



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO EM MATEMÁTICA

**O problema de Cauchy para um sistema acoplado de equações de Schrödinger com derivadas.**

**Rafael Emanuel Costa**

**Teresina - 2016**

**Rafael Emanuel Costa**

**Dissertação de Mestrado:**

**O problema de Cauchy para um sistema acoplado de equações  
de Schrödinger com derivadas.**

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Roger Peres de Moura

**Teresina - 2016**



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

*O problema de Cauchy para um sistema acoplado de equações de Schrödinger com derivadas.*

Rafael Emanuel Costa

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 31 de Agosto de 2016.

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Roger Peres de Moura (UFPI) - Presidente

Prof. Dr. Gleison do Nascimento Santos (UFPI)

Prof. Dr. José Francisco Alves de Oliveira (UFPI)

FICHA CATALOGRÁFICA  
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí  
Biblioteca Setorial do CCN

C837p Costa, Rafael Emanuel.  
O problema de Cauchy para um sistema acoplado de equações de Schrödinger com derivadas / Rafael Emanuel Costa. – Teresina, 2016.  
69f.: il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2016.

Orientador: Prof. Dr. Roger Peres de Moura

1. Análise. 2. Equações Diferenciais Parciais. I. Título

CDD 515.35

*À minha mãe, Stela Núbia Costa.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela Sua infinita misericórdia, amor e principalmente apoio nas horas que eu mais precisei. Nunca me deixou andar só e sempre tem me guardado.

Agradeço a minha mãe Dona Stela Núbia Costa, a que sua vida foi dedicada para que esse dia pudesse acontecer, sempre acreditou nos meus estudos até mais que eu mesmo! Sua fé, seu carinho e sua força me manteve vivo.

Agradeço a minha avó Neli e vô Zezito por terem participado de minha criação, nada que farei pagará o que fizeram por mim. Aos meus primos Werlandio e Wernan os considero mais irmãos do que primos. As minhas primas Laura e Laiana, onde sei que posso contar, a tia estaria muito orgulhosa de vocês!

Agradeço aos diversos amigos que me ajudaram nessa peleja de dois anos, que só quem participou sabe que não foi( e nunca será) fácil, a Dona Diana uma mãe para minha mãe, fez coisas que talvez mais ninguém teria feito por ela. Ao Dr. Renato e sua esposa Dona Cândida, pessoas que sempre estiveram presente mesmo morando longe, sem a ajuda deles talvez eu nunca tivesse essa oportunidade. A Ivânia que me ajudou, e que continua a ajudar com suas orações

Agradeço aos meus amigos de longas datas, os do ensino médio os quais tiveram participação na fase mais complexa da vida de um ser humano, Camila Rocha, Rayana Paiva, Flávio Martins, Leonardo Cronemberg. Aos meus grandes amigos de graduação Bruno Mendes, Daniel Roque, Elienai Stanley, Geovane Sampaio, Liana Mara, Lucas Alencar, sem eles a graduação teria sido muito chata e bem mais difícil. Aos irmãos do IFPI, Os Vingadores: Louran Sousa, Ilton e Thasciano Carvalho.

Agradeço aos meus amigos do mestrado, dois anos em que tudo foi muito intenso, insônias compartilhadas, dúvidas tiradas, tristezas revezadas e tudo que possa imaginar, essa galera

---

sofreu, mas vencemos, Andressa Gomes, uma amiga, confidente, ela é a definição de amizade, uma pessoa muito especial. Antônio de Pádua, talvez o melhor amigo que tive até hoje, muito estranho, mas se der tempo você entende ele. Jhonata Bezerra, uma pessoa exemplar em tudo(menos geometria), admiro-o muito. Meu arrependimento é não ter aproveitado mais o tempo com essa galera, tanta coisa pra fazer e quando sobrava tempo íamos para pizzaria, deveríamos ter viajado, passeado mais. Ao Atécio talvez o único que me entendia, um irmão que carrego comigo! Ao Lucas Machado, um bródi que ganhei! Jeferson Nascimento o concurseiro da galera! Ray Victor, muito chato mas virou um baita de um irmão naquela salinha! Antônio Aguiar, Miguel e Sandoel esse trio era muito massa, cada um me deve uma galinha caipira!! O Edilson que conheci quando era monitor e virei colega de mestrado, esse cara é especial, se eu tenho um problema sei que posso contar com ele, uma amizade que não quero perder, não por interesse mas pelo companheirismo.

Agradeço também aos demais amigos do mestrado, Lucas Vidal (Doc. Vidal), Victor Carvalho (ele é top!), Raul Kazan (meu aluno!!), Antônio Luiz (GN), Lucas Cassiano (um gentleman), Jaciel, Andreilino, Lucas Quaresma, Lívio, Fernando Gomes, Ydenilson (esse cara é, meu Brother), Kelvi(KelviNeidor), Thiago Esteves, Thiago Balada, Baiano, Edimilson, Leonardo, Valéria, .

Agradeço aos meus alunos, também proporcionam meu amadurecimento profissional e social, a quem respeito e tenho carinho, sem distinção, sempre que vou para uma sala de aula lembro dos meus professores. Se eu chegar a ser 10% do professores que tive então já estarei realizado. Em especial os de Cálculo II - Química, Ingrid Spíndola, Lucas Costa, Pelrry Costa, Pedro Victor, Cristhian Bremmer, Larissa Maranhão.

Agradeço aos Professores desse departamento, ao Prof. Vicente meu primeiro professor no DEPMAT. Prof<sup>a</sup>. Aurineide, e outros que me passaram parte de seu conhecimento. Sempre digo que me sinto honrado em ter tido a oportunidade de assistir aos Shows que eles davam, em especial para o Prof. Barnabé Pessoa Lima, Prof. Paulo Alexandre, Prof. Jurandir, Prof. Xavier, Prof. Newton e o Prof. Juscelino, este último tem minha admiração, professor de fino trato com a matemática, resolve aplicações e tira dúvidas de qualquer coisa, sem falar na didática.

Agradeço também em especial a minha banca pela disponibilidade e aceitação em parti-

cipar. Muito obrigado pelas correções e sugestões. O Prof. José Francisco, que ministrou Análise no  $\mathbb{R}^n$ , tenho muita estima por ele, sua dedicação durante a disciplina e sempre solícito aos interesses dos alunos. Ao Prof. Gleison que me ajudou muito durante a dissertação, muito inteligente e que não tem exercício impossível para esse cara.

Agradeço ao Prof. Roger, meu orientador, pela sua paciência de Jó, sinceramente se não fosse o apoio dele, talvez eu já tinha desistido a muito muito tempo, ele mais que ninguém sabe do que passei, e talvez, outra pessoa no meu lugar teria desistido. Ele sempre paciente me dava ânimo. Professor, que fique registrado o meu agradecimento, lhe desejo tudo de bom, muito sucesso!

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.



*“Ninguém te poderá resistir todos os dias da tua vida. Como fui com Moisés, assim serei contigo; não te deixarei, nem te desampararei.”*

Josué 1.5.

# Resumo

Neste trabalho estudamos o problema de Cauchy para um sistema acoplado de equações de Schrödinger não-lineares com derivadas. A motivação para estudar tal sistema foi verificar se ele herda as mesmas propriedades da equação de Schrödinger não-linear com derivadas clássica. Nesse sentido, investigamos a boa colocação do problema com dado inicial pequeno em espaços de Besov de ordem  $1/2$  e de Sobolev em  $L^2$  de ordem  $s > 1/2$ .

## Palavras-chave

Boa Colocação em Espaços de Besov; Equação de Schrödinger não-Linear com Derivadas; Sistema de Equações de Schrödinger não-Lineares com Derivadas.

# Abstract

In this work we study the Cauchy problem for a coupled system of derivative nonlinear Schrödinger equations. The motivation to study such system was to verify whether it inherits the same properties of the classical derivative nonlinear Schrödinger equation. In this sense, we investigate the local well-posedness with small initial data in the Besov space of order  $1/2$  and Sobolev spaces of order  $s > 1/2$ .

**Keywords:**

Well-Posedness in Besov Spaces; Derivative Nonlinear Schrödinger Equation; System of Derivative Nonlinear Schrödinger Equations.

# Conteúdo

<b>Resumo</b>	<b>vi</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>1 Resultados Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1 Notação e alguns espaços funcionais . . . . .	5
1.2 A Transformada de Fourier . . . . .	10
1.3 Multiplicadores de Fourier . . . . .	16
1.4 Os espaços de Sobolev e de Besov generalizados . . . . .	19
1.4.1 Partição diádica da unidade e multiplicadores de Littlewood-Paley . . . . .	19
1.4.2 Definição e propriedades fundamentais dos espaços de Besov e de Sobolev generalizados. . . . .	25
1.5 Paraproductos e estimativa do comutador de Derivadas Fracionárias . . . . .	29
<b>2 Estimativas para a equação de Schrödinger linear</b>	<b>32</b>
2.1 O fluxo linear . . . . .	32
2.2 Estimativas lineares usuais . . . . .	34
2.3 Estimativas lineares localizadas em fase . . . . .	36
<b>3 Boa colocação local</b>	<b>40</b>
3.1 Introdução e enunciado dos teoremas de boa colocação . . . . .	40
3.2 Estimativas não lineares e para $U(t)\mathbf{u}_0$ em $X_T$ . . . . .	41
3.3 Boa colocação em $B_2^{\frac{1}{2},1}(\mathbb{R})$ . . . . .	54

---

3.4	Boa colocação local em $H^s(\mathbb{R})$ , $s > \frac{1}{2}$ . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Apêndice</b>	<b>63</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>66</b>

# Introdução

Este trabalho tem como objetivo estudar o Problema de Valor Inicial (PVI) associado ao seguinte sistema acoplado de equações de Schrödinger (NLS) e equações NLS com derivadas:

$$\begin{cases} \partial_t u_j - i\partial_x^2 u_j = i\mu \left( \sum_{k=1}^n |u_k|^2 \right) u_j + \gamma \partial_x \left( \sum_{k=1}^n |u_k|^2 u_j \right) - \lambda \left( \sum_{k=1}^n u_k \partial_x (\bar{u}_k u_j) \right), \\ u_j(x, 0) = u_{j,0}(x), \quad j = 1, \dots, n, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1)$$

onde  $u_j = u_j(x, t)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , são funções com valores complexos,  $\mu$ ,  $\gamma$  e  $\lambda$  são parâmetros reais e  $n \geq 1$  é um número natural arbitrário. Na forma vetorial o sistema (1) é escrito como

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} - i\partial_x^2 \mathbf{u} = i\mu |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} + \gamma \partial_x \left( |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \right) - \lambda \left( \sum_{k=1}^n u_k \partial_x (\bar{u}_k \mathbf{u}) \right), \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2)$$

cuja formulação integral é

$$\mathbf{u}(t) = U(t) \mathbf{u}_0 + \int_0^t U(t-s) \left\{ -i\mu |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} + \gamma \partial_x (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) + \lambda \sum_{k=1}^n u_k \partial_x (\bar{u}_k \mathbf{u}) \right\}(s) ds, \quad (3)$$

onde  $\mathbf{u} := (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $U(t)$  denota o operador linear associado ao multiplicador de Fourier  $e^{-it\xi^2}$  (detalhes encontram-se no Capítulo 2 e nos capítulos posteriores), ou seja, ao fluxo da equação de Schrödinger linear.

No caso  $n = 1$  o sistema (1) com  $\lambda = 0$  é a clássica equação de Schrödinger não-linear com derivadas

$$\partial_t u - i\partial_x^2 u = i\mu |u|^2 u + \gamma \partial_x (|u|^2 u). \quad (4)$$

O estudo de generalizações multi-componentes da equação NLS tem despertado o interesse de muitos pesquisadores (principalmente Físicos) devido sua ampla aplicabilidade na Física no contexto real, por exemplo, no estudo de ondas aquáticas, óptica não-linear

e física de plasma [14, 21, 28]. O sistema com duas equações (duas componentes) foi proposto por Manakov [29] para descrever a propagação de campos elétricos polarizados em uma fibra ótica. Para  $n = 2$  e  $\mu = 0$ , o sistema em (1) modela a propagação de ondas de Alfvén polarizadas, e, para  $\mu \neq 0$  e  $\gamma \neq 0$  o sistema em (1) é um modelo para descrição da propagação de pulsos ultra curtos (ou seja, de baixíssima intensidade) em fibras óticas birefringent e suas soluções de tipo sóliton (veja [19, 20]). Em [30, 31] Matsuno constroi as soluções de tipo  $N$ - sóliton brilhante para o sistema em (1) com  $\gamma = \lambda$ .

Do ponto de vista da Matemática, a equação de Schrödinger não linear com derivadas (4) (isto é, o sistema (1) com  $n = 1$ , com sigla em ingles DNLS) tem sido amplamente estudada nos últimos anos e por vários destacados pesquisadores (veja, por exemplo, [2], [6], [11], [18], [35], [43], [44] e referências lá contidas).

Já que o sistema (1) é uma extensão da equação DNLS, é natural questionar se ele herda as propriedades daquela equação, ou seja, quais propriedades matemáticas o sistema e a equação têm em comum. Aqui, tomando como base [33], [40] e um artigo de V. Barros e R. Moura que encontra-se em preparação, vamos provar que o PVI para o sistema em (1) é localmente bem posto para dados iniciais pequenos nos espaços de Besov não homogêneo  $B_2^{\frac{1}{2},1}(\mathbb{R})$  e nos espaços de Sobolev não homogêneos  $H^s(\mathbb{R})$ ,  $s > 1/2$ .

É importante salientarmos que o PVI (2) é equivalente à equação integral (3) e que o estudo da boa colocação mencionado acima não é feito diretamente sobre ele e sim sobre sua versão integral (3).

Dizemos que a equação integral (3) é localmente bem posta em um espaço funcional  $X$ , se para todo  $\vec{u}_0 \in X$  existe um  $T > 0$  e uma única solução  $u \in C([0, t]; X) \cap Y$  (onde  $Y$  é outro espaço funcional a ser encontrado) de (3) para  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ . Além disso, a aplicação dado - fluxo, isto é, a aplicação  $\mathbf{u}_0 \mapsto \mathbf{u}(\cdot, t)$ , localmente definida em  $C([0, t]; X)$ , é contínua. Portanto, a noção de boa colocação aqui estudada inclui existência, unicidade e persistência (para cada  $t$ , a solução  $u(\cdot, t)$  pertence ao mesmo espaço que o dado inicial e sua trajetória no tempo descreve uma curva nele). Isto significa que o fluxo de (3) define um sistema dinâmico em  $X$ . Quando  $T$  puder ser tomado arbitrariamente grande, dizemos que (3) é globalmente bem posto em  $X$ .

Devido a complexidade de se exibir soluções de tipo ondas solitárias para sistemas, conjecturamos com uma boa margem de segurança ser pouco viável o estudo da má colocação no sentido de que a aplicação dado-fluxo é Lipschitz como feito para a equação

DNLS em [2], mas (apesar de não exibirmos aqui) somos bastante seguros em afirmar que vale para o PVI (1) com  $\lambda = 0$  o mesmo resultado de má colocação feito em Takaoka [44] para a equação (4).

Como no caso  $n = 1$  (veja Hayashi [15]), o sistema em (1) com  $\lambda = 0$  tem as seguintes leis de conservação ao longo do fluxo:

$$Q(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 \quad (5)$$

e

$$E(\mathbf{u}) = \|\partial_x \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + 2\gamma^2 \|\mathbf{u}\|_{L^6}^6 + 3\gamma \text{Im}(\partial_x \mathbf{u}, |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})_{L^2}. \quad (6)$$

(A demonstração desse fato encontra-se no Apêndice no último capítulo do trabalho).

