Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Uma proposta de abordagem de Análise Combinatória no Ensino Médio por meio de estruturas lógicas fundamentais de contagem

João Paulo Santos Lopes

Parnaíba - 2016

João Paulo Santos Lopes

Dissertação de Mestrado:

Uma proposta de abordagem de Análise Combinatória no Ensino Médio por meio de estruturas lógicas fundamentais de contagem

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Me. Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha

Parnaíba - 2016

PROFMAT

SBM

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada: UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO POR MEIO DE ESTRUTURAS LÓGICAS FUNDAMENTAIS DE CONTAGEM, defendida por JOÃO PAULO SANTOS LOPES em 04 / 08 / 2016 e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha

Prof. Msc. Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha
Presidente da Banca Examinadora

Roberto R. das Neves

Prof. Msc. Roberto Ramos das Neves - Examinador

Renilson Rodrigues Araujo

Prof. Msc. Renilson Rodrigues Araujo – Examinador Externo

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial Prof. Cândido Athayde – Campus Parnaíba
Serviço de Processamento Técnico

L864p Lopes, João Paulo Santos.
Uma proposta de abordagem de análise combinatória no ensino médio por meio de estruturas lógicas fundamentais de contagem [manuscrito] / João Paulo Santos Lopes. – 2016.
33 f. : il. color.

Impresso por computador (printout).
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Piauí, 2016.
Orientação: Prof. Me. Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha.

1. Análise Combinatória. 2. Princípios Fundamentais - Contagem. 3. Problemas Combinatórios. 4. Matemática. I. Titulo.

CDD: 511.6

Dedico este trabalho aos meus pais, Maria e João, e aos meus irmãos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por ser a fonte de todo o conhecimento e meu condutor em minhas jornadas.

À minha família, em especial meus pais, Maria e João, que me apoiaram em todos os momentos e não mediram esforços para tal feito.

Agradeço aos professores, que contribuíram com seus conhecimentos, em especial, Cleyton Natanael pela sua dedicação e paciência em minha orientação.

Aos componentes da banca examinadora que dividiram comigo este momento tão importante e esperado.

Agradeço aos meus amigos do mestrado, pela amizade construída e pelo o apoio em momentos cruciais.

Aos amigos que estiveram ao meu lado nos momentos importantes da minha trajetória, a saber, Elianai Barros e Paulo Roberto, sempre incentivando e vibrando junto comigo em minhas conquistas.

Agradeço à SBM e à Universidade Federal do Piauí - Campus Ministro Reis Velloso pelo PROFMAT que possibilitou meus estudos no mestrado.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

"*A verdadeira viagem de descobrimento não consiste em procurar novas paisagens, mas em ter novos olhos.*"

Marcel Proust

Resumo

Este trabalho apresenta uma proposta de abordagem do conteúdo de Análise Combinatória para o Ensino Médio com o objetivo de auxiliar no desenvolvimento cognitivo estrutural do raciocínio combinatório. Buscou-se por meio do domínio dos princípios fundamentais criar estruturas estratégicas de resoluções. Em meio as permutações, em especial abordamos os Lemas de kaplansky e uma variação do mesmo. Por fim, sugerimos uma sequência de problemas ordenados de acordo com seu grau de dificuldade, onde as resoluções não advêm de uma aplicação direta de uma determinada fórmula, assim, o aluno é estimulado a criar uma linha de raciocínio, tornando-os mais ativos no processo de análise.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Princípios Fundamentais da contagem. Permutação. Problemas Combinatórios. Lemas de kaplansky.

Abstract

This work presents a proposal about the approach of the Combinatorics content to high school with the purpose of offering a support in the structural cognitive development of Combinatorial Reasoning. We searched through the mastery of the basic principles to create strategic structures resolutions. Among the permutations, we dealt with Kaplansky's Theorem and a variation of it. Finally, we suggest a series of orderly problems according to their degree of difficulty, where the resolutions do not result from a direct application of a certain formula. So, the students are encouraged to create a line of reasoning, making them more active in the analysis process.

Keywords: Combinatorics. Basic Principles of counting. Permutation. Combinatorial problems. Kaplansnky Theorem.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

As raízes da análise combinatória originaram-se na antiguidade com a necessidade de solucionar os primeiros problemas de contagem, a saber, o Stomachion, um dos mais antigos quebra-cabeças geométricos do mundo, que foi inventado por Arquimedes, consiste em um quadrado dividido em 14 partes irregulares. O objetivo desse quebra-cabeça é embaralhar as peças e depois juntá-las novamente para formar um quadrado, isto é, uma ferramenta de entretenimento, aliando o lúdico aos conhecimentos matemáticos, promovendo assim o aprimoramento destes. Muitos problemas que foram estudados no passado, seja para diversão ou por seu apelo estético, hoje são de grande importância na ciência pura e aplicada.

Uma das razões para esse crescimento é o grande impacto que os computadores tem em nossa sociedade, com base em programas de algoritmos conseguem resolver problemas em grande escala, que anteriormente não seria possível. Esses programas muitas vezes utilizam o conhecimento combinatório. Outra razão para tal feito, é a sua aplicabilidade a outras áreas do conhecimento, suas ideias e técnicas de análise atuam em diversas ciências, como as sociais, as biológicas, teoria da informação e tantas outras. Esses e outros aspectos tornam o estudo da Análise Combinatória uma ferramenta mais abrangente.

Mesmo a análise combinatória sendo uma poderosa ferramenta de análise de estruturas e relações discretas, no entanto, sua abordagem no Ensino Médio a torna uma disciplina obsoleta, já que o uso mecanizado de fórmulas abusivas nas resoluções de problemas, limita o aluno a resolver apenas questões diretas, na qual sua única preocupação seria a mera substituição de dados em fórmulas pre-estabelecidas, assim sua praticidade não passaria de um mero desenvolvimento algébrico e perderia sua real versatilidade.(MORGADO et al., 2006).

Os problemas de contagem são de suma importância para um bom desenvolvimento tanto cognitivo quanto estrutural, vinculados a uma base de dados. Os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam, entre outros conteúdos, a importância dos problemas de contagem e combinatórios no Ensino Médio.

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população,

> aplicar as idéias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades no Ensino Médio... (PCN, 1998, p.257).

A explanação da Análise Combinatória por meio de fórmulas ou padronizações de resoluções, além de limitar o campo de visão do próprio professor de matemática, faz com que o mesmo permaneça em uma zona teoricamente confortavel, mas é notório que a aprendizagem em si, não é alcançada a partir desse comportamento, já que o aluno é condicionado a não ter subsídios próprio de análise. Dessa forma, torna-se necessário uma ruptura nesse método de ensino, implementando situações problemas que levem os alunos a buscarem estratégias estruturais próprias para cada circunstância provindas do universo combinatório. Os PCN (1998, p. 266) orientam:

> Não somente em Matemática, mas até particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem auto-confiança e sentido de responsabilidade; e finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação.

Com base no PNLD(Plano Nacional do Livro Didático) verifica-se que os livros didáticos do Ensino Médio abordam a Análise Combinatória no 2° Ano, sendo que boa parte dos autores a deixam em uma sequência didática não muito favorável a seu desenvolvimento, pois evidenciam seu uso nos últimos capítulos, o que acarreta na mesma, uma análise superficial em detrimento da proximidade do final do ano letivo. Para maiores informações referentes as resenhas das coleções dos livros didáticos, segure-se consultar a referência [1].

Segundo S. S. Fonseca et al (2014), cada conteúdo possui sua relevância, cabe ao professor identificar no seu trabalho pedagógico a sequência dos conteúdos que atenda as especificidades de sua turma. Caso ele use o livro de forma linear, essa sequência didática poderá comprometer o seu trabalho na abordagem da Análise Combinatória.

O ensino da Análise Combinatória deve-se nortear em torno dos princípios fundamentais de contagem, já que este é a base do raciocínio combinatório. As orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, os PCN+(BRASIL. Ministério da Educação, 2016, p. 126) orientam:

> A Contagem, ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação. As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente Matemática à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande.

Em vista disso, este trabalho tem como objetivo mostrar a importância do aprendizado da estrutura de raciocínio por trás da fórmula elaborada. Esse conhecimento dará ao aluno uma liberdade para um desenvolvimento estrutural, desprendendo-o da mecanização de fórmulas. Para esse fim focaremos na estrutura de alguns Problemas Combinatórios mediante o principio multiplicativo e permutações, procurando vincular os mesmos a uma simbologia recorrente ao problema proposto. Entretanto, essa ferramenta auxiliará no desenvolvimento cognitivo da Análise Combinatória no Ensino Médio.

