



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA



**Uma perspectiva do Teorema de Menelaus através do  
software Geogebra**

**Raphael Ramon Oliveira Araujo**

**Parnaíba - 2017**

**Raphael Ramon Oliveira Araujo**

**Dissertação de Mestrado:**

**Uma perspectiva do Teorema de Menelaus através do software  
Geogebra**

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

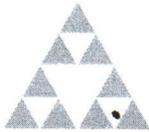
Orientador:

Prof. Dr. Paulo Sergio Marques dos Santos

Co-Orientador:

Prof. Dr. João Carlos Oliveira Souza

**Parnaíba - 2017**



PROFMAT



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



SBM

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada:

UMA PERSPECTIVA DO TEOREMA DE MENELAUS ATRAVÉS DO SOFTWARE GEÓMETRA

defendida por

RAFAEL RAMON OLIVEIRA ARAUJO

em 25 / 05 / 2017

e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Raulo de Almeida

Presidente da Banca Examinadora

João Carlos de Oliveira

Examinador

José Carlos de Oliveira

Examinador

Afonso Norberto da Silva

Examinador Externo

FICHA CATALOGRÁFICA  
Universidade Federal do Piauí  
Biblioteca Setorial Prof. Cândido Athayde – Campus Parnaíba  
Serviço de Processamento Técnico

A663p Araujo, Raphael Ramon Oliveira.

Uma perspectiva do Teorema de Menelaus através do software  
Geogebra [manuscrito] / Raphael Ramon Oliveira Araujo. – 2017.  
103 f. : il. color.

Impresso por computador (printout).

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do  
Piauí, 2017.

Orientação: Prof. Dr. Paulo Sérgio Marques dos Santos.

Co - orientação: Prof. Dr. João Carlos de Oliveira Souza.

1. Geometria Plana. 2. Teoria de Menelaus. 3. Geogebra. I. Título.

CDD: 516

*Dedico este trabalho com todo amor aos meus filhos  
Haniel Ramon e Henrique Ramon, que minha trajetória  
seja motivo de orgulho para vocês.*

# Agradecimentos

A priori agradeço a Deus por me dar saúde e força de vontade para enfrentar de cabeça erguida cada passo dado em busca de conhecimento.

A minha família, representada por Maria do Socorro Oliveira Araujo (mãe), Maria de Jesus Oliveira (avó materna), por sempre confiar no meu trabalho e nas escolhas que fiz ao longo dos anos. Em especial ao Newton Siqueira de Araujo (in memoriam), meu pai, por ter me ensinado conceitos simples de vida, que me fizeram uma pessoa melhor e pelo amor e dedicação posto em minha educação. Ao Werton Bastos (pai), por me incentivar a estudar, a Ivonilda Bastos (avó paterna) pelas palavras que me incentivaram a não parar de lutar e pela motivação através de seu exemplo.

Aos velhos amigos, Marcio Ricardo, Nadson Santos e Paulo Gomes, por serem pessoas que me motivaram nessa luta, e as novas amizades que fiz nesse mestrado, Bruno, Paulo, Ademar, Maciel, Cesar, Diogenes nós somos prova viva que a união faz a força.

Aos meus orientadores João Carlos e Paulo Marques, pelos conselhos na condução do meu trabalho.

Aos meus irmãos, Newton Rangel, Wester, Julio, Benito Neto e em especial Werton Junior e Narielle Lyne vocês sempre acreditaram que eu conseguia vencer.

Agradeço (a CAPES, ao CNPq, a FAPEPI) pelo apoio financeiro.

“A Geometria existe por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la.”.

Johannes Kepler.

# Resumo

Este trabalho tem por objetivo apresentar uma forma interativa de abordagem do Teorema de Menelaus, de modo a facilitar o aprendizado em sala de aula. Para isso iremos demonstrar o referido teorema de forma analítica utilizando algumas definições e propriedades geométricas, como razão de segmentos, ângulos relacionados através de um feixe de retas paralelas cortadas por retas transversais, semelhança de triângulos, entre outros. E depois fazemos uma demonstração utilizando o software Geogebra, com a finalidade de mostrar passagens da demonstração do mesmo, de tal forma a elucidar alguns argumentos matemáticos que necessitam de uma maturidade para a compreensão de sua abstração. Por fim apresentamos aplicações do Teorema de Menelaus em algumas questões selecionadas e o seu uso em outros teoremas e proposições que relacionam de alguma forma pontos colineares.

Palavras - chave: Geometria plana, Teorema de Menelaus, Geogebra.

# Abstract

This paper aims to present an interactive form of approach of the Menelaus Theorem, in order to facilitate the learning in the classroom. For this we will demonstrate this theorem analytically using some geometric definitions and properties, as reason of segments, related angles through a bundle of parallel lines cut by transverse lines, similarity of triangles among others. And then we do a demonstration using Geogebra software, with the purpose of showing passages of the demonstration of it, in such a way to elucidate some mathematical arguments that need to a maturity for the understanding of its abstraction. Finally we present applications of the Menelaus Theorem in some selected questions and their use in other theorems and propositions that relate somehow collinear points.

Keywords: Flat Geometry, Menelaus Theorem, Geogebra.

# Lista de figuras

- Figura 1.1: Axioma de determinação de uma reta.
- Figura 1.2: Unicidade do ponto divisor de um segmento.
- Figura 1.3: Ângulos opostos pelo vértice.
- Figura 1.4: Triângulo.
- Figura 1.5: Retas paralelas cortadas por uma transversal.
- Figura 1.6: Reta paralela a um dos lados do  $\triangle ABC$ .
- Figura 1.7: Triângulos semelhantes  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$ .
- Figura 1.8: Semelhança de triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle ADE$ .
- Figura 1.9: Segundo caso de semelhança.
- Figura 1.10: Condição para semelhança de triangulos.
- Figura 1.11: Condição para semelhança de triangulos.
- Figura 2.1: Teorema de Menelaus.
- Figura 2.2: Traça-se uma reta por C paralela a reta suporte AB.
- Figura 2.3: Ângulos congruentes.
- Figura 2.4: Triângulos semelhantes  $\triangle CPN$  e  $\triangle NAL$ .
- Figura 2.5: Triângulos semelhantes  $\triangle MPC$  e  $\triangle MLB$ .
- Figura 2.6: Recíproca do Teorema de Menelaus.
- Figura 3.1: Ferramenta polígono.
- Figura 3.2: Triângulo.
- Figura 3.3: Reta pelo lado  $\overline{BC}$  do triângulo.
- Figura 3.4: Ferramenta ponto.
- Figura 3.5: Ponto L.
- Figura 3.6: Ponto N.
- Figura 3.7: Ferramenta reta.
- Figura 3.8: Reta passando por L e N.

Figura 3.9: Ferramenta interseção de dois objetos.

Figura 3.10: Ponto de interseção entre a reta LN e a reta suporte  $r_{BC}$ .

Figura 3.11: Ponto M.

Figura 3.12: Ferramenta reta paralela.

Figura 3.13: Reta paralela ao lado  $\overline{AB}$  passando pelo vértice C do triângulo  $\triangle ABC$ .

Figura 3.14: Razão  $\frac{\overline{LA}}{\overline{AN}}$ .

Figura 3.15: Ferramenta interseção de dois objetos.

Figura 3.16: Ponto P.

Figura 3.17: Ferramenta ângulo.

Figura 3.18: Construindo o ângulo do vértice L.

Figura 3.19: Construindo o ângulo do vértice L.

Figura 3.20: Construindo o ângulo do vértice A.

Figura 3.21: Construindo o ângulo do vértice A.

Figura 3.22: Construindo o ângulo do vértice N.

Figura 3.23: Construindo o ângulo do vértice N.

Figura 3.24: Construindo o ângulo do vértice P.

Figura 3.25: Construindo o ângulo do vértice C.

Figura 3.26: Ângulo  $\widehat{P}$ .

Figura 3.27: Ângulo  $\widehat{M}$ .

Figura 3.28: Ângulo  $\widehat{C}$ .

Figura 3.29: Ângulo  $\widehat{L}$ .

Figura 3.30: Ângulo  $\widehat{B}$ .

Figura 3.31: Ângulos congruentes.

Figura 3.32: Ponto sobre a reta suporte  $r_{AB}$ .

Figura 3.33: Razão  $\frac{\overline{LA}}{\overline{AN}}$ .

Figura 3.34: Razão  $\frac{\overline{NC}}{\overline{CM}}$ .

Figura 3.35: Razão  $\frac{\overline{MB}}{\overline{BL}}$ .

Figura 3.36: Produto dos números d, e e h.

Figura 3.37: Criando uma caixa de texto.

Figura 3.38: Inserindo a fórmula que descreve a relação (3.4).

Figura 3.39: Inserindo a formula  $d \cdot e \cdot h = i$ .

Figura 3.40: Deformando o triângulo  $\triangle ABC$ .

Figura 3.41: Deformando o triângulo  $\triangle ABC$ .

Figura 3.42: Retas passando pelos pontos  $M$  e  $N$ .

Figura 4.1: Questão IME.

Figura 4.2: Questão IME.

Figura 4.3: Questão IME.

Figura 4.4: Questão olimpíada Rio Platense.

Figura 4.5: Questão olimpíada Cone Sul.

Figura 4.6: Teorema de Desargues.

Figura 4.7: Teorema de Pappus.

Figura 4.8: Prolongamento das retas  $EF$  e  $CD$ .

Figura 4.9: Teorema de Pascal.

Figura 4.10: Demonstração do Teorema de Pascal.

Figura 4.11: Reta de Simson.

Figura 4.12: Reta de Gauss - Newton.

Figura 4.13: Reta de Gauss Newton.

Figura 4.14: Baricentro.

Figura 4.15: Bissetrizes.

Figura 5.1: Interface do Geogebra.

Figura 5.2: Botão mover.

Figura 5.3: Botão ponto.

Figura 5.4: Botão reta.

Figura 5.5: Botão reta perpendicular.

Figura 5.6: Botão polígono.

Figura 5.7: Botão círculo.

Figura 5.8: Botão elipse.

Figura 5.9: Botão ângulo.

Figura 5.10: Botão Reflexão com relação a uma reta.

Figura 5.11: Botão controle deslizante.

Figura 5.12: Botão mover janela.

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>vi</b>
<b>1 Noções preliminares</b>	<b>10</b>
1.1 Noções primitivas de geometria plana. . . . .	10
1.2 Paralelismo . . . . .	13
1.3 Semelhança de triângulos . . . . .	16
<b>2 O Teorema de Menelaus</b>	<b>21</b>
<b>3 Utilização do software Geogebra para verificação da demonstração do Teorema de Menelaus.</b>	<b>27</b>
3.1 Verificação do Teorema de Menelaus com o Geogebra. . . . .	27
<b>4 Aplicação do Teorema de Menelaus</b>	<b>51</b>
4.1 Aplicação em questões. . . . .	51
4.1.1 Questão do vestibular IME - 2015/2016 . . . . .	51
4.1.2 Questão vestibular IME - 1990. . . . .	53
4.1.3 Questão Olimpíada Rioplatense 1997. . . . .	55
4.1.4 Questão da Olimpíada Cone Sul. . . . .	57
4.2 Aplicação em outros teoremas . . . . .	59
4.2.1 Teorema de Desargues . . . . .	59
4.2.2 Teorema de Pappus. . . . .	61
4.2.3 Teorema de Pascal. . . . .	63

<b>Sumário</b>	<b>x</b>
4.2.4 Reta de Simson - Wallace. . . . .	65
4.2.5 Reta de Gauss - Newton. . . . .	67
4.2.6 Baricentro. . . . .	69
4.2.7 Bissetrizes de um triângulo qualquer. . . . .	71
<b>5 Apêndice</b>	<b>73</b>
5.1 Geogebra . . . . .	73
5.2 Conhecendo o software Geogebra. . . . .	74
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>88</b>

# Introdução

O ensino de Matemática nos anos iniciais, atualmente, tem sido apresentado de forma decadente, iremos citar um trecho introdutório dos PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS DE MATEMÁTICA(6º AO 9º ANO) para esboçar esta afirmação;

*Entre os obstáculos que o Brasil tem enfrentado em relação ao ensino de Matemática, aponta-se a falta de uma formação profissional qualificada, as restrições ligadas às condições de trabalho, a ausência de políticas educacionais efetivas e as interpretações equivocadas de concepções pedagógicas.*

Em vista disso a cada evolução da grade curricular de todas as modalidades de ensino, que se dá motivada por modernizar o mesmo, observa-se decisões pedagógicas no mínimo estranhas dadas por aspectos quantitativos preterindo os aspectos qualitativos, a exemplo disso temos uma preparação, por parte de algumas secretarias de educação de alguns municípios e estados, para provas que são aplicadas a cada dois anos afim de determinar o conhecimento adquirido dos alunos, de um município ou estado, acerca de conteúdos básicos de Matemática e Português do Ensino Básico. Essas provas tem o objetivo de avaliar o ensino dos municípios e estados, divulgando assim um ranking dos municípios com as melhores médias, devido essa preocupação de ter uma melhor classificação os mesmos focam todo seu trabalho em uma preparação de conteúdos que sempre são cobrados nessas provas, deixando de lado conteúdos que são tão importantes para o conhecimento pleno de nossos alunos, com essa situação os professores ficam limitados em seus planejamentos à abordarem apenas conteúdos específicos para uma determinada prova. Porém esse não é o único fator que faz com que tenhamos resultados divergentes no processo de ensino-aprendizagem podemos citar também a falta de qualificação dos profissionais da educação entre outros aspectos, que dificultam a tarefa de ensinar com qualidade, com isso deixamos determinados conteúdos de Matemática de lado, sem a abordagem de algumas

competências fazendo com que os objetivos para que o ensino dessa disciplina deixem de resultar em aprendizagem real e significativa para os alunos. Em vista disso uma ideia que sintetiza o que deve ser feito acerca dessa realidade, esta explícita no fragmento a seguir;

*“O conhecimento matemático deve ser levado a sério sendo aplicado em sua plenitude para que possamos criar um ambiente de aprendizagem com finalidades, como podemos ver no fragmento a seguir retirado dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio;*

*As finalidades do ensino de Matemática no nível médio indicam como objetivos levar o aluno a:*

- *compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;*
- *aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;*
- *analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;*
- *desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;*
- *utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;*
- *expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;*
- *estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;*
- *reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;*

- *promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.*

*Essencial é a atenção que devemos dar ao desenvolvimento de valores, habilidades e atitudes desses alunos em relação ao conhecimento e às relações entre colegas e professores. A preocupação com esses aspectos da formação dos indivíduos estabelece uma característica distintiva desta proposta, pois valores, habilidades e atitudes são, a um só tempo, objetivos centrais da educação e também são elas que permitem ou impossibilitam a aprendizagem, quaisquer que sejam os conteúdos e as metodologias de trabalho. Descuidar do trabalho com a formação geral do indivíduo impede o desenvolvimento do pensamento científico, pois o pano de fundo das salas de aula se constitui dos preconceitos e concepções errôneas que esses alunos trazem sobre o que é aprender, sobre o significado das atividades matemáticas e a natureza da própria ciência.”*

(PCNEM - Parametros Curriculares Nacionais do Ensino Médio.)

Sendo assim essa construção do conhecimento pleno em um mundo cada dia mais moderno e conectado exige que os professores estejam cada vez mais atualizados a uma forma de ensinar, aprimorando e inovando o processo de ensino e aprendizagem dentro das salas de aula, os educadores atualmente, devem buscar novos procedimentos educacionais com softwares educacionais que podem ser incorporados como recursos pedagógicos, como ferramentas para o ensino, facilitadores da aprendizagem, promovendo o desenvolvimento de habilidades e estimulando a construção do conhecimentos de forma interativa.

Contudo, esse trabalho tem o desafio de apresentar de maneira elegante e sob uma outra perspectiva o Teorema de Menelaus, um dentre tantos teoremas da geometria que foram esquecidos, de forma a apresentar para professores e alunos que tenham interesse em aprofundar seu conhecimento e de uma maneira interativa aprender com o uso de um software livre chamado Geogebra. O Geogebra é um programa atribuído à construção de conceitos e objetos matemáticos. É uma ferramenta de estudo que abrange tópicos de geometria, álgebra e cálculo. Esse software produz uma visão que ultrapassa o plano imaginário proposto por uma educação tradicional representada fisicamente por um quadro, apagador, pinceis e livros, proporcionando através de seus recursos a ideia de movimento correspondente à ação de construção dos conceitos algébricos e geométricos, deste modo

o aluno pode observar o efeito gráfico e algébrico.

O trabalho em questão tem por base a apresentação do Teorema de Menelaus através do software Geogebra com o uso de suas ferramentas de construções geométricas e algébricas cuja sua função precípua no ensino é a de permitir a aplicação das mesmas para materializar ideias afim de melhorar a compreensão dos conceitos matemáticos logo vem a idéia de usa-lo para a aprendizagem do Teorema de Menelaus, que será apresentada de forma interativa mostrando aspectos de uma demonstração analítica do teorema que pode ser questionada por aqueles alunos que tenham uma maior dificuldade de entender algumas propriedades matemáticas. Assim daremos ênfase ao uso do Geogebra para demonstração do Teorema de Menelaus onde mostraremos passagens do teorema citado de tal forma a elucidar passagens que serão afirmadas com clareza e exatidão dos recursos do software Geogebra isso fará com que seja notabilizado assim a potencialidade do teorema para resolução de problemas olímpicos e de vestibulares, como IME, que iremos selecionar e que relacionam o conteúdo de triângulos e colinearidade.

No primeiro capítulo, Noções Preliminares, apresenta-se definições e demonstrações de resultados que serão úteis nas seções posteriores. Para fundamentação do mesmo utilizo o livro de Geometria Euclidiana Plana da Coleção do Professor de Matemática assim como o livro Fundamentos da Matematica Elementar.

No segundo capítulo, O Teorema de Menelaus, fazemos a demonstração analítica do Teorema de Menelaus onde para isso tivemos como fundamentação livros como;

- Coleção Elementos da Matemática;
- Coleção PROFMAT Geometria;

Algumas dissertações e monografias que falam a respeito do Teorema de Menelaus, como;

- Os Teoremas Esquecidos Pelos Professores de Geometria Plana do Ensino Médio;

Autor Diego Saochine Alves sob orientação do Prof. Dr. Claudemir Aniz. Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso do sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Para este trabalho o autor apresenta, através de demonstrações detalhadas com muitas imagens para facilitar o entendimento de alunos e professores do Ensino

Médio, alguns resultados importantes como o teorema de Menelaus e o teorema de Ceva que com o auxílio do triângulo medial e o triângulo órtico, provamos que às medianas, bissetrizes, alturas e mediatrizes são concorrentes. Também apresentamos alguns teoremas sobre quadriláteros convexos como os teoremas de Varignon e Brahmagupta. E para finalizar a reta de Euler, importante teorema aplicado no ensino médio para triângulos isósceles e equiláteros, mas que na verdade se aplicam a qualquer triângulo.

Palavras-chave: Teorema de Menelaus, Teorema de Ceva, Teorema de Brahmagupta e Reta de Euler.

- Os Teoremas de Menelaus e Ceva

Autor José Constantino da Silva sob orientação do Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera. Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT DM-UFRPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

O autor apresenta dois importantes teoremas da geometria plana. O primeiro trata da colinearidade de três pontos sobre as retas suportes dos lados de um triângulo, conhecido como o teorema de Menelaus e data do século I. O segundo é o teorema de Ceva, que data do século XVII e se refere à concorrência de três segmentos que unem cada vértice a qualquer ponto do lado oposto de um triângulo. Apresentamos diferentes demonstrações dos referidos teoremas utilizando noções conhecidas da geometria, como: proporcionalidade de segmentos, congruência e semelhança de triângulos, cálculo de área, trigonometria, geometria vetorial e coordenadas baricêntricas. Tratamos das correspondentes versões de tais teoremas na geometria espacial. Inicialmente, fornecemos dados históricos dos teoremas e concluimos com algumas aplicações.

Palavras-chave: Menelaus, Ceva, Cevianas, Colinearidade e Concorrência.

- Colinearidade e Concorrência na Geometria Euclidiana Plana;

Autor Klaryssa Junckes Gualberto sob orientação do Prof. Ms. José Luiz Rosas Pinho. Este trabalho foi apresentado ao curso de graduação em matemática da Universidade Federal de Santa Catarina, como trabalho de conclusão de curso, para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Neste trabalho o autor apresenta resultados de colinearidade e concorrência muitas vezes não são vistos no Ensino Médio nem em cursos de licenciatura em Matemática, pois suas demonstrações são consideradas longas e complicadas. Para que se possa provar um teorema é preciso que se tenha uma compreensão razoável da exposição contida nele, bem como alguns argumentos básicos e adequados. Assim com a ajuda de dois teoremas clássicos, o teorema de Menelaus e o teorema de Ceva, que serão apresentados no decorrer do trabalho, e com alguns resultados básicos de Geometria, elas podem ser simplificadas tornando-se mais curtas e simples. A Geometria Euclidiana, é estudada nas escolas desde o Ensino Fundamental, e foi construída baseada no texto do matemático grego Euclides, Elementos, escrito por volta do ano 300 a.C. Esta geometria usa o método dedutivo (ou axiomático), que consiste em iniciar com certas afirmações chamadas "axiomas" ou "postulados", as quais aceitamos sem justificativas, e deduzir, através das demonstrações, outras afirmações, como os teoremas. Com o objetivo de apresentar aos interessados alguns teoremas da Geometria Euclidiana que não são vistos na graduação, e utilizar argumentos que facilitem suas demonstrações, pretende-se com este trabalho levantar questões e discussões que proporcionarão o desenvolvimento de assuntos da geometria, complementando e auxiliando no seu aprendizado.

É um material teórico do POTI (Programa Olímpico de Treinamento Intensivo), onde faz a demonstração do teorema e possui exercícios a respeito do tema. A demonstração feita em nosso trabalho é apresentada de uma forma diferente dos livros e algumas dissertações que foram estudados, pois eles utilizam o Teorema de Tales para auxiliar na demonstração do Teorema de Menelaus, já nesse trabalho fazemos uma demonstração utilizando semelhança entre triângulos que se dá pelo critério de congruência entre ângulos com uma riqueza maior de detalhes.

No terceiro capítulo é feita a demonstração do Teorema de Menelaus com o uso do software Geogebra, para isso fez-se necessário um estudo prévio do software no qual utilizamos um livro chamado Aprendendo Matemática com o Geogebra e o próprio manual do software além de uma informação mais detalhada a respeito da importância do software para o ensino da Matemática.

No quarto capítulo é feita uma representação de aplicações do Teorema de Menelaus em questões que foram retiradas de vestibulares do IME, olimpíada Rioplatense e olim-

piada Cone Sul, e teoremas que necessitam do seu uso em alguma passagem em suas demonstrações, para isso utilizamos uma fundamentação baseada em algumas dissertações e monografias sobre teoremas que falam de alguma forma a respeito de colinearidade, como:

- Alguns Teoremas Clássicos da Geometria Sintética e Aplicações;

Autor Vinícius Paulo de Freitas sob orientação do Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira. Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Neste trabalho o autor procura fazer uma abordagem simples de alguns teoremas clássicos da Geometria Euclidiana Plana e torná-los mais conhecidos, pois embora tenham um grande papel na resolução de muitos problemas geométricos, estão de certa forma esquecidos tanto no ensino básico quanto no ensino de graduação. No intuito de resgatar tais teoremas, desenvolvendo assim habilidades em Geometria, exploramos os seguintes teoremas: Stewart, Menelaus, Ceva, Reta de Simpson-Wallace, Ptolomeu, Hiparco, Napoleão, Miquel, Desargues, Pascal, Pappus e Feuerbach. Para as demonstrações destes teoremas, fizemos o uso de alguns resultados da Geometria Plana e da Geometria Inversiva. Acreditamos que tanto o enfoque da realização desse trabalho, com a utilização da Geometria Inversiva, por exemplo, como os teoremas clássicos, que utilizamos simplesmente métodos elementares da Geometria Sintética, pode servir para a melhoria do ensino-aprendizagem de Geometria Euclidiana Plana e possivelmente servir de elemento motivador para alunos e professores que busquem aprimorar seus conhecimentos em Geometria nos seus diversos desdobramentos.

Palavras-chave: Ensino -Aprendizagem, Geometria Euclidiana, Teorema Clássicos, Geometria Inversiva.

- Resgatando Alguns Teoremas Clássicos da Geometria Plana;

Autor Darilene Maria Ribeiro Macedo sob orientação do Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade. Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemá-

tica da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Neste trabalho o autor mostra que o estudo da Geometria possibilita um campo rico e atraente de manipulações, pois a Geometria está presente na vida cotidiana de todos os cidadãos, por vezes de forma explícita e por vezes de forma sutil. Apresentamos, porém, neste trabalho, diversas situações que mostram que a Geometria vai muito além de fórmulas. Fizemos uma abordagem simples de alguns teoremas da Geometria plana relacionados aos triângulos focando nos teoremas de Stewart, Ceva, Menelaus e Napoleão, bem como suas demonstrações detalhadas e didaticamente compreensíveis. Tendo como um dos objetivos torná-los mais divulgados, de modo que possam ser utilizados como ferramentas para complementarem e auxiliarem na aprendizagem da Geometria plana. Pois mesmo tendo grande papel na resolução de muitas questões, são pouco usados. E concluímos o nosso trabalho com algumas aplicações, inclusive de exames vestibulares, esperando que sirvam para despertar o interesse e aguçar a curiosidade do leitor para buscar aprofundar mais os conhecimentos nesta área.

Palavras-chave: Menelaus, Ceva, Stewart e Napoleão.

- Estudo sobre Colinearidade e Concorrência;

Autor Anderson Fonseca Marques sob orientação do Prof. Jorge Sabatucci. Monografia apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMG, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Especialista em Matemática, com ênfase em Geometria.

Neste trabalho é possível estudar alguns dos mais importantes teoremas envolvendo a colinearidade e concorrência como Menelau de Alexandria e Brianchon, todos demonstrados com aplicação nos Fundamentos da Geometria Plana Euclidiana. O estudo do comportamento de retas concorrentes, pontos colineares e medidas algébricas de segmentos são os fatos mais marcantes no desenvolvimento das demonstrações.

- Colinearidade e Concorrência na Geometria Euclidiana Plana;
- Colinearidade e Concorrência em Olimpíadas Internacionais de Matemática: uma

reflexão voltada para o ensino da Geometria Plana no Brasil.

Autor Ronald Alexandre Martins sob orientação do Prof. Dr. Kellcio Oliveira Araújo. Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática, pelo Departamento de Matemática da Universidade de Brasília.

O autor relata neste trabalho que as olimpíadas de Matemática estão cada vez mais ganhando espaço dentro das escolas brasileiras. Esse fato é observado em virtude da crescente participação e interesse dos alunos nas competições nacionais e regionais a cada ano. Isso ocorre porque essas competições, em si, não requerem do aluno, como muitos pensam, memorizações injustas de fórmulas e o conhecimento total da disciplina, mas apenas o conhecimento de alguns conceitos básicos, um raciocínio rápido e certa criatividade. A Geometria sempre esteve presente em todas as olimpíadas de Matemática, apresentando-se como um dos tópicos que os alunos encontram maior dificuldade. Consciente da limitada atenção dada ao ensino da Geometria no Brasil, oferece-se nesse trabalho uma pequena contribuição para ampliar o seu ensino nos bancos escolares, principalmente quanto ao tema Colinearidade e Concorrência, recorrente em diversas olimpíadas, tanto em nível nacional quanto internacional, porém esquecido pelos livros de Matemática atuais. O autor apresenta dados recentes sobre as olimpíadas de Matemática no Brasil e no mundo, e resgata conceitos como os de homotetia, inversão, polaridade, divisão harmônica, circunferência de Apolônio, eixo radical, quadriláteros completos, as retas de Euler, Steiner, Housel, Simson-Wallace, Gauss-Newton, além dos pontos notáveis de Gergonne, Lemoine, Nagel e teoremas como os de Menelaus, Ceva, Arquimedes, Desargues, Pascal, Brianchon, Pappus, Monge, Brahmagupta, Miquel, entre outros.

Palavras-chaves: Geometria plana; olimpíadas; colinearidade; concorrência.

E finalmente apresentamos um apêndice sobre o software Geogebra explicitando todas as suas funcionalidades.

# Capítulo 1

## Noções preliminares

Neste capítulo apresentaremos noções primitivas da geometria, axiomas, lemas, proposições e teoremas da Geometria Plana, que serão utilizados para a demonstração do Teorema de Menelaus.

### 1.1 Noções primitivas de geometria plana.

Na geometria euclidiana plana os elementos primitivos são denominados ponto, reta e plano. Os axiomas são as leis que os elementos primitivos devem satisfazer. Essas leis são regras que precisam ser compreendidas de forma intuitiva e que ficam claras em desenhos, mas que precisam ser formalmente estabelecidas segundo critérios rigorosos da lógica matemática.

**Axioma 1.** *Se  $A$  e  $B$  são dois pontos distintos do plano, então existe uma única reta  $l$  tal que  $A$  e  $B$  pertencem a  $l$ .*

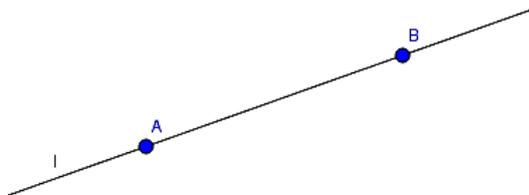


Figura 1.1: Axioma de determinação de uma reta.

Cabe aqui chamar a atenção para notação que usaremos antes de continuarmos. Seguindo a tradição, denotaremos por letras latinas maiúsculas ( $A$ ,  $B$ , etc.) os pontos do plano, e por letras latinas minúsculas ( $l$ ,  $m$ , etc.) as retas. Sabendo que este trabalho é sobre um teorema da geometria, convém utilizar uma linguagem geométrica. Assim, se um ponto  $A$  pertence a uma reta  $l$  (linguagem da teoria de conjuntos), diremos também que a reta  $l$  passa pelo ponto  $A$  ou que  $A$  é um ponto da reta  $l$  (linguagem geométrica).

**Definição 1.** Dizemos que um conjunto de pontos é colinear se todos os pontos estão contidos em uma mesma reta. Também dizemos que os pontos são colineares ou estão alinhados. No caso contrário, isto é, quando nem todos os pontos estão contidos em uma mesma reta, dizemos que o conjunto é não colinear ou que os pontos são não colineares ou ainda que não estão alinhados.

**Axioma 2.** Para cada par de pontos  $A$ ,  $B$  do plano existe um único número real associado, denotado por  $\overline{AB}$ , satisfazendo as propriedades:

- (a)  $\overline{AB} \geq 0$ ;
- (b)  $\overline{AB} = 0$  se, e somente se,  $A = B$ ;
- (c)  $\overline{AB} = \overline{BA}$ .

**Axioma 3.** Se  $A$ ,  $B$  e  $C$  são três pontos alinhados, então um deles está entre os outros dois.

**Definição 2.** O conjunto dos pontos que estão entre dois pontos  $A$  e  $B$ , incluindo estes, é um segmento (da reta  $\overline{AB}$ ).

**Lema 1.** (Unicidade do ponto divisor). Sejam os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  sobre uma reta  $f$ . É única a posição com que o ponto  $C$  divide o segmento  $\overline{AB}$  numa razão  $t$  dada.

**Demonstração:** Suponha que  $C$  divide o segmento  $\overline{AB}$  na razão  $t$ . Vamos dividir a prova, sendo  $C$  um ponto interior ou exterior ao segmento  $\overline{AB}$ . Porém aqui faremos a demonstração para um ponto interior ao segmento.

Caso  $C$  seja interior ao segmento  $\overline{AB}$ . Consideremos que o ponto  $D$  também divide interiormente o segmento  $\overline{AB}$  na mesma razão  $t$ . Veja figura abaixo.



Figura 1.2: Unicidade do ponto divisor de um segmento.

Se  $t = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$ , então podemos escrever da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} + \frac{\overline{CB}}{\overline{CB}} &= \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} + \frac{\overline{DB}}{\overline{DB}} \\ \Rightarrow \frac{\overline{AC} + \overline{CB}}{\overline{CB}} &= \frac{\overline{AD} + \overline{DB}}{\overline{DB}} \\ \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} \\ \Rightarrow \overline{CB} &= \overline{DB} \\ \Rightarrow C &= D. \end{aligned}$$

Portanto podemos concluir que, C é divisor único interior ao segmento  $\overline{AB}$  na razão t.

□

**Definição 3.** Um par de semirretas com mesma origem é um ângulo. As semirretas que formam um ângulo são os seus lados, e a origem das mesmas é o vértice do ângulo. Se as semirretas são denotadas por  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  denotamos o ângulo correspondente por  $\widehat{BAC}$ . Se as semirretas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  são coincidentes então dizemos que  $\widehat{BAC}$  é um ângulo nulo; e se são semirretas opostas de uma mesma reta, então o denominamos ângulo raso. Diremos que um ângulo é não trivial se não for nem raso nem nulo.

**Definição 4.** Os ângulos de mesmo vértice e cujos lados são semirretas opostas com mesmas retas-suporte são denominados ângulos opostos pelo vértice, abreviado por ângulos O.P.V. Na figura abaixo os ângulos  $\widehat{AEC}$  e  $\widehat{BED}$  são O.P.V. assim como os seus suplementares  $\widehat{BEC}$  e  $\widehat{AED}$ .

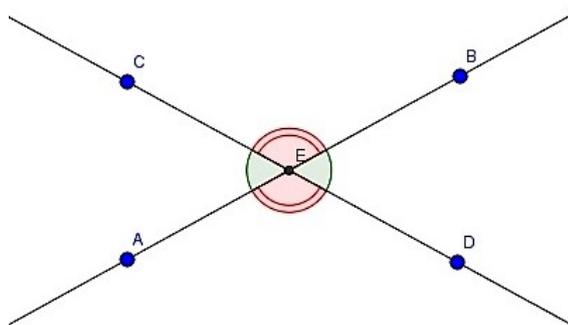


Figura 1.3: Ângulos opostos pelo vértice.

**Proposição 1.** *Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.*

**Definição 5.** *Um triângulo é a figura formada pela união de três segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  onde A, B e C são pontos não colineares. O triângulo determinado pelos pontos A, B e C será denotado por  $\triangle ABC$ , ou seja,*

$$\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}.$$

Os pontos A, B e C são os vértices de  $\triangle ABC$ , e os segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  são seus lados ou suas arestas. Os ângulos correspondentes aos vértices de um triângulo serão designados pelas letras correspondentes, ou seja,  $\hat{A} = \widehat{BAC}$ ,  $\hat{B} = \widehat{ABC}$  e  $\hat{C} = \widehat{ACB}$

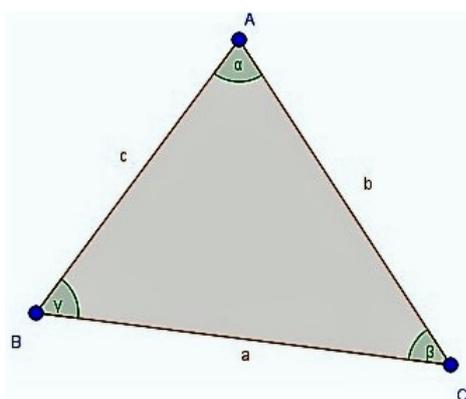


Figura 1.4: Triângulo.

## 1.2 Paralelismo

**Axioma 4.** *(Axioma das paralelas). Por um ponto fora de uma reta dada pode-se traçar uma única reta paralela a esta reta.*

**Definição 6.** Duas retas coplanares  $r$  e  $s$  são paralelas se  $r$  e  $s$  não possuem pontos em comum, ou seja,  $r \cap s = \emptyset$  como conjuntos. Denotaremos esta relação por  $r \parallel s$ .

