



Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática-PROFMAT



Algumas constantes reluzentes da Matemática: O número de
Ouro, a Constante de Euler-Mascheronni, e a dimensão de
cobertura de Apolônio

Hilquias Santos de Oliveira

Teresina - 2017

Hilquias Santos de Oliveira

Dissertação de Mestrado:

Algumas constantes reluzentes da Matemática: O número de Ouro, a Constante de Euler-Mascheronni, e a dimensão de cobertura de Apolônio

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Newton Luis Santos

Teresina - 2017



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada: **Algumas constantes reluzentes da Matemática: o número de ouro, a constante de Euler-Mascheroni e a dimensão de cobertura de Apolônio**, defendida por **Hilquias Santos de Oliveira** em 04/08/2017 e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Presidente da Banca Examinadora

Examinador

Examinador Externo

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

O49a Oliveira, Hilquias Santos de.

Algumas constantes reluzentes da matemática: o número de ouro, a constante de Euler-Mascheronni, e a dimensão de cobertura de Apolônio / Hilquias Santos de Oliveira. – Teresina, 2017.

60f. il.: color

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2017.

Orientador: Prof. Dr. Newton Luís Santos.

1.Geometria Euclidiana. 2.Constantes. 3. Matemática – Estudo e Ensino. I. Título

CDD 516.2

Ao Saudoso Professor Benício(In memoriam), cuja vida e devoção ao ensino ainda reluzem nos corredores da UFPI.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, Criador e sustentador do universo; que por misericórdia e graça me proporcionou a oportunidade de entrar e concluir o mestrado mesmo com todos os problemas enfrentados. Ainda que todo o céu fosse papel, todas as árvores fossem canetas, e todo o oceano fosse tinta, ainda assim não conseguiria expressar minha gratidão a Ti. Soli Deo Gloria.

Agradeço a minha querida esposa Jeisy e ao meu filho Samuel. Passar trinta horas semanais durante dois anos dentro de um ônibus só foi possível graças as suas orações e incentivo. A viagem de volta era bem mais rápida porque sabia que você estava me esperando. Te amo. Continuar a viajar depois que o pequeno Samuel começou a andar e me pedia para levar ele no colo toda vez que eu tinha que ir para teresina partia meu coração. Mas você me motivava a dar o melhor de mim, filho. Papai te ama.

Agradeço aos meus pais Leomar e Alvina, pelo apoio em todos os momentos difíceis, por sempre me motivarem a estudar, por me ensinar em qualquer que fosse o caminho que eu andasse, me ajudando em tudo. Esta conquista é de vocês, e espero ainda dar muito mais orgulho a vocês. Amo vocês dois.

Agradeço aos colegas de mestrado, em especial ao Jeovan que dividia quartos de hotel comigo. Sua amizade e apoio foram o combustível para eu continuar. Agradeço ainda em especial ao Nerivaldo e ao Adécio, que completavam o quarteto fantástico, seja no estudo, ou nas resenhas, e ao Marquiel pelos bons momentos de conversa e estudo.

Agradeço aos professores, em especial ao professor Dr. Newton que me orientou não só no trabalho, mas também na vida. Seu exemplo como professor e como pessoa impressiona a todos que lhe conhecem. Obrigado por tudo.

A todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

“Deus criou os números naturais, tudo
além é trabalho do homem”.

Leopold Kronecker (1823-1891).

Resumo

Neste trabalho fazemos uma exposição profunda a respeito de algumas constantes, cujos elementos geradores fazem parte do contexto do ensino médio, mas que apresentam aplicações que vão além da matemática básica. Para tal, iremos definir os elementos chave, apresentar como surgem estas constantes e por fim elencar algumas de suas aplicações. Esperamos com isto que o leitor possa se sentir motivado à aprofundar os estudos sobre estas constantes e assim avançar no campo da matemática.

Palavras-chave: Constantes, Matemática, Ensino, Euler-Mascheronni, Apolônio, Número de ouro

Abstract

This work aims to give an deep exposition about some constants, whose generating elements are part of the context of high school, but which present applications that go beyond basic mathematics. For this, we will define the key elements, we will present how these constants appear and finally we will list some of their applications. We hope that the reader can feel motivated to deepen the studies on these constants and thus to advance in the field of mathematics.

Keywords: Constants, Mathematics, Teaching, Euler-Mascheronni, Apollonius, Golden number

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	v
Abstract	vi
1 Número de Ouro	4
1.1 Definição	4
1.2 Aplicações	6
1.2.1 O experimento de Godkewitsch	6
1.2.2 Sequência de Fibonacci	7
1.2.3 Triângulo de Pascal	9
2 Constante de Euler-Mascheronni	14
2.1 Noções preliminares	14
2.1.1 Logaritmo Natural	14
2.1.2 Série Harmônica	17
2.2 Definição	19
2.2.1 Cálculo dos dígitos de gama: Porque uma aproximação é tão difícil?	19
2.3 Série Harmônica Alternada	22
3 Dimensão da Cobertura de Apolônio	26
3.1 Um Problema Geométrico.	26
3.2 A cobertura de Apolônio	31
3.3 Dimensão Fractal	33
3.4 Dimensão da Cobertura de Apolônio	38

4	Trabalhando constantes em sala de aula - Um exemplo com o ϕ	40
4.1	Primeiro momento: Experimento de Godkewitsch e aplicações do número de Ouro	40
4.2	Segundo Momento: Construção do Compasso Áureo	43
5	Conclusão	46

Introdução

O objeto de estudo deste trabalho é um dos elementos mais intrigantes em qualquer ramo da matemática, embora sejam objetos auxiliares em contas. As constantes matemáticas impressionam a todos, por vários fatores, três dos quais podemos destacar aqui.

Em primeiro lugar, muitas constantes transitam entre os campos do conhecimento matemático de maneira independente, surgindo de modo misterioso onde menos se espera. Temos como exemplo o π . Esta constante é descoberta inicialmente na geometria, mas aparece de forma independente na análise e em teoria das probabilidades. Por exemplo, tome o experimento da agulha de Buffon: Suponha que você tenha uma folha de papel com pauta no chão, com todas as linhas retas paralelas espaçadas por uma distância fixa. Uma agulha de comprimento igual precisamente ao espaçamento entre as linhas é jogada completamente aleatoriamente no papel. A probabilidade de a agulha cruzar umas das linhas é $\frac{2}{\pi}$. Na análise, quando vamos calcular $\int e^{x^2} dx$, novamente o π aparece. As constantes matemáticas permeiam pelas áreas de estudo, por isto a importância do seu estudo.

Em segundo lugar, pelo que elas muitas vezes representaram na história da matemática. Descobrir medidas exatas e invariantes aperfeiçoou a construção dos números, como por exemplo o caso de $\sqrt{2}$ - onde uma medida não podia ter todos os seus dígitos computados, o que inicialmente dava a idéia de medida infinita, mas que tinha comprimento exato, neste caso o equivalente à diagonal de um quadrado de lado 1 - e descobrir que a relação entre os vértices, arestas e faces de qualquer poliedro convexo era constante/invariante, no caso, temos que $V + F - A = 2$, permitiu uma definição mais precisa de poliedro, cerrando problemas a respeito das demonstrações existentes, utilizando o conceito de homeomorfismo.

Em terceiro lugar, a análise de constantes não segue um padrão. A prova da irracionalidade de π é totalmente diferente da irracionalidade de e , sem contar no fato que

existem várias constantes cuja prova de irracionalidade, transcendência ainda não foram descobertas, justamente pelo fato de que os métodos não são encontrados numa forma. Com certeza isto motiva os pesquisadores a abrirem novos campos de pesquisa, novas definições de um mesmo número para que, talvez, possam conseguir a prova de sua irracionalidade. Por exemplo, em [13], Temos dezenas de definições diferentes da constante de Euler-Mascheronni (γ). A análise numérica têm tomado lugar de destaque na preocupação dos que trabalham em métodos de rápida convergência destas constantes, para que se tenha em poucas iterações, uma maior quantidade de dígitos precisos.

Em virtude dos fatos acima citados, é objetivo deste trabalho fazer uma exposição profunda a respeito de algumas constantes, a saber o número de Ouro, a constante de Euler-Mascheronni, e a dimensão da cobertura de Apolônio - cujos elementos geradores fazem parte do contexto do ensino médio, mas que apresentam aplicações que vão além da matemática básica.

O trabalho está organizado em quatro capítulos. No capítulo 1, apresentamos o número de ouro, também conhecido com razão áurea, dando a sua definição bem como aplicações, entre as quais destacamos o experimento de Godkewitsch, a sequência de Fibonacci, e a disposição das sementes de um girassol.

No capítulo 2, dissertamos a respeito da constante Euler-Mascheronni. Para tanto, definimos logaritmo natural utilizando o conceito de área contida na faixa da hipérbole, e definimos a série harmônica. Como aplicação nós mostramos como γ é usado no cálculo da série harmônica alternada, e também mostramos a convergência lenta de γ dados certos parâmetros.

No capítulo 3, falamos a respeito da dimensão da cobertura de Apolônio. Inicialmente definimos o trabalho e problema de Apolônio, que consistia em encontrar um círculo tangente a três outros objetos dados, sejam pontos, retas, ou círculos; e, seguida falamos sobre o fractal relacionado ao problema de apolônio, que é chamado aqui de cobertura de Apolônio, onde definimos a medida de Hausdorff e mostramos os trabalhos que têm sido feitos para calcular esta constante, em especial, as pesquisas de David Boyd, BOYD(1973) e BOYD(1982).

Por fim, no capítulo 4, nós aplicamos um trabalho com alunos do primeiro ano do ensino médio do IFPI, campus Corrente a respeito de uma destas constantes, a saber, o número de ouro, onde nós reproduzimos o experimento de Godkewitsch, definimos com

os alunos o número de ouro, e construimos o compasso áureo.

Queremos através deste trabalho mostrar que constantes podem ser instrumentos motivadores no desenvolvimento do conhecimento matemático, fazendo com que o leitor possa se sentir motivado à aprofundar os estudos sobre estas constantes e assim avançar no campo da matemática.

Capítulo 1

Número de Ouro

1.1 Definição

Um dos mais intrigantes números que podemos encontrar, por sua simples definição, e complexidade em algumas aplicações, o número de ouro (como será chamado aqui), razão áurea, ou ainda proporção áurea é conhecido desde 300 a.C., onde podemos encontrar nos elementos de Euclides a primeira definição formal do número de ouro [8]. Ele define que "um segmento de reta se diz dividido em média e extrema razão, se a razão entre o menor e o maior dos segmentos é igual à razão entre o maior e o segmento todo". O valor desta razão recebeu o nome de ϕ (phi) em homenagem a Phidias, que construiu o Parthenon de Atenas, usando meticulosamente esta proporção no mesmo.



Figura 1.1: Proporção do número de ouro: $\phi = \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$

Definição 1.1. Dados dois segmentos, AB e CD, define-se razão entre AB e CD, $\frac{AB}{CD}$, ao quociente entre as medidas dos lados AB e CD.

Vamos calcular agora o valor da razão correspondente número de ouro. Tome $AC = a$ e $CB = b$. temos que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}, \quad (1.1)$$

logo

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \quad (1.2)$$

assim

$$a^2 - ab - b^2 = 0 \quad (1.3)$$

completando quadrados

$$\left(a^2 - 2 \cdot \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{4}\right) - \frac{b^2}{4} - b^2 = 0 \quad (1.4)$$

donde resulta que

$$\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{5b^2}{4} \quad (1.5)$$

donde temos que (uma vez que a é uma medida positiva):

$$a = b \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \quad (1.6)$$

e por fim a razão $\frac{a}{b}$ vale

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (1.7)$$

O valor obtido em 1.7 corresponde aproximadamente à 1,618033989. Veremos a seguir exemplos de alguns elementos da geometria plana que possuem grande envolvimento com o ϕ .

