



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

**A GEOMETRIA DO GLOBO TERRESTRE: UMA
PROPOSTA DE TRABALHO INTERDISCIPLINAR
ENTRE MATEMÁTICA E GEOGRAFIA**

Gilmar Alves Brito

Teresina - 2017

Gilmar Alves Brito

Dissertação de Mestrado:

**A GEOMETRIA DO GLOBO TERRESTRE: UMA
PROPOSTA DE TRABALHO INTERDISCIPLINAR
ENTRE MATEMÁTICA E GEOGRAFIA**

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Gilvan Lima de Oliveira

Teresina - 2017

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

B862g Brito, Gilmar Alves.

A geometria do globo terrestre: uma proposta de trabalho interdisciplinar entre matemática e geografia / Gilmar Alves Brito. – Teresina, 2017.
83f. il.

Dissertação (Mestrado Profissional/PROFMAT) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2017.
Orientador: Prof. Dr. Gilvan Lima de Oliveira.

1. Geometria Esférica. 2. Sistema de Posicionamento Global. 3. Globo Terrestre. I. Título

CDD 516



PROFMAT



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **Mestre em Matemática** intitulada: **A Geometria do Globo Terrestre: Uma Proposta de Trabalho Interdisciplinar Entre Matemática e Geografia**, defendida **Gilmar Alves Brito** em 10 / 08 / 2017 e aprovada pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Dr. Gilvan Lima de Oliveira (UFPI)
Presidente da Banca Examinadora

Me. Mário Gomes dos Santos (UFPI)
Examinador Interno

Lilane de Araújo Mendes Brandão
Me. Lilane de Araújo Mendes Brandão (UESPI)
Examinadora Externa

*Dedico este trabalho aos meus pais, Eudimar e
Gonçala, que me ensinaram as lições da vida.*

*A Gilvan e Eudvan, meus irmãos, meus melhores
amigos.*

*A Marianne, minha amantíssima namorada, pela
compreensão e apoio, e por seu amor imarcescível.*

Agradecimentos

Primeiramente à Deus, pois sem Ele à frente de nossos projetos nada seria possível. A Ele agradeço por ter me concedido a força necessária para seguir nesta jornada, pela proteção durante as viagens, por iluminar minha mente nas dificuldades e por prover as condições para conclusão deste curso.

Agradeço aos meus pais, Eudimar e Gonçala, pelo amor, incentivo e apoio incondicional aos meus estudos, por terem me dado educação e valores. A vocês que, muitas vezes, renunciaram aos seus sonhos para que eu pudesse realizar o meu, partilho a alegria deste momento.

Agradeço a minha namorada Marianne pelo inestimável carinho e pela força que me deu para está sempre motivado, por compreender minha ausência em vários momentos. Digo que a distância só aproximou ainda mais nossos corações.

Agradeço ao meu orientador, o Prof. Dr. Gilvan Lima de Oliveira, pela dedicação, pelos conselhos, pelos momentos de aprendizado e pela orientação e colaboração na realização deste trabalho.

Agradeço ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, à Universidade Federal do Piauí e a todos professores do curso pela formação acadêmica alcançada.

Agradeço aos amigos que fiz na turma PROFMAT/2015, pelas trocas de experiências, pelas discussões dos temas com dicas e estratégias de aprendizagem e pelo grande companheirismo durante estes 2 anos de jornada. Em especial ao amigo Sérgio, pela preciosa ajuda na edição deste trabalho.

Agradeço ao Colégio Patronato Nossa Senhora de Lourdes, em Campo Maior, e à coordenadora pedagógica Divina Maria pelos ajustes nos horários de minhas aulas, da melhor forma possível, para que tivesse tempo disponível para estudar e pela compreensão em alguns momentos que estive ausente.

Por fim, sou grato a todos que participaram direta ou indiretamente desta conquista, sem esquecer de mencionar à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo auxílio financeiro.

*“E aprendi que se depende sempre
De tanta, muita, diferente gente
Toda pessoa sempre é as marcas
das lições diárias de outras tantas pessoas.
É tão bonito quando a gente entende
Que a gente é tanta gente
Onde quer que a gente vá.
É tão bonito quando a gente sente
Que nunca está sozinho
Por mais que pense estar...”*

Caminhos do coração – Gonzaguinha

Resumo

Neste trabalho buscamos desenvolver o estudo dos conceitos e resultados básicos da Geometria Esférica explorando sua associação com o globo terrestre, procurando instigar professores de Matemática e alunos da educação básica, em especial do ensino médio, a trabalharem em sala de aula com esta nova geometria. Conceitos geográficos como paralelos, meridianos, latitudes, longitudes e fusos horários estão baseados em ideias geométricas que, quando trabalhadas neste contexto, conduzem o aluno a uma melhor compreensão e aprendizagem do tema. Dito isto, no presente material elucidamos como a utilização do globo terrestre, com suas conseqüentes questões envolvendo, por exemplo, cálculo de distâncias, ângulos e áreas na esfera, abre caminho para um interessante trabalho interdisciplinar entre a Matemática e a Geografia. Apresentamos também um breve estudo dos triângulos esféricos e de suas relações métricas, que associam comprimentos dos lados e ângulos entre os mesmos, além de compará-los com os triângulos planos da Geometria Euclidiana. Outro ponto discutido neste trabalho foi a importante relação entre as coordenadas geográficas e as coordenadas cartesianas no espaço. Por fim, mostramos como o estudo da posição relativa de duas ou mais esferas e as relações entre coordenadas geográficas e cartesianas explicitam as ideias matemáticas envolvidas no funcionamento do Sistema de Posicionamento Global (GPS).

Palavras-chave: Geometria Esférica, Globo Terrestre, Triângulos Esféricos, Sistema de Posicionamento Global.

Abstract

In this work we aim to develop the study of the basic concepts and results of Spherical Geometry exploring its association with the terrestrial globe, trying to instigate mathematics teachers and students of basic education, especially high school, to work in the classroom with this new geometry. Geographic concepts such as parallels, meridians, latitudes, longitudes and time zones are based on geometric ideas that, when worked in this context, lead the student to a better understanding and learning of the theme. That said, in the present material we elucidate how the use of the terrestrial globe, with its consequent questions involving, for example, calculation of distances, angles and areas in the sphere, opens the way for an interesting interdisciplinary work between Mathematics and Geography. We also present a brief study of the spherical triangles and their metric relations, which associate lengths of the sides and angles between them, in addition to comparing them with the flat triangles of Euclidean geometry. Another point discussed in this work was the important relationship between geographic coordinates and Cartesian coordinates in space. Finally, we show how the study of the relative position of two or more spheres and the relationships between geographic and Cartesian coordinates explain the mathematical ideas involved in the functioning of the Global Positioning System (GPS).

Keywords: Spherical Geometry, Terrestrial Globe, Spherical Triangles, Global Positioning System.

Lista de Figuras

1.1	Quinto postulado. Fonte: <i>Autor</i>	6
1.2	Reformulação do postulado das paralelas feita por Playfair. Fonte: <i>Autor</i>	6
1.3	Quadriláteros de Sccheri. Fonte: <i>Autor</i>	7
1.4	Quinto postulado segundo a Geometria Hiperbólica. Fonte: <i>Autor</i>	8
1.5	Carl Friedrich Gauss. Fonte: <i>Google Imagens</i>	8
1.6	Georg Friedrich Bernhard Riemann. Fonte: <i>Google Imagens</i>	9
1.7	Soma dos ângulos internos de um triângulo nas Geometrias Euclidiana, Hiperbólica e Esférica. Fonte: <i>Autor</i>	9
2.1	Superfície esférica Σ , com o ponto P pertencendo, M interno e N externo à Σ . Fonte: <i>Autor</i>	11
2.2	Corda AB e diâmetro DE na superfície esférica Σ . Fonte: <i>Autor</i>	11
2.3	Representação do caso III. Fonte: <i>Autor</i>	12
2.4	Ilustração I para a proposição 2. Fonte: <i>Autor</i>	13
2.5	Ilustração II para a proposição 2. Fonte: <i>Autor</i>	13
2.6	Círculos máximo e menor na superfície esférica. Fonte: <i>Autor</i>	14
2.7	Interseção de duas circunferências máximas. Fonte: <i>Autor</i>	14
2.8	Elementos notáveis de uma superfície esférica Σ . Fonte: <i>Autor</i>	15
2.9	Hemisférios Norte e Sul. Fonte: <i>Autor</i>	16
2.10	Calota esférica. Fonte: <i>Autor</i>	16
2.11	Zona esférica de Σ compreendida entre os planos α e β . Fonte: <i>Autor</i>	16
2.12	Ângulo esférico θ entre as retas a e b da superfície esférica. Fonte: <i>Autor</i>	17
2.13	Fuso esférico de abertura $\widehat{AOB} = \theta$. Fonte: <i>Autor</i>	17
2.14	Calota esférica de altura h . Fonte: <i>Autor</i>	19
2.15	Calotas esféricas m e n . Fonte: <i>Autor</i>	20
2.16	Disco representando o formato da Terra. Fonte: <i>Google Imagens</i>	20
2.17	Eclipse da Lua. Fonte: <i>Google Imagens</i>	21
2.18	Planeta Terra. Fonte: <i>Google Imagens</i>	22
2.19	Secção da superfície da Terra por um plano α contendo os polos. Fonte: <i>Autor</i>	22
2.20	Tabela com valores para \mathbf{a} , \mathbf{b} e ϵ . Fonte: <i>Adaptada de [1]</i>	22
2.21	Longitude (ϕ) e latitude (θ) do ponto P . Fonte: <i>Autor</i>	23
2.22	Longitude e Latitude por interseção de superfícies. Fonte: <i>Autor</i>	24
2.23	Representação do problema 1. Fonte: <i>Autor</i>	25
2.24	Esquema da ideia de Erastóstenes. Fonte: <i>Autor</i>	25
2.25	Representação do problema 3. Fonte: <i>Autor</i>	26
2.26	Representação do problema 4. Fonte: <i>Autor</i>	27
2.27	Oiapoque (AP) e Chuí (RS). Fonte: <i>Google Maps</i>	28
2.28	Linhas do horizonte sobre Oiapoque (A) e sobre Chuí (B). Fonte: <i>Autor</i>	29

3.1	Triângulo esférico ABC . Fonte: <i>Autor</i>	31
3.2	Porção da superfície esférica que não constitui um triângulo esférico. Fonte: <i>Autor</i>	31
3.3	Triângulo esférico ABC e triedro $OABC$. Fonte: <i>Autor</i>	31
3.4	Proposição 6. Fonte: <i>Autor</i>	32
3.5	Proposição 7. Fonte: <i>Autor</i>	33
3.6	Pontos de um paralelo equidistam dos polos. Fonte: <i>Autor</i>	34
3.7	Triângulo esférico isósceles MNR e seu antípoda $M'N'R'$. Fonte: <i>Autor</i>	35
3.8	Teorema de Girard. Fonte: <i>Autor</i>	37
3.9	Triângulo esférico retângulo em A , cujos lados b e c têm medidas inferiores a 90° . Fonte: <i>Autor</i>	39
3.10	Triângulo esférico retângulo em A , cujo lado b tem medida superior a 90° . Fonte: <i>Autor</i>	40
3.11	Triângulos esféricos obliquângulos. Fonte: <i>Autor</i>	42
3.12	Triângulo esférico retângulo em A . Fonte: <i>Autor</i>	43
3.13	Trajeto descrito pelo navio de A até C , passando por B	45
3.14	Representação do problema. Fonte: <i>Autor</i>	46
3.15	Triângulo esférico indicando as geodésicas que ligam, dois a dois, a Cidade do México (A), Paris (B) e o polo Norte (N). Fonte: <i>Autor</i>	47
3.16	Orientação das coordenadas geográficas. Fonte: <i>Google Imagens</i>	48
3.17	Distância entre os pontos A e B sobre o globo terrestre. Fonte: <i>Autor</i>	48
3.18	Triângulo das Bermudas. Fonte: <i>Google Maps</i>	50
4.1	Coordenadas do ponto P no sistema $OXYZ$. Fonte: <i>Autor</i>	53
4.2	Cálculo de $d(P, Q)$. Fonte: <i>Autor</i>	53
4.3	Sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ com origem no centro do Globo Terrestre. Fonte: <i>Autor</i>	55
4.4	Modelo de representação. Fonte: <i>Autor</i>	55
4.5	Localização do ponto P (balão vermelho). Fonte: <i>Google Maps</i>	58
5.1	Segmentos que compõem o GPS e direção da comunicação em cada segmento. Fonte: <i>Google Imagens</i>	62
5.2	Distribuição dos satélites que compõem o GPS. Fonte: <i>Google Imagens</i>	62
5.3	Segmento de controle e monitoramento do GPS. Fonte: <i>Google Imagens</i>	63
5.4	Receptor GPS (GPS Receiver) - Processo de localização feito pelo sistema. Fonte: <i>Google Imagens</i>	65
5.5	Localização do receptor P (balão vermelho). Fonte: <i>Google Maps</i>	68

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Lista de Figuras	vii
Introdução	1
1 O surgimento da Geometria Esférica	4
1.1 Método Axiomático	4
1.2 A problemática do quinto postulado de Euclides	5
2 Geometria Esférica e o Globo Terrestre	10
2.1 A superfície esférica e seus elementos	10
2.2 A forma da Terra	20
2.3 Sistema de coordenadas geográficas	23
2.4 Aplicação de conceitos	24
3 Triângulos Esféricos	30
3.1 Definições e propriedades	30
3.2 Trigonometria Esférica	38
3.3 Aplicação de conceitos	45
4 A Superfície Esférica em Coordenadas Cartesianas	52
4.1 Coordenadas Cartesianas	52
4.2 Equação da superfície esférica	53
4.3 Relação entre coordenadas cartesianas e geográficas	55
5 Sistema de Posicionamento Global - GPS	60
5.1 O surgimento do GPS	60
5.2 Composição ou segmentos do sistema	61
5.3 Fundamentação matemática do GPS	64
6 Considerações Finais	69
Referências	71

Introdução

A palavra Geometria vem do grego *geometrein*, onde *geo* significa terra e *metrein*, medir. Como a própria palavra nos evidencia, a Geometria é o ramo da Matemática que fornece a medição de terras. Há indícios de que os gregos foram os primeiros a mencionar esta expressão, como pode ser constatado em anotações do historiador grego *Heródoto*, século X a.C., porém havendo outras civilizações antigas, como os babilônios, hindus e chineses, que também possuíam conhecimentos geométricos.

No início, a Geometria era fundamentada por um conjunto de procedimentos, anotações de experimentos, observações e adivinhações. Para fins práticos eram utilizadas pura intuição e respostas aproximadas. Foram os gregos que insistiram em demonstrações geométricas pautadas no raciocínio dedutivo, e não por tentativa e erro, método até então utilizado em vários resultados da Geometria.

As primeiras formalizações de seus estudos, de que se têm notícia, devem-se a Euclides de Alexandria, matemático grego dos séculos IV e III a.C., com o registro de sua obra *Elementos*. Tal obra prima expôs, sistematicamente, os conhecimentos da Geometria de seu tempo (doravante rotulada como *Euclidiana*), alguns dos quais frutos de seu próprio trabalho. A importância dos *Elementos*, tanto à Matemática como à ciência em geral, se deve ao fato desta ser a primeira obra em que o corpo de conhecimento matemático nela contido tem por base um sistema lógico dedutivo bem definido (método axiomático), sendo fundamentada em apenas cinco postulados ou axiomas.

Euclides foi o primeiro a apresentar de modo sistemático a Matemática como ciência dedutiva, isto é, que qualquer afirmação deve ser deduzida logicamente a partir de outras afirmações mais simples, e assim sucessivamente, até serem alcançados os postulados (fatos básicos assumidos como verdadeiros e que não são demonstrados). Contudo, na Geometria Euclidiana não foi possível deduzir, partindo do conjunto de postulados até então estabelecido, que, por um ponto não pertencente a uma reta dada, passa uma única paralela à reta anterior. Em *Elementos*, Euclides impôs a unicidade da reta paralela como postulado, conhecido na literatura como o **quinto postulado** ou **postulado das paralelas**. Porém, para grande parte dos matemáticos que estudaram a obra de Euclides, tal postulado gerou controvérsia quanto a sua simplicidade e evidência. A não aceitação como postulado e as tentativas frustradas de sua demonstração, como teorema, nortearam as primeiras ideias das chamadas Geometrias Não Euclidianas, destacando-se a Elíptica (Esférica) e a Hiperbólica.

Os conceitos e resultados contidos na Geometria Euclidiana são válidos para superfícies planas, por exemplo, desta geometria sabemos que a menor distância entre dois pontos do plano é dada pela medida do segmento de reta que os liga. Entretanto, podemos fazer a mesma afirmação para pontos sobre a superfície de uma esfera? Em particular, como determinamos a distância entre dois pontos na superfície de nosso planeta?

A pelo menos 2000 anos tem-se conhecimento de que a Terra tem a forma de (quase) uma esfera,

fato este até mesmo apresentado na obra de Aristóteles. Atualmente sabe-se que o formato do planeta Terra é arredondado, mas não é uma esfera perfeita, pois o mesmo é achatado nos polos. Na verdade, a forma que mais se aproxima da real é a de um elipsóide de revolução, com achatamento e excentricidade bem pequenos. Quando, por fins didáticos, adotamos a esfera como modelo físico para tratarmos da Terra, considerando, com isto, o *globo terrestre*, a geometria adequada ao seu estudo é a Geometria Esférica e, segundo ela, as distâncias entre pontos na superfície terrestre (ou numa esfera qualquer) são dadas por arcos de circunferências máximas.

Embora muitos resultados da Geometria Esférica tenham sido conhecidos e utilizados desde a Antiguidade, principalmente na Astronomia e na Navegação, enquanto sistema axiomático, esta geometria só foi formalizada em meados do século XIX, pelo matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866). Riemann, a partir de uma das negações do postulado das paralelas, considerando o plano como a superfície de uma esfera e descartando a infinitude da reta, mas admitindo que a mesma seja ilimitada, e com outros ajustes necessários, desenvolveu esta nova geometria (não euclidiana).

Vários conceitos da Geometria Esférica são estudados no decorrer da educação básica. A saber, na Matemática são introduzidos os conceitos de esfera, de superfície esférica e área da mesma, o volume da esfera, a área de um fuso, o volume de uma cunha e o volume dos segmentos esféricos; ao passo que na Geografia nossos alunos têm os primeiros contatos com o conceito de linhas imaginárias: paralelos e meridianos, bem como o sistema de coordenadas advindo destas linhas (longitude-latitude). Deste modo, é importante que os alunos da educação básica terminem esta etapa dos estudos sem aceitar a Geometria Euclidiana como única verdadeira e factual, que tenham em mente que esta geometria não é capaz de solucionar todos os problemas.

Ao concluírem esta fase da escolarização, nossos alunos são conscientes que a menor distância entre dois pontos é dada pela medida de um segmento de reta. Mas, como foi mencionado antes, isto é válido apenas no plano. Na superfície de uma esfera a menor distância entre dois pontos (que podem ser considerados duas cidades, se pensarmos no globo terrestre) não é fornecida por um segmento de reta e sim por um arco de circunferência máxima, conhecimento este relevante para viagens marítimas e aéreas de grandes distâncias pelo nosso planeta. Assim, é importante que o estudo dos conceitos pertencentes a essa nova geometria sejam efetivamente realizados e aprofundados no ensino médio, uma vez que os mesmos abrem caminho para um trabalho interdisciplinar da Matemática com a Geografia, tendo em vista a ampla gama de aplicações desses conceitos na compreensão do espaço geográfico ao qual estamos inseridos.

Para que os estudos sobre Geometria Esférica seja uma realidade alcançável na educação básica, é imprescindível que esta geometria seja efetivamente tratada nos cursos de graduação em Matemática, que, apesar de seus resultados estabelecerem uma conexão bastante interessante entre a Geometria e a Geografia, não têm contemplado este conteúdo em suas estruturas curriculares. O fato dos professores da educação básica não terem tido contato com as geometrias não euclidianas em sua formação certamente constitui uma das principais barreiras para o ensino da Geometria Esférica, fazendo com que suas noções sejam negligenciadas nas aulas de Matemática, privando a oportunidade de contato dos alunos com este tópico tão instigante.

O objetivo desse trabalho foi apresentar a “Geometria do Globo Terrestre”, partindo de uma introdução das definições básicas, teoremas e aplicações da Geometria Esférica quanto a caracterização

matemática de alguns conceitos geográficos, bem como a determinação de medidas sobre o globo terrestre. Além disso, trazemos a base matemática que fundamenta o sistema de localização GPS, onde, visando tal intento, fizemos uma breve introdução do conceito de coordenadas cartesianas no espaço e sua relação com as coordenadas geográficas. O presente trabalho visa fornecer informações relevantes sobre o tema em estudo, tentando completar a lacuna existente entre as disciplinas de Geografia e Matemática no ensino médio, uma vez que fundamenta matematicamente as linhas imaginárias (paralelos e meridianos), coordenadas geográficas e outros conceitos.

Neste trabalho alcançaremos alguns resultados da Geometria Esférica. Para isto, no capítulo 1 trazemos um breve histórico do surgimento das Geometrias Não Euclidianas, em especial da Geometria Esférica, onde foram apresentados uma discussão sobre o método axiomático, o quinto postulado de Euclides e como a desconfiança sobre a essência desse postulado e suas tentativas de prova possibilitaram a descoberta de novas geometrias, além de uma melhor compreensão da própria geometria euclidiana. Já no capítulo 2 apresentamos os conceitos e demonstramos os resultados básicos da Geometria Esférica, utilizando nestes processos os instrumentais já conhecidos da Geometria Euclidiana Plana e Espacial, conectando os mesmos ao estudo do globo terrestre e, seguindo nosso objetivo, introduzimos o sistema de coordenadas geográficas.

O capítulo 3 faz uma breve introdução ao estudo dos triângulos esféricos, onde vimos resultados equivalentes na esfera, ao teorema de Pitágoras, Lei dos senos e Lei dos cossenos, e mostramos, de modo intuitivo, como é obtida a distância entre pontos na superfície de uma esfera, além de calcular, com base neste resultado, a distância entre dois pontos no globo terrestre a partir de suas coordenadas geográficas. No capítulo 4 tratamos da superfície esférica em coordenadas cartesianas, no qual destacamos as equações desta superfície e mostramos a importante relação entre coordenadas cartesianas e geográficas. Por fim, no capítulo 5 apresentamos o Sistema de Posicionamento Global (GPS), uma aplicação tecnológica dos conceitos da Geometria Esférica, sendo explicitada a fundamentação matemática desse sistema, além de demonstrarmos, por meio de um exercício, como um receptor GPS fornece as coordenadas geográficas de pontos sobre a superfície terrestre ou próximos a ela.

Capítulo 1

O surgimento da Geometria Esférica

1.1 Método Axiomático

Muito pouco se sabe sobre os reais motivos que levaram Euclides a escrever sua obra *Elementos*, porém, muitos dos que escreveram sobre o assunto acreditam que a finalidade era a elaboração de material didático para o ensino. O fato é que a metodologia, como foram apresentados os resultados matemáticos nessa obra, teve tamanha influência que se tornou num padrão a ser seguido sempre que se pensa em demonstrações matemáticas.

De acordo com Courant e Robbins:

O método axiomático em Matemática começa pelo menos a época de Euclides. Não é de forma alguma verdadeira a afirmação de que a Matemática Grega tenha sido desenvolvida ou apresentada exclusivamente na forma de postulados, conforme os Elementos de Euclides. No entanto, a impressão causada por esta obra foi tão grande que influenciou as gerações seguintes de tal maneira que se transformou num modelo para todas as demonstrações em Matemática. (COURANT; ROBBINS, 2000, p.262)

De modo geral, o método axiomático pode ser descrito, com suas etapas enumeradas, da seguinte forma:

- I. Tomamos palavras ou conjunto de palavras que não são definidos, ou seja, que são tomadas como representativas de **conceitos primitivos**. Por exemplo: reta, ponto, conjunto.
- II. Para poder empregar os conceitos primitivos adequadamente, é necessário dispor de um conjunto de princípios ou regras que disciplinem sua utilização e estabeleçam suas propriedades. Tais princípios são chamados **axiomas** ou **postulados**. Assim como os conceitos primitivos, os axiomas são proposições que não se demonstram.
- III. Uma vez listados os conceitos primitivos e enunciados os axiomas de uma teoria matemática, todas as demais noções devem ser definidas e as afirmações seguintes, demonstradas. As proposições a serem demonstradas chamam-se **teoremas** e suas consequências imediatas são denominadas **corolários**. Uma proposição auxiliar, usada na demonstração de um teorema, é chamada de um **lema**.

É importante ressaltar que, neste método, ser um axioma ou ser um teorema não é uma característica intrínseca de uma proposição. Dependendo da preferência de quem organiza a teoria, uma determinada proposição pode ser adotada como axioma ou então provada como teorema, a partir de outra proposição que a substituiu na lista dos axiomas.

Contudo, um sistema axiomático deve satisfazer a duas condições: o postulados devem ser *consistentes*, isto é, não podem contradizer uns aos outros, por si mesmos ou por suas consequências, e devem ser *independentes* dos demais, no sentido de que não são consequências dos outros, sob pena de ser supérfluo.

1.2 A problemática do quinto postulado de Euclides

A obra *Elementos*, escrita por Euclides por volta de 300 a.C., têm uma importância excepcional na história da Matemática e exerce influência em todas as ciências exatas até os dias de hoje. Atualmente, mesmo com a descoberta de outras geometrias, o ensino de Geometria presente em programas e nas propostas de ensino da matéria no âmbito educacional escolar, em todos os níveis, aborda principalmente a Geometria sistematizada por Euclides - Geometria Euclidiana.

O tratado *Elementos* se manteve durante dois milênios como livro base para o ensino da Geometria. O fato fascinante sobre essa obra é que a teoria geométrica nela desenvolvida é baseada em apenas cinco axiomas, por meio dos quais Euclides demonstrou suas 465 proposições. O feito da teoria contida na mesma ser desenvolvida de tão pouco é certamente um dos motivos que tornam a obra tão grandiosa. Os axiomas segundo os quais foram referidos são:

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores que dois retos. (EUCLIDES, 2009, p.98)

Estes postulados podem ser interpretados para a linguagem atual da seguinte forma: O primeiro equivale a “por dois pontos distintos é possível traçar uma única reta”; o segundo nos diz que “dado um segmento qualquer de reta, é possível prolongá-lo de modo único, infinitamente, sobre a reta, em qualquer sentido”; o terceiro afirma que “é possível traçar um círculo, dados arbitrariamente um ponto como centro e uma distância que lhe servirá de raio”. Devido ao fato de Euclides não usar instrumentos de medição, o quarto postulado foi usado para designar o ângulo que é igual ao seu suplementar, assim ele estabeleceu que ângulos com tal propriedade são iguais (ângulos de 90°).

Os quatro primeiros postulados, por sua simplicidade e evidência, se caracterizam por serem a base para um sistema axiomático classificado como “uma Geometria” ou “Geometria neutra”. Já o quinto postulado, também conhecido como *postulado das paralelas*, considerado pouco evidente, gerou muita polêmica, devido ao fato deste parecer mais com um teorema. Desta forma, por vários séculos, muitos matemáticos acreditavam que o conjunto de postulados de Euclides não era independente, pois achavam que fosse possível demonstrar o quinto postulado a partir dos quatro primeiros. Na figura 1.1 trazemos uma representação para o quinto postulado de Euclides.

Os estudiosos da obra de Euclides acreditam que ele reconhecia a natureza questionável de seu quinto postulado, pois postegou seu uso durante o tempo que pode, utilizando apenas na proposição 29 dos Elementos. As 28 primeiras proposições não dependem do quinto postulado.

Todas as tentativas de demonstração do referido postulado falharam e, hoje, dentro do conhecimento matemático, é consenso que a sua validade depende diretamente da opção da superfície

geométrica para realizar sua prova. Um consequência da busca da prova do quinto postulado, foi a produção de um grande número de substitutos ao quinto postulado. Estes substitutos na verdade são proposições equivalentes ao quinto postulado, ou seja, usando-se os quatro primeiros postulados mais o substituto é possível desenvolver a mesma Geometria Euclidiana, de modo que nada é obtido por sua substituição.