**Teorema 1.** Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos internos alternados são congruentes.

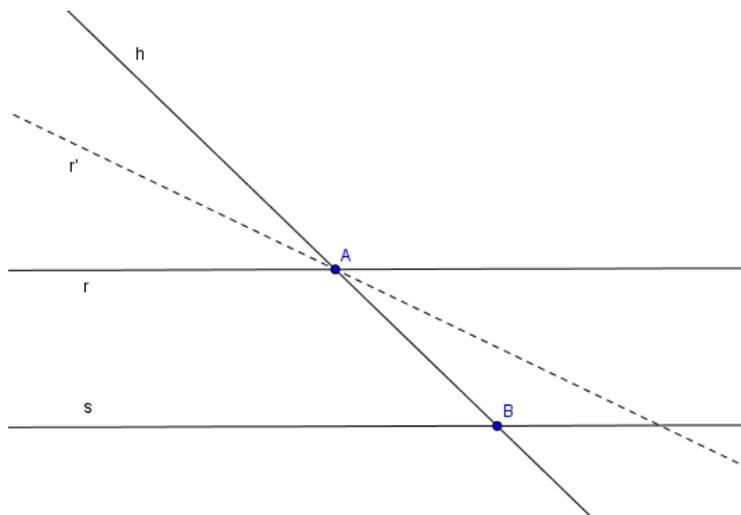


Figura 1.5: Retas paralelas cortadas por uma transversal.

**Demonstração:** Sejam  $r$  e  $s$  duas retas paralelas cortadas por uma transversal  $h$  nos pontos  $A$  e  $B$ ; respectivamente. Sabemos que existe somente uma reta  $r'$  passando por  $A$  formando ângulo interior alternado com  $s$  congruentes. Pela relação de congruência entre os ângulos alternos internos, segue que  $r'$  e  $r$  são paralelas. Pelo Axioma das Paralelas, temos que  $r$  coincide com  $r'$ .

**Teorema 2.** Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo, corta os outros dois lados então, ela os divide na mesma razão.

**Demonstração.** Seja  $\triangle ABC$  um triângulo. Considere uma reta paralela ao lado  $\overline{BC}$  que corta os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente, nos pontos  $D$  e  $E$ , como indicado na figura 1.6,

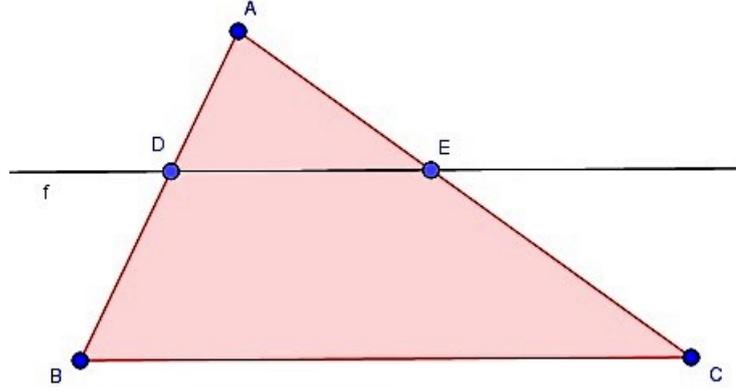


Figura 1.6: Reta paralela a um dos lados do  $\triangle ABC$ .

devemos provar que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}.$$

Para isto, tome um segmento  $\overline{AP_1}$  na semirreta  $\overrightarrow{AB}$ , de modo que as razões  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AP_1}}$  e  $\frac{\overline{AD}}{\overline{AP_1}}$  não sejam números inteiros. Considere na semirreta  $\overrightarrow{AB}$  os pontos  $P_1, P_2, \dots, P_k, \dots$ , tais que

$$k \cdot \overline{AP_1} = \overline{AP_k}, \quad \forall k \geq 2.$$

existem, então, dois números inteiros  $m$  e  $n$ , tais que  $D$  está entre  $P_m$  e  $P_{m+1}$  e  $B$  está entre  $P_n$  e  $P_{n+1}$ . Tem-se portanto  $m \cdot \overline{AP_1} < \overline{AD} < (m+1) \cdot \overline{AP_1}$  e  $n \cdot \overline{AP_1} < \overline{AB} < (n+1) \cdot \overline{AP_1}$ . podemos concluir destas desigualdades que

$$\frac{m}{n+1} < \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} < \frac{m+1}{n}. \quad (1.1)$$

Traçamos pelos pontos  $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$  retas paralelas a  $\overline{BC}$ . Estas retas cortam a semirreta  $\overrightarrow{AC}$  em pontos  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n+1}$ , os quais também satisfazem a

$$k \cdot \overline{AQ_1} = \overline{AQ_k},$$

para todo  $k$ ,  $2 \leq k \leq n+1$ . Além disso, o ponto  $E$  encontra-se entre  $Q_m$  e  $Q_{m+1}$  e o ponto  $C$  entre  $Q_n$  e  $Q_{n+1}$ . O mesmo raciocínio feito acima pode ser repetido aqui, obtendo-se como resultado a desigualdade

$$\frac{m}{n+1} < \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} < \frac{m+1}{n}. \quad (1.2)$$

As inequações (1.1) e (1.2) permitem - nos concluir que

$$\left| \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} - \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \right| < \frac{m+1}{n} - \frac{m}{n+1}. \quad (1.3)$$

como  $m \leq n$  então, temos

$$\frac{m+1}{n} - \frac{m}{n+1} = \frac{m+n+1}{n \cdot (n+1)} < \frac{2n+2}{n \cdot (n+1)} = \frac{2}{n},$$

ou seja, as razões  $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$  e  $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$  diferem não mais do que  $\frac{2}{n}$ . Quanto menor for  $AP_1$  tanto maior será o número  $n$  e tanto menor será o quociente  $\frac{2}{n}$ . Como o lado esquerdo da desigualdade (1.3) não depende de  $n$ , só podemos concluir que os quocientes  $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$  e  $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$  são iguais, como queríamos demonstrar.

□

### 1.3 Semelhança de triângulos

**Definição 7.** Dizemos que dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  são semelhantes se existe uma correspondência entre os vértices  $A \longleftrightarrow D$ ,  $B \longleftrightarrow E$  e  $C \longleftrightarrow F$ , tal que  $\widehat{A} = \widehat{D}$ ,  $\widehat{B} = \widehat{E}$ ,  $\widehat{C} = \widehat{F}$  e;

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}} = k.$$

**Observação:** O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de razão de proporcionalidade, ou razão de semelhança entre os dois triângulos.

**Notação:** Usaremos a notação  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  para indicar que os dois triângulos são semelhantes e a correspondência entre os vértices é dada exatamente na ordem em que eles aparecem.

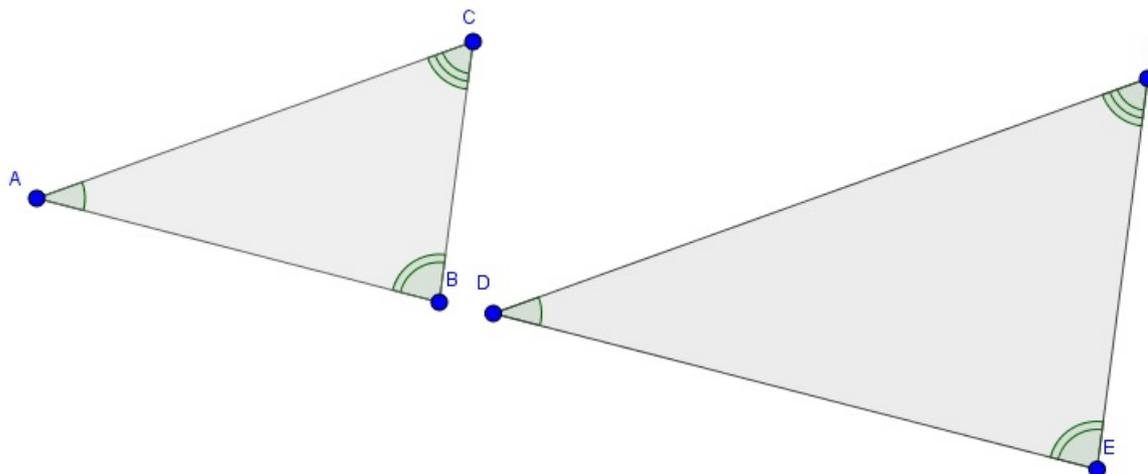


Figura 1.7: Triângulos semelhantes  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$ .

**Teorema 3.** *Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.*

**Demonstração:** Para provarmos a semelhança entre os triângulos  $\triangle ADE$  e  $\triangle ABC$ , precisamos provar que eles têm ângulos ordenadamente congruentes e lados correspondentes proporcionais.

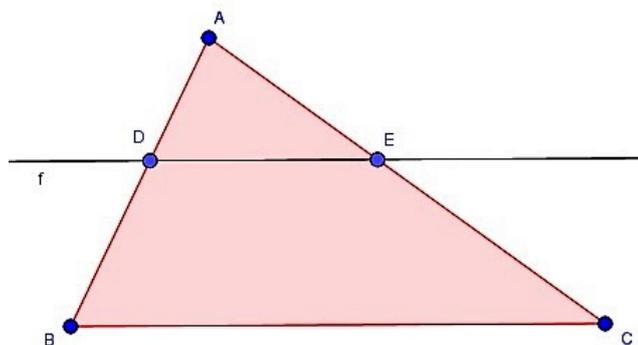


Figura 1.8: Semelhança de triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle ADE$ .

Como a reta  $\overline{DE}$  é paralela a reta  $\overline{BC}$ , temos que  $\widehat{D} = \widehat{B}$  e  $\widehat{E} = \widehat{C}$ . Além disso, o ângulo  $\widehat{A}$  é comum ao  $\triangle ADE$  e  $\triangle ABC$ , provando a primeira parte. Pelo teorema 3 temos que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}. \quad (1.4)$$

Traçando por E uma reta paralela ao lado  $\overline{AB}$ , seja F o ponto de interseção dessa reta com o lado  $\overline{BC}$ . Formamos o paralelogramo BDEF.

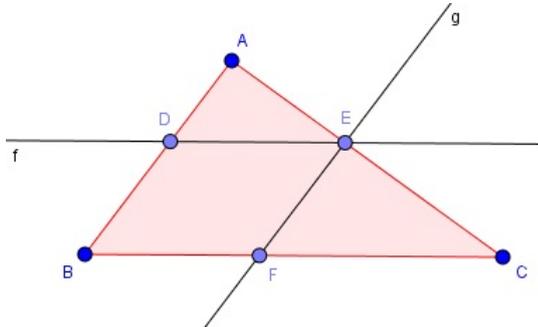


Figura 1.9: Semelhança de triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle ADE$ .

Observe que, do paralelismo entre  $\overline{EF}$  e  $\overline{BA}$ , tem-se  $\overline{DE} = \overline{BF}$  logo temos

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}. \quad (1.5)$$

de (1.4) e (1.5), temos que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}.$$

□

O próximo teorema afirma que não é necessário verificar todas as condições da definição de semelhança de triângulos, basta verificar algumas delas. Ele é conhecido também como o "segundo caso de semelhança de triângulos", a fim de que os próximos casos de semelhança correspondam de forma natural.

**Teorema 4.** (*Caso AA de semelhança*). Se em dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle EFG$  tem - se  $\hat{A} = \hat{E}$ ,  $\hat{B} = \hat{F}$ , então  $\triangle ABC \sim \triangle EFG$ .

**Demonstração:** Como a soma dos ângulos de um triângulo é  $180^\circ$ , então a congruência dos ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{E}$  e dos ângulos  $\hat{B}$  e  $\hat{F}$  acarreta na congruência dos ângulos  $\hat{C}$  e  $\hat{G}$ . Resta provar que os lados são proporcionais. Para isto, tome na semirreta  $\overrightarrow{EF}$  o ponto H, de modo que  $\overline{EH} = \overline{AB}$ . Pelo ponto H trace uma reta paralela a  $\overline{FG}$ . Esta corta a semirreta  $\overrightarrow{EG}$  num ponto J, formando um triângulo  $\triangle EFG$  que é congruente ao triângulo  $\triangle ABC$ , já que  $\hat{A} = \hat{E}$ ,  $\overline{AB} = \overline{EH}$  e  $\hat{B} = \hat{F} = \hat{EHJ}$ . Esta última congruência deve-se ao paralelismo de  $\overline{JH}$  e  $\overline{GF}$ . Segue-se do teorema 3 que

$$\frac{\overline{EH}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EJ}}{\overline{EG}} \tag{1.6}$$

como  $\overline{EH} = \overline{AB}$  e  $\overline{EJ} = \overline{AC}$  então, da equação (1.6) obtemos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}.$$

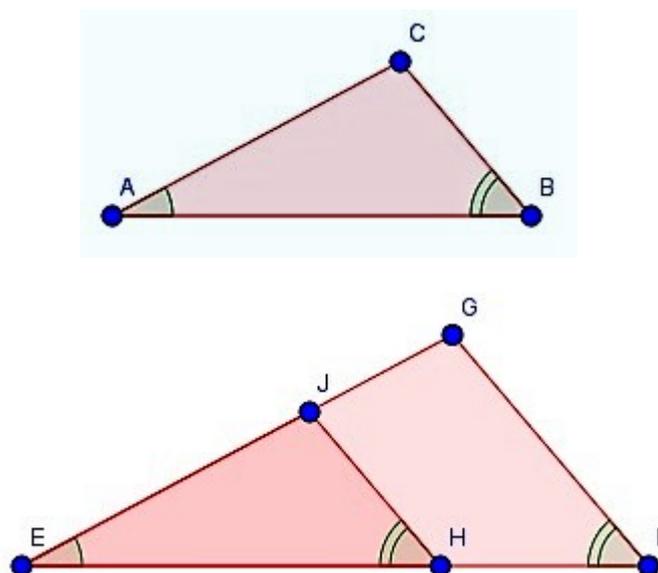


Figura 1.10: Segundo caso de semelhança.

de maneira análoga, demonstramos que  $\frac{\overline{AC}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{GF}}$ .

□

O seguinte teorema será referido como primeiro caso de semelhança de triângulos.

**Teorema 5.** (primeiro caso de semelhança) *Se, em dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle EFG$  tem-se  $\hat{A} = \hat{E}$  e  $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$ , então, os triângulos são semelhantes.*

**Demonstração:** Construindo um triângulo  $\triangle HIJ$  que tenha  $\overline{HI} = \overline{EF}$ ,  $\hat{H} = \hat{A}$  e  $\hat{I} = \hat{B}$ .

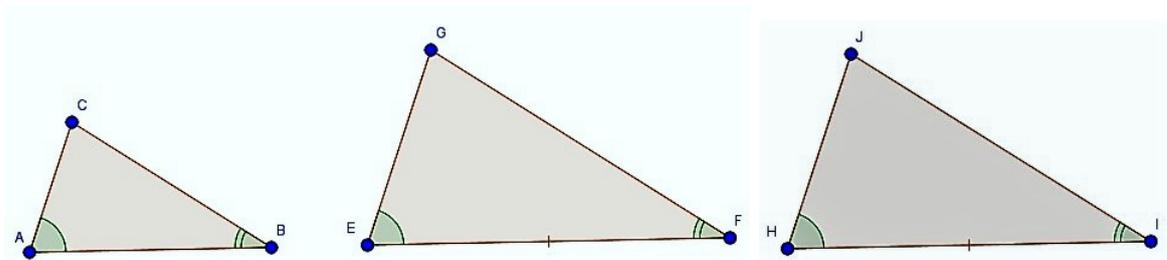


Figura 1.11: Condição para semelhança de triângulos.

de acordo com o teorema 5, os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle HIJ$  são semelhantes. Por conseguinte

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HJ}}. \quad (1.7)$$

como  $\overline{HI} = \overline{EF}$ , a hipótese  $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$  e a equação (1.6) implicam que

$$\overline{HJ} = \overline{EG}.$$

por construção  $\overline{HI} = \overline{EF}$  e  $\hat{H} = \hat{A} = \hat{E}$ . Podemos concluir, pelo primeiro caso de congruência de triângulos, que os triângulos  $\triangle EFG$  e  $\triangle HIJ$  são congruentes. Como já sabíamos que  $\triangle ABC$  e  $\triangle HIJ$  eram semelhantes, podemos concluir facilmente que  $\triangle ABC$  e  $\triangle EFG$  são semelhantes.

□

**Teorema 6.** *Se em dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle EFG$ , tem-se  $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}}$ , então os dois triângulos são semelhantes.*

**Demonstração:** Construindo um triângulo  $\triangle HIJ$  que tenha  $\hat{H} = \hat{A}$ ,  $\overline{HI} = \overline{EF}$  e  $\overline{HJ} = \overline{EG}$ . Segue, então, da hipótese que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HJ}}.$$

Portanto de acordo com o teorema 6, os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle HIJ$  são semelhantes.

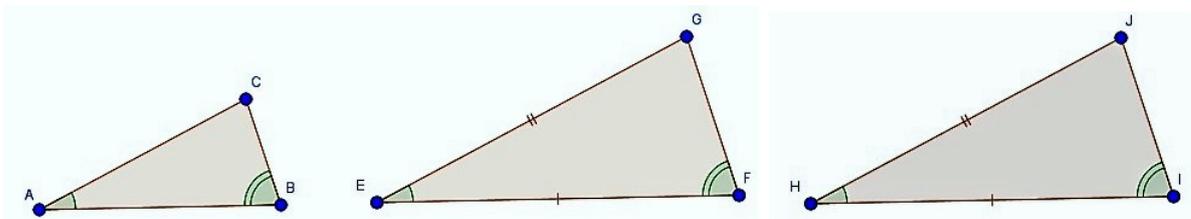


Figura 1.12: Condição para semelhança de triângulos.

Decorre que além da última igualdade acima também ocorre  $\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{IJ}}$ . Segue que da hipótese do teorema que  $\overline{IJ} = \overline{FG}$ . Como já tínhamos que  $\overline{HI} = \overline{EF}$  e  $\overline{HJ} = \overline{EG}$  (por construção), então pelo terceiro caso de congruência de triângulos,  $\triangle ABC$  e  $\triangle HIJ$  são congruentes. Como  $\triangle HIJ$  e  $\triangle ABC$  são semelhantes concluímos que  $\triangle ABC$  e  $\triangle EFG$  são também semelhantes. Isto conclui a prova do teorema.

□

## Capítulo 2

# O Teorema de Menelaus

Menelaus de Alexandria, nascido por volta do ano 70d.C. em Alexandria no Egito, possivelmente permaneceu até a sua juventude, mudando-se posteriormente para Roma dedicou seus estudos a Astronomia e Geometria.

Téon de Alexandria (335 – 405), menciona um tratado de Cordas num círculo, em seis livros, escrito por Menelaus de Alexandria, que assim como vários outros de seus tratados se perdeu com o tempo. Há registros de Ptolomeu (90 – 168), sobre observações astronômicas feitas por Menelaus em Roma. Sabe-se que ele continuou os trabalhos de Hiparco (190 – 126a.C.) sobre trigonometria e escreveu "O Livro das Proposições Esféricas", "Sobre o Conhecimento dos Pesos e a Distribuição de Diferentes Corpos", três livros sobre "Elementos de Geometria" com vários teoremas e "O Livro sobre o Triângulo". Acredita-se ainda que Menelaus teria escrito um texto sobre mecânica. Desses livros apenas o primeiro chegou aos nossos dias o seu tratado *Sphaerica*, em três volumes sobre esféricos, que se preservou através de uma tradução árabe e é o trabalho mais antigo conhecido sobre trigonometria esférica. O Livro I desse tratado, estabelece uma base teórica para o estudo dos triângulos esféricos, assim como Euclides (330a.C. – 275a.C.), fez para os triângulos planos, como teoremas usuais de congruência e teoremas sobre triângulos isósceles, entre outros. Menelaus foi o primeiro a escrever a definição de triângulos esféricos. Nesse livro Menelaus apresenta um teorema que não possui um análogo na geometria plana:

*“Dois triângulos esféricos são congruentes quando os ângulos correspondentes são iguais.”<sup>1</sup>*

Nessa obra considerou triângulos na esfera e provou, dentre outros resultados, que a soma

---

<sup>1</sup>Não fazia distinção entre triângulos esféricos congruentes e simétricos

dos seus ângulos internos é maior que  $180^\circ$ . O Livro II, trata de teoremas de interesse da astronomia, e no livro III, se aborda o desenvolvimento da trigonometria esférica. Nesse livro encontramos o teorema que leva o seu nome, que veio dar uma contribuição valiosa ao próprio desenvolvimento da geometria através dos tempos. O trabalho de Menelaus marcou um ponto importante na trigonometria esférica, tendo o seu trabalho sido aplicado em Astronomia. Em Alexandria, Menelaus ainda desenvolveu estudos sobre a aceleração da gravidade onde se supõe que tenha morrido nessa cidade por volta do ano 130d.C.

O Teorema de Menelaus que em breve iremos demonstrar é uma ferramenta muito importante para resolução de problemas de colinearidade. Para sua demonstração vamos utilizar noções básicas de geometria euclidiana plana, tais como retas, segmentos de reta, razão de segmentos de reta, retas paralelas, ângulos determinados por um feixe de retas paralelas que concorrem com retas transversais e semelhança entre triângulos. Ressaltamos que essas noções de geometria foram abordadas nos preliminares.

O Teorema de Menelaus fala de um triângulo que é inteceptado por uma reta ou segmento de reta em suas retas suportes determinadas por seus lados em três pontos distintos, onde existe uma relação que prova essa colinearidade.

**Teorema 7.** *(Teorema de Menelaus.)* Sejam três pontos L, M e N localizados respectivamente nas retas suportes dos lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{CA}$  de um triângulo  $\triangle ABC$  (qualquer) e diferentes dos vértices. Então L, M e N são colineares se, e somente se,

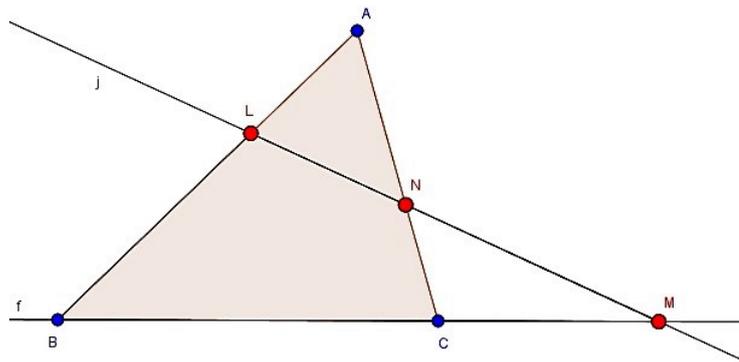


Figura 2.1: Teorema de Menelaus.

$$\frac{\overline{LA}}{\overline{AN}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{CM}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{BL}} = 1.$$

**Demonstração:** Sejam o triângulo  $\triangle ABC$  e os pontos  $L$ ,  $M$  e  $N$  colineares pertencentes as retas suportes  $r_{AB}$ ,  $r_{BC}$  e  $r_{CA}$ , respectivamente. Pelo vértice  $C$ , traçamos uma reta  $g$  paralela a reta suporte  $r_{AB}$ .

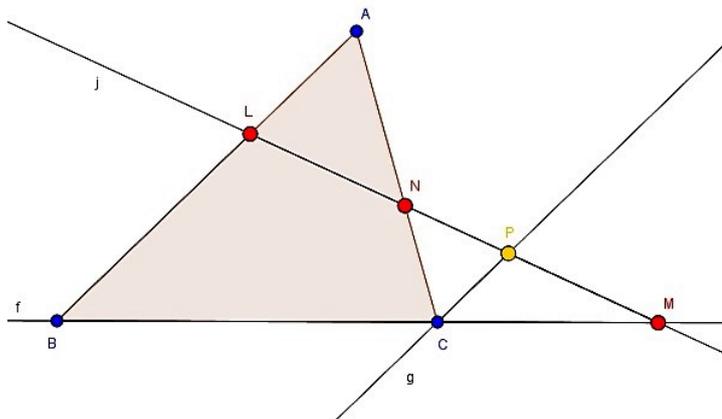


Figura 2.2: Reta por  $C$  paralela a reta suporte  $r_{AB}$ .

Com isso iremos determinar um feixe com duas retas paralelas (retas  $g$  e reta suporte  $AB$ ), concorrentes a duas retas transversais  $j$  e  $f$  (respectivamente as retas suportes  $r_{LM}$  e  $r_{BC}$ ), por conseguinte formaremos ângulos que estabelecerão uma relação de congruência como veremos abaixo

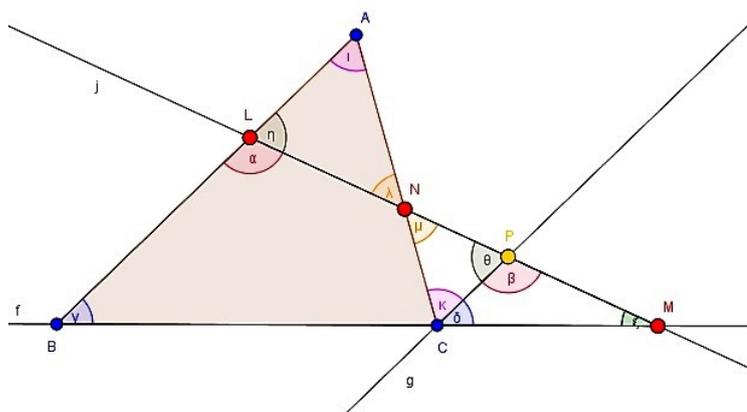


Figura 2.3: Ângulos congruentes.

Em seguida teremos uma relação de semelhança entre triângulos através do critério entre ângulos, para triângulos  $\triangle CPN$  e  $\triangle NAL$ ,  $\triangle MPC$  e  $\triangle MLB$  e da semelhança entre os triângulos  $\triangle CPN$  e  $\triangle NAL$  que observamos na figura a seguir teremos a seguinte relação  $\frac{\overline{LA}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{CN}}$  que implica em

$$\overline{CP} = \frac{\overline{LA} \cdot \overline{CN}}{\overline{AN}} \quad (2.1)$$

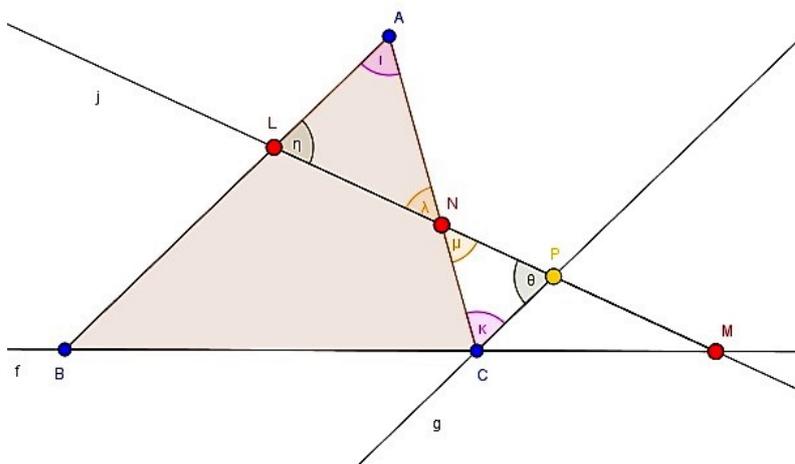


Figura 2.4: Triângulos semelhantes  $\triangle CPN$  e  $\triangle NAL$ .

Agora observando a figura a seguir que esboça a semelhança entre os triângulos  $\triangle MPC$  e  $\triangle MLB$  temos a seguinte relação  $\frac{\overline{MC}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{BL}}$  que implica em

$$\overline{CP} = \frac{\overline{MC} \cdot \overline{BL}}{\overline{MB}} \quad (2.2)$$

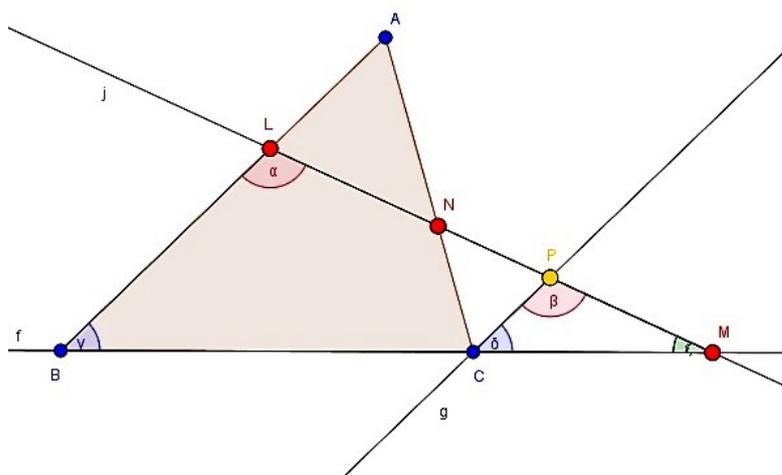


Figura 2.5: Triângulos semelhantes  $\triangle MPC$  e  $\triangle MLB$ .

Dividindo a equação (2.1) pela equação (2.2) teremos

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{LA} \cdot \overline{CN}}{\overline{AN} \cdot \overline{MC} \cdot \overline{BL}} \cdot \overline{MB} \quad (2.3)$$

Note que a relação da equação (2.3) vai enfim resultar na equação que queremos provar

$$\frac{\overline{LA}}{\overline{AN}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{CM}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{BL}} = 1. \quad (2.4)$$

Agora vamos provar a recíproca do Teorema de Menelaus. Seja L, N e M pontos que pertencem as retas suportes  $r_{AB}$ ,  $r_{CA}$  e  $r_{BC}$ , respectivamente, de um  $\triangle ABC$  tal que satisfaz a relação (2.4). Seja L' um ponto sobre a reta suporte  $r_{AB}$ , conforme mostra a figura 2.6

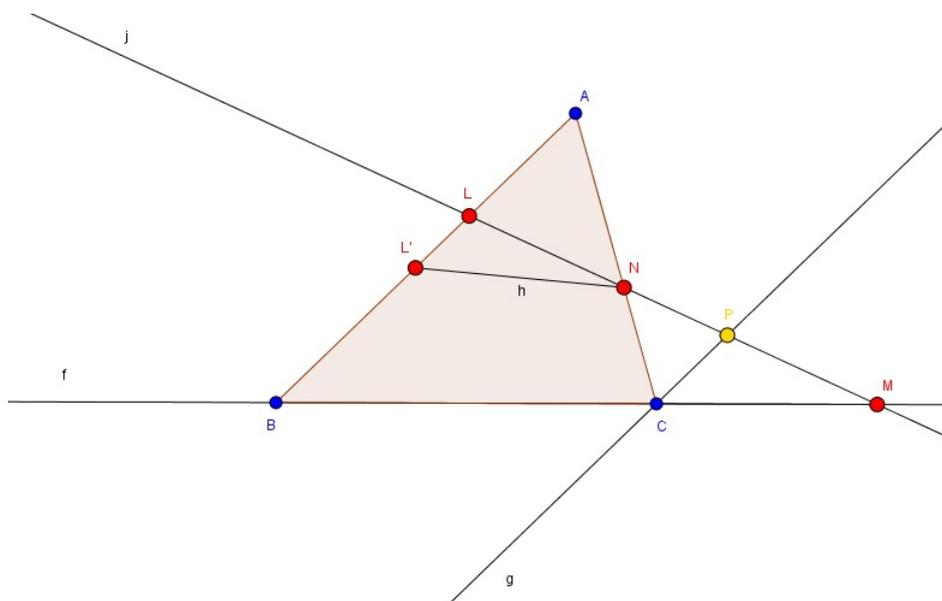


Figura 2.6: Recíproca do Teorema de Menelaus.

Supomos que os pontos L', N e M sejam colineares. Assim pela relação que acabamos de provar temos que a equação a seguir é válida

$$\frac{\overline{L'A}}{\overline{AN}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{CM}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{BL'}} = 1. \quad (2.5)$$

Como por hipótese,

$$\frac{\overline{LA}}{\overline{AN}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{CM}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{BL}} = 1. \quad (2.6)$$

Segue que dividindo a equação (2.5) pela equação (2.6) teremos

$$\frac{\overline{L'A}}{\overline{AN}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{CM}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{BL'}} = \frac{1}{1}$$

$$\frac{\overline{L'A}}{\overline{AN}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{CM}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{BL'}} \cdot \frac{\overline{AN}}{\overline{LA}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{MB}} = 1$$

que implica em

$$\frac{\overline{L'A}}{\overline{BL'}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{LA}} = 1$$

que finalmente resulta na seguinte equação

$$\frac{\overline{L'A}}{\overline{BL'}} = \frac{\overline{LA}}{\overline{BL}}.$$

Como existe um único ponto que divide o segmento  $\overline{AB}$  numa dada razão, concluímos que  $L' = L$ . Portanto, os pontos L, M e N são colineares.

## Capítulo 3

# Utilização do software Geogebra para verificação da demonstração do Teorema de Menelaus.

Neste capítulo, faremos a demonstração do Teorema de Menelaus de uma forma interativa utilizando o Geogebra para simplificar a compreensão de algumas passagens da demonstração, que poderia levar à algumas dúvidas por uma abstração de propriedades específicas.

### 3.1 Verificação do Teorema de Menelaus com o Geogebra.

Sejam três pontos L, M e N localizados respectivamente nas retas suportes dos lados  $r_{AB}$ ,  $r_{BC}$  e  $r_{CA}$  de um triângulo  $\triangle ABC$  (qualquer) e diferentes dos vértices. Então L, M e N são colineares se, e somente se,

$$\frac{\overline{LA}}{\overline{AN}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{BL}} = 1.$$

Primeiro construímos um triângulo  $\triangle ABC$  qualquer, para isso selecionamos o botão polígono da barra de ferramentas, na janela de visualização, clicamos com o botão esquerdo do mouse em três locais distintos, fechando assim a criação do triângulo clicando no ponto inicial. Veja todo processo através das figuras abaixo. Primeiro selecionamos a ferramenta

poligono

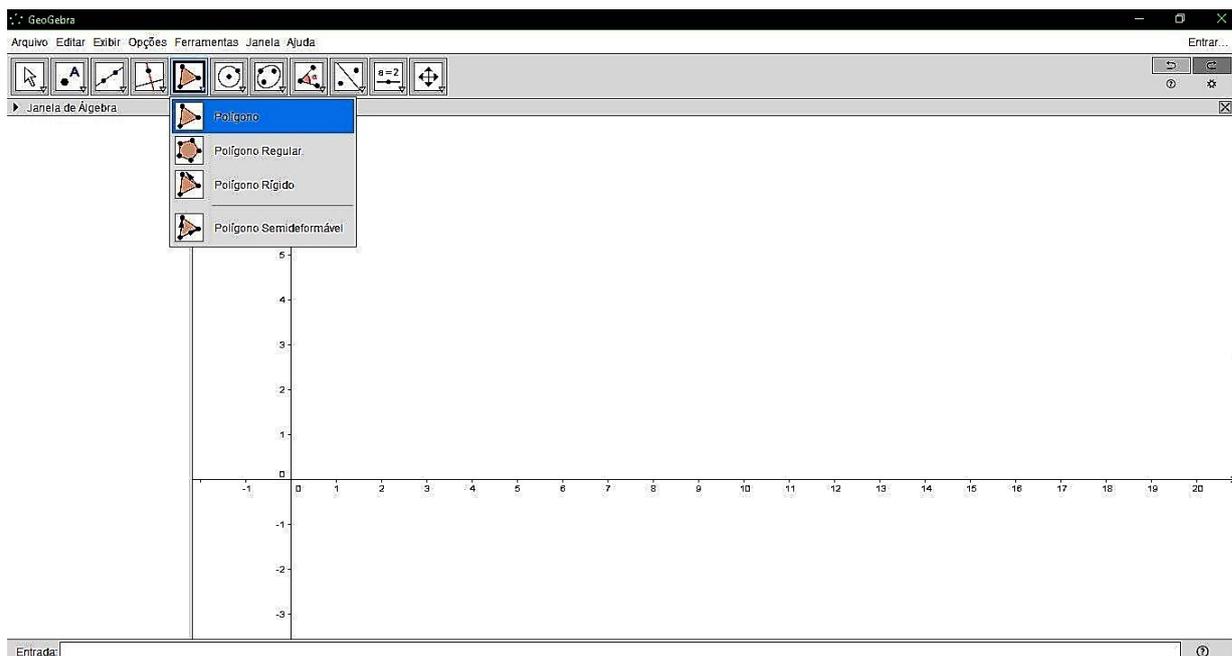


Figura 3.1: Ferramenta polígono.

construindo um triângulo de medida qualquer

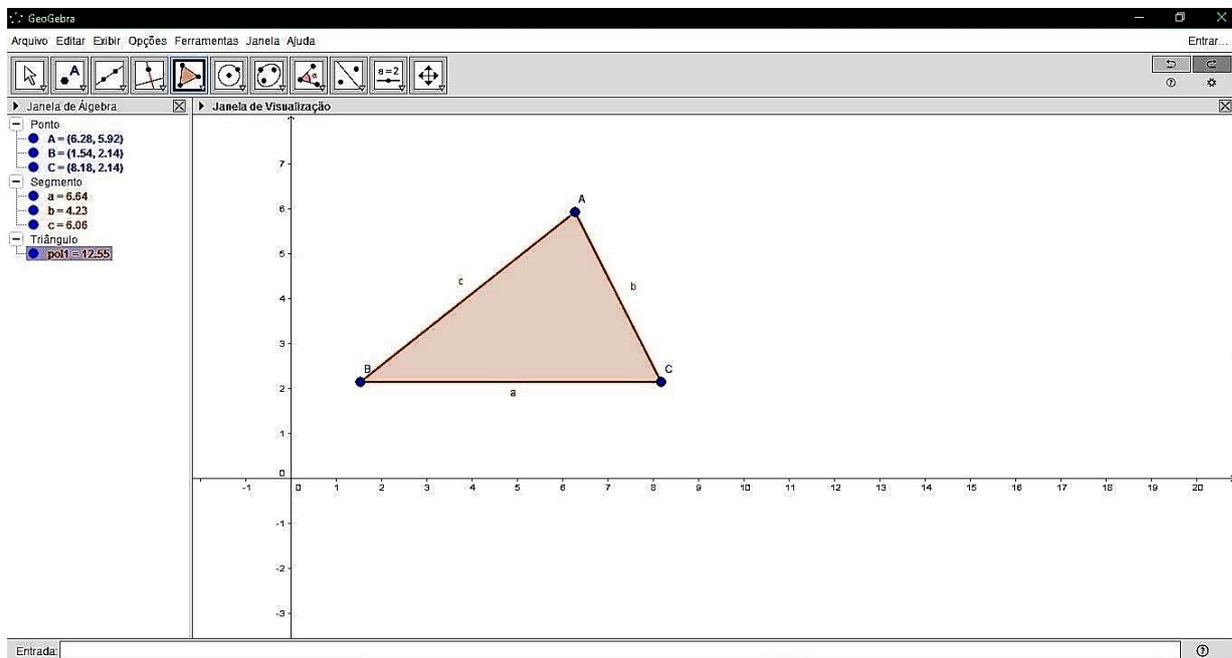


Figura 3.2: Triângulo.