Exemplo 1.1. As diagonais de um pentágono regular se cortam sobre a razão de ϕ .

Inicialmente, observemos os triângulos $\triangle BCD$ e $\triangle ADE$. É fácil ver que eles são congruentes pelo caso LLL, e que são isósceles, onde o ângulo do vértice equivale ao ângulo interno do pentágono, 108° . Isto implica que os ângulos da base valem 36° . Daí,

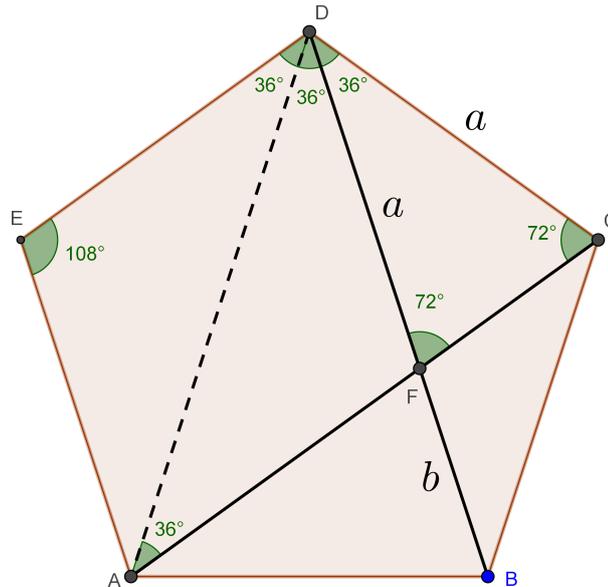


Figura 1.2: $\frac{AC}{AF} = \frac{AF}{FC} = \frac{BD}{FD} = \frac{DF}{FB} = \phi$

como $\widehat{EDC} = 108^\circ$, temos que $\widehat{ADB} = \widehat{DAC} = 36^\circ$, e pelo teorema do ângulo externo $\widehat{DFC} = \widehat{FCD} = 72^\circ$. Segue que os triângulos $\triangle ADC$ e $\triangle DFC$ são semelhantes. Tomando o lado do pentágono como a e a medida BF como b , temos que

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b},$$

cujas equação, já vista em (1.2) tem como solução o número ϕ .

1.2 Aplicações

1.2.1 O experimento de Godkewitsch

O ϕ está intimamente relacionado com a noção de beleza visual. Um exemplo disto é o retângulo áureo, cuja razão entre os lados não paralelos vale o número de ouro, e cujo molde já serviu de inspiração para construção de várias obras civis, como o Parthenon, e de arte, como a Mona Lisa. Para maiores informações o leitor pode procurar [15].

O aspecto visual do retângulo áureo realmente nos chama a atenção. Godkewitsch [12] realizou um experimento que foi publicado em 1974, a respeito. Numa lista de 48 retângulos, ele inseriu 27 retângulos de ouro, e pedia para as pessoas escolherem aleatoriamente retângulos. Para a sua felicidade, os retângulos escolhidos eram os que estavam na proporção do número de ouro.

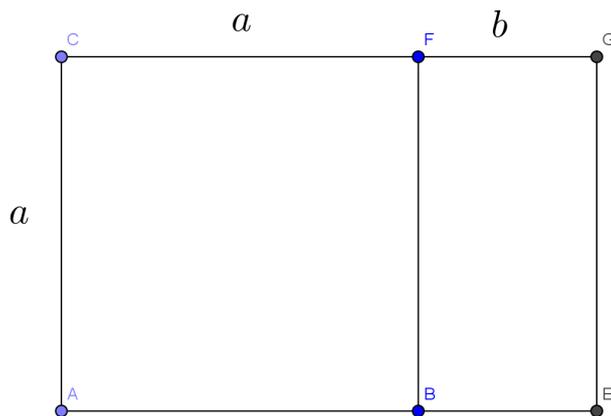


Figura 1.3: Retângulo áureo

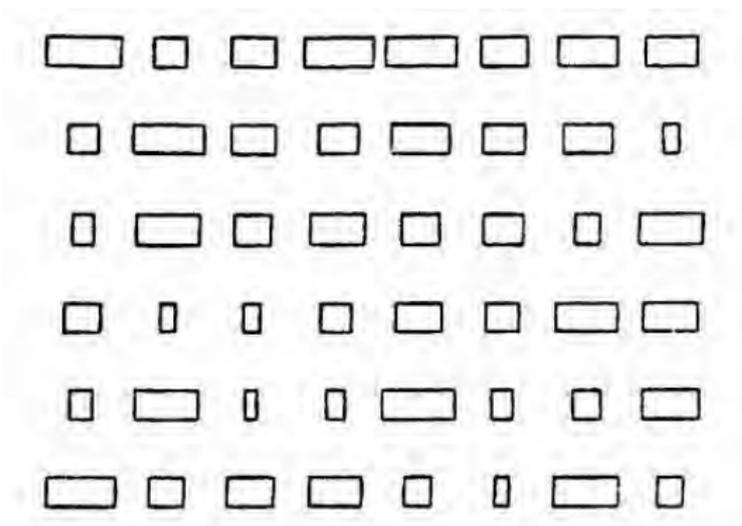


Figura 1.4: Experimento de Godkewitsch

1.2.2 Sequência de Fibonacci

Um outro lugar onde o número de ouro aparece de modo misterioso é na sequência de Fibonacci. Em [14] define-se a sequência de Fibonacci como uma série de recorrência onde

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases} \quad (1.8)$$

Vamos inicialmente encontrar a fórmula do termo geral (Para maiores informações sobre como resolver uma equação de recorrência, consulte [7]). Por (1.8), temos que a equação auxiliar é dada por

$$q^2 = q + 1, \quad (1.9)$$

que equivale a (1.3) fazendo $\mathbf{a} = \mathbf{q}$ e $\mathbf{b} = 1$. Logo temos como solução

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } \frac{1 - \sqrt{5}}{2}. \quad (1.10)$$

temos então que

$$\mathbf{a}_n = \frac{c_1 \cdot (1 + \sqrt{5})^n + c_2 \cdot (1 - \sqrt{5})^n}{2^n}, \quad (1.11)$$

e resolvendo o problema o valor inicial ainda em (1.8), temos que

$$\mathbf{a}_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad (1.12)$$

Pode-se mostrar que a razão entre um termo e seu anterior tende ao número de ouro quando os termos tendem ao infinito. Para tanto, seja

$$\mathbf{t}_n = \frac{\mathbf{a}_n}{\mathbf{a}_{n-1}} \quad (1.13)$$

Recorde que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{t}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{t}_{n-1}$. Daí, seja \mathbf{h} esse limite.

$$\mathbf{t}_n = \frac{\mathbf{a}_n}{\mathbf{a}_{n-1}} = \frac{\mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}_{n-2}}{\mathbf{a}_{n-1}} \Rightarrow \mathbf{t}_n = 1 + \frac{1}{\mathbf{t}_{n-1}} \quad (1.14)$$

Aplicando o limite em ambos os lados, temos

$$\mathbf{h} = 1 + \frac{1}{\mathbf{h}} \Rightarrow \mathbf{h}^2 = 1 + \mathbf{h} \quad (1.15)$$

que nos remonta à equação(1.3) e cuja solução vale apenas o valor positivo, pois todos os termos da série são positivos.

Este fato têm sido bastante utilizado em brincadeiras geométricas que muitas vezes nos enganam, pois o aspecto visual das figuras é sempre parecido, em função de valores estarem sobre a razão do número de ouro, mas com alterações nos tamanhos. Um exemplo disto pode ser visto no paradoxo do triângulo abaixo. O triângulo maior formado por todos os retalhos de polígonos parece retângulo, mas na verdade não é. O fato dos triângulos menores terem os catetos com medidas consecutivas da sequência de Fibonacci, faz com que pensemos que os triângulos são semelhantes, pois a razão entre os lados, que equivale a tangente, tende ao número de ouro. Logo, os ângulos "tendem" a serem iguais, nos dando a sensação visual de hipotenusa.

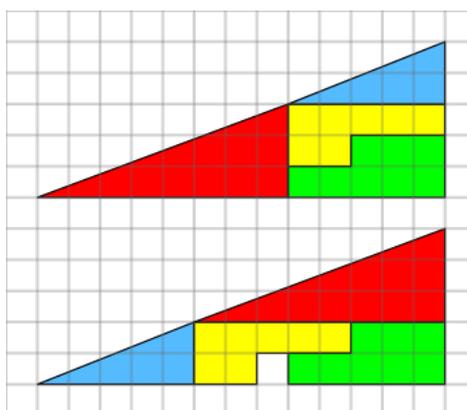


Figura 1.5: Paradoxo do triângulo

1.2.3 Triângulo de Pascal

Uma outra aplicação interessante do número de ouro através da sequência de Fibonacci se encontra no triângulo de Pascal. Resumidamente, podemos definir o triângulo de Pascal como uma lista de todas as combinações. Observe:

$$\begin{array}{cccccc}
C_{0,0} & & & & & \\
C_{1,0} & C_{1,1} & & & & \\
C_{2,0} & C_{2,1} & C_{2,2} & & & \\
C_{3,0} & C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} & & \\
C_{4,0} & C_{4,1} & C_{4,2} & C_{4,3} & C_{4,4} & \\
C_{5,0} & C_{5,1} & C_{5,2} & C_{5,3} & C_{5,4} & C_{5,5}
\end{array} \tag{1.16}$$

Seja agora, a sequência definida por duas subsequências tais que

$$\left\{ \begin{array}{l}
u_{2n} = \sum_{0 \leq p \leq n} C_{2n-p,p} \\
u_{2n-1} = \sum_{0 \leq p \leq n-1} C_{2n-(p+1),p}
\end{array} \right. \tag{1.17}$$

Para entendermos melhor a sequência, considere alguns termos.

$$\begin{array}{rcl}
u_0 = & C_{0,0} = & 1 \\
u_1 = & C_{1,0} = & 1 \\
u_2 = & C_{1,1} + C_{2,0} = & 2 \\
u_3 = & C_{2,1} + C_{3,0} = & 3 \\
u_4 = & C_{2,2} + C_{3,1} + C_{4,0} = & 5 \\
& \dots &
\end{array}$$

perceba que até agora, os termos desta sequência coincidem com os termos da sequência de Fibonacci. De fato, pode-se provar que esta sequência é uma sequência de Fibonacci.

Proposição 1.1. Os termos da sequência u_n satisfazem a relação (1.8)

Usaremos indução para provar que $u_n + u_{n+1} = u_{n+2}$. observe inicialmente que para $n=1$ temos que

$$u_0 + u_1 = 1 + 1 = 2 = u_2. \tag{1.18}$$

Suponha agora, que a proposição seja válida para $n = k$, ou seja, $u_k + u_{k+1} = u_{k+2}$, e

vejamos se ela é válida para $n = k + 1$. temos dois casos a analisar, quando k é ímpar, e quando k é par. Se k é ímpar, digamos $2p - 1$, temos que

$$\begin{aligned} u_k + u_{k+1} &= u_{2p-1} + u_{2p} \\ &= C_{2p-1,0} + C_{2p-2,1} + C_{2p-3,2} + \cdots + C_{p+1,p-2} + C_{p,p-1} \\ &+ C_{2p,0} + C_{2p-1,1} + C_{2p-2,2} + \cdots + C_{p+1,p-1} + C_{p,p} \end{aligned}$$

Aplicando as relações de Stiffel temos que

$$u_{2p-1} + u_{2p} = C_{2p,0} + C_{2p-2,1} + C_{2p-3,2} + \cdots + C_{p+2,p-1} + C_{p+1,p} \quad (1.19)$$

, e como $C_{n,0} = 1$ para qualquer n , temos que

$$u_{2p-1} + u_{2p} = C_{2p-1,0} + C_{2p-2,1} + C_{2p-3,2} + \cdots + C_{p+2,p-1} + C_{p+1,p} = u_{2p+1} = u_{k+2} \quad (1.20)$$

e portanto a proposição é válida para qualquer k ímpar. Agora, se k é par, digamos $2p$, temos então que

$$\begin{aligned} u_k + u_{k+1} &= u_{2p} + u_{2p+1} \\ &= C_{2p,0} + C_{2p-1,1} + C_{2p-2,2} + \cdots + C_{p+1,p-1} + C_{p,p} \\ &+ C_{2p+1,0} + C_{2p,1} + C_{2p-1,2} + \cdots + C_{p+2,p-1} + C_{p+1,p} \end{aligned}$$

Novamente aplicando as relações de Stiffel, segue que

$$u_{2p} + u_{2p+1} = C_{2p+1,0} + C_{2p+1,1} + C_{2p,2} + C_{2p-1,3} + \cdots + C_{p+2,p} + C_{p,p} \quad (1.21)$$

e como $C_{n,n} = 1$ para qualquer n , podemos fazer as substituições de $C_{2p+1,0}$ e $C_{p,p}$ por $C_{2p+2,0}$ e $C_{p+1,p+1}$, donde obtemos

$$u_{2p} + u_{2p+1} = C_{2p+2,0} + C_{2p+1,1} + C_{2p,2} + C_{2p-1,3} + \cdots + C_{p+2,p} + C_{p+1,p+1} = u_{2p+2} = u_{k+2}, \quad (1.22)$$

onde novamente a proposição se verifica válida, e concluimos que ela vale para todo n natural \square .