Buscando-se um melhor aproveitamento no estudo cognitivo da Análise Combinatória, neste trabalho abordamos, no capítulo 1, o estudo intuitivo dos princípios fundamentais da contagem que é a raiz dos problemas combinatórios, no capítulo 2 faremos o estudo das permutações por meio de definições e sua grande importância na demonstração de algumas expressões conhecidas, já que o desenvolvimento estrutural pra se chegar a uma expressão é construído de modo engenhoso e esse processo contribui para o desenvolvimento cognitivo. No capítulo 3 exibiremos soluções de algumas questões, selecionadas de livros didáticos nacionais, olimpíadas de matemática e algumas questões de exames de admissão do ITA que não são estudados com frequência no ensino médio, apenas no ensino superior, mas suas estruturas de desenvolvimento utiliza princípios básicos.

1 Princípios Fundamentais

Antes de iniciar a análise quantitativa dos eventos combinatórios, torna-se necessário uma abordagem qualitativa, já que esta dará suporte as tomadas de decisões que ocorrem no decorrer das resoluções dos problemas de contagem.

1.1 Como diferenciar tomada de decisões e conjuntos de outros?

Para Oliveira (2010), esta é sem dúvida uma das mais importantes perguntas que devem ser respondidas na abordagem de qualquer problema de análise combinatória. Por não ser na maioria dos casos uma pergunta de tão simples resposta, ele evidencia alguns critérios que devem ser cuidadosamente observados quando uma questão de combinatória for proposta. Os quais seguem abaixo:

i) **Quando os elementos são iguais:**
Suponha que você tem seis livros iguais de matemática e deseja escolher uma certa quantidade para doar a uma biblioteca. Note que, independentemente dos livros que escolha, todas as coleções de três livros que você pode montar são idênticas, já que o que diferencia uma doação da outra é quantidade de objetos (livros) que serão entregues a biblioteca, e não a troca de um livro por outro, pois os livros são idênticos. Assim você pode doar um livro, dois livros, três livros, quatro livro, cinco livros ou seis livros, neste caso existe 6 maneiras de fazer a doação.

ii) **Quando a ordem dos elementos interessa:**
Sempre deve-se analisar se a ordem com que os elementos são escolhidos interferem ou não no resultado final, para um melhor entendimento, suponha uma lanchonete que dispõe de cinco tipos de frutas distintas: f_1, f_2, f_3, f_4 e f_5. deseja-se preparar uma salada de frutas contendo três dessas frutas, nota-se que se forem escolhidas

as frutas f_1, f_2 e f_4, independente da ordem que essas frutas são escolhidas, temos como resultado final a mesma mistura, pois o que diferencia uma salada da outra não é a ordem como os elementos são escolhidos, mas sim a substituição do elemento do conjunto por outro distinto. Por outro lado, se você deseja montar números de dois algarismos distintos utilizando os algarismos 1, 2, 3 e 4, você tem duas tomadas de decisão que são as escolhas do algarismo das unidades e das dezenas, escolhendo 2 e 3 para compor esse número temos que, o 2 ocupando a unidade possui um valor relativo diferente caso ele ocupasse a dezena, os números formados seriam 32 e 23, respectivamente. Do exposto acima, nota-se que a diferenciação se a ordem dos elementos interessa ou não, ficará a cargo da análise cuidadosa do problema exposto.

iii) Quando não é informado se os elementos são distintos:
Em certos casos não se informa se os elementos em análise são distintos ou não, mas na maioria dos casos basta olhar pro problema e fazer uma análise sucinta. Ao vivenciar o problema será notório ao leitor a distinção dos elementos, já que este será um elemento ativo na situação problema.

1.2 Quando uma decisão deve ser tomada antes da outra?

Suponha que você deseja contar a quantidade de números pares de três algarismos distintos, para tal feito, será necessário dividir o problema em três etapas, escolher o algarismo das unidades, das dezenas e centenas. Digamos que você resolva iniciar pelo o algarismo das centenas, depois das dezenas e por fim o das unidades. Note que deixando por último o algarismo das unidades, este por sua vez se tornará um problema, já que suas opções depende das duas primeiras tomadas de decisão. por exemplo, se for escolhido 4 para o algarismo das centenas e 6 para as dezenas, restará apenas três possibilidades para o algarismo das unidades: 0, 2 ou 8. Por outro lado, se for escolhido dois números ímpares, um para centena e o outro para as dezenas, temos agora cinco possibilidades para a escolha do algarismo das unidades: 0, 2, 4, 6 ou 8. A variação do número de possibilidades das unidades se deu por causa da grande influência que as dezenas e as centenas tem nas decisões da unidade.

Com base no exposto acima, em um problema de contagem é interessante começar analisando as decisões que possuem menos(ou nenhuma) influência nas decisões futuras, para facilitar os critérios de contagem.(OLIVEIRA, 2010)

Lima(2006, p. 87) enfatiza a tomada de decisão em um problema de contagem da seguinte forma:“ Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.” Entretanto, as tomadas de decisão em um problema combinatório é uma espécie de mecanismo interligado no nível do problema, ou seja, a complexidade dos problemas de contagem é construída muitas vezes no decorrer da resolução, em consequência das tomadas de decisão avulsas.

1.3 Método direto da contagem

Método direto de contagem se baseia em fazer a contagem seguindo uma sequência lógica de forma que as decisões a serem tomadas seguem uma estrutura encadeadas por decisões. Este método onde as decisões são agrupadas de forma estratégica só é vantajoso quando o problema não é particionado em extensas expressões.

1.4 Método indireto da contagem

Imagine que você deseja quantificar algo que possui algumas restrições, a utilização do método direto para solucionar tal ação, produzirá vários processos, devido a quantidade de restrições necessárias. Por outro lado, se for mais acessível, pode-se retirar algumas das restrições, contar o total da situação que sobrou sem as restrições e depois subtrair desta quantidade os casos que não interessam. Este processo é o método indireto da contagem, alguns autores denominam como Princípio da subtração. Por exemplo, digamos que deseja-se calcular a quantidade de palavras com quatro letras que contenha pelo menos uma consoante. Observe que é muito melhor procurar o total de palavras de quatro letras e logo após retirar todas as palavras que não aparecem consoante(apenas por vogais) do que particionar o problema em quatro partes, as quais seriam palavras formadas de quatro letras com exatamente uma, duas, três e quatro consoante.

1.5 Princípios fundamentais da contagem

1.5.1 Princípio da Soma

Suponha que um conjunto S é dividido em partes duas a duas disjuntas $S_1, S_2, ..., S_m$. O número de objetos em S pode ser determinado calculando o número de objetos em cada uma das partes, e somando os números assim obtidos:

$$|S| = |S_1| + |S_2| + ... + |S_m|$$

Uma outra formulação do princípio da soma é como se segue:

Definição 1.1. *Se uma decisão A pode ser tomada de* x *maneiras, a decisão* B *pode ser tomada de* y *maneiras e as decisões são independentes, então o número de maneiras de se tomarem as decisões A ou B é* x + y.

A aplicação do princípio da adição, nos ajuda a particionar o problema em partes menores mutuamente exclusivos, que garanta todas as possibilidades e que seja de fácil contagem, mas essa partição dever ser feita de forma estratégica, já que se você particionar em grande quantidade, isto é basicamente o mesmo que listar todos os objetos de **S**.

Exemplo 1. *Suponha que desejamos encontrar o número de diferentes cursos oferecidos pela Universidade X. Vamos particionar os cursos de acordo com seus respectivos departamento, sendo que um curso seja oferecido por um único departamento, o número de cursos oferecido pela Universidade é igual a soma do número de cursos oferecido por cada departamento.*

Exemplo 2. *Um estudante deseja cursar matemática ou Biologia, mas não ambos. Se há quatro cursos de matemática e três cursos de Biologia para que o aluno escolha, em seguida, o estudante pode escolher um curso para estudar de* $4 + 3 = 7$ *maneiras.*

1.5.2 Princípio da multiplicação

Seja S um conjunto de pares ordenados (a, b) de objetos, onde o primeiro objeto a vem de um conjunto de tamanho p, e para cada escolha de objeto a há q opções para objeto b. Em seguida, o tamanho de S é $p \times q$:

$$|S| = p \times q$$

O princípio da multiplicação é uma consequência do princípio da adição. Seja $a_1, a_2, .., a_p$ as p possíveis escolhas para o objeto a, particionemos S em $S_1, S_2, ..., S_p$ onde S_i é o conjunto de pares ordenados em S com o primeiro objeto a_i, $(i = 1, 2, ..., p)$. O tamanho de cada S_i é q, daí, pelo principio da adição.

$$|S| = |S_1| + |S_2| + ... + |S_p|$$

$$= \overbrace{q + q + ... + q}^{p\ parcelas}$$

$$= p \times q.$$

O princípio multiplicativo pode ser caracterizado da seguinte maneira:

Definição 1.2. *Se na primeira tarefa tem p modos de ser executada e, não importando o resultado da primeira tarefa, uma segunda tarefa tem q modos, então as duas tarefas realizadas simultaneamente tem* $p \times q$*.*

Tal princípio pode ser generalizado para n conjuntos, desde que as escolhas em cada conjunto seja independente do outro.

