + |c|.$$

Utilizando o método de Indução Finita obtemos uma generalização da desigualdade triangular, a saber: $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$ com $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$.

Para qualquer quantidade de números a condição de igualdade, na desigualdade triangular, ocorre se, e somente se, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tiverem o mesmo sinal.

Exercício 17

(MUNIZ, 2013). Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$|x-1|+|x-2|+|x-3|+\ldots+|x-100| \geqslant 50^2$$

Uma solução:

Usando o fato de que $|a|+|b| \geqslant |a-b|$ e agrupando os termos equidistantes da nossa soma chegamos a

$$|x-1|+|x-100| \geqslant |(x-1)-(x-100)| = 99$$

$$|x-2|+|x-99| \geqslant |(x-2)-(x-99)| = 97$$

$$|x-3|+|x-98| \geqslant |(x-3)-(x-98)| = 95$$

....

$$|x-50|+|x-51| \geqslant |(x-50)-(x-51)| = 1.$$

Somando sobre todas as desigualdades acima, e utilizando a fórmula para os n primeiros números ímpares (Usando Indução Finita), mostra-se que

$$1+3+\ldots+(2n-3)+(2n-1) = n^2, \forall n \in \mathbb{N},$$

obtemos $|x-1|+|x-2|+|x-3|+\ldots+|x-100| \geqslant 1+3+\ldots+97+99 = 50^2$. Pelo que vimos acima, a mesma desigualdade é válida para uma quantidade par $(2n)$ de parcelas e pode ser reescrita como segue $|x-1|+|x-2|+|x-3|+\ldots+|x-2n| \geqslant \left(\frac{n}{2}\right)^2$.

Exercício 18

Prove que se a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo e $a^2+b^2 = k \cdot c^2$, então prove que $k > \frac{1}{2}$.

Solução:

Pela desigualdade entre as médias quadrática e aritmética, sabemos que, sendo a e b dois números reais positivos, temos $MQ \geqslant MA$, ou seja

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}.$$

Aplicando a desigualdade triângular na qual $|a+b| \geqslant |a|+|b|$ e $c < a+b$, temos

$$\begin{aligned}
& k \cdot c^2 = a^2 + b^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{k \cdot c^2}{2} = \frac{a^2+b^2}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > \left(\frac{c}{2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{k \cdot c^2}{2} > \frac{c^2}{4} \\
\Leftrightarrow \quad & k > \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Capítulo 6

Desigualdades Geométricas no Triângulo

Essas desigualdades na maioria dos casos têm como variáveis os comprimentos dos lados de um determinado triângulo; há também desigualdades em que aparecem outros elementos do triângulo, como comprimentos de alturas, semiperímetro, área, raio do círculo inscrito e circunscrito, etc. Primeiro, vamos introduzir as notações que serão utilizadas nesse capítulo.

- h_a, h_b, h_c - alturas desenhadas para os lados a, b, c, respectivamente.
- A-área,
- p-semiperímetro,
- R- raio circunscrito,
- r- raio inscrito.

Também observamos que as seguintes propriedades são verdadeiras, e as apresentamos sem comprovação. A primeira desigualdade segue-se usando fórmulas geométricas e desigualdade das médias, e a segunda desigualdade segue imediatamente, por exemplo, de acordo com o teorema de Leibniz.

Proposição 6.1 Para um triângulo arbitrário, temos as seguintes desigualdades:

$$R \geqslant 2r \text{ e } a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 9R^2.$$

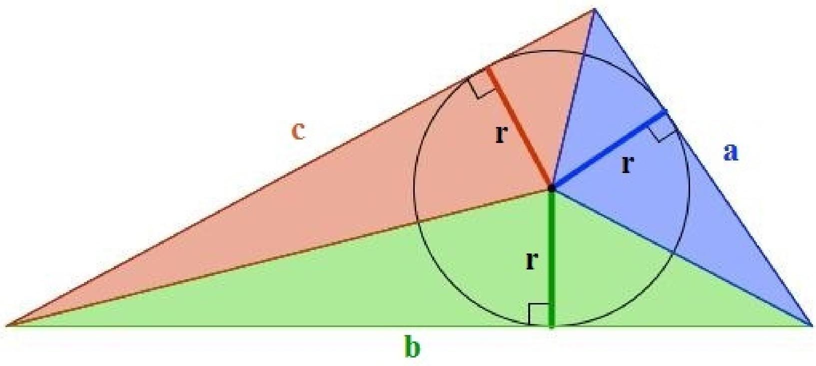

Figura 6.1: Circunferência inscrita num triângulo

FONTE: https://matematica-para-todos.wikispaces.com/Explorando

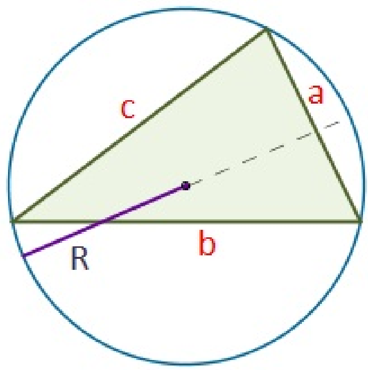

Figura 6.2: Circunferência circunscrita num triângulo

FONTE: http://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/formula-heron/