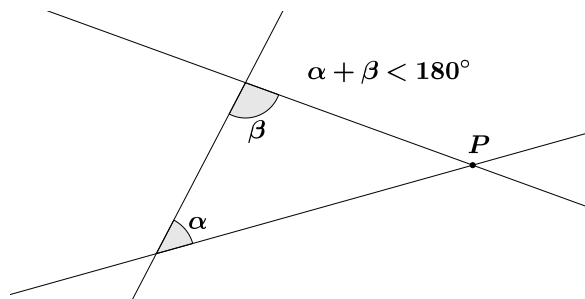


Figura 1.1: Quinto postulado. Fonte: *Autor*

O substituto mais conhecido atualmente e que é, inclusive, apresentado nos livros didáticos de nossas escolas, apresentado por John Playfair em 1795, é enunciado da seguinte forma: “*Dados, no plano, uma reta r e um ponto P , não pertencente à r , existe uma única reta que passa por P e é paralela a r* ”.

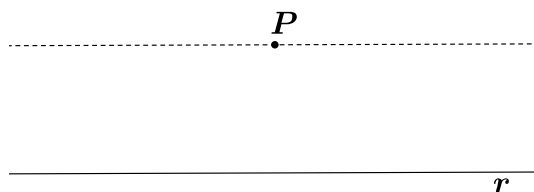


Figura 1.2: Reformulação do postulado das paralelas feita por Playfair. Fonte: *Autor*

Abaixo listamos alguns outros substitutos do quinto postulado de Euclides, segundo Barbosa (1995):

- A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a dois ângulos retos.
- Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes.
- Existe um par de retas equidistantes.
- Dados quaisquer três pontos não colineares, existe um círculo passando pelos três pontos.
- Em qualquer triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.
- Duas retas paralelas a uma mesma reta são paralelas.

- Se uma reta corta uma de duas retas paralelas, então corta a outra.
- Existe um ângulo inscrito em um semicirculo que é reto.

Durante as tentativas de fazer o postulado das paralelas derivar dos outros quatro ou substituí-lo por um outro postulado, muitos matemáticos acabaram utilizando, mesmo sem perceber, algum desses substitutos. Vários morreram acreditando ter conseguido obter a prova deste postulado, mais o que fizeram foi apenas reescrever a Geometria de Euclides, reduzindo apenas o quinto postulado a uma afirmação equivalente.

Considerando as inúmeras tentativas anteriores de demonstração do quinto postulado, o padre jesuíta italiano Girolamo Saccheri (1667-1723) apresentou, no famoso livro *Euclides livre de todas as máculas*, uma tentativa de prova desse postulado usando o método de redução ao absurdo (método mais utilizado pelo próprio Euclides em suas demonstrações). Para tal propósito, ele tentou obter uma prova para o substituto “Se três ângulos de uma quadrilátero são retos, então o último também é reto” ou “existe um par de retas equidistantes” pelo método de demonstração por redução ao absurdo, tomando um quadrilátero ABCD, com os lados AD e BC sendo congruentes e perpendiculares ao lado AB, e analisando as possibilidades de medida dos ângulos \widehat{C} e \widehat{D} : retos, agudos ou obtusos (usando os quatro primeiros postulados ele havia mostrado que se tem $\widehat{C} = \widehat{D}$).

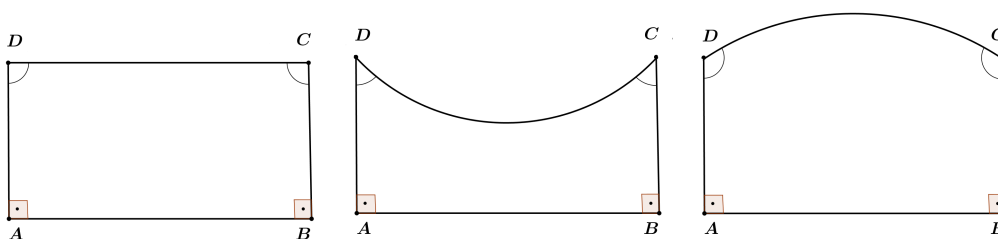


Figura 1.3: Quadriláteros de Saccheri. Fonte: *Autor*

Depois de muitos anos de estudo, Saccheri conseguiu fazer, a partir das negativas ao quinto postulado, a prova de uma série de resultados que lhe pareciam bastante estranhos, dentro do contexto da tradicional Geometria Euclidiana, porém sem nenhuma contradição. Mesmo com todos os resultados obtidos, Saccheri não acreditou na existência de uma nova geometria, mas contribuiu imensamente para o desenvolvimento das Geometrias Não Euclidianas e sua obra instigou a curiosidade de grandes matemáticos que o sucederam.

Outro matemático que também se dedicou à provar o postulado das paralelas foi o suíço Johann Heinrich Lambert (1728-1777). Em 1776, Lambert escreveu o livro *A teoria de linhas paralelas*, que tratava deste postulado, porém decidiu não publicar por não ter conseguido resolver satisfatoriamente a questão. O livro foi publicado postumamente em 1788, e, tal como Saccheri, Lambert explorou as consequências de admitir serem falsos os resultados de equivalentes (substitutos) ao quinto postulado, alcançando um nível de conhecimento mais profundo do que Saccheri ao descobrir novos teoremas (não euclidianos).

No século XIX, matemáticos como Carl Friedrich Gauss, Johann Bolyai, Nicolai Ivanovich Lobachevsky e Georg Bernhard Riemann já estavam convencidos de que o quinto postulado de Euclides era independente dos outros, e cuja negação apontou para a possibilidade de se construir outras geometrias em que o conceito de paralelismo era diferente daquele assumido por Euclides. Dessa modo,

tendo em vista o substituto de Playfair, foram consideradas três situações: por um ponto externo a uma reta passa apenas uma, infinitas ou nenhuma reta paralela a reta dada. Das duas negações do postulado das paralelas desdobraram-se as geometrias não euclidianas: Geometria Hiperbólica e Geometria Elíptica (Esférica).

Os matemáticos Johann Bolyai (1802-1860) e Ivanovich Lobachevsky (1793-1856) dividiram os créditos pela descoberta da Geometria Hiperbólica. Desenvolveram a teoria dessa nova geometria, usando como base os quatro primeiros postulados de Euclides, e no lugar do quinto postulado, assumiram a existência de infinitas retas paralelas a uma reta dada, passando por um ponto exterior a esta reta. Uma de suas conclusões, nesta geometria, foi que soma dos ângulos internos de um triângulo era menor do que 180° .

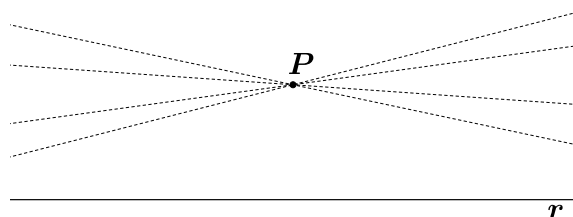


Figura 1.4: Quinto postulado segundo a Geometria Hiperbólica. Fonte: *Autor*

Contudo, vale acrescentar que o grande interesse por tal tema e a origem das ideias que motivaram o desenvolvimento do mesmo foram, supostamente, devidas a Carl Friedrich Gauss (1777-1855), conforme evidências contidas em várias de suas cartas a amigos, onde eram claros os indícios que ele havia estudado muito sobre esta Geometria não Euclidiana e que já possuía ideias concretas sobre o assunto, além de notas inéditas sobre o tema deixadas entre seus trabalhos. Contudo, a falta de tempo e a necessidade de apresentar um trabalho consistente, que não levantasse polêmica, levaram-no a adiar a publicação de seus estudos. Os créditos pela descoberta dessa nova geometria foi para aqueles que publicaram primeiro.



Figura 1.5: Carl Friedrich Gauss. Fonte: *Google Imagens*

O responsável pelo desenvolvimento da Geometria Esférica foi o matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866). Baseado nas descobertas de Gauss, Riemann introduziu o

conceito de espaços com mais de três dimensões, inventando o conceito de superfície geométrica abstrata, definiu espaços curvos e relacionou sua curvatura com a expressão do elemento de distância.



Figura 1.6: Georg Friedrich Bernhard Riemann. Fonte: *Google Imagens*

Até a época de Riemann, os matemáticos que trataram da problemática do quinto postulado acreditavam que não poderia haver geometria na qual a soma dos ângulos internos de um triângulo fosse superior a dois ângulos retos. Na Geometria de Euclides, a soma era sempre igual a dois ângulos retos e na Geometria criada por Bolyai e Lobachevsky (Hiperbólica) a soma é inferior a dois ângulos retos. O fato de não haver geometria tal que esta soma fosse superior a dois ângulos retos era um indício, para Riemann, que alguma coisa estava faltando.

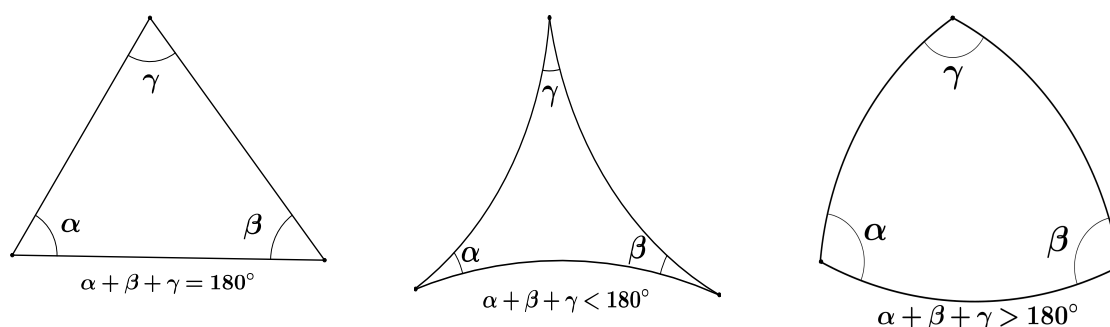


Figura 1.7: Soma dos ângulos internos de um triângulo nas Geometrias Euclidiana, Hiperbólica e Esférica. Fonte: *Autor*

Decidido a estudar tal impossibilidade, Riemann considerou a variação do postulado das paralelas em que dados uma reta e um ponto fora dela, não há reta paralela à reta dada que passe por este ponto. Ele mostrou, que descartando a infinidade da reta, mas admitindo-se que esta seja ilimitada, considerando a superfície de uma esfera como modelo de visualização de seus resultados e as retas sendo circunferências máximas da esfera, era possível desenvolver uma nova geometria totalmente consistente e acima de tudo, muito útil, na qual a soma dos ângulos internos de um triângulo é superior a dois ângulos retos. Esta geometria, alguns anos depois, recebeu o nome de Geometria Esférica (modelo mais simples da Geometria Elíptica).

Capítulo 2

Geometria Esférica e o Globo Terrestre

A Geometria Esférica tem como ambiente de trabalho a superfície de uma esfera, diferente da euclidiana, que é desenvolvida no plano. Temos, assim, um “novo mundo”, onde retas são circunferências e a soma dos ângulos internos de um triângulo é diferente 180° . Vale citar mais alguns pontos importantes onde a Geometria Esférica difere da Geometria Euclidiana: a reta (circunferência máxima) tem comprimento finito, mas é ilimitada, pois podemos percorrer indefinidamente uma circunferência máxima e sempre retornamos ao ponto de partida; não existe semelhança de triângulos, apenas congruência; a soma dos ângulos internos do triângulo esférico na verdade é superior a 180° e inferior a 540° ; a área dos triângulos esféricos é proporcional ao excesso da soma de seus ângulos internos relativo ao ângulo de 180° e a distância entre dois pontos é dada pela medida de um arco de circunferência, conforme veremos com mais detalhes adiante.

Na seção a seguir explicitamos os conceitos elementares da Geometria Esférica, que, como podemos perceber, em muitos casos coincidem com os já estudados na Geometria Euclidiana e que são abordados na educação básica. É importante acrescentar, que durante as provas das proposições apresentadas foram utilizados, sempre que possível, instrumentais já conhecidos da Geometria Euclidiana Plana e Espacial, visando, como isso, uma aproximação efetiva da Geometria Esférica à realidade dos estudos realizados na educação básica.

2.1 A superfície esférica e seus elementos

Definição 1. *Dados um ponto O do espaço ε e um número real positivo R . A superfície esférica de centro O e raio R , denotada por $\Sigma(O, R)$, é o conjunto dos pontos de ε cuja distância a O é igual a R , ou seja,*

$$\Sigma(O, R) = \{P \in \varepsilon \mid d(P, O) = R\}.$$

Os pontos do espaço cuja distância ao ponto O é menor do que R são chamados **pontos interiores** da superfície esférica e aqueles nos quais essa distância é maior do que R são seus **pontos exteriores** (figura 2.1). Além disso, ainda pelas notações acima, a reunião dos pontos da superfície esférica com seus pontos interiores é denominada **esfera** de centro O e raio R .

Definição 2. *Uma corda da superfície esférica Σ é o segmento de reta que liga dois pontos quaisquer de Σ .*

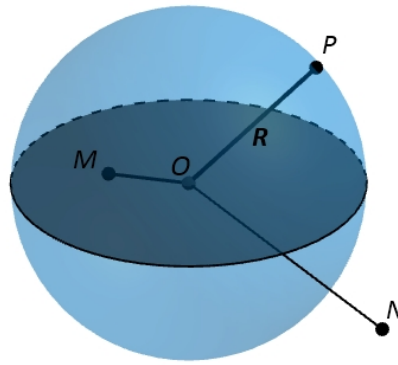


Figura 2.1: Superfície esférica Σ , com o ponto P pertencendo, M interno e N externo à Σ . Fonte: *Autor*

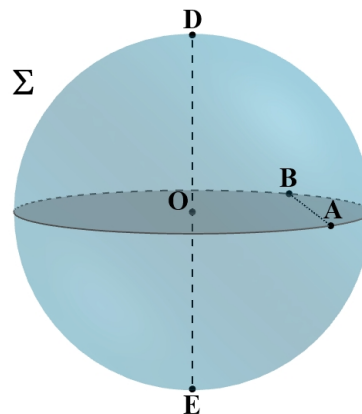


Figura 2.2: Corda AB e diâmetro DE na superfície esférica Σ . Fonte: *Autor*

Definição 3. Dados dois pontos distintos, P e Q , sobre uma superfície esférica Σ . A corda PQ é um **diâmetro** da superfície esférica Σ se este segmento contém o centro de Σ . Neste caso diremos que os pontos P e Q são **pontos antípodas** de Σ .

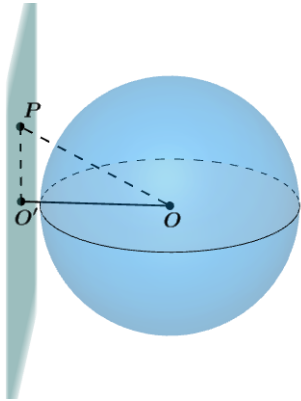
Aqui cabe um comentário a respeito do uso da palavra raio, pois esta em algumas situações será usada para designar o número real R e em outras, o segmento OP , onde O é o centro e P é um ponto qualquer da superfície esférica. Contudo, não haverá qualquer tipo de ambiguidade, uma vez que o contexto da situação a que estamos trabalhando nos dirá qual dos sentidos está sendo solicitado. Um comentário análogo se faz para o uso da palavra diâmetro. Além disso, será indiferente o uso dos termos circunferência e círculo (sendo utilizados para denotar o mesmo conjunto de pontos) e quando estivermos nos referindo ao segmento de reta que liga os pontos A e B , usaremos a notação AB , quanto ao comprimento deste, utilizaremos \overline{AB} .

Proposição 1. Consideremos, no espaço, um plano π e uma superfície esférica Σ , de centro O e raio R . Se d é a distância de O a π , então um dos casos ocorre:

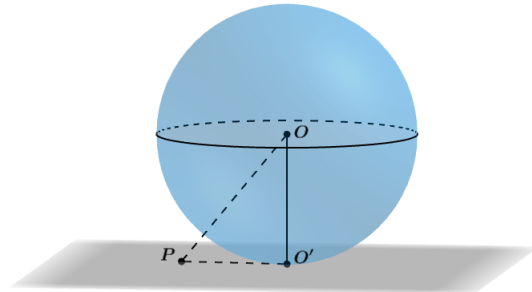
- I. Se a distância d for maior do que R , então π não intersecta Σ .
- II. Se a distância d for igual a R , então π intersecta Σ em um único ponto.
- III. Se a distância d for menor do que R , então a interseção de π com Σ é uma circunferência.

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos, inicialmente, o ponto O' , pé da perpendicular baixada de O ao plano π , donde $\overline{OO'} = d$.

CASOS I e II: Dado, arbitrariamente, um ponto P do plano π e consideremos $d \geq R$. Se $P \neq O'$, então teremos $\widehat{OO'P} = 90^\circ$, desse modo tem-se $\overline{OP} > \overline{OO'} \geq R$. Daí, P não pertence a Σ . Além disso, de $\overline{OO'} = d \geq R$, temos que a igualdade nesta última desigualdade ocorre se, e só se, $O' \in \Sigma$. Logo concluímos que o plano π intersectará Σ no ponto O' , caso $d = R$ (figura b), e que tal plano não intersectará Σ , caso $d > R$ (figura a).



(a) Representação do caso I. Fonte: Autor



(b) Representação do caso II. Fonte: Autor

CASO III: Tomemos um ponto $P \in \Sigma \cap \pi$ arbitrário. Como a medida do ângulo $\widehat{OO'P}$ é igual a 90° , então teremos que o triângulo $\triangle OO'P$ é retângulo em O' (figura 2.3). Desse modo, aplicando o teorema de Pitágoras neste triângulo, obtemos:

$$\overline{OP}^2 = \overline{O'P}^2 + \overline{OO'}^2,$$

ou seja, $\overline{O'P} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OO'}^2} = \sqrt{R^2 - d^2}$. Logo o ponto P pertence à circunferência de centro O' e raio $\sqrt{R^2 - d^2}$, isto é, a interseção de π com Σ está contida na referida circunferência.

Reciprocamente, tomando um ponto P na circunferência de centro O' e raio $\sqrt{R^2 - d^2}$ (contida em π) e aplicando mais uma vez o teorema de Pitágoras, tem-se:

$$\overline{OP}^2 = \overline{O'P}^2 + \overline{OO'}^2 \implies \overline{OP}^2 = (\sqrt{R^2 - d^2})^2 + d^2 = R^2 \implies \overline{OP} = R,$$

isto é, o ponto P pertence a Σ . Logo, a referida circunferência está contida em $\pi \cap \Sigma$. Portanto, concluímos que o plano π intersecta Σ por uma circunferência de centro O' e raio $\sqrt{R^2 - d^2}$.

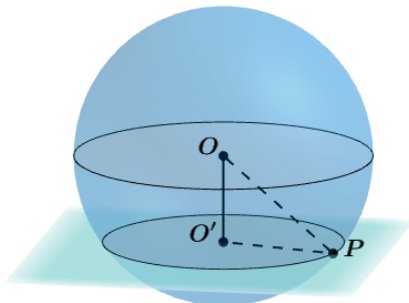


Figura 2.3: Representação do caso III. Fonte: Autor

Definição 4. Um plano é **tangente** a uma superfície esférica Σ quando este possui apenas um ponto em comum com Σ . Esse ponto comum é chamado **ponto de tangência**. Caso a interseção do plano com Σ contenha mais de um ponto, diremos que este plano é **secante** à Σ .

Desse modo, conforme resultado apresentado pela proposição 1, um plano π será tangente à uma superfície esférica Σ quando constatarmos que a distância do centro de Σ à π for igual ao raio daquela superfície. Já no caso de π ser secante Σ , observamos que a referida distância é menor do que o raio de Σ e que se tem $\pi \cap \Sigma$ é uma circunferência.

Proposição 2. Um plano perpendicular a um raio na sua extremidade com a superfície esférica é tangente à mesma. Reciprocamente, todo plano tangente a uma superfície esférica é perpendicular ao raio que contém o ponto de tangência.

DEMONSTRAÇÃO: Seja π um plano perpendicular ao raio OT da superfície esférica Σ , de centro O , no ponto T .

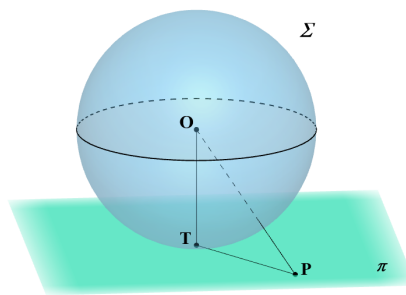


Figura 2.4: Ilustração I para a proposição 2. Fonte: *Autor*

Tomemos, agora, um ponto $P \in \pi$, diferente de T . Como π é perpendicular a OT , temos que o triângulo $\triangle OTP$ é retângulo, com hipotenusa OP . Ora, sabendo que num triângulo tem-se o resultado “oposto ao maior ângulo encontra-se o maior lado”, então obtemos $\overline{OP} > OT = \text{Raio de } \Sigma$. Logo, temos que nenhum outro ponto de π , além de T , está contido em Σ , ou seja, o plano π é tangente à superfície esférica Σ .

Reciprocamente, dado um plano π tangente a superfície esférica Σ no ponto T . Mostraremos que o raio passando por T é perpendicular a π . Suponhamos, por absurdo, que o raio OT não seja perpendicular a π .

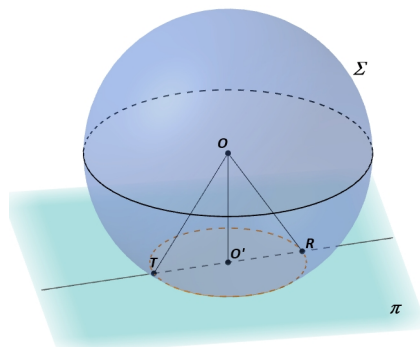


Figura 2.5: Ilustração II para a proposição 2. Fonte: *Autor*

Seja O' o pé da perpendicular ao plano π baixada do centro O de Σ . Temos que $O' \neq T$, já que π não é perpendicular a OT . Tomemos, agora, o ponto R sobre a reta $O'T$ tal que $\overline{O'T} = \overline{O'R}$ (conforme a figura 2.5). Pelo caso LAL de congruência de triângulos (já que $\overline{O'T} = \overline{O'R}$, $\overline{O'O}$ é um lado comum e $\widehat{OO'T} = \widehat{OO'R} = 90^\circ$) temos que os triângulos $\triangle OO'P$ e $\triangle OO'R$ são congruentes, donde resulta que $\overline{OT} = \overline{OR}$. Daí, concluímos que se tem $R \in \Sigma$, o que contraria o fato de π ser tangente à Σ . Portanto, temos que o raio OT é perpendicular ao plano π .

Definição 5. Uma **circunferência máxima** ou **círculo máximo** na superfície esférica Σ é a interseção de Σ com um plano que passa pelo seu centro. Por outro lado, uma **circunferência menor** ou **círculo menor** é a interseção de Σ com um plano passando por um de seus pontos interiores, mas diferentes do centro de Σ .

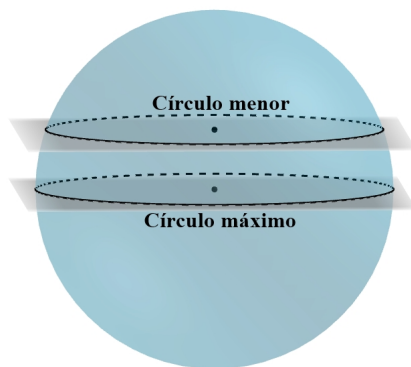


Figura 2.6: Círculos máximo e menor na superfície esférica. Fonte: *Autor*

Há um forte motivo para uso da terminologia circunferência máxima: tais circunferências são as de maior raio dentre todas as outras contidas na superfície esférica. Conforme será visto adiante, quando assumimos que a Terra possui um formato esférico, temos que o Equador é uma circunferência máxima, mas os demais paralelos não o são. Constatamos que quando mais próximo dos polos estiver o paralelo, menor será seu tamanho (comprimento).

Proposição 3. Duas circunferências máximas quaisquer de uma superfície esférica Σ se cortam nas extremidades de um diâmetro de Σ .

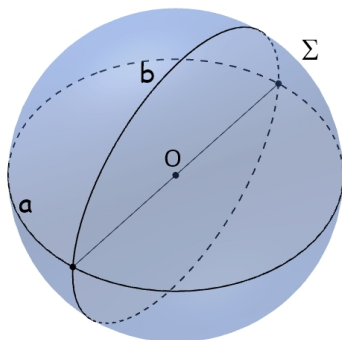


Figura 2.7: Interseção de duas circunferências máximas. Fonte: *Autor*

DEMONSTRAÇÃO: Sejam a e b duas circunferências máximas diferentes, da superfície esférica Σ , contidas, respectivamente, nos planos α e β . Como tais planos são distintos e passam pelo centro O

de Σ , temos que α e β se intersectam segundo uma reta contendo O , que designaremos por r . Pelo fato da reta r passar pelo centro O de a , temos esta intersecta a em dois pontos diametralmente opostos, que por sua vez também estão contidos em b , já que pertencem a $r = \alpha \cap \beta$ e distam, cada um, de um raio (de Σ) de O . Logo os referidos pontos formam um diâmetro de b .

Portanto, as interseções de a e b compõem um diâmetro de Σ .

Definição 6. Os elementos da superfície esférica Σ , de centro O , são:

1. **Eixo Polar e :** Qualquer reta que contenha um diâmetro de Σ .
2. **Polos:** São as interseção do eixo polar e com Σ . Desse modo tem-se dois polos: Polo Norte (N) e polo Sul (S).
3. **Equador:** Circunferência máxima obtida pela interseção de Σ com o plano perpendicular ao eixo e , passando pelo centro O .
4. **Paralelos:** Circunferências dadas pela interseção de Σ com planos perpendiculares ao eixo e , passando por pontos interiores a Σ .
5. **Meridianos:** São curvas (semicircunferências) que ligam os polos Norte (N) e Sul (S) por meio de arcos contidos em circunferências máximas que passam por estes pontos.

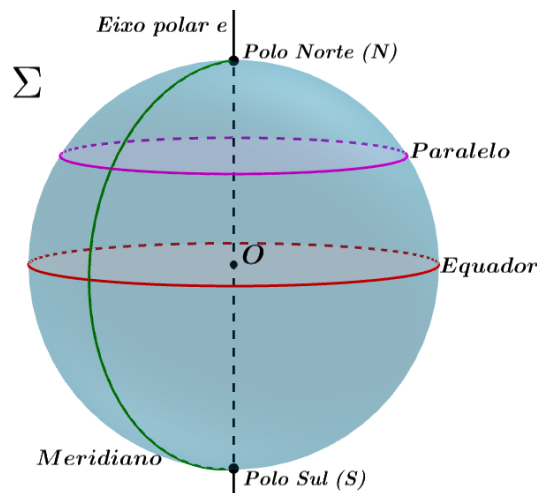


Figura 2.8: Elementos notáveis de uma superfície esférica Σ . Fonte: Autor

Definição 7. O plano que contém o Equador de uma superfície esférica a divide em duas partes: o **Hemisfério Norte**, que contém o Polo Norte, e o **Hemisfério Sul**, que contém o Polo Sul.

Definição 8. A **Calota esférica** corresponde a cada uma das duas partes em que uma superfície esférica Σ fica dividida por um plano secante a Σ .

Definição 9. A **Zona esférica** é a porção da superfície esférica Σ compreendida entre dois planos paralelos e secantes a Σ .