Exemplo 3. *Com 5 homens e 4 mulheres de quantos modos se pode formar um casal? note que há 2 tarefas diferentes (não importa qual ordem tomarmos estas tarefas), selecionar um homem (5 maneiras), selecionar uma mulher (4 maneiras). Pelo princípio da multiplicação há* $4 \times 5 = 20$ *modos de formar um casal.*

Exemplo 4. *Determinar o número de inteiros positivos que são fatores do número* $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ *Os números 2, 3 e 5 são primos. Pelo teorema fundamental da aritmética cada fator é da forma* $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$*, onde* $0 \leq \alpha \leq 3$ *,* $0 \leq \beta \leq 2$ *e* $0 \leq \gamma \leq 1$*, no entanto temos três tarefas, selecionar o valor de* α *(4 maneiras) de* β *(3 maneiras) e* γ *(2 maneiras), como as escolhas são simultâneas, pelo princípio da multiplicação há* $4 \times 3 \times 2 = 24$ *maneiras.*

Exemplo 5. *Quantos números de dois dígitos tem dígitos distintos e diferente de zero?*

Solução 1:

Um número de dois algarismos ***AB*** *pode ser associado a um par ordenado (****a****,****b****), onde* ***a*** *representa o algarismo das dezenas e* ***b*** *os das unidades, como exigência, o número formado não pode conter o algarismo zero e* ***a*** *tem que ser diferente de* ***b****, sendo assim, há*

*9 (1, 2, 3,..., 8, 9) opções para escolha para **a**, uma vez feito isso, restam 8 opções para **b**, como tomada a primeira decisão há sempre 8 maneiras para a segunda tomada de decisão, logo pelo princípio da multiplicação há* $9 \times 8 = 72$ *números.*

Solução 2:

Uma outra forma de obter o resultado é analisando que há 90 números (10, 11, 12, ..., 98, 99) inteiros de dois algarismos, mas entre eles há 9 números (11, 22, 33, ..., 99) que contém dois algarismos iguais e 9 números que contem o zero (10, 20, ... , 90). Logo há $90 - 9 - 9 = 72$ *números.*

Com base no exposto acima, note que pode haver mais de uma forma de se resolver um determinado problema de contagem, o segundo método foi desenvolvido por meio da exclusão de subconjuntos indesejados do conjunto universo (conjunto de todos os números de dois dígitos). Este segundo desenvolvimento é associado ao Método indireto de contagem, já Brualdi o classifica como Princípio da Subtração.

1.5.2.1 Algumas observações sobre o Princípio da Multiplicação

i) Ordem das decisões

O enunciado do princípio multiplicativo trás consigo embutido a ordem como as decisões são tomadas, sendo necessário tomar uma decisão por vez, a ordem das decisões é levada em consideração. Entretanto, há casos em que a ordem das decisões interessa e em outros não. No **exemplo 3** a ordem embutida nas decisões é irrelevante, tanto faz escolher primeiramente o homem ou a mulher. Por outro lado, se fosse proposto pra escolher duas mulheres das quatro existentes, pelo princípio multiplicativo acreditasse que o total de maneiras seria igual a $4 \times 3 = 12$ (4 possibilidades pra primeira decisão e restando assim 3 mulheres para a segunda tomada de decisão), o que não é correto, uma vez que dentre essas 12 maneiras há escolhas que tem a mesma representação, os pares ordenados (mulher 2, mulher 4) e (mulher 4, mulher 2) neste problema tem a mesma representatividade. Note que à aplicação do princípio multiplicativo gerou o dobro do valor procurado, sendo assim, o número de maneiras de escolher duas mulheres é igual a $12/2 = 6$.

Entretanto, O bom senso é crucial para uma análise eficaz na distinção se a ordem das decisões é ou não irrelevante, esse fato esta de forma implícita na circunstância do problema sugerido.

ii) **Não tomar as decisões em paralelo**
Uma vez tomadas as decisões em paralelo, ou seja, de forma isolada, a quantidade de maneiras resultantes pelo processo do princípio multiplicativo poderá ser maior que o valor procurado, isso acontecerá quando uma tomada de decisão reduz as possibilidades da tomada de decisão seguinte, em consequência das restrições inerentes de cada situação proposta.

iii) **O princípio multiplicativo pode ser generalizado para uma quantidade finita de decisões**

iv) **A importância do domínio dos princípios da Soma e da Multiplicação**
Expressões conhecidas como as permutações, arranjos e combinações, nos possibilitam em certa forma uma grande redução nas expressões necessárias para obtermos as respostas nas questões de análise combinatória. No entanto as demonstrações dessas expressões estão vinculadas ao uso dos princípios da adição e multiplicação. Segundo Oliveira (2010, p.58)"[...] qualquer situação de contagem pode ser resolvida pela aplicação correta (geralmente em conjunto) dos princípios da adição e multiplicação." Portanto, o pleno domínio dos princípios fundamentais da contagem é essencial para o desenvolvimento das resoluções de qualquer problema de contagem, desde as simples até as mais complexas.

Este capítulo enfatiza a grande importância do estudo dos princípios fundamentais da contagem de forma qualitativa, seu uso de forma eloquente capacita o aluno a desenvolver estratégias próprias, lhe permitindo uma liberdade nas resoluções dos problemas de contagem, já que todas as expressões elaboradas no estudo da Análise Combinatória tem como base do seu desenvolvimento a aplicação conjunta dos princípios fundamentais de contagem. Além do que, há problemas que mesmo que você aplique as expressões pré existentes de forma direta, não é garantido o êxito, pois os problemas mais elaborados exigem uma análise qualitativa, na qual o aluno só adquire com o pleno domínio dos princípios fundamentais.

2 Permutações

2.1 Fatorial

A multiplicação de números naturais consecutivos é bastante frequente na Análise combinatória, e algumas dessas multiplicações envolvem muitos fatores, para simplificar o processo do produto de **n** por todos os números naturais não nulos menores que **n** usaremos o símbolo **n!**(lemos:"n fatorial ").

Definição 2.1. *Fatorial de um número natural é uma função matemática definida da seguinte maneira:*
$0! = 1$;
$1! = 1$;
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot n$;

2.2 Permutações

Considere que você possui n objetos e deseja colocá-los em uma ordem qualquer. A quaisquer possibilidades de colocar os n elementos em ordem dá-se o nome de permutação.

Por exemplo, três candidatos, A, B e C disputam uma eleição e não houve empate. Considerando como resultado a sequência 1ª, 2ª e 3ª colocados. Uma das possíveis permutações (ou seja, uma das possíveis maneiras de colocá-los em ordem de colocação) destes candidatos é C B A.

2.2.1 Números de Permutações de elementos distintos

Ao formar os números naturais de quatro algarismos distintos com os os algarismos 1, 3, 5 e 7, estamos formando todos os agrupamentos ordenados desses quatro algarismos tomados quatro a quatro. Enumerando-os, de forma organizada, chegamos aos seguintes números:

1357	1375	1537	1573	1735	1753
3157	3175	3517	3571	3715	3751
5137	5173	5317	5371	5713	5731
7135	7153	7315	7351	7513	7531

Logo, há 24 números de quatro algarismos distintos formados a partir de 1, 3, 5 e 7, ou seja, com quatro elementos distintos a quantidade de permutações desses elementos dispostos em uma fila é igual a 24.

Definição 2.2. *Dados os n elementos $I = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$, chama-se* ***permutação simples*** *dos n elementos de I todas as possibilidades de agrupamentos desses n elementos.*

O símbolo P_n significa a quantidade de permutações simples de n elementos distintos. O problema anterior pode ser resolvido sem precisar dispor todas as permutações, basta utilizar o princípio multiplicativo, que segue: Cada agrupamento é formado por quatro algarismos distintos, para a escolha do primeiro algarismo temos inicialmente 4 possibilidades **e** para a escolha do segundo algarismo temos 3 possibilidades **e** para a escolha do terceiro algarismo temos 2 possibilidades **e** para a escolha do quarto algarismo 1 possibilidade, pelo princípio da multiplicação, existem $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ permutações simples, esquematizado na figura 1:

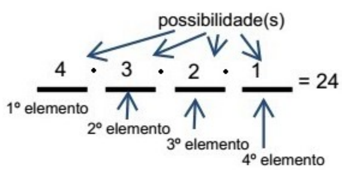

Figura 1: Esquema de possibilidades 1

Fonte: Elaborada pelo autor.