As desigualdades básicas que dizem respeito aos comprimentos dos lados de um determinado triângulo são desigualdades bem conhecidas:

$$a + b > c,\ a + c > b \text{ e } b + c > a.$$

Mas também substituições úteis e frequentes são:

$$\begin{aligned} a &= x + y, \\ b &= y + z, \\ c &= z + x, \ \text{onde}\, x,\ y,\ z > 0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

A questão é se sempre há números reais positivos x, y, z, de modo que as identidades acima (6.1) sejam seguras e a, b, c são os lados do triângulo. A resposta é positiva. Ou seja, x, y, z são segmentos tangentes caídos dos vértices para o círculo inscrito do triângulo dado. De (6.1), obtemos facilmente isso:

$$x = \frac{a+c-b}{2}, y = \frac{a+b-c}{2}, z = \frac{b+c-a}{2}$$

e então claramente $x, y, z > 0$.

Observação: As substituições (6.1) são chamadas de substituições de Ravi.

Exercício 19

Seja a, b, c os comprimentos dos lados de um triângulo dado. Prove as desigualdades

$$\frac{3}{2} \leqslant \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

Uma solução:

Se $a+b > c$, temos que $2(a+b) > a+b+c$, logo $a+b > \frac{a+b+c}{2}$ e consequentemente $a+b > p$. Da mesma forma, obtemos $b+c > p$ e $a+c > p$. Assim sendo

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < \frac{a}{p} + \frac{b}{p} + \frac{c}{p} = \frac{2p}{p} = 2$$

Consideremos a desigualdade do lado esquerdo. Se denotarmos $b+c = x, a+c = y, a+b = z$, então temos

$$a = \frac{z+y-x}{2}, b = \frac{z+x-y}{2}, c = \frac{x+y-z}{2}$$

Consequentemente

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+a} = \frac{z+y-x}{2x} + \frac{z+x-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z},$$

logo

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+a} = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} - 3\right) \geqslant \frac{1}{2}(2+2+2-3) = \frac{3}{2}$$

como requerido.

Observação: Como já vimos no capítulo 2, a desigualdade do lado esquerdo é conhecida como a desigualdade de Nesbitt, e é verdade para qualquer número real positivo a, b e c.

Exercício 20

Seja a, b, c os comprimentos laterais de um determinado triângulo. Prove a desigualdade

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geqslant \frac{9}{p}.$$

Solução: Uma vez que $MA \geqslant MH$ temos:

$$\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \geqslant \frac{3}{\frac{1}{(p-a)}+\frac{1}{(p-b)}+\frac{1}{(p-c)}}$$

logo

$$\frac{1}{(p-a)}+\frac{1}{(p-b)}+\frac{1}{(p-c)} \geqslant \frac{9}{(p-a)+(p-b)+(p-c)} = \frac{9}{p}.$$

A igualdade ocorre se e somente se $a = b = c$.

Exercício 21

Seja p e r o semiperimetro e o raio inscrito, respectivamente, em um triângulo qualquer. Prove a desigualdade $p \geqslant 3\sqrt{3}r$.

Solução:

Temos que $2p = a + b + c$. Aplicado a desigualdade $MA \geqslant MG$, obtemos:

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$$
$$\Leftrightarrow \quad a+b+c \geqslant 3 \cdot \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$$

Lembre-se que a área de um triângulo em função do raio circunscrito e do raio inscrito é dada por $A = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4R}$ e $A = p \cdot r$, respectivamente. Logo:

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{abc} \\
&\Leftrightarrow \quad 2p \geqslant 3\sqrt[3]{4\cdot A\cdot R} \geqslant 3\sqrt[3]{4\cdot p\cdot r\cdot 2\cdot r}, \text{ isto é, } R \geqslant 2\cdot r. \\
&\Leftrightarrow \quad 2p \geqslant (3\sqrt[3]{8pr^2}) \\
&\Leftrightarrow \quad 2p \geqslant 2\left(3\sqrt[3]{pr^2}\right), \text{ isto é,} \\
&\Leftrightarrow \quad p \geqslant 3\sqrt[3]{p\cdot r^2} \\
&\Leftrightarrow \quad p^3 \geqslant \left(3\sqrt[3]{pr^2}\right)^3 \\
&\Leftrightarrow \quad p^3 \geqslant 27pr^2 \\
&\Leftrightarrow \quad p^2 \geqslant 27r^2 \\
&\Leftrightarrow \quad p \geqslant 3\sqrt{3}r.
\end{aligned}
$$

Como queríamos demostrar.