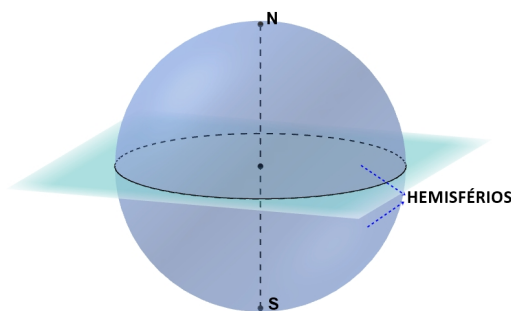


Figura 2.9: Hemisférios Norte e Sul. Fonte: *Autor*

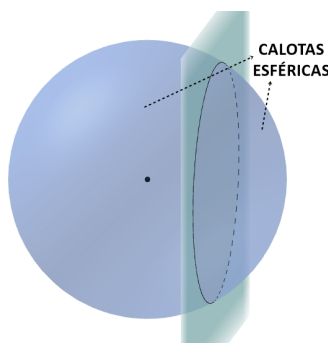


Figura 2.10: Calota esférica. Fonte: *Autor*

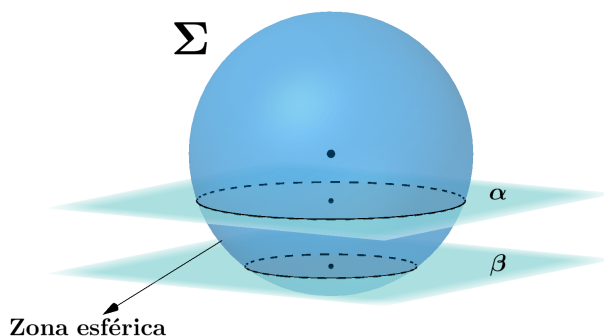


Figura 2.11: Zona esférica de Σ compreendida entre os planos α e β . Fonte: *Autor*

Definição 10. As *retas*, na *Geometria Esférica*, correspondem a *circunferências máximas*.

Desta forma, considerando-se os axiomas de determinação de planos, podemos observar que por dois pontos distintos da superfície esférica é possível traçar uma única reta, se estes não forem antípodas, ou infinitas retas, se forem antípodas. Além disso, conforme mostrado na proposição 3, constatamos que na Geometria Esférica não existem retas paralelas, uma vez que duas quaisquer retas sempre se intersectam em dois pontos antípodas.

Definição 11. (*Distância entre pontos na Geometria Esférica*) Dados dois pontos A e B na superfície esférica Σ . A *distância* entre A e B , denotada por $d(A, B)$, será igual ao comprimento da menor curva, contida em Σ , ligando esses dois pontos. Tal curva recebe a denominação *geodésica*.

Mais adiante será mostrado que a curva geodésica, na superfície esférica, ligando dois pontos quaisquer na verdade é o arco menor da circunferência máxima que passa por estes pontos. Desta forma, temos, na Geometria Esférica, um ente geométrico equivalente ao segmento de reta da Geometria Euclidiana, no que se refere a determinação da distância entre pontos.

Definição 12. (*Ângulo entre retas na Geometria Esférica*) Dadas duas retas a e b em uma superfície esférica. O **ângulo entre a e b** , ou **ângulo esférico compreendido entre a e b** , é igual ao ângulo formado pelos planos que as determinam.

É fácil ver que o ângulo esférico compreendido entre a e b tem a mesma medida do ângulo entre as retas r e s , tangentes a a e b , respectivamente, em um dos pontos de $a \cap b$. De fato, como r e s são tangentes às circunferência máximas a e b pelo mesmo ponto, temos que aquelas são perpendiculares a interseção dos planos, que contém a e b , num mesmo ponto. Desse modo, o ângulo formado por tais planos é igual ao ângulo compreendido entre as retas r e s .

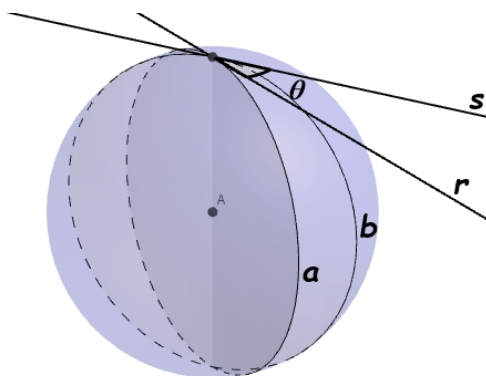


Figura 2.12: Ângulo esférico θ entre as retas a e b da superfície esférica. Fonte: Autor

Definição 13. O **fuso esférico** é a região da superfície esférica compreendida entre dois meridianos, que constituem os lados do fuso. Os pontos antípodas comuns aos meridianos são chamados de **vértices do fuso**. O **ângulo ou abertura do fuso** é o ângulo θ do diedro cujos planos que constituem seus lados contém os meridianos que delimitam o fuso.

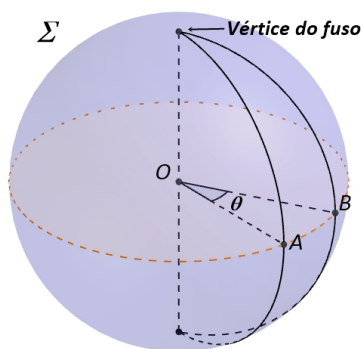


Figura 2.13: Fuso esférico de abertura $\widehat{AOB} = \theta$. Fonte: Autor

As próximas proposições nos darão meios para calcularmos as áreas das Zonas e Fusos esféricos. Para efetuarmos as demonstrações das mesmas utilizaremos alguns conceitos e resultados do Cálculo

Diferencial e Integral. Devido ao fato destes serem conteúdos próprios do ensino superior, tais demonstrações podem ser omitidas pelo professor numa apresentação de seus resultados à alunos da educação básica.

Proposição 4. *A área A de uma superfície esférica Σ é igual a $4\pi R^2$, onde R é o raio de Σ .*

DEMONSTRAÇÃO:

Do Cálculo Diferencial e Integral, sabe-se que a área A de uma superfície de revolução gerada pela rotação do gráfico de uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, contínua em $[a, b]$, positiva e continuamente derivável em (a, b) , em torno do eixo das abscissas é tal que

$$A = 2\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx,$$

caso esse limite exista.

Desse modo, sabendo que a superfície esférica Σ de raio R é gerada pela rotação, em torno do eixo das abscissas, do gráfico da função $f : [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, teremos, para $x \in (-R, R)$:

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \implies f'(x) = \frac{(-2x)}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Daí, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx &= \int_{-R+\epsilon}^{R-\epsilon} (\sqrt{R^2 - x^2}) \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{R^2 - x^2}\right)} dx \\ &= \int_{-R+\epsilon}^{R-\epsilon} (\sqrt{R^2 - x^2}) \sqrt{\frac{R^2 - x^2 + x^2}{R^2 - x^2}} dx \\ &= \int_{-R+\epsilon}^{R-\epsilon} (\sqrt{R^2 - x^2}) \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right) dx \\ &= \int_{-R+\epsilon}^{R-\epsilon} R dx = R[x] \Big|_{-R+\epsilon}^{R-\epsilon} \\ &= R(R - \epsilon - (-R + \epsilon)) = 2R^2 - 2\epsilon R. \end{aligned}$$

Logo, concluímos:

$$2\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-R+\epsilon}^{R-\epsilon} (\sqrt{R^2 - x^2}) \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{R^2 - x^2}\right)} dx = 2\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (2R^2 - 2\epsilon R) = 4\pi R^2.$$

Portanto, a área A de uma superfície esférica Σ de raio R é igual a $4\pi R^2$.

Corolário. *A área A_f de um fuso esférico de abertura θ , em radianos, é igual a $2\theta R^2$, sendo R o raio da superfície esférica que contém este fuso.*

A ideia utilizada para verificarmos a validade de tal resultado pode ser conjecturada de constatações como estas: se tivéssemos um fuso com abertura $\theta = \pi$, este seria um hemisfério e daí teríamos $A_f = 2\pi R^2$ (metade da superfície esférica); e se a abertura fosse $\theta = \frac{\pi}{2}$, então teríamos $A_f = \pi R^2$, uma vez que o fuso seria a quarta parte da superfície esférica. A situação geral parte

de uma análise de casos conforme $\frac{\theta}{2\pi}$ for racional ou irracional, que será omitida neste material. De modo geral, temos que a área A_f de um fuso é diretamente proporcional ao seu ângulo de abertura θ . Sendo assim, por uma regra de três simples e utilizando o resultado da proposição anterior, obtemos:

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{A_f}{4\pi R^2} \implies A_f = \frac{4\pi R^2 \theta}{2\pi} \implies A_f = 2\theta R^2.$$

Proposição 5. *Considere, em uma superfície esférica de raio R , uma calota esférica de altura h . A área A_c dessa calota esférica é fornecida por:*

$$A_c = 2\pi hR.$$

DEMONSTRAÇÃO:

Seja d a diferença entre as medidas do raio R , da superfície esférica, e da altura h , da calota, conforme mostra a figura 2.14.

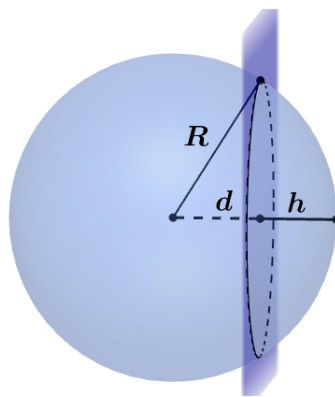


Figura 2.14: Calota esférica de altura h . Fonte: *Autor*

Temos que esta calota esférica pode ser obtida pela rotação, em torno do eixo das abscissas, da porção do gráfico da função $f : [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, situada sobre o intervalo $[d, R]$. Inicialmente, observemos que o fato de f' ser integrável em $[d, R - \epsilon] \subset [-R, R]$, com $\epsilon > 0$, nos assegura que a área A da superfície de revolução gerada pela rotação da porção do gráfico de f compreendida em $[d, R - \epsilon]$ é tal que

$$A = 2\pi \int_d^{R-\epsilon} f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \quad (2.1)$$

Desse modo, procedendo de modo similar a demonstração da proposição anterior, teremos:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_d^{R-\epsilon} (\sqrt{R^2 - x^2}) \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{R^2 - x^2}\right)} dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_d^{R-\epsilon} (\sqrt{R^2 - x^2}) \sqrt{\frac{R^2 - x^2 + x^2}{R^2 - x^2}} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_d^{R-\epsilon} (\sqrt{R^2 - x^2}) \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right) dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_d^{R-\epsilon} R dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (R^2 - Rd - R\epsilon) \\ &= R(R - d). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Como $d = R - h$ e $A \rightarrow A_c$ para $\epsilon \rightarrow 0$, das igualdades (2.1) e (2.2), concluímos:

$$A_c = 2\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_d^{R-\epsilon} (\sqrt{R^2 - x^2}) \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{R^2 - x^2}\right)} dx = 2\pi R(R - (R - h)) \implies A_c = 2\pi hR.$$

Corolário. A área A_z de uma zona esférica situada entre dois planos paralelos que distam h é igual $2\pi hR$, sendo R o raio da superfície esférica que a contém.

De fato, sendo h a distância entre os planos paralelos que determinam a zona esférica, temos que a área dessa zona pode ser fornecida pela diferença das áreas das calotas m e n , conforme mostra a figura 2.15, de alturas respectivamente iguais a $h + d$ e d .

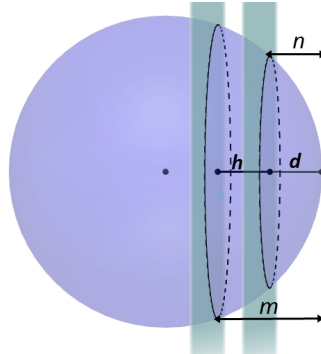


Figura 2.15: Calotas esféricas m e n . Fonte: *Autor*

Logo, a área da zona é obtida da seguinte forma:

$$A_z = A_m - A_n = 2\pi(h + d)R - 2\pi dR \implies A_z = 2\pi hR.$$

Com base neste resultado, temos a surpreendente constatação: se cortarmos uma superfície esférica em fatias de iguais espessura (os planos paralelos que a intersectam estando a uma distância constante), as áreas das zonas assim obtidas são iguais, independentemente se estas forem cortadas mais próximas do equador ou de um polo. Este resultado é evidenciado pelo fato da área da zona depender apenas da distância h (espessura) entre os planos que seccionam a superfície esférica.

2.2 A forma da Terra

Atualmente não encontramos uma pessoa que não saiba o formato da Terra. Contudo, nos estágios iniciais da civilização humana, achava-se que o planeta Terra era um disco chato flutuando sobre as águas de um oceano tão profundo quanto a imaginação podia alcançar. Esse disco era suficientemente grande a ponto de englobar todas as regiões até então conhecidas e em seus limites haviam montanhas intransponíveis onde o Sol se punha no cair da noite.



Figura 2.16: Disco representando o formato da Terra. Fonte: *Google Imagens*

As primeiras evidências da ideia de esfericidade da Terra provêm da Grécia Antiga. No século IV a.C., o filósofo Aristóteles, em sua obra *Sobre os Céus*, expressou a teoria de que o formato da Terra realmente é de uma esfera, coberta parte por terra, parte por águas e envolvida por ar. Aristóteles defende seu argumento a partir de fatos observados no meio natural: o modo como os bancos desaparecem no horizonte (primeiro o corpo do barco e depois o mastro), revelando a natureza curva da superfície do oceano; as eclipses vistas na superfície da Lua evidenciavam que o contorno da sombra da Terra era sempre curvo.



Figura 2.17: Eclipse da Lua. Fonte: *Google Imagens*

No século III a.C., Erastósteles de Cirene (276 - 196 a.C), astrônomo e geógrafo grego, admitindo ser esférica a forma da Terra e utilizando o ângulo de elevação do Sol ao meio dia no solstício de verão, em Alexandria e em Siena (atual Assuã, Egito), conseguiu determinar a medição do tamanho da Terra (confira o problema 2 da seção 3.4). A medida obtida por Erastóstenes é um dos 10 mais belos experimentos científicos pela sua simplicidade e método instrutivo de resolução.

Porém, para muitos a ideia de esfericidade da Terra era inconcebível, sendo duramente criticada durante vários séculos. Por exemplo, o monge cristão Cosmas Indicopleustes escreveu, no ano de 547 d.C., o livro *Topologia Cristã*, onde ridicularizava a crença pagã numa Terra redonda, questionando o motivo pelo qual as pessoas situadas na metade de baixo (estando de ponta cabeça) não caírem da superfície da Terra e a chuva que, supostamente, caia para cima. A objeção da ideia de esfericidade foi tão forte que por quase dois mil anos após Aristóteles, ainda era possível encontrar representações mostrando as pessoas da “parte de baixo” e embarcações caindo em direção ao céu.

A dúvida se desfez definitivamente no início do século XV, quando o navegador português Fernão de Magalhães (1480 - 1521) realizou sua famosa viagem em torno da Terra, confirmando, assim, que esta é realmente redonda.

No século XVII, baseado no movimento de rotação da Terra, Issac Newton (1643 - 1727) lançou a ideia de achatamento da Terra, afirmando que esta não poderia ser uma esfera perfeita, uma vez que, devido a esse movimento, existem forças inerciais que fazem com que a Terra seja achatada nos polos e alongada no equador. O formato por ele proposto para a Terra foi de um *elipsóide*.

Desse modo, se tomarmos um plano α contendo a reta que passa pelos polos da Terra, obtemos, aproximadamente, uma elipse cujo eixo focal tem medida igual ao diâmetro do equador e o eixo não focal possui medida igual a distância entre os Polos Norte e Sul. A representação abaixo mostra a secção da superfície da Terra por α , onde \mathbf{a} é metade do diâmetro do equador (raio equatorial) e \mathbf{b} , metade da distância entre os polos (raio polar).



Figura 2.18: Planeta Terra. Fonte: *Google Imagens*

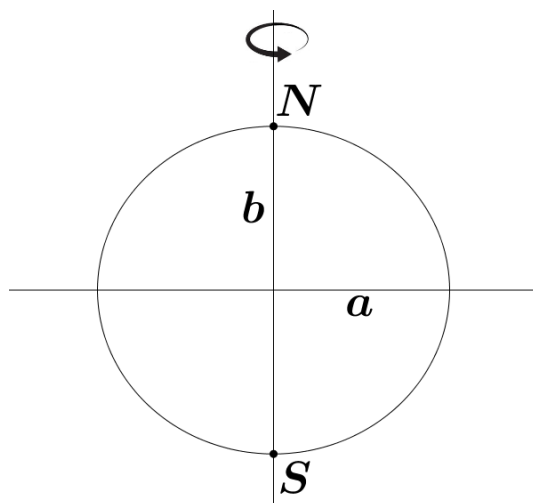


Figura 2.19: Secção da superfície da Terra por um plano α contendo os polos. Fonte: *Autor*

Temos, assim, que a forma da Terra que mais se aproxima da real é a de uma elipsóide de revolução gerado pela rotação da referida elipse em torno da reta que contém os Polos Norte e Sul. Daí, sabendo que a razão $\varepsilon = \frac{a-b}{b}$, onde a e b são, respectivamente, os raios equatorial e polar, indica o quanto este elipsóide se aproxima da forma esférica, vários pesquisadores buscaram determinar as medidas de a e b , obtendo diferentes resultados, conforme a tabela abaixo.

	a (metros)	b (metros)	ε
Bessel (1841)	6.377.397	6.356.078	0,0033541
Clarke (1880)	6.378.249	6.356.515	0,0034191
Helmert (1906)	6.378.200	6.356.940	0,0033443
Hayford (1924)	6.378.388	6.356.911	0,0033785
Krassovski (1940)	6.378.245	6.356.863	0,0033636

Figura 2.20: Tabela com valores para a , b e ε . Fonte: *Adaptada de [1]*

O valor pequeno de ε nos permite, por fins didáticos, desprezar este achatamento e considerar a esfera como modelo de representação para a superfície terrestre, ao qual chamamos de **globo terrestre**. Assim, os conceitos e resultados apresentados na seção 2.1 nos fornecerão aproximações razoavelmente satisfatórias quando buscarmos determinar medidas sobre a superfície da Terra. Desse modo,

o conceito de linhas imaginárias geográficas (paralelos e meridianos) encontra sua fundamentação matemática na definição 6 da seção anterior, e estas serão a base para nosso sistema de localização de pontos na superfície terrestre, onde o meridiano mais notável (de referência no sistema) é o de Greenwich, nome da região de Londres onde está situado o Observatório Real da Inglaterra. Já o paralelo, é o Equador.

2.3 Sistema de coordenadas geográficas

As coordenadas geográficas são dadas por um sistema de linhas imaginárias (paralelos e meridianos) traçadas sobre o globo terrestre a partir das quais a posição de um ponto qualquer sobre a superfície da Terra é determinada. Esse sistema começou a ser idealizado na Grécia Antiga, onde surgiram os primeiros conceitos de paralelos e meridianos incorporados a mapas, bem como a ideia de um sistema de coordenadas geográficas referido a essas linhas imaginárias: **Sistema Longitude-Latitude**.

Definição 14. *No sistema de coordenadas geográficas, todo ponto P da superfície do globo terrestre será localizado a partir do par ordenado (ϕ, θ) , onde:*

- **A coordenada ϕ do ponto P , chamada de *longitude de P* , é a medida do arco de paralelo compreendido entre o meridiano de Greenwich e o meridiano que passa por P . As medições vão de 0° a 180° para leste (E) e de 0° a 180° para oeste (W), tendo como referencial o meridiano de Greenwich.**
- **A coordenada θ do ponto P , dita *latitude de P* , é a medida do arco de meridiano compreendido entre o Equador e o paralelo que passa por P . As medições vão de 0° a 90° para Norte (N) e de 0° a 90° para Sul (S), tendo como referencial a linha do Equador.**

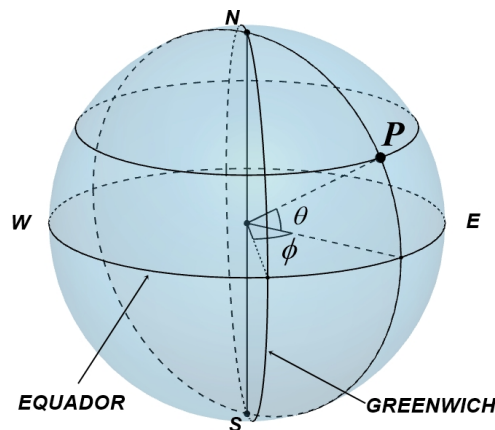


Figura 2.21: Longitude (ϕ) e latitude (θ) do ponto P . Fonte: *Autor*

A longitude e a latitude de um ponto na superfície terrestre são fornecidas por medidas angulares dadas em graus ($^\circ$), minutos ($'$) e segundos ($''$), sabendo que se tem $1^\circ = 60'$ e $1' = 60''$.

Vale acrescentar, ainda, que costuma-se representar a longitude geográfica como a diferença entre a hora do lugar e a hora de Greenwich. Assim, sabendo que o movimento de rotação da Terra tem um período aproximado de 24 horas, segundo o qual um ponto fixo da Terra perfaz um arco de 360° ,

temos que cada arco de paralelo de $15^\circ (= \frac{360^\circ}{24})$ corresponde à 1 hora. Neste contexto, teremos a longitude variando de 0 a 12 h para leste e para oeste, com horário de referência sendo o de Greenwich (0 h), onde pontos a leste desse meridiano têm horas adiantadas e os a oeste, horas atrasadas.

É interessante constatar que os paralelos (diferentes do equador) podem ser vistos como as interseções de cones com a superfície esférica terrestre, ao passo que os meridianos são as interseções desta com semiplanos com reta base no eixo que liga os polos. Desse modo, se tivermos um ponto P de coordenadas (ϕ, θ) , então o paralelo de θ é a interseção da superfície esférica terrestre com o cone cujo eixo de simetria coincide com eixo polar, o vértice com o centro da superfície esférica e a geratriz forma um ângulo θ com o plano do equador. Já o meridiano de ϕ é a interseção da superfície terrestre com o semiplano com reta base no eixo polar e que forma um ângulo ϕ com o semiplano do meridiano de Greenwich.

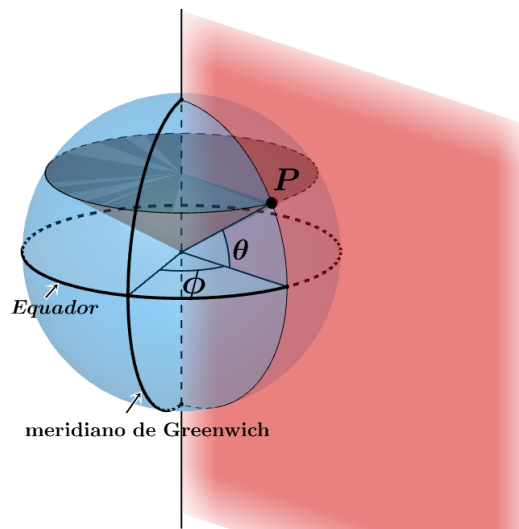


Figura 2.22: Longitude e Latitude por interseção de superfícies. Fonte: *Autor*

2.4 Aplicação de conceitos

Nesta seção serão apresentados vários problemas, extraídos de [6], envolvendo a utilização dos conceitos e resultados explicitados nas seções anteriores, com o intuito de elucidar como os mesmos são capazes de fornecer medidas sobre o globo terrestre.

(1): Como determinar o raio da Terra? Uma das maneiras é escalar o topo de uma montanha cuja altitude acima do mar seja conhecida e medir o ângulo entre a vertical e a linha do horizonte. Tomemos o monte Shasta (Califórnia), com 4,3 km de altura. Sabendo que, do seu topo, o horizonte sobre o Oceano Pacífico faz um ângulo de $87^\circ 53'$ com a vertical, obter uma estimativa para o raio da Terra. (Dado: $\text{sen}87^\circ 53' = 0,99932$)

Resolução: Constatamos, inicialmente, que a linha do horizonte, partindo do topo T do monte, é tangente ao globo terrestre num ponto P, sobre o Oceano Pacífico. Sejam Q a interseção da superfície terrestre, de centro O, com reta que liga o topo T a O e θ o ângulo formado pelas retas TO e TP; donde $\theta = 87^\circ 53'$. Daí, pelo fato da reta TP ser tangente ao globo terrestre em P, temos que o triângulo $\triangle OPT$ é retângulo em P, onde $\overline{OP} = \overline{OQ} = \text{raio } R \text{ da Terra}$ e $\overline{QT} = 4,3\text{km}$.

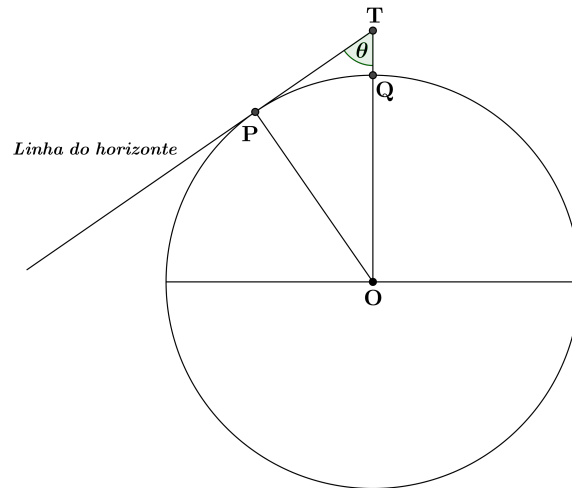


Figura 2.23: Representação do problema 1. Fonte: *Autor*

Logo, pelo triângulo retângulo $\triangle OPT$, obtemos:

$$\text{sen}\theta = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ} + \overline{QT}} \implies 0,99932 = \frac{R}{R + 4,3} \implies R = \frac{0,99932 \cdot 4,3}{1 - 0,99932} \longrightarrow R \approx 6319,23\text{km}.$$

(2): O cálculo da medida do raio mais celebre da antiguidade foi realizado por Erastósteles de Cirene (276 - 196 a.C). Consultando as observações astronômicas acumuladas durante séculos na biblioteca de Alexandria, Erastóstenes soube que na cidade de Siena, atual Assuã (Egito), o Sol se põe a pino no primeiro dia do verão (isto era confirmado pelos egípcios através do reflexo da luz na água de um poço profundo nos olhos de um observador inclinado sobre o poço). Ao mesmo tempo uma estaca vertical em Alexandria, a uma distância de 5000 estádios (medida de comprimento usada na Grécia Antiga, referida ao comprimento de uma pista de corrida grega e cujo valor variava de cidade para cidade), produzia uma sombra no solo. Tendo em vista tal fato, ao meio-dia, Erastóstenes, a partir da sombra produzida por uma estaca fixada verticalmente em Alexandria, mediu o ângulo que o raio do Sol fazia com a vertical de Alexandria, obtendo aproximadamente $7^\circ 12'$.

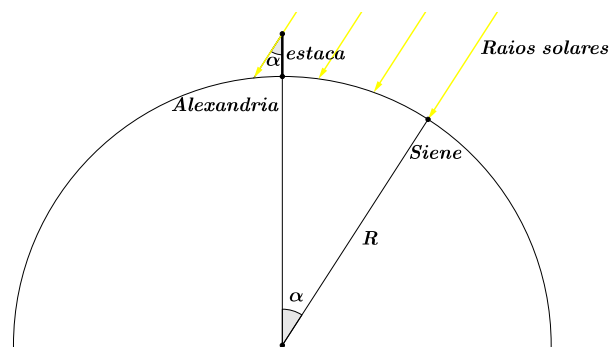


Figura 2.24: Esquema da ideia de Erastóstenes. Fonte: *Autor*

Assim, admitindo que os raios solares cheguem ao nosso planeta praticamente paralelos e sabendo que o estádio de Eratóstenes mede aproximadamente 157,5 metros, determine a aproximação para

a medida do raio da Terra obtida por Erastóstenes.

Resolução: Observando o esquema da figura 2.24 e pela hipótese de que os raios solares chegam à Terra praticamente paralelos, temos que o ângulo compreendido entre as retas que ligam o centro O da Terra à estaca (em Alexandria) e ao poço (em Siena) é igual ao ângulo formado pelos raios solares com a estaca (ângulos alternos internos), ambos sendo iguais a $7^{\circ}12'$. Desse modo, como o comprimento de um arco é proporcional ao ângulo central que o subtende, obtemos:

$$\frac{5000}{2\pi R} = \frac{7^{\circ}12'}{360^{\circ}} \implies R = \frac{360^{\circ}}{7^{\circ}12'} \cdot \frac{5000}{2\pi}.$$

Usando as aproximações $\frac{360^{\circ}}{7^{\circ}12'} \approx 50$, $2\pi \approx 6,283185$ e que cada estádio corresponde a 157,5 metros, teremos:

$$R \approx 50 \cdot \frac{5000 \cdot 157,5}{6,283185} \implies R \approx 6266,73km.$$

O fato mais surpreendente é que Erastóstenes não tinha dúvidas quanto a superfície esférica da Terra, tendo em vista, como mencionado antes, que ainda no século XVI navegantes tinham medo de cair da Terra ao chegar no horizonte. Além disso, o procedimento usado por Erastóstenes lhe forneceu a medida aproximada da circunferência da Terra de 250.000 estádios, ou seja, 39.251 quilômetros. Quanto comparamos este resultado com a medida encontrada no nosso século, constatamos que há apenas uma diferença de cerca de 320 quilômetros.