Uma importante observação é que o sistema em (1) com  $\lambda = 0$  é gauge equivalente ao sistema

$$\partial_t \mathbf{v} - i\partial_x^2 \mathbf{v} = i\mu |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} - \gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \partial_x \bar{\mathbf{v}} - i\gamma \left(\frac{\gamma}{2} + 2\right) |\mathbf{v}|^4 \mathbf{v}, \quad (7)$$

onde

$$\mathbf{v}(x, t) = e^{i\rho} \mathbf{u}(x, t), \quad \text{com} \quad \rho(x, t) = -\gamma \int_{-\infty}^x |\mathbf{u}(y, t)|^2 dy,$$

(confira o Corolário 4.0.1 no Apêndice) e isso nos faz conjecturar que possivelmente vale para o PVI (1) com  $\lambda = 0$  o mesmo resultado de boa colocação local em  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$  da equação DNLS (4) provado por Takaoka [44], pois o sistema (7) é muito parecido com a equação DNLS (4) transformada pela mudança de variável

$$v(x, t) = e^{i\rho} u(x, t), \quad \text{com} \quad \rho(x, t) = -\gamma \int_{-\infty}^x |u(y, t)|^2 dy,$$

isto é,

$$\partial_t v - i\partial_x^2 v = i\mu |v|^2 v - \gamma v^2 \partial_x \bar{v} - i\gamma \left(\frac{\gamma}{2} + 2\right) |v|^4 v. \quad (8)$$

Mas há uma diferença entre a equação DNLS gauge transformada (8) e o sistema em (7) que pode comprometer a aplicação da técnica empregada por Takaoka [44]: o termo  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \partial_x \bar{\mathbf{v}}$  não tem a mesma simetria do termo unidimensional  $v^2 \partial_x \bar{v}$ , pois nele há termos do tipo  $v_j^2 \partial_x \bar{v}_l$ , com  $j \neq l$ .

Outra observação muito relevante é que talvez seja possível demonstrar-se a boa colocação local para a equação (3) sem restrição sobre a norma do dado inicial (ou seja, com dado inicial qualquer) em  $H^s(\mathbb{R})$ ,  $s > 1/2$  (veja [32] e [34]).

O trabalho está dividido em quatro capítulos, da seguinte forma:



O primeiro capítulo é de resultados preliminares, ou seja, que darão suporte para elaboração dos demais capítulos e compreensão da teoria apresentada no trabalho. Nele começamos com a notação, definição dos espaços  $L^p$  e estimativas neles, tais como as desigualdades de Hölder e de Minkowski e os teoremas de interpolação de Riezs-Thorim e de Marcikiewikz; em seguida apresentamos o espaço de Schwartz e suas propriedades básicas. Depois vem a transformada de Fourier e suas propriedades fundamentais, os Multiplicadores de Fourier, os espaços de Sobolev e de Besov generalizados e suas propriedades básicas, e finalizamos com os paraproductos e a regra de Leibniz para derivadas fracionárias.

No segundo capítulo exibimos as estimativas para o fluxo da equação de Schrödinger linear que dão suporte para estimar a parte linear da equação integral (3) no espaço de resolução da mesma. Começamos com as estimativas lineares usuais e depois apresentamos as estimativas lineares localizadas em fase.

No Capítulo 3 é onde provamos nossos resultados de boa colocação local. Ele começa com o enunciado dos teoremas a serem provados; na sequência fazemos as estimativas para a parte não-linear da equação (3) no espaço de resolução. Por fim, coligimos as estimativas lineares e não-lineares para, usando o teorema de ponto fixo para contrações, provarmos a boa colocação em  $B_2^{\frac{1}{2},1}(\mathbb{R})$  e depois em  $H^s(\mathbb{R})$ . O resultado de boa colocação em  $H^s(\mathbb{R})$  poderia também ser obtido usando-se a técnica empregada por M. A. Cardoso em [4].

O último capítulo é um apêndice com a demonstração de que os funcionais (5) e (6) são conservados ao longo do fluxo do sistema.

É importante informar que esse trabalho teve como base principal cálculos feitos por Vanessa Barros e R. de Moura para um artigo que encontra-se em preparação no momento.

# Capítulo 1

## Resultados Preliminares

Nesse capítulo apresentaremos os resultados básicos para entendimento do trabalho, desde informações sobre notação até teoremas mais complexos, sendo que a demonstração de alguns será omitida, porém referenciadas.

### 1.1 Notação e alguns espaços funcionais

Nesta seção daremos algumas notações que serão úteis ao longo do texto. Indicaremos por  $|\cdot|$ , a norma euclidiana usual em  $\mathbb{R}^n$ , se  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $r > 0$ , então a bola de centro  $x$  e raio  $r$  é,

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}.$$

Se  $x, y \in \mathbb{R}^n$  denotaremos  $x \cdot y = \sum_{j=1}^n x_j \cdot y_j$ . Um multi-índice é uma  $n$ -upla de inteiros não negativos. Se  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  é um multi-índice, ou seja,  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  onde cada  $\alpha_j \in \mathbb{N}$ , então denotaremos,

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j, \quad \alpha! = \prod_{j=1}^n \alpha_j!, \quad \partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Dadas quaisquer quantidades reais positivas  $C, D$ , que podem depender de uma ou mais variáveis, a notação  $C \lesssim D$  significa que existe uma constante  $c > 0$  tal que  $C \leq cD$ ; e,  $C \sim D$  significa  $C \lesssim D$  e  $D \lesssim C$ .

Vamos fazer uso frequente da seguinte desigualdade:

**Lema 1.1.1.** *Seja  $C_r, r \in \mathbb{N}$ , constantes reais positivas. Então*

$$\sum_{j \geq 1} \sum_{r \geq j} 2^j C_r \leq \sum_{r \geq 0} 2^r C_r.$$

*Demonstração.* Notemos que

$$\sum_{j \geq 1} \sum_{r \geq j} 2^j C_r = \sum_{j \geq 1} \sum_{r \geq 0} \chi_{\leq 0}(j-r) 2^{j-r} 2^r C_r,$$

onde  $\chi_{\leq 0}$  denota a função característica dos inteiros negativos. Trocando a ordem do somatório obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 1} \sum_{r \geq j} 2^j C_r &= \sum_{r \geq 0} 2^r C_r \sum_{j \geq 1} \chi_{\leq 0}(j-r) 2^{j-r} \\ &= \sum_{r \geq 0} 2^r C_r \sum_{l \geq 1} 2^{-l} = \sum_{r \geq 0} 2^r C_r, \end{aligned}$$

como desejávamos. □

Dados dois operadores  $A$  e  $B$ , denotamos por  $[A, B] = AB - BA$  o comutador entre  $A$  e  $B$ .

Dada uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\text{supp}(f)$  denotará o suporte de  $f$  que é o conjunto

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

Dado um espaço de medida  $(X, \mu)$ , denotaremos por  $L^p(X, \mu)$  com  $1 \leq p < \infty$  o conjunto de todas as funções mensuráveis  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  tais que  $|f|^p$  é integrável e para cada  $f \in L^p(X, \mu)$ , denotaremos por

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu(x) \right)^{1/p},$$

que por sua vez é uma norma em  $L^p(X, \mu)$ .

Quando  $p = \infty$ ,  $L^\infty(X, \mu)$  denotará o conjunto de todas as funções mensuráveis essencialmente limitadas, isto é, o conjunto das funções  $f$  tais que

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > c\}) = 0,$$

para algum  $c > 0$ . Para cada  $f \in L^\infty(X, \mu)$ , a norma é denotada por

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{c > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > c\}) = 0\}.$$

**Proposição 1.1.1** (Desigualdade de Hölder). *Sejam  $\{p_j\}_{j=1}^{j=N} \subset [1, \infty]$  e  $r \geq 1$  tais que*

$$\frac{1}{r} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{p_j}, \text{ então}$$

$$\left\| \prod_{j=1}^N f_j \right\|_{L^p} \leq \prod_{j=1}^N \|f_j\|_{L^{p_j}}, \quad f_j \in L^{p_j}(\mathbb{R}).$$

*Demonstração.* Veja a referência [9]. □

Denotaremos por  $L_x^p L_T^q$  e  $L_T^q L_x^p$  os espaços de Lebesgue nas variáveis espaço-tempo, com suas respectivas normas:

$$\|f(t, x)\|_{L_x^p L_T^q} = \| \|f(\cdot, x)\|_{L^q} \|_{L^p},$$

$$\|f(t, x)\|_{L_T^q L_x^p} = \| \|f(t, \cdot)\|_{L^p} \|_{L^q}.$$

O resultado abaixo é uma importante caracterização dos espaços  $L^p$ .

**Proposição 1.1.2.** *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  (ou  $\mathbb{R}$ ) mensurável e sejam  $1 \leq p, q < \infty$  tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Então  $f \in L^p$  se, e somente se,  $\sup A < \infty$ , onde*

$$A = \left\{ \int_{\Omega} |f(x)| g(x) dx : g \geq 0 \text{ q.s. em } \Omega \text{ e } \|g\|_q \leq 1 \right\}.$$

Nesse caso vale  $\|f\|_p = \sup A$ .

*Demonstração.* Veja a referência [9]. □

Enunciamos abaixo um importante resultado sobre estimativa de operadores integrais em  $L^p$  e a desigualdade de Minkowski para integrais. Quando não especificado, os  $p$ 's que aparecerem são tais que  $1 \leq p < \infty$ .

**Proposição 1.1.3.** *Seja  $K$  uma função mensurável em  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ . Suponha que existe  $C > 0$  tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^m} |K(x, y)| dx \leq C, \text{ para q.t.p. } y \in \mathbb{R}^n$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K(x, y)| dy \leq C, \text{ para q.t.p. } x \in \mathbb{R}^m.$$

Se  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , então a integral

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y) dy$$

converge absolutamente para q.t.p.  $x \in \mathbb{R}^m$ . A função  $Tf$  assim definida pertence a  $L^p(\mathbb{R}^m)$  e

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

*Demonstração.* Veja o Teorema 6.18 da referência [9]. □

Agora enunciamos a desigualdade de Minkowski para integrais:

**Proposição 1.1.4.** *Seja  $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) mensurável tal que,  $f(\cdot, y) \in L^p(\mathbb{R}^m)$  para q.t.p.  $y \in \mathbb{R}^n$ , e que a função  $y \mapsto \|f(\cdot, y)\|_{L^p(\mathbb{R}^m)}$  pertença a  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . Então, a função  $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy$  pertence a  $L^p(\mathbb{R}^m)$  e*

$$\left( \int_{\mathbb{R}^m} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} |f(x, y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy,$$

ou seja,

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy \right\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot, y)\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} dy.$$

*Demonstração.* Veja o Teorema 6.19 da referência [9]. □

Passamos agora à definição de produto de convolução e suas propriedades fundamentais.

**Definição 1.1.1.** *Sejam  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) funções mensuráveis. O produto de convolução de  $f$  por  $g$  é a função  $f * g$  definida por*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy, \tag{1.1}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que a integral (1.1) exista.

**Proposição 1.1.5.** *Assuma que a integral acima exista. Então:*

1.  $f * g = g * f$ ;
2.  $(f * g) * h = f * (g * h)$ ;
3. definindo  $\tau_y f(x) = f(x - y)$  (translação de ordem  $y$  de  $f$ ), temos que

$$\tau_z(f * g) = (\tau_z f) * g = f * (\tau_z g);$$

4. se  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  e  $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , então  $\text{supp}(f * g) \subset \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)}$ , onde

$$\text{supp}(f) + \text{supp}(g) = \{ x + y : x \in \text{supp}(f) \text{ e } y \in \text{supp}(g) \}.$$

5. Se  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $f \in L^p$  e  $g \in L^q$ , então  $(f * g)(x)$  existe para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f * g$  é uma função limitada e uniformemente contínua e  $\|f * g\|_{\infty} \leq \|f\|_p \|g\|_q$ . Além disso, se  $1 < p < \infty$ , então  $f * g \in C_{\infty}(\mathbb{R}^n)$  (i.e.,  $f * g$  é uma função contínua que se anula no infinito).

6. Se  $f \in L^1$  e  $g \in C_B^k$  (i.e.,  $g \in C^k$  e  $\partial^\alpha g$  é limitada para todo multi-índice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  com  $|\alpha| \leq k$ ), então  $f * g \in C^k$  e  $\partial^\alpha(f * g) = f * \partial^\alpha g$ , para  $|\alpha| \leq k$ .

*Demonstração.* Veja a referência [9]. □

**Definição 1.1.2.** *Sejam  $(X, \Sigma_X, \mu)$ ,  $(Y, \Sigma_Y, \nu)$  espaços de medida e*

$$M(Y, \Sigma_Y) = \{ f : Y \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é mensurável} \}.$$

*Dado  $T : L^p(X, \Sigma_X, \mu) \rightarrow M(Y, \Sigma_Y)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) um operador sublinear, isto é,*

$$|T(f + g)| \leq |Tf| + |Tg| \quad \text{e} \quad |T(cf)| = |c||Tf|, \quad \forall f, g \in L^p(\mu) \quad \text{e} \quad c \in \mathbb{C},$$

*dizemos que:*

1.  *$T$  é de tipo forte  $(p, q)$ , onde  $1 \leq q \leq \infty$ , quando  $T : L^p(\mu) \rightarrow L^q(\nu)$  está bem definido e é limitado, ou seja, existe  $c = c(p, q) > 0$  tal que,  $\|Tf\|_q \leq c\|f\|_p$ ,  $\forall f \in L^p(\mu)$ .*

2.  *$T$  é de tipo fraco  $(p, q)$ , onde  $1 \leq q < \infty$ , quando existe  $c > 0$  tal que, para cada  $\lambda > 0$ ,*

$$\nu(E_{Tf}^\lambda) \leq \left( \frac{c\|f\|_p}{\lambda} \right)^q, \quad \forall f \in L^p(\mu),$$

*onde  $E_{Tf}^\lambda = \{ y \in Y : |T(f(y))| > \lambda \}$ .*

3.  *$T$  é de tipo fraco  $(p, \infty)$  quando, e somente quando,  $T$  é forte  $(p, \infty)$ .*

Vamos agora enunciar o teorema de interpolação de Riesz-Thorin:

**Proposição 1.1.6.** *Sejam  $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty]$  e  $T : L^{p_0} + L^{p_1} \rightarrow L^{q_0} + L^{q_1}$  de tipo forte  $(p_0, q_0)$  com norma  $M_0$  e tipo forte  $(p_1, q_1)$  com norma  $M_1$ . Então  $T$  é de tipo forte  $(p, q)$ , onde*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}, \quad t \in (0, 1).$$

*Demonstração.* Veja o capítulo 1 de [1] ou o Teorema 6.27 da referência [9]. □

É importante observar que todo operador de tipo forte é também de tipo fraco, ou seja, Se  $T$  é um operador de tipo forte  $(p, q)$ , então  $T$  é de tipo fraco  $(p, q)$ .

Vale a seguinte generalização do teorema de Riesz-Thorin:

**Proposição 1.1.7** (Interpolação de Marcinkiewicz). *Sejam  $(X, \Sigma_X, \mu)$  e  $(Y, \Sigma_Y, \nu)$  espaços de medida,  $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$  e seja  $T : L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\nu) \rightarrow M(Y, \Sigma_Y)$  um*

operador sublinear fraco  $(p_0, p_0)$  e fraco  $(p_1, p_1)$ . Então  $T$  é de tipo forte  $(p, p)$ , para cada  $p_0 < p < p_1$ .

*Demonstração.* Veja o capítulo 1 de [1] ou o Teorema 6.28 da referência [9]. □

Abaixo apresentamos um espaço de funções teste no qual a transformada de Fourier tem inversa, e, devido sua regularidade e densidade em  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , ele é o mais natural no estudo da transformada de Fourier, por exemplo para defini-la em  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

**Definição 1.1.3.** Chamamos de espaço de funções  $C^\infty$  de decrescimento rápido, também conhecido como **espaço de Schwartz**, ao espaço

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|\varphi\|_{\alpha, \beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < \infty, \quad \forall \text{ multi-índices } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \}.$$

A título de notação designaremos  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  simplesmente por  $\mathcal{S}$ .

**Definição 1.1.4.:** Dizemos que uma sequência  $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de funções de  $\mathcal{S}$  converge para uma função  $\varphi \in \mathcal{S}$ , quando  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_j - \varphi\|_{\alpha, \beta} = 0$ , para quaisquer multi-índices  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ .

Listamos a seguir as principais propriedades do espaço de Schwartz  $\mathcal{S}$ :

1.  $\mathcal{S}$  com as seminormas  $\|\varphi\|_{\alpha, \beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|$ ,  $\alpha, \beta$  multi-índices, é completo.
2. Dada  $\varphi \in \mathcal{S}$ ,  $P(x)\varphi \in \mathcal{S}$  e  $P(\partial)\varphi \in \mathcal{S}$ , para qualquer polinômio  $P(x)$ . Em particular, dados quaisquer polinômios  $P(x)$ ,  $Q(x)$  e qualquer  $\varphi \in \mathcal{S}$ , temos que,  $P(x)Q(\partial)\varphi \in \mathcal{S}$ .
3.  $\mathcal{S} \hookrightarrow L^p$  e é denso em  $L^p$ ,  $\forall 1 \leq p < \infty$ .
4. Dadas  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ ,  $\varphi * \psi \in \mathcal{S}$ , ou seja, o produto de convolução é uma operação em  $\mathcal{S}$ .