Observe que a medida que é feita uma construção as notações algébricas aparecem na janela de álgebra do programa, como as coordenadas dos vértices do triângulo, as

medidas dos lados e a área do triângulo. Essas informações nos auxiliam na compreensão de definições e propriedades matemáticas. Em seguida traçamos uma reta passando pelo lado  $\overline{BC}$  do triângulo.

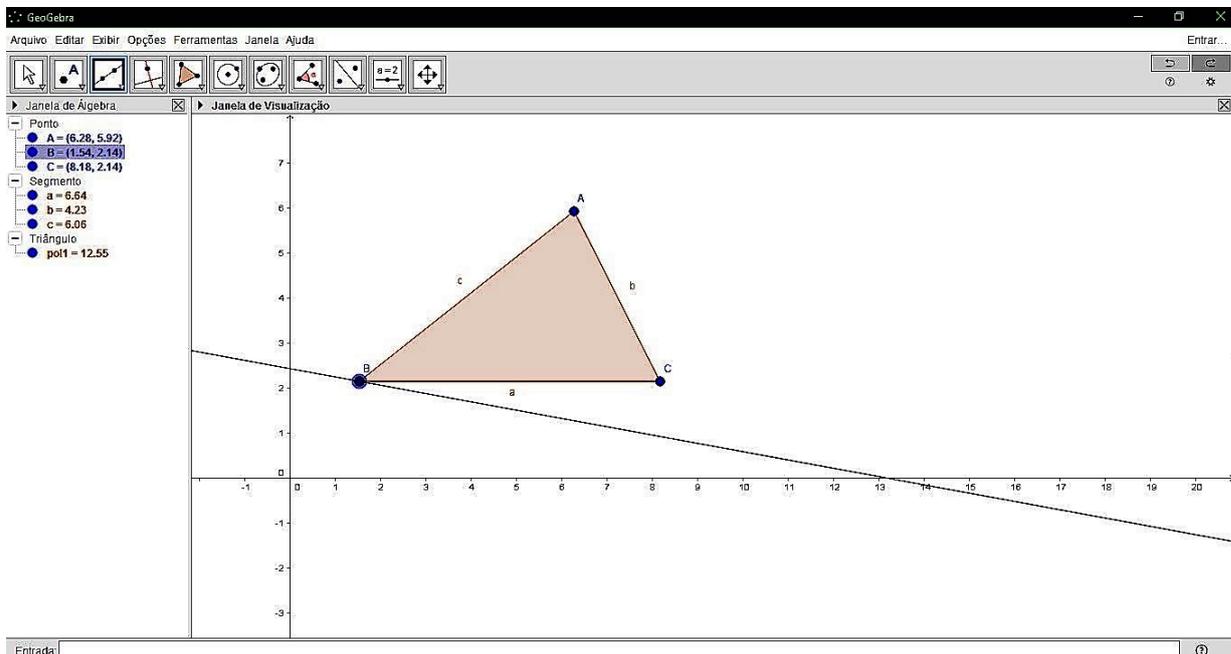


Figura 3.3: Reta pelo lado  $\overline{BC}$  do triângulo.

Selecionando a ferramenta ponto e clicando sobre as retas suportes  $r_{AB}$  e  $r_{AC}$  construímos assim dois pontos, L e N

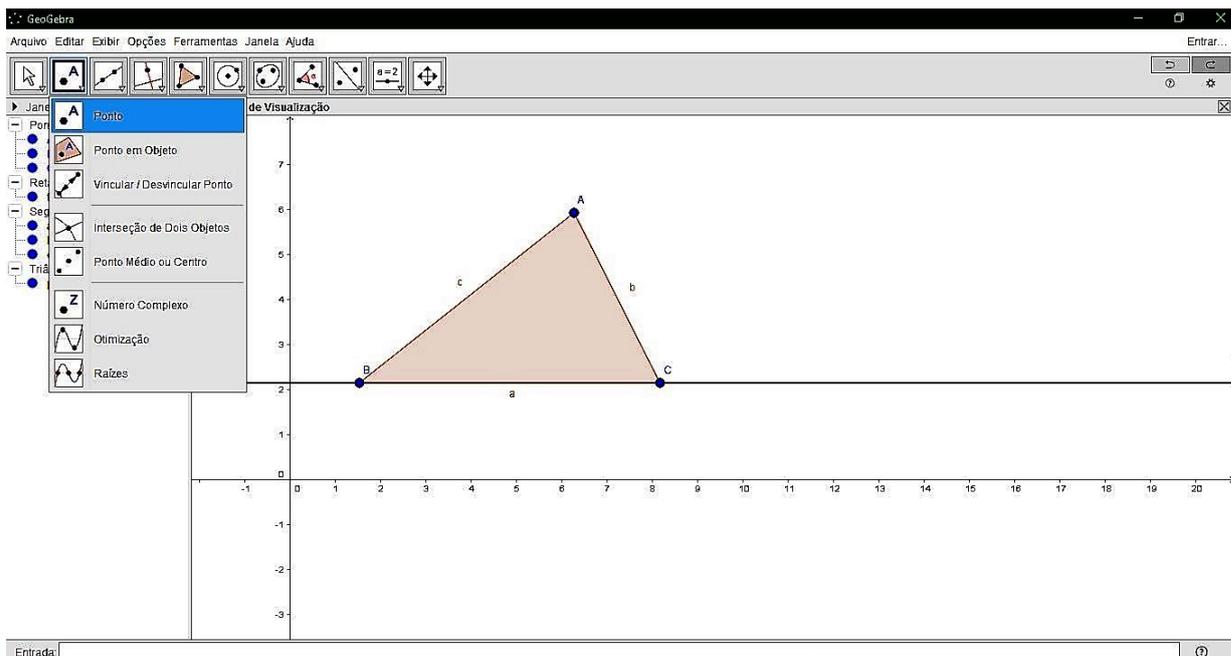


Figura 3.4: Ferramenta ponto.

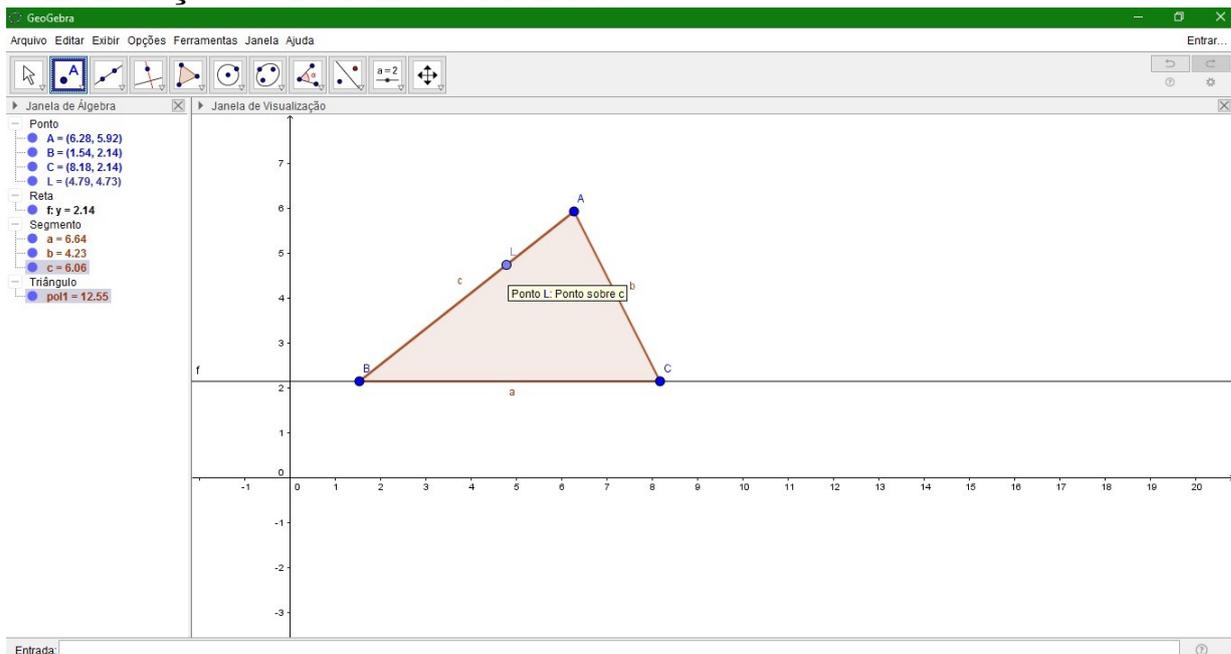


Figura 3.5: Ponto L.

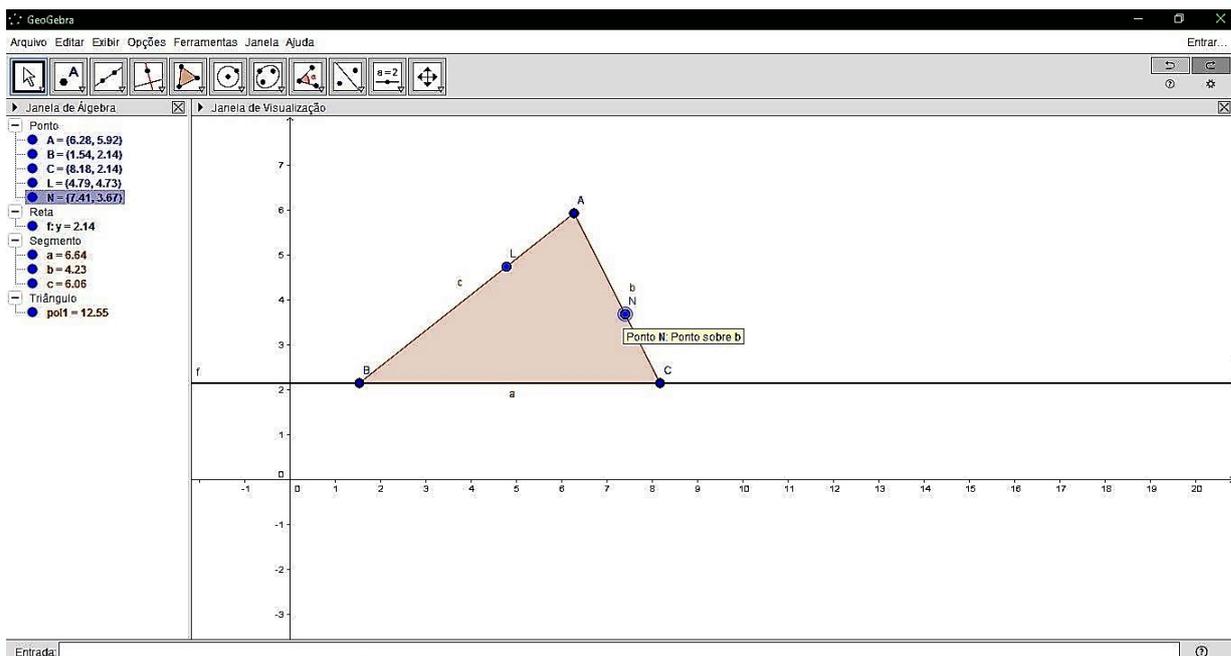


Figura 3.6: Ponto N.

Em seguida vamos selecionar a ferramenta reta, e contruimos uma reta passando pelos pontos L e N. Note que essa reta intersecta a reta suporte  $r_{BC}$ , esse ponto de interseção é o ponto M.

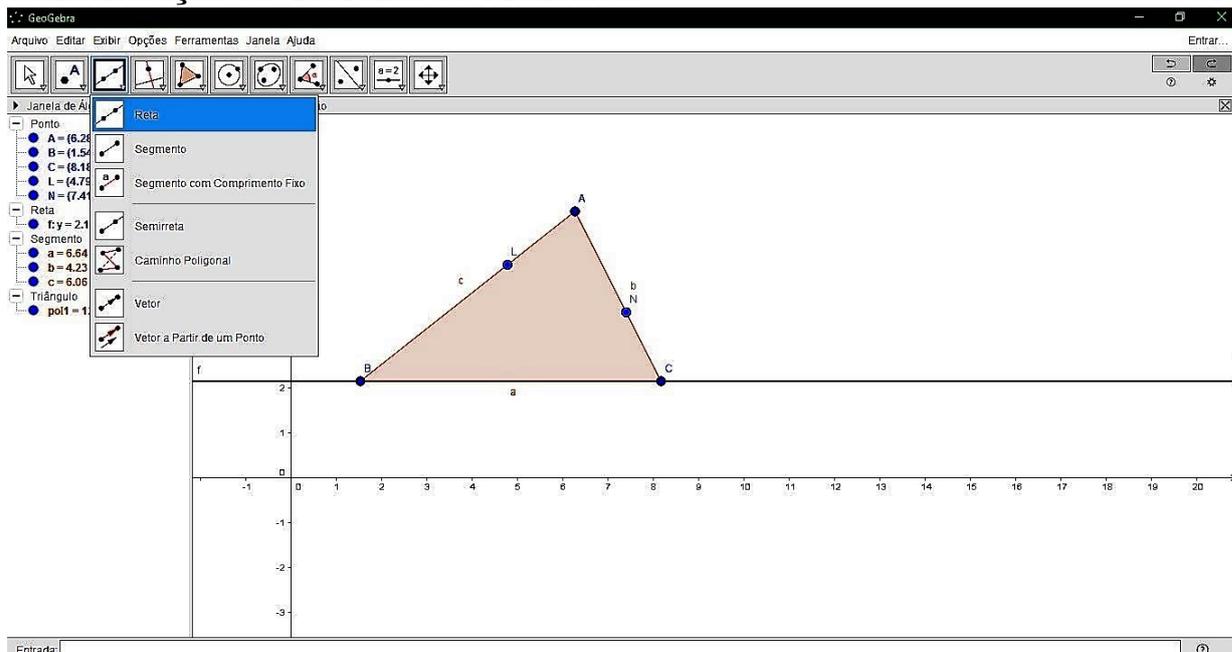


Figura 3.7: Ferramenta reta.

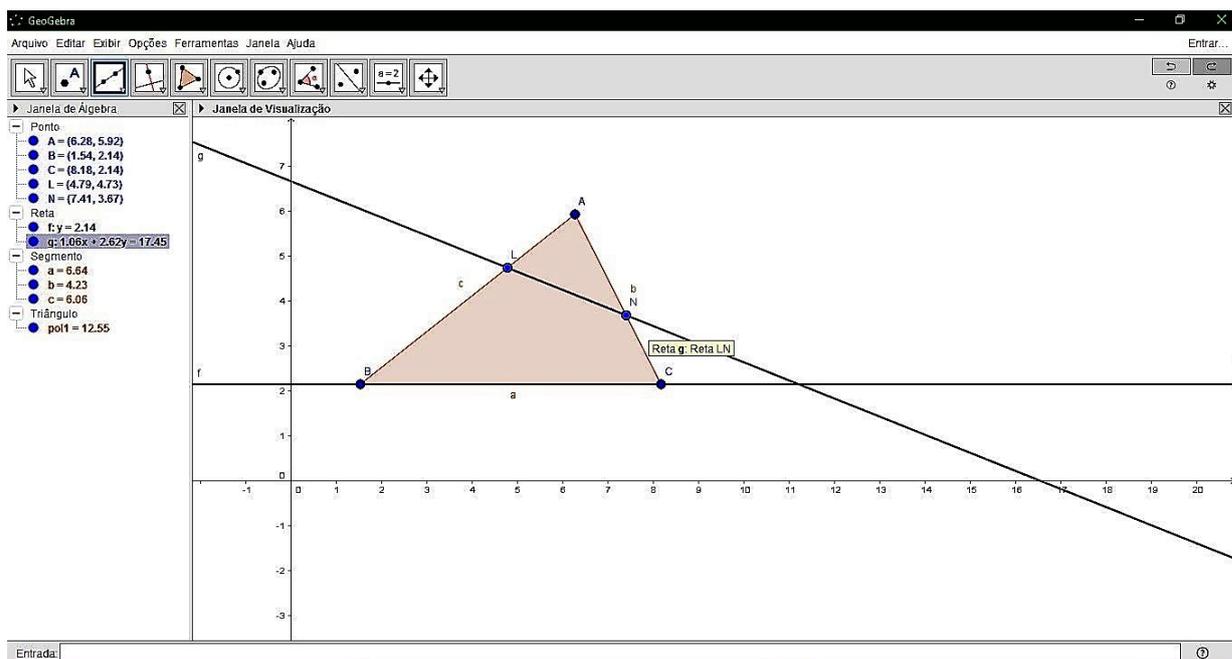


Figura 3.8: Reta passando por L e N.

Dando prosseguimento faz-se a construção do ponto M, que é dado pela interseção da reta LN e reta suporte  $r_{BC}$ .

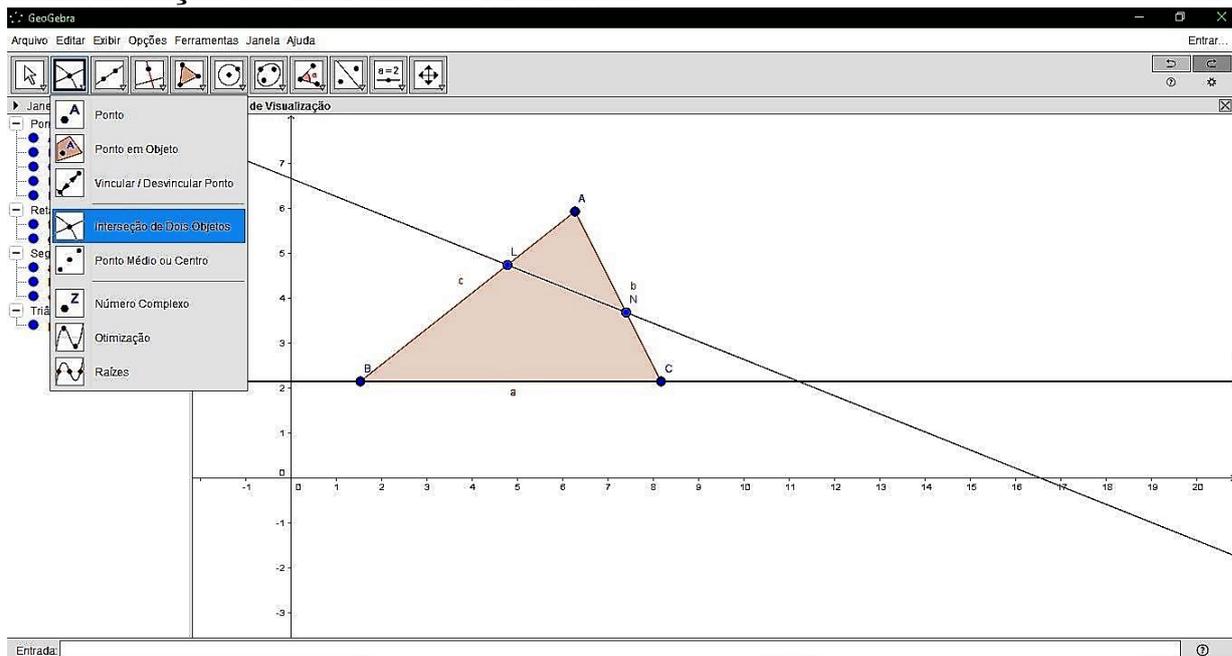


Figura 3.9: Ferramenta interseção de dois objetos.

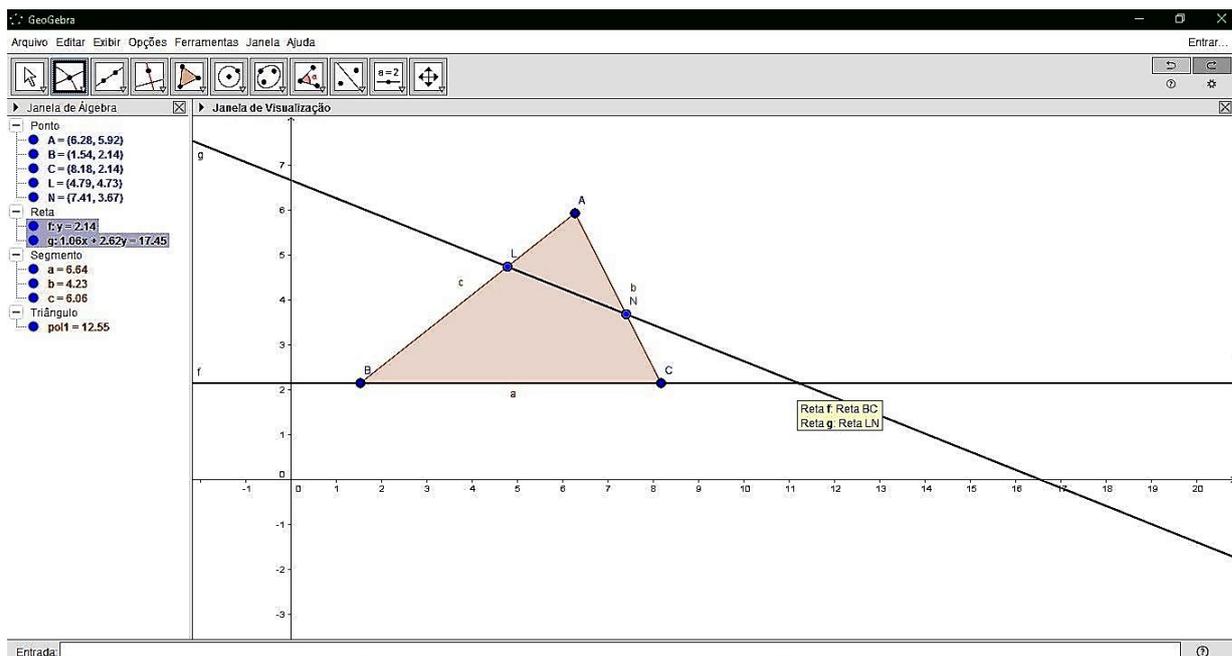


Figura 3.10: Ponto de interseção entre a reta LN e a reta suporte  $r_{BC}$ .

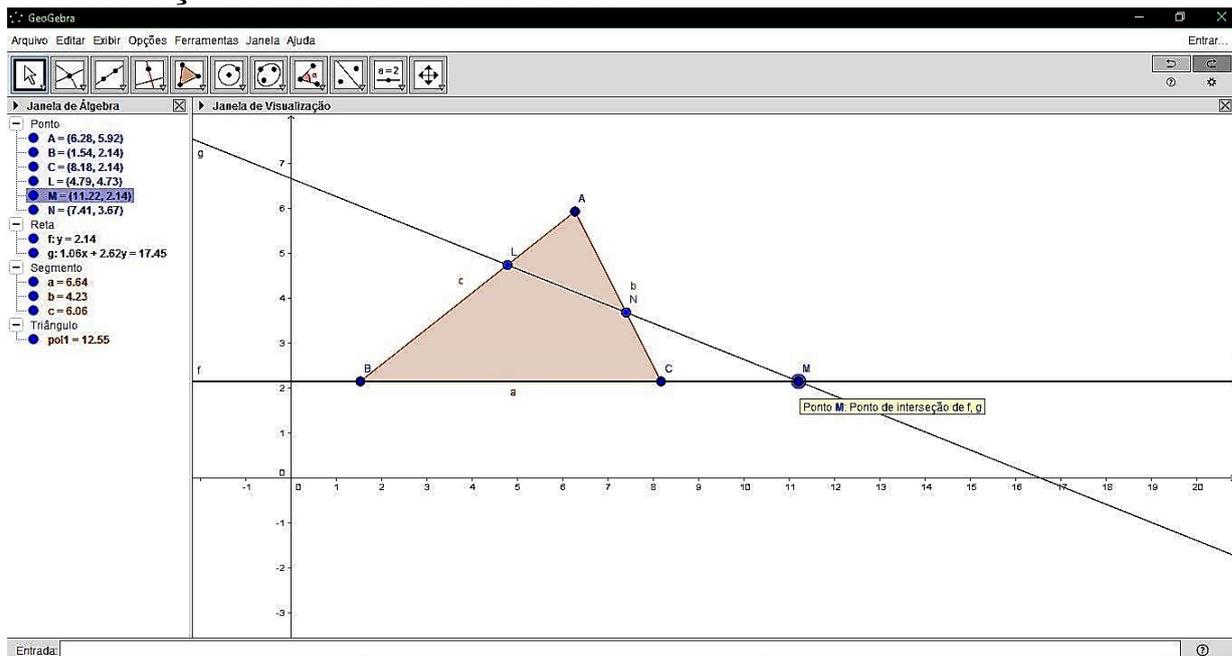


Figura 3.11: Ponto M.

O próximo passo será dado pela construção de uma reta paralela ao lado  $\overline{AB}$  e passando pelo vértice C do triângulo  $\triangle ABC$ . Para isso selecione na barra de ferramentas a ferramenta reta paralela, clicando no lado  $\overline{AB}$  e, depois no vértice C, construímos a reta paralela.

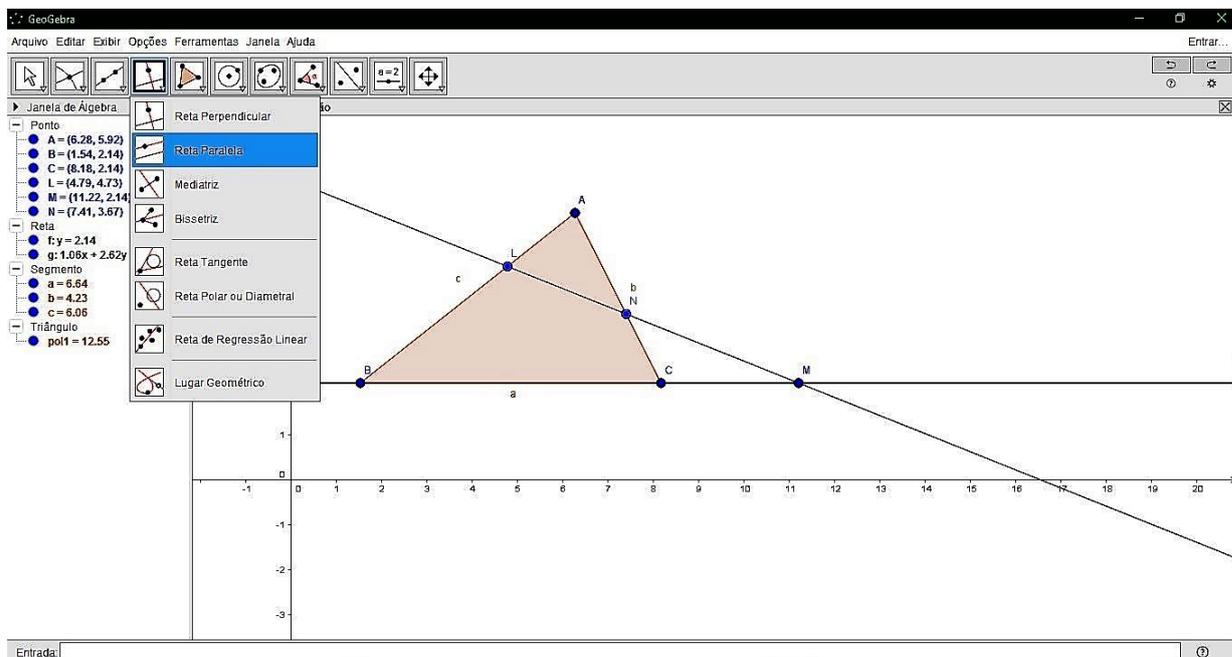


Figura 3.12: Ferramenta reta paralela.

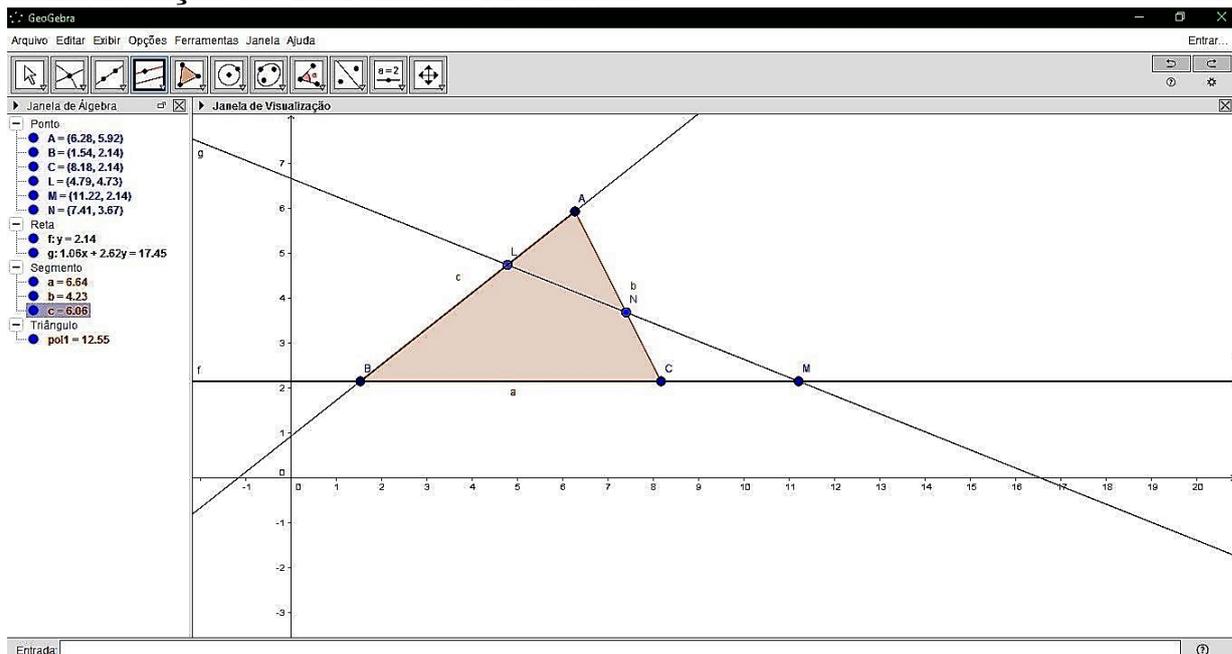


Figura 3.13: Reta paralela ao lado  $\overline{AB}$  passando pelo vértice C do triangulo  $\triangle ABC$ .

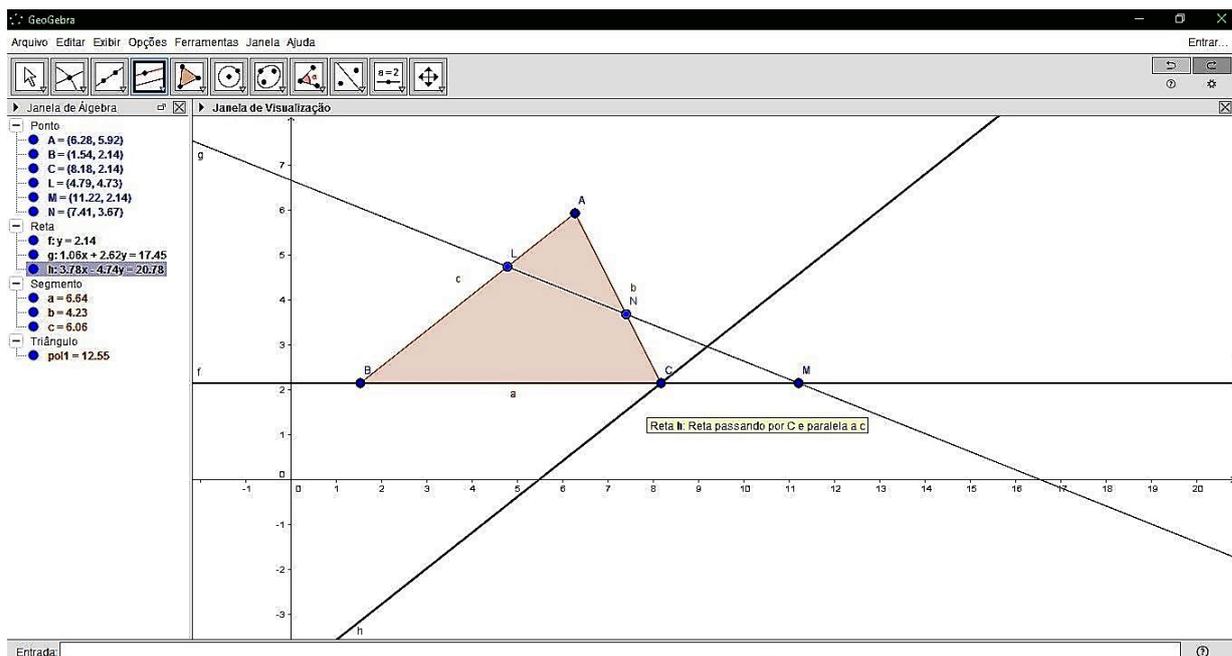


Figura 3.14: Reta paralela ao lado  $\overline{AC}$  passando pelo vértice C do triangulo  $\triangle ABC$ .

Em seguida determinamos o ponto de interseção entre as retas que passam pelo vértice C e pela reta LN. Selecione a ferramenta interseção entre dois objetos e clique sobre as retas construindo assim o ponto P.