A idéia anterior pode ser generalizada para **n** elementos distintos. Suponhamos que existam **n** elementos distintos, para determinarmos todas as permutações possíveis de P_n, aplicaremos o mesmo esquema adotado anteriormente, para a escolha do primeiro algarismo temos **n** possibilidades **e** para a escolha o segundo algarismo temos **n-1** possibilidades **e** para a escolha do terceiro **n-2** possibilidades, assim sucessivamente, até a escolha do n° algarismo, onde há 1 possibilidade, conforme a figura abaixo:

Pelo exposto acima, $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 1 = n!$ permutações simples para n elementos distintos. Assim:

$$\boxed{P_n = n!}$$

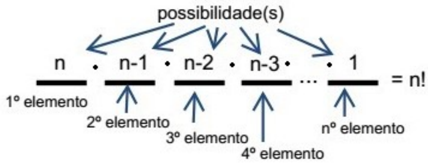

Figura 2: Esquema de possibilidades 2

Fonte: Elaborada pelo autor.

2.2.2 Permutações com elementos repetidos

A quantidade de formas distintas que uma pessoa pode expor 5 bolas em uma fila, sendo 3 bolas pretas e 2 bolas brancas, sabendo que o que diferencia uma bola da outra é apenas a cor. Note que esta permutação linear não pode ser calculada de forma direta pela expressão $P_5 = 5! = 120$ isso porque há elementos que ao se permutarem entre si representa a mesma permutação (disposição), já que as bolas das mesmas cores são totalmente idênticas, permuta-las entre si não acarretará em uma nova exposição. Veja a figura 3.

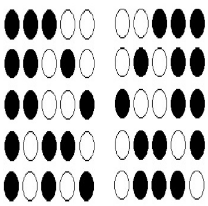

Figura 3: Disposições das bolas

Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, existem 10 permutações simples das cinco bolas. A redução de 120 para 10 se deve pelo fato de que as permutações das bolas de mesma cor não contam como permutações distintas, como há três bolas pretas e duas bolas brancas, temos $P_3 = 3! = 6$ e $P_2 = 2! = 2$ permutações, respectivamente. Desta maneira, cada exposição das bolas é contado $6 \cdot 2 = 12$

(princípio da multiplicação) vezes se considerássemos que as bolas fossem de cores distintas. Por isso, a quantidade de permutações das cinco bolas é igual a $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{12} = 10$.

Generalizando, se desejarmos permutar n elementos, em que x_1 deles são iguais, x_2 deles são iguais, ..., x_r deles são iguais, o número de permutações é:

$$\boxed{{P_n}^{x_1,x_2,\ldots,x_r} = \frac{n!}{(x_1!)(x_2!)...(x_r!)}}$$

No próximo tópico aplicaremos as noções básicas de permutação com repetição nas demonstrações dos Lemas de Kaplansky. Mesmo sendo abordado com maior frequência apenas no Ensino Superior, nada impede de estudarmos no Ensino Médio, já que o seu desenvolvimento abrange conhecimentos básicos da combinatória e será de grande valia para os alunos no aprimoramento das etapas do desenvolvimento lógico processual, propiciando ao mesmo uma liberdade de construção em uma questão onde o raciocínio dedutivo se sobrepõe a mera aplicação de fórmulas.

2.3 Os Lemas de Kaplansky

2.3.1 Primeiro Lema de Kaplansky

De quantas maneiras podemos formar um subconjunto de 3 elementos a partir do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ no qual não existam números consecutivos? Enumerando encontramos 4 possibilidades,veja a seguir: $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 3, 6\}$, $\{1, 4, 6\}$, $\{2, 4, 6\}$. Devemos organizar um raciocínio para evitarmos uma exaustão, caso a questão proposta seja extensa e enumerar todas as suas soluções possíveis não seja mais vantajosa. Analisemos o seguinte raciocínio:

Marcaremos com o símbolo + a posição dos números que formam o subconjunto desejado e deixaremos os demais com o símbolo - para indicar a ausência no subconjunto, como segue:

$\{1, 3, 5\}$ . . . representação: + - + - + -

$\{1, 3, 6\}$ . . . representação: + - + - - +

$\{2, 3, 5\}$ . . . representação: - + + - + -

Observação 2.1. *observe que o no último caso acima não serve, pois 2 e 3 são consecutivos, então perceba que dois sinais + juntos representam números consecutivos.*

No entanto, cada permutação dos seis símbolos será vinculado a um único subconjunto contendo exatamente três elementos, mas como a restrição de que não pode haver dois símbolos + consecutivos, já que esta representa um subconjunto que apresenta números consecutivos. Desse modo, o total de subconjuntos desejados é o mesmo que resolver o seguinte problema: De quantos modos podemos permutar 6 símbolos, sendo 3 sinais + e 3 sinais - de modo que não haja 2 sinais + juntos?

Para garantir que não vai haver sinais + consecutivos, inicialmente devemos fixar todos os sinais - da seguinte forma:

$$\emptyset - \emptyset - \emptyset - \emptyset$$

O símbolo $\emptyset$ representa os espaços vazios disponíveis para ser introduzidos os três símbolos +, vejamos algumas disposições:

$$\emptyset - + - + - + \text{ representa } - + - + -+ \text{ representa } \{\ 2,\ 4,\ 6\ \}$$
$$+ - + - \emptyset - + \text{ representa } + - + - -+ \text{ representa } \{\ 1,\ 3,\ 6\ \}$$

Perceba que após a fixação dos símbolos $-$, as resoluções passaram a ser garantida apenas pela permutação de 4 símbolos, sendo 3 símbolos + e 1 símbolo $\emptyset$. logo todos os subconjuntos de 3 elementos desejados dar-se por permutação com repetição dada por $P_4^3 = \dfrac{4!}{3!} = 4$.

Para generalizar podemos usar o mesmo raciocínio na resolução do seguinte problema: De quantas maneiras podemos formar subconjuntos de p elementos a partir de { 1, 2, 3,..., n} de modo que nestes subconjuntos não existam números consecutivos? Neste caso temos n símbolos, sendo p sinais + e $(n - p)$ sinais $-$, fixando todos os sinais $-$, teremos $(n - p) + 1$ espaços livres , consequentemente cada espaço será representado pelo símbolo $\emptyset$ onde p deles serão substituídos pelo símbolo +, restando assim $[(n-p)+1]-p = (n+1)-2p$ símbolos $\emptyset$. Note que pra existir solução a quantidade de espaços vazios tem que ser maior ou igual que a quantidade de símbolos +, ou seja $(n - p) + 1 \geq p \Rightarrow n + 1 \geq 2p$. Logo a resolução deste problema dar-se pela permutação com repetição de $(n - p) + 1$ símbolos, sendo p símbolos + e $(n+1)-2p$ símbolos $\emptyset$ e isso pode ser calculado de $P_{(n-p)+1}^{p,(n+1)-2p}$

Primeiro Lema de Kaplansky:

Seja f(n, p) o número de possibilidades de escolher um subconjunto com p elementos do conjunto { 1, 2, 3, 4, ..., n} de modo que não haja números consecutivos. Isso pode ser feito de $P_{(n-p)+1}^{p,(n+1)-2p}$ modos distintos, ou seja,

$$\boxed{f(n,p) = P_{(n-p)+1}^{p,(n+1)-2p}}$$

2.3.2 Segundo Lema de Kaplansky

Analisemos o seguinte problema que apareceu no vestibular do IME (Instituto Militar de Engenharia):

Problema 1. 12 cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos 12 cavaleiros considera seus vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de cinco cavaleiros para libertar uma princesa. Nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.