A demonstração das propriedades acima bem como informações adicionais sobre  $\mathcal{S}$  podem ser encontrados no Capítulo 8 da referência [9].

## 1.2 A Transformada de Fourier

**Definição 1.2.1.** Dada uma função  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , a transformada de Fourier de  $f$ , denotada  $\mathcal{F}(f)$  ou  $\widehat{f}$ , é a função

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (1.2)$$

onde  $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$  é o produto escalar em  $\mathbb{R}^n$ .

É farta a bibliografia de qualidade que trata da transformada de Fourier e suas propriedades básicas; por isso vamos enfatizar apenas aquelas propriedades de impacto direto em nosso trabalho e listar rapidamente as mais básicas. Para um estudo mais detalhado sugerimos qualquer uma das referências [7, 8, 9, 10, 27, 42].

As seguintes propriedades da transformada de Fourier são bastante conhecidas:

1.  $\mathcal{F}$  é um operador linear contínuo de  $L^1(\mathbb{R}^n)$  em  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ;
2.  $\mathcal{F}$  satisfaz o Lema de Riemann-Lebesgue:  $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$ ;
3.  $\widehat{\overline{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)}$ ;
4.  $(\tau_h f)^\wedge(\xi) = e^{-ih \cdot \xi} \widehat{f}(\xi)$ , onde  $\tau_h f(x) = f(x - h)$ ;
5.  $\mathcal{F}(e^{ix \cdot h} f)(\xi) = \tau_h \widehat{f}(\xi)$ ;
6.  $(f * g)^\wedge(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi)$ , onde

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy$$

é o produto de convolução de  $f$  por  $g$ ;

$$7. \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} g d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f \widehat{g} d\xi;$$

**Observação 1.2.1.** *Temos duas observações a fazer: A teoria da transformada de Fourier pode ser construída em  $\mathcal{S}$  em vez de  $L^1$ ; e todas as propriedades de  $\mathcal{F}$  em  $L^1$  listadas acima valem para  $\mathcal{F}|_{\mathcal{S}}$  (para maiores detalhes, veja [10] ou [26]).*

A maior vantagem de  $\mathcal{S}$  em relação a  $L^1$  é a facilidade de trabalhar nele devido a regularidade de suas funções, o que nos permite, por exemplo, demonstrar de modo mais simples as propriedades a seguir:

**Proposição 1.2.1.** *Se  $\varphi \in \mathcal{S}$ , então:*

1.  $(\partial^\alpha \varphi)^\wedge(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$ ;
2.  $((-i \cdot)^\alpha \varphi(\cdot))^\wedge(\xi) = \partial^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$ ;
3.  $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$ , ou seja,  $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ .

*Demonstração.* Veja [10] ou [26].

□



Finalizaremos esta seção enunciando a fórmula da inversa da transformada de Fourier em  $\mathcal{S}$  e o teorema de Plancherel em  $\mathcal{S}$ .

**Proposição 1.2.2.** *Se  $\varphi \in \mathcal{S}$ , então  $\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi$ .*

*Demonstração.* Veja [10] ou [26]. □

A fórmula de inversão nos permite definir a transformada inversa de Fourier de uma função  $\varphi \in \mathcal{S}$ :

$$\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x) = \check{\varphi}(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi. \quad (1.3)$$

Temos o seguinte resultado:

**Proposição 1.2.3.**  *$\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  é um isomorfismo contínuo e sua inversa,  $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  também é um isomorfismo contínuo.*

*Demonstração.* Veja [10] ou [26]. □

Enunciamos agora a identidade de Parseval/Plancherel para funções em  $\mathcal{S}$ :

**Proposição 1.2.4** (Parseval/Plancherel). *Se  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ , então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \bar{\psi} dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi} \bar{\widehat{\psi}} d\xi.$$

*Em particular,*  $\|\varphi\|_{L^2} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|\widehat{\varphi}\|_{L^2}$ .

*Demonstração.* Veja [10] ou [26]. □

Usando o teorema de interpolação de Riesz-Thorin, podemos definir  $\mathcal{F}$  para todas funções de  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq 2$ . De fato, sendo a transformada um operador do tipo forte  $(1, \infty)$  e  $(2, 2)$  respectivamente, pelo teorema de Riesz-Thorin temos o seguinte resultado:

**Proposição 1.2.5** (Desigualdade de Hausdorff-Young). *Se  $f \in L^p$ ,  $1 \leq p \leq 2$ , então  $\widehat{f} \in L^q$ , com  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , e*

$$\|\widehat{f}\|_{L^q} \lesssim \|f\|_{L^p}.$$

*Demonstração.* Veja [9]. □

Pode-se provar que se  $\|\widehat{f}\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^q} \forall f \in L^q$ , então  $1 \leq p \leq 2$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Sendo assim, a transformada de Fourier não pode ser definida em  $L^p$  como função quando  $p > 2$ . No entanto, podemos defini-la no espaço das distribuições temperadas, o qual definimos e listamos as principais propriedades abaixo.

**Definição 1.2.2.** *Uma distribuição temperada é um funcional linear contínuo  $F$  de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  em  $\mathbb{C}$ . O dual de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , ou seja, o conjunto de todas as distribuições temperadas, será designado pela notação  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .*

Portanto,  $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  se, e somente se,

1.  $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$  é linear e
2. dada qualquer sequência  $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de funções de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\varphi_j \rightarrow 0$ , tivermos que  $F(\varphi_j) \rightarrow 0$  quando  $j \rightarrow \infty$ .

Muitas vezes usa-se a notação  $\langle F, \varphi \rangle$  em vez de  $F(\varphi)$ .

Vale a seguinte caracterização dos elementos de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ : Um funcional linear  $F$  pertence a  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  se, e somente se, existem um  $C \geq 0$  e um  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$$|\langle F, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \sum_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (1.4)$$

**Definição 1.2.3.** *Dizemos que uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  é de crescimento polinomial no infinito, ou simplesmente, de crescimento polinomial, quando existem  $C, M \geq 0$  tais que,*

$$|f(x)| \leq C(1 + |x|)^M, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.5)$$

**Proposição 1.2.6.** *Toda função localmente integrável de crescimento polinomial no infinito define uma distribuição temperada. Em particular, toda função limitada e toda função em de  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , define uma distribuição temperada por meio da fórmula*

$$F_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi dx. \quad (1.6)$$

*Demonstração.* Veja [9], [10] ou [26]. □

No espaço de distribuições, inclusive das distribuições temperadas, a operação de diferenciação funciona muito bem. Tomando por base as referências [9], [10], vamos aqui realizar uma rápida abordagem de diferenciação de distribuições, nos restringindo às distribuições temperadas. A motivação para derivação de distribuições é a regra de integração por partes: Se  $f$  é suficientemente regular, então por integração por partes, a distribuição que é igual a  $\partial^\alpha f$  é

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = \int \partial^\alpha(f) \varphi dx = (-1)^\alpha \int f \partial^\alpha \varphi dx = (-1)^\alpha \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Na verdade a expressão

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^\alpha \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle \quad (1.7)$$

faz sentido (está bem definida) para qualquer  $F \in \mathcal{S}'$ , pois:

- i. (1.7) é um funcional linear em  $\mathcal{S}$ , já que  $\mathcal{S}$  é estável sob diferenciação.
- ii. Dada uma sequência  $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  em  $\mathcal{S}$  tal que  $\varphi_j \rightarrow \varphi$  em  $\mathcal{S}$ , vale que

$$\langle \partial^\alpha F, \varphi_j \rangle = (-1)^\alpha \langle F, \partial^\alpha \varphi_j \rangle \rightarrow (-1)^\alpha \langle F, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

Portanto, o segundo membro de (1.7) é uma distribuição, e isso nos possibilita fazer a seguinte definição:

**Definição 1.2.4.** *Seja  $\alpha$  um multi-índice. O operador derivação  $\partial^\alpha : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$  é definido, para cada  $F \in \mathcal{S}'$ , por*

$$\langle \partial^\alpha F, \varphi \rangle = (-1)^\alpha \langle F, \partial^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \quad (1.8)$$

Uma consequência imediata da Definição 1.2.4 é a seguinte:

**Proposição 1.2.7.** *Se  $(F_j)_{j \in \mathbb{N}}$  é uma sequência em  $\mathcal{S}'$  tal que  $\lim_{j \rightarrow \infty} F_j = F$  em  $\mathcal{S}'$ , então  $\lim_{j \rightarrow \infty} \partial^\alpha F_j = \partial^\alpha F$  em  $\mathcal{S}'$ .*

*Demonstração.* Pela Definição 1.2.4 e pelo fato de  $F_j \rightarrow F$  em  $\mathcal{S}'$ , temos que

$$\langle \partial^\alpha F_j, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle F_j, \partial^\alpha \varphi \rangle \rightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle F, \partial^\alpha \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha F, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \quad \square$$

Como consequência do resultado acima, se  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ , então cada distribuição  $\partial_{x_j} f$  coincide com a derivada usual de  $f$ .

**Definição 1.2.5.** *Dadas  $F \in \mathcal{S}'$  e  $\psi \in \mathcal{S}$ , definimos ao produto de convolução de  $F$  e  $\psi$  por*

$$F * \psi(x) = \langle F, \tau_{-x} \psi(-\cdot) \rangle = \langle F, \tau_{(-x)} \psi(x - \cdot) \rangle.$$

**Proposição 1.2.8.** *Se  $F \in \mathcal{S}'$  e  $\psi \in \mathcal{S}$ , então  $F * \psi$  é uma função  $C^\infty$  de crescimento polinomial, e portanto, define uma distribuição temperada pela fórmula (1.6).*

*Demonstração.* Veja [9], [10] ou [26]. □

Estamos prontos para a definição da transformada de Fourier de uma distribuição temperada.

**Definição 1.2.6.:** Dada  $F \in \mathcal{S}'$ , definimos sua transformada de Fourier por

$$\widehat{F}(\varphi) = \langle \widehat{F}, \varphi \rangle = \langle F, \widehat{\varphi} \rangle = F(\widehat{\varphi}), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \quad (1.9)$$

Notemos que, se  $f \in L^1$ , então a transformada de Fourier de  $f$  coincide com sua transformada de Fourier no sentido das distribuições. Portanto, a Definição 1.2.6 é consistente com a teoria de transformada de Fourier em  $L^1$  e também em  $\mathcal{S}$ .

Assim como em  $\mathcal{S}$ , vale o seguinte resultado para a transformada de Fourier em  $\mathcal{S}'$ :

**Proposição 1.2.9.** A transformada de Fourier  $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$  satisfaz as seguintes propriedades:

1. A transformada de Fourier  $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$  é um isomorfismo, e ambos,  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{F}^{-1}$  são operadores lineares contínuos.
2.  $(\partial^\alpha F)^\wedge = (i\xi)^\alpha \widehat{F}$ , para qualquer multi-índice  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ .
3.  $((-ix)^\alpha F)^\wedge = \partial_\xi^\alpha \widehat{F}$ .
4.  $(\tau_h F)^\wedge = e^{-ih \cdot \xi} \widehat{F}$ .
5.  $(e^{ix \cdot h} F)^\wedge = \tau_h \widehat{F}$ .
6. Se  $F \in \mathcal{S}'$  e  $\psi \in \mathcal{S}$ , então

$$\widehat{F * \psi} = \widehat{F} \widehat{\psi},$$

onde  $\widehat{F} \widehat{\psi} \in \mathcal{S}'$  é definido como

$$\widehat{F} \widehat{\psi}(\varphi) = \langle \widehat{F} \widehat{\psi}, \varphi \rangle = \langle \widehat{F}, \widehat{\psi} \varphi \rangle = \widehat{F}(\widehat{\psi} \varphi).$$

*Demonstração.* Consulte a referência [8] ou a referência [10]. □

O lema a seguir nos dá a ferramenta equivalente ao teorema de Plancherel para trabalharmos com os espaços  $L^p$ .

**Lema 1.2.1** (Desigualdades de Bernstein). *Seja  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\text{supp } \widehat{f} \subset B(0, \lambda)$ , e seja  $1 \leq p \leq +\infty$ . Se  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , então existe uma constante  $c = c(n)$  de modo que valem as seguintes desigualdades:*

1. Para todo  $q \geq p$ ,  $f \in L^q$ , e,

$$\|f\|_q \leq c \lambda^{n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|f\|_p. \quad (1.10)$$

2. Para qualquer multi-índice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , temos  $\partial^\alpha f \in L^p$  e

$$\|\partial^\alpha f\|_p \leq c^{|\alpha|} \lambda^{|\alpha|} \|f\|_p. \quad (1.11)$$

3. Se além disso  $\hat{f}$  possui suporte longe de zero (por exemplo,  $\text{supp } \hat{f} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus B(0, \lambda/2)$ ), então

$$c^{-|\alpha|} \lambda^{|\alpha|} \|f\|_p \leq \sup_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \|\partial^\alpha f\|_p \leq c^{|\alpha|} \lambda^{|\alpha|} \|f\|_p. \quad (1.12)$$

*Demonstração.* Pode ser encontrada em [38]. □

### 1.3 Multiplicadores de Fourier

O objetivo desta seção é dar suporte para elementos da teoria dos espaços de Besov e de Sobolev generalizados que será exibida na próxima seção.

Antes de iniciarmos com a teoria de multiplicadores de Fourier é importante lembrarmos que dadas  $f_1, f_2 \in \mathcal{S}'$ , a igualdade  $f_1 = f_2$  significa que  $\langle f_1, \varphi \rangle = \langle f_2, \varphi \rangle$ ,  $\forall \varphi \in \mathcal{S}$ .

**Definição 1.3.1.** *Seja  $1 \leq p \leq \infty$ . Dizemos que  $\rho \in \mathcal{S}'$  é um multiplicador de Fourier em  $L^p$  quando  $\check{\rho} * \varphi \in L^p$ ,  $\forall \varphi \in \mathcal{S}$ , e  $\sup_{\|\varphi\|_p \leq 1} \|\check{\rho} * \varphi\|_p < \infty$ . Chamaremos de espaço vetorial dos multiplicadores de Fourier o conjunto*

$$\mathcal{M}_p = \{\rho \in \mathcal{S}' ; \|\rho\|_{\mathcal{M}_p} < \infty\},$$

onde

$$\|\rho\|_{\mathcal{M}_p} = \sup_{\|\varphi\|_p \leq 1} \|\check{\rho} * \varphi\|_p$$

é a norma de  $\mathcal{M}_p$ .

Como  $\mathcal{S}$  é denso em  $L^p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) a aplicação  $\mathcal{F}^{-1}(\rho) * \cdot : \mathcal{S} \rightarrow L^p$  pode ser estendida a uma aplicação de  $L^p$  em  $L^p$  com a mesma norma, na forma  $\mathcal{F}^{-1}(\rho) * f$ ,  $f \in L^p$ .

Observemos que  $\mathcal{F}^{-1}(\rho) * \varphi = \mathcal{F}^{-1}(\rho \hat{\varphi})$ . Portanto,

$$\|\mathcal{F}^{-1}(\rho) * \varphi\|_p = \|\mathcal{F}^{-1}(\rho \hat{\varphi})\|_p.$$

Sabemos da teoria da transformada de Fourier (veja o item 4 da Proposição 1.2.9) que  $\tau_y f(x) = f(x - y) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-iy\xi} \hat{f}(\xi))(x)$ , daí segue que o operador  $\mathcal{F}^{-1}(\rho) * (\cdot) : \mathcal{S} \rightarrow L^p$

comuta com translações. De fato, dado  $\varphi \in \mathcal{S}$ ,

$$\begin{aligned} \tau_y(\mathcal{F}^{-1}(\rho) * \varphi)(x) &= \mathcal{F}^{-1}(e^{-iy\xi} \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\rho) * \varphi))(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-iy\xi} \rho \widehat{\varphi})(x) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\rho e^{-iy\xi} \widehat{\varphi})(x) = \mathcal{F}^{-1}(\rho \widehat{\tau_y \varphi})(x) \\ &= (\mathcal{F}^{-1}(\rho) * \tau_y \varphi)(x) \end{aligned}$$

Portanto,  $\rho \in \mathcal{M}_\infty$  se e só se

$$|\mathcal{F}^{-1}\rho * \varphi(0)| \leq C \|\varphi\|_\infty. \quad (1.13)$$

Mas esta desigualdade também significa que  $\mathcal{F}^{-1}\rho$  é uma medida limitada em  $\mathbb{R}^n$ . Portanto  $\mathcal{M}_\infty$  é o espaço de todas as transformadas de Fourier de medidas limitadas. Além disso,  $\|\rho\|_{\mathcal{M}_\infty}$  é igual à massa total de  $\mathcal{F}^{-1}\rho$  (Veja [1] ou [3] para mais detalhes).