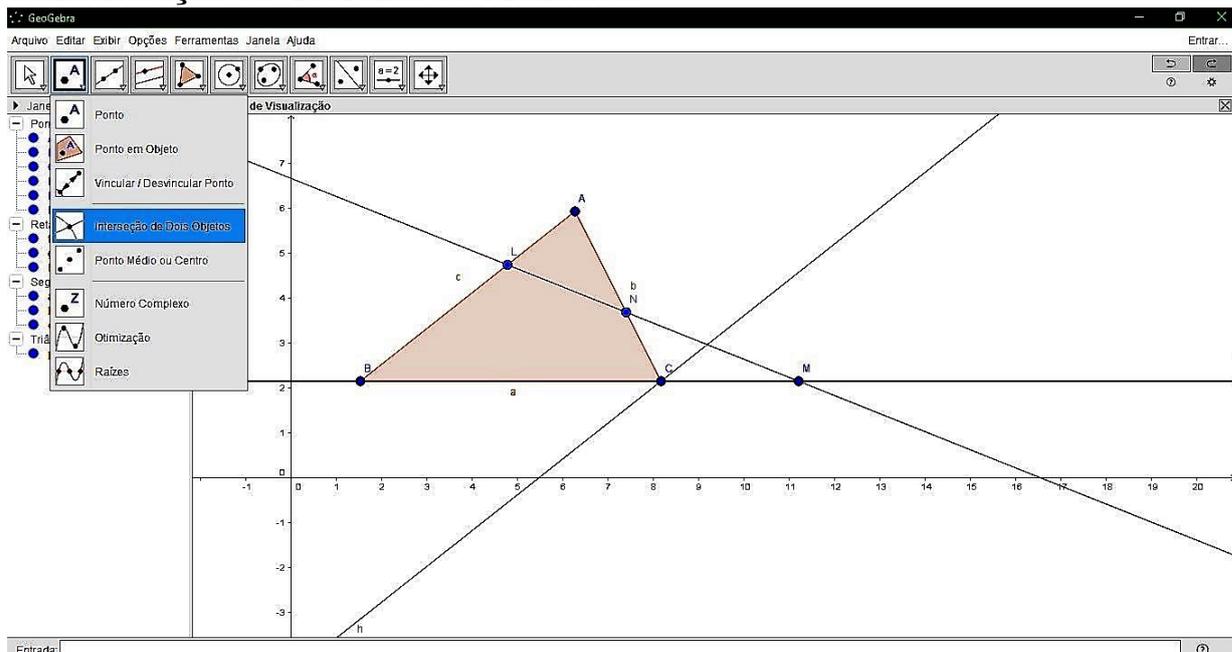


Figura 3.15: Ferramenta interseção de dois objetos.

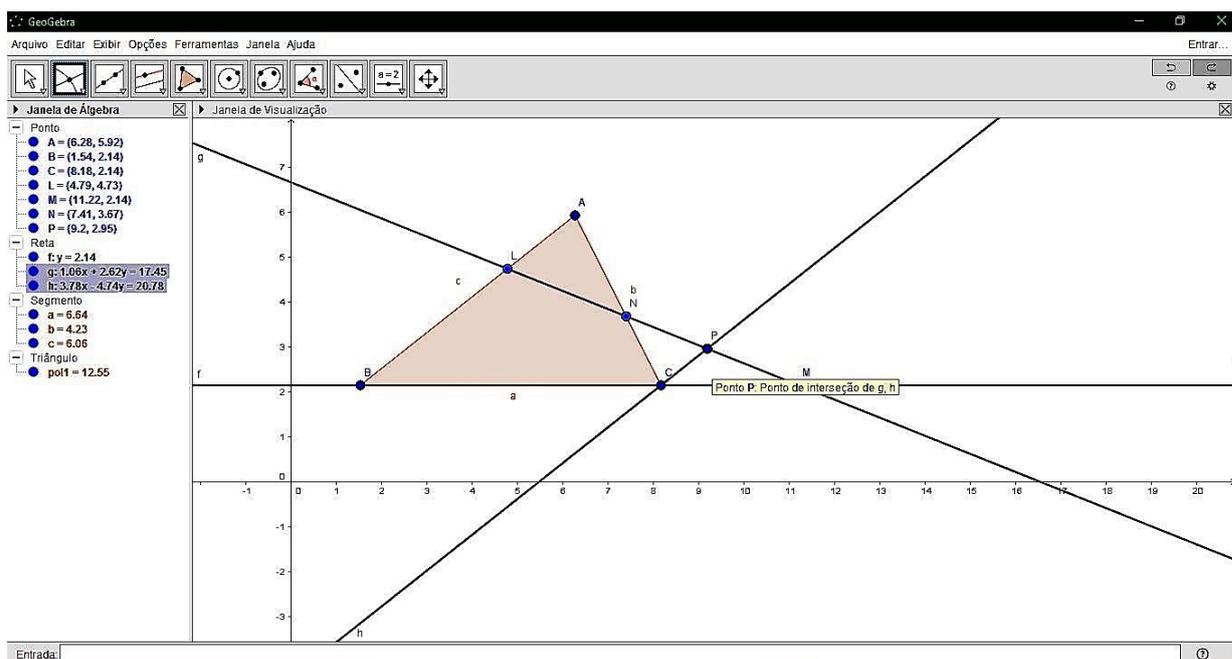


Figura 3.16: Ponto P.

Sabemos que um feixe de retas paralelas intersectadas por retas transversais determinam ângulos que podem ser correspondentes, alternos internos ou externos, colaterais internos ou externos e ângulos opostos pelo vértice, identificaremos nas figuras a seguir apenas os ângulos que mostram uma relação de congruência, caso dos ângulos correspondentes, alternos e opostos pelo vértice, essenciais para o reconhecimento de semelhança

entre triângulos. Seleccionamos a ferramenta ângulo pra identificação desses ângulos congruentes e

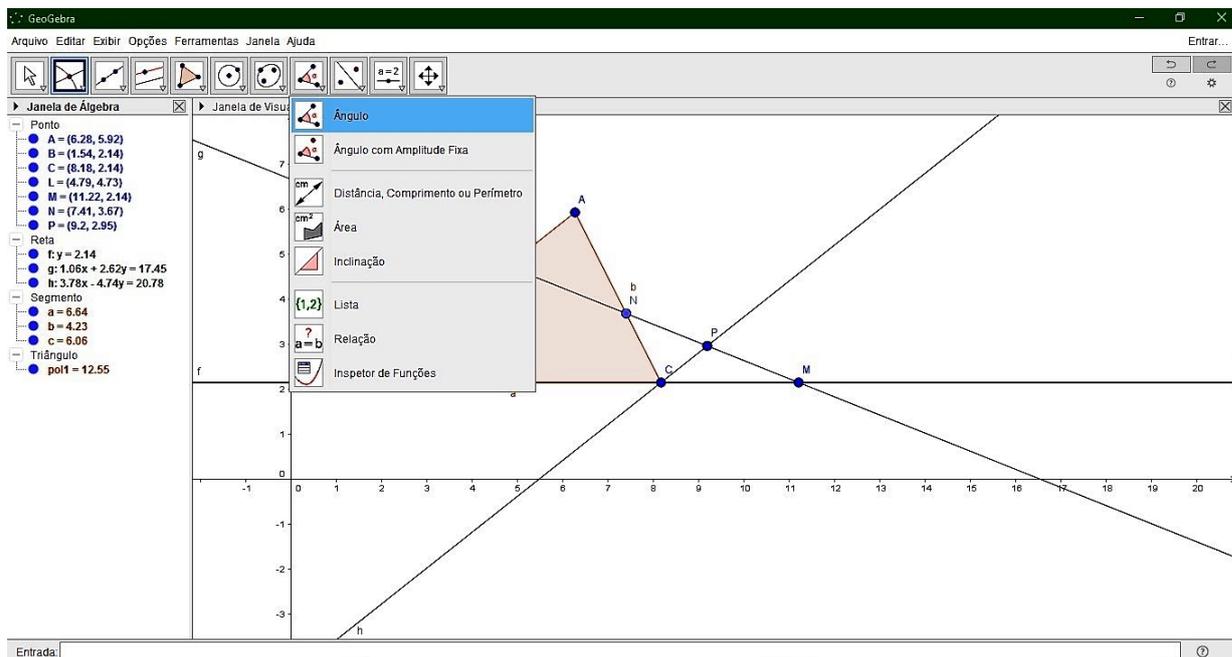


Figura 3.17: Ferramenta ângulo.

determinamos um ângulo clicando em três pontos consecutivos, de tal forma que a seleção dos pontos seja no sentido horário.

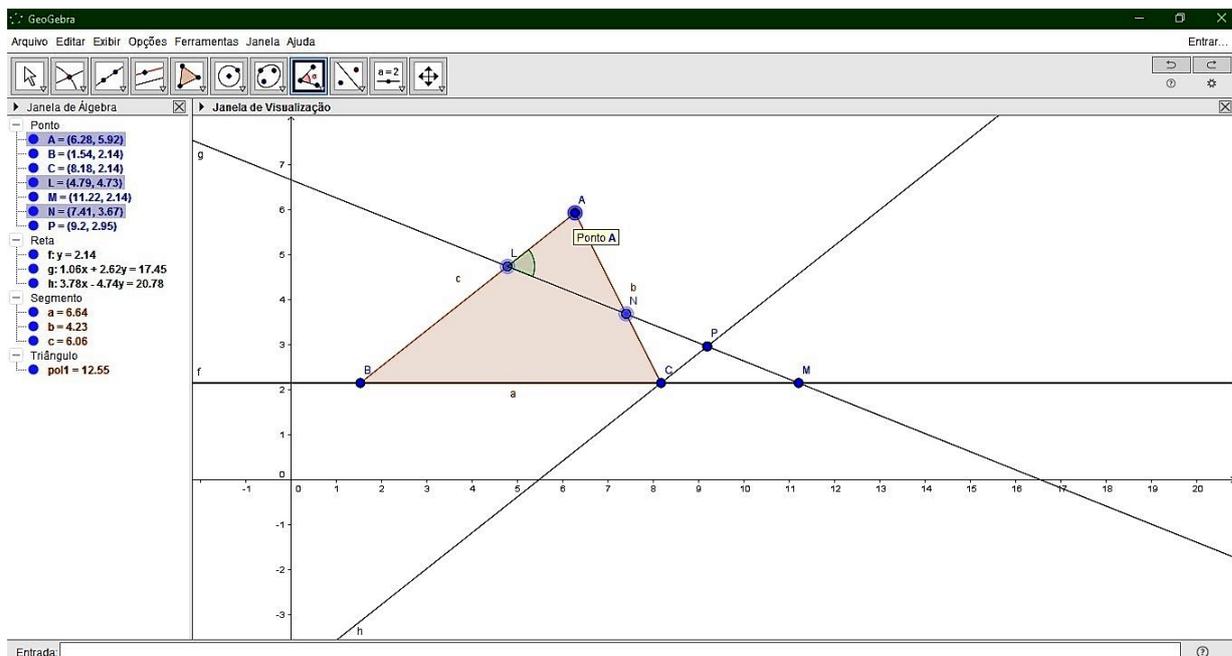


Figura 3.18: Construindo o ângulo do vértice L.

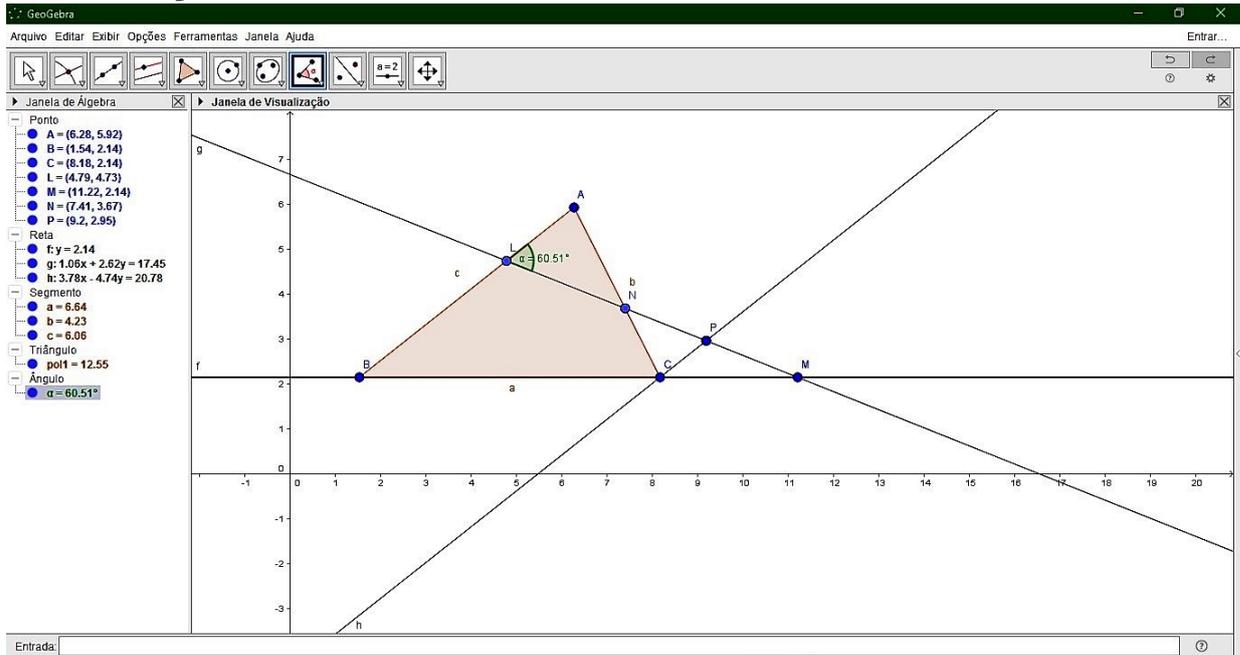


Figura 3.19: Construindo o ângulo do vértice L.

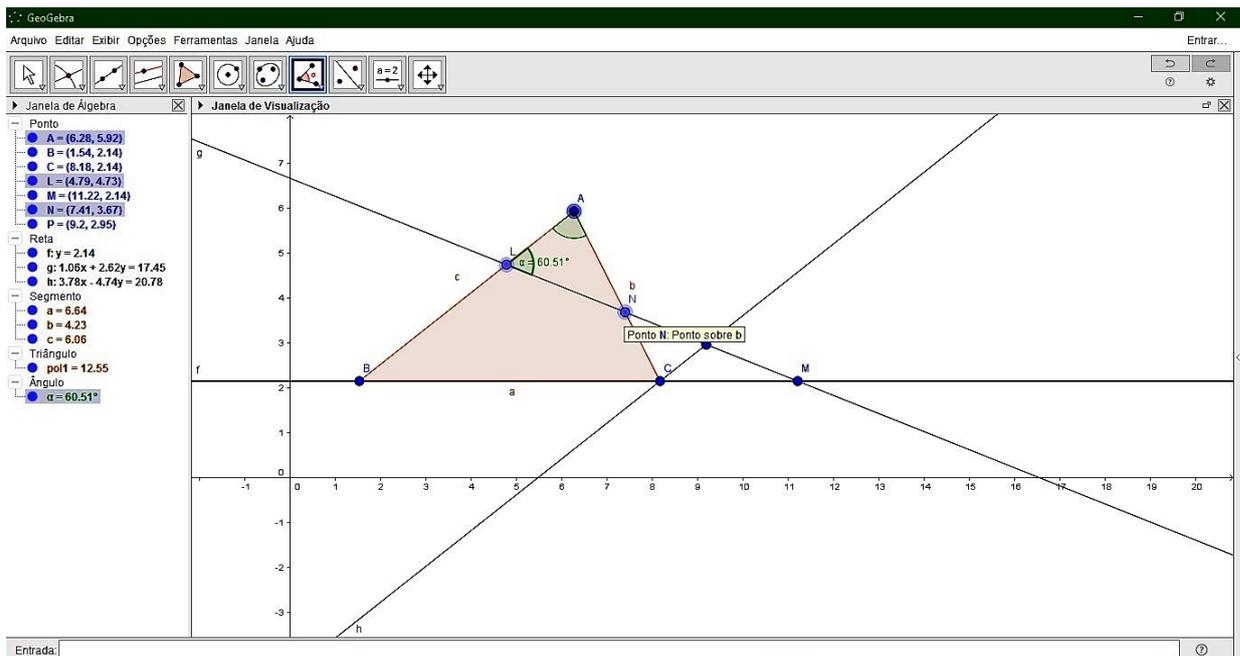


Figura 3.20: Construindo o ângulo do vértice A.

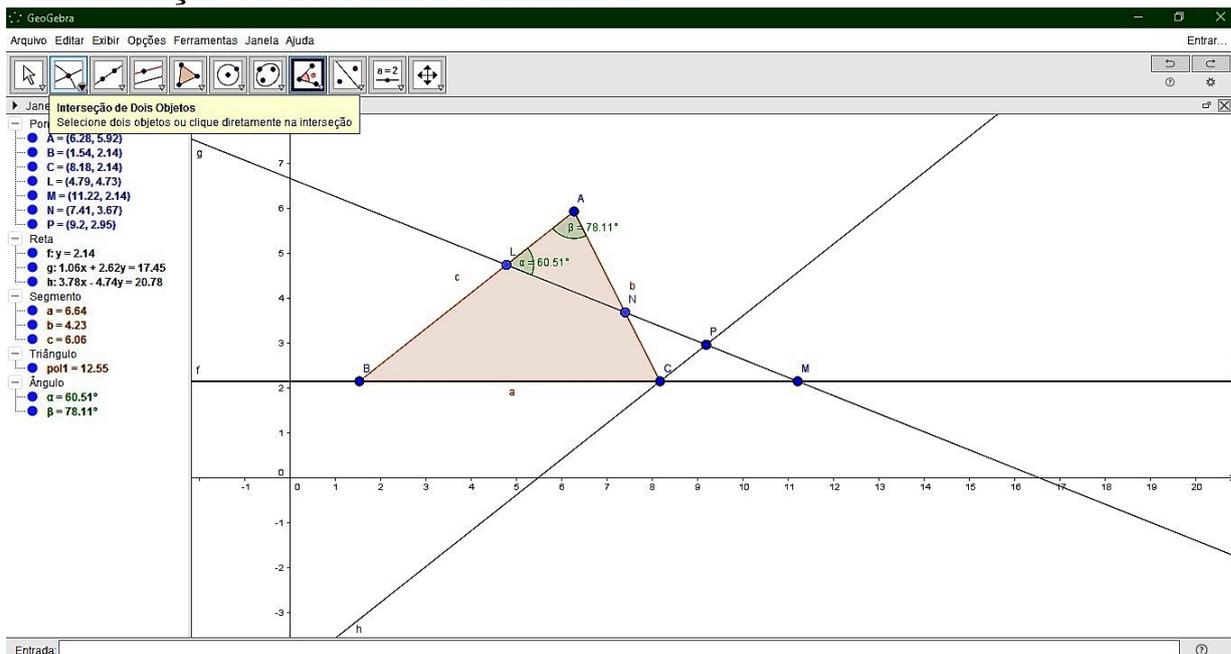


Figura 3.21: Construindo o ângulo do vértice A.

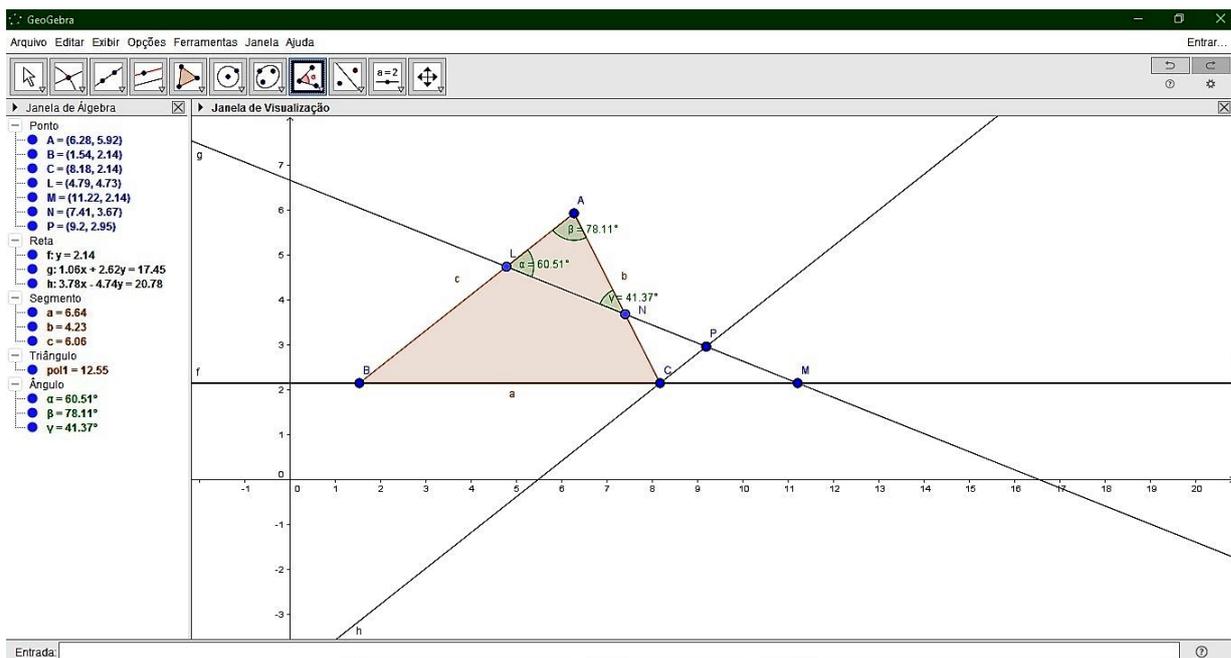


Figura 3.22: Construindo o ângulo do vértice N.

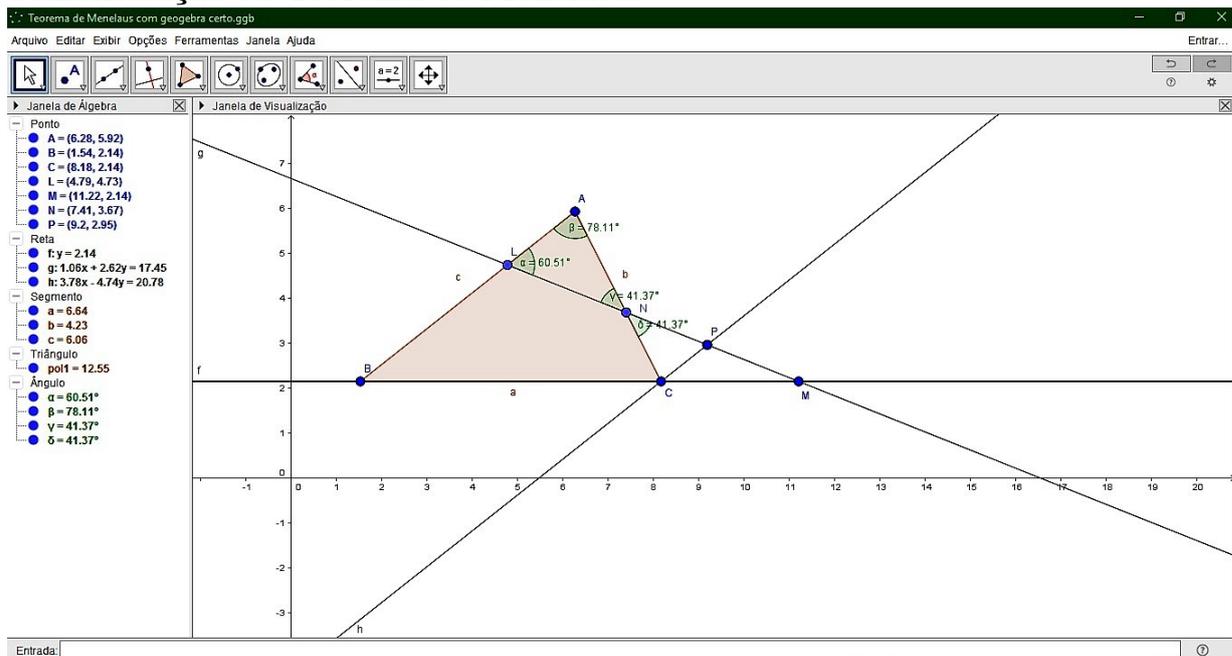


Figura 3.23: Construindo o ângulo do vértice N.

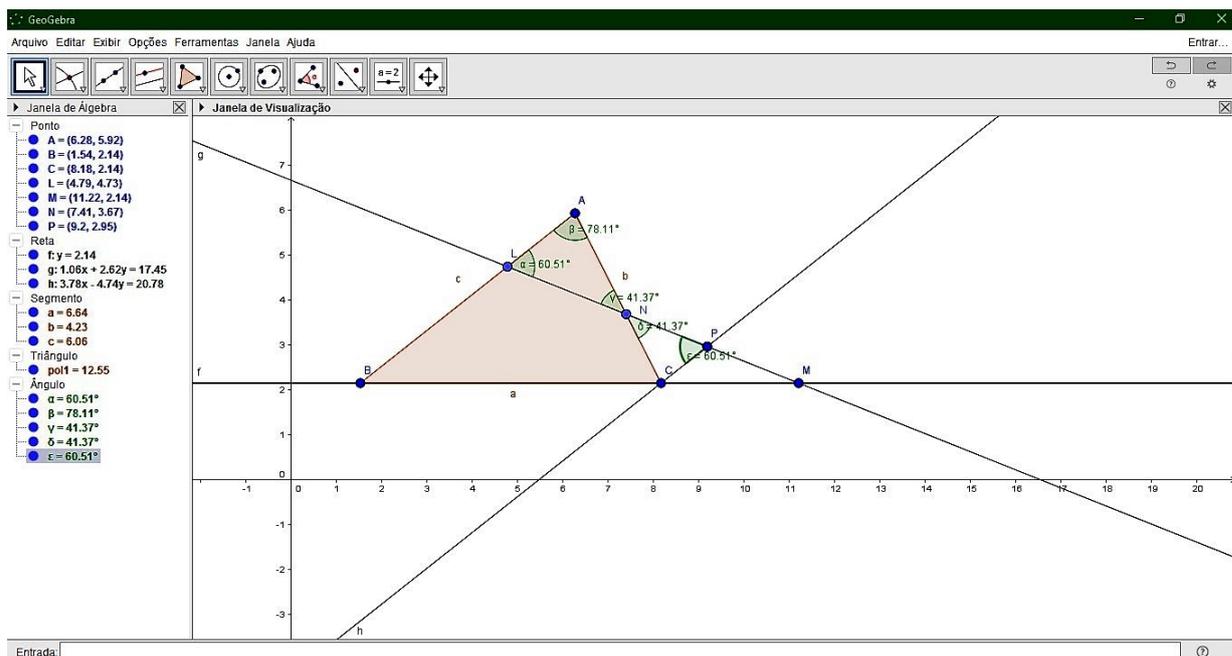


Figura 3.24: Construindo o ângulo do vértice P.

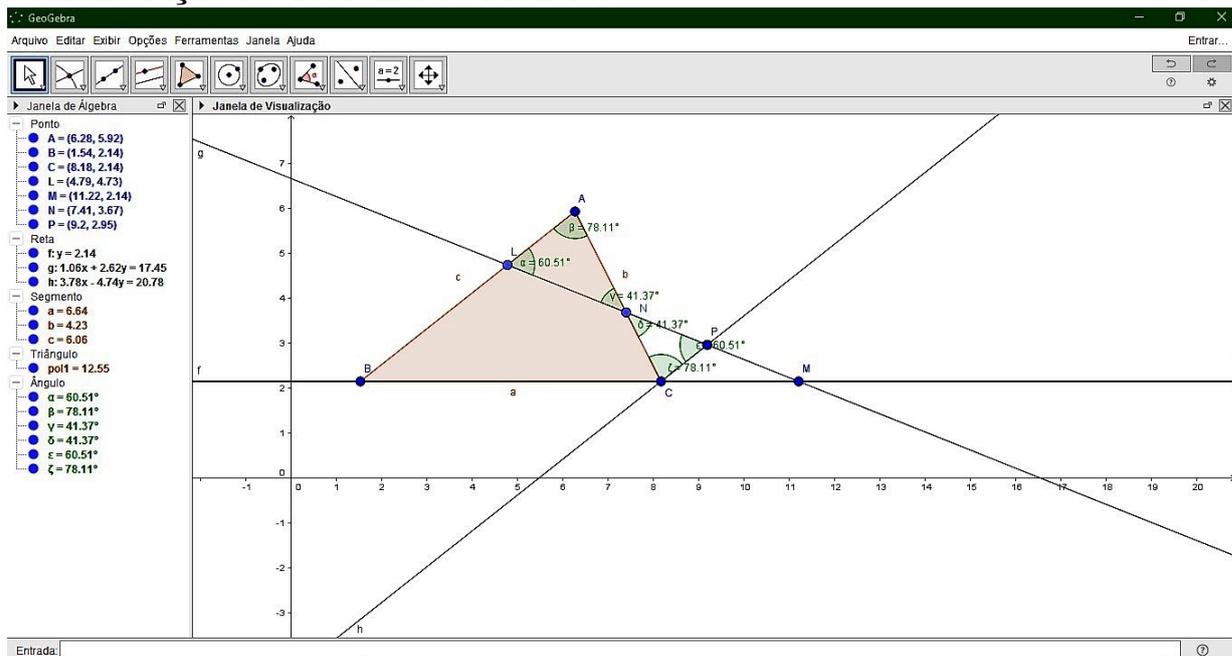


Figura 3.25: Construindo o ângulo do vértice C.

Observamos que os pares de ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{C}$ ,  $\hat{P}$  e  $\hat{L}$  são congruentes e conseguimos verificar isso através da janela de álgebra, na parte que está representada os ângulos, com seus respectivos valores. Logo podemos afirmar que os triângulos são semelhantes pelo critério entre ângulos. Segue que as razões entre seus segmentos são equivalentes, assim a seguinte relação  $\frac{\overline{LA}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{CN}}$  implica em

$$\overline{CP} = \frac{\overline{LA} \cdot \overline{CN}}{\overline{AN}}. \quad (3.1)$$

Notamos ainda que os ângulos  $\hat{L}$  e  $\hat{P}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  são congruentes, logo podemos afirmar que os triângulos  $\triangle MLB$  e  $\triangle MPC$  são semelhantes pelo critério de congruência entre ângulos. Vejamos a construção desses ângulos para ratificar esse caso de semelhança entre os triângulo em questão.

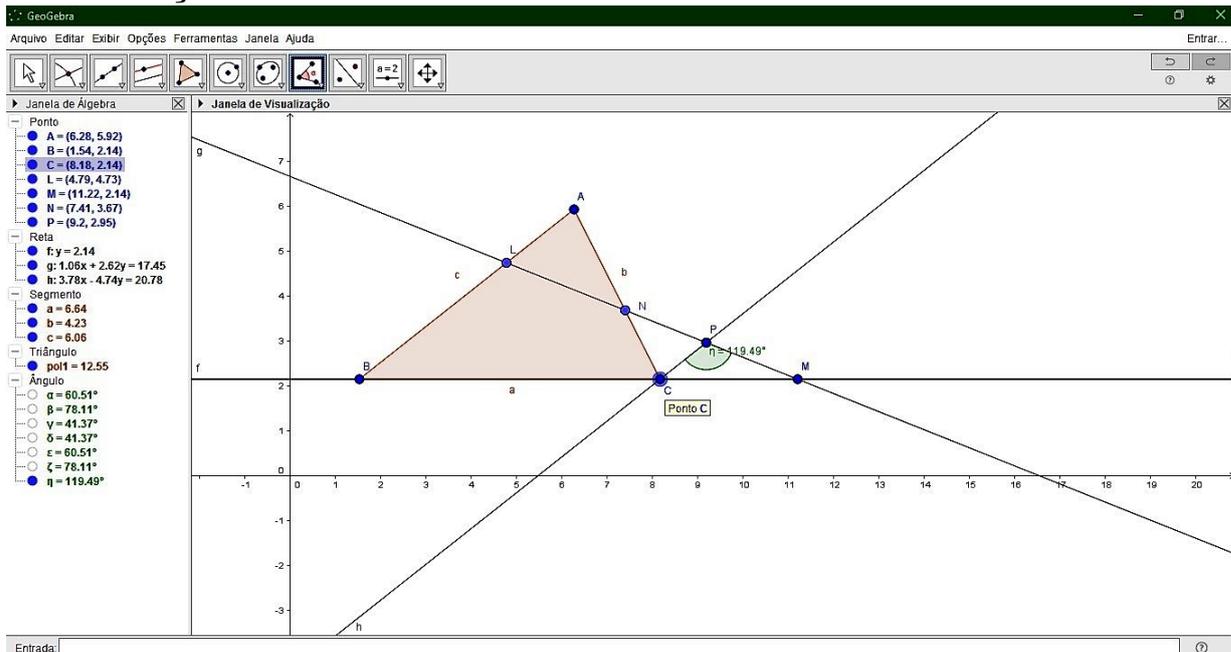


Figura 3.26: Ângulo  $\hat{P}$ .

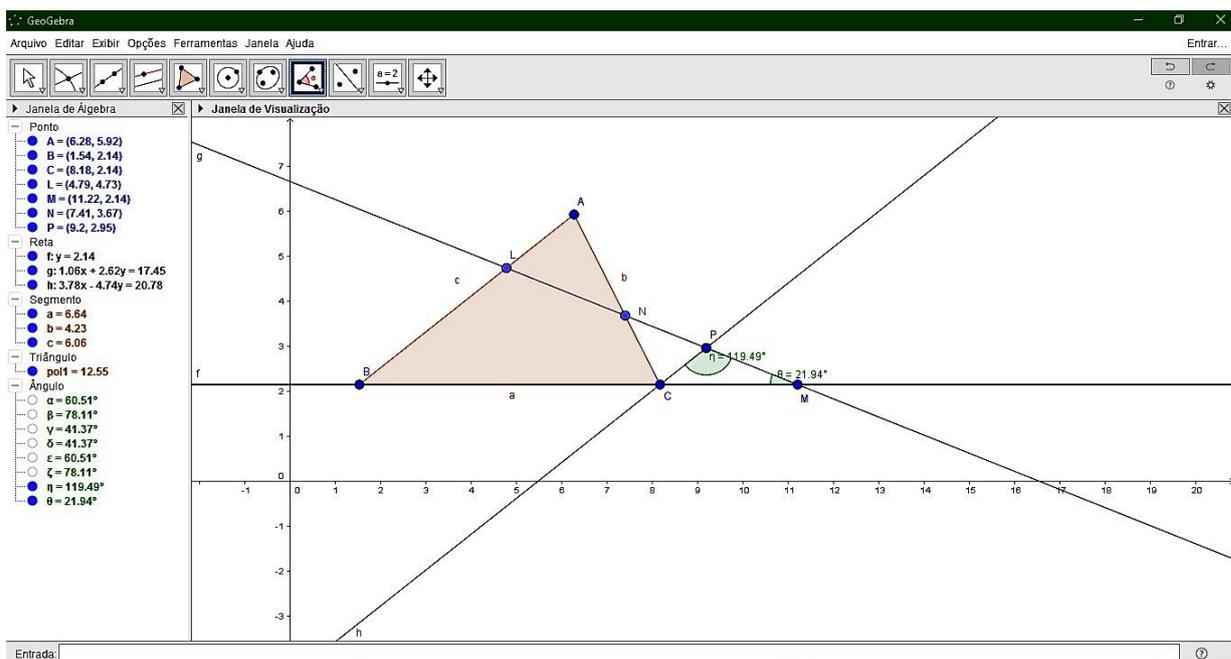


Figura 3.27: Ângulo  $\hat{M}$ .