Solução:
Numerando os cavaleiros de 1 a 12, separemos o problema em dois casos:

i) Um cavaleiro específico participa. Sem perda de generalidade, vamos supor o cavaleiro 12.
Como o cavaleiro 12 participa, por consequência o 11 e o 1 não podem participar do grupo que tem o cavaleiro 12, pois eles são vizinhos e, pelo enunciado são inimigos. Desse modo há quatro vagas para distribuir dentre os cavaleiros de número 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 de modo que não tenhamos dois vizinhos. Usaremos o mesmo raciocínio usado no Primeiro Lema.
São nove símbolos, sendo quatro símbolos $+$ e cinco símbolos $-$, sabemos que não podemos ter dois símbolos $+$ juntos já que isso configuraria soldados consecutivos, desse modo há seis espaços vazios nos quais quatro deles serão substituídos pelos símbolos $+$, restando assim quatro símbolos $+$ e dois símbolos $\emptyset$ para permutarmos entre si, logo temos $P_6^{4,2} = \dfrac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$ maneiras de escolher os quatro companheiros para participa do grupo que tem o cavaleiro 12 como integrante.

ii) O cavaleiro 12 não participa.
Neste caso, devemos escolher 5 cavaleiros dentre todos os outros 11 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11), como teremos que escolher cinco (simbolizados por $+$) e restarão seis (simbolizados por -), perceba que o modo de resolução deste caso é uma aplicação direta do primeiro Lema de Kaplansky, então seguindo o mesmo raciocínio no final teremos uma permutação de sete símbolos, sendo cinco símbolos $+$ e dois símbolos

$\emptyset$, o que acarreta em $P_7^{5,2} = \dfrac{7!}{5!2!} = 21$ formas diferentes.

Logo, temos $15 + 21 = 36$ formas distintas de escolher 5 dentre os 12 cavaleiros com as restrições impostas pelo problema.
Agora, usando mesmo raciocínio, vamos determinar a solução do seguinte problema:

Problema 2. Tendo em vista que os elementos do conjunto $A = \{1, 2, ..., n\}$ estejam dispostos ao longo de um círculo, como indica a figura 4. De quantas maneiras podemos formar um subconjunto com p elementos a partir do conjunto A, de modo que dois elementos do subconjunto não sejam números consecutivos?

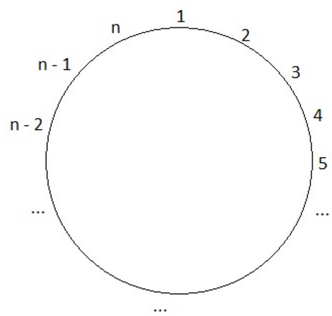

Figura 4: Disposições em círculo

Fonte: Oliveira (2010).

Solução:
Nesse caso, 1 e n são elementos consecutivos. Separemos em dois casos:

i) O elemento 1 figura no subconjunto com p elementos:
Como os números 2 e n são consecutivos ao número 1, então devemos escolher $p - 1$ elementos dentre os números 3, 4, ..., n - 1 de modo que elementos consecutivos não participe. Para tanto usaremos o mesmo esquema dos sinais utilizados no problema dos cavaleiros, então pelo 1º Lema de Kaplansky, fazendo $n \to n - 3$ e $p \to p - 1$. Portanto, o número de subconjuntos em que figura o elemento 1 é igual a $P_{[(n-3)-(p-1)]+1}^{p-1,[(n-3)+1]-2(p-1)} = P_{n-p-1}^{p-1,n-2p}$

ii) O elemento 1 não figura no subconjunto com p elementos:
Como o número 1 não participa, devemos escolher p elementos dentre os números 2, 3, ..., n - 1 de modo que elementos consecutivos não participe. Pelo primeiro Lema

de Kaplansky, fazendo $n \to n-1$. Portanto, o número de subconjuntos em que não figura o elemento 1 é igual a $P_{[(n-1)-p]+1}^{p,[(n-1)+1]-2p} = P_{n-p}^{p,n-2p}$

Portanto, de **i)** e **ii)** segue que a solução desse problema proposto é dada por:

$$\begin{aligned}
P_{n-p-1}^{p-1,n-2p} + P_{(n-p)}^{p,n-2p} &= \frac{(n-p-1)!}{(p-1)!\cdot(n-2p)!} + \frac{(n-p)!}{p!\cdot(n-2p)!} \\
&= \frac{p(n-p-1)! + (n-p)!}{p!\cdot(n-2p)!} \\
&= \frac{p(n-p-1)! + (n-p)\cdot(n-p-1)!}{p!(n-2p)!} \\
&= \frac{(n-p-1)!\cdot[p+(n-p)]}{p!(n-2p)!} \\
&= \frac{(n-p-1)!\cdot n}{p!(n-2p)}\cdot\frac{(n-p)}{(n-p)} \\
&= \frac{n}{(n-p)}\cdot\frac{(n-p)!}{p!(n-2p)!}
\end{aligned}$$

Segundo Lema de Kaplansky:

Seja g(n, p) o número de possibilidades de escolher um subconjunto com p elementos do conjunto {1, 2, 3, 4, ...,n}, sabendo que os elementos 1 e n são consecutivos, de modo que não haja números consecutivos. Isso pode ser feito de $= \frac{n}{(n-p)}\cdot\frac{(n-p)!}{p!(n-2p)!}$ modos distintos, ou seja, $\boxed{g(n,p) = \frac{n}{(n-p)}\cdot\frac{(n-p)!}{p!(n-2p)!}}$

2.3.3 Além do Lema de Kaplansky

De quantos modos podemos selecionar um subconjunto com 4 elementos do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, ..., 12\}$ de modo que eles se diferem de ao menos 3? Para entendermos melhor o enunciado, imagine que o número 5 foi escolhido para participar desse subconjunto, por consequência os dois números anteriores (3 e 4) e os dois números posteriores (6 e 7) não podem participar desse subconjunto, ou seja, se um número x participar os números $x-2, x-1, x+1$ e $x+2$ não podem participar desse subconjunto. Utilizaremos o mesmo procedimento dos símbolos utilizados anteriormente, ou seja, o sinal de + e − representaram respectivamente a presença e a ausência do número no subconjunto em formação, como segue:

{1, 4, 7, 10} . . . representação: + - - + - - + - - + - -

$\{2, 5, 8, 11\}$ ... representação: - + - - + - - + - - + -

$\{1, 5, 9, 12\}$ ... representação: + - - - + - - - + - - +

$\{1, 5, 7, 12\}$ ... representação: + - - - + - + - - - - +

Observação 2.2. *O quarto caso do esquema acima não serve, pois 5 e 7 não diferem ao menos 3, então perceba que a menor quantidade sinais - permitidos entre os sinais + é no mínimo 2.*

A configuração mínima que garante a menor diferença permitida no subconjunto é $+--+--+--+$, entretanto, ainda falta complementar a configuração acima dois sinais $-$, então o problema da quantidade de subconjuntos se resume na seguinte pergunta: De quantas formas diferente pode-se permutar 6 sinais, sendo 4 sinais + e 2 sinais - ?.

A resolução desta pergunta soluciona a primeira, devido a fixação dos dois sinais - entre os sinais +. Sendo assim, cada posicionamento dos dois sinais - restantes de ante dos sinais +, formará os subconjuntos desejados, como segue no esquema a baixo:

$$\overbrace{+--+--+--+}^{Conf.min.} \cup +-++-+ \;=\; +---+--+---+ \;=\; \{1, 5, 8, 12\}$$

$$\overbrace{+--+--+--+}^{Conf.min.} \cup +--+++ \;=\; +----+--+--+ \;=\; \{1, 6, 9, 12\}$$

$$\overbrace{+--+--+--+}^{Conf.min.} \cup -++++- \;=\; -+--+--+--+- \;=\; \{2, 5, 8, 11\}$$

Logo a quantidade de subconjuntos é $P_6^{4,2} = \dfrac{6!}{4!2!} = 15$

3 Atividade Proposta

No capítulo anterior, vimos que o segundo Lema de Kaplansky é obtido por um processo evolutivo do primeiro Lema, é notório que o pleno domínio no processo de demonstração do Primeiro Lema é crucial para o desenvolvimento cognitivo dedutivo do Segundo Lema. Neste capítulo, apresentaremos alguns problemas com resoluções, os quais apresentam um crescimento evolutivo em sua solução. Essa seleção tem como objetivo desenvolver no aluno a percepção de que estruturas primitivas são eixos que servem de base para solucionar problemas mais abrangentes.

Problema 1. (OBM-2001 - modificada) O matemático excêntrico Jones, especialista em Teoria dos Nós, tem uma bota com 5 pares de furos pelos quais o cadarço deve passar. Para não se aborrecer, ele gosta de diversificar as maneiras de passar o cadarço pelos furos, obedecendo sempre às seguintes regras:

• O cadarço deve formar um padrão simétrico em relação ao eixo vertical;

• O cadarço deve passar exatamente uma vez por cada furo, sendo indiferente se ele o faz por cima ou por baixo;

• O cadarço deve começar e terminar nos dois furos superiores e deve ligar diretamente (isto é, sem passar por outros furos) os dois furos inferiores.

Representamos a seguir algumas possibilidades.

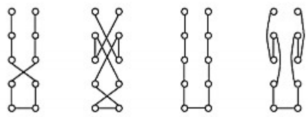

Figura 5: Modelo de disposição de cadarço

Fonte: Oliveira (2010).