Devido a desigualdade (1.13) e o teorema de Hahn-Banach podemos estender a aplicação  $\varphi \mapsto \mathcal{F}^{-1}(\rho) * \varphi$  de  $\mathcal{S}$  a  $L^\infty$  para  $L^\infty \rightarrow L^\infty$  sem acréscimos à sua norma de modo que a escrevemos como

$$\begin{aligned} L^\infty &\longrightarrow L^\infty \\ \varphi &\longmapsto \mathcal{F}^{-1}(\rho) * \varphi. \end{aligned}$$

**Proposição 1.3.1.** (a) *Seja  $1 \leq p \leq \infty$ . Se  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , então*

1.  $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_{p'}$  no sentido de que  $\|\rho\|_{\mathcal{M}_p} = \|\rho\|_{\mathcal{M}_{p'}}$ ;
2.  $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_\infty = \{\rho \in \mathcal{S}' : \mathcal{F}^{-1}(\rho) \text{ é uma medida limitada}\}$ ;
3.  $\mathcal{M}_2 = L^\infty$ .

(b) *Sejam  $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$  e  $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} = 1$ , onde  $\theta \in [0, 1]$ . Se  $\rho \in \mathcal{M}_{p_0} \cap \mathcal{M}_{p_1}$ , então  $\rho \in \mathcal{M}_p$  e*

$$\|\rho\|_{\mathcal{M}_p} \leq \|\rho\|_{\mathcal{M}_{p_0}}^{1-\theta} \|\rho\|_{\mathcal{M}_{p_1}}^\theta.$$

*Em particular a norma  $\|\rho\|_{\mathcal{M}_p}$  decresce com  $p$  no intervalo  $1 \leq p \leq 2$ , ou seja, para  $1 \leq p, q \leq 2$ , vale:*

$$\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_p \subset \mathcal{M}_q \subset \mathcal{M}_2.$$

*Demonstração.* Veja [1], Teorema 6.1.2. Uma demonstração mais detalhada pode ser encontrada no capítulo 1 da referência [3]. □

Os multiplicadores de Fourier podem ser também definidos em  $L^p$  com valores em um espaço de Hilbert.

**Definição 1.3.2.** *Seja  $H$  um espaço de Hilbert.*

1. Dizemos que uma aplicação  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow H$  pertence a  $L^p(H)$  se, e somente se,

$$\left( \int \|f(x)\|_H^p \right) < \infty.$$

2. Denotaremos por  $S(H)$  o espaço

$$S(\mathbb{R}^n : H) = \{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow H : (1 + |x|)^m \|D^\alpha f(x)\|_H < \infty, \text{ para cada } |\alpha| \text{ e } m \text{ em } \mathbb{N} \}.$$

3. Dados dois espaços de Hilbert  $H_0$  e  $H_1$ , definimos:

$$L(H_0, H_1) = \{ F : H_0 \rightarrow H_1 \text{ linear} : F \text{ é contínuo} \},$$

$$L(S(H_0), H_1) = \{ F : S(H_0) \rightarrow H_1 \text{ linear} : F \text{ é contínuo} \},$$

O espaço  $L(S(H_0), H_1)$  será também denotado por  $S'(H_0, H_1)$ .

4. Denotaremos por  $L^p(L(H_0, H_1))$  o espaço das aplicações  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow L(H_0, H_1)$ , tais que,  $\int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_{L(H_0, H_1)}^p < \infty$ .

Observemos que se  $H_0 = H_1 = \mathbb{C}$  (ou  $\mathbb{R}$ ), então  $S'(H_0, H_1) = S'(\mathbb{R}^n)$ . Podemos definir a transformada de Fourier em  $S'(H_0, H_1)$  como se fez em  $S'(\mathbb{R}^n)$  (para maiores detalhes, veja [1] e referências lá contidas).

**Definição 1.3.3.** *Sejam  $H_0$  e  $H_1$  espaços de Hilbert e  $\rho \in S'(H_0, H_1)$ . Dizemos que  $\rho \in \mathcal{M}_p(H_0, H_1)$  se, e somente se, para toda  $f \in S(H_0)$  tivermos que  $(\mathcal{F}^{-1}\rho) * f \in L^p(H_1)$  e se*

$$\|\rho\|_{\mathcal{M}_p} := \sup_{\|f\|_{L^p(H_0)}=1} \|\mathcal{F}^{-1}(\rho) * f\|_{L^p(H_1)} < \infty.$$

**Lema 1.3.1.** *Seja  $k > n/2$  um número natural e seja  $\rho \in L^2(L(H_0, H_1))$  tal que  $D^\alpha \rho \in L^2(L(H_0, H_1)) \forall |\alpha| = k$ . Então  $\rho \in \mathcal{M}_p(H_0, H_1)$ , para todo  $1 \leq p \leq \infty$ , e*

$$\|\rho\|_{\mathcal{M}_p} \leq c \|\rho\|_{L^2}^{1-\theta} \left( \sup_{|\alpha|=k} \|D^\alpha \rho\|_{L^2} \right)^\theta < \infty,$$

onde  $\theta = n/2k$ .

*Demonstração.* Encontra-se em [1]. □

## 1.4 Os espaços de Sobolev e de Besov generalizados

Nesta seção daremos a definição de J. Peetre dos espaços de Sobolev e de Besov. Tomamos como base as referências [1], [3], [38], [39].

A norma do espaço de Sobolev homogêneo é dada por

$$\|f\|_{\dot{H}^s}^2 = \int |\xi|^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi. \quad (1.14)$$

Particionando o  $\mathbb{R}^n$  em coroas diádicas  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \{\xi : |2|^j \leq |\xi| \leq |2|^{j+1}\}$ , podemos escrever

(1.14) como

$$\|f\|_{\dot{H}^s}^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{2^j \leq |\xi| \leq 2^{j+1}} |\xi|^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Fixando  $j$  no domínio de integração  $2^{js} \leq |\xi|^s \leq 2^s 2^{js}$ , definamos a norma

$$N(f)^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{2js} \int_{2^j \leq |\xi| \leq 2^{j+1}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Então

$$N(f)^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{2js} \int_{2^j \leq |\xi| \leq 2^{j+1}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq \|f\|_{\dot{H}^s}^2 \leq 2^{2s} N(f)^2$$

e portanto,  $N(f)^2 \sim \|f\|_{\dot{H}^s}^2$ , isto é,  $N(\cdot)$  é uma norma equivalente à norma (1.14), com  $N(f) \leq \|f\|_{\dot{H}^s} \leq 2^s N(f)$ .

Posteriormente vamos trabalhar não só em  $L^2$ , mas também em  $L^p$ ,  $p \neq 2$ . Deseja-se expandir o tipo de raciocínio acima para este caso. Seria tentador considerar as quantidades

$$\|\mathcal{F}^{-1}(\chi_{2^j \leq |\xi| \leq 2^{j+1}}(\xi)\widehat{f})(\xi)\|_p,$$

mas a característica de uma bola (euclidiana) não é um multiplicador de Fourier contínuo em  $L^p$  para  $p \neq 2$ , em dimensão  $n \geq 2$ . Apresentaremos algumas ferramentas para contornar esse problema, onde consegue-se uma função suave e uma certa ortogonalidade.

### 1.4.1 Partição diádica da unidade e multiplicadores de Littlewood-Paley

Para entender a teoria explanada nesta subseção, além das referências já citadas no início da seção, consultamos também a dissertação de mestrado de G. N. Santos [41]. Começaremos mostrando a existência de uma função  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  que permite termos suavidade e uma certa (quase) ortogonalidade.



**Lema 1.4.1.** *Existe uma função  $\varphi \in \mathcal{S}$  tal que:*

1.  $\text{supp } \varphi = \{ \xi \in \mathbb{R}^n : 2^{-1} \leq |\xi| \leq 2 \}$ ;
2.  $\varphi(\xi) > 0$  para  $2^{-1} < |\xi| < 2$ ;
3.  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(2^{-k} \xi) = 1, \quad \forall \xi \neq 0$ .

*Demonstração.* Tomemos uma função  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , tal que  $\psi(\xi) = 1, \forall \xi \in B(0,1)$ ,  $0 \leq \psi \leq 1$  e  $\text{supp } \psi = B[0,2]$ .

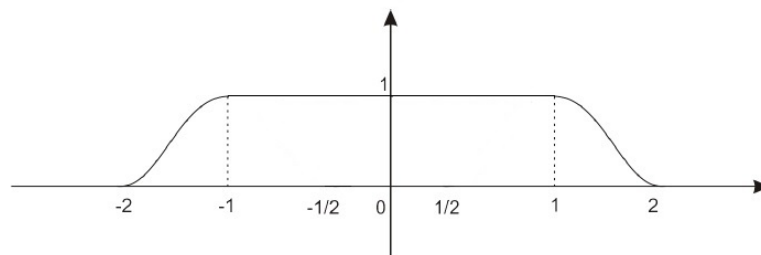


Figura 2.1: Gráfico da função  $\psi$

Definimos  $\varphi$  por

$$\varphi(\xi) = \psi(\xi) - \psi(2\xi). \tag{1.15}$$

Observemos que:

- se  $|\xi| \geq 2$ , então  $\psi(\xi) = \psi(2\xi) = 0$ ;
- se  $1 \leq |\xi| < 2$ , então  $0 < \psi(\xi) < 1$  e  $\psi(2\xi) = 0$ ;
- se  $1/2 \leq |\xi| \leq 1$ , então  $\psi(\xi) = 1$  e  $0 < \psi(2\xi) < 1$ ;
- se  $|\xi| \leq 1/2$ , então  $\psi(\xi) = \psi(2\xi) = 1$ .

Portanto,  $\text{supp } \varphi = \{ \xi \in \mathbb{R}^n; 2^{-1} \leq |\xi| \leq 2 \}$  e  $\varphi(\xi) > 0$  para  $2^{-1} < |\xi| < 2$ .

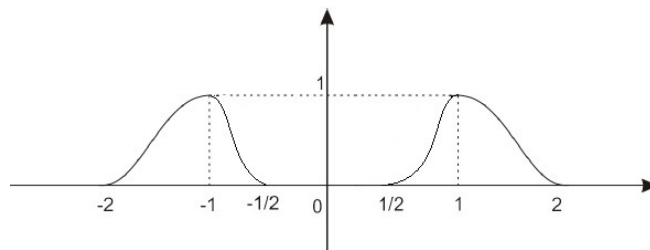


Figura 2.2: Gráfico da função  $\varphi$

Notemos também que, para todo  $k > 0$ ,

$$\sum_{j=-k}^k \varphi(2^{-j}\xi) = \psi(2^{-k}\xi) - \psi(2^{k+1}\xi), \quad \text{para cada } \xi \neq 0,$$

ou seja, a soma acima tem no máximo dois termos não nulos. Assim,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(2^{-k}\xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{-k}^k \varphi(2^{-k}\xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(2^{-k}\xi) - \psi(2^{k+1}\xi) = 1, \quad (1.16)$$

pois para cada  $\xi \neq 0$ , existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $|2^{-k}\xi| < 1$  e daí,  $\psi(2^{-k}\xi) = 1$  e  $\psi(2^{k+1}\xi) = 0$ .

Logo, para cada  $\xi \neq 0$ ,  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(2^{-k}\xi) = 1$ . Com isso o lema fica provado.  $\square$

Iremos agora definir os multiplicadores de Littlewood-Paley.

**Definição 1.4.1.** *Seja  $\varphi \in \mathcal{S}$  a função do Lema 1.4.1. Para cada  $j \in \mathbb{Z}$ , ponhamos  $\varphi_j(\xi) = \varphi(2^{-j}\xi)$ , de modo que*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi_j(\xi) = 1, \quad \forall \xi \neq 0 \quad \text{e} \quad \text{supp } \varphi_j \subset \{2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\}.$$

Observemos que

$$\psi(\xi) = 1 - \sum_{j \geq 1} \varphi_j(\xi). \quad (1.17)$$

De fato, de acordo com (1.15) e a Definição 1.4.1,

$$1 - \sum_{j \geq 1} \varphi_j(\xi) = \sum_{j \leq 0} \varphi_j(\xi) = \psi(\xi) - \psi(2\xi) + \psi(2\xi) - \psi(2^2\xi) + \psi(2^2\xi) - \psi(2^3\xi) + \dots = \psi(\xi),$$

pois trata-se de uma soma telescópica.

**Definição 1.4.2.** *Os multiplicadores de Littlewood-Paley são definidos como*

$$\Delta_j f = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_j \widehat{f}) = \check{\varphi}_j * f \quad \text{e} \quad S_j f = \sum_{k \leq j} \Delta_k f, \quad \forall f \in \mathcal{S}' \quad \text{e} \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (1.18)$$

**Observação 1.4.1.** *Notemos que:*

1. *Segue de (1.17) e de (1.18) que  $S_0 f = \mathcal{F}^{-1}(\psi \widehat{f})$ ,  $\forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Além disso, para cada  $j \geq 1$ ,*

$$\begin{aligned} \psi(2^{-j}\xi) \widehat{f}(\xi) &= \left(1 - \sum_{k \geq 1} \varphi(2^{-k}2^{-j}\xi)\right) \widehat{f}(\xi) = \left(1 - \sum_{k \geq 1} \varphi(2^{-(k+j)}\xi)\right) \widehat{f}(\xi) \\ &= \left(1 - \sum_{l \geq j+1} \varphi(2^{-l}\xi)\right) \widehat{f}(\xi) = \left(1 - \sum_{l \geq 1} \varphi(2^{-l}\xi)\right) \widehat{f}(\xi) + \sum_{l=1}^j \varphi(2^{-l}\xi) \widehat{f}(\xi) \\ &= \widehat{S_0 f}(\xi) + \sum_{l=1}^j \widehat{\Delta_l f}(\xi) = \widehat{S_j f}(\xi), \end{aligned}$$

e conseqüentemente,

$$S_j f = \mathcal{F}^{-1}(\psi(2^{-j}\cdot)\widehat{f}). \quad (1.19)$$

$S_0$  é o operador de restrição em baixas frequências. Já o operador

$$P_{\text{high}} f = (1 - S_0)f = \sum_{j \geq 1} \Delta_j f, \quad (1.20)$$

é a restrição em altas frequências.

2. De (1.19) e da definição de  $\psi$  vemos que

$$\text{supp } \widehat{S_j f} \subseteq \text{supp } \psi(2^{-j}\cdot) = \{ \xi : |2^{-j}\xi| \leq 2 \} = \{ \xi : |\xi| \leq 2^{j+1} \},$$

ou seja,  $\text{supp } \widehat{S_j f} \subseteq \{ \xi : |\xi| \leq 2^{j+1} \}$ . Desse fato segue que se  $|\xi| \leq 2^j$ , então  $|2^{-j}\xi| \leq 1$ ; daí  $\psi(2^{-j}\xi) = 1$  e disso inferimos que

$$\widehat{S_j f} = \widehat{f}, \text{ se } |\xi| \leq 2^j.$$

3.  $\text{supp } \widehat{\Delta_j f} \subseteq \{ \xi : 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1} \}$ . De fato, como  $\text{supp } \varphi = \{ \xi : \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2 \}$ , segue que  $\varphi_j(\xi) = \varphi(2^{-j}\xi) \neq 0$  se, e somente se,  $\frac{1}{2} \leq |2^{-j}\xi| \leq 2$ , ou seja,  $2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}$ , o que prova a afirmação.

4. Dada uma  $f \in \mathcal{S}'$ , temos

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f. \quad (1.21)$$

De fato,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f = \mathcal{F}^{-1} \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi_j \widehat{f} \right) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}) = f.$$

O interesse na decomposição (1.18) é devido à propriedade de quase-ortogonalidade de  $\Delta_j$ . De fato, se  $|j - j'| \geq 2$ , então  $\text{supp } \varphi_j \cap \text{supp } \varphi_{j'} = \emptyset$  e daí,  $\Delta_j \circ \Delta_{j'} = 0$  (pois  $\Delta_j(\Delta_{j'} f) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_j(\xi)\varphi_{j'}(\xi)\widehat{f}(\xi)) = \mathcal{F}^{-1}(0) = 0$ ).