Um outro fato interessante sobre o número de ouro está quando aplicamos esta razão em termos de ângulo. Se considerarmos segmentos adjacentes na razão do número de ouro, e construirmos com estes uma circunferência, o menor ângulo determinado valerá, aproximadamente $137,5^\circ$. De fato, seja x a medida do maior segmento. O menor segmento valerá então $2\pi - x$. Temos que

$$x = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) (2\pi - x) \quad (1.23)$$

donde obtemos

$$x = 2\pi \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \right) = 222,49223594996215^\circ \quad (1.24)$$

como estamos interessados no menor ângulo, tomamos o replementar de $222,49223594996215$ que vale aproximadamente $137,5^\circ$. Este ângulo, conhecido como ângulo de Fibonacci [20], aparece num ramo da morfologia vegetal chamado filotaxia, que estuda o comportamento anatômico das plantas. Existe uma espiral que aparece em padrão de folhas, maximizando a área de contato com o sol, e na disposição das sementes, maximizando a alocação das mesmas, conhecida como espiral do girassol. [20]

Definição 1.2. A "espiral do girassol" é dada pela função $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^2$ escrita em coordenadas polares $(r(n); \theta(n))$, onde

$$S(n) = \left(\sqrt{n}; \frac{2\pi n}{\phi} \right) \quad (1.25)$$

Inserindo a função no programa Geogebra, podemos plotar alguns pontos. A figura abaixo, nos dá os 200 primeiros pontos da função.

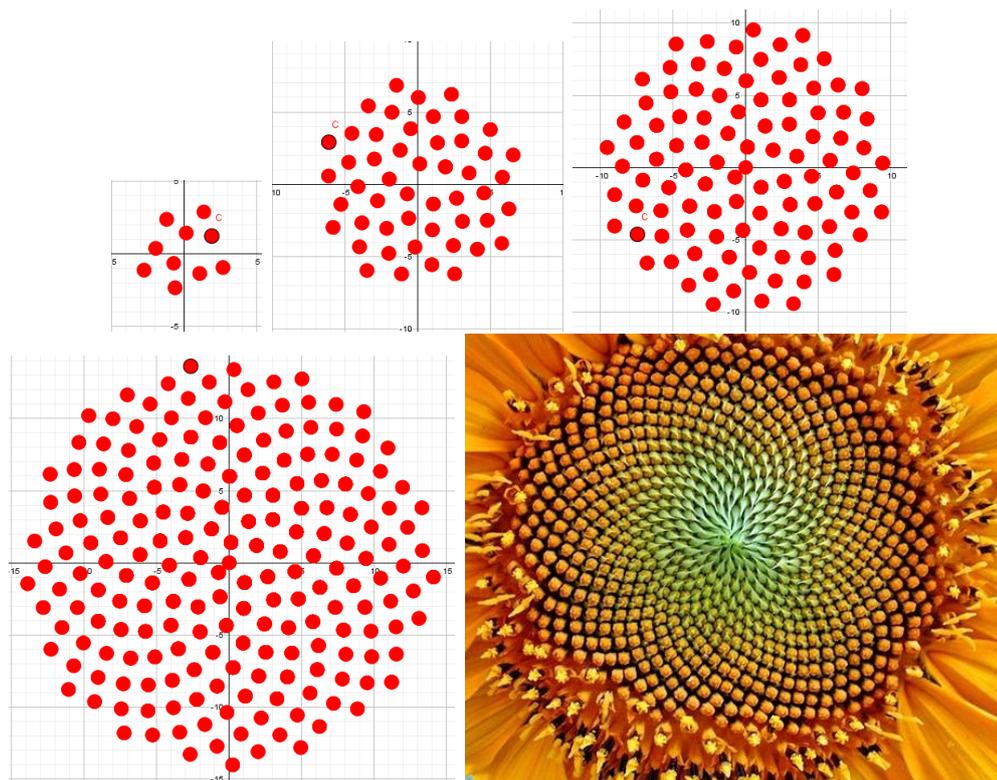


Figura 1.6: 10, 50, 100 e 200 primeiros pontos gerados pela função no Geogebra; alocação das sementes em um girassol

Capítulo 2

Constante de Euler-Mascheronni

2.1 Noções preliminares

O número γ , embora não seja tão famoso quanto π ou e é uma constante que figura lugar de destaque na matemática. Antes de definir esta constante, precisamos de uma definição formal de logaritmo natural. Utilizaremos como base [14].

2.1.1 Logaritmo Natural

Definição 2.1. Uma função real $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

- a) L é uma função crescente, isto é, se $x < y \Rightarrow L(x) < L(y)$;
- b) $L(xy) = L(x) + L(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$

o número $L(x)$ é chamado Logaritmo de x para todo x pertencente à \mathbb{R} .

Definição 2.2. Seja H o ramo da hipérbole, onde $x > 0$ e $y = \frac{1}{x}$. Denomina-se H_a^b a área determinada pelos pontos (x, y) tais que $a \leq x \leq b$; $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$

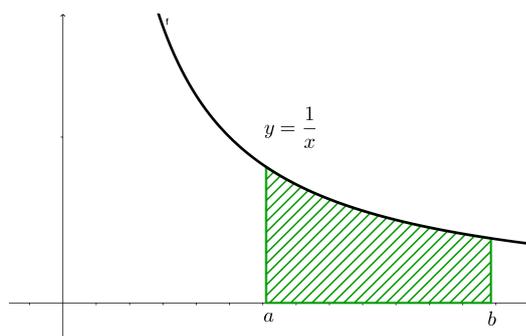


Figura 2.1: H_a^b representado pela região hachurada.

Qualquer área do ramo da hipérbole possui uma propriedade de extrema importância, que será enunciada e demonstrada abaixo.

Teorema 2.1. Seja qual for o número real k , as faixas H_a^b e H_{ak}^{bk} possuem a mesma área.

Fazendo as subdivisões em retângulos nas faixas, de maneira conveniente, temos que os retângulos possuem as mesmas áreas. Por exemplo, tomando x pertencente ao intervalo $[a, b]$, podemos pegar kx no intervalo $[ka, kb]$ e os retangulos inscritos nas respectivas faixas das hipérbolés possuem mesma área. Aplicando então a soma de Riemann, podemos concluir que as faixas H_a^b e H_{ak}^{bk} possuem a mesma área.

Vamos definir agora o logaritmo natural de x como sendo a área da faixa da hipérbole de 1 a x , ou seja

$$\ln x = H_1^x \tag{2.1}$$

tomando $H_1^x < 0$ quando $0 < x < 1$.

Temos em particular que quando $x = 1$, o conjunto H_1^1 se reduz a uma reta, e logo possui área 0. Quando $x < 0$ a área não está definida. Podemos concluir que

$$\ln 1 = 0 \tag{2.2}$$

$$\ln x < 0 \quad \text{se } 0 < x < 1 \tag{2.3}$$

$$\ln x > 0 \quad \text{se } x > 1 \tag{2.4}$$

ficando assim definido uma função de $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Vamos provar agora que a função \ln satisfaz a função logaritmo.

Teorema 2.2. $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função logarítmica.

É suficiente mostrar que a função \ln goza das propriedades a) e b).

Vamos provar inicialmente o item a), ou seja, mostraremos que

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

Temos que

$$\ln(xy) = H_1^{xy} = H_1^x + H_x^{xy} \quad (2.5)$$

pelo teorema 2.1 temos que $H_x^{xy} = H_1^y$. Segue que

$$\ln(xy) = H_1^{xy} = H_1^x + H_x^{xy} \quad (2.6)$$

$$= H_1^x + H_1^y \quad (2.7)$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \quad (2.8)$$

Vamos agora provar o item b). Para isto, considere $x, y \in \mathbb{R}^+$. Suponha $x < y$. Observe que existe um $a > 1$ tal que $y = ax$. Segue-se que

$$\ln y = \ln(ax) \quad (2.9)$$

$$= \ln a + \ln x \quad (2.10)$$

e como $a > 1 \Rightarrow \ln a > 0$, donde concluímos que $\ln y > \ln x$, e isto completa a demonstração do teorema 2.2.

Podemos calcular a área H_1^x através da soma de retângulos. para tanto, inicialmente vamos decompor o intervalo $[1, x]$ em um número finito de intervalos justapostos. Com base em cada intervalo $[a, b]$ da decomposição, com $a < b$, consideremos o retângulo de altura $\frac{1}{b}$. O vértice superior direito toca o gráfico da faixa da hipérbole no ponto $(b, 1/b)$.

Chamando este retângulo de retângulo inscrito na faixa H_1^x , temos que a reunião destes retângulos inscritos é um polígono retangular inscrito na faixa H_1^x . Ao passo que refinamos cada vez mais as subdivisões de $[1, x]$, temos uma aproximação melhor de $\ln x$, de modo que quando o maior subintervalo de $[1, x]$ tende à 0, o polígono retangular inscrito na faixa H_1^x tende à $\ln x$.

2.1.2 Série Harmônica

Uma aproximação deveras interessante acontece quando dividimos o intervalo $[1, p+1]$, com p natural, em subintervalos unitários. As áreas dos retângulos por excesso nos dão a famosa série harmônica

$$H_p = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p}. \quad (2.11)$$

Pode-se provar que a soma (2.11), espantosamente, tende para o infinito pois assim como nas séries geométricas, cada parcela é menor que na anterior, mas ao contrário daquelas a soma explode. De fato, basta observar que a soma (2.11) equivale a uma aproximação superior à H_1^{p+1} , logo

$$H_p > \ln(p+1). \quad (2.12)$$

Como a função $\ln x$ é crescente, temos que a soma (2.11) tende ao infinito.

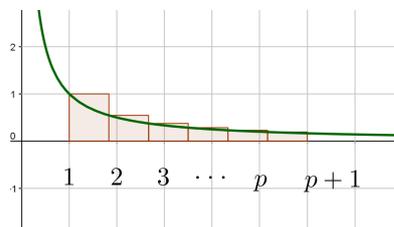


Figura 2.2: Série harmônica interpretada em termos de área

Uma outra relação entre a série harmônica e a função logaritmo natural é que a diferença entre estes em qualquer intervalo de extremos naturais é sempre limitada. Mais especificamente, mostraremos que

Proposição 2.1. Para todo inteiro $p > 0$, temos que

$$0 < H_p - \ln(p + 1) < 1 \quad (2.13)$$

Para demonstrar tal fato, vamos decompor o intervalo $[1, p + 1]$ em subintervalos unitários, mas desta vez consideraremos a aproximação inferior.