Qual é o número total de possibilidades que o matemático tem para amarrar seu cadarço, obedecendo às regras acima?

Observação: Maneiras como as exibidas a seguir devem ser consideradas iguais, isto é, deve ser levada em conta apenas a ordem na qual o cadarço passa pelos furos.

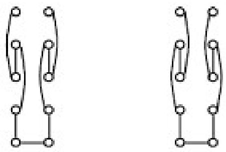

Figura 6: Modelos iguais

Fonte: Oliveira (2010).

Solução:

Este problema será dividido em duas etapas(a escolha da linha e logo após o furo dessa linha), inicialmente enumera-se a linha onde estão os furos superiores por linha 1, a linha dos furos imediatamente abaixo de linha 2 e assim sucessivamente até a linha 5. Note que após o preenchimento de um furo em cada linha, a volta pelos furos que sobraram já estão definidas e terá uma única maneira de preenche-los, devido a simetria. Uma outra observação importante é que a linha 5 será o ponto de início da formação da simetria, já que o cadarço tem que passar pelos dois orifícios simultaneamente, sendo assim, partindo do primeiro orifício da esquerda da primeira linha temos abaixo, as linhas 2, 3, 4 para decidirmos a sequência de preenchimentos, a 5ª linha por sua vez fixa e sempre será a última a ser escolhida, neste caso há $P_3 = 3! = 6$ maneiras, em cada linha deve-se decidir entre os dois orifícios (esquerda e direita), como há 4 linhas abaixo da primeira temos $2^4 = 16$. Pelo **princípio da multiplicação** há $6 \cdot 16 = 96$ maneiras.

Problema 2. (Uerj) Um painel de iluminação possui nove seções distintas, e cada uma delas acende uma luz de cor vermelha ou azul. A cada segundo, são acesas, ao acaso, duas seções de uma mesma cor e uma terceira de outra cor, enquanto as seis demais permanecem apagadas.
Observe quatro diferentes possibilidades de iluminação do painel:

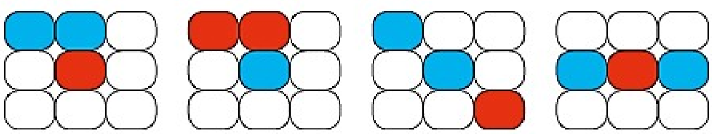

Figura 7: Painéis

Fonte: Pena (2016).

O tempo mínimo necessário para a ocorrência de todas as possibilidades distintas de iluminação do painel, após seu acionamento, é igual a x minutos e y segundos, sendo $y < 60$. Os valores respectivos de x e y são:

Solução:

Primeiramente devemos escolher as três luzes que irão se acender, depois escolhe-se as cores com as quais serão pintadas, note que este problema se resume em duas etapas. Primeira tomada de decisão: escolher 3 luzes do painel para acender.

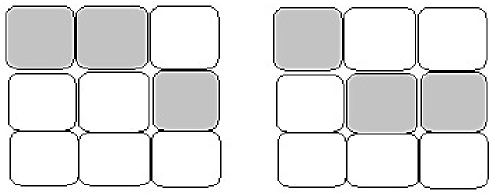

Figura 8: Luzes acesas

Fonte: Elaborada pelo autor.

Pela figura acima, temos uma permutação de 9 luzes, sendo 3 acesas e 6 apagadas, logo há $P_9^{3,6} = \dfrac{9!}{3! \cdot 6!} = 84$

Segunda tomada de decisão: pintar os três espaços selecionados.

Duas azuis e vermelho, são $P_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$ maneiras, consequentemente há também 3 maneiras com duas cores vermelhas e uma azul, logo o total de modos de colorir os três espaços são 6.

Pelo **princípio da multiplicação** há $84 \cdot 6 = 504$ modos de iluminar o painel, como cada mudança corresponde a 1 segundo, temos 504 segundos que corresponde a 8min e 24s. Assim $x = 8$ e $y = 24$.

Problema 3. A figura abaixo representa 17 ruas que se cortam perpendicularmente, sendo oito verticais.

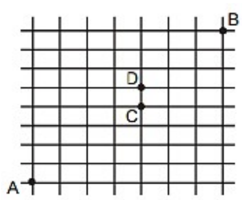

Figura 9: Ruas

Fonte: Oliveira (2010).

Quantos caminhos mínimos uma pessoa pode percorrer para ir do ponto A ao ponto B:

a) sem restrições?

b) sem passar por C?

c) sem passar por C e D?

d) sem passar por C ou D?

Solução:

a) A abordagem inicial do problema terá como base de análise a estrutura de alguns percursos, afim de encontrarmos um padrão que garanta uma visão geral do problema proposto, lembrando que não há restrições. Observe a seguinte figura:

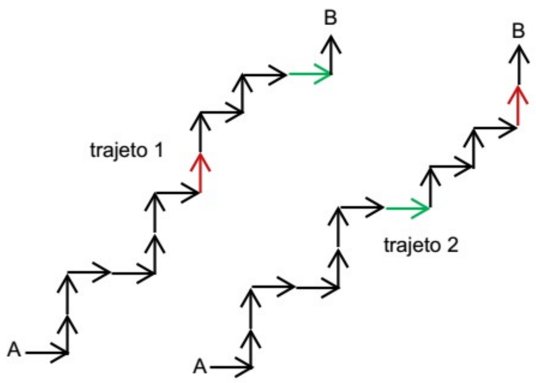

Figura 10: Percurso

Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que as duas trajetórias são distintas, e a segunda se originou a partir da primeira com a permutação das setas vermelha e verde, além disso, perceba que em ambos há uma mesma quantidade de setas, 7 horizontais e 8 verticais totalizando 15 setas. Então cada permutação feita de uma seta horizontal com uma vertical originará um novo percurso, desse modo estamos de ante de uma permutação com repetição, logo há $P_{15}^{7,8} = \dfrac{15!}{7!8!} = 6435$ percursos.

b) Agora temos uma restrição, não podemos passar por C. Fazer diretamente o que a questão quer não é vantajoso já que teríamos que resolver o problema em várias etapas, então a melhor forma de resolver esse problema é utilizando o **método indireto da contagem**. Primeiro calculemos o que o enunciado não quer, que é a quantidade de percurso que passa por C, para facilitar dividimos a **figura 9** em duas partes, veja a **figura 11**.

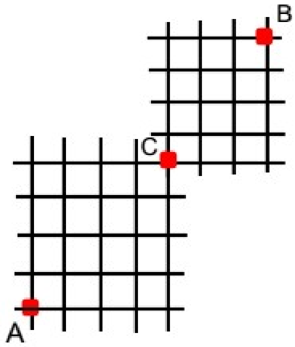

Figura 11: Percurso reduzido

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que o problema ficou dividido em duas tarefas, a primeira decisão é ir de A até C **e** logo imediatamente de C até B. Usando o mesmo procedimento da letra a) temos de A até C 8 setas, sendo 4 horizontais e 4 verticais, logo há $P_8^{4,4} = \dfrac{8!}{4!4!} = 70$ possibilidades, já para ir de C até B temos 7 setas, sendo 3 horizontais e 4 verticais, logo há $P_7^{3,4} = \dfrac{7!}{3!4!} = 35$ possibilidades, como as duas tarefas devem ser realizadas de forma simultânea, pelo **princípio da multiplicação** existem $70 \times 35 = 2450$ modos de ir de A até B passando por C, mas como não queremos que isso ocorra, pelo método indireto da contagem, temos $6435 - 2450 = 3985$ caminhos.

c) Agora temos 3 tomadas de decisões, ir de A até C (70 possibilidades), de C até D (1 possibilidade) e por ultimo de D a B, temos que permutar 6 setas, sendo três horizontais e três verticais, ou seja, existem $P_6^{3,3} = \dfrac{6!}{3!3!} = 20$ caminhos. Consequentemente, pelo método indireto de contagem, temos $6435 - 70 \cdot 1 \cdot 20 = 6435 - 1400 = 5035$ caminhos.

d) Inicialmente vamos calcular o número de caminhos de A até B passando Por D. Como de A até D temos 9 setas, sendo 4 horizontais e 5 verticais, o total de caminhos é $P_9^{4,5} = \frac{9!}{4!5!} = 126$. Os caminhos de D até B são equivalentes a permutação de 6 setas, sendo 3 horizontais e 3 verticais, assim, temos $P_6^{3,3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$ caminhos. O percurso de A até B foi dividido em duas tomada de decisões simultâneas, de A até D e de D até B, dessa forma pelo **princípio da multiplicação** temos $126 \cdot 20 = 2520$ caminhos. Para encontrar o número de maneiras para ir de A até B passando por C ou D devemos somar o número de maneiras de ir de A até B passando por C e ir de A até B passando por D e subtrair desta soma o número de caminhos de ir de A até B passando C e D, ou seja, $n(C \cup D) = n(C) + n(D) - n(C \cap D) = 2450 + 2520 - 1400 = 3570$ maneiras. Como o problema pede a quantidade de caminhos que não passa por C ou D, pelo método indireto da contagem $6435 - 3570 = 2865$ caminhos sem passar por C ou D.