(3): Supondo que o raio da Terra meça 6400 km, qual o comprimento de um grau de longitude em uma latitude arbitrária θ ? Em particular, qual o comprimento numa latitude de 20° Sul (aproximadamente a latitude de Belo Horizonte)?

Resolução: Pelos dados do problema teremos a representação ilustrada pela figura a seguir, onde devemos determinar, no paralelo de latitude θ , a medida do arco menor \widehat{MN} .

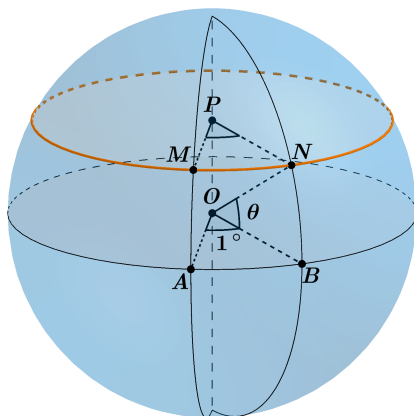


Figura 2.25: Representação do problema 3. Fonte: *Autor*

Pelas notações indicadas na gravura, é imediato constatar que a medida do ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$ é igual a do ângulo $\widehat{M\hat{P}N}$, uma vez que as retas que contém os lados desses ângulos são perpendiculares

à reta de interseção dos semiplanos que determinam os meridianos destacados e, desse modo, tais ângulos mantêm a medida do ângulo esférico (de 1°) compreendido entre os semiplanos. Por outro lado, observamos que o triângulo $\triangle OPN$ é retângulo em P, a partir do qual, obtemos:

$$\text{sen} \widehat{NOP} = \frac{\overline{PN}}{\overline{ON}} \implies \text{sen}(90^\circ - \theta) = \frac{\overline{PN}}{6400} \implies \overline{PN} = 6400 \cos \theta.$$

Assim, ainda pelo fato do comprimento do arco menor \widehat{MN} ser proporcional ao ângulo central que o subentende (1°) e denotando tal comprimento por $m(\widehat{MN})$, teremos:

$$\frac{m(\widehat{MN})}{2\pi \cdot \overline{PN}} = \frac{1^\circ}{360^\circ} \implies m(\widehat{MN}) = \frac{6400\pi \cos \theta}{180} \implies m(\widehat{MN}) = 111,7 \cos \theta.$$

Logo, o comprimento de 1° de longitude numa latitude θ é igual a $111,7 \cos \theta$ km. Em particular, na latitude de 20° temos um comprimento de $111,7 \cos 20^\circ \approx 104,96$ km.

(4): Um astronauta encontra-se numa nave espacial que gira numa órbita em torno da Terra. No momento em que a nave está 160 km acima da superfície da Terra, que fração desta superfície é visível para o astronauta? (Dado: raio da Terra medindo 6400 km)

Resolução: Sejam P o ponto de observação do astronauta, R o raio da Terra, h a distância da nave à superfície da Terra e d a altura da calota esférica (que corresponde a porção da Terra avistada pelo astronauta). Partindo de tais informações, teremos a representação ilustrada a seguir.

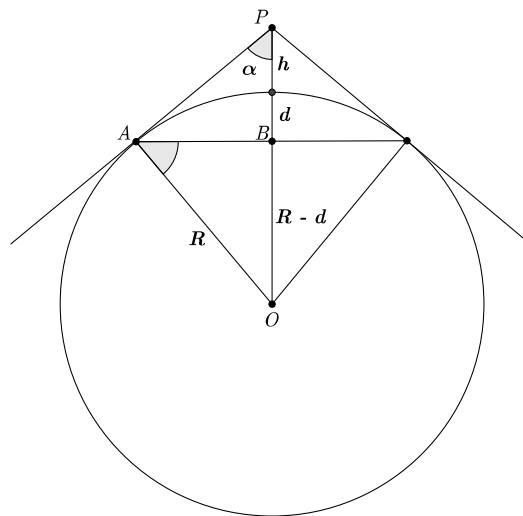


Figura 2.26: Representação do problema 4. Fonte: Autor

Observamos, inicialmente, que os triângulos $\triangle PAO$ e $\triangle ABO$ são retângulos. Além disso, pelo fato do ângulo \widehat{AOB} ser comum a esses triângulos, teremos $\widehat{OPA} = \widehat{OAB} = \alpha$. Desse modo, segue dos triângulos $\triangle PAO$ e $\triangle ABO$, respectivamente:

$$\text{sen} \alpha = \frac{R}{R + h} \quad (1)$$

e

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{R-d}{R} \implies R = \frac{d}{1-\operatorname{sen}\alpha}. \quad (2)$$

Pelas proposições 4 e 5 da seção 2.1, tem-se que as áreas da superfície esférica (Terra) e da calota avistada são, respectivamente, iguais $4\pi R^2$ e $2\pi R d$, onde R é o raio da superfície esférica e d é a altura da calota. Daí, a fração f da superfície da Terra avistada pelo astronauta é dada por:

$$f = \frac{2\pi R d}{4\pi R^2} \implies f = \frac{d}{2R}.$$

Substituindo (2) na expressão de f acima, tem-se:

$$f = \frac{d}{2\left(\frac{d}{1-\operatorname{sen}\alpha}\right)} \implies f = \frac{1-\operatorname{sen}\alpha}{2}. \quad (3)$$

Por fim, realizando a substituição de (1) em (3), obtemos:

$$f = \frac{1 - \left(\frac{R}{R+h}\right)}{2} \implies f = \frac{h}{2(R+h)}.$$

Portando, sendo $h = 160$ km e $R = 6400$ km, concluímos que $f = \frac{160}{2(6400+160)} \approx 0,0122$, ou seja, a porção da superfície da Terra avistada pelo astronauta em sua nave, situada à 160 km dessa superfície, é de 1,22%.

(5): Qual a altura mínima para que um satélite consiga fotografar o Brasil inteiro? Admita que Oiapoque (6° N) e Chuí (34° S) estejam sobre o mesmo meridiano, mas em paralelos diferentes (figura 2.27), e que o raio da Terra meça 6400 km.

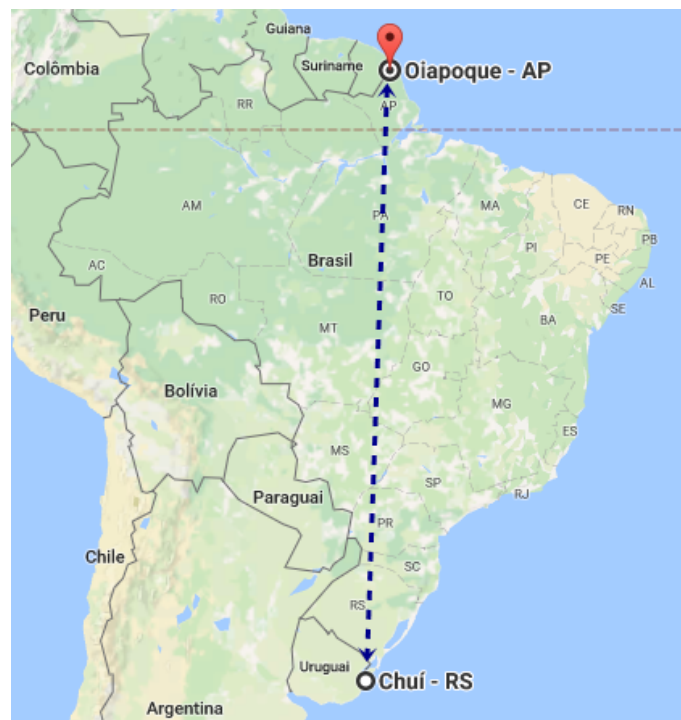


Figura 2.27: Oiapoque (AP) e Chuí (RS). Fonte: *Google Maps*

Resolução: Pelos dados do problema, temos a representação ilustrada na figura 2.28, na qual estamos considerando Oiapoque e Chuí sobre o mesmo meridiano.

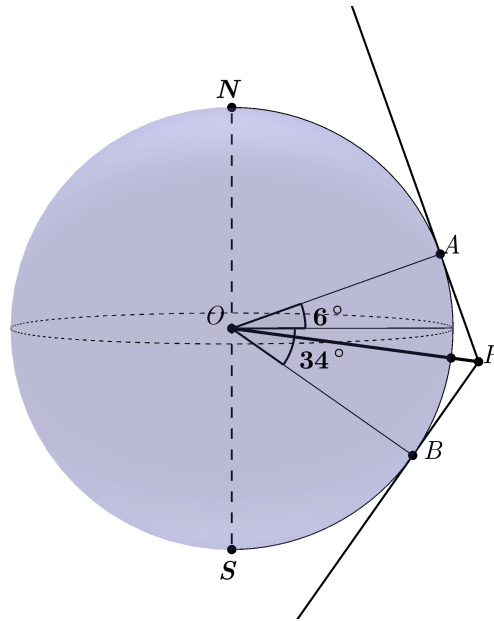


Figura 2.28: Linhas do horizonte sobre Oiapoque (A) e sobre Chuí (B). Fonte: *Autor*

Como foi visto no problema anterior, a fração da superfície da Terra, com raio R , avistada por um observador a uma distância h dessa superfície, é dada por $f = \frac{h}{2(R+h)}$. Desse modo, como está sendo solicitada a menor altura h tal que seja possível fotografar todo o Brasil, teremos, de $f = \frac{1}{2(\frac{R}{h}+1)}$, que esta altura torna mínima a fração avistada (contendo o Brasil) e vice-versa. Ora, a menor calota esférica contendo o Brasil é aquela tal que Oiapoque (A) e Chuí (B) compõem um diâmetro do círculo de sua base (interseção do plano que determina a calota com a superfície esférica).

Assim sendo, tomando as retas tangentes ao meridiano que passa por A e B, nestes pontos, constatamos que estas se intersectam num ponto P (já que temos Oiapoque e Chuí sobre o mesmo meridiano) e que a altura h desejada é a distância de P à superfície da Terra (figura 2.28).

Da congruência dos triângulos retângulos $\triangle PAO$ e $\triangle PBO$, pelo caso especial cateto-hipotenusa de congruência de triângulos, segue que $\widehat{POA} = \widehat{POB} = 20^\circ$. Daí, pelo triângulo $\triangle PAO$, obtemos:

$$\cos \widehat{POA} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} \implies \cos 20^\circ = \frac{R}{R+h} \implies h = \frac{6400(1 - \cos 20^\circ)}{\cos 20^\circ} \implies h \approx 410,74 \text{ km}.$$

Portanto, para que um satélite consiga fotografar todo o Brasil é necessário que este esteja situado a pelo menos 410,74 km da superfície da Terra (no ponto P).

Capítulo 3

Triângulos Esféricos

Neste capítulo faremos um breve estudo dos conceitos e resultados elementares acerca de triângulos esféricos, conhecimentos estes essenciais à Astronomia, Agrimensura e Navegação. Aqui evidenciamos algumas diferenças e similaridades entre tais triângulos e os triângulos planos da Geometria Euclidiana. Observaremos uma diferença particularmente interessante entre triângulos esféricos e triângulos planos, que é a soma de seus ângulos internos (esta inclusive caracteriza a geometria na qual estão inseridos): enquanto que nos últimos a soma de seus ângulos internos é sempre igual a 180° , no caso dos esféricos veremos que tal soma está compreendida entre 180° e 540° . Além disso, partindo das relações entre as medidas dos lados de triângulos esféricos, mostraremos, de modo intuitivo, que a distância entre dois pontos quaisquer sobre uma superfície esférica é dada pelo menor arco de círculo máximo que liga estes pontos e, mediante o uso da fórmula fundamental da trigonometria esférica, calcularemos a distância entre pontos sobre o globo terrestre a partir de suas coordenadas geográficas.

3.1 Definições e propriedades

Definição 15. *O triângulo esférico é uma porção da superfície esférica, contida em algum hemisfério, limitada por três arcos de circunferências máximas com medidas inferiores a 180° e cujos extremos coincidam dois a dois. Os arcos são os **lados**, as interseções destes arcos são os **vértices** e os ângulos esféricos formados por tais arcos, com vértices nestas interseções, são os **ângulos internos** do triângulo esférico.*

Na figura 3.1 temos um triângulo esférico no qual são designados, de modo usual, os vértices por A, B e C e os lados opostos correspondentes por a, b e c, respectivamente.

É importante observar que, pela definição acima, triângulos esféricos não são quaisquer figuras de três vértices sobre uma superfície esférica; para ser considerada um triângulo esférico a figura deve ter lados que são arcos de circunferências máximas. Na figura 3.2 temos uma região da superfície esférica que não constitui um triângulo esférico, já que \widehat{AB} não é um arco de círculo máximo.

Vale acrescentar também que, nos triângulos esféricos, tantos os seus lados quanto seus ângulos internos são medidos em unidades angulares (grau ou radiano). Assim, sabendo que o lado de um triângulo esférico é um arco de círculo máximo, então a razão entre seu comprimento e o raio da superfície esférica nos fornece o ângulo que subentende tal arco neste círculo. Ao passo que o ângulo interno em cada vértice deste triângulo fornece a medida do ângulo entres os planos contendo os

lados que se interceptam no vértice.

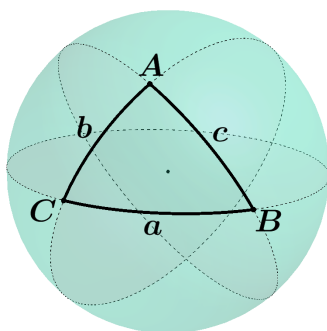


Figura 3.1: Triângulo esférico ABC . Fonte: *Autor*

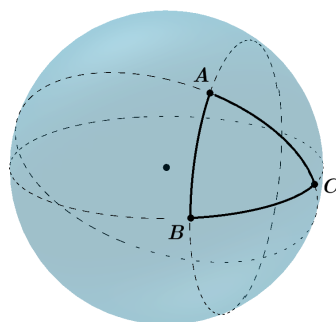


Figura 3.2: Porção da superfície esférica que não constitui um triângulo esférico. Fonte: *Autor*

Tomando semirretas partindo do centro O da esfera a cada vértice do triângulo esférico ABC , obtemos o triedro $OABC$, onde cada ângulo interno do triângulo é medido pelos ângulos diedrais do triedro. Por exemplo, na figura 3.3, o ângulo interno \hat{A} do triângulo ABC é medido pelo ângulo diedral compreendido entre os planos AOB e AOC .

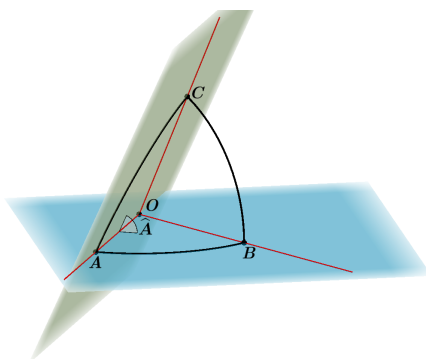


Figura 3.3: Triângulo esférico ABC e triedro $OABC$. Fonte: *Autor*

Proposição 6. *Em um triângulo esférico qualquer, cada lado é menor do que a soma dos outros dois lados.*

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos o triângulo esférico ABC, a partir do qual, tomando semirretas com origem no centro O da superfície esférica e que passam por cada um de seus vértices, obtemos o triedro OABC. Se tivermos a igualdade entre os ângulos das faces do triedro, isto é, $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = \widehat{BOC}$, então a proposição vale imediatamente. Podemos supor, sem perda de generalidade, que \widehat{AOB} seja maior do que os outros dois (\widehat{AOC} e \widehat{BOC}).

Sobre a semirreta OA tomemos um ponto X, sobre a semirreta OB consideremos o ponto Y e sobre o segmento XY, o ponto Z tal que $\widehat{XOZ} = \widehat{XOC}$. Além disso, sobre a semirreta OC consideremos W, de modo que $\overline{OZ} = \overline{OW}$ (veja a figura 3.4).

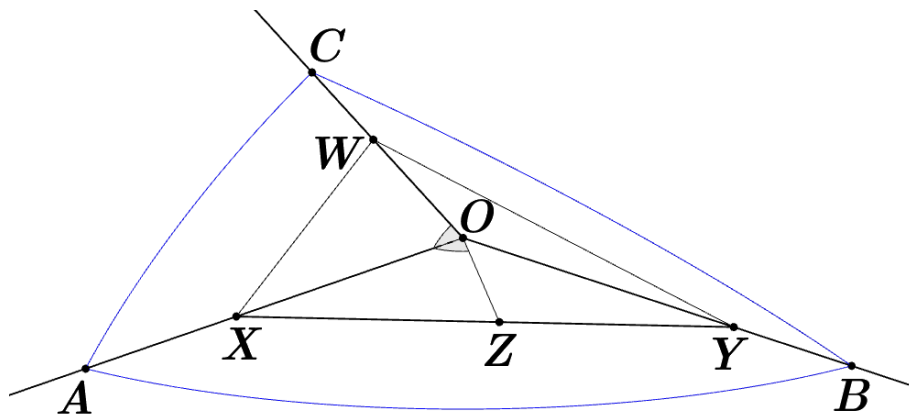


Figura 3.4: Proposição 6. Fonte: Autor

Pela congruência de $\triangle XOZ$ e $\triangle XOW$ (pelo caso lado-ângulo-lado), teremos $\overline{XZ} = \overline{XW}$ (1). Por outro lado, a desigualdade triangular aplicada em $\triangle XYW$ nos dá $\overline{XY} < \overline{XW} + \overline{YW}$ (2). Partindo dos resultados expressos em (1) e (2), temos:

$$\overline{XY} < \overline{XW} + \overline{YW} \implies \overline{XZ} + \overline{ZY} < \overline{XW} + \overline{YW} \implies \overline{ZY} < \overline{YW}$$

Consideremos, agora, os triângulos $\triangle YOZ$ e $\triangle YOW$. Pelo fato de termos $\overline{OZ} = \overline{OW}$ e $\overline{ZY} < \overline{YW}$, a lei dos cossenos nos garante que:

$$\cos Y\widehat{OZ} = \frac{\overline{OY}^2 + \overline{OZ}^2 - \overline{YZ}^2}{2\overline{OY} \cdot \overline{OZ}} > \frac{\overline{OY}^2 + \overline{OW}^2 - \overline{YW}^2}{2\overline{OY} \cdot \overline{OW}} = \cos Y\widehat{OW}.$$

Como os ângulos $Y\widehat{OW}$ e $Y\widehat{OZ}$ estão compreendidos entre 0° e 180° , teremos $Y\widehat{OZ} < Y\widehat{OW}$. Daí, concluímos que se tem:

$$X\widehat{OY} = X\widehat{OZ} + Y\widehat{OZ} < X\widehat{OW} + Y\widehat{OW}.$$

Portando, de $X\widehat{OY} = \widehat{AOB}$, $X\widehat{OW} = \widehat{AOC}$ e $Y\widehat{OW} = \widehat{BOC}$, obtemos $\widehat{AOB} < \widehat{AOC} + \widehat{BOC}$, ou seja, que um lado sempre será menor do que a soma dos outros dois lados nos triângulos esféricos.

Proposição 7. *A distância entre dois pontos sobre a superfície esférica é dada pelo comprimento do arco menor de circunferência máxima que passa por estes pontos.*

DEMONSTRAÇÃO: Dados os pontos A e B sobre a superfície esférica Σ , \widehat{AB} arco menor de circunferência máxima e $C(A,B)$ uma curva qualquer sobre Σ , ligando tais pontos.

Primeiramente, observamos que para dois pontos M e N não antípodas sobre a superfície esférica Σ , de centro O, existe exatamente uma circunferência máxima que passa por M e N. De fato, sendo α um plano que passa pelos pontos M, N e O, temos que α intersecta Σ por uma circunferência máxima, já que este contém o centro O de Σ . Ora, como os pontos M e N não são antípodas, temos que M, N e O não são colineares. Portanto, o plano α é único e, desse modo, sua interseção com Σ (circunferência máxima) contendo M e N também será única.

Sobre a curva $C(A,B)$ marquemos os pontos $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$. Como cada um desses pontos não são antípodas entre eles ou com os pontos A e B, então, conforme visto no parágrafo anterior, podemos ligá-los entre si e com A e B por meio de arcos de círculos máximos (que são únicos), formando, com isso, os triângulos esféricos (ou arcos menores de círculos máximos, caso $P_1 \in \widehat{AB}$ ou $P_{i+1} \in \widehat{P_i B}$) $AP_1B, P_1P_2B, P_2P_3B, P_3P_4B, \dots, P_{n-1}P_nB$, conforme a ilustração abaixo.

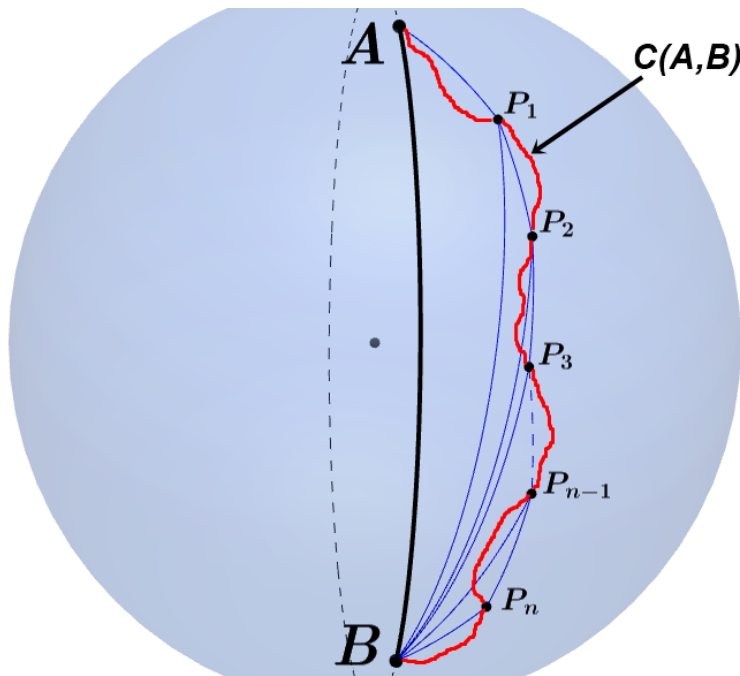


Figura 3.5: Proposição 7. Fonte: *Autor*

Pelo resultado apresentado na proposição 6, aplicado nos triângulos esféricos assim obtidos e designando o comprimento de cada arco \widehat{MN} por $m(\widehat{MN})$, teremos as desigualdades:

$$\begin{aligned}
 m(\widehat{AB}) &< m(\widehat{AP_1}) + m(\widehat{P_1B}) \\
 m(\widehat{P_1B}) &< m(\widehat{P_1P_2}) + m(\widehat{P_2B}) \\
 m(\widehat{P_2B}) &< m(\widehat{P_2P_3}) + m(\widehat{P_3B}) \\
 &\dots \\
 m(\widehat{P_{n-2}B}) &< m(\widehat{P_{n-2}P_{n-1}}) + m(\widehat{P_{n-1}B})
 \end{aligned}$$

$$m(\widehat{P_{n-1}B}) < m(\widehat{P_{n-1}P_n}) + m(\widehat{P_nB}).$$

Efetuando a soma, membro a membro, das desigualdades acima, obtemos:

$$m(\widehat{AB}) < m(\widehat{AP_1}) + m(\widehat{P_1P_2}) + m(\widehat{P_2P_3}) + m(\widehat{P_3P_4}) + \cdots + m(\widehat{P_{n-2}P_{n-1}}) + m(\widehat{P_{n-1}P_n}) + m(\widehat{P_nB}).$$

Note que, pelo procedimento descrito anteriormente, poderíamos ter $P_{i+1} \in \widehat{P_iB}$, para algum $i = 1, 2, \dots, n-1$, e desse modo teríamos $m(\widehat{P_iB}) = m(\widehat{P_iP_{i+1}}) + m(\widehat{P_{i+1}B})$. Daí, partindo de tal fato e raciocinando de modo análogo à situação acima, teremos a desigualdade:

$$m(\widehat{AB}) \leq m(\widehat{AP_1}) + m(\widehat{P_1P_2}) + m(\widehat{P_2P_3}) + m(\widehat{P_3P_4}) + \cdots + m(\widehat{P_{n-2}P_{n-1}}) + m(\widehat{P_{n-1}P_n}) + m(\widehat{P_nB}).$$

Como as últimas desigualdades foram obtidas a partir de um número arbitrário de pontos sobre a curva $C(A,B)$, concluímos que as mesmas se mantêm para qualquer que seja a quantidade de pontos tomados em $C(A,B)$. Por outro lado, como a soma dos comprimentos dos arcos $\widehat{AP_1}$, $\widehat{P_1P_2}$, $\widehat{P_2P_3}$, \dots , $\widehat{P_{n-1}P_n}$ e $\widehat{P_nB}$ tende ao comprimento de $C(A,B)$, quando n é suficientemente grande e $\Delta = \max\{m(\widehat{P_iP_{i+1}}) \mid P_0 = A, P_{n+1} = B \text{ e } i = 0, 1, 2, \dots, n\}$ tende a zero, então concluímos, para ambas as desigualdades acima, que se tem:

$$\text{comprimento de } \widehat{AB} \leq \text{comprimento de } C(A, B).$$

Portanto, tomando dois pontos quaisquer sobre uma superfície esférica, a distância entre eles é dada pelo comprimento do arco menor de circunferência máxima (que é única) que os liga.

Proposição 8. *Pontos situados sobre um mesmo paralelo de uma superfície esférica equidistam de seus polos.*

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos a superfície esférica Σ , de centro O e raio R , e o paralelo Γ desta superfície. Se P_1 e P_2 são os polos de Σ , então a reta que passa por estes pontos intersecta o plano que contém Γ no ponto O' , conforme a figura abaixo.

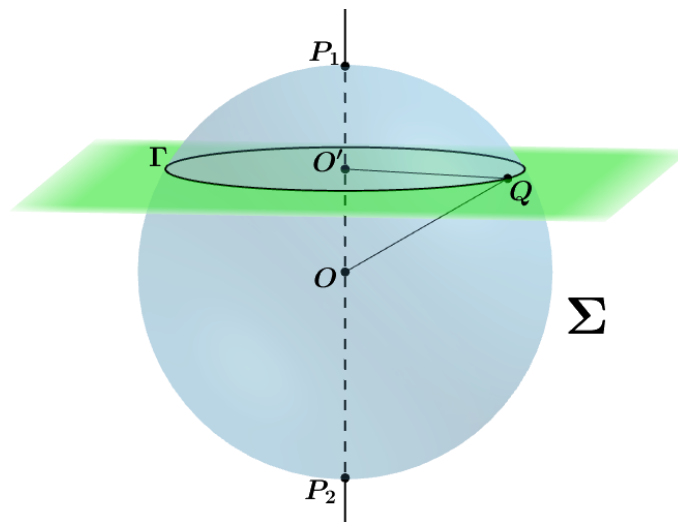


Figura 3.6: Pontos de um paralelo equidistam dos polos. Fonte: *Autor*

Para verificarmos a validade desta proposição, basta mostrar que os pontos de Γ equidistam de um dos polos, digamos P_1 , uma vez que a distância dos mesmos ao polo P_2 é dada pela diferença

entre πR e a distância ao polo P_1 .

Seja Q um ponto qualquer de Γ . Pela proposição 1 da seção 2.1, temos que $\overline{O'Q} = \sqrt{R^2 - \overline{OO'}^2}$. Desse modo, pelo triângulo retângulo $\triangle OO'Q$, teremos $\text{sen}Q\widehat{OO'} = \frac{\sqrt{R^2 - \overline{OO'}^2}}{R}$, ou seja, $Q\widehat{OO'} = \text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{R^2 - \overline{OO'}^2}}{R}\right)$. Assim, pela proposição anterior, constatamos que a distância entre o polo P_1 e o ponto Q será igual a $R \cdot \text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{R^2 - \overline{OO'}^2}}{R}\right)$. Portanto, dado um ponto arbitrário em Γ , temos que a medida do arco menor de circunferência máxima ligando este ponto ao polo P_1 é sempre a mesma, isto é, os pontos de Γ equidistam de P_1 .