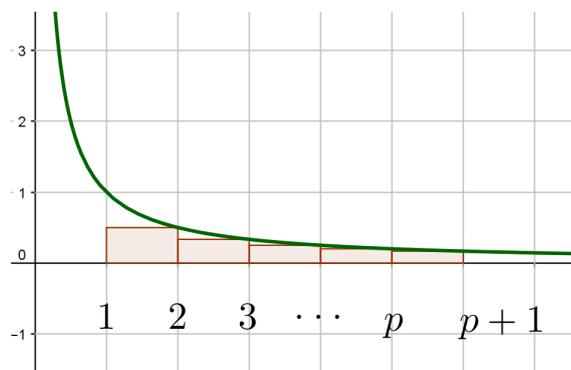


Figura 2.3: Aproximação inferior de $\ln(p + 1)$

Como temos uma aproximação inferior, segue que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} < \ln(p+1) \quad (2.14)$$

o que implica que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{p} < \ln(p+1) \quad (2.15)$$

somando 1 a ambos os termos, temos que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{p} < \ln(p+1) + 1. \quad (2.16)$$

Onde o primeiro membro da desigualdade equivale a H_p . Daí

$$H_p < \ln(p+1) + 1 \Rightarrow H_p - \ln(p+1) < 1. \quad (2.17)$$

Por outro lado, de 2.12 temos que a diferença $H_p - \ln(p+1)$ é positiva, o que conclui a demonstração.

Tomando a sequência destas diferenças, temos que a sequência além de limitada, também é monótona, e portanto convergente, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass.

2.2 Definição

Definição 2.3. O limite

$$\gamma = \lim_{p \rightarrow \infty} [H_p - \ln(p + 1)] \quad (2.18)$$

é chamado Constante de Euler-Mascheronni

Existem outras definições da constante gama, fruto de sua aparição em vários campos da matemática. Cada uma destas definições é de igual modo importante, pois estas podem vir a ser úteis para resolver os problemas em aberto a respeito de γ : gama é racional? irracional? transcendente? algébrico? embora, até hoje não se tenha notícia de uma demonstração aceita, alguns fatos já foram demonstrados. Por exemplo, em [15] temos os resultados de Thomas Papanikolaou que, nos garante que se γ é racional, seu denominador deve ser maior que 10^{242080} .

2.2.1 Cálculo dos dígitos de gama: Porque uma aproximação é tão difícil?

Apesar da simples definição da constante gamma, o fato desta estar associada com a série harmônica resulta numa lenta conversão. Se aproveitando do fato que $\int_1^n \frac{dx}{x} > H_n$, podemos ter noção noção do quanto é lento o crescimento da série harmônica.

n	$\int_1^n \frac{dx}{x}$
10	2.3
100	4.61
1000	6.91
1000000	13.82
1000000000	20.72
10^{50}	115.3

Do mesmo modo, a função \ln tem o mesmo crescimento vagaroso. Por isto, a constante gama, uma vez que é resultado da diferença entre estas duas sequências, converge tão vagarosamente quanto o crescimento destas. [13] elenca que $\gamma_{100} = 0.58220733165153$; $\gamma_{1000000} = 0.577216164901481$. Um fato que nos ajuda a ter noção da convergência de γ é a seguinte proposição:

Proposição 2.2. Seja γ_n o n -ésimo termo das sequencias das aproximações de γ . Tem-se que

$$\frac{1}{2(n+1)} < \gamma - \gamma_n < \frac{1}{2n} \tag{2.19}$$

Para demonstrar tal fato, faremos uma análise do gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$.

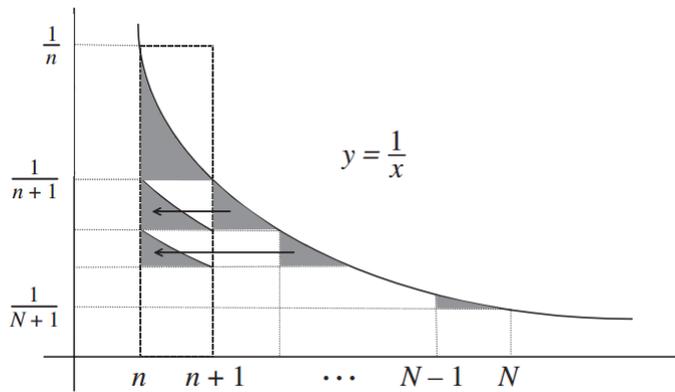


Figura 2.4: Fonte: [13]

Seja $\sum_n^N H$ a área hachurada que toca o gráfico. Segue que

$$\begin{aligned} \sum_n^N H &= \left(\int_n^{n+1} \frac{dx}{x} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\int_{n+1}^{n+2} \frac{dx}{x} - \frac{1}{n+2} \right) + \dots + \left(\int_{N-1}^N \frac{dx}{x} - \frac{1}{N} \right) \\ &= \int_n^N \frac{dx}{x} - \sum_{r=1}^{N-n} \frac{1}{n+r} \\ &= \int_n^N \frac{dx}{x} - \left(\sum_{r=1}^N \frac{1}{r} - \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} \right) \\ &= \left(\ln N - \sum_{r=1}^N \frac{1}{r} \right) - \left(\ln n - \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} \right) \end{aligned}$$

Fazendo $N \rightarrow \infty$, pela definição (2.2), temos que

$$\sum_n^N H = -\gamma + \gamma_n = \gamma_n - \gamma \tag{2.20}$$

Agora, se deslocarmos a região H para o primeiro retângulo compreendido entre n e $n+1$

da figura acima, pode-se ver que cada região corresponde a menos da metade de cada retângulo onde ela está inscrita, por conta da concavidade de $1/x$. Como a área do retângulo entre n e $n + 1$ é igual a $1/n$, temos que

$$\gamma_n - \gamma < \frac{1}{2n} \quad (2.21)$$

Para concluir a desigualdade, construímos um triângulo retângulo em cada uma das subdivisões unitárias como mostrado na figura abaixo. Cada triângulo assim formado equivale ao triângulo logo à direita, que contém uma parcela de H , pois sua hipotenusa tem a mesma medida destes, e todos os catetos horizontais medem 1.

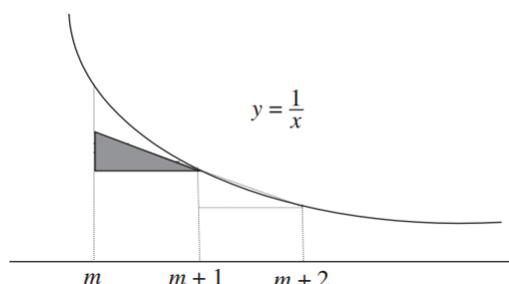


Figura 2.5: Fonte:[13]

Dai:

$$\gamma_n - \gamma = \sum_n^N H > \frac{1}{2} \sum_{m=n}^{\infty} \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} \right) = \frac{1}{2(n+1)} \quad (2.22)$$

donde podemos concluir que

$$\frac{1}{2(n+1)} < \gamma - \gamma_n < \frac{1}{2n} \quad \square \quad (2.23)$$

Podemos agora, ter uma idéia da dificuldade de aproximação. Imagine que queremos ter uma precisão de m casas decimais na contagem de γ . Isto implica que

$$\gamma_n - \gamma < 5 \times 10^{-m-1} \quad (2.24)$$

basta garantirmos que $\frac{1}{2n} < 5 \times 10^{-m-1} \Rightarrow n > 10^m$. Outros métodos de "rápida" convergência têm sido estudados, o que mostra um interesse numa maior compreensão desta constante.

2.3 Série Harmônica Alternada

Já vimos que da definição (2.2) é possível calcular aproximações para a série harmônica (2.11). Sendo mais específico, temos que a n -ésima aproximação da série harmônica H vale

$$H_n = \gamma_n + \ln(n) \quad (2.25)$$

Uma aplicação interessante da constante em estudo se encontra no cálculo da série harmônica alternada que é uma importante série derivada da série harmônica.

Definição 2.4. A série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \quad (2.26)$$

é chamada de série harmônica alternada.

Utilizando o critério de Leibniz [14],[9], vemos que as reduzidas de ordem par de 2.26 são

$$s_2 = 1 - \frac{1}{2}, \quad s_4 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right), \quad s_6 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right), \quad \text{etc.} \quad (2.27)$$

Observe que $s_2 < s_4 < s_6 < \dots < s_{2n} < \dots$, uma vez que cada parêntese resulta num número positivo. Entretanto, se pegamos as reduzidas de ordem ímpar, temos que

$$s_1 = 1, \quad s_3 = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right), \quad s_5 = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right), \quad \text{etc} \quad (2.28)$$

donde podemos concluir que $s_1 > s_3 > s_5 > \dots > s_{2n-1} > \dots$. Portanto existem $s' = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n}$ e $s'' = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n-1}$. Como $s_{2n+1} - s_{2n} = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0$, temos que $s' = s'' (= s, \text{ digamos})$. Logo a série é convergente, mas não absolutamente convergente, uma vez que deriva da série harmônica e esta por sua vez é divergente. Este valor pode ser facilmente calculado através da série de Taylor da função $\ln(1+x)$. Observe que $1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n + \dots = \frac{1}{1-a}$, se $|a| < 1$. Tomando então $-1 < a < 0$, temos que a série converge para $1/(1+a)$, ou seja

$$1 - a + a^2 - a^3 + \dots + (-1)^{n+2} a^n + \dots = \frac{1}{1+a} \quad (2.29)$$

Integrando ambos os termos com relação a a , temos que

$$a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \dots + (-1)^{n+2} \frac{a^{n+1}}{n+1} + \dots = \int \frac{da}{1+a} = \ln(1+a) \quad (2.30)$$

logo, fazendo $a \rightarrow 1$, temos que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \ln(2) \quad (2.31)$$

Entretanto, Riemann manipula elementos da série harmônica alternada e nos mostra um problema que é resultado de seu estudo sobre convergência de séries onde γ é extremamente utilizado. Observe que a série (2.26) pode ser reescrita como

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \dots, \quad (2.32)$$

e associando alguns termos, temos

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) - \frac{1}{16} + \dots, \quad (2.33)$$

observando que a soma dos parênteses resulta em $1/2$ do maior termo, podemos rearranjar a soma novamente, donde obtemos

$$\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots \right) = \frac{1}{2} \ln(2). \quad (2.34)$$

Donde a primeira vista, temos um paradoxo pelo resultado computado através da série de Taylor. O resultado observado por Riemann é que se arranjarmos os termos da série harmônica alternada, ela pode convergir para qualquer número uma vez que se obedeça certo critério entre os termos positivos e negativos. Sendo mais específico temos a seguinte proposição:

Proposição 2.3. A soma dos n primeiros termos da série Hârmonica alternada rearranjada, onde dispomos de uma quantidade p_n de termos positivos e uma quantidade q_n de termos negativos vale

$$S = \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(\alpha),$$

onde $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n}$

Para provar tal fato, seja $\sum_{k=1}^n a_k$ a soma da série. Observe que

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k}. \quad (2.35)$$

Todavia,

$$\sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2p_n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k}, \quad (2.36)$$

Logo

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{2p_n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k}. \quad (2.37)$$

que equivale a

$$\sum_{k=1}^n a_k = H_{2p_n} - \frac{1}{2} H_{p_n} - \frac{1}{2} H_{q_n} \quad (2.38)$$

Invocando a aproximação (2.25), temos que

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{a}_k = (\gamma_{2p_n} + \ln(2p_n)) - \frac{1}{2}(\gamma_{p_n} + \ln(p_n)) - \frac{1}{2}(\gamma_{q_n} + \ln(q_n)) \quad (2.39)$$

donde obtemos

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{a}_k = \ln(2) + \ln(p_n) - \frac{1}{2} \ln(p_n) - \frac{1}{2} \ln(q_n) + \gamma_{2p_n} - \frac{1}{2}(\gamma_{p_n} + \gamma_{q_n}) \quad (2.40)$$

que equivale a

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{a}_k = \ln(2) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p_n}{q_n}\right) + \gamma_{2p_n} - \frac{1}{2}(\gamma_{p_n} + \gamma_{q_n}) \quad (2.41)$$

fazendo $n \rightarrow \infty$, concluimos que

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{a}_k = \ln(2) + \frac{1}{2} \ln\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n}\right) + \gamma - \frac{1}{2}(\gamma + \gamma) = \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(\alpha) \quad (2.42)$$

onde $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n}$.