Problema 4. (IME-96) É dado um tabuleiro quadrado 4x4. Deseja-se atingir o quadrado inferior direito a partir do quadrado superior esquerdo. Os movimentos permitidos são os representados pelas setas:

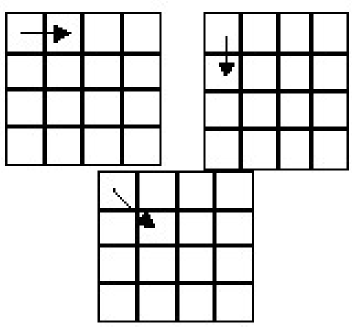

Figura 12: Tabuleiro 4x4

Fonte: Oliveira (2010).

De quantas maneiras isto é possível ?

Solução:

Esta questão é semelhante à anterior, com a única diferença de que agora será acrescentado o movimento na diagonal. Então agora teremos movimentos na horizontal(H), vertical(V) e na diagonal(D). Para facilitar o raciocínio combinatório com a implementação do movimento na diagonal, analisemos alguns percursos expostos na figura13.

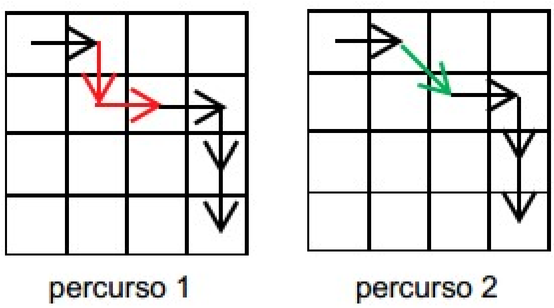

Figura 13: Percurso 4x4

Fonte: Elaborada pelo autor.

O percurso 1 foi construído apenas com movimentos na horizontal e na vertical, enquanto no percurso 2 foi feito com a substituição de dois movimentos(H e V) por um movimento na diagonal(D), então, cada movimento na diagonal substitui dois movimentos, sendo um na vertical e outro na horizontal. Com base no exposto, vamos separar a análise desta questão em casos tendo como base as implementações gradativa das diagonais nos movimentos, que seguem:

i) Nenhuma diagonal:

Os caminhos são compostos por 3 movimentos na horizontal(H) e 3 movimentos na vertical(V). O que acarreta na permutação das letras HHHVVV. Assim, temos $P_6^{3,3} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$ caminhos.

ii) Uma diagonal:

Os caminhos são compostos por 2 movimentos na horizontal(H), 2 na vertical(V) e 1 na diagonal(D). O que acarreta na permutação das letras HHVVD. Assim, temos $P_5^{2,2} = \frac{5!}{2!\cdot 2!} = 30$ caminhos.

iii) Duas diagonais:

Os caminhos são compostos por 1 movimento na horizontal(H), 1 na vertical(V) e 2 na diagonal(D). O que acarreta na permutação das letras HVDD. Asiim, temos $P_4^{2!} = \frac{4!}{2!} = 12$ caminhos.

iv) Três diagonais:

Os caminhos serão representados apenas por movimentos na diagonal(D), evidentemente só há 1 caminho.

Pelo **Princípio da Soma** temos $20 + 30 + 12 + 1 = 63$ caminhos possíveis.

Problema 5. No diagrama abaixo calcule de quantas formas é possível mover o boneco da posição A até a posição B, andando sempre um quarteirão por vez, apenas para o norte ou para o leste.

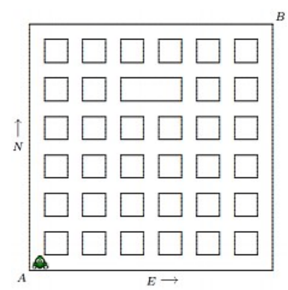

Figura 14: Diagrama

Fonte: Oliveira (2010).

Solução:

Esta questão possui um diferencial em relação as anteriores, exige uma análise mais cautelosa devido um de seus quarteirões ser divergente dos demais, no setor que o contem perde-se um movimento na vertical, nesse caso é necessário a divisão do problema em casos, já que não temos a homogeneidade entre os quarteirões, para tal procedimento o campo visual será o ponto de partida para o desenvolvimento do raciocínio lógico.

Primeiramente divide-se o problema em setores, tendo como base o quarteirão o qual possui a divergência, após feito isso, os demais casos são construídos de forma sequencial que garanta a inclusão de todos os quarteirões nas possíveis trajetórias. Que seguem :

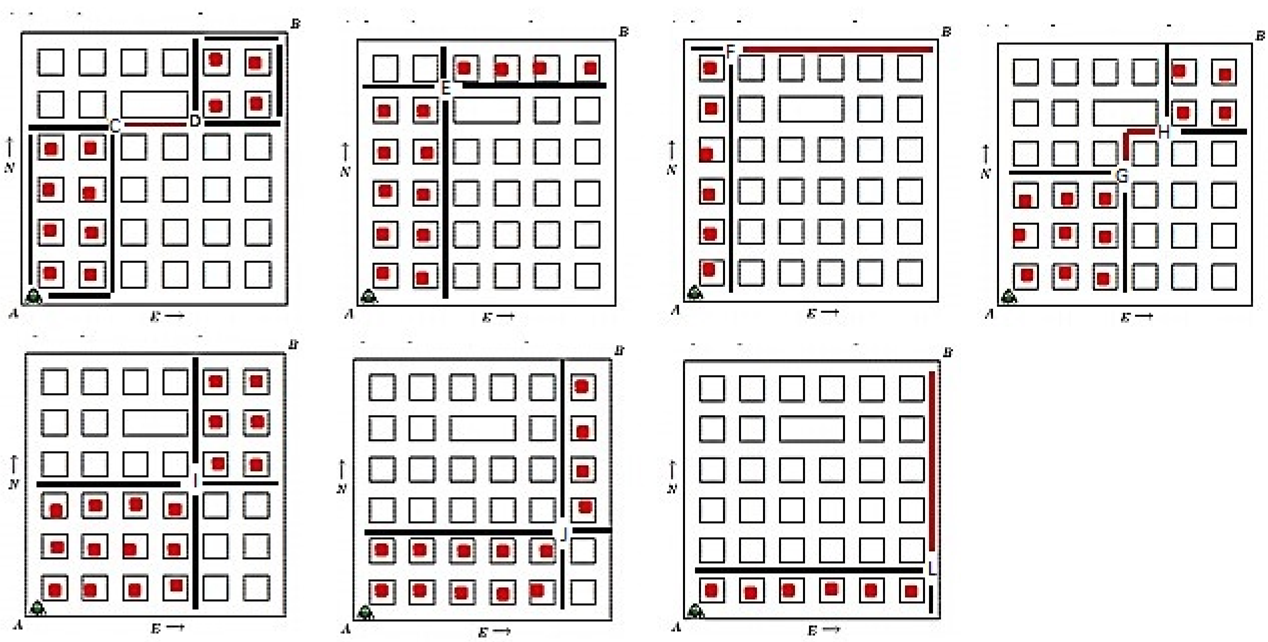

Figura 15: Quarteirões por setores

Fonte: Elaborada pelo autor.

i) Primeiro setor: saindo de A até B passando por C e D.

Para ir de A até C, tem-se 2 quarteirões na horizontal e 4 na vertical, assim o total de caminhos é $P_6^{4,2} = \dfrac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$, de C até D tem apenas um movimento, consequentemente 1 maneira, já de D pra B, tem-se 2 quarteirões na horizontal e 2 na vertical, assim há $P_4^{2,2} = \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ maneiras. Logo, pelo **Princípio multiplicativo** temos $15 \cdot 1 \cdot 6 = 90$ maneiras de ir de A até B passando apenas pelo setor destacado.

ii) Segundo setor: saindo de A até B passando por E.

Para ir de A até E, tem-se 2 quarteirões na horizontal e 5 na vertical, assim o total de caminhos é $P_7^{5,2} = \dfrac{7!}{5! \cdot 2!} = 21$, para ir de E a B, tem-se 4 quarteirões na horizontal e 1 na vertical, assim há $P_5^4 = 5$ maneiras. Logo, pelo **Princípio multiplicativo** temos $21 \cdot 5 = 105$

iii) Terceiro setor: saindo de A até B passando por F.