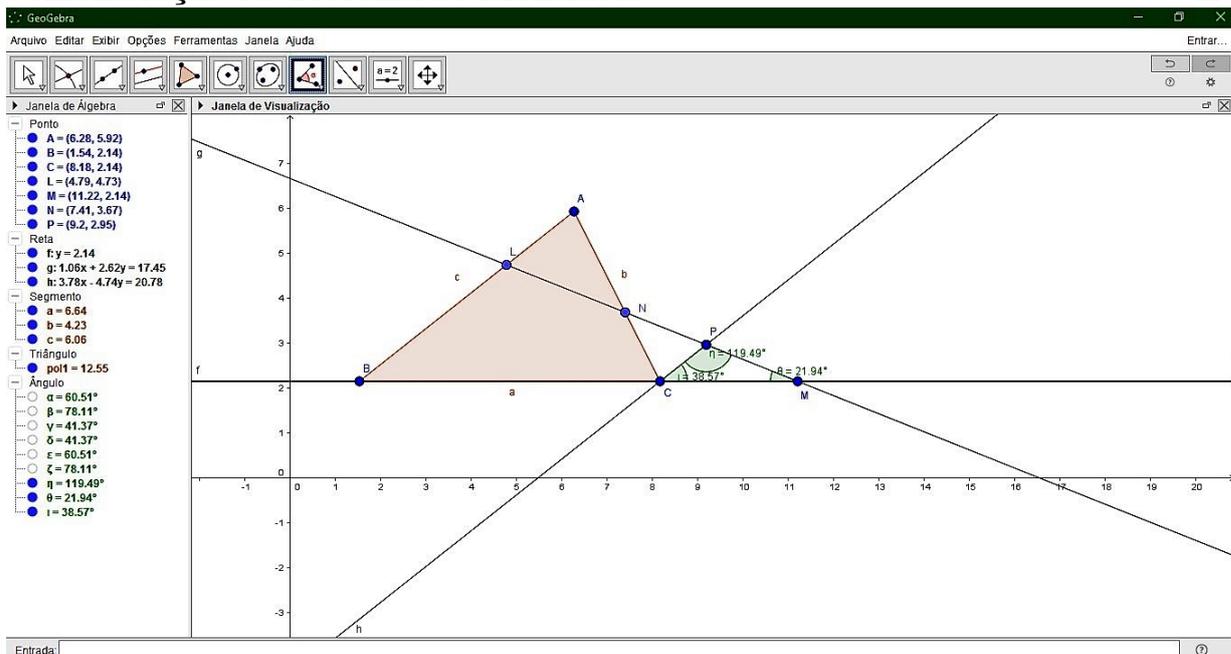


Figura 3.28: Ângulo  $\hat{C}$ .

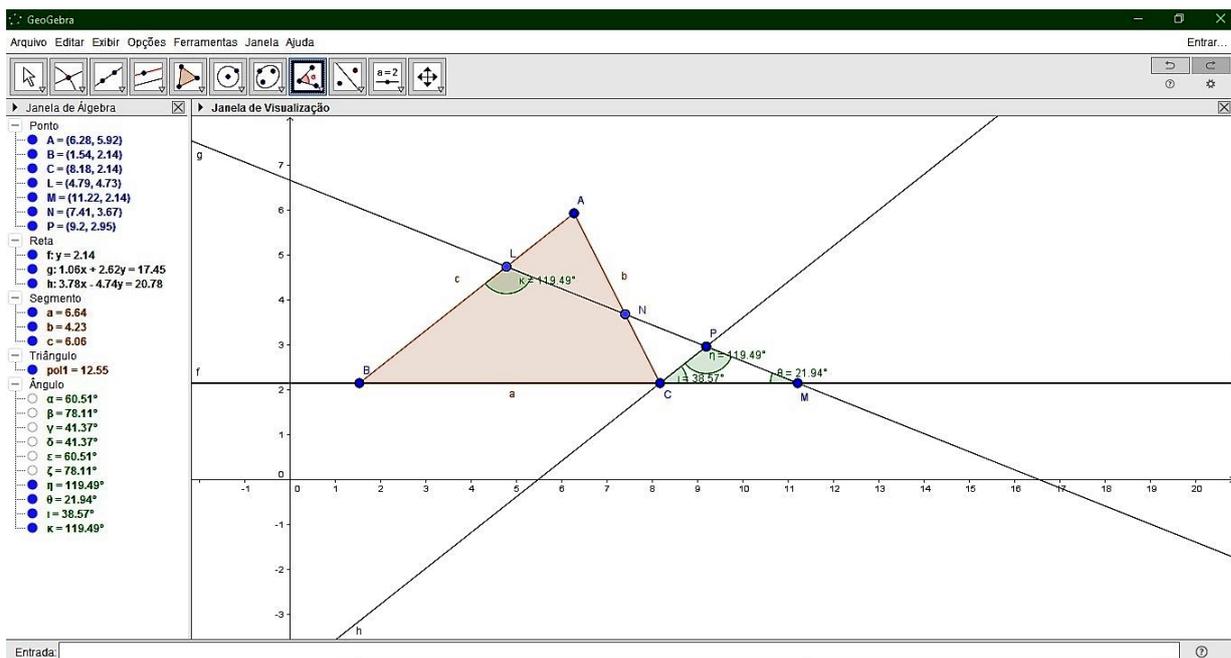


Figura 3.29: Ângulo  $\hat{L}$ .

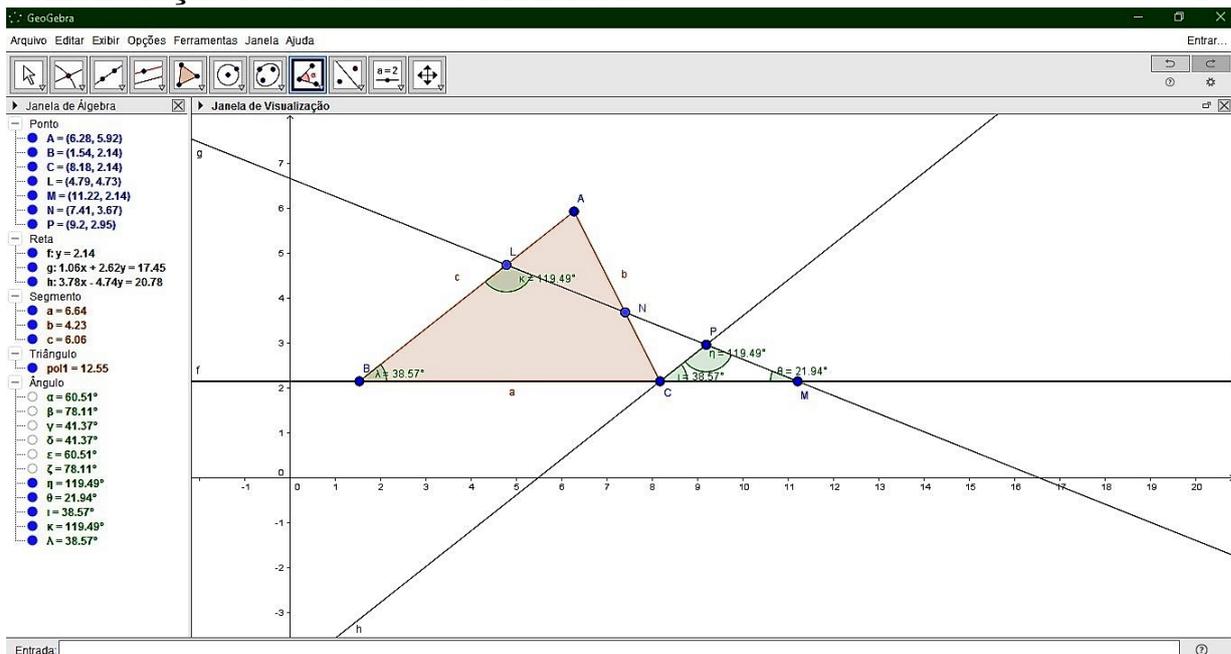


Figura 3.30: Ângulo  $\hat{B}$ .

Utilizando a leitura da janela de álgebra podemos confirmar que os ângulos em questão são congruentes, assim verificamos a semelhança entre os triângulos  $\triangle CPM$  e  $\triangle MLB$ .

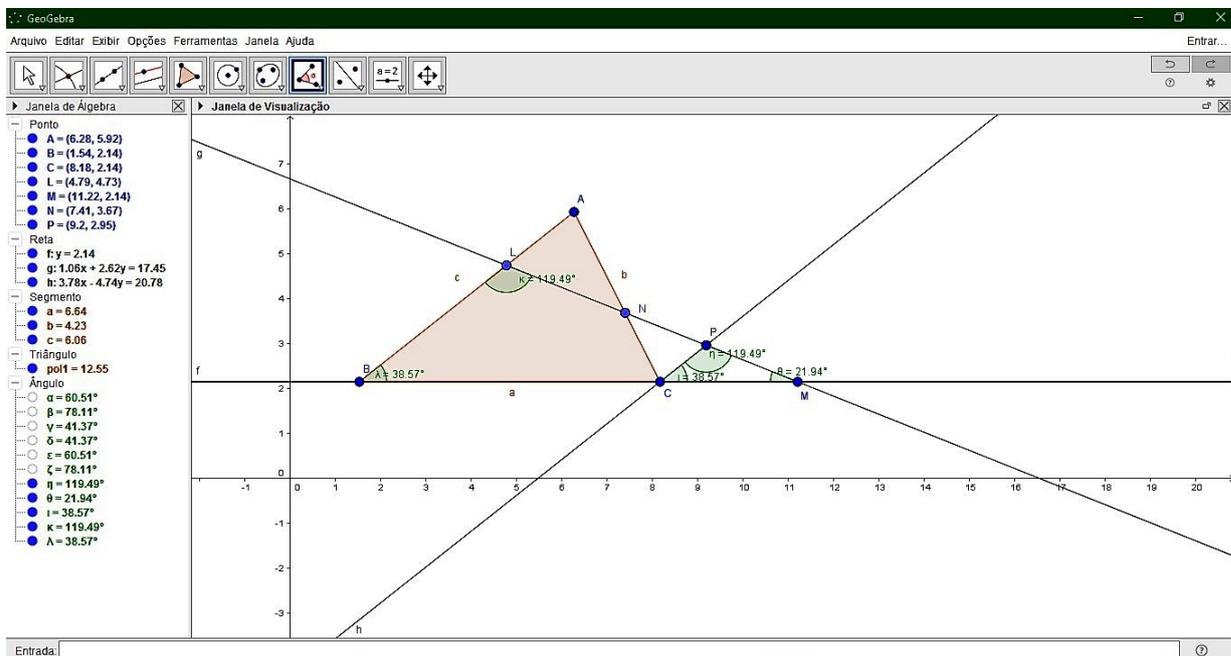


Figura 3.31: Ângulos congruentes.

Daí segue a seguinte relação  $\frac{\overline{MC}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{BL}}$  implicando em

$$\overline{CP} = \frac{\overline{MC} \cdot \overline{BL}}{\overline{MB}}. \quad (3.2)$$

Das duas relações obtidas entre os casos de semelhanças entre triângulos, temos o segmento  $\overline{CP}$  escrito de duas formas diferentes, dividindo as equações (3.1) e (3.2) obtemos

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{CP}} = \frac{\frac{\overline{LA} \cdot \overline{CN}}{\overline{AN}}}{\frac{\overline{MC} \cdot \overline{BL}}{\overline{MB}}}. \quad (3.3)$$

Temos então de (3.3) a equação a seguir

$$\begin{aligned} \frac{\overline{LA} \cdot \overline{CN} \cdot \overline{MB}}{\overline{AN} \cdot \overline{MC} \cdot \overline{BL}} &= 1 \\ \frac{\overline{LA}}{\overline{AN}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{CM}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{BL}} &= 1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Que prova que se os pontos L, M e N são colineares vale a relação descrita . Dando continuidade iremos verificar a demonstração da recíproca do Teorema de Menelaus, dado a validade da relação (3.4), então os pontos L, M e N são colineares.

Seja L, N e M pontos que pertencem as retas suportes  $r_{AB}$ ,  $r_{CA}$  e  $r_{BC}$ , respectivamente, de um  $\triangle ABC$  tal que satisfaz a relação (3.4). Mostraremos uma sequência construída através do Geogebra onde tomando um ponto  $L'$  sobre o segmento  $\overline{AB}$  diferente do ponto L, aquele ponto será colinear aos pontos M e N se  $L' = L$ . Sobre a reta suporte  $r_{AB}$  determinamos um ponto  $L'$ , para isso selecionamos a ferramenta ponto e clicamos em qualquer ponto distinto de L, sobre a reta suporte  $r_{AB}$

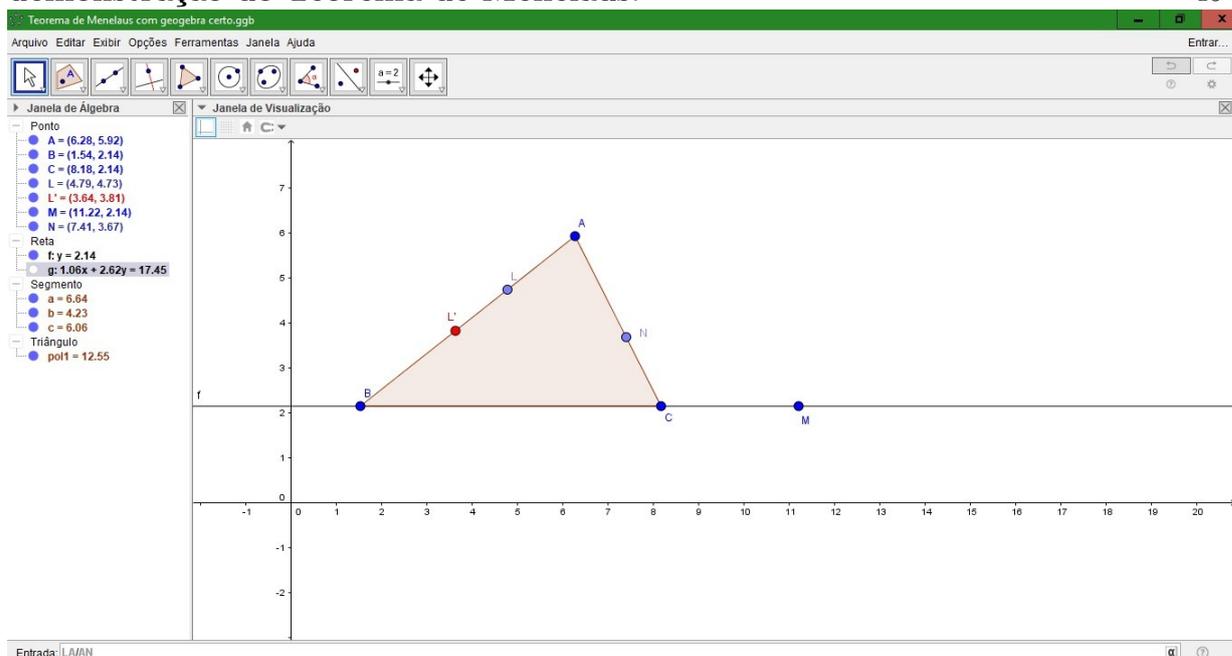


Figura 3.32: Ponto sobre a reta suporte  $r_{AB}$ .

agora inserimos no campo de entrada cada razão da relação (3.4)

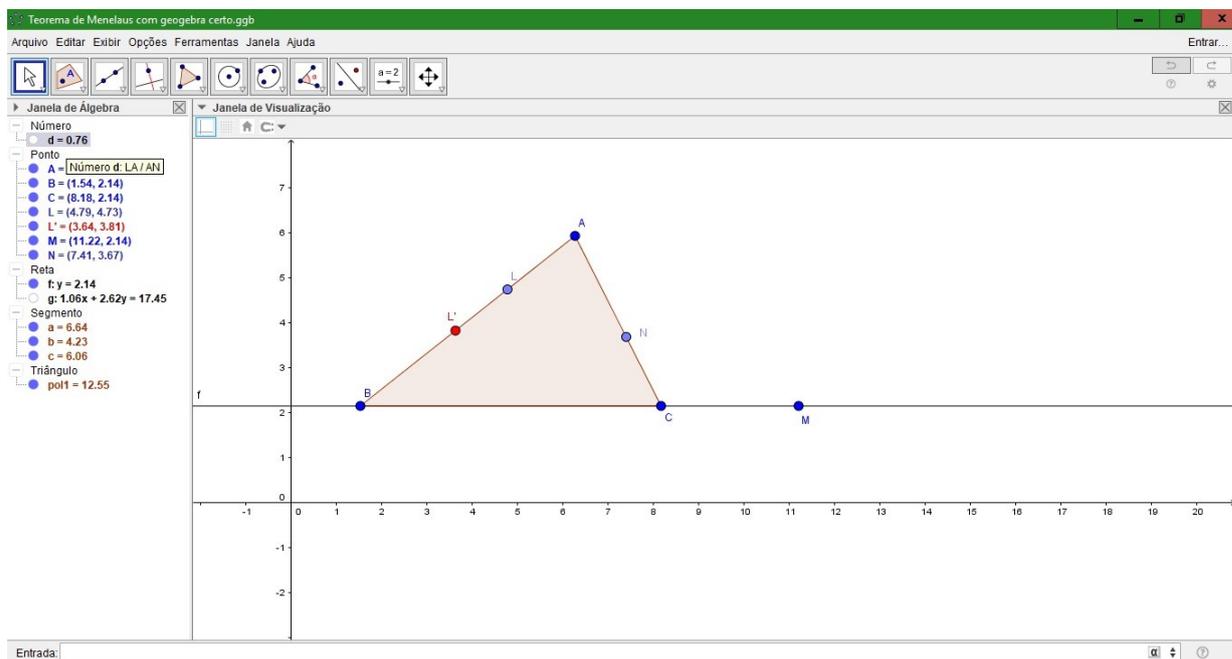


Figura 3.33: Razão  $\frac{\overline{LA}}{\overline{AN}}$ .

na janela de álgebra do Geogebra aparece o valor da razão em forma de um número decimal

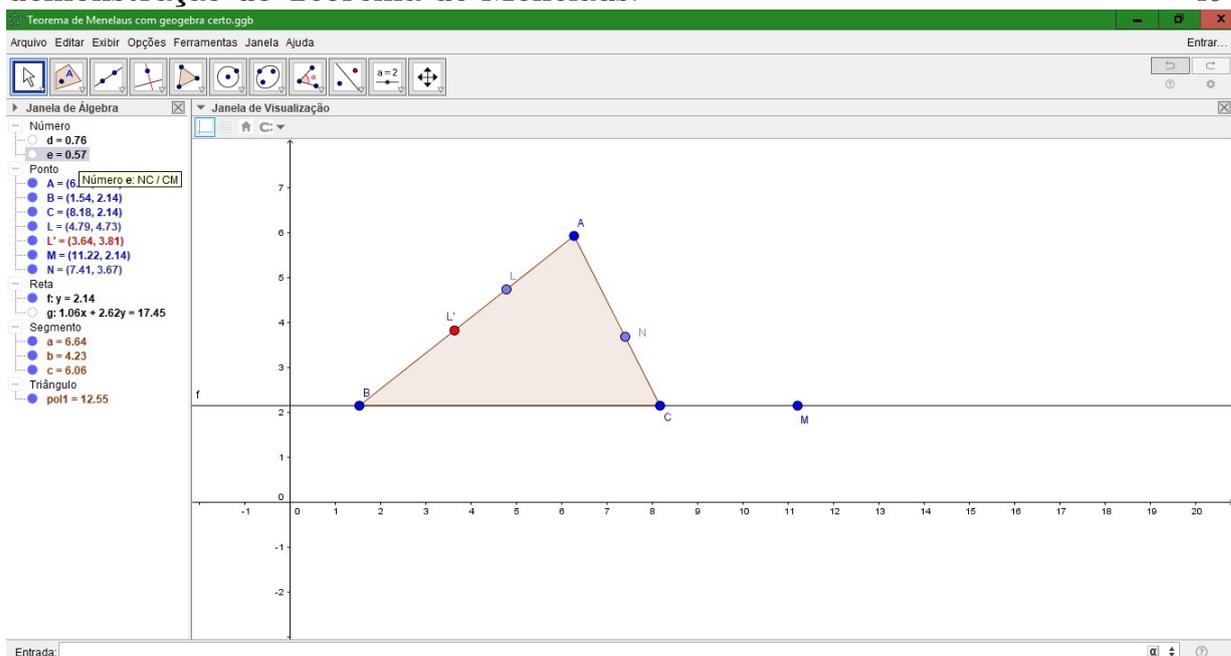


Figura 3.34: Razão  $\frac{NC}{CM}$ .

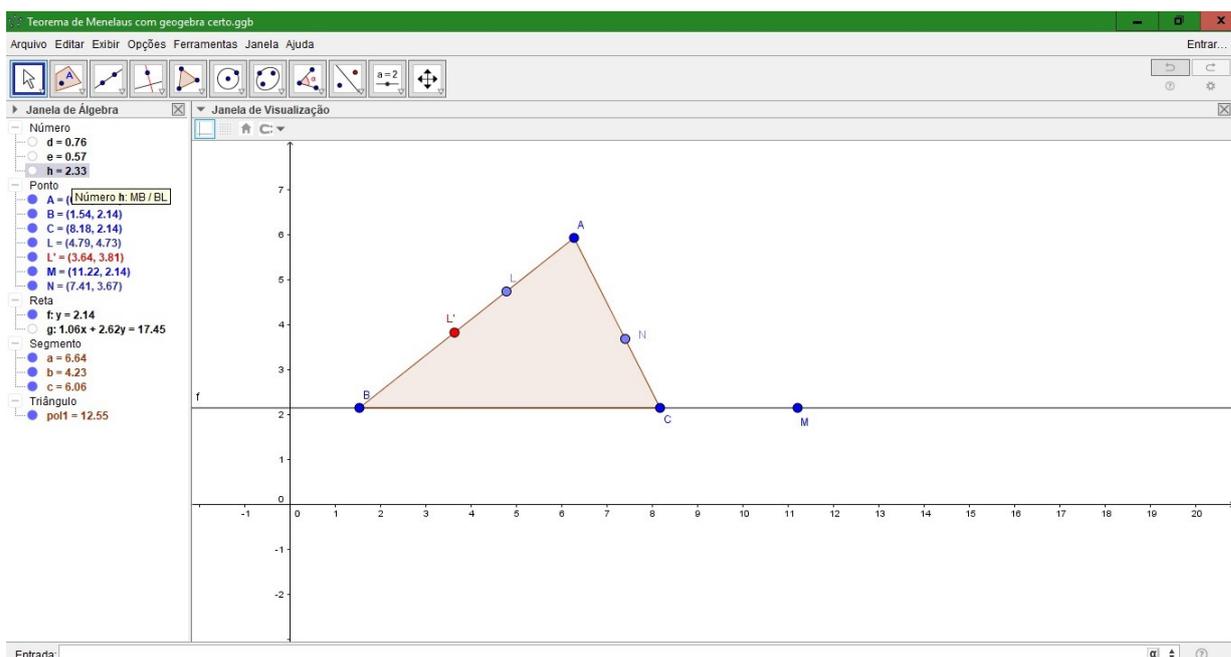


Figura 3.35: Razão  $\frac{MB}{BL}$ .

verifique que os números d, e e n da janela de álgebra são respectivamente as razões  $\frac{LA}{AN}$ ,  $\frac{NC}{CM}$  e  $\frac{MB}{BL}$ . Inserindo a multiplicação dos números d, e e h no campo de entrada do geogebra encontramos o número i que é igual a 1 como podemos observar na figura a seguir

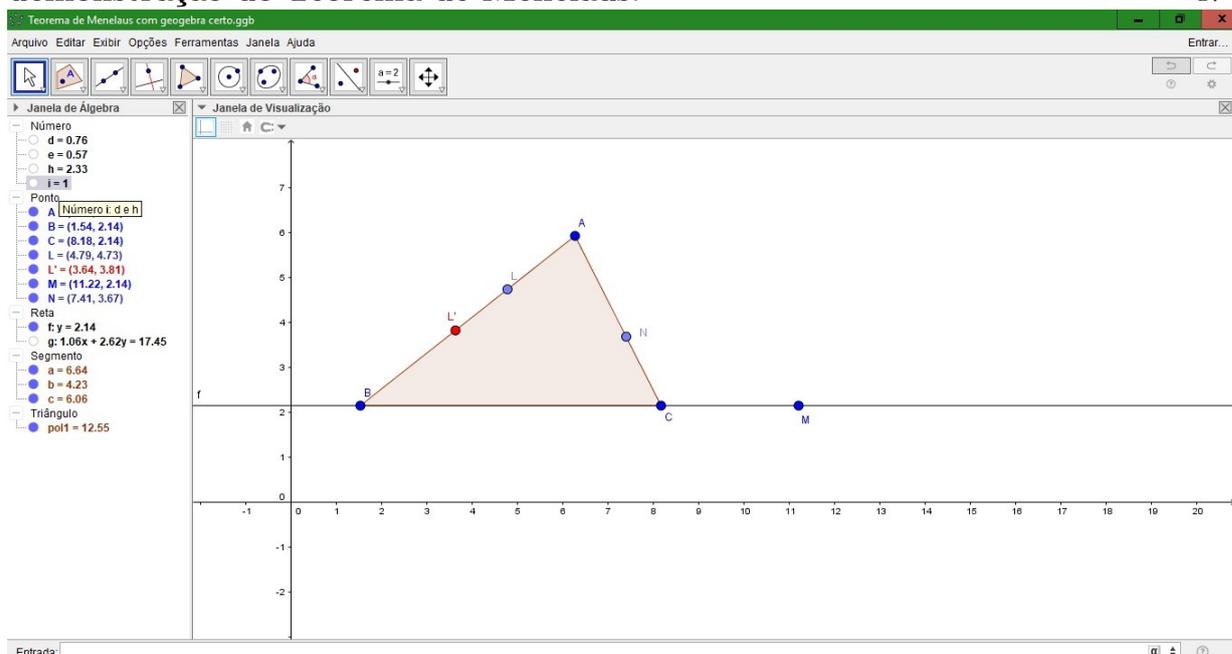


Figura 3.36: Produto dos números d, e e h.

criamos uma caixa de texto a qual iremos vincular uma formula que descreve a relação (3.4), na linguagem LATEX, como veremos observando a figura a seguir.

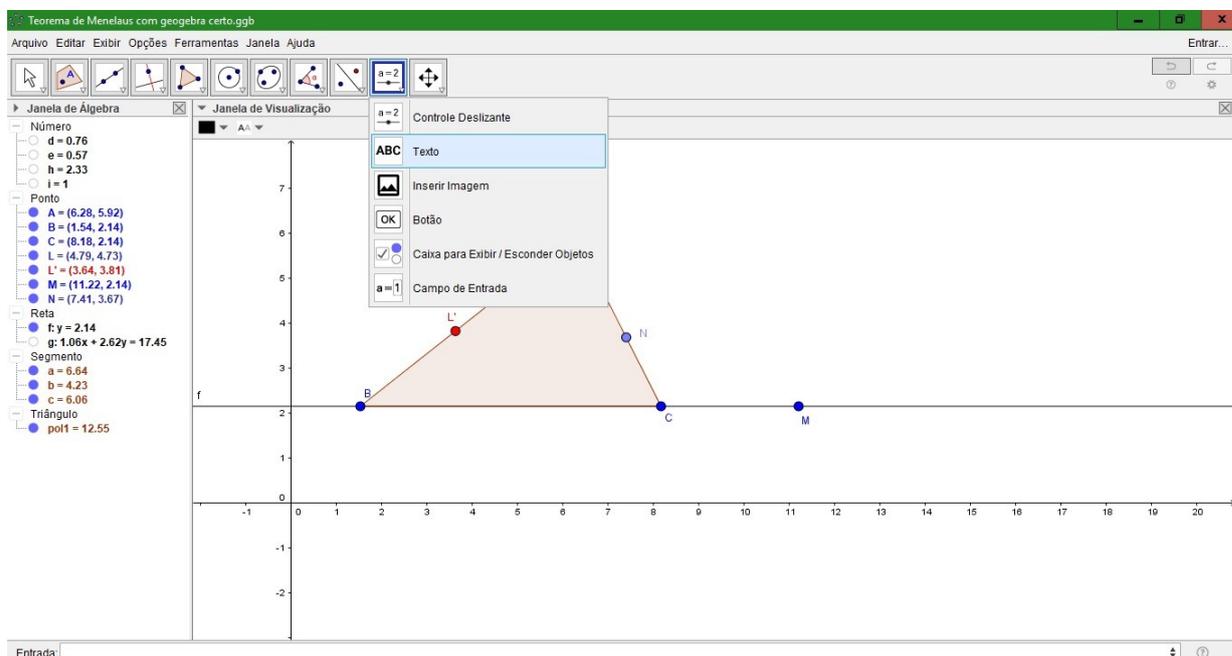


Figura 3.37: Criando uma caixa de texto.

Note que os números d, e e h são respectivamente as razões  $\frac{\overline{LA}}{\overline{AN}}$ ,  $\frac{\overline{NC}}{\overline{CM}}$  e  $\frac{\overline{MB}}{\overline{BL}}$ . Assim a multiplicação entre os números d, e e h inseridos no campo de entrada do geogebra é

igual ao número  $i$ , que representa a seguinte relação  $\frac{LA}{AN} \cdot \frac{NC}{CM} \cdot \frac{MB}{BL} = 1$ .

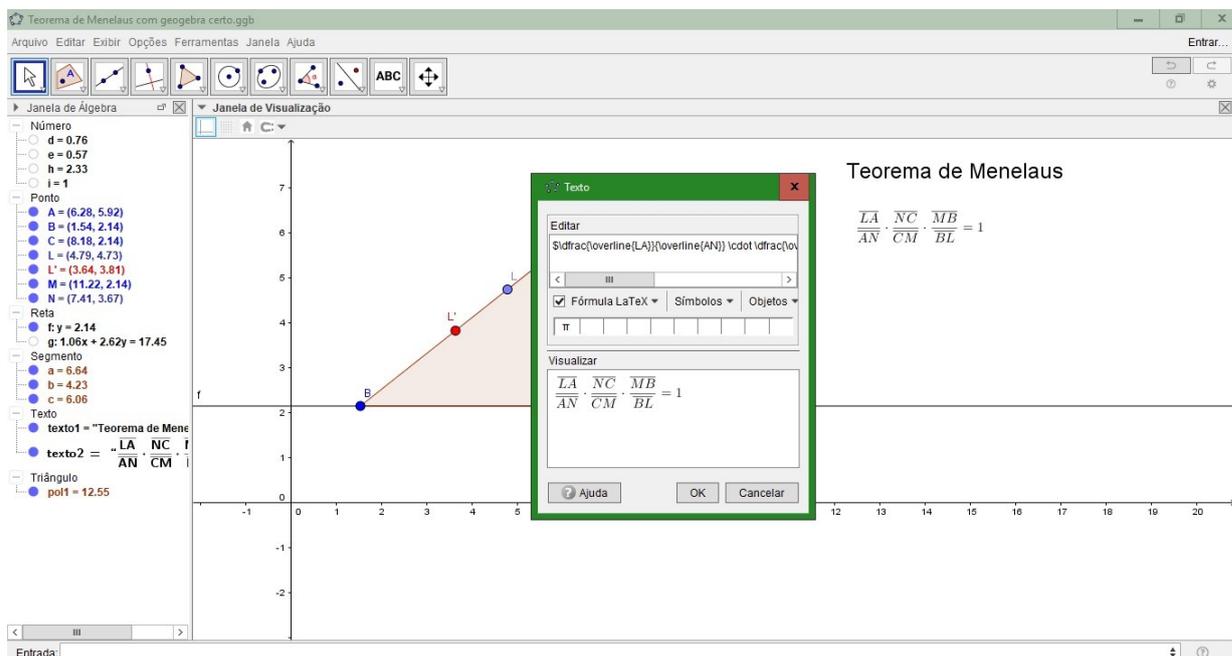


Figura 3.38: Inserindo a fórmula que descreve a relação (3.4).

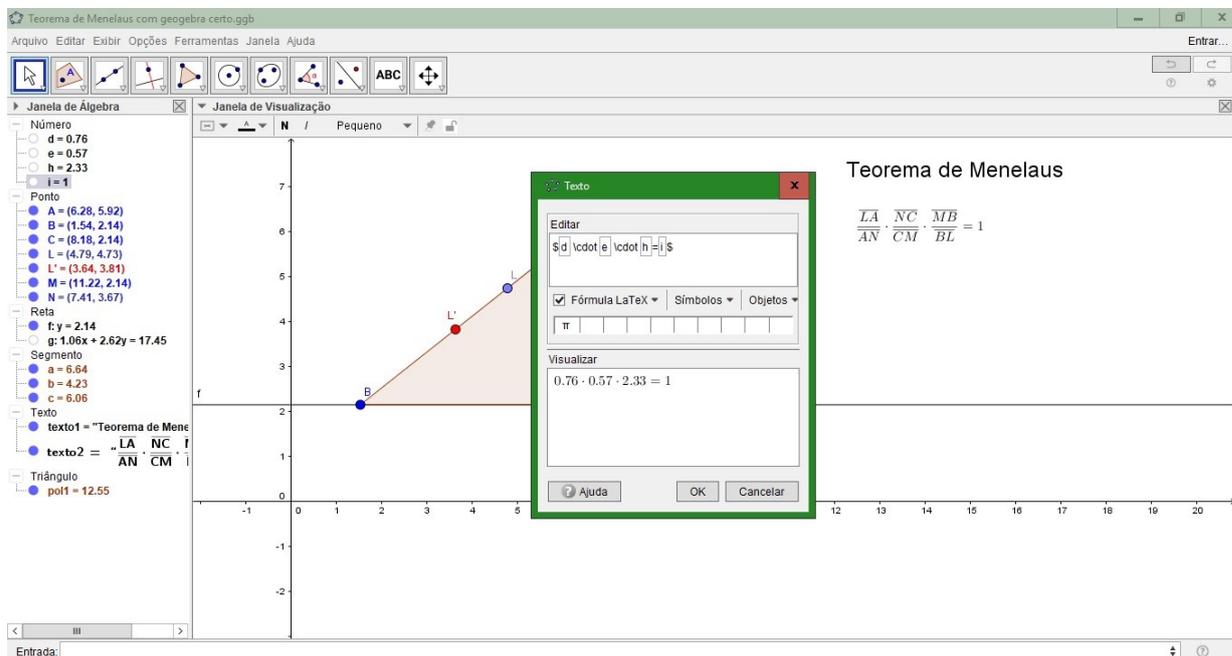


Figura 3.39: Inserindo a formula  $d \cdot e \cdot h = i$ .

Agora deformando o triângulo  $\triangle ABC$  a relação continua sendo igual a 1 como podemos observar nas figuras a seguir.

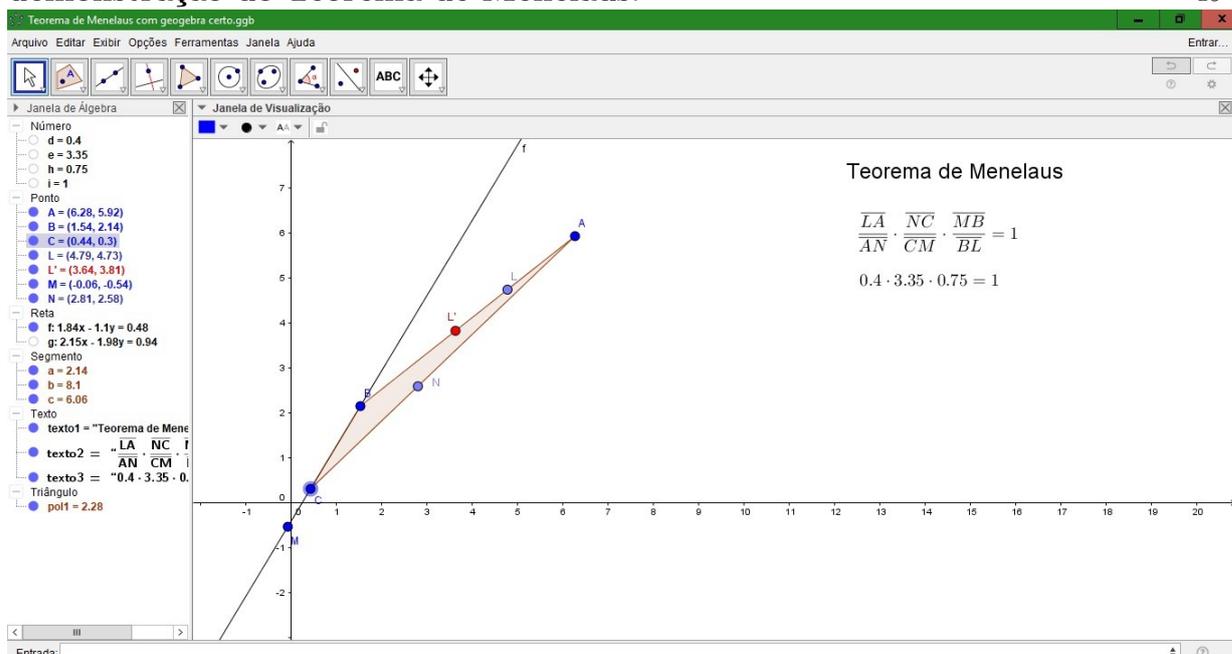


Figura 3.40: Deformando o triângulo  $\triangle ABC$ .