No exemplo de Riemann, pode se perceber que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{2}$, pois a soma foi disposta na razão de 1 termo positivo para dois negativos. Segue a soma resultaria em

$$\begin{aligned} S &= \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(1/2) \\ &= \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(1) - \frac{1}{2} \ln(2) \\ S &= \frac{1}{2} \ln(2). \end{aligned}$$

Capítulo 3

Dimensão da Cobertura de Apolônio

3.1 Um Problema Geométrico.

Apolônio de Perga (262 a.C., 190 a.C.) foi o geômetra de excelência do seu período, conhecido como Geômetra Magno. Viveu no período também conhecido como "Idade áurea da matemática", contemporâneo de Euclides e Arquimedes, mas com trabalhos mais profundos e completos que estes. Sandra em [18] conta que "pouco se sabe de sua vida, já que a maior parte de suas obras desapareceram. Na verdade, apenas dois de seus diversos trabalhos se preservaram substancialmente: "Dividir segundo uma razão" e "As cônicas", sendo esta considerada sua obra prima".

Entre seus manuscritos, um problema que chamou bastante atenção foi a generalização sobre tangências de Euclides. No livro IV de Euclides, ele descreve o processo de construção de uma circunferência tangente aos três lados de um triângulo (proposição 4), e a construção de uma circunferência passando por três pontos (proposição 5). Segundo [11] Apolônio generaliza e resolve em "tangências" este problema, determinando como construir uma circunferência tangente a quaisquer três objetos. O foco deste capítulo se insere no caso de três circunferências tangentes entre si. Na verdade, se considerarmos o ponto como sendo uma circunferência de raio 0 e a reta como uma circunferência de raio infinito, os problemas de Apolônio se resumem ao caso de três circunferências.

Este problema tomou tempo de alguns matemáticos importantes, e sempre que uma nova faceta da geometria era revelada, sempre aparecia alguém a tentar aplicá-la e resolvê-la no problema de Apolônio. Em [18] é comentados nomes como Viète, Romanus, Newton, Descartes, Euler, Monge, Poncelet, Cauchy, Gauss, Julius Pedersen, Gergonne, os quais

resolveram ou contribuíram para diferentes soluções do problema de Apolônio.

Nesta seção destacaremos o Teorema do círculo de Descartes. A solução apresentada é uma síntese de Coxeter da prova de Beecroft, que por sua vez é uma redescoberta da expressão para os raios de Descartes. Em [5], Coxeter mostra como Beecroft considerou a configuração de 4 círculos tangentes entre si como parte da configuração de 8 círculos, onde cada círculo passa pelos pontos de contato de outros três.

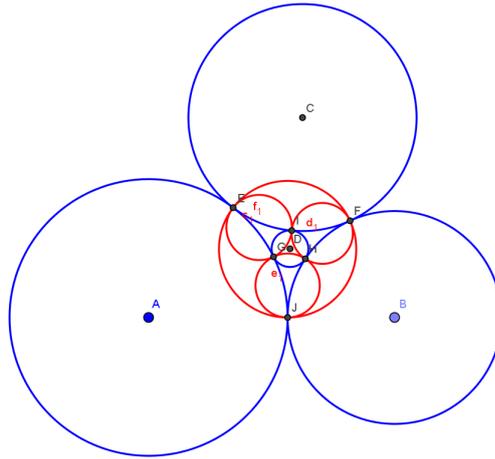


Figura 3.1: Configuração de Beecroft.

Considerando que quando dois círculos possuem contato interno, nós temos que o círculo maior possui raio negativo, é mais prático trabalharmos com a curvatura, inverso do raio, ao invés do raio. Chamando

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$$

as curvaturas dos oito círculos da configuração de Beecroft, então, vale que

Teorema 3.1 (Beecroft).

$$2 \sum_{i=1}^4 \epsilon_i^2 = \left(\sum_{i=1}^4 \epsilon_i \right)^2 \quad (3.1)$$

e da mesma forma

$$2 \sum_{j=1}^4 \eta_j^2 = \left(\sum_{j=1}^4 \eta_j \right)^2 \quad (3.2)$$

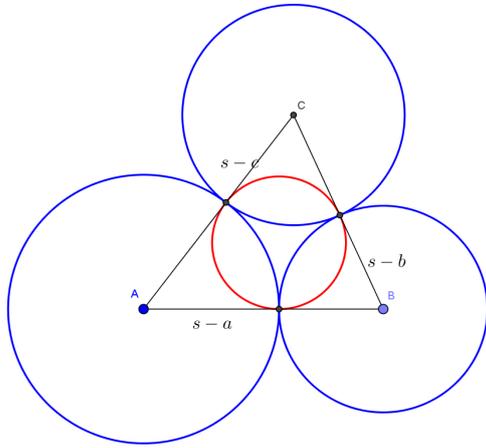


Figura 3.2: Círculos tangentes externos

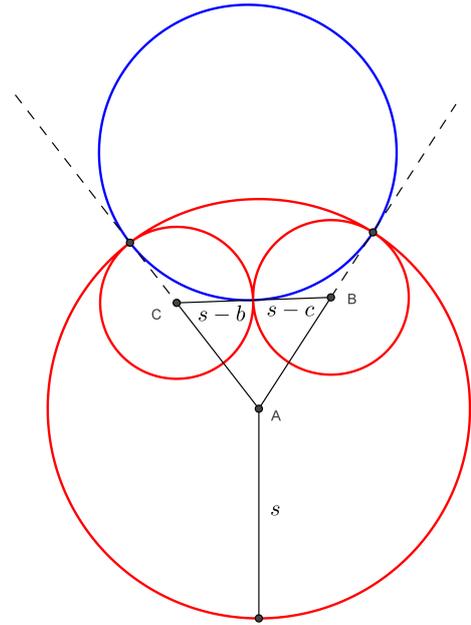


Figura 3.3: Círculo tangencia internamente

Chamemos de a, b, c, s, r e r_a os lados, o semiperímetro, o raio inscrito e o raio ex-inscrito relativo ao lado de medida a no triângulo ABC . A área do triângulo pode ser expressa pela fórmula de Heron $(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ e também pela expressão $(ABC) = r \cdot s$, relacionando o raio inscrito e o semiperímetro, ou $(ABC) = r_a \cdot (s-a)$, relacionando o raio ex-inscrito e o semiperímetro [5]. Daí, temos que

$$r^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}, \tag{3.3}$$

e do mesmo modo

$$r_a^2 = \frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}. \tag{3.4}$$

Pode-se perceber que quaisquer círculos mutuamente tangentes de centros A, B, C possuem raios $s-a, s-b, s-c$ ou $s, s-b, s-c$, tendo as configurações da figura 3.2 ou 3.3. Sejam

$$\frac{1}{\eta_1} = r, \frac{1}{\epsilon_2} = s - a, \frac{1}{\epsilon_3} = s - b, \frac{1}{\epsilon_4} = s - c,$$

e da mesma forma (quando o contato entre os círculos é interno)

$$\frac{1}{\eta_1} = r_a, \frac{1}{\epsilon_2} = -s, \frac{1}{\epsilon_3} = s - c, \frac{1}{\epsilon_4} = s - b.$$

Observe que

$$\epsilon_3 \epsilon_4 + \epsilon_4 \epsilon_2 + \epsilon_2 \epsilon_3 = \left(\frac{1}{\epsilon_2} + \frac{1}{\epsilon_3} + \frac{1}{\epsilon_4} \right) \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 \quad (3.5)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{1}{r^2} \\ \frac{s-b-c}{-s(s-c)(s-b)} = \frac{s-a}{s(s-b)(s-c)} = \frac{1}{r_a^2} \end{array} \right\} = \frac{1}{\eta_1}$$

De modo análogo, temos que $\eta_3 \eta_4 + \eta_4 \eta_2 + \eta_2 \eta_3 = \epsilon_1$ uma vez que só se muda a posição do s círculos, o padrão se repete quando mudamos os índices. Segue que

$$\left(\sum_{i=1}^4 \epsilon_i \right)^2 = \sum_{i=1}^4 \epsilon_i^2 + 2(\epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_1 \epsilon_3 + \dots + \epsilon_3 \epsilon_4) = \sum_{i=1}^4 \epsilon_i^2 + \sum_{j=1}^4 \eta_j^2 = \left(\sum_{j=1}^4 \eta_j \right)^2, \quad (3.6)$$

donde podemos concluir que $\sum_{i=1}^4 \epsilon_i = \sum_{j=1}^4 \eta_j$. Desenvolvamos agora a expressão

$$-\epsilon_1^2 + (\epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)^2 = -\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 + \epsilon_4^2 + 2(\epsilon_3 \epsilon_4 + \epsilon_4 \epsilon_2 + \epsilon_2 \epsilon_3) \quad (3.7)$$

$$= -\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 + \epsilon_4^2 + 2\eta_1^2 \quad (3.8)$$

$$= 2\eta_1(\eta_2 + \eta_3 + \eta_4) + 2\eta_1^2 \quad (3.9)$$

$$= 2\eta_1(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4) \quad (3.10)$$

$$= 2\eta_1 \sum_{j=1}^4 \eta_j = 2\eta_1 \sum \epsilon \quad (3.11)$$

Observe ainda que, por produtos notáveis

$$-\epsilon_1^2 + (\epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)^2 = (\epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4) = \left(\sum \epsilon \right) (-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4), \quad (3.12)$$

donde segue que por (3.7) e (3.12) que

$$-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 = 2\eta_1 \quad (3.13)$$

trabalhando com as quatro equações relativas a $\eta_1, \eta_2, \eta_3,$ e $\eta_4,$ temos que

$$\left\{ \begin{array}{l} (-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)^2 = 4\eta_1^2 \\ (\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)^2 = 4\eta_2^2 \\ (\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4)^2 = 4\eta_3^2 \\ (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4)^2 = 4\eta_4^2 \end{array} \right.$$

Donde somando as equações obtemos que

$$\sum_{i=1}^4 \epsilon_i^2 = \sum_{j=1}^4 \eta_j^2,$$

e portanto $2 \sum_{i=1}^4 \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^4 \epsilon_i^2 + \sum_{j=1}^4 \eta_j^2 = \left(\sum_{i=1}^4 \epsilon_i \right)^2$, o que conclui a prova do teorema. \square

Da relação entre as quatro curvaturas, podemos obter expressamente a quarta curvatura, e conseqüentemente o quarto raio, a partir do teorema 3.1. Desenvolvendo a expressão e isolando ϵ_4 , temos que

$$\epsilon_4 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \pm 2\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_1 \epsilon_3 + \epsilon_2 \epsilon_3} \quad (3.14)$$

Perceba que o resultado de Beecroft, não nos oferece uma maneira de construção do círculo que será tangente aos outros três, mas de possa das três curvaturas, podemos descobrir a curvatura da quarta, onde se esta for positiva, implica que o círculo é tangente externo; se negativo o círculo é tangente internamente.