Para ir de A até F, tem-se 1 quarteirão na horizontal e 6 na vertical, assim o total de caminhos é $P_7^6 = 7$, para ir de f até B, só há 1 caminho na horizontal. Logo, pelo **Princípio multiplicativo** temos $7 \cdot 1 = 7$ maneiras de ir de A até B passando por f.

iv) Quarto setor: saindo de A até B passando por G e H.

Para ir de A até G, tem-se 3 quarteirões na horizontal e 3 na vertical, assim o total de caminhos é $P_6^{3,3} = \dfrac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$, de C até D tem apenas uma trajetória, consequentemente 1 maneira, já de h pra B, tem-se 2 quarteirões na horizontal e 2 na vertical, assim há $P_4^{2,2} = \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ maneiras. Logo, pelo **Princípio multiplicativo** temos $20 \cdot 1 \cdot 6 = 120$ maneiras de ir de A até B passando apenas pelo setor destacado.

v) Quinto setor: saindo de A até B passando por I.

Para ir de A até i, tem-se 4 quarteirões na horizontal e 3 na vertical, assim o total de caminhos é $P_7^{4,3} = \dfrac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$, para ir de i a B, tem-se 2 quarteirões na horizontal e 3 na vertical, assim há $P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2! = 10}$ maneiras. Logo, pelo **Princípio multiplicativo** temos $35 \cdot 10 = 350$

vi) Sexto setor: saindo de A até B passando por J.

Este setor é semelhante ao ítem **ii)**, consequentemente há 105 maneiras de se fazer esse percurso.

vii) Sétimo setor: saindo de A até B passando por L.

Este setor é semelhante ao ítem **iii)**, consequentemente há 7 maneiras de se fazer esse percurso.

Por fim, pelo **princípio da adição** temos como resultado final a soma de todos os ítens $90 + 105 + 7 + 120 + 350 + 105 + 7 = 784$ maneiras distintas de ir de A até B usando os movimentos permitidos.

Problema 6. (AFA) Lançando-se 4 dados, sucessivamente, o número de maneiras de se obter soma 7 é:

a) 20 b) 24 c) 72 d) 216

Solução:

Em um dado convencional o menor valor que pode sair é 1, então a soma mínima que esses dados podem resultar é 4, mas o problema quer que a soma seja 7, no entanto restam $7 - 4 = 3$ pontos para distribuir entre os quatro dados, para tal situação usaremos as seguintes representações: $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 7$ em que d_i são os dados lançados, onde $1 \leq i \leq 4$. O símbolo $\bullet$ representa uma unidade e equivale a um ponto, e os símbolos $+$ separam cada lançamento. Assim temos:

$$\overbrace{\bullet+\bullet+\bullet+\bullet=4}^{Conf.min.} \bigcup \bullet+\bullet\bullet++ \;=\; \bullet\bullet+\bullet\bullet\bullet+\bullet+\bullet \;\Rightarrow\; d_1 = 2, d_2 = 3, d_3 = 1 \text{ e } d_4 = 1$$

$$\overbrace{\bullet+\bullet+\bullet+\bullet=4}^{Conf.min.} \bigcup +\bullet\bullet\bullet++ \;=\; \bullet+\bullet\bullet\bullet\bullet+\bullet+\bullet \;\Rightarrow\; d_1 = 1, d_2 = 4, d_3 = 1 \text{ e } d_4 = 1$$

$$\overbrace{\bullet+\bullet+\bullet+\bullet=4}^{Conf.min.} \bigcup \bullet++\bullet+\bullet \;=\; \bullet\bullet+\bullet+\bullet\bullet+\bullet\bullet \;\Rightarrow\; d_1 = 2, d_2 = 1, d_3 = 2 \text{ e } d_4 = 2$$

Com base no exposto acima, tem-se uma parte fixa e uma outra complementar, note que a quantidade de resultados possíveis após as combinações dos dados da-se unicamente pela permutação da parte complementar ($d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 3$) , representada por 6 símbolos, sendo 3 símbolos ($\bullet$) e 3 símbolos ($+$). Logo a quantidade de maneiras de se obter 7 é $P_6^{3,3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$, letra a).

Problema 7 Calcular o número de soluções inteiras naturais da inequação $x+y+z < 5$.

Solução:

Como estamos trabalhando somente com variáveis naturais, temos que o sistema linear $x + y + z < 5$ é equivalente a $x + y + z \leq 4$. Analisemos as possíveis somas:

$x + y + z = 0$ neste caso, há uma sobra de 4 unidades para obter a soma máxima, que é 4.

$x + y + z = 1$ neste caso há uma sobra de 3 unidades.

$x + y + z = 2$ neste caso há uma sobra de 2 unidades.

$x + y + z = 3$ neste caso há uma sobra de 1 unidade.

$x + y + z = 4$ neste caso não há sobra.

Note que a solução final é dada pela união de todas as soluções das somas acima, e as variáveis x, y e z assumem valores naturais menores ou iguais a 4, chamemos de **s** a variável que representara a sobra deixada em cada caso, consequentemente f assume todos os valores naturais menores ou iguais a 4, dessa forma, resolver $x+y+z<5$ é o mesmo que resolver $x+y+z+s=4$. segue:

$\mid+\mid+\mid+\mid$	representa	x = 1, y = 1, z = 1 e s = 1	$x+y+z=3,$	sobra 1
$\mid\mid+++\mid\mid$	representa	x = 2, y = 0, z = 0 e s = 2	$x+y+z=2$	sobra 2
$\mid+\mid+\mid\mid+$	representa	x = 1, y = 1, z = 2 e s = 0	$x+y+z=4$	sobra 0

Com base no exposto acima, a quantidade de soluções naturais é $P_7^{4,3} = \dfrac{7!}{4!\cdot 3!} = 35$

4 Considerações Finais

O presente trabalho apresentou uma proposta de abordagem de Análise Combinatória no ensino médio, mostrando a importância dos princípios fundamentais de contagem no âmbito do desenvolvimento das estruturas cognitivas presente no raciocínio combinatório.

Abordou-se os Lemas de Kaplansky com o uso de estruturas simbólicas, onde as permutações destas, foram trabalhadas de forma estratégicas, evitou-se assim o uso da combinação, pois o intuito desse trabalho é despertar a construção do processo em si, e os Lemas possuem uma conectividade, garantindo assim um desenvolvimento ascendente. Por tanto, este trabalho é uma ferramenta complementar para o professor utilizar em sua abordagem, de preferência no inicio da explanação do conteúdo.

Os problemas presentes, foram selecionados a partir de questões que evidenciam uma mesma linha de raciocínio, mas com dificuldades evolutivas, pois dessa maneira espera que se viabilize aos alunos a oportunidade de descobrirem padrões, modelando-os na resolução de questões mais complexas.

Dessa forma, almeja-se que o ensino da Análise Combinatória seja desafiador e ao mesmo tempo prazeroso, onde o aluno molde e não seja moldado, que cada problema seja uma base para a solução dos demais problemas.

Referências

[1] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Guia de livros didáticos PNLD 2015 - Ensino Médio : Matemática. Brasília: MEC /SEB. Disponível em <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/guias-do-pnld/item/5940-guia-pnld-2015> Acesso em 17 de jul.2016.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica.Parâmetros Curriculares Nacionais : Matemática. Brasília: MEC /SEB, 1998. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf> Acesso em 04 jul.2016.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais :Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias Brasília: MEC /SEB, 1998. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/cienciasNatureza.pdf> Acesso em 04 jul.2016.

[4] BRUALDI, Richard A. **Introductory Combinatorics**. 5ª ed. Pearson, 2010.

[5] FONSECA, S.S. et al. Uma reflexão sobre o conteúdo análise combinatória em dois livros didáticos do ensino médio. In: Scientia Plena, vol. 10, num. 04. 2014.

[6] Futuro Militar, Análise Combinatória - outros métodos de contagem. Disponível em <http://www.futuromilitar.com.br/portal/attachments/article/83/analise_combinatoria_ime_teoria_romulo_garcia.pdf> Acesso em 04 jul. 2016.

[7] LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio. Volume 2**. 6ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[8] MORGADO, A. C. O. et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Coleção do Professor de Matemática).

[9] OLIVEIRA, Marcelo Rufino de; Carneiro, Manoel Leite. **Coleção Elementos da matemática, 3: sequências, análise combinatória, matriz**. 3ª ed. Fortaleza: VestSeller, 2010.

[10] PENA, Marcelo. **Pré-universitário: anual, volume 2: matemática**. fortaleza: FB Editora, 2016.