A igualdade ocorre se e somente se $a = b = c$.

Outra solução:

Temos que

$$\frac{p}{3} = \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \geqslant \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}, \tag{6.2}$$

pois $MA \geqslant MG$.

Além disso, usando a fórmula de Heron, temos:

$$
\begin{aligned}
&A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\
\Leftrightarrow \quad &A^2 = \sqrt{(p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c))^2} \\
\Leftrightarrow \quad &A^2 = p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c).
\end{aligned}
$$

Portanto:

$$(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c) = \frac{A^2}{p} = \frac{p^2\cdot r^2}{p} = p\cdot r^2 \tag{6.3}$$

De (6.2) e (6.3) obtemos:

$$
\begin{aligned}
&\frac{p}{3} \geqslant \sqrt[3]{p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)} \\
\Leftrightarrow \quad &\frac{p}{3} \geqslant \sqrt[3]{p\cdot r^2} \\
\Leftrightarrow \quad &p \geqslant 3\cdot\sqrt[3]{p\cdot r^2},
\end{aligned}
$$

isto é, como já mostrado na solução 1, obtemos:

$$p \geqslant 3\sqrt{3}r$$

A igualdade ocorre se e somente se $a = b = c$.

Exercício 22

Provar que em todo triângulo a soma dos comprimentos das medianas é menor que o perímetro e maior que o semiperímetro desse triângulo.

Solução:

Tomemos um triângulo ABC qualquer, cujos lados medem a, b e c, onde m_a, m_b e m_c representam as medianas relativas aos respectivos lados desse triângulo e é o seu semi-perímetro, ou seja $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

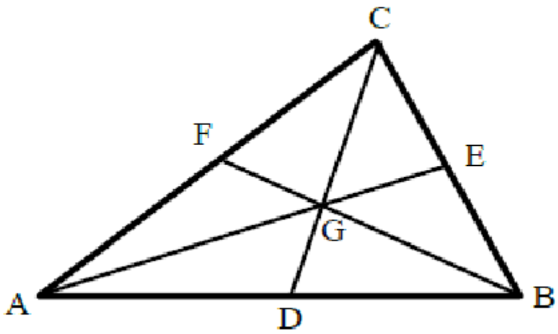

Figura 6.3: Medianas de um triângulo

Seja $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AE} = m_a$, $\overline{BF} = m_b$, e $\overline{CD} = m_c$. Observe que:

$$\begin{cases} \overline{AG} = \dfrac{2}{3} \cdot \overline{AE} = \dfrac{2}{3} \cdot m_a \\ \overline{BG} = \dfrac{2}{3} \cdot \overline{BF} = \dfrac{2}{3} \cdot m_b \\ \overline{CG} = \dfrac{2}{3} \cdot \overline{CD} = \dfrac{2}{3} \cdot m_c. \end{cases}$$

Em primeiro lugar vamos demonstrar que $p < m_a + m_b + m_c$. Aplicando desigualdade triangular nos triângulos AGB, AGC e BGC, temos:

$$\begin{cases} \Delta AGB : AG + GB > AB \\ \Delta AGC : AG + CG > AC \\ \Delta BGC : BG + GC > BC. \end{cases}$$

implicando em,

$$\frac{2}{3} \cdot m_a + \frac{2}{3} \cdot m_b > c$$
$$\frac{2}{3} \cdot m_a + \frac{2}{3} \cdot m_c > b$$
$$\frac{2}{3} \cdot m_b + \frac{2}{3} \cdot m_c > a.$$

Somando as três inequações teremos:

$$\frac{4}{3} \cdot m_a + \frac{4}{3} \cdot m_b + \frac{4}{3} \cdot m_c > a + b + c = 2p$$
$$m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot p$$
$$m_a + m_b + m_c > \frac{3}{2} \cdot p > p.$$

Agora vamos prolongar $\overline{AE}$ até o ponto H de tal modo que $\overline{AE} = \overline{AH} = m_a$