A seguir demonstraremos o famoso teorema de Girard sobre a área de triângulos esféricos, a partir do qual concluiremos que a soma dos ângulos internos de tais triângulos pertence ao intervalo $(\pi, 3\pi)$. Antes disso, devemos acrescentar que nos triângulos esféricos as denominações *isósceles* ou *equilátero* se dão no mesmo sentido dos triângulos planos da Geometria Euclidiana. Dito isto, devemos inicialmente mostrar que as áreas de triângulos antípodas são iguais, conteúdo da próxima proposição.

Proposição 9. *As áreas de triângulos esféricos antípodas são iguais.*

DEMONSTRAÇÃO: Observamos, inicialmente, que dado um triângulo esférico isósceles MNR , com $m(\widehat{RM}) = m(\widehat{RN})$, é possível, por movimentos rígidos, mover seu antípoda $M'N'R'$ no espaço até este sobrepor-se à MNR : basta posicionar $M'N'R'$ sobre MNR tal que os pontos R' , M' e N' fiquem, respectivamente, sobre R , N e M . Tal sobreposição sempre ocorrerá, uma vez que $m(\widehat{RM}) = m(\widehat{R'N'})$ e $m(\widehat{RN}) = m(\widehat{R'M'})$. Logo, estes triângulos possuem mesma área.

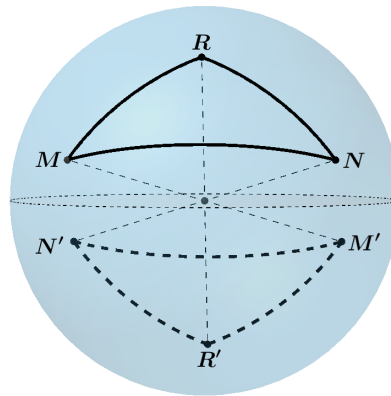


Figura 3.7: Triângulo esférico isósceles MNR e seu antípoda $M'N'R'$. Fonte: *Autor*

Para o caso geral, tomemos um triângulo esférico qualquer ABC e seja $A'B'C'$ seu antípoda. Consideremos, ainda, o círculo Γ , interseção do plano π determinado pelos vértices do triângulo ABC com a superfície esférica Σ , de centro O , e os pontos antípodas P_1 e P_2 em Σ , interseção da reta perpendicular a π , passando por O , com Σ . Os pontos antípodas P_1 e P_2 podem ser vistos como polos de Σ relativos ao paralelo Γ .

Sejam P_1 o polo contido na menor das calotas esféricas determinadas por π , a qual contém o triângulo esférico ABC . Pela proposição 8, temos que os arcos de círculos máximos $\widehat{P_1A}$, $\widehat{P_1B}$ e $\widehat{P_1C}$ têm a mesma medida, e dessa forma os triângulos esféricos P_1AB , P_1BC e P_1AC (que decompõem de forma justaposta ABC) são isósceles. Com isso, resta analisar duas situações possíveis a respeito da posição de P_1 em relação a ABC : $P_1 \in ABC$ ou $P_1 \notin ABC$.

CASO 1: Se $P_1 \in ABC$, conforme ilustrado na figura (a) abaixo, então teremos:

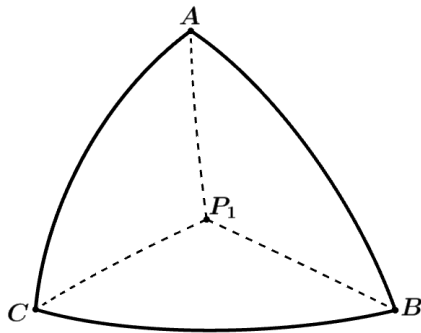
$$\text{Área}(ABC) = \text{Área}(P_1AB) + \text{Área}(P_1BC) + \text{Área}(P_1AC).$$

Mas, como foi visto inicialmente, as áreas dos triângulos P_1AB , P_1BC e P_1AC são, respectivamente, iguais às áreas dos antípodos $P_2A'B'$, $P_2B'C'$ e $P_2A'C'$. Como $A'B'C'$ é decomposto como a reunião justaposta destes últimos triângulos, então concluímos que sua área é igual a de ABC .

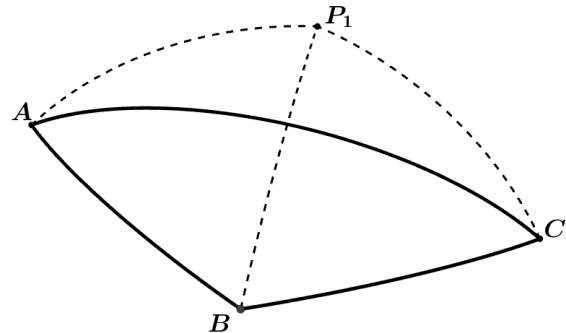
CASO 2: Se tivermos $P_1 \notin ABC$, onde podemos supor, sem perda de generalidade, B e P_1 situados em subespaços opostos dentre os determinados pelo plano AOC , conforme figura (b) a seguir, então teremos:

$$\text{Área}(ABC) = \text{Área}(P_1AB) + \text{Área}(P_1BC) - \text{Área}(P_1AC).$$

Novamente invocando a igualdade entre as áreas de um triângulo esférico isósceles e de seu antípoda, tendo em vista os triângulos esféricos $P_2A'B'$, $P_2B'C'$ e $P_2A'C'$ e seus antípodas correspondentes, concluímos que as áreas dos triângulos ABC e $A'B'C'$ são iguais.



(a) Representação do caso 1. Fonte: Autor



(b) Representação do caso 2. Fonte: Autor

Proposição 10. (Teorema de Girard) Dada uma superfície esférica Σ de raio R . Se α , β e γ são os ângulos internos do triângulo esférico ABC , em radianos, então a área de ABC , denotada por A_{ABC} , é dada por

$$A_{ABC} = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2.$$

DEMONSTRAÇÃO: Sejam A' , B' e C' os antípodas dos pontos A , B e C , respectivamente, e O o centro da superfície esférica Σ , conforme figura 3.8 a seguir.

Consideremos o fuso esférico F_A que contém o triângulo esférico ABC e é determinado pelos planos ABA' e ACA' , e seja $F_{A'}$ o fuso esférico simétrico de F_A com relação à reta AA' , contendo o triângulo $A'B'C'$. De maneira completamente análoga, definimos os fusos F_B , $F_{B'}$, F_C e $F_{C'}$.

Sabendo que α , β e γ são, respectivamente, as aberturas dos fusos F_A , F_B e F_C (ou de $F_{A'}$, $F_{B'}$ e $F_{C'}$, nesta ordem), então, pelo corolário da proposição 4, teremos:

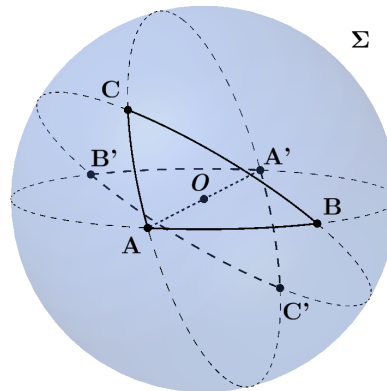


Figura 3.8: Teorema de Girard. Fonte: *Autor*

$$A_{F_A} = A_{F_{A'}} = 2\alpha R^2,$$

$$A_{F_B} = A_{F_{B'}} = 2\beta R^2$$

e

$$A_{F_C} = A_{F_{C'}} = 2\gamma R^2.$$

Utilizando a notação $F_X - ABC$ para indicar a porção do fuso esférico F_X na qual foi removido o triângulo esférico ABC , obtemos a igualdade:

$$\begin{aligned} \Sigma = (F_A - ABC) \cup (F_B - ABC) \cup (F_C - ABC) \cup (F_{A'} - A'B'C') \cup (F_{B'} - A'B'C') \cup (F_{C'} - A'B'C') \\ \cup (ABC) \cup (A'B'C'). \end{aligned}$$

Como todos os conjuntos do segundo membro da igualdade acima são disjuntos e pela igualdade das áreas de triângulos antípodas (conforme a proposição 9), então obtemos:

$$\begin{aligned} A_\Sigma &= A_{F_A} + A_{F_B} + A_{F_C} + A_{F_{A'}} + A_{F_{B'}} + A_{F_{C'}} - 6A_{ABC} + 2A_{ABC} \\ &= 4\alpha R^2 + 4\beta R^2 + 4\gamma R^2 - 4A_{ABC}. \end{aligned}$$

Daí, sabendo que $A_\Sigma = 4\pi R^2$ (pela proposição 4), concluímos

$$4\pi R^2 = 4\alpha R^2 + 4\beta R^2 + 4\gamma R^2 - 4A_{ABC},$$

ou seja,

$$A_{ABC} = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) R^2.$$

Corolário. Se α , β e γ são os ângulos internos de um triângulo esférico ABC , em radianos, então $\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$.

De fato, o teorema de Girard nos diz que se tem $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A_{ABC}}{R^2}$, onde A_{ABC} é a área do triângulo esférico ABC e R é o raio da superfície esférica Σ , que contém este triângulo. Mas como temos $\frac{A_{ABC}}{R^2} > 0$, então $\alpha + \beta + \gamma > \pi$. Por outro lado, como a área de um hemisfério de Σ é igual a

$2\pi R^2$ e, por definição de triângulos esféricos, o triângulo ABC está contido propriamente em algum hemisfério de Σ , logo obtemos

$$\frac{A_{ABC}}{R^2} < \frac{2\pi R^2}{R^2} = 2\pi.$$

Desse modo, teremos

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A_{ABC}}{R^2} < \pi + 2\pi = 3\pi.$$

Portanto, concluímos que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico assume valores entre 180° e 540° , porém não sendo igual a qualquer desses extremos.

O valor $E = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ costuma ser denominado por *excesso do triângulo esférico* com ângulos internos α , β e γ . Desse modo, ainda pelo teorema de Girard, observamos que a área de triângulos esféricos é diretamente proporcional ao excesso E . Assim, se tomarmos, sobre o globo terrestre, um triângulo esférico com um de seus vértices sobre o polo Norte e os outros dois sobre a linha do equador, tais que a diferença de longitude entre eles seja igual a $0,4^\circ$, então teremos o excesso $E = (90^\circ + 90^\circ + 0,5^\circ - 180^\circ) = 0,4^\circ$, ou seja, $E = \frac{\pi}{450}$ radianos. Logo, admitindo que o raio do globo terrestre seja $R = 6371 \text{ km}$, a área do referido triângulo será igual a $(\frac{\pi}{450}) \cdot 6371^2 \approx 283.369,2 \text{ km}^2$, uma área maior do que a do estado do Piauí (Brasil), com cerca de 251.529 km^2 .

3.2 Trigonometria Esférica

Nesta seção apresentaremos a fórmula fundamental da trigonometria esférica, também conhecida como a fórmula dos quatro elementos, uma vez que por meio da qual podemos determinar os seis elementos de um triângulo esférico (três lados e três ângulos internos) conhecendo as medidas de dois lados e o ângulo compreendido entre eles. Existem várias relações na trigonometria dos triângulos esféricos, porém daremos ênfase àquelas que nos auxiliarão na demonstração da fórmula fundamental, tendo em vista sua aplicação na determinação da distância entre pontos sobre o globo terrestre.

Definição 16. *Os triângulos esféricos são classificados da seguinte forma:*

1. Quanto aos **lados**:

Retilátero: quando um de seus lados mede 90° .

Birretilátero: quando dois de seus lados medem 90° .

Trirretilátero: quando os seus três lados medem 90° .

2. Quanto aos **ângulos internos**:

Obliquângulo: quando não possui ângulos retos.

Retângulo: quando possui um ângulo reto.

Birretângulo: quando possui dois ângulos retos.

Trirretângulo: quando todos os seus ângulos são retos.

Proposição 11. *Dado um triângulo esférico retângulo ABC , com ângulo reto em A , tal que os lados a , b e c são opostos aos ângulos internos \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} . Valem as seguintes igualdades:*

$$\text{sen } b = \text{sen } \widehat{B} \cdot \text{sen } a \quad (3.1)$$

$$\text{sen } c = \text{sen } \widehat{C} \cdot \text{sen } a \quad (3.2)$$

$$\text{sen } c = \text{tg } b \cdot \text{cotg } \widehat{B} \quad (3.3)$$

$$\text{sen } b = \text{tg } c \cdot \text{cotg } \widehat{C} \quad (3.4)$$

$$\text{cos } a = \text{cos } b \cdot \text{cos } c \quad (3.5)$$

DEMONSTRAÇÃO: Tomemos, inicialmente, o triângulo esférico ABC, reto em A, com lados b e c com medidas inferiores a 90° , conforme ilustração a seguir.

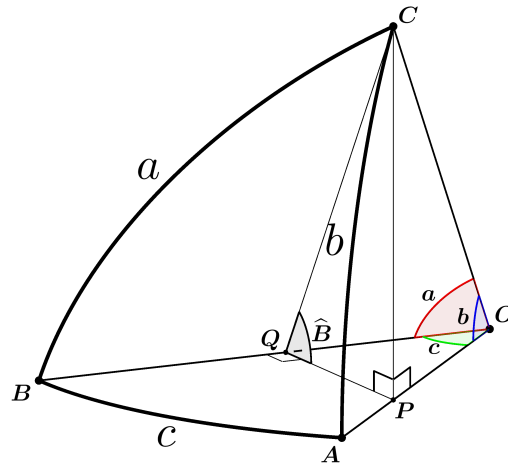


Figura 3.9: Triângulo esférico retângulo em A, cujos lados b e c têm medidas inferiores a 90° . Fonte: Autor

Consideremos as semirretas com origem no centro O da superfície esférica que contém o triângulo ABC e que passam pelos vértices do mesmo. Feito isto, obtemos o triedro OABC, no qual os ângulos das fases BOC, AOC e AOB são, respectivamente, iguais a a , b e c . Seja P a projeção ortogonal do ponto C relativa ao plano AOB e Q a interseção da perpendicular à reta BO passando por P . Afirmamos que P pertence a AO . De fato, se tivéssemos $P \notin AO$, então poderíamos obter o ponto $P' \in AO$ tal que $CP' \perp AO$ e, portanto, a reta AO seria ortogonal às retas CP e CP' . Desse modo, AO seria perpendicular ao plano determinado pelos pontos C , P' e P , e, em particular, à reta PP' . Assim, pela perpendicularidade dos planos AOB e AOC, teríamos $\widehat{CP'P} = 90^\circ$ e, por conseguinte, o plano $CP'P$ conteria um triângulo com dois ângulos internos retos, um absurdo. Além disso, pela perpendicularidade da reta CP ao plano AOB, temos $CP \perp PQ$.

Do teorema das três perpendiculares da Geometria Euclidiana (disponível em [13], p.305), temos, ainda, que $CQ \perp BO$. Daí, pelos triângulos retângulos $\triangle OPC$, $\triangle OQC$ e $\triangle QPC$, obtemos:

$$\operatorname{sen} b = \frac{\overline{CP}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{OC}} = \operatorname{sen} \widehat{B} \cdot \operatorname{sen} a.$$

Dos triângulos retângulos $\triangle OQP$, $\triangle OPC$ e $\triangle QPC$, teremos:

$$\operatorname{sen} c = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{OP}} \cdot \frac{\overline{PQ}}{\overline{CP}} = \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{cotg} \widehat{B}.$$

Resulta dos triângulos retângulos $\triangle OQC$, $\triangle OPC$ e $\triangle OQP$ a igualdade:

$$\operatorname{cos} a = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OC}} \cdot \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \operatorname{cos} b \cdot \operatorname{cos} c.$$

Por outro lado, considerando o triângulo esférico ABC, retângulo em A e com lado b possuindo medida superior a 90° (figura 3.10), teremos, mediante uma análise análoga à empreendida no caso

anterior, que a projeção P do vértice C sobre o plano AOB pertence a reta AO, $CQ \perp BO$ (novamente pelo teorema das três perpendiculares), onde Q é a interseção da perpendicular à reta BO passando por P, e $P\hat{Q}C = 180^\circ - \hat{B}$.

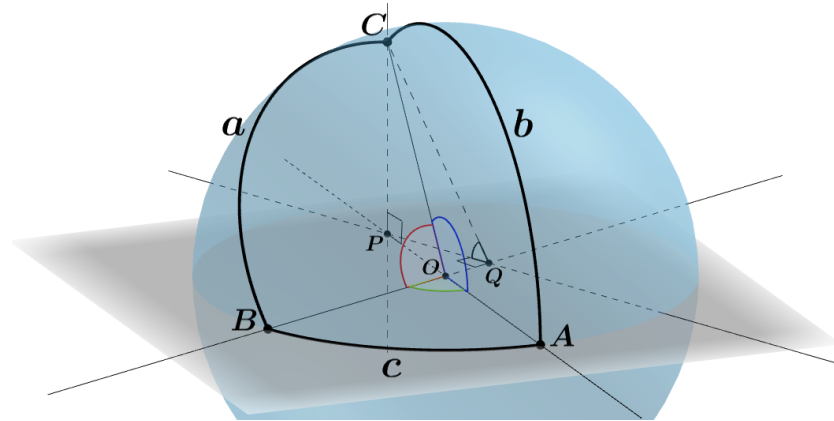


Figura 3.10: Triângulo esférico retângulo em A, cujo lado b tem medida superior a 90° . Fonte: *Autor*

Assim, dos triângulos retângulos $\triangle OPC$, $\triangle QPC$ e $\triangle OQC$, segue

$$\text{sen}b = \text{sen}(180^\circ - b) = \frac{\overline{CP}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CQ}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{OC}} = \text{sen}(180^\circ - \hat{B}) \cdot \text{sen}(180^\circ - a),$$

ou seja,

$$\text{sen}b = \text{sen}\hat{B} \cdot \text{sen}a.$$

Pelos triângulos retângulos $\triangle OQP$, $\triangle QPC$ e $\triangle OPC$, obtemos:

$$\text{sen}c = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{OP}} = \text{cotg}(180^\circ - \hat{B}) \cdot \text{tg}(180^\circ - b) = \text{cotg}\hat{B} \cdot \text{tg}b.$$

Por fim, dos triângulos retângulos $\triangle OQC$, $\triangle OQP$ e $\triangle OPC$, teremos

$$\text{cos}(180^\circ - a) = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} \cdot \frac{\overline{OP}}{\overline{OC}} = \text{cosec} \cdot \text{cos}(180^\circ - b),$$

isto é,

$$\text{cosa} = \text{cos}b \cdot \text{cosec}.$$

A prova das igualdades (3.2) e (3.4), para ambos os casos descritos acima, segue de maneira análoga àquela empreendida em (3.1) e (3.3), bastando, para isso, efetuar as construções anteriores tendo com ponto de partida o pé da perpendicular baixada do vértice B ao plano AOC. Além disso, pelas notações acima, a verificação da validade da proposição para o caso em que o triângulo esférico ABC tiver lados b e c com medidas superiores a 90° segue o mesmo procedimento explicitado no caso em que um de seus lados possuía medida superior a 90° .

É importante salientar que o resultado apresentado pela igualdade (3.5), da proposição acima, é conhecido, na literatura, como o *Teorema de Pitágoras Esférico*. Vamos mostrar que, no caso limite, quando o raio da superfície esférica tende ao infinito, voltamos ao clássico teorema de Pitágoras da

Geometria Euclidiana.

De fato, expandindo o cosseno pela série de Taylor, com $x_0 = 0$, temos

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Por outro lado, expressando as medidas dos lados a , b e c do triângulo esférico em radianos, obtemos, respectivamente, $\frac{\bar{a}}{R}$, $\frac{\bar{b}}{R}$ e $\frac{\bar{c}}{R}$, onde \bar{a} , \bar{b} e \bar{c} são os comprimentos dos arcos \widehat{BC} , \widehat{AC} e \widehat{AB} , nesta ordem, e R é o raio da superfície esférica. Daí, pela igualdade (3.5) da proposição acima, tem-se:

$$\begin{aligned} \cos a = \cos b \cdot \cos c &\implies \cos\left(\frac{\bar{a}}{R}\right) = \cos\left(\frac{\bar{b}}{R}\right) \cdot \cos\left(\frac{\bar{c}}{R}\right) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\bar{a}}{R}\right)^{2n}}{(2n)!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\bar{b}}{R}\right)^{2n}}{(2n)!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\bar{c}}{R}\right)^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

Desse modo, teremos sucessivamente:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\bar{a}^2}{2!R^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\bar{a}}{R}\right)^{2n}}{(2n)!} &= \left(1 - \frac{\bar{b}^2}{2!R^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\bar{b}}{R}\right)^{2n}}{(2n)!}\right) \cdot \left(1 - \frac{\bar{c}^2}{2!R^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\bar{c}}{R}\right)^{2n}}{(2n)!}\right) \\ -\bar{a}^2 + \frac{2}{R^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \bar{a}^{2n}}{(2n)!R^{2n-4}} &= -\bar{b}^2 - \bar{c}^2 + \frac{\bar{b}^2 \bar{c}^2}{2R^2} + \left(\frac{2}{R^2} - \frac{\bar{b}^2}{R^4}\right) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \bar{b}^{2n}}{(2n)!R^{2n-4}} \\ &\quad + \left(\frac{2}{R^2} - \frac{\bar{c}^2}{R^4}\right) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \bar{c}^{2n}}{(2n)!R^{2n-4}} \\ &\quad + \frac{2}{R^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \bar{b}^{2n}}{(2n)!R^{2n-4}} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\bar{c}}{R}\right)^{2n}}{(2n)!} \quad (*) \end{aligned}$$

Sabendo que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ implica na convergência da série $\sum a_n$, então inferimos que as séries da forma $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n k^{2n}}{(2n)!R^{2n-4}}$, com $k \in \mathbb{R}$, convergem. Com efeito, temos

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{k^{2n+2}}{(2n+2)!R^{2n-2}} \cdot \frac{(2n)!R^{2n-4}}{k^{2n}} = \frac{k^2}{R^2(2n+2)(2n+1)}$$

e, desse modo, obtemos $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0$, isto é, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n k^{2n}}{(2n)!R^{2n-4}}$ converge.

Logo, pela convergência das séries contidas na igualdade (*) e por $\frac{1}{R^2} \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$, concluímos, para R suficientemente grande, que se tem

$$-\bar{a}^2 = -\bar{b}^2 - \bar{c}^2 \implies \bar{a}^2 = \bar{b}^2 + \bar{c}^2,$$

que é o teorema de Pitágoras no plano.

Proposição 12. (Analogia dos senos) Em um triângulo esférico ABC , com lados a , b e c opostos aos ângulos internos \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} , respectivamente, valem as igualdades:

$$\frac{\operatorname{sena}}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{\operatorname{sen}b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{\operatorname{sen}c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}.$$

DEMONSTRAÇÃO: Dado arbitrariamente o triângulo esférico ABC, com lados a , b e c respectivamente opostos aos ângulos internos \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} .

Se o referido triângulo for retângulo, digamos em A, então, pelas igualdades (3.1) e (3.2) da proposição 11, temos imediatamente a validade do resultado, já que, por elas, tem-se:

$$\text{sen}b = \text{sen}\widehat{B} \cdot \text{sen}a \quad \text{e} \quad \text{sen}c = \text{sen}\widehat{C} \cdot \text{sen}a.$$

Daí, teremos

$$\text{sen}a = \frac{\text{sen}a}{\text{sen}90^\circ} = \frac{\text{sen}b}{\text{sen}\widehat{B}} = \frac{\text{sen}c}{\text{sen}\widehat{C}}.$$

Suponhamos ABC obliquângulo, conforme uma das ilustrações da figura 3.11 (A ocorrência de qualquer um dos casos é indiferente, já que se tem $\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(180^\circ - \alpha)$).

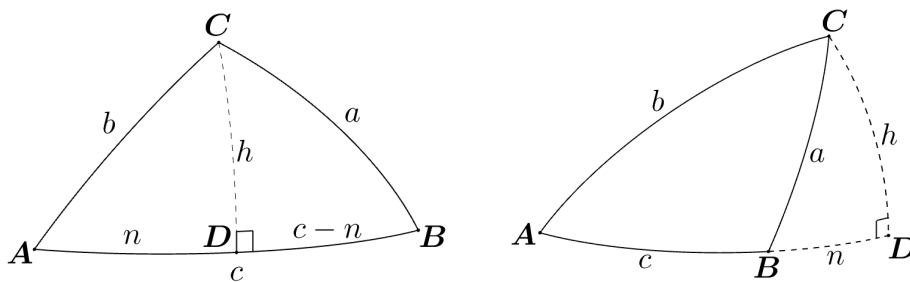


Figura 3.11: Triângulos esféricos obliquângulos. Fonte: *Autor*

Seja D o ponto de interseção da circunferência máxima que passa ponto C e é perpendicular ao arco \widehat{AB} (Na verdade, são perpendiculares o plano que contém esta circunferência e o plano que contém AB). Desse forma, temos que os triângulos esféricos ADC e CDB são retângulos. Daí, aplicando o resultado (3.1) da proposição 11 em tais triângulos, obtemos:

$$\text{sen}h = \text{sen}\widehat{A}\text{sen}b \quad \text{e} \quad \text{sen}h = \text{sen}(180^\circ - \widehat{B})\text{sen}a = \text{sen}\widehat{B}\text{sen}a.$$

Assim, teremos

$$\text{sen}\widehat{A}\text{sen}b = \text{sen}\widehat{B}\text{sen}a,$$

ou seja,

$$\frac{\text{sen}a}{\text{sen}\widehat{A}} = \frac{\text{sen}b}{\text{sen}\widehat{B}}.$$

Analogamente, tomando a circunferência máxima passando por B e perpendicular ao arco \widehat{AC} , obtemos:

$$\frac{\text{sen}a}{\text{sen}\widehat{A}} = \frac{\text{sen}c}{\text{sen}\widehat{C}}.$$

Resta mostrar a validade do resultado para triângulos esféricos birretângulos e trirretângulos. No caso dos primeiros, consideremos o triângulo ABC, com ângulos retos em B e C. Seja A' a projeção ortogonal do ponto A sobre o plano BOC, onde O é o centro da superfície esférica. Afirmemos que $A'=O$. De fato, se tivéssemos $A' \neq O$, então, tomando o ponto Q, interseção da perpendicular a BO passando por A', teríamos que a reta AQ seria perpendicular à BO, pelo teorema da três perpendiculares. Ora, no plano AA'Q teríamos um triângulo plano com dois ângulos retos, um absurdo.

Logo, teremos $A' = O$.

Daí, pela perpendicularidade de AO relativa ao plano BOC , obtemos $c = A\widehat{O}B = 90^\circ = A\widehat{O}C = b$ e $\widehat{A} = B\widehat{O}C = a$. Assim, sabendo que $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$, tem-se trivialmente a verificação do resultado enunciado pela proposição.

Por fim, mediante uma análise análoga à empreendida no caso dos triângulos birretângulos, concluímos que todos os ângulos internos e os lados de triângulos esféricos trirretângulos medem 90° . A validade da proposição para este tipo de triângulo esférico segue imediatamente.

Portanto, em um triângulo esférico ABC qualquer vale a relação $\frac{\text{sena}}{\text{sen}\widehat{A}} = \frac{\text{sen}b}{\text{sen}\widehat{B}} = \frac{\text{senc}}{\text{sen}\widehat{C}}$, onde a , b e c são os lados, respectivamente, opostos aos ângulos internos \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} .

Proposição 13. (Analogia dos cossenos ou fórmula fundamental) *Se ABC é um triângulo esférico, com lados a , b e c opostos, respectivamente, aos ângulos internos \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} , então*

$$\begin{aligned} \text{cosa} &= \text{cos}b \cdot \text{cosc} + \text{sen}b \cdot \text{senc} \cdot \cos\widehat{A} \\ \text{cos}b &= \text{cosa} \cdot \text{cosc} + \text{sena} \cdot \text{senc} \cdot \cos\widehat{B} \\ \text{cosc} &= \text{cosa} \cdot \text{cos}b + \text{sena} \cdot \text{sen}b \cdot \cos\widehat{C} \end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO:

I. Triângulos esféricos retângulos: Consideremos o triângulo ABC , reto em A , com lados a , b e c . Ainda pelas notações da proposição 11 e utilizando a mesma construção, onde consideraremos P pertencendo ao segmento AO (o caso em que P não pertence a tal segmento, ou seja, quando $O \in AP$, mediante alguns ajustes, produz os mesmos resultados), conforme a figura abaixo.