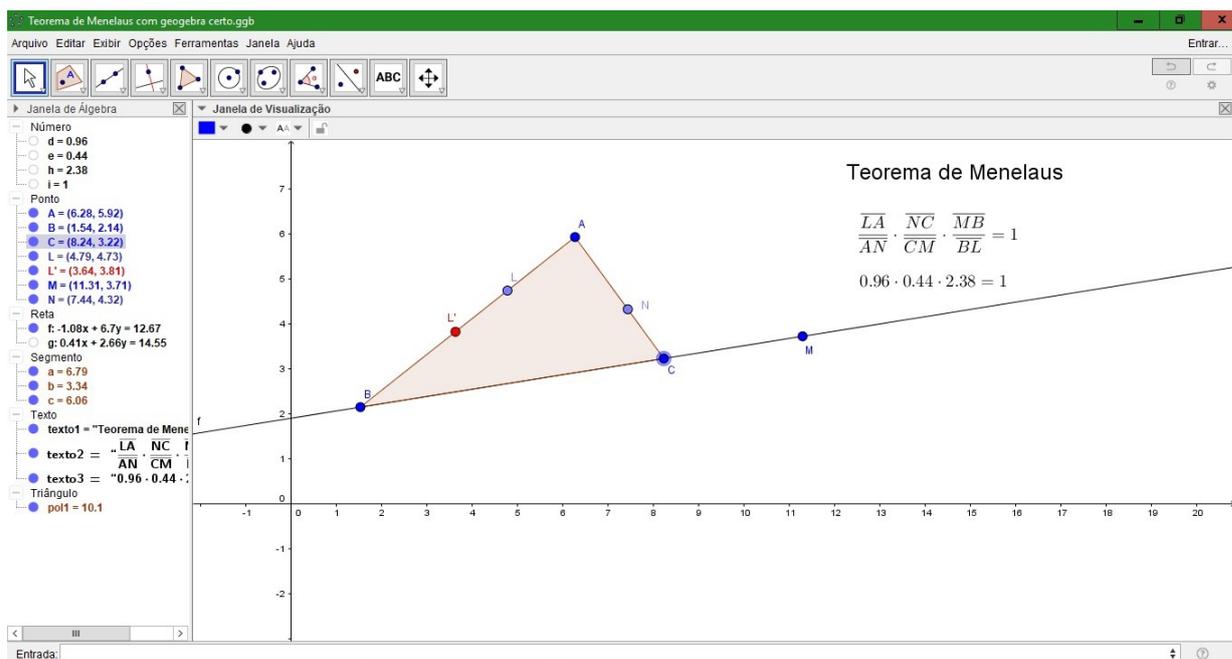


Figura 3.41: Deformando o triângulo  $\triangle ABC$ .

E finalmente passamos uma reta pelos pontos M e N que intersectam o ponto L mostrando que os pontos L, M e N são colineares, como é descrito na figura a seguir.

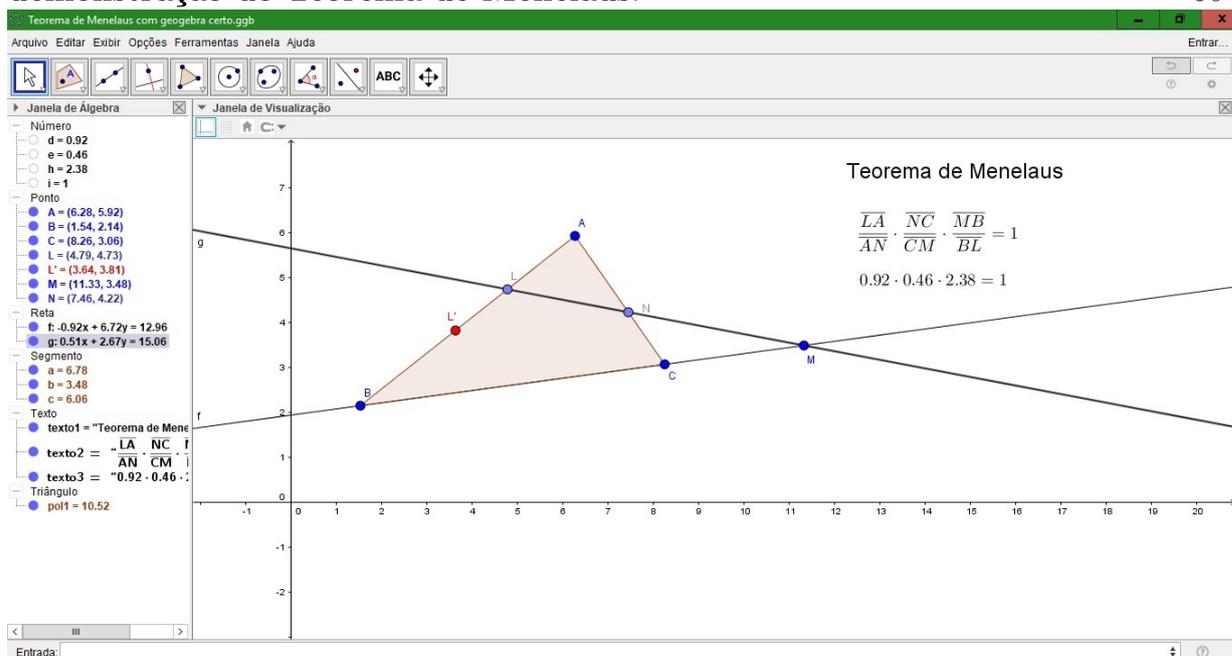


Figura 3.42: Reta passando pelos pontos M e N.

Portanto, para que o ponto  $L'$  seja colinear aos pontos M e N temos que ter  $L' = L$ . Com o uso do Geogebra podemos mostrar de maneira mais clara que dado um segmento, o ponto divisor do mesmo é único, tal argumentação da unicidade do ponto divisor de um segmento é feita construindo um segmento qualquer  $\overline{AB}$  e criando dois pontos M e N internos ao segmento construído; agora utilizando a caixa de entrada introduzimos a razão  $AM/MB$  e apertamos enter, analogamente fazemos  $AN/NB$  e apertamos enter com isso veremos na janela de álgebra os valores dessas razões. Em seguida se aproximarmos os pontos M e N observamos que os valores das razões tornam-se próximos da igualdade a medida que os pontos ficam sobrepostos, logo conclui-se a unicidade do ponto divisor de um segmento.

## Capítulo 4

# Aplicação do Teorema de Menelaus

Dada a importância do Teorema de Menelaus, existe uma grande quantidade de problemas relevantes que podem ser resolvidos aplicando este teorema. Assim, selecionamos algumas questões abordadas em olimpíadas e de vestibulares de importantes instituições de ensino superior. Além disso, apresentamos teoremas que usam a aplicação do teorema de Menelaus em suas demonstrações tais como, teorema de Desargues, teorema de Pappus, teorema de Pascal.

### 4.1 Aplicação em questões.

#### 4.1.1 Questão do vestibular IME - 2015/2016

Uma corda intercepta o diâmetro de um círculo de centro  $O$  no ponto  $C'$  segundo um ângulo de  $45^\circ$ . Sejam  $A$  e  $B$  os pontos extremos desta corda, e a distância  $AC'$  igual a  $\sqrt{3} + 1$  cm. O raio do círculo mede 2 cm, e  $C$  é a extremidade do diâmetro mais distante de  $C'$ . O prolongamento do segmento  $\overline{AO}$  intercepta  $\overline{BC}$  em  $A'$ . Calcule a razão em que  $A'$  divide  $\overline{BC}$ .

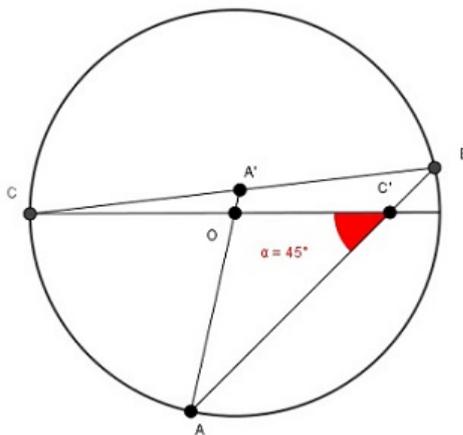


Figura 4.1: Representação gráfica da questão.

**Solução:** Fazemos  $x = \overline{OC'}$ , aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $\triangle OC'A$ , temos

$$\overline{OA}^2 = \overline{AC'}^2 + \overline{OC'}^2 - 2 \cdot \overline{OC'} \cdot \overline{AC} \cdot \cos 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow 2^2 = (\sqrt{3} + 1)^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot (\sqrt{3} + 1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4 = (4 + 2\sqrt{3}) + x^2 - x \cdot (\sqrt{3} + 1) \cdot \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + 2\sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{6})(x - \sqrt{2}) = 0.$$

Sabemos que a medida do raio é igual a dois, logo o segmento  $\overline{OC'}$  será menor que dois, ou seja temos que  $\overline{OC'} < 2$  logo temos que  $x = \sqrt{6}$  ou  $x = \sqrt{2}$  então  $x = \sqrt{2}$ . Agora tomemos T como ponto médio de  $\overline{AB}$ . Observe que o  $\triangle AOB$  é isósceles. Assim,  $\overline{OT}$  é perpendicular a  $\overline{AB}$ .

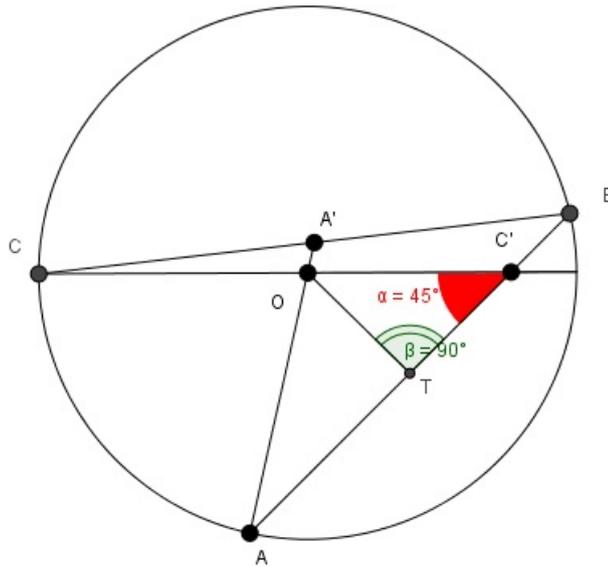


Figura 4.2: Representação gráfica da questão.

Como  $\overline{OC'} = \sqrt{2}$ ,  $\widehat{OC'T} = 45^\circ$  aplicando razões trigonométricas no triângulo  $\triangle OTC'$ , determinamos que  $\overline{OT} = \overline{TC'} = 1$ . Sendo  $\overline{AT} = \overline{TB}$  e  $\overline{TB} = \overline{BC'} + \overline{C'T}$  então  $\overline{BC'} = \sqrt{3} - 1$ . Agora aplicando o Teorema de Menelaus no triângulo  $\triangle CC'B$  e tendo como referência a reta  $A'A$  teremos

$$\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}} = 1$$

$$\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = 1$$

$$\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}}$$

$$\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{6}.$$

Portanto, a razão em que  $A'$  divide o segmento  $\overline{BC}$  é igual a  $\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{6}$ .

#### 4.1.2 Questão vestibular IME - 1990.

Prove que as tangentes ao círculo circunscrito a um triângulo, passando por seus vértices, interceptam os lados opostos em três pontos colineares.

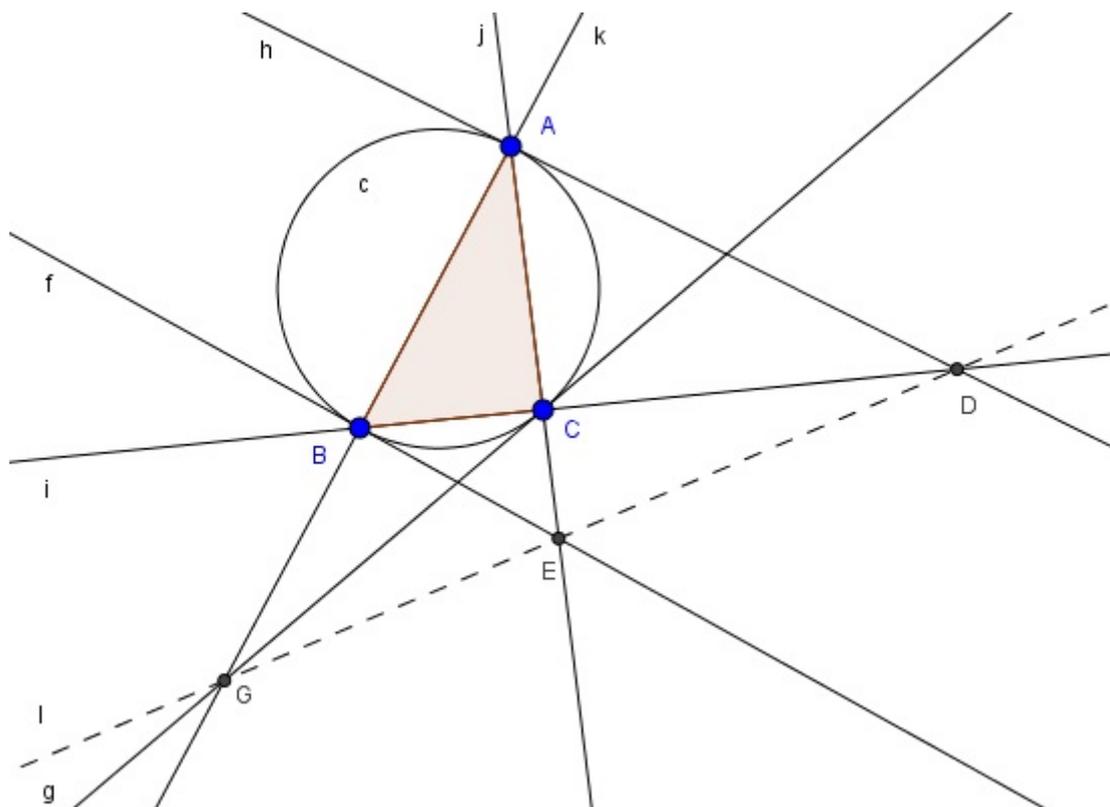


Figura 4.3: Representação gráfica da questão.

**Solução:**

Note que o ângulo  $\widehat{BAC}$  e o ângulo  $\widehat{EBC}$  correspondem ao mesmo arco BC da circunferência, então temos que

$$\widehat{BAC} = \widehat{EBC}.$$

assim segue que os triângulos,  $\triangle ABE$  e  $\triangle BCE$ , são semelhantes pelo caso AA. Sendo assim

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}, \tag{4.1}$$

da mesma forma, note que os ângulos,  $\widehat{BCG}$  e  $\widehat{BAC}$  correspondem ao mesmo arco BC da circunferência, então temos que

$$\widehat{BCG} = \widehat{BAC},$$

assim segue que os triângulos,  $\triangle CGB$  e  $\triangle AGC$ , são semelhantes pelo critério ângulo, ângulo, logo

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}, \tag{4.2}$$

enfim, observe que os ângulos  $\widehat{CAD}$  e  $\widehat{ABC}$  correspondem ao mesmo arco AC da circunferência, então temos que

$$\widehat{CAD} = \widehat{ABC},$$

logo os triângulos  $\triangle ACD$  e  $\triangle ABD$  são semelhantes pelo critério entre ângulos

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BA}}. \tag{4.3}$$

Agora multiplicando as equações (4.1), (4.2) e (4.3), obtemos a seguinte relação

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} \cdot \frac{\overline{CG}}{\overline{AG}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{BA}} = 1.$$

Portanto pela recíproca do Teorema de Menelaus, os pontos P, Q e R são colineares.

### 4.1.3 Questão Olimpíada Rioplatense 1997.

Seja ABCD um quadrado de lado 1. Sejam E e F os pontos médios dos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ . G é um ponto sobre  $\overline{CD}$  tal que  $\overline{GD} = 3\overline{GC}$ . As retas EG e AF se intersectam em O. Calcule a área do triângulo  $\triangle OFG$ .

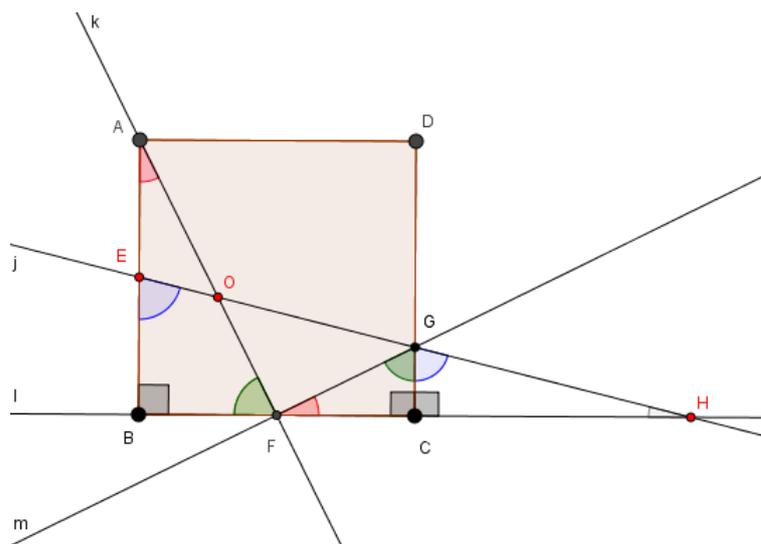


Figura 4.4: Representação gráfica da questão olimpíada Rioplatense.

**Solução:**

Dado o prolongamento das retas EG e BC, temos que elas intersectam-se em um ponto H, formando assim os triângulos  $\triangle EBH$  e  $\triangle GCH$  que são semelhantes pelo critério ângulo, ângulo. Sendo assim temos que  $\frac{\overline{GC}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{BH}} = \frac{1}{2}$ , logo o valor do segmento  $\overline{CH}$  do triângulo  $\triangle GCH$  é igual a 1. Note ainda que os triângulos  $\triangle ABF$  e  $\triangle FCG$  são semelhantes pelo critério ângulo, ângulo, por isso, podemos afirmar que o triângulo  $\triangle OFG$  é retângulo em F. Esse argumento é de suma importância para determinarmos a área do triângulo  $\triangle OFG$  pois só precisaremos determinar as medidas dos segmentos  $\overline{OF}$  e  $\overline{FG}$ . Para determinar o segmento  $\overline{FG}$  basta aplicarmos o Teorema de Pitagóras no triângulo  $\triangle FCG$

$$\overline{GF}^2 = \overline{FC}^2 + \overline{CG}^2$$

$$\overline{GF}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\overline{GF} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Agora para determinarmos o segmento  $\overline{OF}$  temos que aplicar o Teorema de Menelaus no triângulo  $\triangle ABF$  relacionando a reta EH;

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AO}} \cdot \frac{\overline{FO}}{\overline{FH}} \cdot \frac{\overline{BH}}{\overline{BE}} = 1$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\overline{AO}} \cdot \frac{\overline{FO}}{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{\frac{1}{2}} = 1$$

$$\frac{\overline{FO}}{\frac{3}{4} \cdot \overline{AO}} = 1$$

$$\overline{AO} = \frac{4}{3} \cdot \overline{FO},$$

como  $\overline{AF} = \overline{AO} + \overline{FO}$ , aplicando o Teorema de Pitagóras no triângulo  $\triangle ABF$ , determinamos o segmento  $\overline{AF}$ ;

$$\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BF}^2$$

$$\overline{AF}^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\overline{AF} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Logo segue que

$$\overline{AF} = \overline{AO} + \overline{FO}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{4}{3} \cdot \overline{FO} + \overline{FO}$$

$$\overline{FO} = \frac{3\sqrt{5}}{14}.$$

Finalmente poderemos calcular a área do triângulo  $\triangle OFG$

$$\frac{\frac{3\sqrt{5}}{14} \cdot \frac{\sqrt{5}}{4}}{2}.$$

Portanto a área do triângulo  $\triangle OFG$  é igual a  $\frac{15}{112}$ .

#### 4.1.4 Questão da Olimpíada Cone Sul.

Seja  $C$  uma circunferência de centro  $O$ ,  $\overline{AB}$  um diâmetro dela e  $R$  um ponto qualquer em  $C$  distinto de  $A$  e de  $B$ . Seja  $P$  a intersecção da perpendicular traçada por  $O$  a  $\overline{AR}$ . Sobre a reta  $OP$  se marca o ponto  $Q$ , de maneira que  $\overline{QP}$  é a metade de  $\overline{PO}$  e  $Q$  não pertence ao segmento  $\overline{OP}$ . Por  $Q$  traçamos a paralela a  $\overline{AB}$  que corta a reta  $AR$  em  $T$ . Chamamos de  $H$  o ponto de intersecção das retas  $AQ$  e  $OT$ . Provar que  $H$ ,  $R$  e  $B$  são colineares.

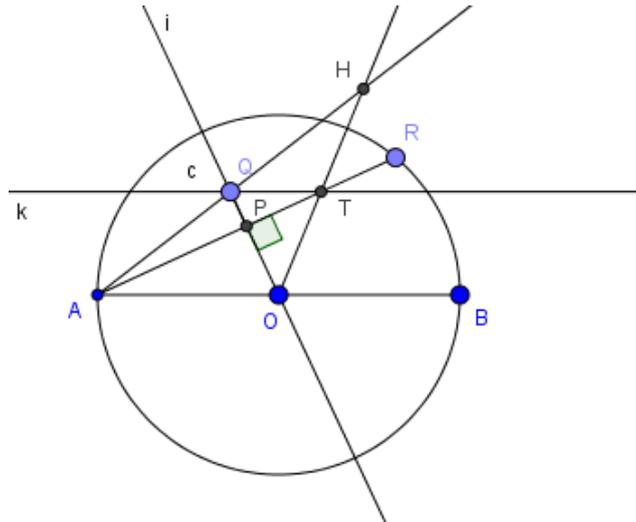


Figura 4.5: Representação gráfica da questão olimpíada Cone Sul.

**Solução:**

Através da construção perpendicular em P, temos uma relação de semelhança entre os triângulos  $\triangle APO$  e  $\triangle TPQ$ , sendo assim

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{TQ}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{TP}} = \frac{\overline{PO}}{\overline{QP}} = 2,$$

pois  $\overline{PO} = 2 \cdot \overline{PQ}$ . Assim  $\overline{AO} = 2 \cdot \overline{QT}$  e  $\overline{AP} = 2 \cdot \overline{TP}$ . Consideremos também os  $\triangle HAO$  e  $\triangle HQT$ , observe que eles possuem um ângulo comum  $\hat{H}$  e como os segmentos  $\overline{QT}$  e  $\overline{AO}$  são paralelos podemos afirmar que  $\hat{Q} = \hat{A}$  e  $\hat{T} = \hat{O}$ , com isso os triângulos aqui citados possuem uma relação de semelhança através do critério (ângulo, ângulo), sendo assim

$$\frac{\overline{HO}}{\overline{HT}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{QT}} = \frac{\overline{HA}}{\overline{HQ}}.$$

como  $\overline{AO} = 2 \cdot \overline{QT}$ , então  $\overline{HO} = 2 \cdot \overline{HT}$ . Sabendo que O é o centro da circunferência e o segmento OP é perpendicular a corda AR, temos então que  $\overline{AP} = \overline{RP}$  isto implica que

$$2 \cdot \overline{TP} = \overline{RT} + \overline{TP}$$

$$\overline{TP} = \overline{RT}.$$

Agora vamos desenvolver  $\overline{RA}$  como soma dos seguintes segmentos

$$\overline{RA} = \overline{RT} + \overline{TP} + \overline{PA}$$

$$\overline{RA} = \overline{RT} + \overline{RT} + 2 \cdot \overline{RT}$$

$$\overline{RA} = 4 \cdot \overline{RT}.$$

Sabemos também que  $\overline{BA} = 2 \cdot \overline{BO}$  aplicando o Teorema de Menelaus ao triângulo  $\triangle AOT$  temos que através de sua recíproca podemos enfim provar que os pontos H, B e R são colineares, como segue

$$\begin{aligned} \frac{\overline{HT}}{\overline{HO}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RT}} \cdot \frac{\overline{BO}}{\overline{BA}} &= \\ &= \frac{\overline{HT}}{2\overline{HT}} \cdot \frac{4 \cdot \overline{RT}}{\overline{RT}} \cdot \frac{\overline{BO}}{2 \cdot \overline{BO}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

## 4.2 Aplicação em outros teoremas

Nesta seção apresentaremos teoremas que necessitam da aplicação do Teorema de Menelaus em alguma passagem de suas demonstrações.

### 4.2.1 Teorema de Desargues

**Teorema 8.** *Quando dois triângulos têm os vértices dois a dois sobre três retas concorrentes, os três lados cortam-se dois a dois em três pontos situados em linha reta.*

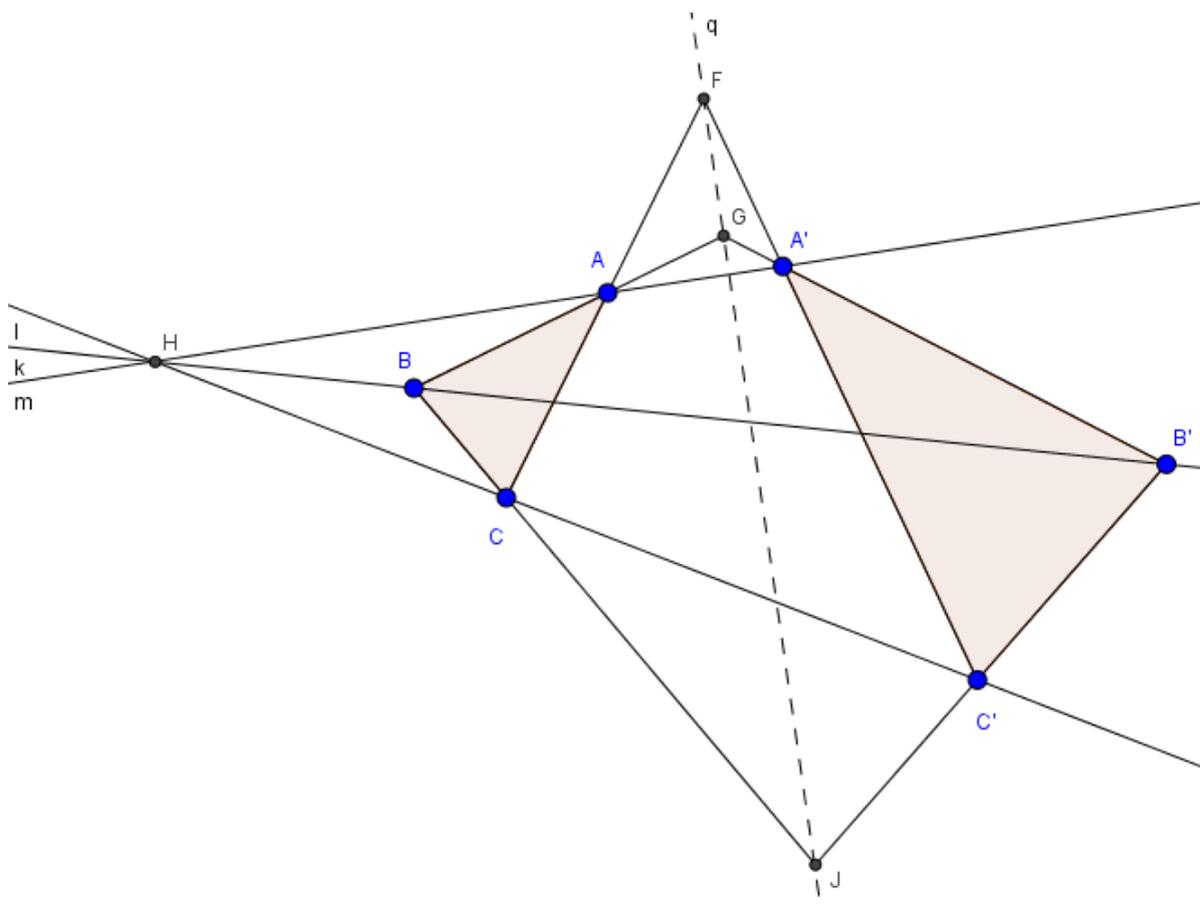


Figura 4.6: Teorema de Desargues.

**Demonstração:**

Aplicando o Teorema de Menelaus aos triângulos  $\triangle HBC$ ,  $\triangle HAB$ ,  $\triangle HAC$  com relação aos três trios de pontos  $\{JB'C'\}$ ,  $\{GA'B'\}$ ,  $\{FA'C'\}$  respectivamente, teremos as seguintes relações

$$\frac{\overline{BJ}}{\overline{CJ}} \cdot \frac{\overline{CC'}}{\overline{HC'}} \cdot \frac{\overline{HB'}}{\overline{BB'}} = 1 \tag{4.4}$$

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} \cdot \frac{\overline{AA'}}{\overline{HA'}} \cdot \frac{\overline{HC'}}{\overline{CC'}} = 1 \tag{4.5}$$

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{BG}} \cdot \frac{\overline{BB'}}{\overline{HB'}} \cdot \frac{\overline{HA'}}{\overline{AA'}} = 1, \tag{4.6}$$

agora multiplicando as equações (4.4), (4.5) e (4.6) chegamos a equação

$$\frac{\overline{BJ}}{\overline{CJ}} \cdot \frac{\overline{CC'}}{\overline{HC'}} \cdot \frac{\overline{HB'}}{\overline{BB'}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} \cdot \frac{\overline{AA'}}{\overline{HA'}} \cdot \frac{\overline{HC'}}{\overline{CC'}} \cdot \frac{\overline{AG}}{\overline{BG}} \cdot \frac{\overline{BB'}}{\overline{HB'}} \cdot \frac{\overline{HA'}}{\overline{AA'}} = 1$$

$$\frac{\overline{BJ}}{\overline{CJ}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} \cdot \frac{\overline{AG}}{\overline{BG}} = 1,$$

esta equação nos mostra a recíproca do Teorema de Menelaus aplicado ao triângulo  $\triangle ABC$ . Portanto os pontos J, F e G são colineares.

### 4.2.2 Teorema de Pappus.

**Teorema 9.** Quando um hexágono tem três de seus vértices sobre uma reta e os outros três sobre outra reta, os três pontos de interseção dos lados opostos são colineares.

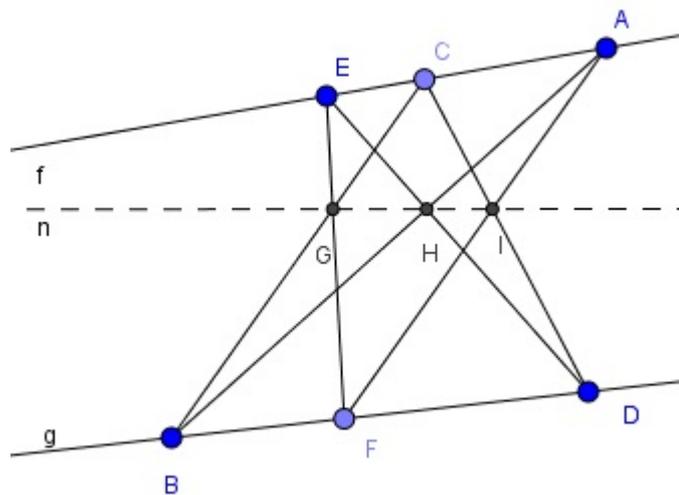


Figura 4.7: Teorema de Pappus

#### Demonstração:

Seja  $ABCDEF$ , o hexágono com vértices  $A, C$  e  $E$  sobre a reta  $f$  e  $B, D$  e  $F$  sobre a reta  $g$ . A figura abaixo mostra que os lados,  $\overline{AB} \cap \overline{ED} = \{H\}$ ,  $\overline{CD} \cap \overline{AF} = \{I\}$ ,  $\overline{BC} \cap \overline{EF} = \{G\}$ ,  $\overline{CD} \cap \overline{EF} = \{L\}$ ,  $\overline{AB} \cap \overline{EF} = \{J\}$  e  $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{K\}$ .

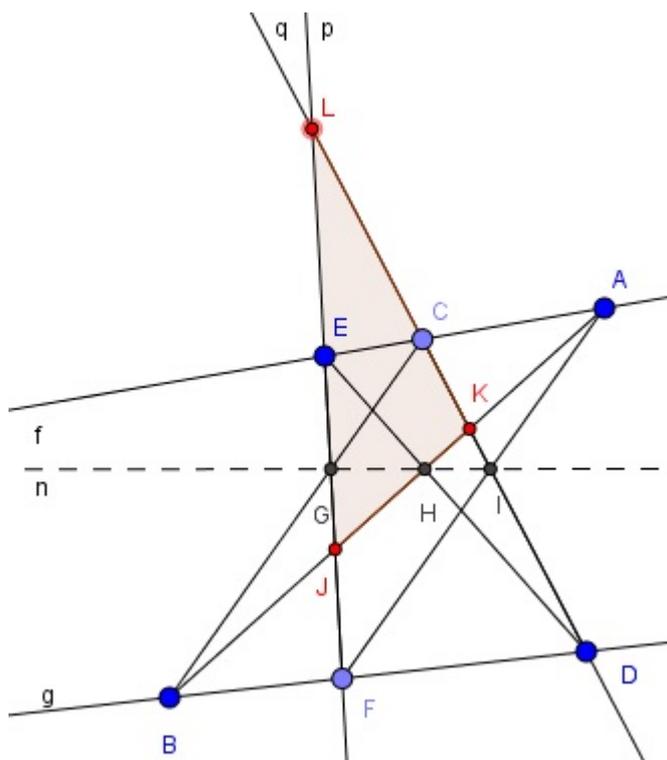


Figura 4.8: Prolongamento das retas EF e CD.

Considere o triângulo  $\triangle JKL$  cujas retas suportes dos lados são  $\overline{AB}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{EF}$ . Aplicando o Teorema de Menelaus para o triângulo em questão e os cinco trios de pontos colineares DEH, AFI, BCG, ACE, BFD, teremos

$$\frac{\overline{JH}}{\overline{HK}} \cdot \frac{\overline{KD}}{\overline{LD}} \cdot \frac{\overline{LE}}{\overline{JE}} = 1 \tag{4.7}$$

$$\frac{\overline{JA}}{\overline{HA}} \cdot \frac{\overline{KI}}{\overline{LI}} \cdot \frac{\overline{LF}}{\overline{JF}} = 1 \tag{4.8}$$

$$\frac{\overline{JB}}{\overline{KB}} \cdot \frac{\overline{KC}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{LG}}{\overline{JG}} = 1 \tag{4.9}$$

$$\frac{\overline{JA}}{\overline{KA}} \cdot \frac{\overline{KC}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{LE}}{\overline{JE}} = 1 \tag{4.10}$$

$$\frac{\overline{JB}}{\overline{KB}} \cdot \frac{\overline{KD}}{\overline{LD}} \cdot \frac{\overline{LF}}{\overline{JF}} = 1. \tag{4.11}$$

Multiplicando membro a membro (4.7), (4.8) e (4.9) e multiplicando (4.10) e (4.11), respectivamente, temos

$$\frac{\overline{JH}}{\overline{HK}} \cdot \frac{\overline{KD}}{\overline{LD}} \cdot \frac{\overline{LE}}{\overline{JE}} \cdot \frac{\overline{JA}}{\overline{HA}} \cdot \frac{\overline{KI}}{\overline{LI}} \cdot \frac{\overline{LF}}{\overline{JF}} \cdot \frac{\overline{JB}}{\overline{KB}} \cdot \frac{\overline{KC}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{LG}}{\overline{JG}} = 1. \tag{4.12}$$

$$\frac{\overline{JA}}{\overline{KA}} \cdot \frac{\overline{KC}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{LE}}{\overline{JE}} \cdot \frac{\overline{JB}}{\overline{KB}} \cdot \frac{\overline{KD}}{\overline{LD}} \cdot \frac{\overline{LF}}{\overline{JF}} = 1. \tag{4.13}$$

Dividindo membro a membro (4.12) e (4.13) obtemos:

$$\frac{\overline{JH}}{\overline{HK}} \cdot \frac{\overline{KI}}{\overline{LI}} \cdot \frac{\overline{LF}}{\overline{JF}} = 1.$$

Logo, esta equação nos dá a recíproca do Teorema de Menelaus aplicado ao triângulo  $\triangle JKL$ . Portanto, G, H e I são colineares.