**Lema 1.4.2.** Para cada  $j \in \mathbb{Z}$ , definimos

$$\widetilde{\Delta}_j f = \sum_{l=-1}^1 \Delta_{j+l} f.$$

Então  $\widetilde{\Delta}_j \circ \Delta_j = \Delta_j$ ,  $\forall j \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* De fato, como  $\Delta_k \circ \Delta_j = 0$  para todo  $k$  tal que  $|k - j| > 1$ , segue que

$$\widetilde{\Delta}_j \circ \Delta_j f = \sum_{l=-1}^1 \Delta_{j+l} \circ \Delta_j f = \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Delta_k \right) \circ \Delta_j f = \Delta_j f,$$

onde para chegarmos à última igualdade usamos a identidade (1.21).  $\square$

**Definição 1.4.3.** Dado  $s \in \mathbb{R}$ , definimos os operadores  $J^s : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$  e  $D^s : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$  por:

$$J^s f = \mathcal{F}^{-1} \left( (1 + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f} \right), \quad \text{para toda } f \in \mathcal{S}', \quad (1.22)$$

$$D^s f = \mathcal{F}^{-1} \left( (|\cdot|^2)^s \widehat{f} \right), \quad \text{para } f \in \mathcal{S}' \text{ tal que } 0 \notin \text{supp } \widehat{f}. \quad (1.23)$$

Esses operadores são conhecidos como potencial de Bessel e potencial de Riesz de ordem  $-s$ , respectivamente.

Iremos usar com muita frequência as propriedades dos potenciais de Bessel e potencial de Riesz apresentadas na proposição abaixo.

**Proposição 1.4.1.** Seja  $1 \leq p \leq \infty$  e seja  $f \in \mathcal{S}'$  tal que  $\Delta_j f \in L^p$ . Então para todo  $s \in \mathbb{R}$  tem-se:

$$i) \quad \|J^s \Delta_j f\|_p \lesssim 2^{sj} \|\Delta_j f\|_p, \quad \text{para todo } j \geq 1,$$

$$ii) \quad \|D^s \Delta_j f\|_p \lesssim 2^{sj} \|\Delta_j f\|_p, \quad \text{para todo } j \in \mathbb{Z},$$

$$iii) \quad \text{Se } S_0 f \in L^p, \text{ então } \|J^s S_0 f\|_p \lesssim \|S_0 f\|_p,$$

com as constantes das estimativas independentes de  $p$  e  $j$ .

*Demonstração.* Para cada  $j \in \mathbb{Z}$

$$\Delta_j f = \tilde{\Delta}_j \Delta_j f = \sum_{l=-1}^1 \Delta_{j+l} (\Delta_j f).$$

Portanto, os itens *i)* e *ii)* ficam estabelecidos se provarmos que para cada  $|l| \leq 1$ ,

$$\|\mathcal{F}(J^s \Delta_{j+l})\|_{\mathcal{M}_p} \leq c 2^{sj}, \quad (1.24)$$

$$\|\mathcal{F}(D^s \Delta_{j+l})\|_{\mathcal{M}_p} \leq c 2^{sj}. \quad (1.25)$$

De fato, se valer (1.24), então

$$\begin{aligned} \|J^s \Delta_j (\Delta_j f)\|_p &= \|J^s \Delta_{j+l} (\Delta_j f)\|_p = \|J^s \check{\varphi}_{j+l} * \Delta_j f\|_p \\ &\lesssim \|J^s \check{\varphi}_{j+l}\|_{\mathcal{M}_p} \|\Delta_j f\|_p = c \|J^s \Delta_{j+l}\|_{\mathcal{M}_p} \|\Delta_j f\|_p \leq c 2^{sj} \|\Delta_j f\|_p. \end{aligned}$$

De forma análoga se procede para com o (1.25).

Provemos (1.24). Observemos que, pela Proposição 1.3.1, a função

$$\mathcal{F}(J^s \Delta_{j+l}) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \varphi_{j+l}(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \varphi(2^{-(j+l)} \xi)$$

tem a mesma norma em  $\mathcal{M}_p$  que a função

$$2^{(j+l)s}(2^{-2(j+l)} + |\eta|^2)^{\frac{s}{2}}\varphi(\eta),$$

onde  $\eta = 2^{-(j+l)}\xi$ . Usando o Lema 1.3.1 vemos que a função definida acima pertence a  $\mathcal{M}_p$ , com a norma no máximo  $c2^{sj}$  ( $j \geq 1$ ). Daí,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(J^s\Delta_{j+l})\|_{\mathcal{M}_p} &= 2^{(j+l)s} \sup_{\|f\|_p=1} \|((2^{-2(j+l)} + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\varphi) * f\|_p \\ &\leq 2^{(j+l)s} \|((2^{-2(j+l)} + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\varphi)\|_1 = c2^{sj} \end{aligned}$$

e fica provado (1.24).

O item (1.25) segue de modo análogo.

Para provar o item *iii*) observemos que  $S_0f = (S_0 + \Delta_1)S_0f$ . Daí, pelo Lema 1.3.1,  $\mathcal{F}(J^sS_0) \in \mathcal{M}_p$  e segue o resultado.  $\square$

**Corolário 1.4.1.** *Se  $s_1 < s_2$ , então  $J^{s_1-s_2}$  aplica  $L^p$  em  $L^p$  (injetivamente), isto é,  $J^{s_1-s_2} : L^p \rightarrow L^p$ .*

*Demonstração.* Seja  $\epsilon = s_2 - s_1$ . Pelo Lema 1.4.1 e pela desigualdade de Young,

$$\begin{aligned} \|J^{-\epsilon}f\|_p &= \|J^{-\epsilon}\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \Delta_k f\right)\|_p = \|J^{-\epsilon}(S_0f + \sum_{k \geq 1} \Delta_k f)\|_p \\ &\leq \|J^{-\epsilon}(S_0f)\|_p + \sum_{k \geq 1} \|\Delta_k f\|_p \\ &\lesssim \|S_0f\|_p + \sum_{k \geq 1} 2^{-\epsilon k} \|\Delta_k f\|_p \lesssim (1 + 2^{-\epsilon k}) \|f\|_p. \end{aligned}$$

Isso encerra a demonstração.  $\square$

Outro importante resultado que iremos recorrer com frequência é o seguinte:

**Proposição 1.4.2.** *Seja  $f : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$  ( $0 < T < \infty$ ) uma função suave e sejam  $p, q \in [1, \infty]$ . Então, para quaisquer  $j, l \in \mathbb{N}$ , valem as seguintes estimativas:*

$$\|D_x^s \Delta_j f\|_{L_x^p L_T^q} \lesssim 2^{js} \|\Delta_j f\|_{L_x^p L_T^q} \quad (s \in \mathbb{R}). \quad (1.26)$$

A estimativa (1.26) vale com  $\partial_x^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , no lugar de  $D_x^s$ .

*Demonstração.* Para provar (1.26), tomamos como base a demonstração do Lemma 2.2 em [40], no qual é provado a estimativa (1.26) com  $\partial_x^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Do Lema 1.4.2 das

desigualdades de Minkowski para integrais (Proposição 1.1.4) e de Young, temos

$$\begin{aligned} \|\Delta_j D_x^s f\|_{L_x^p L_T^q} &= \|\tilde{\Delta}_j \Delta_j D_x^s f\|_{L_x^p L_T^q} = \|\tilde{\varphi}_j * \Delta_j D_x^s f\|_{L_x^p L_T^q} \\ &= \|D_x^s \tilde{\varphi}_j * \Delta_j f\|_{L_x^p L_T^q} = \|\|D_x^s \tilde{\varphi}_j * \Delta_j f\|_{L_T^q}\|_{L_x^p} \\ &= \|\| \int_{-\infty}^{\infty} D_y^s \tilde{\varphi}_j(y) \Delta_j f(x-y, t) dy \|_{L_T^q}\|_{L_x^p} \lesssim \|D_x^s \tilde{\varphi}_j\|_{L_x^1} \|\Delta_j f\|_{L_x^p L_T^q}. \end{aligned}$$

Agora, já que  $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}$ ,

$$\begin{aligned} \|D_x^s \tilde{\varphi}_j\|_{L_x^1} &= \|\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^s \tilde{\varphi}_j(\xi))\|_{L^1} = \|\int_{\mathbb{R}} e^{ix \cdot \xi} |\xi|^s \tilde{\varphi}(2^{-j}\xi) d\xi\|_{L_x^1} \\ &= \|\int_{\mathbb{R}} e^{ix \cdot 2^j \eta} |2^j \eta|^s \tilde{\varphi}(\eta) 2^j d\eta\|_{L_x^1} = \|\int_{\mathbb{R}} e^{i2^j x \cdot \eta} 2^{js} |\eta|^s \tilde{\varphi}(\eta) 2^j d\eta\|_{L_x^1} \\ &= 2^{js} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{i2^j x \cdot \eta} |\eta|^s \tilde{\varphi}(\eta) d\eta \right| 2^j dx = 2^{js} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{iy \cdot \eta} |\eta|^s \tilde{\varphi}(\eta) d\eta \right| dy \\ &= 2^{js} \|D^s \tilde{\varphi}\|_{L^1} \leq C 2^{js} \end{aligned}$$

e com isso segue o resultado. □

## 1.4.2 Definição e propriedades fundamentais dos espaços de Besov e de Sobolev generalizados.

**Definição 1.4.4.** *Sejam  $s \in \mathbb{R}$  e  $1 \leq p, q \leq \infty$ .*

1. *Os espaços de Besov  $B_p^{s,q}$  e de Sobolev  $H_p^s$  generalizados são definidos, respectivamente, por:*

$$B_p^{s,q} = \{f \in \mathcal{S}' : \|f\|_{B_p^{s,q}} < \infty\}, \quad (1.27)$$

$$H_p^s = \{f \in \mathcal{S}' : \|f\|_{H_p^s} = \|J^s f\|_{L^p} < \infty\},$$

onde

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_p^{s,q}} &= \|S_0 f\|_{L^p} + \left( \sum_{k=1}^{\infty} (2^{sk} \|\Delta_k f\|_{L^p})^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|S_0 f\|_{L^p} + \|(2^{sk} \|\Delta_k f\|_{L^p})_{k \in \mathbb{N}}\|_{l^q}. \end{aligned}$$

2. *Denotamos por  $\dot{B}_p^{s,q}$  ao espaço*

$$\dot{B}_p^{s,q} = \left\{ f \in \mathcal{S}' : \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}} = \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} (2^{sk} \|\Delta_k f\|_{L^p})^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

*o qual é chamado de espaço de Besov generalizado homogêneo.*

3. O espaço de Sobolev generalizado homogêneo é definido por:

$$\dot{H}_p^s = \{f \in \mathcal{S}' : \|f\|_{\dot{H}_p^s} = \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^s \mathcal{F}(\Delta_k f)) \right\|_{L^p} < \infty\}.$$

**Observação 1.4.2.** Temos as seguintes observações a fazer:

1. Quando  $p = q = 2$ , os espaços  $B_p^{s,q}$  e  $H_p^s$  coincidem e em vez de  $H_2^s$ , são denotados por

$$H^s := \{f \in \mathcal{S}' : \|f\|_{H^s} := \|J^s f\|_{L^2} < \infty\}.$$

Para um estudo específico desse importante espaço de Sobolev, sugerimos o capítulo 3 de Linares/Ponce [27] ou Folland [9].

2. O espaço básico de resolução do PVI (1) será  $B_2^{\frac{1}{2},1}$  cuja norma é

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}} &= \|S_0 f\|_{L^2} + \left\| (2^{sk} \|\Delta_k f\|_{L^2})_{k \in \mathbb{N}} \right\|_{l^1} \\ &= \|S_0 f\|_{L^2} + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{sk} \|\Delta_k f\|_{L^2}. \end{aligned}$$

3. As funções  $\|\cdot\|_{B_p^{s,q}}$  e  $\|\cdot\|_{H_p^s}$  são normas porque  $l^q$  e  $L^p$  são espaços normados.

4.  $H_p^s$  é um espaço de Banach. De fato, seja  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de Cauchy em  $H_p^s$ . Então  $(J^s f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Cauchy em  $L^p$ , que é completo. Logo existe uma  $g \in L^p$  tal que  $\|J^s f_n - g\|_{L^p} \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Tomando  $f = J^{-s} g$ , temos que  $f \in H_p^s$  (pois  $J^s f = g \in L^p$ ) e  $\|f_n - f\|_{H_p^s} = \|J^s(f_n - f)\|_{L^p} = \|J^s f_n - g\|_{L^p} \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

5.  $B_p^{s,q}$  é um espaço de Banach. De fato, seja  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de Cauchy em  $B_p^{s,q}$ . Então  $(S_0 f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(\Delta_k f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  são sequências de Cauchy em  $L^p$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Seja  $g_0 \in L^p$  tal que  $\|S_0 f_n - g_0\|_{L^p} \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$  e, para cada  $k \in \mathbb{N}$  seja  $g_k \in L^p$  tal que  $\|\Delta_k f_n - g_k\|_{L^p} \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Seja  $f \in L^p$  tal que  $S_0 f = g_0$  e  $\Delta_k f = g_k$ . Então, para cada  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $f_k^n = 2^{sk} \|\Delta_k f_n\|_{L^p}$  converge para  $f_k = 2^{sk} \|\Delta_k f\|_{L^p}$ , e portanto, como  $\|f_k^n\|_{l^q}$  é limitada, concluímos que  $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^q$ , ou seja,  $f \in B_p^{s,q}$ .

6.  $H_p^0 = L^p$ , para todo  $1 \leq p \leq \infty$ .

7.  $\dot{H}_p^s$  é um espaço semi-normado, e,  $\|f\|_{\dot{H}_p^s} = 0$  se, e somente se,  $\text{supp } \hat{f} = 0$ , i.e.,  $f$  é um polinômio.

8.  $\dot{B}_p^{s,q}$  é um espaço semi-normado, e,  $\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}} = 0$  se, e somente se,  $\text{supp } \hat{f} = 0$ , i.e.,  $f$  é um polinômio.

Vejamos algumas propriedades básicas de  $H_p^s$  e de  $B_p^{s,q}$ .

**Proposição 1.4.3.** *Os espaços de Sobolev e de Besov definidos acima satisfazem as seguintes propriedades:*

1. Se  $s_1 < s_2$  e  $1 \leq p, q \leq \infty$ , então  $H_p^{s_2} \subset H_p^{s_1}$  e  $B_p^{s_2,q} \subset B_p^{s_1,q}$ .
2. Se  $1 \leq p, q < \infty$ , então  $\mathcal{S}$  é denso em  $B_p^{s,q}$  e em  $H_p^s$ .
3. Se,  $1 \leq q_1 < q_2 \leq \infty$ , então  $B_p^{s,q_1} \subset B_p^{s,q_2}$ , para quaisquer  $s \in \mathbb{R}$  e  $1 \leq p \leq \infty$ .

Além disso,

$$B_p^{s,1} \subset H_p^s \subset B_p^{s,\infty}, \text{ onde } s \in \mathbb{R} \text{ e } 1 \leq p \leq \infty.$$

4.  $J^\sigma$  é um isomorfismo entre  $B_p^{s,q}$  e  $B_p^{s-\sigma,q}$ .
5.  $J^\sigma$  é um isomorfismo entre  $H_p^s$  e  $H_p^{s-\sigma}$ .