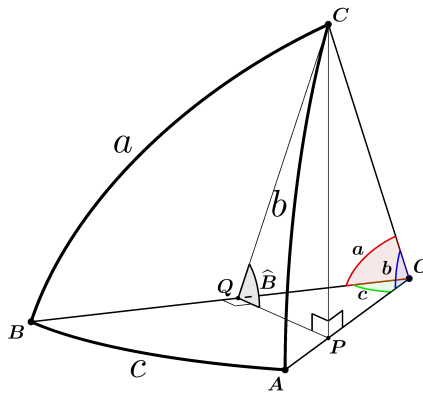


Figura 3.12: Triângulo esférico retângulo em A . Fonte: *Autor*

É imediato, pela igualdade (3.5) da proposição 11, termos $\text{cosa} = \text{cos}b \cdot \text{cosc} = \text{cos}b \cdot \text{cosc} + \text{sen}b \cdot \text{senc} \cdot \cos\widehat{A}$, já que $\widehat{A} = 90^\circ$. Por outro lado, dos triângulos retângulos $\triangle OQC$ e $\triangle OQP$, teremos

$$\text{cos}(a)\text{cos}(c) = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OC}} \cdot \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OQ}^2}{\overline{OC} \cdot \overline{OP}} \quad \text{e} \quad \text{sen}(a)\text{sen}(c) = \frac{\overline{CQ}}{\overline{OC}} \cdot \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}.$$

Logo, pelas igualdades explicitadas acima e pelos triângulos retângulos $\triangle QPC$ e $\triangle OPC$, concluímos que se tem

$$\begin{aligned} \cos(a)\cos(c) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(c)\cos(\widehat{B}) &= \frac{\overline{OQ}^2}{\overline{OC} \cdot \overline{OP}} + \frac{\overline{CQ}}{\overline{OC}} \cdot \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} \cdot \frac{\overline{PQ}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2}{\overline{OC} \cdot \overline{OP}} = \frac{\overline{OP}^2}{\overline{OC} \cdot \overline{OP}} \\ &= \frac{\overline{OP}}{\overline{OC}} = \cos(b). \end{aligned}$$

A verificação da terceira igualdade do enunciado da proposição segue de maneira análoga à da segunda, realizada acima.

II. Triângulos obliquângulos: Dado um triângulo esférico obliquângulo ABC, com lados a , b e c opostos aos ângulos \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} , respectivamente. Efetuaremos o mesmo procedimento aplicado na prova da proposição 12, ou seja, consideraremos o círculo máximo que passa por C e é perpendicular ao círculo máximo que contém \widehat{AB} no ponto D (confira a figura 3.11). Sejam h e n , respectivamente, as medidas dos arcos \widehat{CD} e \widehat{AD} .

Daí, pelo triângulo esférico retângulo ADC, teremos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(h) &= \operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}\widehat{A} \\ \operatorname{sen}(n) &= \operatorname{tg}(h) \cdot \operatorname{cotg}\widehat{A} \\ \cos(b) = \cos(h) \cdot \cos(n) &\implies \cos(n) = \frac{\cos(b)}{\cos(h)}. \end{aligned}$$

Por outro lado, do triângulo esférico retângulo BDC, temos

$$\cos(a) = \cos(h) \cdot \cos(c - n) = \cos(h) \cdot (\cos(c) \cdot \cos(n) + \operatorname{sen}(c) \cdot \operatorname{sen}(n)). \quad (3.6)$$

Dessa forma, substituindo progressivamente as identidades obtidas no triângulo ADC, indicadas acima, na igualdade (3.6), obtem-se:

$$\begin{aligned} \cos(a) &= \cos(h) \left(\cos(c) \cdot \frac{\cos(b)}{\cos(h)} + \operatorname{sen}(c) \cdot \operatorname{tg}(h) \cdot \operatorname{cotg}\widehat{A} \right) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \operatorname{sen}(c)\operatorname{sen}(h) \cdot \frac{\cos\widehat{A}}{\operatorname{sen}\widehat{A}} \\ &= \cos(b) \cdot \cos(c) + \operatorname{sen}(c)\operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}\widehat{A} \cdot \frac{\cos\widehat{A}}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \cos(b) \cdot \cos(c) + \operatorname{sen}(b)\operatorname{sen}(c) \cdot \cos\widehat{A}. \end{aligned}$$

Conforme queríamos demonstrar. A prova das outras duas igualdades dessa proposição segue de modo totalmente análogo ao que foi exposto acima, bastando, para isso, tomar a interseção do círculo máximo que passa por A (ou B) e é perpendicular àquele contendo \widehat{BC} (ou \widehat{AC}) para compor os triângulos esféricos retângulos que serão usados na demonstração.

III. Triângulos esféricos birretângulos e trirretângulos: Consideremos um triângulo birretângulo ABC, com ângulos retos em B e C. Conforme foi visto na prova da proposição 12, tem-se que $b = \widehat{B} = 90^\circ = \widehat{C} = c$ e $a = \widehat{A}$. Daí, por estas igualdades, temos a verificação imediata de todas as igualdades da proposição.

O caso em que ABC é trirretângulo também é imediato, já que todos os seus ângulos internos e lados (que são arcos) medem 90° .

3.3 Aplicação de conceitos

Com os resultados apresentados acima, temos instrumentais capazes de determinar a distância entre pontos quaisquer sobre o globo terrestre a partir de suas coordenadas geográficas (longitude e latitude), recordando, conforme visto na proposição 7, que tal distância é dada pela medida do menor arco de círculo máximo que passa pelos pontos.

(1): (UERJ - 2º Exame de Qualificação - 2005) A Terra pode ser representada por uma esfera cujo raio mede 6400 km. Na representação abaixo, está indicado o trajeto de um navio do ponto A ao ponto C, passando por B.



Figura 3.13: Trajeto descrito pelo navio de A até C, passando por B

Qualquer ponto da superfície da Terra tem coordenadas (x, y) , em que x representa a longitude e y , a latitude. As coordenadas dos pontos A, B e C estão indicadas na tabela a seguir.

Pontos	Coordenadas	
	x	y
A	135°	0°
B	135°	60°
C	90°	60°

Considerando π igual a 3, a distância percorrida, em quilômetros, pelo navio no trajeto ABC é igual a:

- (a) 11.200
- (b) 10.800
- (c) 8.800
- (d) 5.600

Resolução: Partindo das informações fornecidas pelo problema, obtemos o esquema explicitado na figura 3.14.

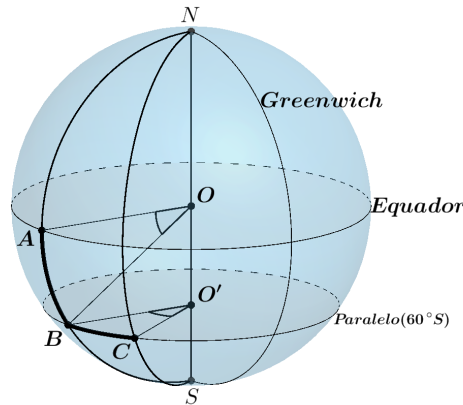


Figura 3.14: Representação do problema. Fonte: *Autor*

Observamos, inicialmente, que a distância percorrida pelo navio de A até B é dada pelo comprimento do arco de circunferência máxima (do globo terrestre) com medida angular igual a 60° . Daí, sendo R a medida do raio da Terra, temos que o arco \widehat{AB} mede:

$$\frac{m(\widehat{AB})}{2\pi R} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \implies m(\widehat{AB}) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 6400}{6} \implies m(\widehat{AB}) = 6400 \text{ km}.$$

Para a distância percorrida no trajeto BC, temos que esta é igual ao comprimento do arco de 45° ($135^\circ - 90^\circ$) no paralelo de 60° Sul. Assim, devemos determinar, primeiramente, a medida do raio deste paralelo. Mas, pelo problema 3 da seção 2.4, tínhamos que o raio do paralelo numa latitude arbitrária θ é dado por $R \cos \theta$, onde R é o raio da Terra.

Desse modo, o raio do paralelo que contém o arco \widehat{BC} será igual a:

$$R \cos \theta = 6400 \cdot \cos 60^\circ = 3200 \text{ km}.$$

Logo, o comprimento do arco de paralelo \widehat{BC} (que possui medida angular igual a 45°), indicado por $m(\widehat{BC})$, será:

$$\frac{m(\widehat{BC})}{2\pi 3200} = \frac{45^\circ}{360^\circ} \implies m(\widehat{BC}) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3200}{8} \implies m(\widehat{BC}) = 2400 \text{ km}.$$

Portanto, a distância percorrida pelo navio de A até C, passando por B, é igual a $6400 + 2400 = 8800$ km.

(2): A Cidade do México (México) possui as seguintes coordenadas geográficas: Latitude $19^\circ 25' 42''$ N e Longitude $99^\circ 07' 39''$ W, enquanto que a cidade de Paris (França) tem Latitude $48^\circ 51' 12''$ N e Longitude $2^\circ 20' 55''$ E. Com base nestas informações, determine a distância aproximada entre Cidade do México e Paris.

Resolução: Consideraremos, sobre o globo terrestre, o triângulo esférico com vértices na Cidade do México(A), em Paris(B) e no polo Norte N (a escolha do terceiro vértice neste polo é justificada por facilitar a determinação das medidas dos lados do triângulo), conforme indicado na figura abaixo.

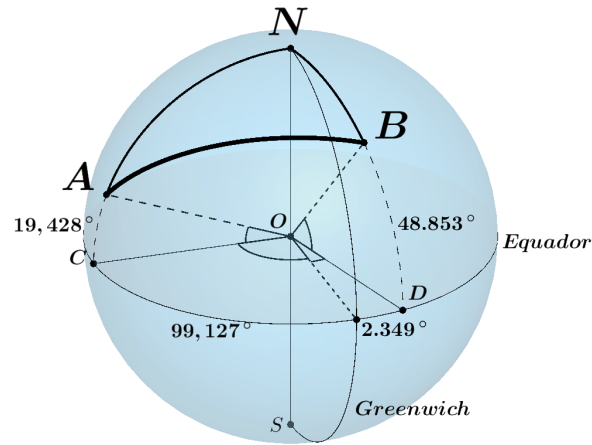


Figura 3.15: Triângulo esférico indicando as geodésicas que ligam, dois a dois, a Cidade do México (A), Paris (B) e o polo Norte (N). Fonte: *Autor*

Sejam C e D os pontos de interseção dos meridianos que passam por A e B, respectivamente, com o Equador. Por tal construção, obtemos diretamente os lados \widehat{NA} e \widehat{NB} e o ângulo interno \widehat{N} do triângulo esférico NAB. Desse modo, após converter todas as medidas angulares para graus (lembrando que se tem $1^\circ = 60'$ e $1' = 60''$), obtemos os valores:

$$\widehat{NA} = N\widehat{OC} - A\widehat{OC} = 90^\circ - 19,428^\circ = 70,572^\circ,$$

$$\widehat{NB} = N\widehat{OD} - B\widehat{OD} = 90^\circ - 48,853^\circ = 41,147^\circ$$

e

$$\widehat{N} = C\widehat{OD} = 99,127^\circ + 2,349^\circ = 101,476^\circ.$$

Daí, aplicando a fórmula fundamental da trigonometria esférica no triângulo NAB, com lado a determinar sendo \widehat{AB} , obtemos:

$$\begin{aligned} \cos\widehat{AB} &= \cos\widehat{NA} \cdot \cos\widehat{NB} + \sin\widehat{NA} \cdot \sin\widehat{NB} \cdot \cos\widehat{N} \\ &= \cos 70,572^\circ \cdot \cos 41,147^\circ + \sin 70,572^\circ \cdot \sin 41,147^\circ \cdot \cos 101,476^\circ \end{aligned}$$

ou seja,

$$\cos\widehat{AB} = 0,127014 \implies \widehat{AB} = \arccos(0,127014) \implies \widehat{AB} \approx 82,703^\circ.$$

Desse modo, sabendo que o raio R da Terra mede 6371 km e que a distância entre as cidades A e B é igual ao comprimento do arco menor de circunferência máxima que passa por estes pontos, designado por $m(\widehat{AB})$, teremos:

$$\frac{m(\widehat{AB})}{2\pi R} = \frac{82,703^\circ}{360^\circ} \implies m(\widehat{AB}) = \frac{82,703^\circ}{360} \cdot 2\pi \cdot 6371 \implies m(\widehat{AB}) \approx 9196,15 \text{ km}.$$

Portando, a distância entre a Cidade do México e Paris é aproximadamente igual a 9196,15 km.

Concluiremos esta seção apresentando uma fórmula capaz de calcular a distância entre dois pontos no globo terrestre, a partir de suas coordenadas geográficas, e mostraremos algumas aplicações da mesma. Para o que segue, adotaremos o sinal positivo para a Longitude de pontos situados a Leste

do meridiano de Greenwich e o sinal negativo para pontos situados a Oeste. A Latitude dos pontos também receberá sinal positivo ou negativa, conforme estes estejam localizados nos hemisférios Norte ou Sul, respectivamente.

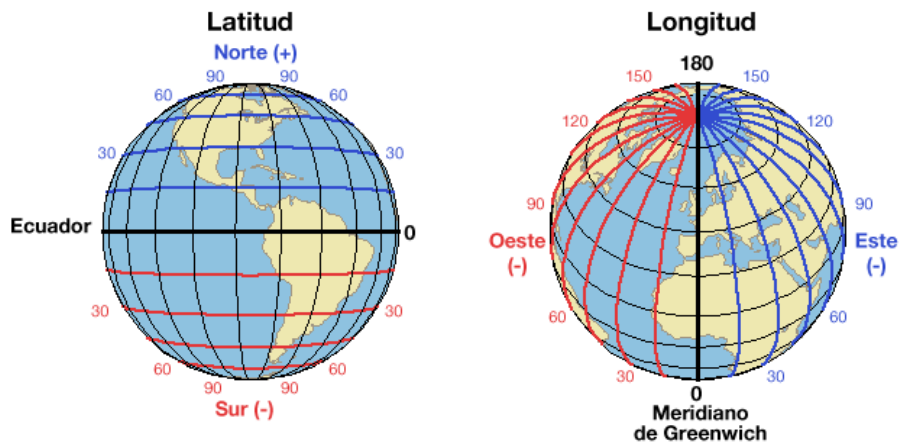


Figura 3.16: Orientação das coordenadas geográficas. Fonte: *Google Imagens*

Proposição 14. *Dados os pontos A , com longitude ϕ_A e latitude θ_A , e B , com longitude ϕ_B e latitude θ_B . A distância entre os pontos A e B no globo terrestre, denotada por $d(A, B)$, é dada pela expressão:*

$$d(A, B) = R \cdot \arccos(\text{sen}\theta_A \cdot \text{sen}\theta_B + \text{cos}\theta_A \cdot \text{cos}\theta_B \cdot \text{cos}\Delta\phi),$$

onde R é o raio da Terra e $\Delta\phi = \phi_A - \phi_B$.

DEMONSTRAÇÃO: Tomemos, inicialmente, os pontos A e B no hemisfério Norte. Sejam ABN o triângulo esférico com vértices em A , em B e no polo Norte (N) e O o centro do globo terrestre. Na figura 3.17, os pontos M , P e Q são as interseções do Equador com os meridianos de A , de B e de Greenwich, respectivamente.

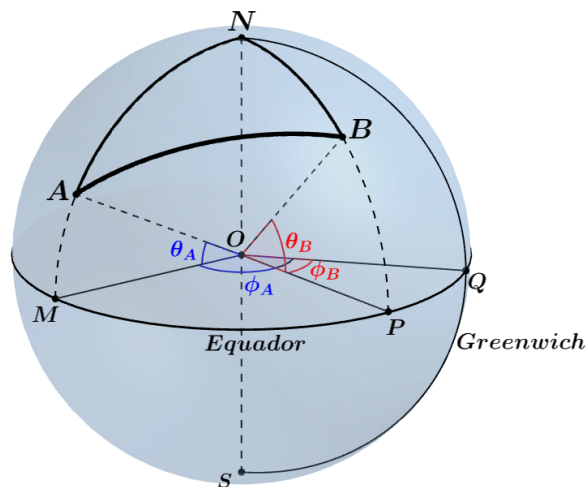


Figura 3.17: Distância entre os pontos A e B sobre o globo terrestre. Fonte: *Autor*

Aplicando a fórmula fundamental (veja a proposição 13) no triângulo esférico ABN, obtemos:

$$\cos\widehat{AB} = \cos\widehat{AN} \cdot \cos\widehat{BN} + \operatorname{sen}\widehat{AN} \cdot \operatorname{sen}\widehat{BN} \cdot \cos\widehat{N}.$$

Como $\widehat{AN} = 90^\circ - \theta_A$, $\widehat{BN} = 90^\circ - \theta_B$ e $\widehat{N} = \phi_A - \phi_B$, então teremos

$$\cos\widehat{AB} = \cos(90^\circ - \theta_A) \cdot \cos(90^\circ - \theta_B) + \operatorname{sen}(90^\circ - \theta_A) \cdot \operatorname{sen}(90^\circ - \theta_B) \cdot \cos(\phi_A - \phi_B),$$

isto é,

$$\cos\widehat{AB} = \operatorname{sen}\theta_A \cdot \operatorname{sen}\theta_B + \cos\theta_A \cdot \cos\theta_B \cdot \cos\Delta\phi.$$

Dessa modo, concluímos que se tem

$$\widehat{AB} = \arccos(\operatorname{sen}\theta_A \cdot \operatorname{sen}\theta_B + \cos\theta_A \cdot \cos\theta_B \cdot \cos\Delta\phi), \quad \text{onde } \Delta\phi = \phi_A - \phi_B.$$

Assim, considerando a medida angular do arco \widehat{AB} dada em radianos e sendo R o raio da Terra, temos que a distância entre os pontos A e B pode ser calculada por:

$$d(A, B) = R \cdot \widehat{AB} = R \cdot \arccos(\operatorname{sen}\theta_A \cdot \operatorname{sen}\theta_B + \cos\theta_A \cdot \cos\theta_B \cdot \cos\Delta\phi), \quad \text{onde } \Delta\phi = \phi_A - \phi_B.$$

Por um raciocínio análogo, prova-se que a relação acima continua sendo válida para pontos situados no hemisfério Sul e em hemisférios diferentes, tendo em vista a orientação dada para as coordenadas geográficas e sabendo que $\cos(90^\circ + \alpha) = \operatorname{sen}(-\alpha)$ e $\operatorname{sen}(90^\circ + \alpha) = \cos(\alpha)$.

Intuitivamente, quando temos duas cidades localizadas num mesmo paralelo, distinto do equador, pensamos que o trajeto mais curto entre elas seja o menor arco do paralelo que liga as cidades. Porém, tal pensamento está equivocado, uma vez que, pela proposição 7 da seção 3.1, vimos que o menor trajeto é, na verdade, o arco menor de circunferência máxima que passa pelas cidades. Por exemplo, no primeiro problema desta seção, observamos que o navio segue o percurso ideal (mais curto) no trajeto AB; contudo, no trajeto BC, este percorre uma distância superior à ideal.

Pela fórmula enunciada na proposição 14, teríamos que a distância percorrida entre os pontos $B = (135^\circ W, 60^\circ S)$ e $C = (90^\circ W, 60^\circ S)$ seria:

$$d(B, C) = 6400 \cdot \arccos(\operatorname{sen}(-60^\circ) \cdot \operatorname{sen}(-60^\circ) + \cos(-60^\circ) \cdot \cos(-60^\circ) \cdot \cos(-135^\circ + 90^\circ))$$

$$d(B, C) \approx 2353,3 \text{ km.}$$

Assim, se o navio mantivesse a rota de A até o ponto B e depois seguisse o trajeto ideal (arco menor de círculo máximo que passa pelos pontos) de B a C, então percorreria uma distância total de 8753,2 km, sendo 46,7 km menor do que aquela percorrida na primeira situação.

(3): O triângulo das Bermudas é a região da Terra, situada no Oceano Atlântico entre as ilhas Bermudas, Porto Rico e o extremo Sul da Flórida (Fort Lauderdale), que se notabilizou como palco de diversos desaparecimentos de barcos de passeio, de navios e de aviões, para os quais popularizaram-se explicações extrafísicas e/ou sobrenaturais.

Sabendo que esta região corresponde a porção do globo terrestre delimitada por um triângulo esférico com vértices nas ilhas Bermudas, $32^\circ 17' 58'' N$ e $64^\circ 47' 25'' W$, Fort Lauderdale (Flórida), $26^\circ 07' 20'' N$ e $80^\circ 08' 14'' W$, e San Juan (Porto Rico), $18^\circ 27' 58'' N$ e $66^\circ 06' 20'' W$, e admitindo que o

raio da Terra meça 6371 km, qual seria a área aproximada do triângulo das Bermudas?

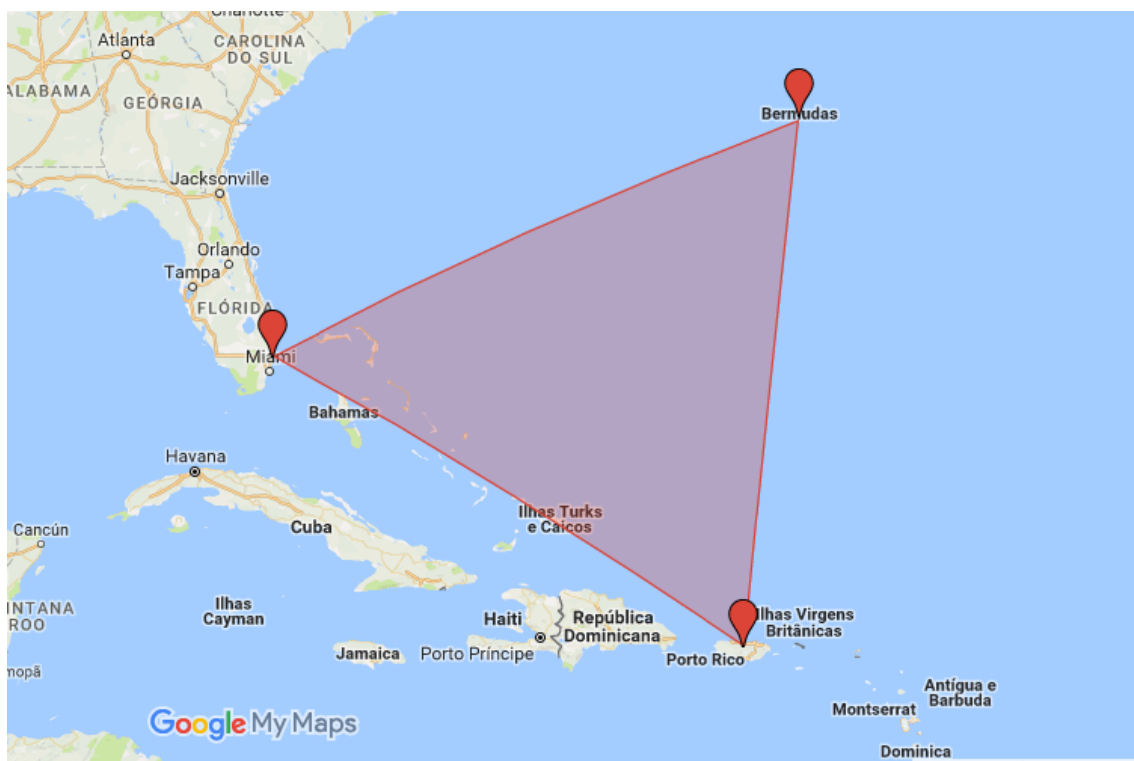


Figura 3.18: Triângulo das Bermudas. Fonte: *Google Maps*

Resolução: Se A, B e C representam as ilhas Bermudas, Fort Lauderdale e San Juan, respectivamente, então devemos determinar, inicialmente, os lados \widehat{BC} , \widehat{AC} e \widehat{AB} do triângulo esférico ABC.

Sendo assim, aplicando a fórmula apresentada pela proposição 14 e invocando a definição da medida de arcos em radianos, teremos:

$$\begin{aligned} \widehat{AB} &= \frac{d(A, B)}{R} \\ &= \frac{R \cdot \arccos(\sin 26,1222^\circ \sin 32,2994^\circ + \cos 26,1222^\circ \cos 32,2994^\circ \cos(-80,1372^\circ + 64,7903^\circ))}{R} \\ &= 0,257101 \text{ rad}, \\ \widehat{AC} &= \frac{d(A, C)}{R} \\ &= \frac{R \cdot \arccos(\sin 26,1222^\circ \sin 18,4661^\circ + \cos 26,1222^\circ \cos 18,4661^\circ \cos(-80,1372^\circ + 66,1056^\circ))}{R} \\ &= 0,262767 \text{ rad} \end{aligned}$$

e

$$\widehat{BC} = \frac{d(B, C)}{R}$$

$$= \frac{R \cdot \arccos(\operatorname{sen}32,2994^\circ \operatorname{sen}18,4661^\circ + \operatorname{cos}32,2994^\circ \operatorname{cos}18,4661^\circ \operatorname{cos}(-64,7903^\circ + 66,1056^\circ))}{R}$$

$$= 0,242319 \text{ rad.}$$

Daí, aplicando a fórmula fundamental da trigonometria esférica (proposição 13) e denotando por \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} os ângulos internos opostos, respectivamente, aos lados \widehat{BC} , \widehat{AC} e \widehat{AB} , obtemos:

$$\cos \widehat{A} = \frac{\cos(\widehat{BC}) - \cos(\widehat{AB}) \cdot \cos(\widehat{AC})}{\operatorname{sen}(\widehat{AB}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{AC})} = \frac{\cos(0,242319\text{rad}) - \cos(0,257101\text{rad}) \cdot \cos(0,262767\text{rad})}{\operatorname{sen}(0,257101\text{rad}) \cdot \operatorname{sen}(0,262767\text{rad})}$$

$$= 0,557916,$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{\cos(\widehat{AC}) - \cos(\widehat{AB}) \cdot \cos(\widehat{BC})}{\operatorname{sen}(\widehat{AB}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{BC})} = \frac{\cos(0,262767\text{rad}) - \cos(0,257101\text{rad}) \cdot \cos(0,242319\text{rad})}{\operatorname{sen}(0,257101\text{rad}) \cdot \operatorname{sen}(0,242319\text{rad})}$$

$$= 0,439218$$

e

$$\cos \widehat{C} = \frac{\cos(\widehat{AB}) - \cos(\widehat{AC}) \cdot \cos(\widehat{BC})}{\operatorname{sen}(\widehat{AC}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{BC})} = \frac{\cos(0,257101\text{rad}) - \cos(0,262767\text{rad}) \cdot \cos(0,242319\text{rad})}{\operatorname{sen}(0,262767\text{rad}) \cdot \operatorname{sen}(0,242319\text{rad})}$$

$$= 0,476011.$$

Logo teremos $\widehat{A} = 0,978924 \text{ rad}$, $\widehat{B} = 1,116068 \text{ rad}$ e $\widehat{C} = 1,074683 \text{ rad}$. Daí, aplicando a fórmula contida no teorema de Girard sobre a área de triângulos esféricos (proposição 10), tem-se:

$$A_{ABC} = (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi)R^2 = (0,978924 + 1,116068 + 1,074683 - 3,141593) \cdot 6371^2$$

$$A_{ABC} \approx 1.139.838,3 \text{ km}^2.$$

Portanto, concluímos que a área do triângulo da Bermudas é aproximadamente igual a 1.139.838 km^2 , uma área aproximadamente 159 milhões de vezes maior do que a do estádio de futebol do Maracanã (105m x 68m).

Capítulo 4

A Superfície Esférica em Coordenadas Cartesianas

Neste capítulo faremos uma breve introdução ao estudo de coordenadas cartesianas no espaço euclidiano ε , com os resultados da Geometria Analítica, apresentaremos as equações (Reduzida e Geral) de uma superfície esférica. Além disso, mostraremos a relação existente entre coordenadas cartesianas e coordenadas geográficas de pontos sobre o globo terrestre, que desempenha um papel importante no funcionamento do sistema GPS.

4.1 Coordenadas Cartesianas

Seja ε o espaço euclidiano tridimensional. Um **sistema de eixos ortogonais OXYZ** no espaço ε consiste de três eixos, OX, OY e OZ, dois a dois perpendiculares e com mesma origem O. Tal sistema estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos P do espaço ε e os ternos ordenados de números reais (x, y, z) . Isto significa que cada ponto do espaço ε está associado a um único terno ordenado de números reais e cada terno de números reais está associado exatamente a um ponto de ε .