### 4.2.3 Teorema de Pascal.

**Teorema 10.** *Em todo hexágono regular (convexo ou não convexo) inscrito em uma circunferência, os pontos de interseção dos lados opostos estão em linha reta. (A reta que contém esses três pontos, chama-se reta de Pascal).*

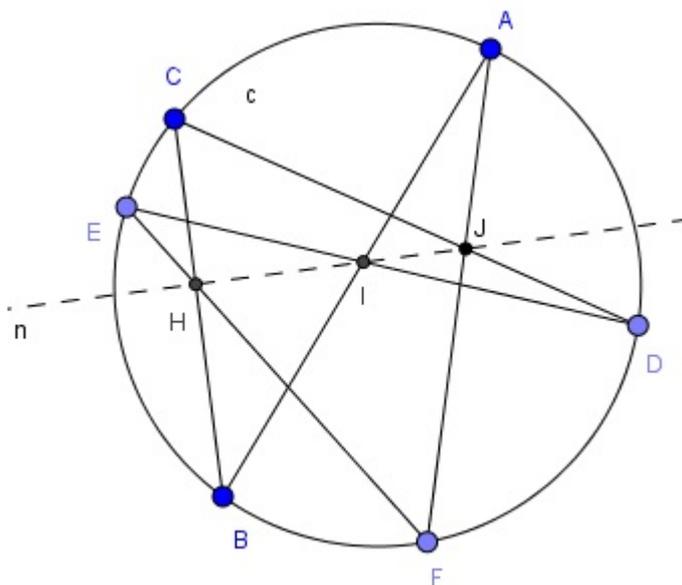


Figura 4.9: Teorema de Pascal.

**Demonstração:** Seja o triângulo  $\triangle KLM$ , formado pelo diâmetro AB e pelas retas l e m que intersectam - se no ponto M, conforme podemos observar na figura a seguir

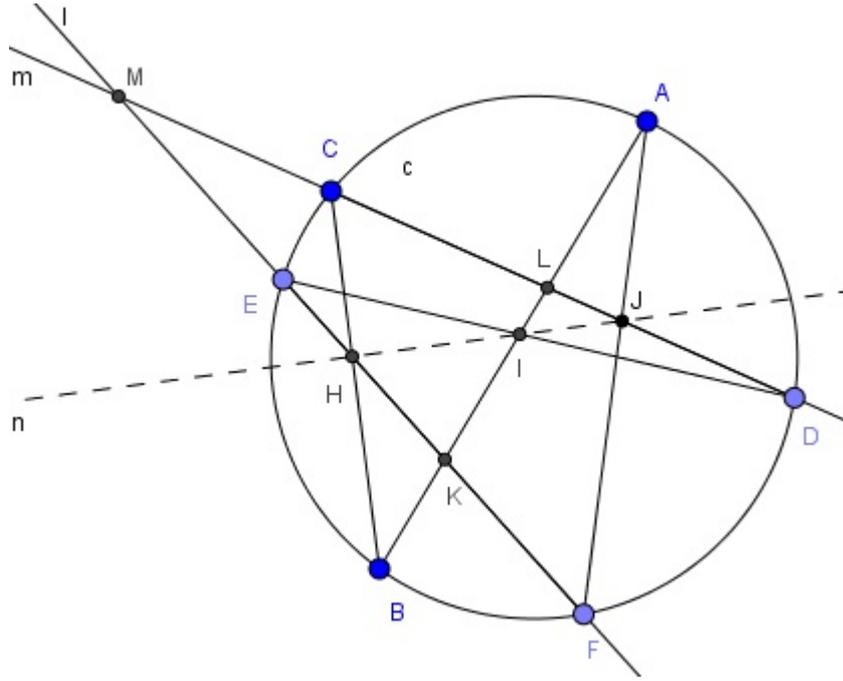


Figura 4.10: Demonstração do Teorema de Pascal.

Iremos provar que  $\overline{AB} \cap \overline{DE} = \{I\}$ ,  $\overline{CD} \cap \overline{FA} = \{J\}$  e  $\overline{BC} \cap \overline{EF} = \{H\}$ , são pontos colineares. Aplicando o Teorema de Menelaus ao triângulo  $\triangle KLM$  com relação aos trios de pontos  $\{D, I, E\}$ ,  $\{A, F, J\}$  e  $\{B, C, H\}$ , temos as seguintes relações

$$\frac{\overline{KI}}{\overline{LI}} \cdot \frac{\overline{LD}}{\overline{MD}} \cdot \frac{\overline{ME}}{\overline{KE}} = 1 \quad (4.14)$$

$$\frac{\overline{KA}}{\overline{LA}} \cdot \frac{\overline{LJ}}{\overline{MJ}} \cdot \frac{\overline{MF}}{\overline{KF}} = 1 \quad (4.15)$$

$$\frac{\overline{KB}}{\overline{LB}} \cdot \frac{\overline{LC}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{MH}}{\overline{KH}} = 1 \quad (4.16)$$

multiplicando as igualdades (4.14), (4.15) e (4.16), membro a membro, temos

$$\frac{\overline{KI}}{\overline{LI}} \cdot \frac{\overline{LD}}{\overline{MD}} \cdot \frac{\overline{ME}}{\overline{KE}} \cdot \frac{\overline{KA}}{\overline{LA}} \cdot \frac{\overline{LJ}}{\overline{MJ}} \cdot \frac{\overline{MF}}{\overline{KF}} \cdot \frac{\overline{KB}}{\overline{LB}} \cdot \frac{\overline{LC}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{MH}}{\overline{KH}} = 1. \quad (4.17)$$

Observe que  $\overline{ME} \cdot \overline{MF} = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$ ,  $\overline{KA} \cdot \overline{KB} = \overline{KE} \cdot \overline{KF}$  e  $\overline{LC} \cdot \overline{LD} = \overline{LA} \cdot \overline{LB}$  pela propriedade da potência de um ponto, substituindo em (4.17) chegamos a seguinte relação

$$\frac{\overline{LD}}{\overline{MD}} \cdot \frac{\overline{ME}}{\overline{KE}} \cdot \frac{\overline{KA}}{\overline{LA}} \cdot \frac{\overline{MF}}{\overline{KF}} \cdot \frac{\overline{KB}}{\overline{LB}} \cdot \frac{\overline{LC}}{\overline{MC}} = 1$$

$$\frac{\overline{KI}}{\overline{LI}} \cdot \frac{\overline{LJ}}{\overline{MJ}} \cdot \frac{\overline{MH}}{\overline{KH}} = 1.$$

Portanto os pontos H, I e J são colineares.

A reta que contém os pontos H, I e J, chama-se Reta de Pascal.

#### 4.2.4 Reta de Simson - Wallace.

**Teorema 11.** *Seja  $ABC$  um triângulo. Os pés das três perpendiculares traçadas de um ponto  $P$  aos lados do  $\triangle ABC$  são colineares se, e somente se, o ponto  $P$  pertencer a circunferência circunscrita ao triângulo  $\triangle ABC$ .*

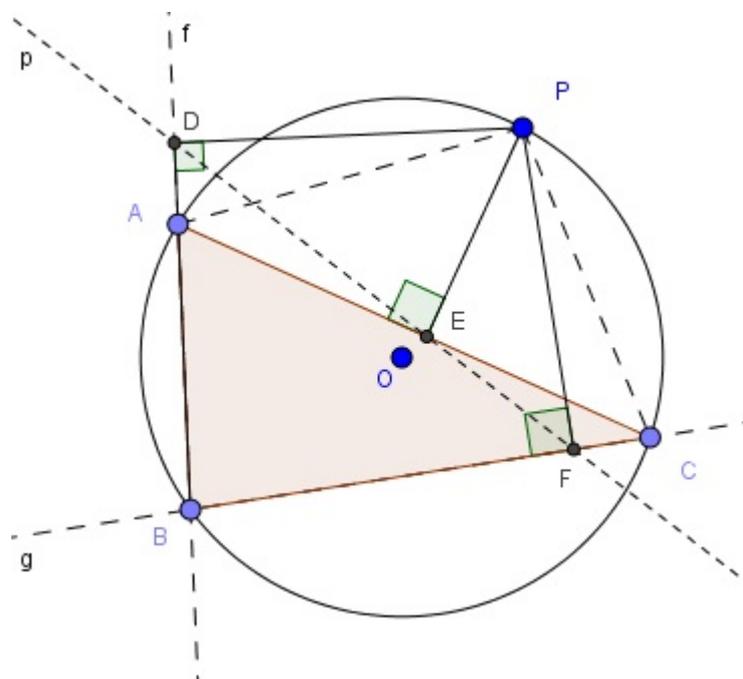


Figura 4.11: Reta de Simson - Wallace.

#### Demonstração:

Primeiro vamos provar que se  $P$  está na circunferência circunscrita ao triângulo  $\triangle ABC$ , então os três pés das perpendiculares aos lados desse triângulo são colineares. Pelo Teorema de Menelaus devemos mostrar que

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = 1.$$

Note que o ângulo  $\widehat{PAC}$  é inscrito a circunferência e relaciona o arco  $PC$  da mesma, logo

$$\widehat{P\hat{A}C} = \widehat{B} - \widehat{P\hat{A}C}$$

então, temos que

$$\widehat{B} + \widehat{C} = D\widehat{A}C$$

$$\widehat{B} + \widehat{C} = D\widehat{A}P + \widehat{P\hat{A}C}$$

$$\widehat{B} + \widehat{C} = D\widehat{A}P + \widehat{B} - \widehat{P\hat{C}A}$$

$$\widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{C} + \widehat{P\hat{C}A}$$

$$\widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{P\hat{C}B}.$$

Logo o triângulo  $\triangle PDA$  é semelhante ao triângulo  $\triangle PFC$  e pelo critério de semelhança entre os triângulos  $\triangle PDA$  e  $\triangle PFC$ , obtemos

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PF}}. \quad (4.18)$$

Note que os ângulos  $\widehat{P\hat{B}F}$  e  $\widehat{P\hat{A}B}$  são congruentes, logo os triângulos  $\triangle PFB$  e  $\triangle PEA$  são semelhantes, assim

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{PF}}{\overline{PE}}. \quad (4.19)$$

Temos ainda que os ângulos  $\widehat{P\hat{B}D}$  e  $\widehat{P\hat{C}B}$  são congruentes, logo os triângulos  $\triangle PDB$  e  $\triangle PEC$  são semelhantes, assim

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{PE}}{\overline{PD}}. \quad (4.20)$$

Multiplicando as equações (4.18), (4.19) e (4.20) temos

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PF}} \cdot \frac{\overline{PF}}{\overline{PE}} \cdot \frac{\overline{PE}}{\overline{PD}}$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{BD}} = 1.$$

Portanto pelo Teorema de Menelaus, temos que os pontos D, E e F são colineares.

### 4.2.5 Reta de Gauss - Newton.

Para iniciar a demonstração do teorema iremos definir o que é um quadrilátero completo e o que é Reta de Newton.

**Definição 8.** (*Reta de Newton*). A reta que une os pontos médios das diagonais de um quadrilátero convexo, não paralelogramo, é chamada Reta de Newton.

**Definição 9.** (*Quadrilátero completo*). Sejam quatro retas de um plano em que cada uma intercepta as outras em apenas um ponto, não havendo triplas retas concorrentes. A essa configuração dá-se o nome de Quadrilátero Completo.

**Teorema 12.** Os pontos médios das diagonais de um quadrilátero completo são colineares e formam a reta de Gauss-Newton

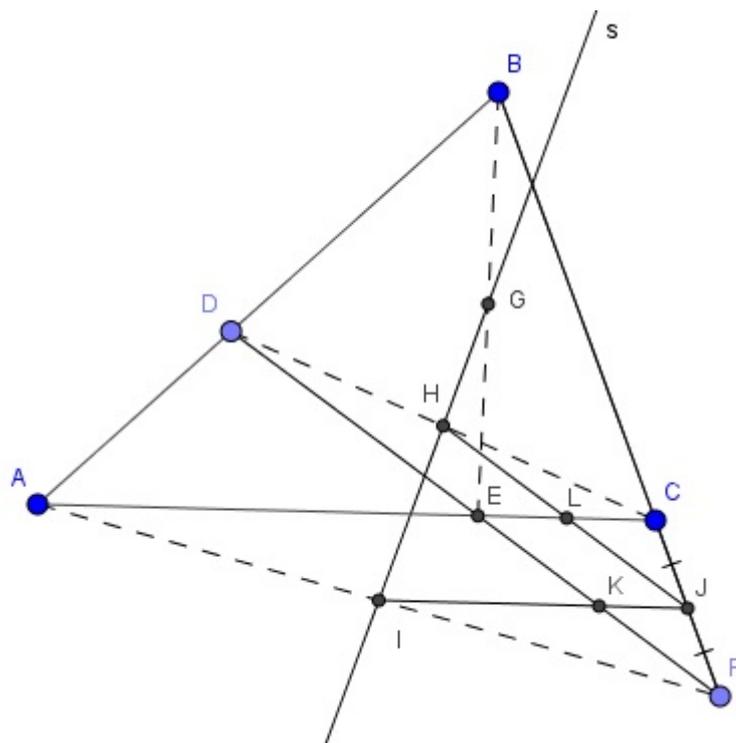


Figura 4.12: Reta de Gauss - Newton.

**Demonstração:** Dados os pontos G, H e I respectivamente pontos médios das diagonais BE, DC e AF do quadrilátero completo ADBCFE traçamos por I uma reta paralela ao lado  $\overline{AC}$  de modo que esta reta intercepta  $\overline{CF}$  em J, como I é ponto médio do segmento

$\overline{AF}$ , então J é ponto médio do segmento  $\overline{CF}$  logo o segmento  $\overline{IJ}$  é base média do triângulo  $\triangle ACF$ . Analogamente o segmento  $\overline{HJ}$  é base média do triângulo  $\triangle FDC$  e paralelo à reta DF.

Seja L o ponto que intercepta o segmento  $\overline{AC}$  com  $\overline{HJ}$  e K o ponto que intercepta o segmento  $\overline{DF}$  com o segmento  $\overline{IJ}$  pela Lei de Proporcionalidade de Tales no triângulo  $\triangle ACF$  se  $\overline{FI} = \overline{JA}$  e  $\overline{FJ} = \overline{JC}$ , então  $\overline{FK} = \overline{KE}$ . Analogamente para o triângulo  $\triangle FDC$  se  $\overline{CH} = \overline{HD}$  e  $\overline{CJ} = \overline{JD}$ , então  $\overline{CL} = \overline{LE}$ .

Assim a reta KL encontra G (ponto médio de  $\overline{BE}$ ), formando a base média do triângulo  $\triangle EBF$ , como mostra a figura a seguir

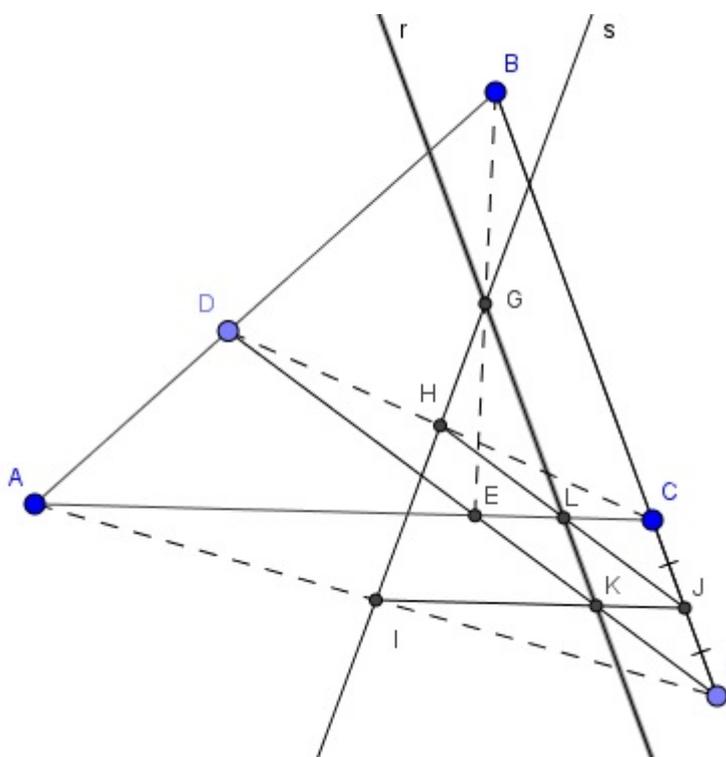


Figura 4.13: Reta de Gauss Newton.

Agora aplicando o Teorema de Menelaus ao triângulo  $\triangle CEF$  com relação a reta AB temos a seguinte relação

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{ED}}{\overline{DF}} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{BC}} = 1, \tag{4.21}$$

que mostra que os pontos A, D e B são colineares, como é visto. Note que as bases médias dos triângulos formados determinam as seguintes equações para o triângulo  $\triangle FCA$

$$\overline{CA} = 2 \cdot \overline{JI},$$

para o triângulo  $\triangle FAE$

$$\overline{AE} = 2 \cdot \overline{IK},$$

para o triângulo  $\triangle CED$

$$\overline{ED} = 2 \cdot \overline{LH},$$

para o triângulo  $\triangle CDF$

$$\overline{DF} = 2 \cdot \overline{HJ},$$

para o triângulo  $\triangle EFB$

$$\overline{FB} = 2 \cdot \overline{KG},$$

para o triângulo  $\triangle EBC$

$$\overline{BC} = 2 \cdot \overline{GL}.$$

Substituindo essas seis equações em (4.18) obtemos

$$\frac{2 \cdot \overline{JI}}{2 \cdot \overline{IK}} \cdot \frac{2 \cdot \overline{LH}}{2 \cdot \overline{HJ}} \cdot \frac{2 \cdot \overline{KG}}{2 \cdot \overline{GL}} = 1$$

$$\frac{\overline{KG}}{\overline{GL}} \cdot \frac{\overline{LH}}{\overline{HJ}} \cdot \frac{\overline{JI}}{\overline{IK}} = 1.$$

Logo pelo teorema recíproco de Menelaus aplicado ao triângulo  $\triangle JKL$  temos que os pontos G, H e I são colineares.

#### 4.2.6 Baricentro.

**Teorema 13.** *Se G é o baricentro do triângulo  $\triangle ABC$ , então  $\frac{\overline{AG}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{GE}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{GF}} = 2$ .*

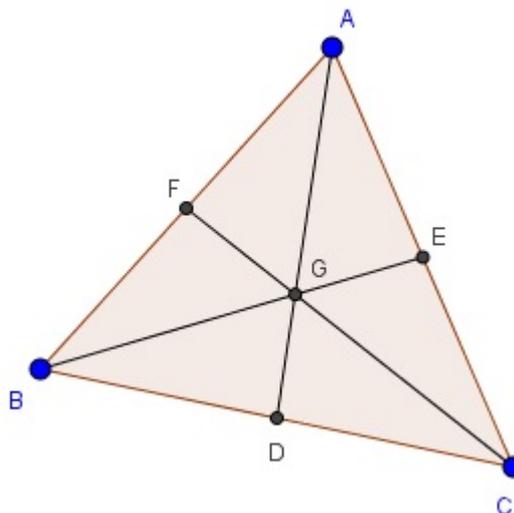


Figura 4.14: Baricentro.

Para demonstração deste teorema fazemos três aplicações do Teorema de Menelaus aos triângulos  $\triangle ABD$ ,  $\triangle BCF$  e  $\triangle CAF$ . Considere o triângulo  $\triangle ABD$  com a reta  $FC$ . Observe que

$$\overline{BD} = \overline{DC}$$

$$\overline{AF} = \overline{FB}$$

$$\overline{AE} = \overline{EC}$$

$$\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DC}$$

$$\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{FB}$$

$$\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{EC}.$$

Aplicando o Teorema de Menelaus ao triângulo  $\triangle ABD$  com relação a reta  $FC$ , obtemos

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{DG}}{\overline{GA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1$$

$$\frac{\overline{BD} + \overline{DC}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{DG}}{\overline{GA}} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{FB}} = 1$$

$$\frac{\overline{DC} + \overline{DC}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{DG}}{\overline{GA}} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{FB}} = 1$$

$$\frac{2 \cdot \overline{DC}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{DG}}{\overline{GA}} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{FB}} = 1$$

$$2 \cdot \frac{\overline{DG}}{\overline{GA}} = 1$$

$$\frac{\overline{GA}}{\overline{DG}} = 2.$$

As outras duas relações são demonstradas de forma análoga.

### 4.2.7 Bissetrizes de um triângulo qualquer.

**Proposição 2.** *As bissetrizes internas de dois ângulos de um triângulo não isósceles e a bissetriz externa do terceiro ângulo cortam os lados opostos em três pontos colineares.*

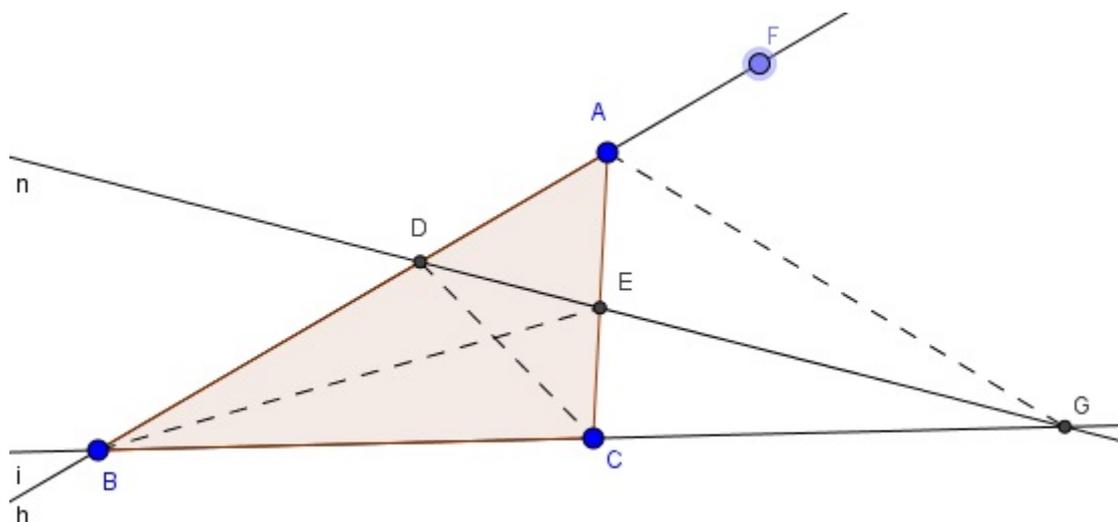


Figura 4.15: Bissetrizes.

#### Demonstração:

Dado um triângulo  $\triangle ABC$  não isósceles, sejam  $BE$  e  $CD$  suas bissetrizes internas, referente aos ângulos  $\widehat{ABC}$  e  $\widehat{BCA}$  e  $AG$  a bissetriz externa referente ao ângulo  $\widehat{FAC}$ . Note que aplicando o Teorema da Bissetriz, a bissetriz interna  $\overline{CD}$  temos que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}}$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{CA}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{DB}} = 1. \tag{4.22}$$

Aplicando o Teorema da Bissetriz a bissetriz interna  $\overline{BE}$  temos que

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{AB}}$$

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{EA}} = 1, \quad (4.23)$$

e aplicando o Teorema da Bissetriz a bissetriz externa  $\overline{AG}$  temos que

$$\frac{\overline{GB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{GC}}{\overline{AC}}$$

$$\frac{\overline{GB}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{GC}} = 1, \quad (4.24)$$

assim multiplicando membro a membro as equações (4.22), (4.23) e (4.24) obtemos

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{CA}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{GB}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{GC}} = 1$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{GB}}{\overline{GC}} = 1.$$

Portanto, pela recíproca do Teorema de Menelaus, os pontos D, E e G são colineares.

# Capítulo 5

## Apêndice

### 5.1 Geogebra

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar, possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países tornando-se um líder na área de softwares de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática. Esse software permite a criação e movimentação de figuras e funções por meio de uma linguagem simples e de comandos com fácil acesso.

O destaque que o Geogebra tem tido, com o avanço das necessidades do uso de tecnologias no processo de ensino, da-se por sua linguagem computacional. Em um momento que a sociedade está em constante processo de evolução tecnológica, isso faz com que esse software ganhe um sentido especial no processo de ensino - aprendizagem de Matemática.

O programa permite realizar construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos, ângulos assim como permite inserir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente, após a construção estar finalizada. Equações e coordenadas também podem ser diretamente inseridas. Portanto, o GeoGebra é capaz de lidar com variáveis para números, pontos, vetores, derivar e integrar funções, e ainda oferecer comandos para se encontrar raízes e pontos extremos de uma função. Com isto, o programa reúne as ferramentas tradicionais de geometria com outras mais adequadas à álgebra e ao cálculo. Isto tem a vantagem didática de representar, ao mesmo tempo e em um único ambiente visual, as características geométricas e algébricas de um mesmo

objeto.

Baseado nas informações apresentadas mostraremos nesse capítulo o software Geogebra bem como suas ferramentas com informações pertinentes a cada uma delas.

## 5.2 Conhecendo o software Geogebra.

Neste capítulo iremos apresentar o software de Matemática dinâmica mais popular do planeta e seus recursos por meio de imagens e palavras, de tal forma que possamos nos familiarizar com o software. Vamos então conhecer a interface do GeoGebra. Ao acessar o programa temos uma janela como a seguinte

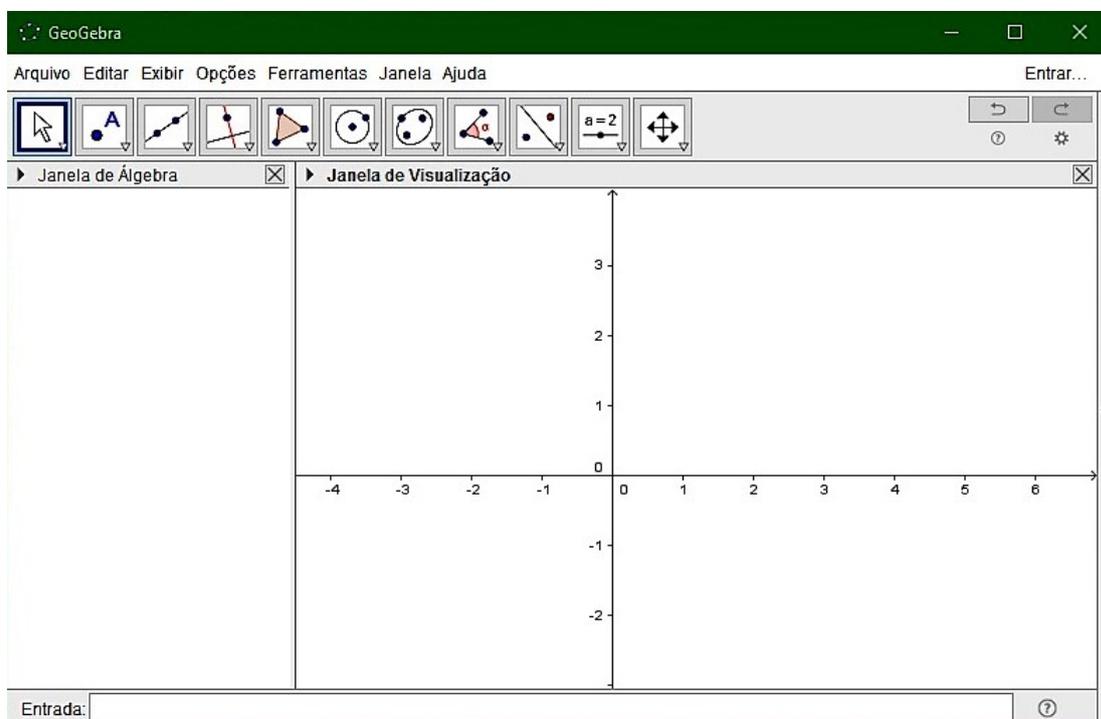


Figura 5.1: Interface do Geogebra

observamos que a janela inicial está dividida em duas: à esquerda a parte algébrica, que pode ser fechada se necessário, e à direita a parte geométrica. Para reativar a parte algébrica basta ir ao item exibir do menu e clicar em janela de álgebra. Neste mesmo item podemos ativar/desativar os eixos, a malha e o protocolo de construção.

O Geogebra possui em sua tela inicial uma primeira linha com o menu principal onde encontramos

**No menu arquivo as opções de:**

- Nova Janela: Abre uma nova janela, permanecendo a anterior;
- Novo: cria uma nova aplicação;
- Abrir: abre aplicações que foram salvas anteriormente;
- Gravar: grava pela primeira vez a construção em um dispositivo de armazenamento (HD, pendrive, etc);
- Gravar Como: grava um arquivo já existente com outro nome ou em local diferente;
- Exportar: exporta o arquivo
- Visualizar Impressão: visualiza a impressão;
- Fechar: fecha o programa.

**O Menu Editar contém as opções de:**

- Desfazer: desfaz a última alteração;
- Refazer: volta a última alteração feita;
- Apagar: permite apagar objetos selecionados;
- Selecionar Tudo: seleciona todos os objetos;
- Propriedades: altera as propriedades atuais.

**No menu exibir:**

- Permite exibir os eixos cartesianos, em malha ou não, a janela álgebra, campos de entrada, lista de comandos, ou seja, trabalharemos com as configurações da interface da área de trabalho.

**No menu opções:**

- Podemos alterar configurações da área de trabalho, dos objetos, fonte, idioma, e além disso é possível também salvar estas novas configurações ou mesmo restaurar.

**No menu ferramentas:**

- É possível configurar a caixa de ferramentas com os ícones mais utilizados, ou mesmo troca-los de lugar, as outras opções não utilizaremos neste curso.

### No menu janelas:

- Esta opção permite a criação de uma nova janela.

### No menu ajuda:

- Permite o acesso a dúvidas sobre o uso das ferramentas do Geogebra, entre outros como fórum, exemplos etc.

Logo abaixo temos uma linha que chamamos de barra de ferramentas, no qual cada botão possui algumas funções que podem ser vistas ao clicar sobre a determinada ferramenta com o botão esquerdo do mouse. Seguindo a apresentação mostraremos cada botão da barra de ferramentas com suas respectivas funções:

### Botão Mover

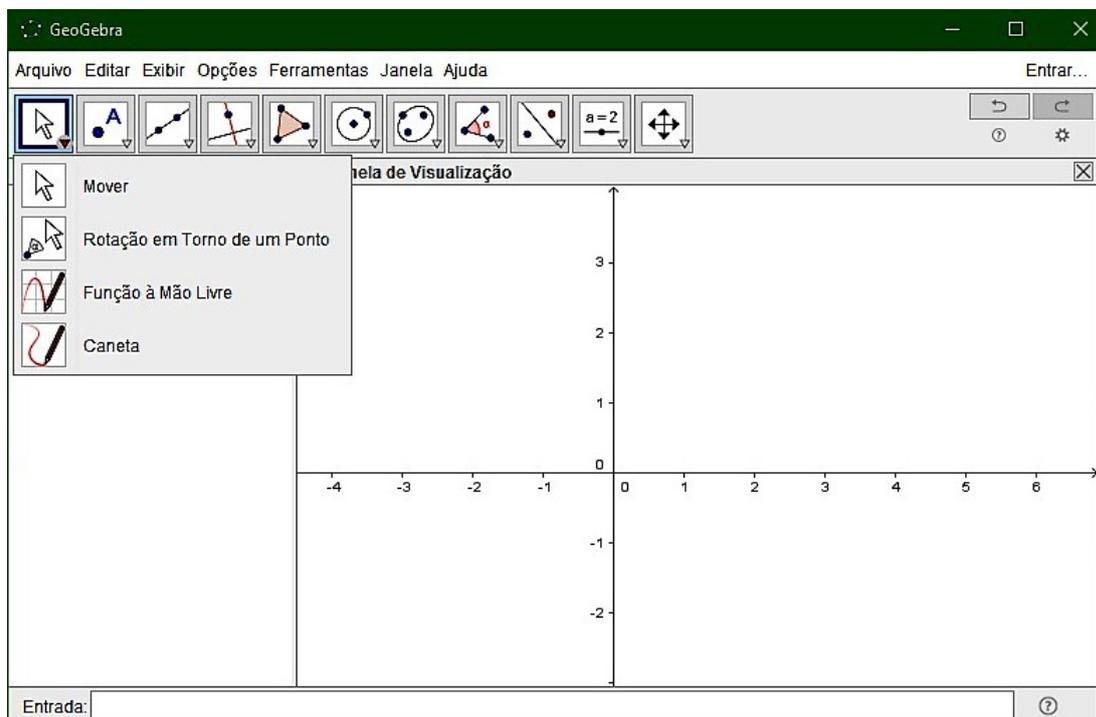


Figura 5.2: Botão mover

 Mover: selecionando essa ferramenta e pressionando o botão esquerdo do mouse sobre um objeto é possível arrastá-lo por toda a janela geométrica.

-  Rotação em torno de um ponto fixo: pressionando o botão esquerdo do mouse sobre um objeto é possível girar esse objeto ao redor de um ponto que permanece fixo.
-  Função à mão livre: Desenha uma função ou um objeto arrastando - se o mouse.
-  Caneta: Escreva na janela de visualização. Mude a cor usando a barra de estilo.

### Botão Ponto

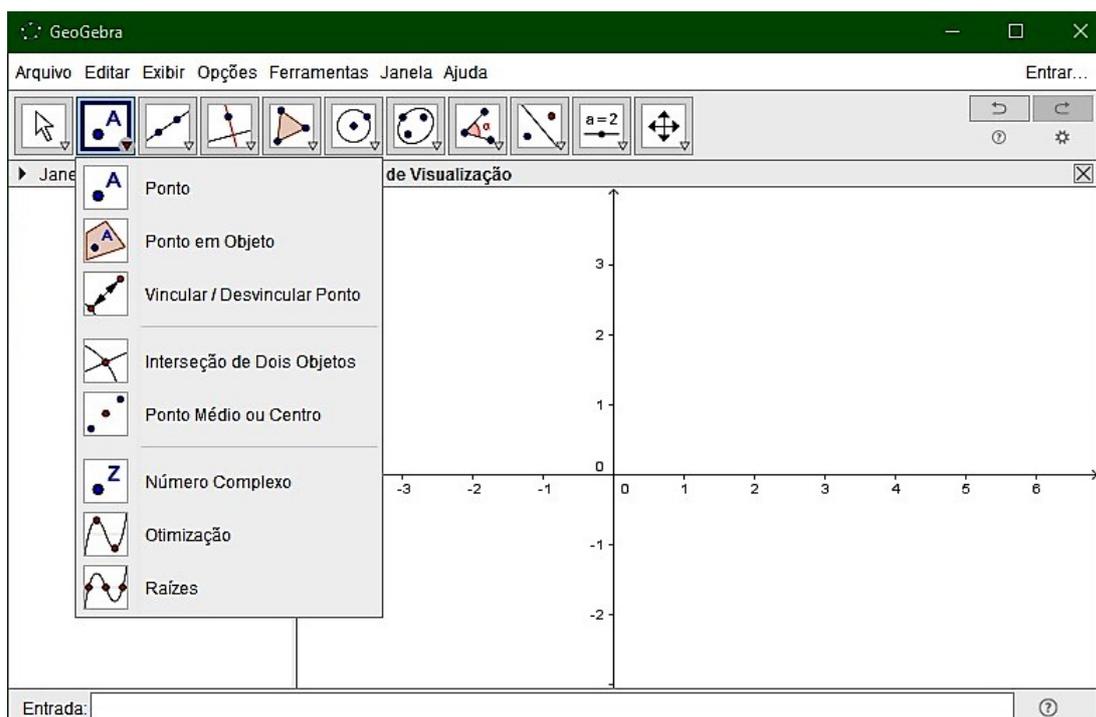


Figura 5.3: Botão ponto

-  Ponto: para criá-lo você precisa clicar primeiro no ícone, e depois na parte geométrica. O ponto será carregado na tela enquanto o botão do mouse não for solto, só depois disso é que o ponto será criado efetivamente. Durante o movimento, as coordenadas aparecem na parte algébrica, se ela estiver ativada.
-  Ponto em Objeto: Permite inserir pontos através do clique no interior de um objeto ou em sua fronteira.
-  Vincular / Desvincular ponto: Para vincular os itens, clique em um ponto e em um objeto.
-  Interseção de dois objetos: pode ser selecionando dois objetos e os pontos de

interseção serão marcados. A outra opção é clicar na interseção dos objetos, mas neste caso somente este ponto será marcado.