*Demonstração.* Veja o capítulo 6 de Bergh e Löfström [1] ou o capítulo 2 da ref. [3].  $\square$

Faremos uso frequente do seguinte caso particular de imersão:

**Corolário 1.4.2.** *Dado  $1 \leq p \leq \infty$ , tem-se:*

$$B_p^{s,1} \subset B_p^{0,1} \subset H_p^0 = L^p, \quad \forall s > 0. \quad (1.28)$$

*Demonstração.* Pelo item 1 da Proposição 1.4.3, vemos que  $B_p^{s,1} \subset B_p^{0,1}$ . Pelo item 3 da mesma proposição e o item 5 da Observação 1.4.2, tem-se  $B_p^{0,1} \subset H_p^0 = L^p$ . Com isso temos o corolário provado.  $\square$

Como corolário do item 5 da Proposição 1.4.3 temos o seguinte resultado:

**Corolário 1.4.3.** *Seja  $1 \leq p, q < \infty$  e seja  $s \in \mathbb{R}$ . Então:*

$$(H_p^s)' = H_{p'}^{-s} \quad \text{e} \quad (B_p^{s,q})' = B_{p'q'}^{-s}, \quad \text{onde } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1. \quad (1.29)$$

*Demonstração.* Veja o capítulo 6 de Bergh e Löfström [1] ou o capítulo 2 da ref. [3].  $\square$

Uma parte das propriedades dos espaços não homogêneos  $B_p^{s,q}$  e  $H_p^s$  são válidas também para os espaços homogêneos  $\dot{B}_p^{s,q}$  e  $\dot{H}_p^s$ , por exemplo:



**Proposição 1.4.4.** *Se,  $1 \leq q_1 < q_2 \leq \infty$ , então*

$$\dot{B}_p^{s,q_1} \subset \dot{B}_p^{s,q_2}, \text{ para quaisquer } s \in \mathbb{R} \text{ e } 1 \leq p \leq \infty.$$

*Além disso,*

$$\dot{B}_p^{s,1} \subset \dot{H}_p^s \subset \dot{B}_p^{s,\infty}, \text{ onde } s \in \mathbb{R} \text{ e } 1 \leq p \leq \infty.$$

*Demonstração.* Veja o capítulo 6 de Bergh e Löfström [1] ou o capítulo 2 da ref. [3].  $\square$

As seguintes relações entre os espaços homogêneos e não-homogêneos serão essenciais na prova do nosso resultado principal:

**Proposição 1.4.5.** *Seja  $f \in \mathcal{S}'$  tal que  $0 \notin \text{supp } \hat{f}$ . Então, dados  $s \in \mathbb{R}$  e  $1 \leq p, q \leq \infty$ , valem:*

$$1. \quad f \in B_p^{s,q} \iff f \in \dot{B}_p^{s,q};$$

$$2. \quad f \in H_p^s \iff f \in \dot{H}_p^s.$$

*Além disso, para todo  $s > 0$  e quaisquer  $1 \leq p, q \leq \infty$ ,*

$$3. \quad B_p^{s,q} = L^p \cap \dot{B}_p^{s,q};$$

$$4. \quad H_p^s = L^p \cap \dot{H}_p^s.$$

*Demonstração.* Veja o capítulo 6 de Bergh e Löfström [1] ou o capítulo 2 da ref. [3].  $\square$

Os itens 1. e 2. da proposição acima nos dizem, em outras palavras, que se  $0 \notin \text{supp } \hat{f}$ , então

$$\|f\|_{B_p^{s,q}} \cong \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}} \quad \text{e} \quad \|f\|_{H_p^s} \cong \|f\|_{\dot{H}_p^s}.$$

Finalizamos a seção com um teorema de imersão que usaremos com muita frequência.

**Proposição 1.4.6.** *[Imersão de Sobolev generalizada] Sejam  $s, s_1 \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq p \leq p_1 \leq \infty$  e  $1 \leq q \leq q_1 \leq \infty$  ( $p, p_1, q, q_1 \in \mathbb{R}$ ), tais que,  $s - \frac{n}{p} = s_1 - \frac{n}{p_1}$ . Então valem as seguintes inclusões:*

$$B_p^{s,q} \subset B_{p_1}^{s_1,q_1}, \tag{1.30}$$

$$H_p^s \subset H_{p_1}^{s_1}. \tag{1.31}$$

*Demonstração.* Veja o Teorema 6.5.1 de Bergh e Löfström [1].  $\square$

Para um estudo detalhado dos espaços acima sugerimos a leitura de de Bergh e Löfström [1] (capítulos 1 e 6) tendo como suporte a referência [3].

## 1.5 Paraproductos e estimativa do comutador de Derivadas Fracionárias

**Lema 1.5.1.** *Dadas  $f$  e  $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , tem-se:*

$$f \cdot g = S_0 f S_0 g + \sum_{r \geq 0} (\Delta_{r+1} f S_r g + \Delta_{r+1} g S_{r+1} f). \quad (1.32)$$

*Demonstração.* Como  $f = \lim_{r \rightarrow \infty} S_r f$  e  $g = \lim_{r \rightarrow \infty} S_r g$ , iremos somar e subtrair termos que nos levarão à identidade desejada, do seguinte modo:

$$\begin{aligned} fg &= \lim_{r \rightarrow \infty} S_r f S_r g = S_0 f S_0 g + \lim_{r \rightarrow \infty} (S_r f S_r g - S_0 f S_0 g) \\ &= S_0 f S_0 g + \lim_{r \rightarrow \infty} (-S_0 f S_0 g + S_1 f S_1 g - S_1 f S_1 g + S_2 f S_2 g - S_2 f S_2 g + \dots + S_r f S_r g) \\ &= S_0 f S_0 g + \lim_{r \rightarrow \infty} ((S_1 f S_1 g + \dots + S_r f S_r g) - (S_0 f S_0 g + S_1 f S_1 g + \dots + S_{r-1} f S_{r-1} g)) \\ &= S_0 f S_0 g + \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^r S_j f S_j g - \sum_{k=0}^{r-1} S_k f S_k g \right) \\ &= S_0 f S_0 g + \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=0}^{r-1} S_{j+1} f S_{j+1} g - \sum_{j=0}^{r-1} S_j f S_j g \right) \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} fg &= S_0 f S_0 g + \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{r-1} (S_{j+1} f S_{j+1} g - S_j f S_j g) \\ &= S_0 f S_0 g + \sum_{r=0}^{\infty} (S_{r+1} f S_{r+1} g - S_r f S_r g). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Usando o fato de que  $ab - cd = \frac{1}{2}(a - c)(b + d) + \frac{1}{2}(a + c)(b - d)$ , vemos que

$$\begin{aligned} (S_{r+1} f S_{r+1} g - S_r f S_r g) &= \frac{1}{2}(S_{r+1} f - S_r f)(S_{r+1} g + S_r g) + \frac{1}{2}(S_{r+1} f + S_r f)(S_{r+1} g - S_r g) \\ &= \frac{1}{2} \left( \Delta_{r+1} f (S_r g + S_{r+1} g) + (S_r f + S_{r+1} f) \Delta_{r+1} g \right). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Substituindo (1.34) em (1.33), obtemos a identidade

$$f \cdot g = S_0 f S_0 g + \frac{1}{2} \sum_{r \geq 0} [\Delta_{r+1} f (S_r g + S_{r+1} g) + \Delta_{r+1} g (S_r f + S_{r+1} f)]. \quad (1.35)$$

Fazendo o devido reagrupamento de termos em (1.35) vemos que

$$\Delta_{r+1} f (S_r g + S_{r+1} g) + \Delta_{r+1} g (S_r f + S_{r+1} f) = 2 [\Delta_{r+1} f S_r g + \Delta_{r+1} g S_{r+1} f].$$

Agora, substituindo a identidade acima no lado direito de (1.35) obtemos (1.32).  $\square$

Vejamos agora mais outras duas identidades fundamentais do paraproduto que foram essenciais na elaboração do nosso trabalho.

**Lema 1.5.2.** *Dado qualquer inteiro  $j \geq 3$ , tem-se:*

$$\Delta_j(S_0 f S_0 g) = 0. \quad (1.36)$$

*Demonstração.* Dado  $j \geq 1$ ,

$$\mathcal{F}(\Delta_j(S_0 f S_0 g))(\xi) = \varphi_j(\xi)(\widehat{S_0 f} * \widehat{S_0 g})(\xi) \text{ e } \text{supp} \varphi_j \subseteq \{ \xi : 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1} \}.$$

Pelo item 4 da Proposição 1.1.5,

$$\begin{aligned} \text{supp } \widehat{S_0 f} * \widehat{S_0 g} &\subseteq \overline{\text{supp} \widehat{S_0 f} + \text{supp} \widehat{S_0 g}} \\ &\subseteq \overline{\{ \xi; |\xi| \leq 2 \} + \{ \xi; |\xi| \leq 2 \}} \\ &= \{ \xi + \eta; |\xi + \eta| \leq 2^2 \} \\ &= \{ \xi; |\xi| \leq 2^2 \}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\text{supp } \mathcal{F}(\Delta_j(S_0 f * S_0 g)) \subseteq \{ \xi; 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1} \} \cap \{ \xi; |\xi| \leq 2^2 \}.$$

Logo, se  $2^2 \leq 2^{j-1}$  (ou seja  $j \geq 3$ ), então  $\Delta_j(S_0 f S_0 g) = 0$ .  $\square$

**Lema 1.5.3.** *Dado  $j \geq 1$ , tem-se:*

$$\Delta_j \left\{ \sum_{r \geq 0} (\Delta_{r+1} f S_r g + \Delta_{r+1} g S_{r+1} f) \right\} = \Delta_j \left\{ \sum_{r \geq j} (\Delta_{r-2} f S_{r-3} g + \Delta_{r-2} g S_{r-2} f) \right\}. \quad (1.37)$$

*Demonstração.* Dado  $j \geq 1$ ,

$$\mathcal{F}(\Delta_j(\Delta_{r+1} f S_r g))(\xi) = \varphi_j(\xi)(\widehat{\Delta_{r+1} f} * \widehat{S_r g})(\xi), \quad \text{supp} \varphi_j \subseteq \{ \xi : 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1} \},$$

e, pelo item 4 da Proposição 1.1.5,

$$\begin{aligned} \text{supp } (\widehat{\Delta_{r+1} f} * \widehat{S_r g}) &\subseteq \overline{\text{supp} \widehat{\Delta_{r+1} f} + \text{supp} \widehat{S_r g}} \\ &= \overline{\{ \xi : 2^r \leq |\xi| \leq 2^{r+2} \} + \{ \xi : |\xi| \leq 2^{r+1} \}} \\ &\subseteq \{ \xi + \eta : |\xi + \eta| \leq 2^{r+2} + 2^{r+1} \} \\ &\subseteq \{ \xi; |\xi| \leq 2^{r+3} \}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\text{supp } \mathcal{F}(\Delta_j(\Delta_{r+1} f S_r g)) \subseteq A, \text{ onde } A := \{ \xi : 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1} \} \cap \{ \xi : |\xi| \leq 2^{r+3} \}.$$

Se  $r + 3 \leq j - 1$  (ou seja,  $r \leq j - 4$ ), então  $\text{supp } \mathcal{F}(\Delta_j(\Delta_{r+1}fS_rg)) = \emptyset$ . Assim,

$$\Delta_j\left(\sum_{r \geq 0} \Delta_{r+1}fS_rg\right) = \Delta_j\left(\sum_{r \geq j-3} \Delta_{r+1}fS_rg\right). \quad (1.38)$$

Agora, novamente usando o item 4 da Proposição 1.1.5 vemos que

$$\text{supp}\widehat{\Delta_{r+1}f} * \widehat{S_{r+1}g} \subseteq \overline{\{\xi + \eta : |\xi + \eta| \leq 2^{r+2} + 2^{r+2}\}} = \{\xi : |\xi| \leq 2^{r+3}\}.$$

Daí,  $\text{supp}\mathcal{F}(\Delta_j(\Delta_{r+1}fS_{r+1}g)) \subseteq A$ , e portanto,

$$\text{supp } \mathcal{F}(\Delta_j(\Delta_{r+1}fS_{r+1}g)) = \emptyset.$$

Portanto,

$$\Delta_j\left(\sum_{r \geq 0} \Delta_{r+1}fS_{r+1}g\right) = \Delta_j\left(\sum_{r \geq j-3} \Delta_{r+1}fS_{r+1}g\right). \quad (1.39)$$

Logo, de (1.38) e (1.39) segue que

$$\begin{aligned} \Delta_j\left\{\sum_{r \geq 0} (\Delta_{r+1}fS_rg + \Delta_{r+1}gS_{r+1}f)\right\} &= \Delta_j\left(\sum_{r \geq j-3} (\Delta_{r+1}fS_rg + \Delta_{r+1}fS_{r+1}g)\right) \\ &= \Delta_j\left\{\sum_{r \geq j} (\Delta_{r-2}fS_{r-3}g + \Delta_{r-2}gS_{r-2}f)\right\}, \end{aligned}$$

onde fizemos também uma mudança de índices para chegarmos à última expressão da igualdade acima.  $\square$

Exibimos a seguir uma estimativa do comutador de derivadas fracionárias de funções vetoriais e uma estimativa para duplo somatório que foram de fundamental importância para alcançarmos nossos resultados.

**Lema 1.5.4.** *Sejam  $\alpha \in (0, 1)$  e  $0 \leq \beta < 1 - \alpha$ . Se  $p, p_1, p_2, q, q_1, q_2 \in (1, \infty)$  são tais que  $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ , e  $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$ , então tem-se que*

$$\|D_x^\beta([D_x^\alpha, f]g)\|_{L_x^p L_T^q} \lesssim \|g\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} \|D_x^{\alpha+\beta} f\|_{L_x^{p_2} L_T^{q_2}}.$$

Além disso, o valor  $q_1 = \infty$  é garantido quando  $\beta > 0$ .

*Demonstração.* Veja o Lema 3.4 de Molinet and Ribaud [32].  $\square$

**Observação 1.5.1.** *O Lema 1.5.4 permanece válido com  $\widetilde{D}_x^\alpha := \mathcal{H}D^\alpha$  no lugar de  $D_x^\alpha$ , onde  $\mathcal{H}$  é a transformada de Hilbert. Para um estudo detalhado da transformada de Hilbert sugerimos a referência [7]. Para uma consulta rápida de sua definição e principais propriedades sugerimos o capítulo 1 de Linares/Ponce [27].*

# Capítulo 2

## Estimativas para a equação de Schrödinger linear

Neste capítulo vamos apresentar as estimativas de efeito regularizantes, estimativas de tipo Strichartz e para a função maximal no tempo que usaremos, associadas à solução do PVI para a equação de Schrödinger linear

$$\begin{cases} \partial_t u - i\Delta u = f(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \phi(x), \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $u_0 \in \mathcal{S}$ ,  $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  e  $u = u(x, t)$  é uma função complexa.

### 2.1 O fluxo linear

Consideremos o PVI (2.1) com  $f \equiv 0$ , ou seja, para a equação de Schrödinger linear homogênea:

$$\begin{cases} \partial_t u - i\partial_x^2 u = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases} \quad (2.2)$$

Aplicando sobre ele a transformada de Fourier em relação a  $x$ , o transformamos no seguinte PVI:

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u}(\xi, t) = -i\xi^2 \widehat{u}(\xi, t) \\ \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{\phi}(\xi), \end{cases} \quad (2.3)$$

cuja solução é

$$\widehat{u}(\xi, t) = e^{-it\xi^2} \widehat{\phi}(\xi). \quad (2.4)$$

Daí, aplicando sobre (2.4) a transformada inversa de Fourier obtemos

$$u(x, t) = (e^{-it\xi^2} \widehat{\phi}(\xi))^\vee = (e^{-it\xi^2})^\vee * \phi(x) = U(t)\phi(x), \quad (2.5)$$

onde  $U(t)\phi(x)$  é o operador definido por  $U(t)\phi = (e^{-it\xi^2} \widehat{\phi}(\xi))^\vee$ , para cada  $t \in \mathbb{R}$  e  $\phi \in \mathcal{S}$ .

O caso  $x \in \mathbb{R}^n$  é análogo ao unidimensional que acabamos de fazer.

A família de operadores  $\{U(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$  em  $L^2(\mathbb{R}^n)$  tem propriedades parecidas com as da exponencial:

**Proposição 2.1.1.** 1. Para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $U(t) : L^2(\mathbb{R}^n) \mapsto L^2(\mathbb{R}^n)$  é uma isometria; portanto

$$\|U(t)\phi\|_{L^2} = \|\phi\|_{L^2}.$$

$$2. U(t)U(t') = U(t+t'), \quad U(t)^{-1} = U(-t) = U(t)^* \quad e \quad U(0) = 1.$$

3. Fixando  $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , a função  $\Phi_\phi : \mathbb{R} \mapsto L^2(\mathbb{R}^n)$  definida por  $\Phi_\phi(t) = U(t)\phi$  é contínua; isto é, ela descreve um caminho em  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

*Demonstração.* 1. Pelo Teorema de Plancherel

$$\|U(t)\phi\|_{L^2} = \|e^{-it|\xi|^2} \widehat{\phi}\|_{L^2} = \|\widehat{\phi}\|_2 = \|\phi\|_{L^2}.$$

Os demais itens são imediatos. □

Uma família de operadores  $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , definida num espaço de Hilbert  $H$ , que satisfaz os itens 1 – 3 da Proposição 2.1.1, é chamada de **grupo unitário de operadores**. Para um estudo detalhado de grupos (e semigrupos) de operadores lineares, sugerimos a leitura de A. Pazy [37].