3.2 A cobertura de Apolônio

Em cima do problema de Apolônio, podemos construir uma figura por iteração, construindo infinitos círculos tangentes a cada três círculos mutuamente tangentes. A figura assim construída é conhecida como cobertura de Apolônio. Uma vez que esta figura possui a característica de auto-semelhança, ou seja, o menor pedaço da figura é semelhante ao todo, a cobertura de Apolônio é classificada como fractal. O termo fractal (do latim frac-

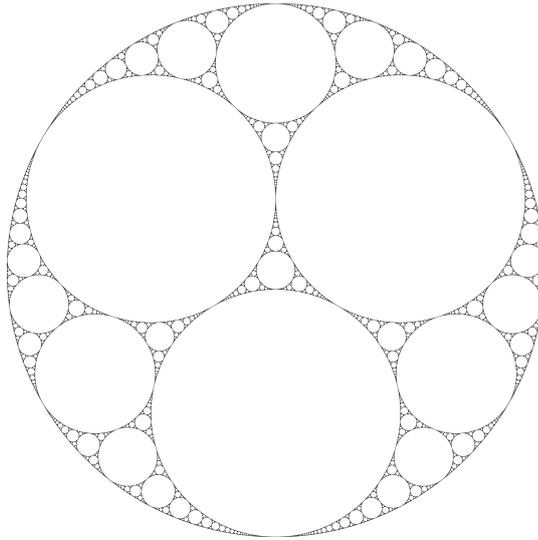


Figura 3.4: Cobertura de Apolônio.

tus, quebrado) foi usado pela primeira vez por Benoit Mandelbrot para designar figuras, como a cobertura de Apolônio, que não pertencem à geometria euclidiana, e que gozam da propriedade de auto-semelhança. Figuras como o triângulo de Sierpinski, a curva de Koch, a esponja de Menger, e outras figuras bem conhecidas são exemplos de fractais. O estudo dos fractais é importante pelo fato de alguns fractais serem encontrados na natureza. Como disse Mandelbrot, "Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, o som do latido não é contínuo e nem o raio viaja em linha reta."

Uma propriedade interessante relatada em [16] a respeito do fractal de Apolônio é que se os quatro círculos iniciais possuem curvatura inteira, então todos os círculos possuirão curvatura inteira. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.2. Sejam ϵ_0 e ϵ_4 as curvaturas dos círculos mutuamente tangentes aos círculos de curvatura ϵ_1 , ϵ_2 , e ϵ_3 . Se $\epsilon_i, i = 0, 1, 2, 3 \in \mathbb{Z}$, então $\epsilon_4 \in \mathbb{Z}$ e todos os círculos na cobertura têm curvatura inteira.

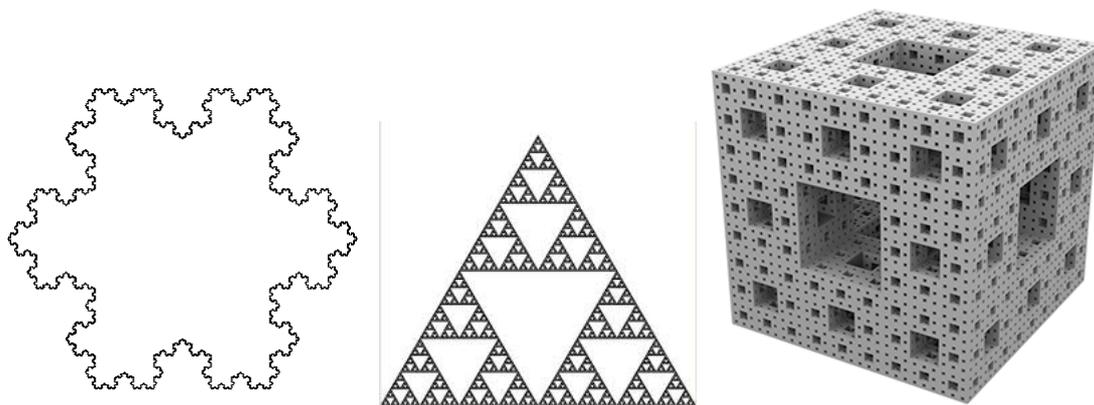


Figura 3.5: Curva de Koch, Triângulo de Sierpinski, Esponja de Menger

De fato, as curvaturas ϵ_0 e ϵ_4 tem medidas expressas por 3.14. Observe que sua soma vale

$$\epsilon_0 + \epsilon_4 = 2(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \Rightarrow \epsilon_4 = 2(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) - \epsilon \in \mathbb{Z} \quad (3.15)$$

uma vez que a subtração de inteiros é um número inteiro. A próxima curvatura corresponderá a um círculo tangente a quaisquer dos círculos mencionados anteriormente, que por sua vez são inteiros. Como o processo de cálculo da curvatura não sofre alteração, temos que esta será também inteira, e assim ad infinitum.

A tabela a seguir, retirada de [6] nos dá medidas de curvaturas inteiras que geram coberturas formadas apenas por círculos de curvaturas inteiras.

curvatura ₁	curvatura ₂	curvatura ₃	curvatura ₄
-1	2	2	3
-4	8	9	9
-15	32	32	33
-56	120	121	121
-209	450	450	451
-780	1680	1681	1681
-10864	23408	23409	23409

Fonte: [6]

3.3 Dimensão Fractal

Um conceito de extrema importância no conhecimento fractal, talvez o que mais diferencie os fractais dos outros objetos geométricos, é a dimensão fractal. O fato de serem, em geral, figuras cujo perímetro tende ao infinito e a área para zero, como no caso do triângulo de Sierpinski, sugere que a dimensão deles não possa ser tão simples. Mandelbrot disse certa vez numa palestra, que a dimensão do fractal deveria expressar seu nível de rugosidade. Por isto, fractais não possuem dimensões fechadas como o ponto (0), a reta(1) e o plano(2).

O método usado por Mandelbrot para calcular a dimensão Fractal foi a Dimensão de Hausdorff. Antes de defini-la, apresentaremos alguns conceitos pertinentes, baseados em [2].

Definição 3.1. Considere $F \subset \mathbb{R}^n$. O diâmetro de F é o supremo das distâncias entre dois de seus pontos e denotamos por $|F|$. ou seja

$$|F| = \sup\{\|x - y\|, x, y \in F\}$$

Omitiremos na escrita a partir daqui o fato de que $F \subset \mathbb{R}^n$.

Definição 3.2. Uma δ – cobertura de F é uma coleção enumerável de conjuntos X_i com diâmetro máximo δ que cobre F , ou seja:

$$\{X_i | F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \text{ e } 0 < |X_i| \leq \delta\}$$

Exemplificando a idéia, tomemos uma curva. Vamos preencher essa curva com bolas, como se estivéssemos fazendo um colar. Se limitarmos cada pérola a um diâmetro máximo delta, esta coleção, sendo enumerável seria uma delta-cobertura para a curva (colar).

Definição 3.3. Considere $s \geq 0$. Dado $\delta > 0$ Definimos

$$\mathcal{H}_{\delta}^s = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |X_i|^s \mid \{X_i\} \text{ é } \delta\text{-cobertura de } F \right\}$$

Como queremos coleções que cubram F , mas restritas a valores cada vez menores de δ , dizemos que a medida de Hausdorff s -dimensional vale

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^s \tag{3.16}$$

Ainda segundo [2], a medida de Hausdorff satisfaz algumas propriedades, as quais enunciaremos e mostraremos a seguir:

i) Se F_i é uma coleção enumerável de conjuntos abertos ou fechados disjuntos. Então

$$\mathcal{H}^s \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s F_i.$$

ii) Se $\lambda > 0$, então vale que

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F),$$

onde $\lambda F = \{\lambda x, \text{ onde } x \in F\}$.

iii) Se $v \in \mathbb{R}^n$, então $\mathcal{H}^s(F + v) = \mathcal{H}^s(F)$,

onde $F + v$ é o conjunto $F + v = \{x + v, \text{ onde } x \in F\}$.

iv) Considere $s_0 \in \mathbb{R}$. Se $\mathcal{H}^{s_0}(F) < \infty$, então $\mathcal{H}^s(F) = 0$ para todo $s > s_0$. Por outro lado, $\mathcal{H}^{s_0}(F) > 0$, então $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ para todo $s < s_0$.

Prova:

i) Como $\mathcal{H}^s(F)$ atribui valores entre $[0, \infty]$ para cada um dos F_i , fica bem definida a função e por [1], $\mathcal{H}^s(F)$ é uma medida sobre uma σ -álgebra, donde a propriedade é satisfeita pela definição de medida.

ii) Uma δ -cobertura de λF pode ser escrita como $\{\lambda X_i\}$, que por sua vez é uma $\frac{\delta}{\lambda}$ -cobertura de F . Pela medida de Hausdorff, temos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}^s(\lambda F) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(\lambda F) \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda X_i|^s \right\} \right) \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^s |X_i|^s \right\} \right) \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \lambda^s \left(\inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |X_i|^s \right\} \right) \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \lambda^s \left(\inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |X_i|^s \right\} \right) \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(\lambda F) \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\gamma^s(F),
 \end{aligned}$$

onde $\gamma = \frac{\delta}{\lambda}$. Logo,

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F).$$

iii) Perceba que uma δ -cobertura de $F + \mathbf{v}$ pode ser escrita como $X_i + \mathbf{v}$, sendo X_i uma δ -cobertura de F . Perceba ainda que

$$|X_i + \mathbf{v}| = \sup\{\|(x + \mathbf{v}) - (y + \mathbf{v})\|\} = \sup\{\|x - y\|, \text{com } x, y, \in F\} = |X_i| \quad (3.17)$$

e portanto, a definição de medida de Hausdorff s -dimensional permanece inalterada quando aplicada a $\{F + \mathbf{v}\}$.

iv) Temos que $\mathcal{H}^{s_0}(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^{s_0}(F)$. Como $\mathcal{H}^{s_0} < \infty$, então, pela definição de limite, para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < \delta < \delta_1$ então $|\mathcal{H}_\delta^{s_0}(F) - \mathcal{H}^{s_0}(F)| < \epsilon$. Em particular, se tomarmos $\epsilon = 1$, temos que $\mathcal{H}_\delta^{s_0}(F) < \mathcal{H}^{s_0}(F) + 1$. Pela definição 3.3, existe X_i , com $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ e $|X_i| \leq \delta$, tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |X_i|^{s_0} < \mathcal{H}^{s_0}(F) + 1. \quad (3.18)$$

Como $s > s_0$, temos que $|X_i|^{s-s_0} < \delta^{s-s_0}$. logo, completando a desigualdade anterior, temos que

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |X_i|^s \leq \sum_{i=1}^{\infty} \delta^{s-s_0} |X_i|^{s_0} < \delta^{s-s_0} (\mathcal{H}^{s_0}(F) + 1). \quad (3.19)$$

Fazendo $\delta \rightarrow 0$, obtemos

$$\mathcal{H}^s \leq 0 \quad (3.20)$$

e como a medida não pode assumir valores negativos, temos que $\mathcal{H}^s = 0$, se $s > s_0$. Por outro lado, suponha agora que $\mathcal{H}^{s_0}(F) > 0$. Tome um $s < s_0$ arbitrário. Queremos provar que $\mathcal{H}^s(F) = \infty$. Para tanto, suponha por absurdo que $\mathcal{H}^s(F) < \infty$. Então, pelo primeiro caso, temos que se $s_0 < s$, então $\mathcal{H}^{s_0}(F) = 0$, o que é um absurdo pois, por hipótese, $\mathcal{H}^{s_0}(F) > 0$. Logo, $\mathcal{H}^{s_0}(F) = \infty$, para $s < s_0$, o que conclui a demonstração.