Se um ponto P está associado ao terno (x, y, z) , então dizemos que x, y e z são as coordenadas de P em relação ao sistema de eixos ortogonais OXYZ. Estas coordenadas são obtidas da seguinte forma: (observe a figura 4.1)

- **coordenada x:** coordenada no eixo OX do ponto de interseção do plano que passa por P e é perpendicular a OX.
- **coordenada y:** coordenada no eixo OY do ponto de interseção do plano que passa por P e é perpendicular a OY.
- **coordenada z:** coordenada no eixo OZ do ponto de interseção do plano que passa por P e é perpendicular a OZ.

O conjunto de todos os ternos ordenados (x, y, z) de números reais é designado por \mathbb{R}^3 . Uma vez fixado o sistema de eixos ortogonais OXYZ do espaço ε , cada ponto $P \in \varepsilon$ é identificado por suas coordenadas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e escrevemos $P = (x, y, z)$.

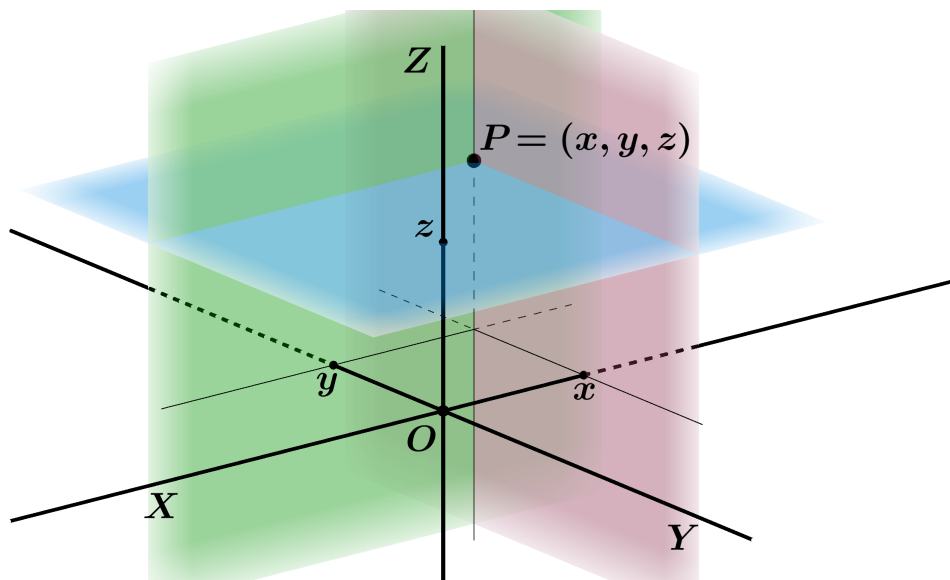


Figura 4.1: Coordenadas do ponto P no sistema OXYZ. Fonte: *Autor*

4.2 Equação da superfície esférica

Pela definição de superfície esférica, vimos que a distância entre pontos do espaço e o centro dessa superfície é um fator decisivo para identificarmos se estes estão ou não naquele conjunto. Assim, para obtermos uma equação que descreva uma superfície esférica no espaço euclidiano, relativa a um sistema de eixos ortogonais OXYZ prefixado, devemos obter uma fórmula capaz de calcular a distância entre pontos no espaço partindo de suas coordenadas no sistema OXYZ.

Sendo assim, fixando um sistema de eixos ortogonais OXYZ no espaço ε , consideremos os pontos $P = (x_p, y_p, z_p)$ e $Q = (x_q, y_q, z_q)$ de ε . Para o cálculo da distância de P a Q , denotada por $d(P, Q)$, vamos considerar os pontos auxiliares (observe a figura 4.2):

$$R = (x_p, y_p, z_q), \quad S = (x_q, y_q, 0), \quad T = (x_p, y_p, 0) \quad \text{e} \quad U = (x_p, y_q, 0).$$

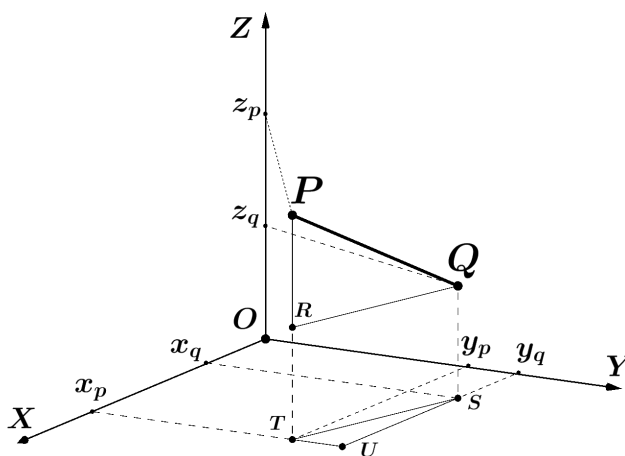


Figura 4.2: Cálculo de $d(P, Q)$. Fonte: *Autor*

A perpendicularidade entre os eixos OX , OY e OZ e entre os planos que determinam as coordenadas de P e Q nos garantem que os triângulos (planos) $\triangle PRQ$ e $\triangle TUS$ são retângulos. Daí, aplicando o Teorema de Pitágoras nos referidos triângulos, respectivamente, obtemos:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RQ}^2 = (z_p - z_q)^2 + \overline{RQ}^2$$

e

$$\overline{TS}^2 = \overline{SU}^2 + \overline{TU}^2 = (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2.$$

Como $d(P, Q) = \overline{PQ}$ e $\overline{TS} = \overline{RQ}$, então teremos:

$$d(P, Q)^2 = \overline{PQ}^2 = (z_p - z_q)^2 + (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 \implies d(P, Q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2}$$

Portanto, dada uma superfície esférica Σ , de centro $C = (x_0, y_0, z_0)$ e raio R , temos que um ponto arbitrário $P = (x, y, z)$ do espaço pertence à Σ se, e só se, $d(P, C) = R$, ou seja,

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros desta última igualdade, obtemos a **equação reduzida** da superfície esférica Σ relativa ao sistema de eixos $OXYZ$.

$$\Sigma : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \quad (4.1)$$

Desenvolvendo os quadrados da igualdade (4.1), obtemos

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 = 0.$$

Por fim, fazendo $A = -2x_0$, $B = -2y_0$, $C = -2z_0$ e $D = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2$, teremos

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0. \quad (4.2)$$

A equação em (4.2) é chamada **equação geral** da superfície esférica Σ .

Feito isto, um questão surge automaticamente: Dada uma equação da forma (4.2), como decidir se ela representa ou não a equação de uma superfície esférica? A resposta para esta indagação pode ser obtida simplesmente completando os quadrados de tal equação, convertendo (4.2) na forma (4.1). Por exemplo, tomando a equação $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 8 = 0$, tem-se:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 8 = 0 \iff x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 - 6z = -8$$

$$\iff x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 = -8 + 1 + 4 + 9 \iff (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 6$$

Trata-se, portanto, da equação de uma superfície esférica de centro $C = (1, -2, 3)$ e raio $R = \sqrt{6}$.

É importante observar que, ao completarmos os quadrados de uma equação da forma (4.2), o número que constará no segundo membro da igualdade pode ser positivo, negativo ou nulo. Desse modo, tal equação pode representar uma superfície esférica, um ponto ou o conjunto vazio, conforme o número presente no segundo membro, após o procedimento de completar quadrados, seja positivo, nulo ou negativo, respectivamente.

4.3 Relação entre coordenadas cartesianas e geográficas

Veremos, agora, a relação existente entre as coordenadas geográficas e as coordenadas cartesianas. Para o que segue, consideremos um sistema de eixos ortogonais OXYZ com origem no centro do globo terrestre, o eixo OZ passando pelos polos e tal que o Polo Norte (N) fique no eixo positivo, o plano Oxy contendo o Equador, o eixo OX positivo interceptando o meridiano de Greenwich e o eixo OY positivo cortando o meridiano de longitude 90° Leste, conforme a figura abaixo.

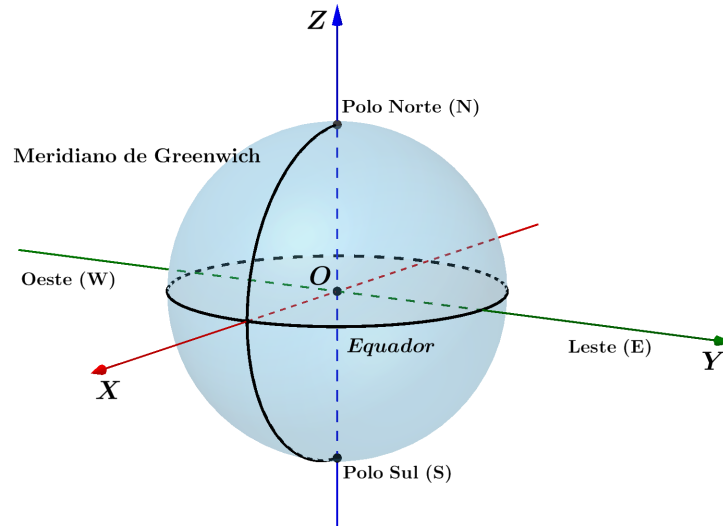


Figura 4.3: Sistema de eixos ortogonais OXYZ com origem no centro do Globo Terrestre. Fonte: *Autor*

Dados um ponto $P = (x, y, z)$ do espaço e os ângulos ϕ e θ indicados na figura a seguir.

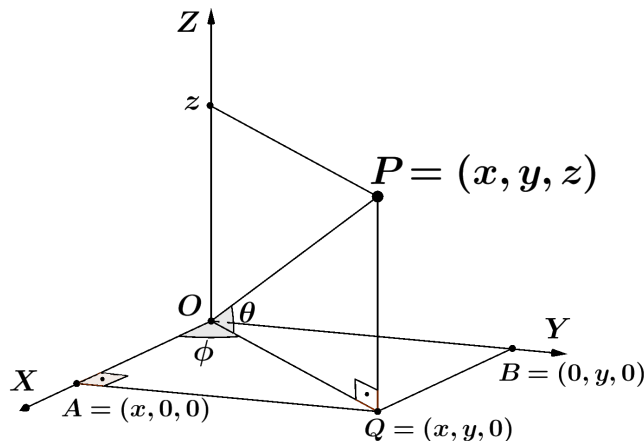


Figura 4.4: Modelo de representação. Fonte: *Autor*

Observamos, inicialmente, que se P for um ponto situado sobre o globo terrestre, então os ângulos ϕ e θ exibidos acima correspondem, respectivamente, às coordenadas geográficas longitude e latitude. Além disso, pela fórmula da distância entre pontos no espaço, temos $\overline{OP} = d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

a diferença entre este valor e a medida do raio da Terra chama-se **elevação** (ou **altitude**) do ponto P .

Pelo triângulo retângulo $\triangle OAQ$, da figura 4.4, temos

$$\overline{OQ} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{\overline{AQ}}{\overline{OQ}} \implies \operatorname{sen}\phi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (4.3)$$

e

$$\operatorname{cos}\phi = \frac{\overline{AO}}{\overline{OQ}} \implies \operatorname{cos}\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (4.4)$$

Note que as expressões (4.3) e (4.4), para $y > 0$, definem conjuntamente um único valor para $\phi \in (0^\circ, 180^\circ)$ e diremos que a longitude de P é ϕ° Leste (E). Da mesma forma, se tivermos $y < 0$, então ϕ assumi um único valor em $(-180^\circ, 0^\circ)$ e falaremos que P tem longitude $(-\phi^\circ)$ Oeste (W). Caso $y = 0$, temos que ϕ será igual a 0° ou a 180° , conforme x seja positivo ou negativo, respectivamente.

Por outro lado, pelo triângulo retângulo $\triangle OQP$, obtemos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} \implies \operatorname{sen}\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (4.5)$$

A expressão acima define um único valor de θ em $(0^\circ, 90^\circ]$ ou em $[-90^\circ, 0^\circ)$, conforme seja $z > 0$ ou $z < 0$, respectivamente. No primeiro caso, diremos que o ponto P tem latitude θ° Norte (N) e, no segundo, a latitude de P será $(-\theta^\circ)$ Sul (S). Se z for nulo, então claramente temos $\theta = 0^\circ$, isto é, P é um ponto situado no plano do Equador.

Ainda pelo triângulo $\triangle OQP$, teremos

$$\operatorname{cos}\theta = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} \implies \operatorname{cos}\theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \implies \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{cos}\theta \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (4.6)$$

Daí, isolando x , y e z , das expressões (4.3), (4.4) e (4.5), no primeiro membro destas igualdades e substituindo (4.6) nas expressões de x e y assim obtidas, concluímos

$$x = \operatorname{cos}\theta \operatorname{cos}\phi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$y = \operatorname{cos}\theta \operatorname{sen}\phi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

e

$$z = \operatorname{sen}\theta \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Portanto, se um ponto P do espaço estiver situado sobre o globo terrestre, então suas coordenadas cartesianas (x, y, z) , pelo sistema de eixos OXYZ explicitado na figura 4.3, e suas coordenadas geográficas (ϕ, θ) encontram-se relacionadas da seguinte forma:

$$P = (x, y, z) = (d \operatorname{cos}\theta \operatorname{cos}\phi, d \operatorname{cos}\theta \operatorname{sen}\phi, d \operatorname{sen}\theta), \quad (4.7)$$

onde ϕ e θ são, respectivamente, a longitude e a latitude de P e d é a distância do centro do globo terrestre ao ponto P , ou seja, $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Exemplo: Determinaremos as coordenadas geográficas e a elevação (altitude) do ponto P cujas coordenadas cartesianas são dadas por $P = (4, 7612647 \cdot 10^6; -4, 2053881 \cdot 10^6, -4, 9232245 \cdot 10^5)$, com medidas em metro, admitindo que o raio do globo terrestre meça 6371 km.

Resolução: Constatamos, inicialmente, que o fato de termos $y < 0$ e $z < 0$, nos leva a inferir que P está situado a Oeste (W) de Greenwich e abaixo da linha do Equador (S).

Pela expressão (4.5), a latitude do ponto P será:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{-4, 9232245 \cdot 10^5}{\sqrt{(4, 7612647 \cdot 10^6)^2 + (-4, 2053881 \cdot 10^6)^2 + (-4, 9232245 \cdot 10^5)^2}}$$

$$\operatorname{sen}\theta = -0, 07726824 \implies \theta = \operatorname{arcsen}(-0, 07726824) = -4, 4315612^\circ \implies \theta = 4^\circ 25' 54'' S.$$

Para determinarmos a longitude de P , podemos utilizar a igualdade (4.3), tendo em vista que o sinal de y (negativo) no garante o posicionamento em relação ao meridiano de Greenwich (que no caso está a Oeste) e a função cosseno é uma bijeção de $[0^\circ, 180^\circ]$ em $[-1, 1]$. Assim sendo, tem-se:

$$\operatorname{cos}\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{4, 7612647 \cdot 10^6}{\sqrt{(4, 7612647 \cdot 10^6)^2 + (-4, 2053881 \cdot 10^6)^2}}$$

$$\operatorname{cos}\phi = 0, 74950412 \implies \phi = \operatorname{arccos}(0, 74950412) = 41, 4525585^\circ \implies \phi = 41^\circ 27' 09'' W.$$

Por fim, sendo R o raio da Terra, a elevação de P é dada pela diferença a seguir.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - R &= \sqrt{(4, 7612647 \cdot 10^6)^2 + (-4, 2053881 \cdot 10^6)^2 + (-4, 9232245 \cdot 10^5)^2} - 6371 \cdot 10^3 \\ &= 601, 99m. \end{aligned}$$

Portanto, o ponto P tem longitude e latitude, respectivamente, iguais a $41^\circ 27' 09'' W$ e $4^\circ 25' 54'' S$, além de está situado num local com aproximadamente 601,99 m de altitude. Consultando o sítio da internet Google Maps (figura 4.5), vimos que o ponto P está situado no município de Pedro II, Piauí, a uma altitude aproximada de 602 m acima do nível do mar.

Utilizando a relação entre coordenadas geográficas e cartesianas, temos um método alternativo para cálculo da distância entre pontos no globo terrestre, partindo das coordenadas geográficas dos mesmos. Por exemplo, retomando o problema (2) da seção 3.3 do capítulo anterior, determinaremos a distância entre a Cidade do México, $19^\circ 25' 42'' N$ e $99^\circ 07' 39'' W$, e a cidade de Paris, $48^\circ 51' 12'' N$ e $2^\circ 20' 55'' E$.

Se A e B representam, respectivamente, a Cidade do México e Paris, vejamos como determinar a medida do menor arco de circunferência máxima ligando A e B , ou seja, determinaremos a medida do ângulo $A\hat{O}B$, sendo O o centro do globo terrestre. Para isto, consideremos um sistema de eixos ortogonais OXYZ, conforme descrito no início desta seção, supondo A e B situados na superfície (com elevações nulas) do globo terrestre, com raio medindo aproximadamente 6371 km.

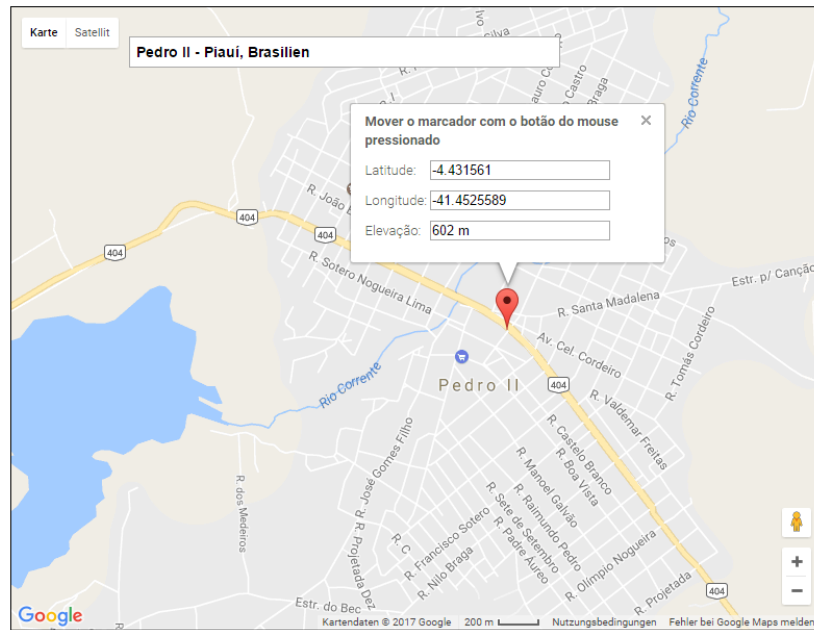


Figura 4.5: Localização do ponto P (balão vermelho). Fonte: *Google Maps*

Dessa forma, utilizando a igualdade (4.7), podemos escrever

$$A = (6371 \cdot \cos 19, 428^\circ \cos(-99, 127^\circ), \quad 6371 \cdot \cos 19, 428^\circ \sin(-99, 127^\circ), \quad \sin 19, 428^\circ)$$

e

$$B = (6371 \cdot \cos 48, 853^\circ \cos 2, 349^\circ, \quad 6371 \cdot \cos 48, 853^\circ \sin 2, 349^\circ, \quad 6371 \cdot \sin 48, 853^\circ),$$

isto é,

$$A = (-953, 04667; \quad -5932, 16739; \quad 2119, 135)$$

e

$$B = (4188, 55196; \quad 171, 81762; \quad 4797, 51521)$$

Recordando que cada ponto P do espaço está associado a um (único) vetor partindo da origem, de modo que suas coordenadas coincidem, temos que as coordenadas dos pontos A e B fornecem as coordenadas dos vetores \vec{OA} e \vec{OB} . Daí, pela relação do produto interno entre os vetores \vec{OA} e \vec{OB} , ou seja, $\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle = \|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{OB}\| \cdot \cos \alpha$, onde \langle, \rangle indica o produto interno usual destes vetores, $\|\dots\|$ a norma ou módulo do vetor e α o ângulo formado por \vec{OA} e \vec{OB} (sendo igual a \widehat{AOB}), obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle &= (-953, 04667) \cdot (4188, 55196) + (-5932, 16739) \cdot (171, 81762) + (2119, 135) \cdot (4797, 51521) \\ &= 5155446, 015 \end{aligned}$$

Como $\|OA\| = \|OB\| = 6371$, pois estamos considerando A e B ao nível do mar (elevações nulas), então teremos:

$$\cos \alpha = \frac{5155446, 015}{6371^2} = 0, 12701 \implies \alpha = \arccos(0, 12701) = 82, 70315^\circ$$

Daí, o comprimento do menor arco de circunferência máxima passando por A e B , indicado por $m(\widehat{AB})$, é dado pela igualdade

$$\frac{m(\widehat{AB})}{2\pi \cdot 6371} = \frac{82,70315^\circ}{360^\circ},$$

ou seja,

$$m(\widehat{AB}) \approx 9196,17 \text{ km}.$$

Portanto, a distância entre as supracitadas cidades será aproximadamente igual a 9196,17 km. A pequena diferença observada nos resultados do problema, pelo método apresentado acima e por aquele aplicado no capítulo 3, deve-se apenas às aproximações usadas para os valores das razões trigonométricas.

Capítulo 5

Sistema de Posicionamento Global - GPS

Neste capítulo apresentaremos uma aplicação tecnológica dos conceitos pertencentes à Geometria Esférica, o Sistema de Posicionamento Global (GPS). O sistema GPS é capaz de determinar a localização de qualquer ponto sobre a superfície da Terra ou próxima a ela, indicando sua longitude, latitude e altitude. Aqui, veremos a base matemática que torna possível o processo de localização realizado por receptores desse sistema.

5.1 O surgimento do GPS

A localização espacial foi um dos primeiros problemas científicos que o homem buscou solucionar. O ser humano sempre teve interesse em saber onde estava. De início, teve a curiosidade de conhecer sua vizinhança imediata, depois os locais de comércio e por fim tal conhecimento praticamente alcançou todo o mundo, com o desenvolvimento da navegação marítima. Para que isso fosse possível, foi exigido certo domínio na arte de navegar, com conhecimento de seu posicionamento, durante todo o trajeto, tanto na terra como no mar ou ar.

Por muito tempo o Sol, os planetas e as estrelas foram usados como pontos de referência na orientação. Porém, além de exigir certa habilidade por parte do navegador, condições climáticas eram cruciais neste tipo de orientação, podendo significar a diferença entre o sucesso ou fracasso de uma expedição. Por tal motivo, a navegação necessitou, deste seu início, do desenvolvimento de instrumentos de apoio à orientação. Surgiram, como instrumentais de auxílio à navegação, a bússola, o astrolábio, o quadrante de Davis e o sextante; todos eles com suas limitações. De qualquer forma, mesmo com os melhores instrumentos, a navegação, até este ponto, só proporcionava valores aproximados da posição, que nem sempre eram apropriados para encontrar um ponto em alto-mar ou durante a noite.

O ponto de virada para o desenvolvimento de um sistema de navegação com precisão se sucedeu com o lançamento do primeiro satélite artificial da Terra, pelos soviéticos, SPUTNIK I em 4 de outubro de 1957. O rastreamento orbital do SPUTNIK feito a partir do conhecimento das coordenadas das estações terrestres de monitoramento fomentou, por um processo inverso, a ideia de se determinar as coordenadas de pontos sobre a superfície terrestre (objetivo básico do GPS) a partir do conhecimento das posições dos satélites no espaço em um determinado instante de tempo.

Como resultado do lançamento de satélites artificiais, no decorrer da corrida espacial empreendida pelos Estados Unidos e pela União Soviética, destaca-se a verificação de anomalias nas órbitas

previstas dos satélites devidas ao achatamento da Terra que, conforme concebido por Newton no século XVIII, era responsável por produzir variações no campo gravitacional terrestre. No que se refere às aplicações da Geodésia, o estudo do campo gravitacional da Terra a partir do movimento de satélites proporcionou avanços significativos.

Os primeiros sistemas de navegação desenvolvimentos a partir de satélites orbitando a Terra, mesmo fundamentados em altas tecnologias, possuíam algum tipo de problema. Entre estes sistemas, temos o predecessor imediato do GPS, o NNSS (Navy Navigational Satellite System). Originalmente sendo idealizado para fins militares e depois utilizado em aplicações geodésicas em todo o mundo, o sistema NNSS era realizado por meio de ondas eletromagnéticas e contava com uma constelação de 8 satélites ativos, a uma altitude média de 1100 km. O NNSS ficou em operação até meados de 1993, tendo sido constatados dois grandes problemas: não havia uma cobertura mundial total e havia um grande lapso de tempo entre passagens sucessivas dos satélites num mesmo ponto da Terra (para se obter uma posição precisa eram necessários de dois a três dias estacionado no mesmo ponto).

As experiências obtidas com os sistemas anteriores culminaram com o atual GPS. Seu projeto teve início em 1973 pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos, com propósito de fornecer a posição exata de aeronaves e navios militares, auxiliar no lançamentos de mísseis e localizar tropas terrestres em movimento. Os projetistas do GPS também o planejaram para uso civil, que inicialmente tinha uma precisão inferior àquela oferecida em operações militares, mas, após o fim da Guerra Fria, o sistema passou a oferecer ao usuário civil uma precisão que apenas os militares tinham tempo antes.

A denominação oficial desse sistema de posicionamento, dada pelo Departamento de Defesa norte americano, é conhecida pela sigla NAVSTAR, cujo significado é NAVigation Satellite with Timing And Ranging. Esse sistema é baseado em radionavegação e é capaz determinar a posição, em relação a um sistema de referência, de um ponto qualquer sobre ou próximo à superfície terrestre.

Atualmente, receptores do GPS, além dos propósitos militares já citados, são amplamente utilizados em diferentes situações, por exemplo, para a navegação marítima, aérea e terrestre, rastrear animais, orientar motoristas, fornecer informações para a previsão meteorologia, guiar navios e/ou helicópteros de socorro até o local do acidente, monitorar abalos sísmicos, obter informações sobre altitude durante a prática de esportes como o alpinismo, entre outras.

5.2 Composição ou segmentos do sistema

A estrutura do Sistema de Posicionamento Global é dividida em três partes principais: *segmento do espaço ou espacial*, *segmento de controle e monitoramento* e *segmento do usuário* (figura 5.1).

i. Segmento do espaço ou espacial: compreende uma formação composta por 27 satélites, dos quais 24 são operacionais e 3 de reserva, que trafegam em torno da Terra em 6 planos orbitais predeterminados, com 4 satélites operacionais por plano, inclinados de 55° em relação ao plano do Equador e a uma altitude aproximada de 20200 km. Tal disposição acarreta num período de 12 horas para cada satélite efetuar uma volta completar ao redor da Terra.

O objetivo dessa disposição dos satélites, com configuração de constelação, é assegurar que qualquer ponto da superfície terrestre ou próxima a ela, durante as 24 horas do dia, esteja sendo visualizado por pelo menos quatro satélites.