Vejamos agora o PVI não homogêneo. Seja  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  não identicamente nula. Aplicando ao PVI (2.1) a transformada de Fourier, obtemos:

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u}(\xi, t) + 4\pi^2 i |\xi|^2 \widehat{u}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi, t), & (\xi, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \\ \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{\phi}(\xi). \end{cases} \quad (2.6)$$

Usando o método de Leibniz do fator integrante para EDO's lineares de primeira ordem (a fórmula de variação das constantes), chegamos à seguinte solução do PVI (2.6):

$$\widehat{u}(\xi, t) = e^{-it\xi^2} \widehat{\phi}(\xi) + \int_0^t e^{-i(t-s)\xi^2} \widehat{f}(\xi, s) ds. \quad (2.7)$$

Agora, aplicando em (2.7) a transformada inversa de Fourier, chegamos à solução do PVI (2.1):

$$u(x, t) = U(t)\phi(x) + \int_0^t U(t-s)f(x, s)ds. \quad (2.8)$$

Observe que a condição  $u(x, 0) = \phi(x)$  é facilmente verificada em (2.8).

## 2.2 Estimativas lineares usuais

Seja  $U(t)u_0$  a solução (2.5) do problema linear homogêneo (2.2), isto é,

$$U(t)\phi(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(x\xi - t\xi^2)} \widehat{\phi}(\xi) d\xi. \quad (2.9)$$

Além do operador linear  $U(t)$  vamos fazer uso frequente de estimativas para o operador com retardo  $R$  definido por

$$R(f)(t) = \int_0^t U(t-t')f(t')dt' \quad (\text{onde } f = f(x, t)), \quad (2.10)$$

que somado ao operador  $U(t)$  gera a solução (2.8) do PVI linear não-homogêneo (2.1). Portanto, podemos escrevê-la na forma

$$u(t) = U(t)\phi + R(f)(t).$$

Para simplificar a notação na dedução das estimativas para  $U$ , vamos usar a seguinte definição de terno admissível idealizada por Molinet e Ribaud em [32]:

**Definição 2.2.1.** Dizemos que um terno  $(\alpha, p, q) \in \mathbb{R} \times [2, \infty]^2$  é

i) 1-admissível se, e somente se,

$$(\alpha, p, q) = \left(\frac{1}{2}, \infty, 2\right) \text{ ou } p \in [4, \infty), q \in [2, \infty], \frac{2}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}, \alpha = \frac{1}{p} + \frac{2}{q} - \frac{1}{2}; \quad (2.11)$$

ii) 2-admissível se, e somente se,

$$2 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}, \alpha = \frac{1}{p} + \frac{3}{q} - 1. \quad (2.12)$$

Se além de (2.12) tivermos  $4 \leq p < \infty$ , dizemos que  $(\alpha, p, q)$  é 2\*-admissível.

Os efeitos regularizantes e estimativas de Strichartz a seguir, deduzidos por Molinet e Ribaud em [32] interpolando resultados anteriores de Kenig, Ponce e Vega [22, 24], serão imprescindíveis para o desenvolvimento do nosso trabalho.

**Lema 2.2.1.** Sejam  $(\alpha, p, q) \in \mathbb{R} \times [2, \infty]^2$  e  $0 < T < 1$ .

- i) Se  $(\alpha, p, q)$  é 1-admissível, então  $\|D_x^\alpha U(t)\phi\|_{L_x^p L_T^q} \lesssim \|\phi\|_{L^2}$ , para todo  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .
- ii) Se  $(\alpha, p, q)$  é 2-admissível, então  $\|J_x^\alpha U(t)\phi\|_{L_x^p L_T^q} \lesssim \|\phi\|_{L^2}$ , para todo  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .
- iii) Se  $(\alpha, p, q)$  é 2\*-admissível, então  $\|D_x^\alpha U(t)\phi\|_{L_x^p L_T^q} \lesssim T^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2q}} \|\phi\|_{L^2}$ , para todo  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

*Demonstração.* Veja Molinet and Ribaud [32]. □

Observe que a estimativa i) do lema acima abrange (é uma generalização da) a estimativa clássica de Kato  $\|D_x^{\frac{1}{2}} U(t)\phi\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim \|\phi\|_{L^2}$ .

Agora enunciamos a famosa estimativa para a função maximal em  $L^2$ :

**Lema 2.2.2.** Para  $s > 1/2$ ,  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  e  $0 < T \leq 1$  tem-se:

$$\|U(t)\phi\|_{L_x^2 L_T^\infty} \lesssim \|\phi\|_{H^s}.$$

*Demonstração.* É feita seguindo-se a demonstração da estimativa para a função maximal em  $L^2$  associada ao fluxo homogêneo da equação KdV, de autoria de Kenig, Ponce e Vega, em [24] (para mais detalhe confira também [23, Theorem 3.1]). □

É importante notar que o terno  $(-s, 2, \infty)$ , com  $s > 1/2$ , não é admissível, por isso fez-se necessário enunciar a estimativa para a função maximal em  $L^2$  separada daquelas do Lema 2.2.1.

Fazendo uma adaptação do famoso Lema de Christ and Kiselev (veja os Lemmas 2 e 3 de [33] e também o lema original em [5]), Molinet e Ribaud [33] deduziram, no contexto do fluxo da equação de Benjamin-Ono, as seguintes estimativas para o operador com retardo  $R(f)$  a partir das estimativas obtidas no Lema 2.2.1.

**Lema 2.2.3.** Sejam  $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}_+^2$  e  $1 \leq p_1, q_1, p_2, q_2 \leq \infty$  tais que, para cada  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,

$$\|D_x^{\alpha_1} U(t)\phi\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} \lesssim T^{r_1} \|\phi\|_{L^2}, \tag{2.13}$$

$$\|D_x^{\alpha_2} U(t)\phi\|_{L_x^{p_2} L_T^{q_2}} \lesssim T^{r_2} \|\phi\|_{L^2}. \tag{2.14}$$

Então para todo  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ ,

$$\|D_x^{\alpha_2} R(f)\|_{L_T^\infty L_x^2} \lesssim T^{r_2} \|f\|_{L_x^{\tilde{p}_2} L_T^{\tilde{q}_2}}, \tag{2.15}$$

$$\|D_x^{\alpha_1 + \alpha_2} R(f)\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} \lesssim T^{r_1 + r_2} \|f\|_{L_x^{\tilde{p}_2} L_T^{\tilde{q}_2}}, \tag{2.16}$$



desde que

$$\min(p_1, q_1) > \max(\tilde{p}_2, \tilde{q}_2) \quad \text{ou} \quad (q_1 = \infty \text{ e } \tilde{p}_2, \tilde{q}_2 < \infty), \quad (2.17)$$

onde  $\tilde{p}_2, \tilde{q}_2$  são definidos por  $\frac{1}{\tilde{p}_2} = 1 - \frac{1}{p_2}$  e  $\frac{1}{\tilde{q}_2} = 1 - \frac{1}{q_2}$ .

**Corolário 2.2.1.** Para cada  $0 < T \leq 1$ ,

$$\|D_x^{\frac{1}{2}} R(f)\|_{L_T^\infty L_x^2} \lesssim \|f\|_{L_x^1 L_T^2}. \quad (2.18)$$

*Demonstração.* Como o terno  $(0, 4, 4)$  é 2-admissível e o terno  $(\frac{1}{2}, \infty, 2)$  é 1-admissível, segue do Lema 2.2.1 que

$$\|U(t)\phi\|_{L_{x,T}^4} \lesssim \|\phi\|_{L^2} \quad \text{e} \quad \|D_x^{\frac{1}{2}} U(t)\phi\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim \|\phi\|_{L^2}.$$

Portanto, o resultado segue da estimativa (2.15) do Lema 2.2.3.  $\square$

Finalizamos esta parte com uma estimativa muito importante que não é coberta pelo Lema 2.2.3:

**Lema 2.2.4.** Para cada  $0 < T \leq 1$ ,

$$\|\partial_x R(f)\|_{L_x^\infty L_T^2} \leq \|f\|_{L_x^1 L_T^2}.$$

*Demonstração.* Veja [23], capítulo 2.  $\square$

## 2.3 Estimativas lineares localizadas em fase

Nesta parte vamos seguir as ideias de Molinet e Ribaud em [33] para obter as estimativas lineares para funções localizadas em fase que iremos usar na demonstração dos resultados principais do nosso trabalho. Começamos com a versão do Lema 2.2.1 para funções localizadas em fase:

**Lema 2.3.1.** Sejam  $(\alpha, p, q) \in \mathbb{R} \times [2, \infty]^2$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  e  $0 < T < 1$ .

(i) Se  $(\alpha, p, q)$  é 1-admissível ou 2-admissível, então

$$\|U(t) \Delta_j \phi\|_{L_x^p L_T^q} \lesssim 2^{-j\alpha} \|\Delta_j \phi\|_{L^2}, \quad \text{para todo } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (2.19)$$

(ii) Se  $(\alpha, p, q)$  é 2\*-admissível, então

$$\|U(t) \Delta_j \phi\|_{L_x^p L_T^q} \lesssim T^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2q}} 2^{-j\alpha} \|\Delta_j \phi\|_{L^2}, \quad \text{para todo } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (2.20)$$

*Demonstração.* Seja  $\phi \in \mathcal{S}$ .

(i) Pela Proposição 1.4.1 e pelo fato de  $\widehat{\text{supp}} \Delta_j \subseteq \{ \xi : 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1} \}$ , temos:

$$\begin{aligned} \|U(t) \Delta_j \phi\|_{L_x^p L_T^q} &= \|U(t) D_x^{-\alpha} D_x^\alpha \Delta_j \phi\|_{L_x^p L_T^q} \\ &\lesssim 2^{-j\alpha} \|D_x^\alpha U(t) \Delta_j \phi\|_{L_x^p L_T^q}. \end{aligned}$$

Agora usando o fato de que

$$\|D_x^\alpha U(t) \Delta_j \phi\|_{L_x^p L_T^q} \sim \|J^\alpha U(t) \Delta_j \phi\|_{L_x^p L_T^q}$$

(pois  $0 \notin \widehat{\text{supp}} \Delta_j \phi$ ) e o Lema 2.2.1, obtemos:

$$\|U(t) \Delta_j \phi\|_{L_x^p L_T^q} \lesssim 2^{-j\alpha} \|\phi\|_{L^2}.$$

(ii) Fazendo uso das mesmas ferramentas do item (i), temos

$$\begin{aligned} \|U(t) \Delta_j \phi\|_{L_x^p L_T^q} &= \|D_x^{-\alpha} D_x^\alpha U(t) \Delta_j \phi\|_{L_x^p L_T^q} \\ &\lesssim 2^{-j\alpha} \|D_x^\alpha U(t) \Delta_j \phi\|_{L_x^p L_T^q} \lesssim 2^{-j\alpha} \|\phi\|_{L^2}. \end{aligned}$$

E isso fecha a demonstração do Lema. □

Agora apresentamos uma estimativa similar envolvendo o operador  $S_0$ .

**Lema 2.3.2.** *Sejam  $s \geq 0$ ,  $p \geq 2$  e  $1 < q \leq p < \infty$ . Então*

$$\|S_0 U(t) D_x^s \phi\|_{L_x^p L_T^q} \lesssim T^{1/q} \|S_0 \phi\|_{L^2}.$$

*Demonstração.* Pela desigualdade de Hölder temos que

$$\|S_0 D_x^s U(t) \phi\|_{L_x^p L_T^q} \leq \|S_0 D_x^s U(t) \phi\|_{L_T^p L_x^p} \|1\|_{L_x^\infty L_T^{\frac{pq}{p-q}}} = T^{\frac{p-q}{p}} \|S_0 D_x^s U(t) \phi\|_{L_{x,T}^p}.$$

Usando agora imersão de Sobolev (Proposição 1.4.6, imersão de  $H_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$  em  $H_p^0 = L^p$ ) e propriedades dos operadores  $S_0$  e  $U(t)$  obtemos:

$$\|S_0 U(t) D_x^s \phi\|_{L_{x,T}^p} \leq \|D_x^{r+s} S_0 U(t) \phi\|_{L_T^p L_x^2} \lesssim \|S_0 \phi\|_{L_T^p L_x^2} \leq T^{\frac{1}{p}} \|S_0 \phi\|_{L_x^2},$$

onde  $r = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$ . Portanto, o lema está provado. □

No caso de  $\phi$  ser localicada em fase vale a seguinte estimativa para a função maximal em  $L^2$ , melhor que a do Lema 2.2.2:

**Lema 2.3.3.** *Para  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  e  $0 < T \leq 1$  tem-se:*

$$\|U(t) \Delta_j \phi\|_{L_x^2 L_T^\infty} \lesssim 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j \phi\|_{L_x^2}. \quad (2.21)$$

*Demonstração.* Veja a estimativa (28) da Proposição 4 de Molinet e Ribaud [33].  $\square$

Estamos agora prontos para apresentar a versão localizada em fase do Lemma 2.2.3.

**Lema 2.3.4.** *Sejam  $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}_+^2$  e  $1 \leq p_1, q_1, p_2, q_2 \leq \infty$  tais que, para cada  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,*

$$\|U(t)\Delta_j\phi\|_{L_x^{p_1}L_T^{q_1}} \lesssim T^{r_1}2^{-j\alpha_1}\|\Delta_j\phi\|_{L^2}, \quad (2.22)$$

$$\|U(t)\Delta_j\phi\|_{L_x^{p_2}L_T^{q_2}} \lesssim T^{r_2}2^{-j\alpha_2}\|\Delta_j\phi\|_{L^2}. \quad (2.23)$$

Então para todo  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ ,

$$\|R(\Delta_j f)\|_{L_T^\infty L_x^2} \lesssim T^{r_2}2^{-j\alpha_2}\|\Delta_j f\|_{L_x^{\tilde{p}_2}L_T^{\tilde{q}_2}}, \quad (2.24)$$

$$\|R(\Delta_j f)\|_{L_x^{p_1}L_T^{q_1}} \lesssim T^{r_1+r_2}2^{-j(\alpha_1+\alpha_2)}\|\Delta_j f\|_{L_x^{\tilde{p}_2}L_T^{\tilde{q}_2}}, \quad (2.25)$$

desde que

$$\min(p_1, q_1) > \max(\tilde{p}_2, \tilde{q}_2) \quad \text{ou} \quad (q_1 = \infty \text{ e } \tilde{p}_2, \tilde{q}_2 < \infty), \quad (2.26)$$

onde  $\tilde{p}_2, \tilde{q}_2$  são definidos por  $\frac{1}{\tilde{p}_2} = 1 - \frac{1}{p_2}$  e  $\frac{1}{\tilde{q}_2} = 1 - \frac{1}{q_2}$ .

*Demonstração.* Como  $\text{supp } \widehat{\Delta}_j \subseteq \{|\xi| : 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\}$ , segue da Proposição 1.4.1 que

$$\|D_x^{\alpha_k}U(t)\Delta_j\phi\|_{L_x^{p_k}L_T^{q_k}} \lesssim 2^{j\alpha_k}\|U(t)\Delta_j\phi\|_{L_x^{p_k}L_T^{q_k}}, \quad k = 1, 2.$$

Daí, pelas estimativas (2.22) e (2.23) temos:

$$\|D_x^{\alpha_1}U(t)\Delta_j\phi\|_{L_x^{p_1}L_T^{q_1}} \lesssim T^{r_1}\|\Delta_j\phi\|_{L^2}, \quad (2.27)$$

$$\|D_x^{\alpha_2}U(t)\Delta_j\phi\|_{L_x^{p_2}L_T^{q_2}} \lesssim T^{r_2}\|\Delta_j\phi\|_{L^2}. \quad (2.28)$$

Agora, como  $U(t)\Delta_j\phi + R(\Delta_j f)$  é solução do PVI linear não homogêneo

$$\begin{cases} \partial_t u - i\partial_x^2 u = \Delta_j f \\ u(x, 0) = \Delta_j \phi(x), \end{cases} \quad (2.29)$$

segue do Lema 2.2.3 que

$$\begin{aligned} \|R(\Delta_j f)\|_{L_T^\infty L_x^2} &= \|D_x^{-\alpha_2}D_x^{\alpha_2}R(\Delta_j f)\|_{L_T^\infty L_x^2} \\ &\lesssim 2^{-j\alpha_2}\|D_x^{\alpha_2}R(\Delta_j f)\|_{L_T^\infty L_x^2} \\ &\lesssim T^{r_2}2^{-j\alpha_2}\|\Delta_j f\|_{L_x^{\tilde{p}_2}L_T^{\tilde{q}_2}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|R(\Delta_j f)\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} &\lesssim 2^{-j(\alpha_1+\alpha_2)} \|D_x^{(\alpha_1+\alpha_2)} R(\Delta_j f)\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} \\ &\lesssim T^{r_1+r_2} 2^{-j(\alpha_1+\alpha_2)} \|\Delta_j f\|_{L_x^{\tilde{p}_2} L_T^{\tilde{q}_2}}, \end{aligned}$$

desde que  $\tilde{p}_2$  e  $\tilde{q}_2$  atendam as condições (2.26). Com isso finalizamos a prova do lema.  $\square$

**Corolário 2.3.1.** *Seja  $0 < T \leq 1$ . Então*

$$\|R(\Delta_j f)\|_{L_T^\infty L_x^2} \lesssim 2^{-\frac{j}{2}} \|\Delta_j f\|_{L_x^1 L_T^2}. \quad (2.30)$$

*Demonstração.* Como o terno  $(0, 4, 4)$  é 2-admissível e o terno  $(\frac{1}{2}, \infty, 2)$  é 1-admissível, segue do Lema 2.2.1 que

$$\|U(t)\Delta_j \phi\|_{L_{x,T}^4} \lesssim \|\Delta_j \phi\|_{L^2} \quad \text{e} \quad \|U(t)\Delta_j \phi\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim 2^{-\frac{j}{2}} \|\Delta_j \phi\|_{L^2}.$$

Portanto, o resultado segue da estimativa (2.24) do Lema 2.3.4.  $\square$

Finalizamos com a versão localizada em fase do Lema 2.2.4, que não é coberta pelo Lema 2.3.4.