Ponto médio ou centro: para utilizar esta ferramenta, clique em: dois pontos para encontrar o ponto médio, em um segmento para encontrar seu ponto médio, em uma seção cônica para obter seu centro.



Número Complexo: Clique na janela de visualização para criar um número complexo.

### Botão Reta

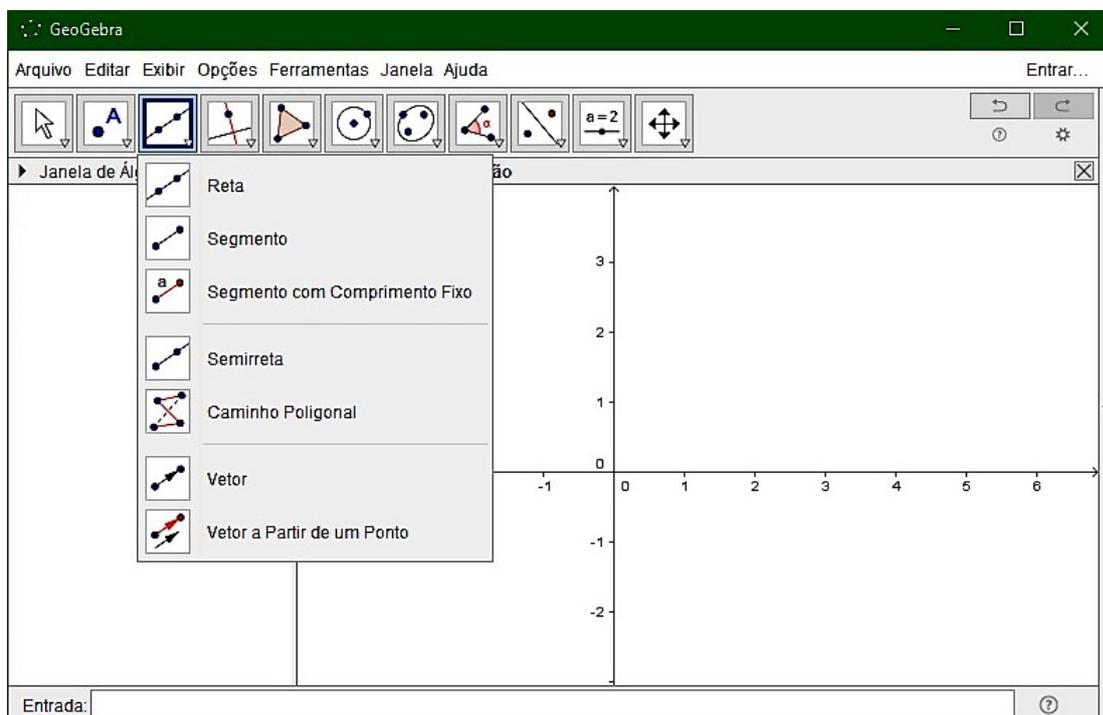


Figura 5.4: Botão reta



Reta: a partir de dois pontos definidos cria - se uma reta, clica neste botão e nos pontos dados para construir a reta.



Segmento: a partir de dois pontos marcados determinam as extremidades de um segmento, observe que na janela algébrica aparece sua medida.



Segmento com comprimento fixo: a partir de um ponto marca-se a origem do segmento e digita-se a medida desejada para ele, em uma janela que se abre automaticamente.



Semirreta: a partir de dois pontos definidos cria-se uma semirreta, traça-se então

uma semirreta a partir do primeiro ponto dado, passando pelo segundo.



Caminho poligonal: Selecione todos os vértices e, então, clique novamente no vértice inicial.



Vetor: cria-se dois pontos e traça-se o vetor com origem no primeiro ponto e ponto final no segundo.



Vetor a partir de um ponto: construído um vetor, podemos construir um representante deste a partir de um ponto considerado. Para isso, marca-se um ponto (que será a origem do outro representante de  $v$ ), seleciona-se esta ferramenta, clica-se sobre o vetor  $v$  já construído e, depois, sobre o ponto considerado.

### Botão Reta Perpendicular

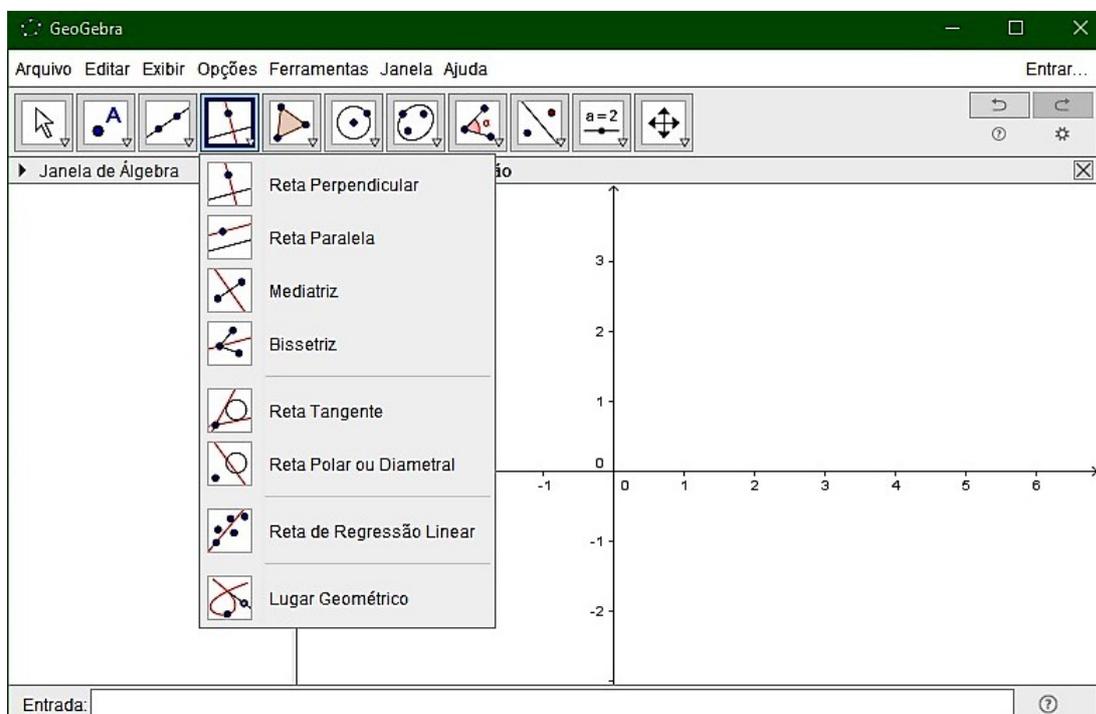


Figura 5.5: Botão reta perpendicular



Reta perpendicular: constrói-se uma reta e um ponto fora dela, clica-se na ferramenta e temos uma perpendicular à reta passando por tal ponto. Isso vale para segmento e semi-reta também.



Reta paralela: idem à anterior.



Mediatriz: a partir de um segmento, clica-se nele e na ferramenta e ela vai criar uma perpendicular pelo ponto médio.



Bissetriz: marcando-se três pontos A, B e C, constrói-se a bissetriz do ângulo ABC. Clicando-se sobre as duas linhas concorrentes, já traçadas, constrói-se as bissetrizes dos ângulos determinados pelas linhas.



Reta tangente: podemos construí-las selecionando um cônica c e um ponto A (todas as tangentes a c por A são traçadas) ou selecionando uma linha e uma cônica.



Reta polar ou diametral: a reta polar ou diametral a uma cônica pode ser construída selecionando-se um ponto e uma cônica; ou uma linha ou vetor e uma cônica.



Reta de regressão linear: Selecione pontos usando o retângulo de seleção ou selecione uma lista de pontos.



Lugar geométrico: clica-se em um objeto, como ponto e ativa a ferramenta então podemos conhecer o lugar geométrico deste objeto.

### Botão Polígono

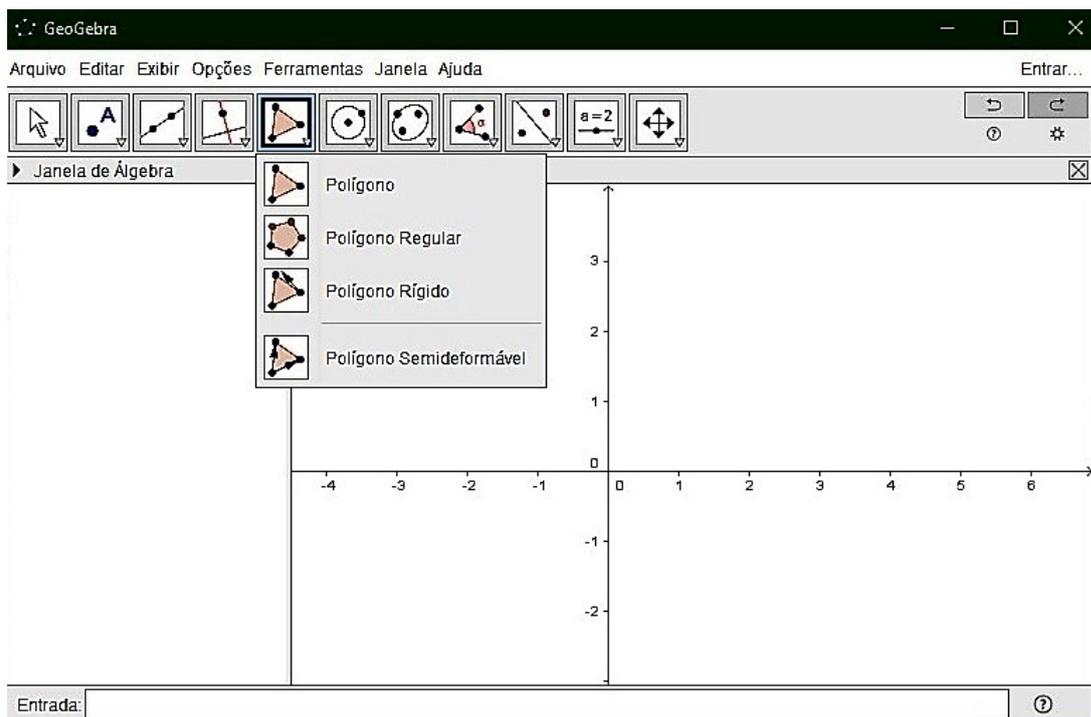


Figura 5.6: Botão polígono



Polígono: para construir um polígono, marca-se ao menos três pontos e clica-se, com o botão esquerdo do mouse, no primeiro ponto novamente (para fechar o polígono).



Polígono regular: é possível construir polígonos regulares usando o comando no

qual é necessário digitar o número de lados na janela de álgebra que aparece no centro da tela.



Polígono rígido: Selecione todos os vértices e, então clique no primeiro vértice novamente (ou apenas clique sobre um polígono para fazer uma cópia rígida).



Polígono semideformável: Selecione todos os vértices e, então, clique novamente no vértice inicial.

### Botão Círculo

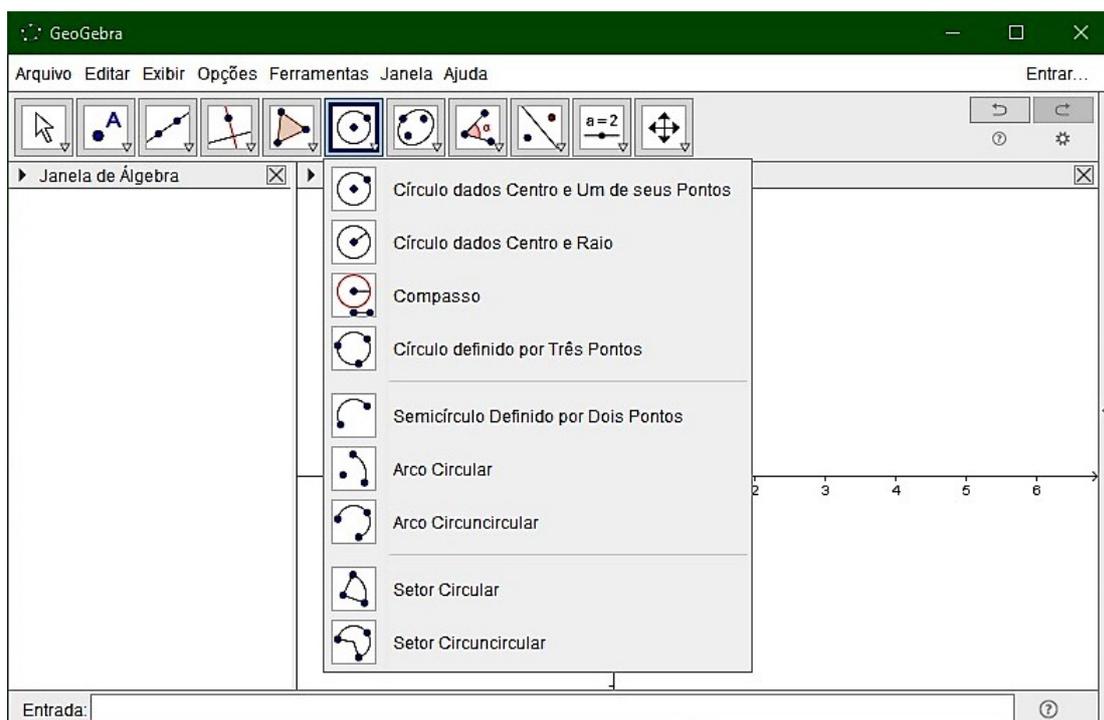


Figura 5.7: Botão círculo



Círculo dado centro e um de seus pontos: ao marcar um ponto  $M$  e um ponto  $P$  está definido um círculo com centro  $M$  passando por  $P$ . O raio do círculo é a distância  $MP$ .



Círculo dados centro e raio: após marcar um ponto  $M$  como centro aparecerá a janela para ingressar o valor do raio.



Compasso: Selecione um segmento ou dois pontos para definir o raio e, depois, o centro.



Círculo definido por três pontos: ao marcar três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  fica definido um círculo que passa por estes pontos. Se os três pontos pertencem a uma reta, o círculo

fica reduzido a esta reta. O valor algébrico de um arco representa seu comprimento; o valor de uma seção representa sua área.



Semicírculo definido por dois pontos: ao marcar dois pontos A e B se produz um semicírculo sobre o segmento AB.



Arco circular: ao marcar três pontos M, A e B se produz um arco circular com centro em M, que tem como extremo inicial o ponto A e termina com o ponto B. Nota: o ponto B não precisa pertencer necessariamente ao arco.



Arco circuncircular: ao marcar três pontos se produz um arco circular passando por esses pontos.



Setor circular: ao marcar três pontos M, A e B se produz um setor circular com centro em M, que tem como extremo inicial o ponto A e termina com o ponto B. Nota: o ponto B não precisa pertencer necessariamente ao setor.



Setor circuncircular: ao marcar três pontos se produz um setor circuncircular passando por esses pontos.

### Botão Elipse

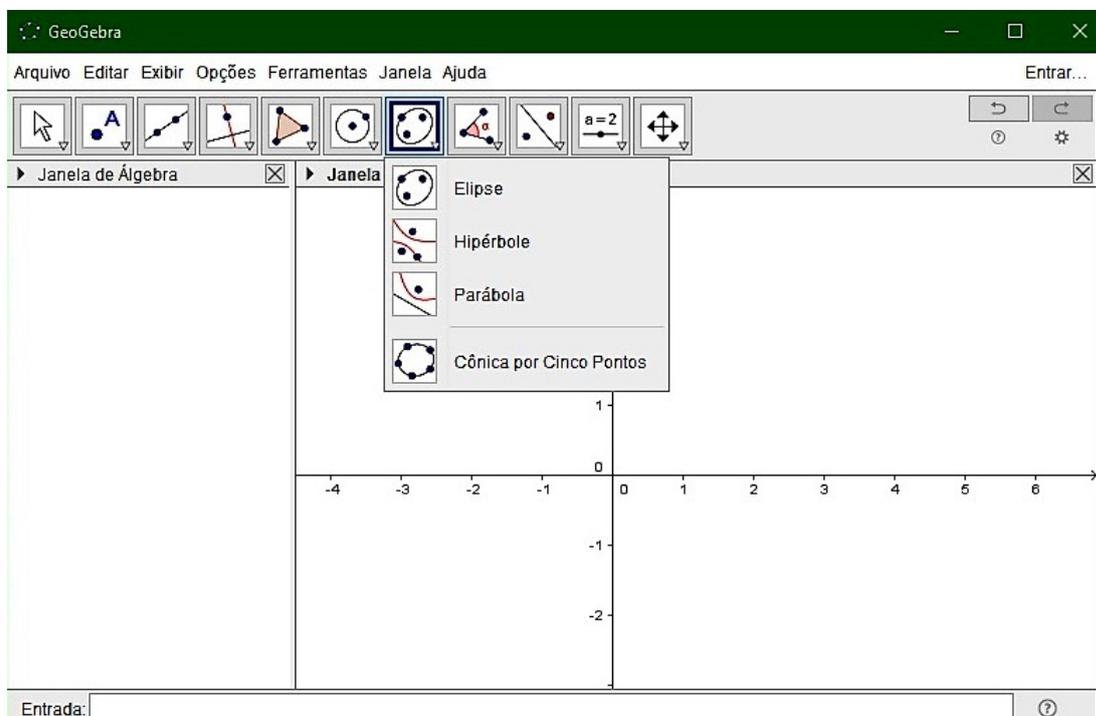


Figura 5.8: Botão elipse



Elipse: selecione dois focos e, depois, um ponto da elipse.



Hipérbole: selecione dois focos e, depois, um ponto da hipérbole.



Parábola: selecione primeiro o foco e, depois, a diretriz.



Cônica Definida por Cinco Pontos: selecione cinco pontos.

### Botão Ângulo

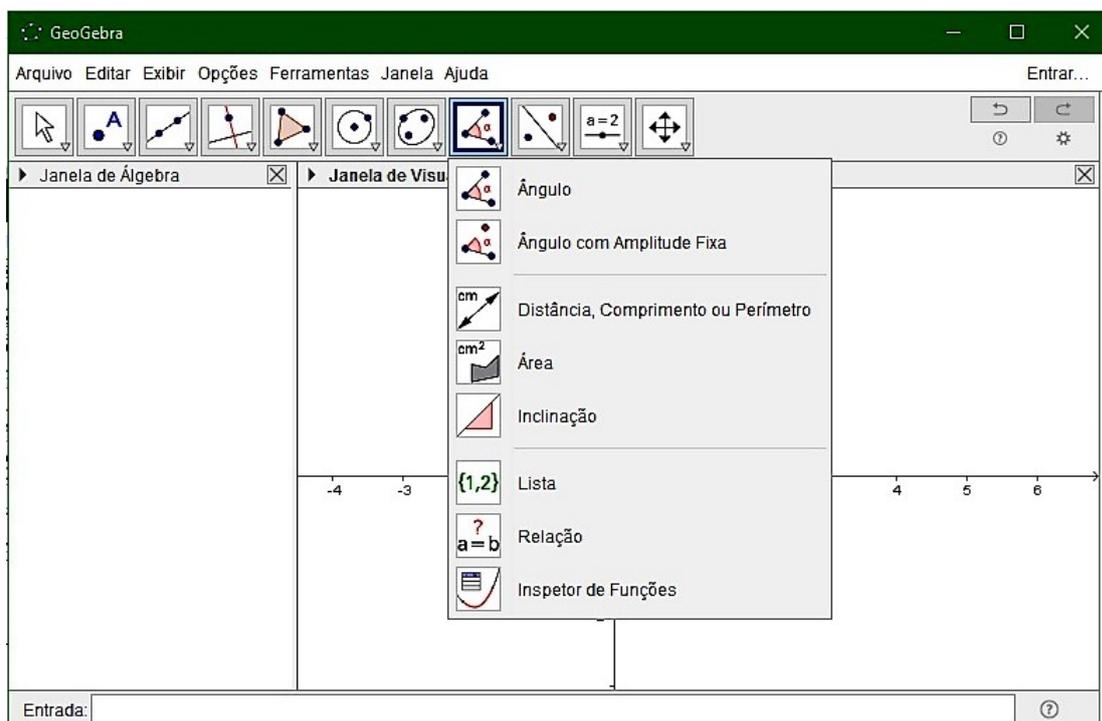


Figura 5.9: Botão ângulo



Ângulo: esta ferramenta permite traçar ângulos entre três pontos; entre dois segmentos; entre duas retas (ou semi-retas); entre dois vetores ou ainda interiores de um polígono.



Ângulo com amplitude fixa: marcando-se dois pontos e digitando-se a medida desejada para o ângulo, em uma janela que aparece automaticamente.



Distância, comprimento ou perímetro: essa ferramenta fornece, na janela algebrica a distância entre dois pontos; duas linhas ou entre um ponto e uma linha.



Área: calcula a área de um polígono, um círculo ou uma elipse.



Inclinação: calcula a inclinação de uma reta.



Criar listar: Arraste e marque um retângulo em torno dos objetos.



Relação entre dois objetos: Selecione dois objetos.



Inspetor de funções: Selecione uma função.

### Botão Reflexão com relação a uma reta

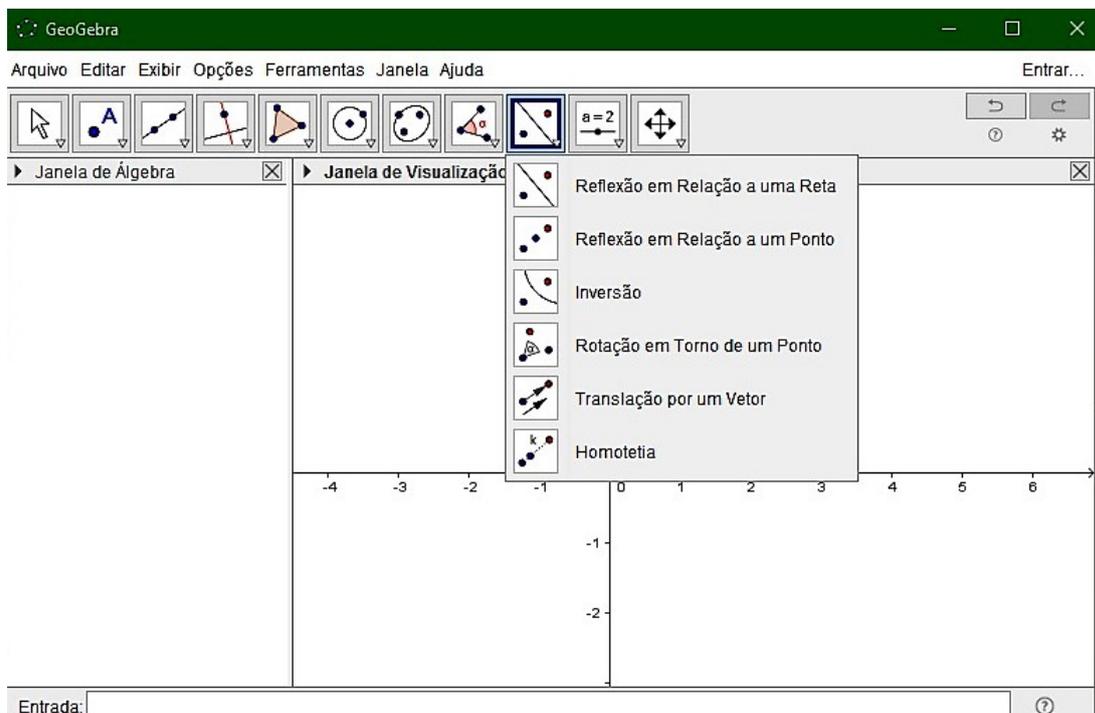


Figura 5.10: Botão Reflexão com relação a uma reta

Estas ferramentas são utilizadas para simetria, inversão de figuras, bem como girar, transladar e ampliar ou reduzir objetos.



Reflexão com relação a uma reta: essa ferramenta desenha um objeto refletido em relação a uma reta. Clique no objeto a ser refletido, com o botão esquerdo do mouse e, a seguir, clique na reta através da qual ocorrerá a reflexão.



Reflexão com relação a um ponto: essa ferramenta desenha um objeto refletido em relação a um ponto. Clique, com o botão esquerdo do mouse, no objeto a ser refletido e, a seguir, clique no ponto através do qual ocorrerá a reflexão.



Reflexão em relação a um círculo (inversão): essa ferramenta desenha um objeto refletido em relação a um círculo. Clique, com o botão esquerdo do mouse, no objeto a ser refletido e, a seguir, clique no círculo através do qual ocorrerá a reflexão.

### Botão controle deslizante

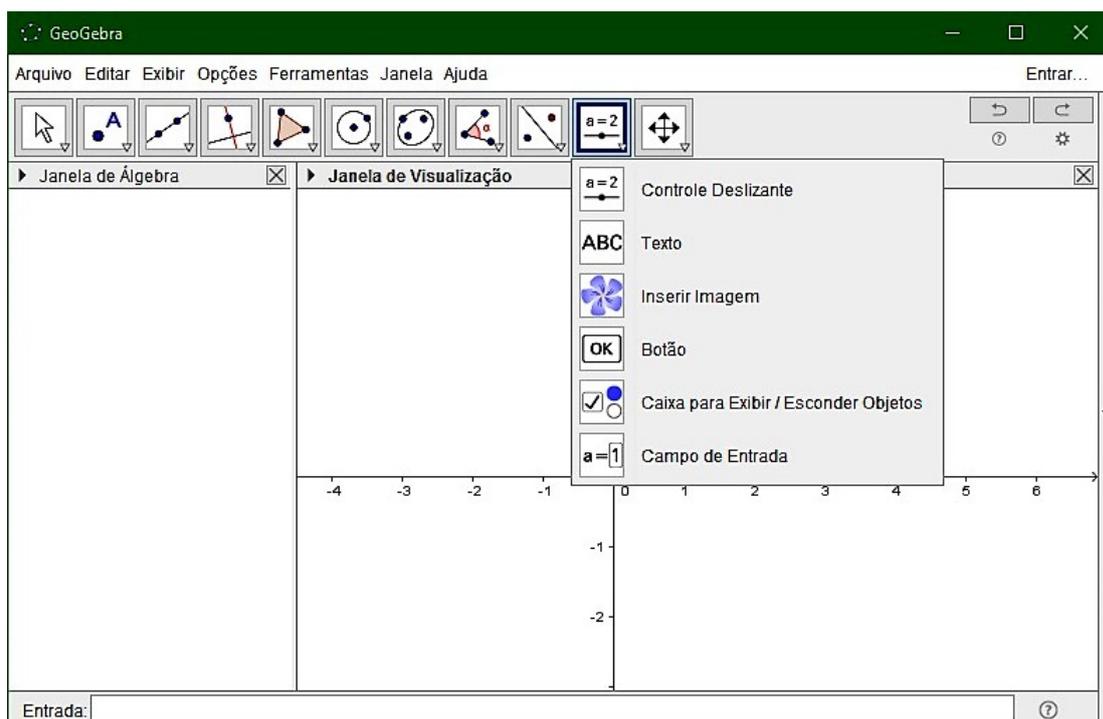


Figura 5.11: Botão controle deslizante

Caixa de ferramentas extras, onde é possível utilizar o seletor (relação entre estes objetos), exibir ou esconder objetos, inserir texto, incluir imagem ou fazer a relação entre dois objetos.



Controle deslizante: Clique na janela de visualização para especificar a posição do controle deslizante.



Texto: clicando, com o botão esquerdo do mouse, na área de trabalho, o texto que você digitar, na janela que será aberta, aparecerá neste local.



Inserir imagem: essa ferramenta permite acrescentar uma imagem numa construção. O ponto onde você clicar, com o botão esquerdo do mouse, será o vértice inferior esquerdo da imagem. Após o clique na tela uma caixa de diálogo será aberta na qual você selecionará a imagem a ser inserida.



Inserir botão: Clique na janela de visualização para inserir um botão.



Caixa para exibir / Esconder objetos: Clique na área de trabalho para criar uma caixa.



Campo de entrada: Clique na janela de visualização para inserir um campo de texto.

### Botão mover janela

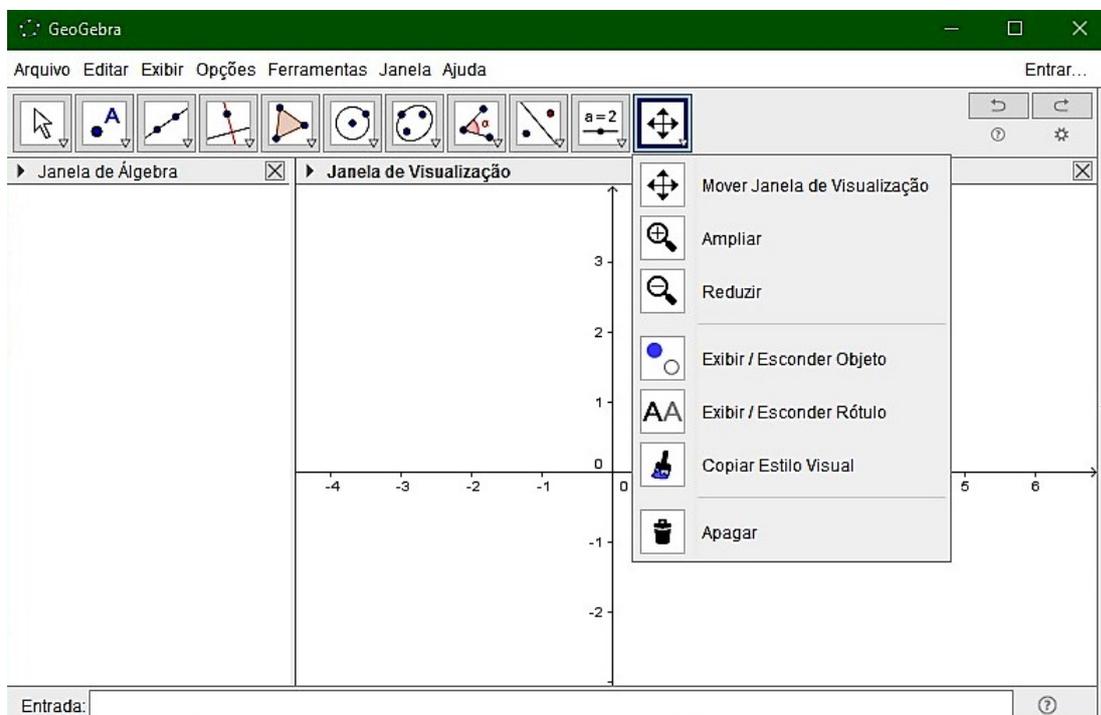


Figura 5.12: Botão mover janela



Mover janela de visualização: Para arrastar e soltar a área gráfica e deslocar a origem do referencial também se pode deslocar a área gráfica acionando a tecla Ctrl e arrastando-a com o mouse.



Ampliar: clique sobre qualquer ponto da área gráfica para produzir um "zoom" de aproximação - ampliar.



Reduzir: clique sobre qualquer ponto da área gráfica para produzir um "zoom" de afastamento - reduzir.



Exibir / Esconder objeto: Ao clicar sobre um objeto permite exibir/ocultar respectivamente. Todos os objetos que estão ocultos são exibidos.



Exibir / Esconder rótulo: Ao clicar sobre um objeto permite exibir/ocultar respectivamente seu rótulo.



Copiar estilo visual: Esta opção permite copiar as propriedades visuais como

cor, dimensão, estilo da linha, espessura, etc., de um objecto para outro(s). Deve-se seleccionar o objeto cujas propriedades deseja copiar. A seguir dá-se um clique sobre todos os outros que devem adoptar essas propriedades.



Apagar Objeto: basta dar um clique sobre qualquer objeto para excluí-lo.

E por fim temos o campo de entrada que fica no rodapé da zona gráfica do GeoGebra. Através deste campo, é possível operar com o GeoGebra, usando comandos escritos. Praticamente todas as ferramentas da barra de ferramentas podem ser usadas usando os comandos escritos.

# Referências Bibliográficas

- [1] BARBOSA, J. L. M. Geometria Euclidiana Plana. 11. ed. Rio de Janeiro, SBM, 2012. 273 p. Coleção do Professor de Matemática.
- [2] DOLCE, O. POMPEO, J. N. Fundamentos da Matemática Elementar. Vol. 9. Geometria Plana. 17. ed. São Paulo, Editora Atual, 1993.
- [3] CAMINHA, Muniz Neto. Tópicos de Matemática Elementar: Geometria euclidiana Plana. Rio de Janeiro. SBM, 2012.
- [4] LIMA, E. L. Matemática e Ensino. 3. ed. Rio de Janeiro, SBM, 2007. (Coleção do Professor de Matemática)
- [5] OLIVEIRA, M. R. Coleção Elementos de Matemática. 2: Geometria Plana. 3ª ed. Fortaleza, Editora VestSeller, 2010.
- [6] ARAÚJO, L. C. L. Aprendendo Matemática com o Geogebra. São Paulo, Editora Exato, 2010.
- [7] BEZERRA, Y.S. Geometria Projetiva: Algumas Aplicações Básicas para Alunos do Ensino Médio. Dissertação de Mestrado. UFAM, Mestrado Profissional em Educação Matemática. Manaus, 2014.  
[https://sca.profmat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=1575](https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=1575)
- [8] FREITAS, V. P. Alguns Teoremas Clássicos da Geometria Sintética e Aplicações. Dissertação de Mestrado. UFAM, Mestrado Profissional em Educação Matemática. 2013.  
[http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/252/2011\\_00097\\_VINICIUS\\_PAULO\\_DE\\_FREITAS.pdf](http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/252/2011_00097_VINICIUS_PAULO_DE_FREITAS.pdf)

- [9] MACEDO, D. M. R. Resgatando alguns teoremas clássicos da geometria plana. Dissertação(mestrado) Universidade Federal do Ceará, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2014.
- [http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/8990/1/2014\\_dis\\_dmrmacedo.pdf](http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/8990/1/2014_dis_dmrmacedo.pdf)
- [10] GUALBERTO, K.J. Colinearidade e Concorrência na Geometria Plana. Monografia de Graduação. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina. 2005.
- [https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/119185/Klaryssa\\_Junckes\\_Gualberto.pdf](https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/119185/Klaryssa_Junckes_Gualberto.pdf)
- [11] NASCIMENTO, E. G. A. Avaliação do Uso do Software Geogebra no Ensino de Geometria: Reflexão da Prática na Escola. Eimard Gomes Antunes do Nascimento. eimard@yahoo.com - Mestre em Educação Brasileira, Universidade Federal do Ceará (UFC).
- [12] MARQUES, A. F. Estudo sobre Colinearidade e Concorrência. Monografia apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMG, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Especialista em Matemática, com ênfase em Geometria. BELO HORIZONTE, 2008.
- [http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia\\_AndersonFMarques.pdf](http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia_AndersonFMarques.pdf)
- [13] ALVES, D.S. Os Teoremas Esquecidos pelos Professores de Geometria Plana do Ensino Médio. Dissertação de Mestrado. UFMS, Mestrado Profissional em Educação Matemática. Campo Grande, 2015.
- [https://sca.proformat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=76200](https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=76200)
- [14] MARTINS, Ronald Alexandre. Colinearidade e Concorrência em Olimpíadas Internacionais de Matemática: uma reflexão voltada para o ensino da Geometria Plana no Brasil. Dissertação (Mestrado Mestrado Profissional em Matemática)-Universidade de Brasília, Brasília, 2015.
- [http://repositorio.unb.br/bitstream/10482/19191/1/2015\\_RonaldAlexandreMartins.pdf](http://repositorio.unb.br/bitstream/10482/19191/1/2015_RonaldAlexandreMartins.pdf)

[15] THIAGO, C. Teorema de Ceva e Teorema de Menelaus.

[http://potiimpa.br/uploads/material\\_teorico/86bacem5rzoco.pdf](http://potiimpa.br/uploads/material_teorico/86bacem5rzoco.pdf)