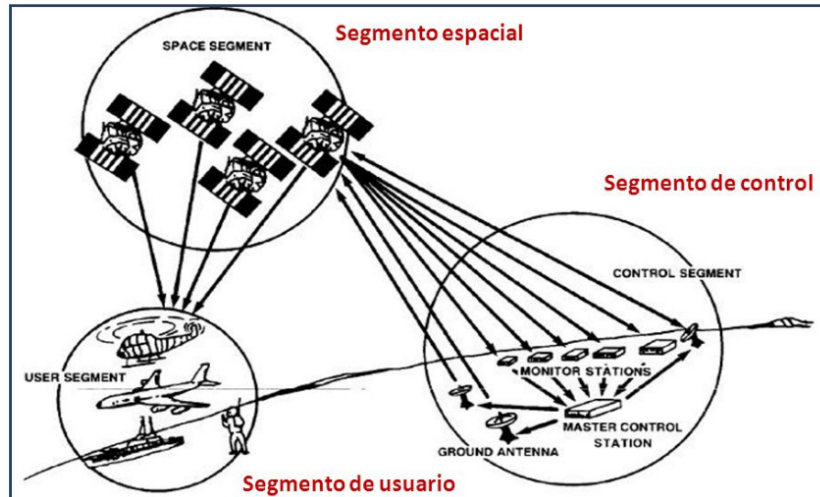


Figura 5.1: Segmentos que compõem o GPS e direção da comunicação em cada segmento. Fonte: *Google Imagens*

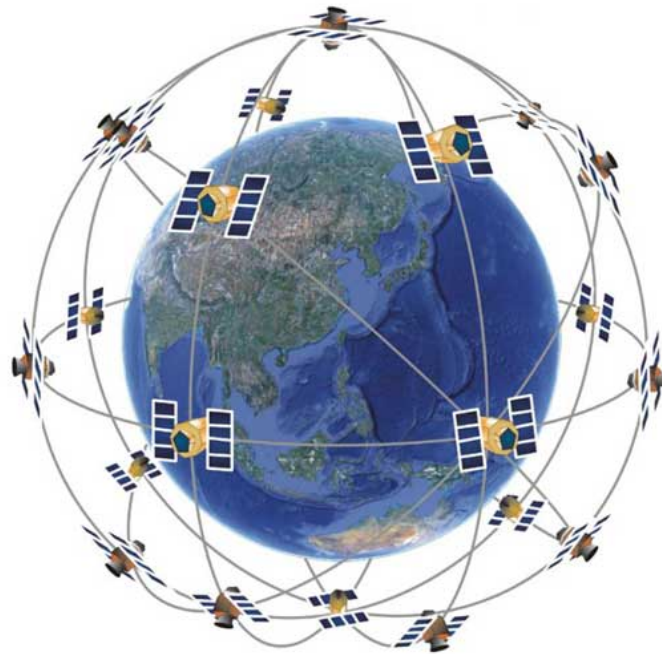


Figura 5.2: Distribuição dos satélites que compõem o GPS. Fonte: *Google Imagens*

É interessante observar que cada satélite que compõem a estrutura do sistema, estando a cerca de 20200 km de altitude, possui um ângulo de visualização sobre a Terra de aproximadamente 28° . De fato, no problema (4) do capítulo 3 vimos que a fração f da superfície terrestre, de raio R , avistada por uma nave a uma altitude h é dada pela fórmula $f = \frac{h}{2(R+h)}$. Além disso, durante a resolução do mesmo problema, tínhamos $f = \frac{1 - \text{sen}\alpha}{2}$, com α sendo metade do ângulo de visualização sobre a Terra. Daí, partindo destas igualdades, teremos:

$$\frac{h}{2(R+h)} = \frac{1 - \text{sen}\alpha}{2} \implies 1 - \text{sen}\alpha = \frac{h}{R+h} \implies \text{sen}\alpha = \frac{R}{R+h} \implies \alpha = \arcsen\left(\frac{R}{R+h}\right)$$

Como o raio do globo terrestre mede aproximadamente 6371 km, então obtemos

$$\alpha = \arcsen\left(\frac{6371}{6371 + 20200}\right) = 0,239773 \implies \alpha \approx 13,9^\circ.$$

Portanto, o ângulo de visualização 2α será aproximadamente igual a 28° .

ii. Segmento de controle e monitoramento: O sistema de controle do GPS é composto por uma estação de controle central (Master Control Station) localizada no Colorado (Estados Unidos), cinco estações monitoras (Hawaii, Colorado, Ascension Island, Diego Garcia e Kwajalein), sendo que as três últimas possuem antenas para transmissão de dados para os satélites, e um conjunto de 7 estações do NIMA (National Imagery and Mapping Agency).

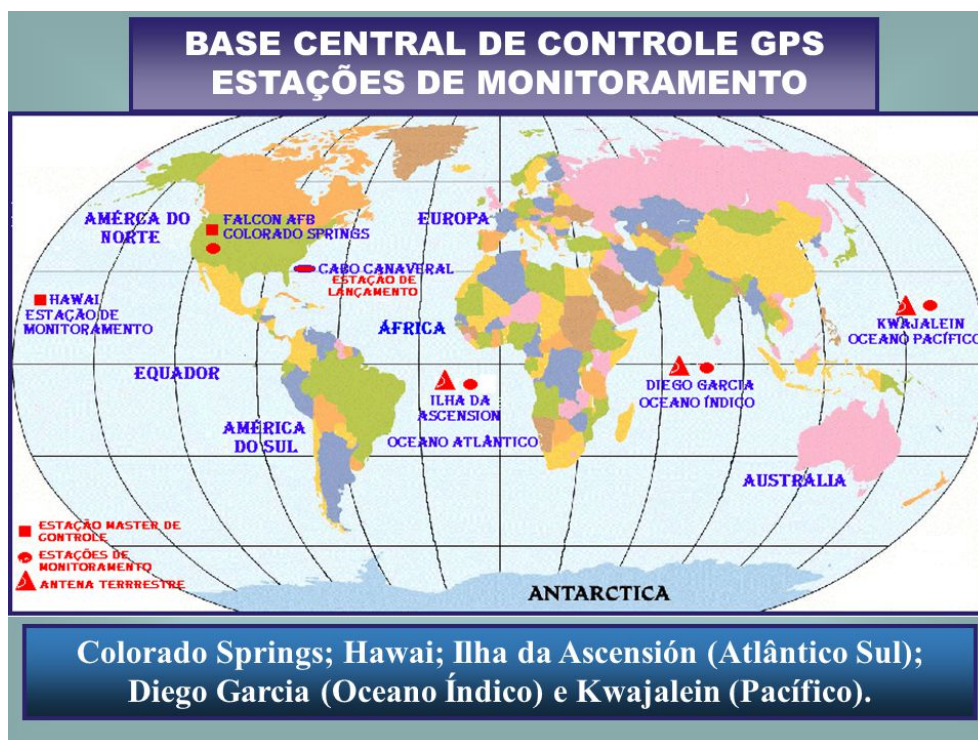


Figura 5.3: Segmento de controle e monitoramento do GPS. Fonte: *Google Imagens*

O segmento de controle tem por finalidade realizar o monitoramento contínuo dos satélites, transmitir os dados, executar a supervisão necessária para o controle de todos os satélites do sistema e calcular suas posições, corrigindo-as quando necessário. Após o processamento de todos os dados, as correções e os sinais de controle são transmitidos de volta para os satélites.

iii. Segmento do usuário: compreende os usuários do sistema, os tipos de receptores e os serviços de informação de apoio disponíveis. O sistema GPS oferece dois tipos de serviços, de acordo com o acesso à informação, aos seus usuários: o *Serviço de Posicionamento Padrão*, no qual o usuário tem acesso aos dados do GPS como são transmitidos, com todo tipo de degradação (SA), sendo caracterizado pela não obtenção de coordenadas precisas em tempo real; e o *Serviço de Posicionamento Preciso*, no qual o usuário tem acesso aos dados do GPS “refinados”, como os dados dos relógios dos satélites não adulterados (sem SA), sendo de uso exclusivo dos militares norte americanos e de usuários autorizados.

5.3 Fundamentação matemática do GPS

O resultado contido na próxima proposição traz o princípio básico do processo de localização de pontos, sobre a superfície terrestre ou próximos a ela, realizado pelo sistema GPS, fornecendo, com isso, a base matemática para o funcionamento do mesmo.

Proposição 15. *Dadas quatro superfícies esféricas distintas, $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ e Σ_4 , com interseção não vazia. Se seus centros são pontos não coplanares então esta interseção consiste de um único ponto.*

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $O_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $O_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $O_3 = (x_3, y_3, z_3)$ e $O_4 = (x_4, y_4, z_4)$ os centros de $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ e Σ_4 , respectivamente, com coordenadas relativas ao sistema de eixos ortogonais OXYZ. Mostremos que a hipótese de tais centros não serem coplanares acarreta em $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3 \cap \Sigma_4 = \{P\}$.

Para isso, retomando a expressão (4.2) do capítulo 4, consideremos a equações gerais destas superfícies esféricas

$$\Sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 + A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (5.1)$$

$$\Sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 + A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (5.2)$$

$$\Sigma_3 : x^2 + y^2 + z^2 + A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \quad (5.3)$$

$$\Sigma_4 : x^2 + y^2 + z^2 + A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \quad (5.4)$$

nas quais $A_i = -2x_i$, $B_i = -2y_i$, $C_i = -2z_i$ e $D_i = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - R_i^2$, com R_i sendo o raio de Σ_i , para $i = 1, 2, 3, 4$.

Procederemos, agora, subtraindo, duas a duas, as equações acima, de modo a eliminar os termos de segundo grau e obtermos equações lineares em x, y e z . Na verdade, quando subtraímos, membro a membro, as equações gerais de duas superfícies esféricas distintas obtemos a equação de um plano. A hipótese de termos $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3 \cap \Sigma_4 \neq \emptyset$ nos garante que os planos, assim formados, de fato contêm a interseção (não vazia) das superfícies esféricas que os geraram.

Desse modo, ao subtraímos, membro a membro, a expressão (5.1) nas outras três, obtemos as equações de três planos tais que a interseção dos mesmos fornecerá $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3 \cap \Sigma_4$. Dito isto, temos que a interseção das superfícies esféricas compreende a(s) solução(ões) do sistema linear, nas incógnitas x, y e z , a seguir.

$$\begin{cases} (A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + (C_1 - C_2)z + (D_1 - D_2) = 0 \\ (A_1 - A_3)x + (B_1 - B_3)y + (C_1 - C_3)z + (D_1 - D_3) = 0 \\ (A_1 - A_4)x + (B_1 - B_4)y + (C_1 - C_4)z + (D_1 - D_4) = 0 \end{cases}$$

Para mostrarmos que tal sistema tem solução única, tomemos o determinante da matriz dos coeficientes das incógnitas do sistema e, sabendo que $A_i = -2x_i$, $B_i = -2y_i$, $C_i = -2z_i$ para $i = 1, 2, 3, 4$, observemos que se tem:

$$\begin{vmatrix} (A_1 - A_2) & (B_1 - B_2) & (C_1 - C_2) \\ (A_1 - A_3) & (B_1 - B_3) & (C_1 - C_3) \\ (A_1 - A_4) & (B_1 - B_4) & (C_1 - C_4) \end{vmatrix} = 2^3 \cdot \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) & (z_2 - z_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) & (z_3 - z_1) \\ (x_4 - x_1) & (y_4 - y_1) & (z_4 - z_1) \end{vmatrix} \quad (*)$$

Como, por hipótese, os pontos O_1, O_2, O_3 e O_4 não são coplanares, segue, dos resultados contidos na Geometria Analítica, que os vetores $\overrightarrow{O_1O_2}, \overrightarrow{O_1O_3}$ e $\overrightarrow{O_1O_4}$ são linearmente independentes. Mas isto

equivale a $\langle \overrightarrow{O_1O_2} \times \overrightarrow{O_1O_3}, \overrightarrow{O_1O_4} \rangle \neq 0$, com (\times) indicando produto vetorial. Ora, sabendo que se tem

$$\langle \overrightarrow{O_1O_2} \times \overrightarrow{O_1O_3}, \overrightarrow{O_1O_4} \rangle = \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) & (z_2 - z_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) & (z_3 - z_1) \\ (x_4 - x_1) & (y_4 - y_1) & (z_4 - z_1) \end{vmatrix},$$

então concluímos que o determinante da direita na igualdade (*) não é nulo e, portanto, esse sistema linear possui solução única, ou seja, a interseção das superfícies esféricas consiste de um único ponto (a existência de qualquer outro ponto na interseção destas superfícies contraria o fato do sistema ter solução única).

Feito tal consideração, agora temos meios para apresentar o método básico utilizado pelo sistema GPS na localização de pontos em nosso planeta.

A determinação da posição do receptor GPS (segmento do usuário) está baseada nas distâncias entre o receptor e os satélites e, ainda, do posicionamento de cada satélite no sistema de eixos ortogonais OXYZ, conforme descrito na seção (4.3) do capítulo 4. Isso significa que se determina a posição na Terra medindo as distâncias para um grupo de satélites localizados no espaço.

Cada satélite que compõem o sistema emite um sinal de rádio com padrão fixado que é recebido pelo receptor, daí a distância do receptor a um satélite é calculada com base no tempo de trânsito do sinal, deste sua emissão até o seu recebimento. Neste processo, os receptores GPS atuam como cronômetros extremamente precisos, uma vez que o sinal move-se muito rapidamente até alcançar a superfície da Terra.

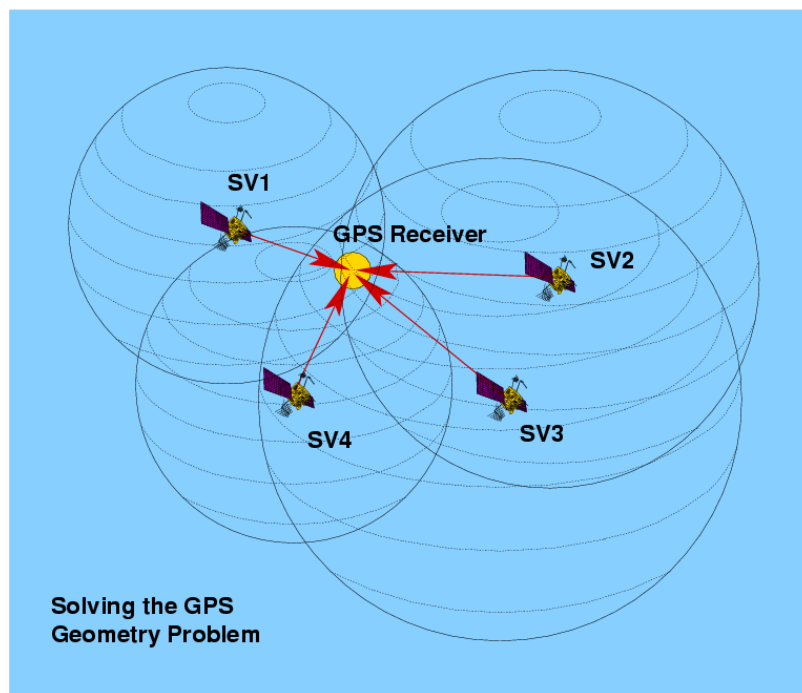


Figura 5.4: Receptor GPS (GPS Receiver) - Processo de localização feito pelo sistema. Fonte: *Google Imagens*

A distância do receptor ao satélite é calculada, surpreendentemente, pela velha fórmula $d = t \cdot v$

das aulas de Física, onde t é o tempo de viagem do sinal de rádio do satélite ao receptor e v é a velocidade do sinal, de aproximadamente $2,99792458 \cdot 10^8 m/s$. Essa informação localiza o receptor numa superfície esférica imaginária centrada no satélite e com raio igual a distância d obtida.

Cada satélite que compõe o sistema emite o que se chama *efeméride*, que fornece suas coordenadas exatas no sistema de eixos OXYZ, conforme descrito no início da seção 4.3 do capítulo anterior. Dispondo das coordenadas do satélite e da distância calculada acima é obtida a equação da superfície esférica imaginária.

A forma de distribuição dos satélites que compõem a estrutura do sistema, assegurando que haja pelo menos quarto deles sobre um ponto qualquer na Terra, possibilita ao receptor GPS, com os sinais emitidos pelos mesmos, determinar a posição do usuário a partir da interseção das quatro superfícies esféricas observadas. O GPS determina a posição do usuário em coordenadas cartesianas e, posteriormente, as convertem para coordenadas geográficas (longitude e latitude), além de fornecer sua altitude.

No exercício que resolveremos a seguir, extraído de [1], discutiremos, sob o ponto de vista matemático, o método usado pelo GPS na localização de pontos sobre a superfície terrestre ou próximos a ela. Nosso objetivo será obter as coordenadas geográficas (longitude e latitude) e a elevação de um receptor GPS que recebeu sinais de quatro satélites, indicados a seguir por suas coordenadas cartesianas. Para isso, com o auxílio de uma calculadora científica, utilizaremos uma precisão de seis casas decimais após a vírgula e consideraremos o raio da superfície terrestre medindo $6,378164 \cdot 10^6$ metros e a velocidade do sinal emitido por cada satélite sendo igual a $2,99792458 \cdot 10^8 m/s$.

Exercício: A tabela a seguir fornece as efemérides, em metros, de quatro satélites do sistema GPS.

	x	y	z
Satélite 1	$1,877191188 \cdot 10^6$	$-1,064608026 \cdot 10^7$	$2,428036099 \cdot 10^7$
Satélite 2	$1,098145713 \cdot 10^7$	$-1,308719098 \cdot 10^7$	$2,036005484 \cdot 10^7$
Satélite 3	$2,459587359 \cdot 10^7$	$-4,336916128 \cdot 10^6$	$9,090267461 \cdot 10^6$
Satélite 4	$3,855818937 \cdot 10^6$	$7,251740720 \cdot 10^6$	$2,527733606 \cdot 10^7$

Um receptor GPS registra os seguintes lapsos de tempo, em segundos, entre a transmissão e a recepção do sinal de cada satélite.

Satélite 1	Satélite 2	Satélite 3	Satélite 4
0,08251731391	0,07718558331	0,06890629029	0,07815826940

Com base nestes dados, obtenha as coordenadas geográficas do receptor (P) e, usando o sítio da internet Google Maps, identifique a posição do mesmo.

Resolução: Conforme foi dito antes, a determinação da posição de pontos pelo sistema GPS é realizada a partir da interseção de quatro superfícies esféricas imaginárias com centros nos satélites e raios, respectivamente, iguais as suas distâncias ao receptor. Para o que segue, denotaremos por Σ_i a superfície esférica de centro no satélite i e raio R_i , para $i = 1, 2, 3, 4$.

Desse modo, aplicando a fórmula $d_i = v \cdot t_i$, com $v = 2,99792458 \cdot 10^8 m/s$ sendo a velocidade do sinal e t_i o tempo que o sinal levou do satélite i ao receptor, teremos:

$$\begin{aligned}
R_1 = d_1 &= 0,08251731391 \cdot 2,99792458 \cdot 10^8 = 24.738.068,36 \implies R_1^2 = 611,972026 \cdot 10^{12} \\
R_2 = d_2 &= 0,07718558331 \cdot 2,99792458 \cdot 10^8 = 23.139.655,74 \implies R_2^2 = 535,443668 \cdot 10^{12} \\
R_3 = d_3 &= 0,06890629029 \cdot 2,99792458 \cdot 10^8 = 20.657.586,14 \implies R_3^2 = 426,735865 \cdot 10^{12} \\
R_4 = d_4 &= 0,07815826940 \cdot 2,99792458 \cdot 10^8 = 23.431.259,70 \implies R_4^2 = 549,023931 \cdot 10^{12}
\end{aligned}$$

Daí, teremos as seguintes equações reduzidas das superfícies esféricas:

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &: (x - 1,87719118 \cdot 10^6)^2 + (y + 1,06460803 \cdot 10^7)^2 + (z - 2,4280361 \cdot 10^7)^2 = 611,972026 \cdot 10^{12} \\
\Sigma_2 &: (x - 1,09814571 \cdot 10^7)^2 + (y + 1,3087191 \cdot 10^7)^2 + (z - 2,03600548 \cdot 10^7)^2 = 535,443668 \cdot 10^{12} \\
\Sigma_3 &: (x - 2,45958736 \cdot 10^7)^2 + (y + 4,33691613 \cdot 10^6)^2 + (z - 9,09026746 \cdot 10^6)^2 = 426,735865 \cdot 10^{12} \\
\Sigma_4 &: (x - 3,85581894 \cdot 10^6)^2 + (y - 7,25174072 \cdot 10^6)^2 + (z - 2,52773361 \cdot 10^7)^2 = 549,023931 \cdot 10^{12}
\end{aligned}$$

Desenvolvendo os quadrados, subtraindo, membro a membro, a expressão assim obtida de Σ_1 por cada uma das três restantes e dividindo as igualdades resultantes por 10^6 , obtemos o sistema de equações lineares a seguir.

$$\begin{cases} 18,208532x - 4,882221y - 7,840612z = 76,528359 \cdot 10^6 \\ 45,437365x + 12,618329y - 30,380187z = 185,236162 \cdot 10^6 \\ 3,957256x + 35,795642y + 1,993950z = 62,948095 \cdot 10^6 \end{cases}$$

Resolvendo tal sistema, por escalonamento, obtemos a solução (única) $x = 5,659555 \cdot 10^6$, $y = 0,978366 \cdot 10^6$ e $z = 2,773664 \cdot 10^6$. Logo, o receptor P possui coordenadas cartesianas dadas por $P = (5,659555 \cdot 10^6m; 0,978366 \cdot 10^6m; 2,773664 \cdot 10^6m)$.

Agora basta converter em coordenadas geográficas as coordenadas cartesianas de P . Para isso, aplicaremos o mesmo procedimento usado na resolução do exemplo contido na seção 4.3, do capítulo anterior. Inicialmente, de $y > 0$ e $z > 0$, concluímos que P está situado no hemisfério Norte e a leste do meridiano de Greenwich.

Se ϕ e θ são, respectivamente, a longitude e a latitude de P , então, de $\text{sen}\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ e $\text{cos}\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, conforme apresentadas no capítulo 4, obtemos:

$$\text{sen}\theta = \frac{2,773664 \cdot 10^6}{\sqrt{(5,659555 \cdot 10^6)^2 + (0,978366 \cdot 10^6)^2 + (2,773664 \cdot 10^6)^2}}$$

$$\text{sen}\theta = 0,43486872 \implies \theta = 25,776941^\circ \approx 25^\circ 46'37'' N$$

e

$$\text{cos}\phi = \frac{5,659555 \cdot 10^6}{\sqrt{(5,659555 \cdot 10^6)^2 + (0,978366 \cdot 10^6)^2}}$$

$$\text{cos}\phi = 0,98538479 \implies \phi = 9,807776^\circ \approx 9^\circ 48'28'' E.$$

A altitude (ou elevação) de P é dada pela diferença $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - R$, onde R é o raio da Terra. Daí, teremos:

$$\sqrt{(5,659555 \cdot 10^6)^2 + (0,978366 \cdot 10^6)^2 + (2,773664 \cdot 10^6)^2} - 6,378164 \cdot 10^6 \approx -0,094.$$

Portanto, as coordenadas geográficas do receptor são $9^{\circ}48'28'' E$ e $25^{\circ}46'37'' N$, estando este situado a uma altitude bem próxima ao nível do mar, porém um pouco inferior a esta. Consultando o sítio Google Maps (figura 5.5), identificamos a localização do receptor: nas proximidades da fronteira da Argélia com a Líbia (África).



Figura 5.5: Localização do receptor P (balão vermelho). Fonte: *Google Maps*

Capítulo 6

Considerações Finais

Para concretização deste trabalho, foi necessário realizar um estudo sobre o contexto histórico e os resultados basilares da Geometria Esférica, através do qual foi possível conhecer as geometrias não euclidianas. Pela importância dos resultados encontrados nestas geometrias, constatamos a existência de não apenas uma geometria, mas sim várias geometrias, e que as mesmas dependem da noção intuitiva que damos aos conceitos primitivos, porém não tratamos, neste material, de apresentar de forma axiomática a geometria em estudo.

Foi constatado que uso das noções de Geometria Esférica não é recente, pois remota de pelo mesmo 2000 anos atrás, motivado por questões agrícolas, astronômicas e de navegação. No presente material, foram destacadas algumas aplicações desta geometria na Navegação e na Agrimensura, porém esta tem muitas outras aplicações em várias áreas, como, por exemplo, na Astronomia, quando aproximamos a Terra ou outro corpo celeste por uma esfera.

Este trabalho teve como objetivo principal contribuir para a inserção, no ensino médio, da geometria que trata da determinação de medidas sobre o globo terrestre, através de uma primeira apresentação dos conceitos e resultados basilares da Geometria Esférica e de Coordenadas Cartesianas no espaço, para professores e alunos desta modalidade de ensino, por meio de material com linguagem acessível. Buscamos, sempre que possível, apresentar e demonstrar os resultados contidos na Geometria Esférica a partir de resultados da Geometria Euclidiana, tendo em vista que o diálogo entre estas geometrias pode proporcionar clareza e entendimento efetivo.

A abordagem da Geometria Esférica, na educação básica, significa propiciar aos estudantes o acesso a outras ideias, ampliando seus conhecimentos e desenvolvendo o pensamento geométrico. Segundo palavras do matemático Henri Poincaré, que afirma “nenhuma geometria é mais correta do que outra, apenas é mais conveniente”, temos que uma geometria não é “mais correta” do que as demais, mas se aplica aquela que melhor descreve um determinado contexto. Nesta perspectiva, o professor de Matemática da educação básica deve promover a discussão com os seus alunos sobre Geometria Esférica em termos, por exemplo, desta fornecer um modelo de descrição do planeta em que vivemos (sendo a geometria que melhor se aplica para tal intento).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para a Educação Básica preconizam que haja conexões entre os temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas curriculares. Neste âmbito, conforme podemos perceber neste material, trabalhos desenvolvidos com a Geometria Esférica no ensino médio podem estabelecer, de forma prática, conexões

entre a Matemática, a Geografia, a Astronomia e a Física, revelando-se como prazerosas e interessantes, contribuindo para uma formação discente pautada na reflexão e na crítica da realidade que nos cerca.

A Geometria Esférica compõe um segmento da Matemática belo do ponto de vista histórico e educacional, como pode ser observado, e que os professores em formação devem possuí uma preparação acadêmica sobre a mesma. Porém, isto não ocorre na realidade. Segundo uma pesquisa que consta em [6], realizada em 166 instituições de Ensino Superior, a fim de verificar o estado da arte do ensino das Geometrias Não Euclidianas, os resultados revelam que apenas 12 apresentavam na matriz curricular alguma disciplina cujo título evidencia o estudo de Geometrias Não Euclidianas, em particular de Geometria Esférica. Esta pesquisa aponta para o triste dado de que apenas 7% das 166 instituições formam professores que sabem da existência de outras geometrias além da euclidiana.

Os resultados constatados em tal pesquisa apontam para a necessidade de uma abordagem efetiva das Geometrias Não Euclidianas, em particular da Geometria Esférica, nos cursos de Licenciatura, para que os estudos dos conceitos básicos desta geometria nas salas de aulas de ensino médio seja uma realidade alcançável, tendo em vista as contribuições desta para a formação crítica de nossos alunos.

Referências

- [1] ALVES, Sérgio. *A Geometria do Globo Terrestre*. In: Revista do Programa de Iniciação Científica OBMEP, Rio de Janeiro: IMPA 2009.
- [2] AYRES, Frank. *Trigonometria plana e esférica: Coleção Schaum*. Rio de Janeiro: Editora Ao Livro Técnico, 1958.
- [3] BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Hiperbólica*. 1. Ed. - Rio de Janeiro: IMPA, 1995.
- [4] BARRETO, Mylane dos Santos; TAVARES, Salvador. *Introdução às geometrias não euclidianas na educação básica*. Technical report, IF Fluminense, Rio de Janeiro, 2010.
- [5] COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. *O que é a Matemática?*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.
- [6] COUTINHO, Lázaro. *Convite às geometria não-euclidianas*. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2001.
- [7] COUTINHO, Lázaro. *Trigonometria Esférica: A Matemática de um Espaço Curvo*. 1. Ed.-Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2015.
- [8] CRUZ, Donizete Gonçalves. *Algumas diferenças entre a Geometria Euclidiana e as Geometrias Não Euclidianas - Hiperbólica e Elíptica a serem abordadas nas séries do Ensino Médio*. Disponível em <www.unicentro.br/editora/anais/xeprem/CC/29.pdf>. Acesso em fevereiro de 2017.
- [9] DELGADO, Jorge. *Geometria Analítica/Jorge Delgado, Katia Frensel, Lhaylla Crissaff*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [10] DUELI, Leandro de Jesus. *Geometria esférica: proposta de sequências didáticas interdisciplinares*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora-MG, 2013.
- [11] EUCLIDES, *Os Elementos*; tradução e introdução de Irineu Bicudo. 1. Ed. - São Paulo: UNESP, 2009.
- [12] JANOS, Michel. *Matemática e Natureza*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.
- [13] MUNIZ NETO, Antônio Caminha. *Geometria*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[14] SEBEM, Elódio. *Curso de Cartografia Básica, GPS e ArcGIS/ Elódio Sebem, Michele Monguilhott*. Disponível em <www.uff.br/cartografiabasica/cartografia%20texto%20bom.pdf>. Acesso em março de 2017.

[15] SILVA, Karolina Barone Ribeiro da. *Noções de geometrias não euclidianas: hiperbólica, da superfície esférica e dos fractais*. Curitiba: CRV, 2011.