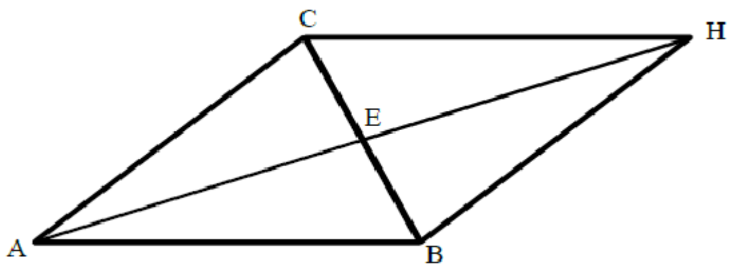

Figura 6.4: Triângulo prolongado

Como $\overline{CE} = \overline{EB}$, segue que $\Delta AEB \cong \Delta HEC$ e $\Delta AEC \cong \Delta HEB$. Assim, $\overline{AB} = \overline{CH} = $ c e $\overline{AC} = \overline{BH} =$ b. Usando a desigualdade triangular no ΔACH , teremos:

$$\overline{AH} < \overline{AC} + \overline{CH}$$
$$\Rightarrow \quad 2\overline{AE} < b + c$$
$$\Rightarrow \quad 2m_a < a + b$$

Analogamente,

$$2m_b < a + c$$
$$2m_c < a + b.$$

Portanto, adicionando as três desigualdades, obteremos:

$$m_a + m_b + m_c < b + c + a + c + a + b$$

$$2 \cdot (m_a + m_b + m_c) < 2 \cdot (a + b + c)$$

$$m_a + m_b + m_c < a + b + c.$$

Logo , provamos que

$$p < m_a + m_b + m_c < 2p.$$

Capítulo 7

Considerações Finais

O foco principal desse trabalho são as "desigualdades", na qual se buscou, por meio de resoluções de questões, abordá-lo sobre o ponto de vista de sua aplicabilidade. Esse estudo se deu por meio da observação de vários livros e artigos científicos dedicados a esse tema e busca encorajar professores do ensino fundamental e médio a trabalhá-lo em salas de aula na preparação dos alunos para olimpíadas matemáticas.

Sou professor de matemática no IFMA e busquei trabalhar essas desigualdades nas aulas preparatórias para a OBMEP e OBM. O resultado foi bastante satisfatório, pois percebi um grande entusiasmo por parte dos alunos na resolução de problemas que abordam uma matemática mais provocadora, prática e instigante. O tema "desigualdades"é extremamente grande e variado, mas procurei mostrar nesse trabalho, metodologicamente, os conceitos de desigualdades que podem perfeitamente serem trabalhadas nas séries do ensino básico.

Finalmente, acredito que o objetivo desse trabalho foi alcançado e deixo claro a enorme satisfação e o prazer de realizar essa pesquisa sobre um tema tão rico da matemática.

Referências Bibliográficas

[1] ANDREESCU, Titu; GELCA, Razvan. - *Mathematical Olympiad Challenges.* New York, Birkhäuser, 2000.

[2] AIGNER, Martin; ZIEGLER, Günter M. - *As provas estão n'O LIVRO.* São Paulo, Edgard Blücher, 2002.

[3] BARBEAU, Edward J.; KLAMKIN, Murray S.; MOSER, William O. J. - *Five Hundred Mathematical Challenges.* Washington/DC, MAA, 1995.

[4] BECKENBACH, Edwin; BELLMAN, Richard. - *An Introduction to Inequalities.* New York, Random House, 1961.

[5] BULLEN, P. S.; MITRINOVICS, D. S.; VASIC, P. M. - *An Means and their Inequalities.* Dordrecht, Reidel, 1988.

[6] CAMPELO, Alexandre Francisco. - *A Desigualdade Triangular e a Desigualdade de Jensen.* Fortaleza, UFC, 2013. Disponível em ¡http://www.profmatsbm.org.br/dissertações¿. Acesso em 19 out 2017.

[7] CARNEIRO, Emanuel; DE PAIVA, Francisco Antônio M.; CAMPOS, Onofe. - *Olimpíadas Cearenses de Matemática: Ensino Médio 1981-2005.* Fortaleza, Realce, 2006.

[8] CARVALHO, Valessa Z. F. Sousa. - *Funções Convexas com Aplicações em Problemas de Olimpíadas de Matemática.* Teresina, UFPI, 2013. Disponível em ¡http://www.profmat-sbm.org.br/dissertações¿. Acesso em 29 out 2017.

[9] CEVTKOVSKI, Z. - *Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012.

[10] ENGEL, Arthur. - *Problem-Solving Strategies.*. New York, Springer, 1998.

[11] FAURING, Patricia; GUTIÉRREZ, Flora; PETRAZA, Juan Carlos. - *Olimpíadas Internacionales: Problemas de Entrenamiento 2*. Buenos Aires, Red Olímpica, 2003.

[12] FAURING, Patricia; GUTIÉRREZ, Flora; SAVCHEV, Svetoslav. - *Olimpíadas Iberoamericanas de Matemática 1996-2006*. Buenos Aires, Red Olímpica, 2007.

[13] FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia. - *Mathematical Circles. Russian Experience*. USA, AMS, 1996.