Com vista nas propriedades acima, em [2] conclui-se que os conjuntos $S = \{s | \mathcal{H}^s(F) = 0\}$ e $S' = \{s | \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$ são disjuntos e que o conjunto $\{s | 0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty\}$ possui no máximo um ponto. Logo,

$$\inf\{s | \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s | \mathcal{H}^s(F) = \infty\},$$

e este s crítico é chamado de Dimensão de Hausdorff de F , denotado por $D_h(F)$. Logo temos a definição

Definição 3.4. A Dimensão de Hausdorff de um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é dada por

$$D_h(F) = \inf\{s | \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s | \mathcal{H}^s(F) = \infty\} \quad (3.21)$$

Vamos calcular como exemplo a dimensão do Conjunto de Cantor Ternário. Podemos definir este conjunto através das seguintes interações: Tome um segmento $[0,1]$, retire seu

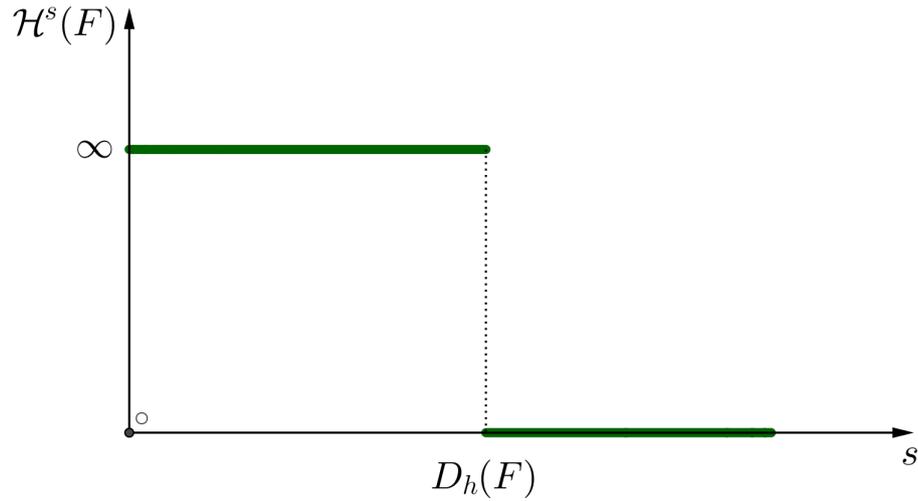
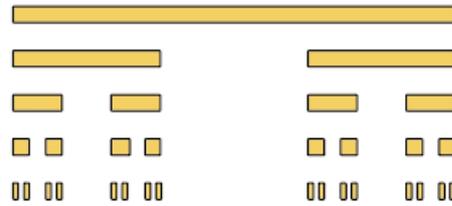


Figura 3.6: Dimensão de Hausdorff de F.



terço central. Ficamos assim com dois segmentos, a saber $[0, 1/3]$ e $[2/3, 1]$, o processo se repete com cada um dos dois novos segmentos, e assim indefinidamente. Pode-se perceber, que o conjunto é composto por duas partes simétricas - K_e e K_d , onde $K_e = K \cap [0, \frac{1}{3}]$ e $K_d = K \cap [\frac{2}{3}, 1]$. Como cada parte é a terça parte de K , temos que, por i)

$$\mathcal{H}^s(K) = \mathcal{H}^s(K_e) + \mathcal{H}^s(K_d),$$

donde

$$\mathcal{H}^s(K) = \frac{1}{3} \mathcal{H}^s(K) + \frac{1}{3} \mathcal{H}^s(K).$$

logo

$$1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^s$$

e portanto,

$$s = \frac{\log 2}{\log 3} \tag{3.22}$$

Donde concluímos que a dimensão de Hausdorff do conjunto de cantor é $D_H(K) = \frac{\log 2}{\log 3}$.

3.4 Dimensão da Cobertura de Apolônio

O cálculo preciso da dimensão da cobertura de Apolônio ainda é uma incógnita na matemática. David Boyd nos deu um intervalo de precisão desta constante. Segundo [4] a dimensão está entre 1,300197 e 1,314534 e em [4] e [3] ele vai refinando seus estudos e melhorando a precisão da constante, onde o valor obtido é 1,305636. Basicamente o seu trabalho consiste em mostrar que a função de distribuição das curvaturas de Apolônio cresce assintoticamente com o tamanho das curvaturas, donde ele chega que esta razão equivale à dimensão de Hausdorff da cobertura. A seguir vamos fazer um resumo baseado em [4], [3], e [17].

Seja \mathcal{P} a cobertura de Apolônio. Sejam ainda C_0, C_1, \dots , os círculos que formam esta cobertura, e para cada $k \in \mathbb{N}$, r_k denota o raio de C_k . Podemos associar com \mathcal{P} o expoente E , onde

$$E = \inf \left\{ t \in \mathbb{R} \mid \sum_k (\text{diam} C_k)^t < \infty \right\} \quad (3.23)$$

Perceba que para $t = 2$ a série é convergente. Uma vez que a área do círculo vale πr^2 , temos que $\pi \sum_k r_k^2$ é a soma das áreas dos círculos, que por sua vez são limitados pelo círculo de curvatura negativa. Considere também $N(x)$ a função de distribuição de curvatura

$$N(x) = \# \{k \mid r_k^{-1} \leq x\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

Ou seja $N(x)$ determina o número de círculos cuja curvatura não ultrapassa x . Seja \mathcal{S} o complementar da união dos círculos abertos que são limitados pelos círculos C_k , no círculo fechado C_0 . Chamamos \mathcal{S} de conjunto de resíduos de \mathcal{P} . O teorema que é devido a Boyd [4] que aceitaremos sem demonstração diz que

Teorema 3.3. Se \mathcal{P} é uma cobertura de Apolônio, então

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log N(x)}{\log x} = E = \text{Dim}_H \mathcal{S}, \quad (3.24)$$

Em [17], vemos que o conjunto \mathcal{S} é um conjunto homogêneo, onde uma das propriedades que ele satisfaz, nos diz que existe uma constante α em \mathcal{S} , tal que para cada disco D_k de

Se existe um círculo inscrito e circunscrito, ambos concêntricos de raio r_k , e R_k tal que

$$\frac{R_k}{r_k} \leq \alpha.$$

Seja a_k o diâmetro do círculo C_k , e para um natural m , seja $M(t, m) = \sum_{k=1}^m a_k^t$ e $M(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k^t$. Usando o caso $t = 2$ e a propriedade acima, temos que

$$\pi \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k^2 \leq 4\pi \sum_{k \in \mathbb{N}} R_k^2 \leq 4\alpha\pi \sum_{k \in \mathbb{N}} r_k^2 \leq 4\pi \text{Área}D_0. \quad (3.25)$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que todos os a_k são menores que 1, e portanto, existe $t \geq t' \geq 0$ para o qual $M(t, m) \leq M(t', m)$, para algum m . Outro fato óbvio é que $M(0) = \infty$. Logo, $E < \infty$ e

$$E = \inf \left\{ t \in \mathbb{R} \mid \sum_{k \in \mathbb{N}} (\text{diam}C_k)^t < \infty \right\} = \sup \left\{ t \in \mathbb{R} \mid \sum_{k \in \mathbb{N}} (\text{diam}C_k)^t = \infty \right\} \quad (3.26)$$

Em [3], Boyd mostra que $1.300197 < E < 1.314534$ e que $E \approx 13057$, usando uma curva da forma An^E que melhor ajustasse os pontos da função $\log(N^-(1000n))$, onde $N^-(x)$ representa a quantidade de raios cuja curvatura é menor que n .

Capítulo 4

Trabalhando constantes em sala de aula - Um exemplo com o ϕ

Neste capítulo descreveremos o experimento com alunos do primeiro ano do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí - IFPI, Campus Corrente, a respeito do número de Ouro. O campus oferece ensino médio integrado aos cursos de Administração, Informática e Meio Ambiente, e alunos dos três cursos foram sorteados.

O experimento se realizou em dois momentos. No primeiro momento foi definido o número de ouro para os alunos, mostrando aplicações ao longo da história. No segundo momento, os alunos construíram o compasso áureo e fizeram medições em si mesmos. Vamos detalhar agora cada um dos momentos.

4.1 Primeiro momento: Experimento de Godkewitsch e aplicações do número de Ouro

O experimento se iniciou com uma lista de 48 retângulos, donde pedimos aos alunos para escolherem 27. Na lista haviam retângulos dos mais variados formatos e padrões de medida. dos 48 retângulos, 30 eram retângulos sobre a razão áurea e 18 retângulos quaisquer. Essa parte do experimento foi uma reprodução do experimento de Godkewitsch.

Após os alunos responderem o primeiro questionário, marcando os retângulos, abriu-se um questionamento a respeito do motivo das escolhas dos retângulos. Os motivos destacados podem ser resumidos a idéia de beleza visual, onde foi elencado que tal retângulo não estava bom, pois um lado era bem maior que o outro.

A partir desta idéia de relacionar um lado ao outro, foi iniciado o assunto dando a definição de divisão de um segmento, segundo uma razão como [8], e após mostramos o caso especial da razão áurea. Foi perguntado se os alunos já tinham ouvido falar a respeito, e eles citaram o π , um aluno citou a diagonal do quadrado que "tem sempre raiz de 2".

Após a definição formal, mostramos algumas aplicações, com imagens de construções e obras de arte, na maior parte do conhecimento dos alunos, mostrando como a razão áurea tem sido utilizada desde muito tempo atrás. Os exemplos utilizados seguiram de [15] e [10]. Os exemplos mostrados foram o Parthenon, As pirâmides egípcias, e o retrato da Mona Lisa, onde analisamos através do geogebra com os alunos, as proporções. Outros exemplos foram dados, dos quais alguns seguem abaixo, mas sem análise, para que o trabalho não ficasse enfadonho. Também foi passado o vídeo "Matemática e natureza", disponível gratuitamente no youtube [19], que nos mostrou outros exemplos bem conhecidos.



Figura 4.1: Pôster construído sobre proporções áureas.

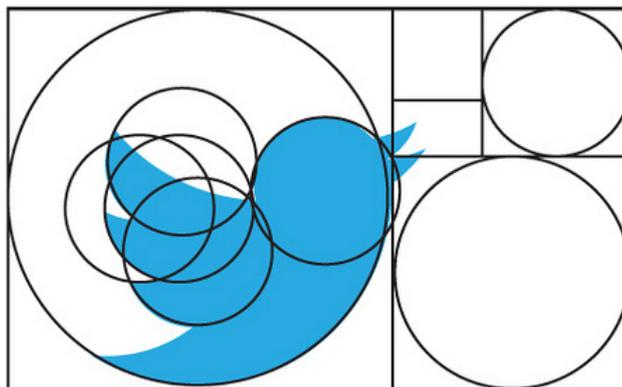


Figura 4.2: Logomarca Twitter.

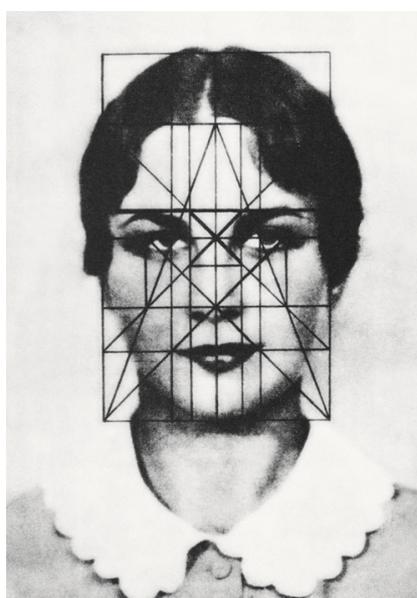


Figura 4.3: Miss Helen Wills.

Após dar aos alunos exemplos da proporção áurea, foi apresentado a eles também a sequência de Fibonacci e mostramos intuitivamente que a razão entre dois termos tende ao número de ouro. Isto foi feito, para que eles pudessem compreender como o compasso de ouro, que seria apresentado na segunda aula funcionava. No fim da aula, nós mostramos a eles quais retângulos eram os retângulos sobre as proporções áureas.

Após a aula, foi recolhido o teste dos retângulos que os alunos fizeram para que pudéssemos examinar se eles atenderam a o resultado esperado e escolheram em sua maioria os retângulos sob proporção áurea. O gráfico a seguir, mostra os resultados.

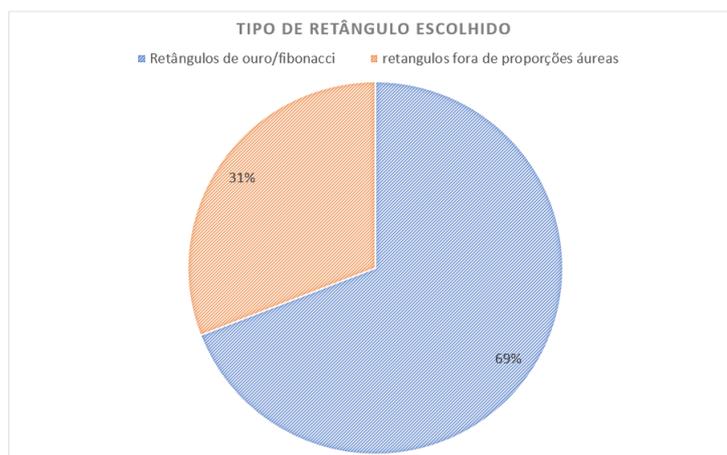


Figura 4.4: Retângulos escolhidos

4.2 Segundo Momento: Construção do Compasso Áureo

No segundo encontro, falamos aos alunos a respeito do compasso áureo. O compasso áureo é usado por dentistas, esteticistas, pintores e afins que se usam desta ferramenta para obter de maneira rápida o aspecto visual agradável proporcionado pela razão áurea.

A necessidade do conhecimento prévio dos alunos a respeito do compasso de ouro se fez necessária justamente porque todas as medidas do compasso são números consecutivos da sequência de Fibonacci.

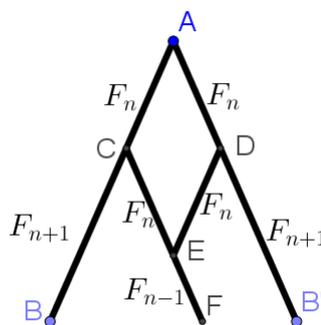


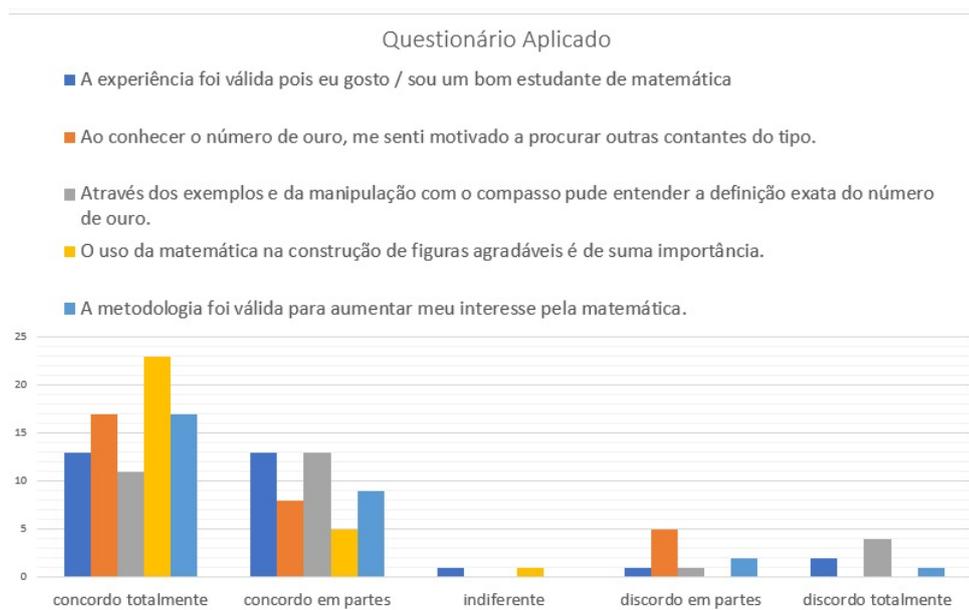
Figura 4.5: Compasso de ouro

É fácil que ver que a razão $\frac{BF}{FB'}$ sempre se aproxima de ϕ . De fato, percebe-se em primeiro lugar que $ADEC$ é um losango, logo os lados são todos paralelos entre si. Basta então,

compararmos os triângulos $\triangle BCF$ e $\triangle ACD$. Observe que eles são semelhantes pelo caso AA. Daí comparando os lados, temos que

$$\frac{BC}{CA} = \frac{BF}{CD} = \frac{BF}{FB'} = \frac{F_{n+1}}{F_n} \approx \phi \tag{4.1}$$

após essa explicação, os alunos foram divididos em três equipes e construíram compassos de ouro, segundo o molde da figura 4.6. Após construído o compasso, eles começaram a tirar medidas entre si para saber se tinha proporções áureas. Após concluído este momento, o experimento se encerrou com um questionário final, no intuito de saber dos alunos se a metodologia foi válida para despertar/aumentar o interesse deles pela matemática. O resultado da pesquisa segue.



Podemos observar, que o uso das constantes, aplicando na natureza, nas construções, no cotidiano, despertou realmente o interesse da maioria dos alunos. Alguns alunos, após o experimento até brincaram dizendo "precisamos olhar mais na natureza, porque o ouro está em tudo". Alguns alunos pediram bibliografias para pesquisarem mais sobre a constante, o que verifica neste caso, a validade e importância das constantes.

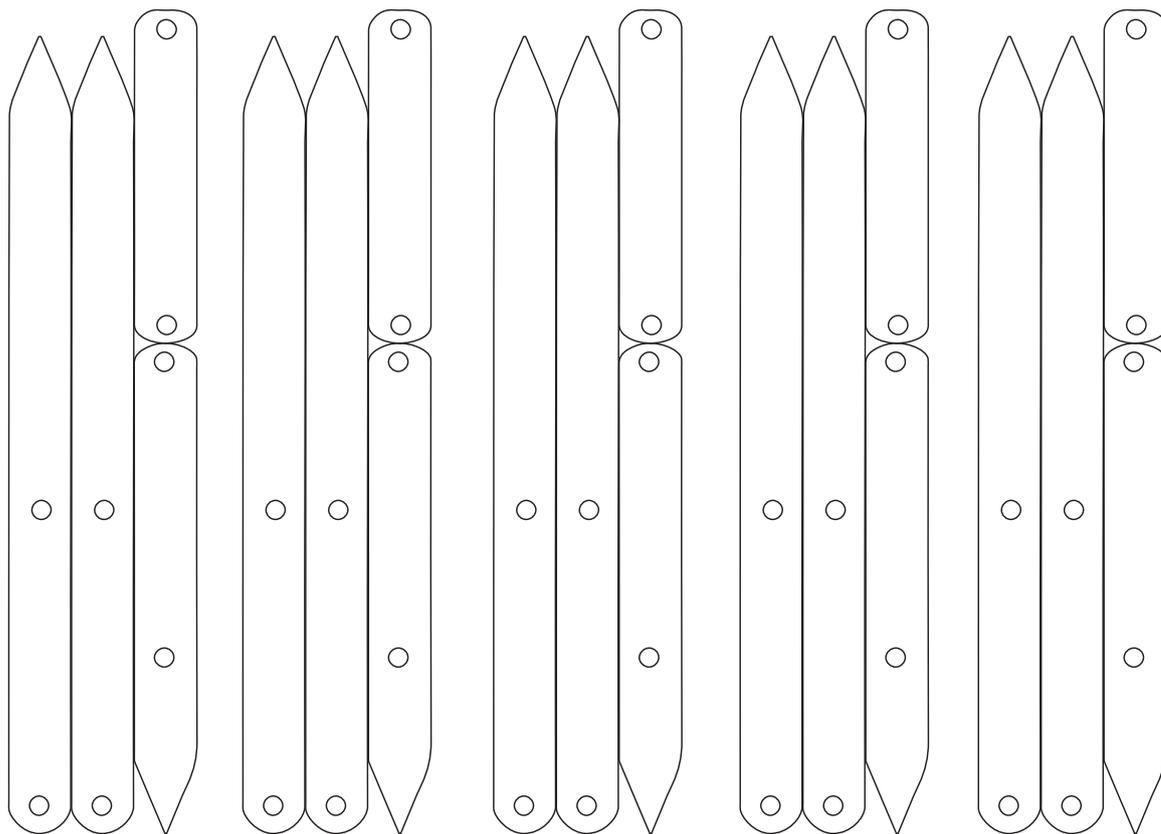


Figura 4.6: Moldes do compasso

Capítulo 5

Conclusão

Com a pesquisa, mostramos que constantes enfeitam o universo matemático. Algumas delas talvez até façam a matemática beirar o misticismo lógico, como no caso da série harmônica alternada e a constante de euler-mascheroni (γ).

O número de ouro nos mostra ser o compasso com o qual a harmonia da natureza é organizada, sendo um ótimo cartão de entrada para a motivação dos alunos a se aprofundarem na matemática, percebendo que esta pode e é aplicada em cada situação do nosso cotidiano, por mais que nós nem sempre percebamos.

A constante da dimensão da cobertura de Apolônio também nos motiva a aprofundarmos nossos estudos ainda mais, e quem sabe descobriremos um algoritmo de mais rápida convergência de sua dimensão fractal. Neste último caso, o estudante que se enveredar por um aprofundamento irá se deparar com assuntos de nível mais elevado como grupos de Klein, geometria hiperbólica, etc, nos lembrando que as constantes podem ser tanto motivação para estudo, como também para aprofundamento.

O objetivo do trabalho foi elaborar um material que fizesse uma exposição aprofundada das constantes apresentadas no escopo. O objetivo, no caso do experimento com os alunos foi atingido, donde concluímos que a apresentação de constantes é uma ferramenta motivadora que deve ser usada pelo professor para que seus alunos possam se motivarem a estudar matemática.

Referências Bibliográficas

- [1] Alves, A. M. Medidas de hausdorff e o teorema de morse-sard. dissertação de mestrado, UFMG, Março 2004.
- [2] Arsie, K. C. Dimensão espacial. Departamento de Matemática, UFPR (2009).
- [3] Boyd, D. W. The residual set dimension of the apollonian packing. *Mathematika* 20 (1973).
- [4] Boyd, D. W. The sequence of the radii of the apollonian packing. *Mathematics of computation* 39, 159 (1982).
- [5] Coxeter, H. S. M. The problem of apollonius. *The American Mathematical Monthly* 75, 01 (1968).
- [6] Desconhecido. Apollonian gasket. https://en.wikipedia.org/wiki/Apollonian_gasket, Nov. 2016. November 16, 2016.
- [7] Elon Lages Lima, e. a. A matemática do ensino médio vol 2. SBM, Rio de Janeiro, 2004.
- [8] Euclides. Elementos. Gredos, 1991.
- [9] George B. Afken, H. W. Física matemática. Elsevier, 2007. tradução de Arlete Simille Marques.
- [10] Ghyka, M. The geometry of art and life. New York, 1977.
- [11] Gish, J. M. R. D. Apolloniu's problem: A study of solutions and their connections. *American Journal of Undergraduate Research* 3, 1 (2004).
- [12] Godkewitsch, M. The 'golden section': An artifact of stimulus range and measure of preference. *The American Journal of Psychology* 87, 1/2 (mar 1974), 269–277.

-
- [13] Havil, J. Gamma. Princeton University Press, 2003.
- [14] Lima, E. L. Curso de análise vol. 1. Associação Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2004.
- [15] Livio, M. The golden ratio. Broadway, 2002.
- [16] M., P. Apollonian circle packings. In: Bandt C., Falconer K., Zähle M. (eds) Fractal Geometry and Stochastics V. Progress in Probability, Birkhäuser, Cham (2015).
- [17] Sabitova, S. M. . M. From apollonian packing to homogeneous sets. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica* 40, 711-715 (2015).
- [18] Santos, S. A. O problema de apolônio: Aspectos históricos e computacionais. relatório de pesquisa (2004).
- [19] Villa, C. Apollonian gasket. <https://www.youtube.com/watch?v=XjOUoLfoLo8>, Nov. 2016. November 10, 2016.
- [20] Vogel, H. A better way to construct the sunflower head. *Mathematical Bioscience* 44, 3 (1979).