**Lema 2.3.5.** *Para cada  $0 < T \leq 1$ ,*

$$\|\partial_x R(\Delta_j f)\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim \|\Delta_j f\|_{L_x^1 L_T^2}, \quad (2.31)$$

$$\|R(\Delta_j f)\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim 2^{-j} \|\Delta_j f\|_{L_x^1 L_T^2}. \quad (2.32)$$

*Demonstração.* Para a demonstração de (2.31) veja [23], capítulo 2. Para a demonstração de (2.32), basta usarmos o fato de  $0 \notin \text{supp } \widehat{\Delta}_j$ , em seguida (2.31) e depois a Proposição 1.4.2:

$$\|R(\Delta_j f)\|_{L_x^\infty L_T^2} = \left\| D_x \int_0^t U(t-t') D_x^{-1} \Delta_j f(t') dt' \right\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim 2^{-j} \|\Delta_j f\|_{L_x^1 L_T^2}.$$

$\square$

# Capítulo 3

## Boa colocação local

### 3.1 Introdução e enunciado dos teoremas de boa colocação

Nessa etapa podemos considerar, sem perda de generalidade,  $\mu = \gamma = \lambda = 1$  na formulação integral (3) para (1), e escrever

$$\mathbf{u}(t) = U(t)\mathbf{u}_0 + \int_0^t U(t-s) \left\{ -i|\mathbf{u}|^2\mathbf{u} + \partial_x(|\mathbf{u}|^2\mathbf{u}) + \sum_{k=1}^n u_k \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u}) \right\}(s) ds. \quad (3.1)$$

O método consiste basicamente em aplicar o teorema do ponto fixo para contrações à equação integral (3.1) associada ao PVI (2), fazendo uso das propriedades de efeito regularizante do grupo unitário  $U(t)$  associado ao fluxo da equação de Schrödinger linear bem como estimativas para a função maximal (no tempo) para o fluxo da mesma equação. Vamos aqui considerar o PVI (2) com restrição sobre o tamanho da norma em  $L^2$  do dado inicial. Seguem abaixo os resultados que iremos provar.

Primeiramente provaremos a boa colocação local para (3.1) para dados iniciais pequenos no espaço de Besov não-homogêneo  $B_2^{\frac{1}{2},1}(\mathbb{R})$ :

**Teorema 3.1.1.** *Existe um  $\delta > 0$  tal que para todo  $\mathbf{u}_0 \in B_2^{\frac{1}{2},1}(\mathbb{R})$  com  $\|\mathbf{u}_0\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}} < \delta$ , existem um  $T = T(\|\mathbf{u}_0\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}}) > 0$  com  $T(\|\mathbf{u}_0\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}}) \rightarrow \infty$  quando  $\|\mathbf{u}_0\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}} \rightarrow 0$ , um espaço  $X_T \hookrightarrow C([-T, T]; B_2^{\frac{1}{2},1})$  e uma única solução  $u$  para (3.1) em  $X_T$ . Além disso, a aplicação dado-solução de  $B_2^{\frac{1}{2},1}$  em  $X_T$  é suave numa vizinhança da origem.*

Dado  $T > 0$ , definimos as seguintes semi-normas:

$$N_1(\mathbf{u}) = \|S_0 \mathbf{u}\|_{L_T^\infty L_x^2} + \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j \mathbf{u}\|_{L_T^\infty L_x^2}, \quad (3.2)$$

$$N_2(\mathbf{u}) = \|S_0 \mathbf{u}\|_{L_x^\infty L_T^2} + \sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j \mathbf{u}\|_{L_x^\infty L_T^2}, \quad (3.3)$$

$$N_3(\mathbf{u}) = \|S_0 \mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty} + \sum_{j \geq 1} \|\Delta_j \mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty}, \quad (3.4)$$

$$N_4(\mathbf{u}) = \|S_0 \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^4} + \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^4}, \quad (3.5)$$

$$N_5(\mathbf{u}) = \|S_0 \mathbf{u}\|_{L_x^5 L_T^{\frac{10}{3}}} + \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{3j}{5}} \|\Delta_j \mathbf{u}\|_{L_x^5 L_T^{\frac{10}{3}}}. \quad (3.6)$$

O espaço de resolução será o seguinte espaço funcional:

$$X_T = \{ \mathbf{u} \in C([-T, T], B_2^{\frac{1}{2},1}(\mathbb{R})) : \|\mathbf{u}\|_{X_T} < \infty \}, \quad \text{onde } \|\mathbf{u}\|_{X_T} = \sum_{m=1}^5 N_m(\mathbf{u}).$$

Enunciamos agora o segundo resultado que iremos provar, que consiste na boa colocação local para o PVI (2) com dados iniciais pequenos em  $H^s(\mathbb{R})$ ,  $s > \frac{1}{2}$ :

**Teorema 3.1.2.** *Seja  $s > \frac{1}{2}$ . Então existe um  $\delta > 0$  tal que para todo  $\mathbf{u}_0 \in H^s(\mathbb{R}) \cap B_2^{\frac{1}{2},1}(\mathbb{R})$  com  $\|\mathbf{u}_0\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}} < \delta$ , existem um  $T = T(\|\mathbf{u}_0\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}}) > 0$ , um espaço  $Y_{T,s} \hookrightarrow C([-T, T]; H^s(\mathbb{R}) \cap B_2^{\frac{1}{2},1}(\mathbb{R}))$  e uma única solução  $\mathbf{u}$  para (3.1) em  $Y_{T,s}$ . Além disso a aplicação dado-solução de  $H^s(\mathbb{R}) \cap B_2^{\frac{1}{2},1}(\mathbb{R})$  em  $Y_{T,s}$  é suave numa vizinhança da origem.*

## 3.2 Estimativas não lineares e para $U(t)\mathbf{u}_0$ em $X_T$

Vamos aqui provar alguns resultados técnicos que serão usados diretamente na demonstração do resultado de boa colocação.

Para tratar a parte não-linear, vamos escrever

$$\begin{aligned} I &:= \int_0^t U(t-s) \left\{ -i|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} + \partial_x(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) + \sum_{k=1}^n u_k \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u}) \right\}(s) ds \\ &= -i \int_0^t U(t-s) (1 + i\partial_x)(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) ds + \int_0^t U(t-s) \left\{ \sum_{k=1}^n u_k \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u}) \right\} ds := I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Primeiramente vamos usar (1.32) e (1.37) para dividir as não-linearidades do seguinte modo: Considerando  $f = \mathbf{u}$  e  $g = |\mathbf{u}|^2$  em (1.32) e (1.37), podemos escrever

$$|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} = S_0 \mathbf{u} S_0(|\mathbf{u}|^2) + \sum_{r \geq 0} (\Delta_{r+1} \mathbf{u} S_r(|\mathbf{u}|^2) + \Delta_{r+1}(|\mathbf{u}|^2) S_{r+1} \mathbf{u}), \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} & \Delta_j \left( \sum_{r \geq 0} (\Delta_{r+1} \mathbf{u} S_r (|\mathbf{u}|^2) + \Delta_{r+1} (|\mathbf{u}|^2) S_{r+1} \mathbf{u}) \right) \\ &= \Delta_j \left\{ \sum_{r \geq j} \Delta_{r-2} \mathbf{u} S_{r-3} (|\mathbf{u}|^2) \right\} + \Delta_j \left\{ \sum_{r \geq j} \Delta_{r-2} (|\mathbf{u}|^2) S_{r-2} \mathbf{u} \right\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

De (1.32) com  $f = \mathbf{u}$  e  $g = \bar{\mathbf{u}}$ , temos

$$|\mathbf{u}|^2 = S_0 \mathbf{u} S_0 \bar{\mathbf{u}} + \sum_{l \geq 0} (\Delta_{l+1} \mathbf{u} S_l \bar{\mathbf{u}} + \Delta_{l+1} \bar{\mathbf{u}} S_{l+1} \mathbf{u}). \quad (3.9)$$

Por (1.32) com  $f = u_k$  e  $g = \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u})$ , escrevemos

$$u_k \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u}) = S_0 u_k S_0 \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u}) + \sum_{r \geq 0} (\Delta_{r+1} u_k S_r \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u}) + \Delta_{r+1} \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u}) S_{r+1} u_k) \quad (3.10)$$

e por (1.37),

$$\begin{aligned} & \Delta_j (u_k \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u})) \\ &= \Delta_j (S_0 u_k S_0 \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u})) + \Delta_j \sum_{r \geq j} (\Delta_{r-2} u_k S_{r-3} \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u}) + \Delta_{r-2} \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u}) S_{r-2} u_k). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Para finalizar, tomamos  $f = u_k$  e  $g = \mathbf{u}$  em (1.32) e (1.37), para escrever

$$\bar{u}_k \mathbf{u} = S_0 \bar{u}_k S_0 \mathbf{u} + \sum_{r \geq 0} (\Delta_{r+1} \bar{u}_k S_r \mathbf{u} + \Delta_{r+1} \mathbf{u} S_{r+1} \bar{u}_k), \quad (3.12)$$

$$\Delta_j \left\{ \sum_{r \geq 0} (\Delta_{r+1} \bar{u}_k S_r \mathbf{u} + \Delta_{r+1} \mathbf{u} S_{r+1} \bar{u}_k) \right\} = \Delta_j \left\{ \sum_{r \geq j} (\Delta_{r-2} \bar{u}_k S_{r-3} \mathbf{u} + \Delta_{r-2} \mathbf{u} S_{r-2} \bar{u}_k) \right\}. \quad (3.13)$$

Antes de darmos início às estimativas não lineares, vamos estimar  $U(t)\mathbf{u}_0$  em  $X_T$ .

**Lema 3.2.1.** *Seja  $0 < T \leq 1$ . Então*

$$\|U(t)\bar{\mathbf{u}}_0\|_{X_T} \lesssim \|\bar{\mathbf{u}}_0\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}}.$$

*Demonstração.* Como  $S_0 U$  é limitado em  $L^2$ ,

$$N_1(U(t)\mathbf{u}_0) \lesssim \|S_0 \mathbf{u}_0\|_{L^2} + \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j \mathbf{u}_0\|_{L^2} \lesssim \|\mathbf{u}_0\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}}. \quad (3.14)$$

Por imersão se Sobolev e pelo item iii) da Proposição 1.4.1,

$$\|S_0 U(t)\mathbf{u}_0\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim T^{\frac{1}{2}} \|S_0 U(t)\mathbf{u}_0\|_{L_{x,T}^\infty} \lesssim T^{\frac{1}{2}} \|J^{\frac{1}{2}+} S_0 U(t)\mathbf{u}_0\|_{L_T^\infty L_x^2} \lesssim \|S_0 \mathbf{u}_0\|_{L^2} \quad (3.15)$$

Como o terno  $(\frac{1}{2}, \infty, 2)$  é 1-admissível, segue do Lema 2.3.1 que

$$\|\Delta_j U(t)\mathbf{u}_0\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim 2^{-\frac{j}{2}} \|\Delta_j \mathbf{u}_0\|_{L^2}. \quad (3.16)$$

De (3.15) e (3.16) concluímos que

$$N_2(U(t)\mathbf{u}_0) \lesssim \|\mathbf{u}_0\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}}. \quad (3.17)$$

Pelo Lema 2.2.2 junto com o item iii) da Proposição 1.4.1,

$$\|U(t)S_0\mathbf{u}_0\|_{L_x^2 L_T^\infty} \lesssim \|S_0\mathbf{u}_0\|_{H^{s+\frac{1}{2}+}} = \|J^{s+\frac{1}{2}+}S_0\mathbf{u}_0\|_{L_x^2} \lesssim \|S_0\mathbf{u}_0\|_{L_x^2}. \quad (3.18)$$

Do Lema 2.3.3 junto com a estimativa acima vemos que

$$N_3(U(t)\mathbf{u}_0) \lesssim \|\mathbf{u}_0\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}}. \quad (3.19)$$

Como  $(0, 4, 4)$  é 2-admissível, temos pelo Lema 2.3.1 que

$$\|\Delta_j U(t)\mathbf{u}_0\|_{L_{x,T}^4} \lesssim \|\Delta_j \mathbf{u}_0\|_{L^2}. \quad (3.20)$$

Da estimativa acima e o Lema 2.3.2 com  $p = q = 4$  obtemos:

$$N_4(U(t)\mathbf{u}_0) \lesssim \|\mathbf{u}_0\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}}. \quad (3.21)$$

Como o terno  $(\frac{1}{10}, 5, \frac{10}{3})$  é 2-admissível, pelo Lema 2.3.1 inferimos que

$$\sum_{j \geq 1} 2^{\frac{3j}{5}} \|\Delta_j U(t)\mathbf{u}_0\|_{L_x^{\frac{10}{5}} L_T^{\frac{10}{3}}} \lesssim \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{5}} \|\Delta_j U(t)\mathbf{u}_0\|_{L^2}. \quad (3.22)$$

Pela desigualdade acima e o Lema 2.3.2 com  $p = 5$  e  $q = \frac{10}{3}$  temos,

$$N_5(U(t)\mathbf{u}_0) \lesssim \|\mathbf{u}_0\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}}. \quad (3.23)$$

Com isso o lema fica demonstrado.  $\square$

**Lema 3.2.2.** *Seja  $0 < T \leq 1$ . Então vale a seguinte estimativa:*

$$N_1(I_1) \lesssim TN_1(\mathbf{u})^3 + T^{\frac{1}{2}}N_1(\mathbf{u})^2N_3(\mathbf{u}) + N_2(\mathbf{u})N_3(\mathbf{u})^2.$$

*Demonstração.* Pelo item 1 da Observação 1.4.1, imersão de  $H^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}$  em  $L^6$ , imersão de  $B_2^{\frac{1}{3},1}$  em  $H^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}$  (vide Proposição 1.4.3, item 3) e depois imersão de  $B_2^{\frac{1}{2},1}$  em  $B_2^{\frac{1}{3},1}$  (item 1 da Proposição 1.4.3) temos

$$\|S_0I_1\|_{L_T^\infty L_x^2} \lesssim T\|\mathbf{u}^2\mathbf{u}\|_{L_T^\infty L_x^2} \lesssim T\|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty L_x^6}^3 \lesssim T\|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty B_6^{\frac{1}{6},1}}^3 \lesssim T\|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty B_2^{\frac{1}{2},1}}^3 \lesssim TN_1(\mathbf{u})^3. \quad (3.24)$$



Busquemos agora uma estimativa para  $\sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j I_1\|_{L_T^\infty L_x^2}$ . Usando o fato de  $\Delta_j$  ser um operador limitado em  $L_x^p L_T^q$  ( $1 \leq p, q \leq \infty$ ), Proposição 1.4.2, Corolário 2.3.1 e o Lema 1.5.2, temos

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j(I_1)\|_{L_T^\infty L_x^2} &\lesssim \sum_{j \geq 1} \|\Delta_j(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^2} + \sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^2} \\
 &\lesssim \sum_{j \geq 1} 2^j \left\{ \|\Delta_j(S_0(|\mathbf{u}|^2)S_0 \mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^2} + \|\Delta_j \left\{ \sum_{r \geq j} \Delta_{r-2} \mathbf{u} S_{r-3}(|\mathbf{u}|^2) \right\}\|_{L_x^1 L_T^2} \right\} \\
 &\quad + \sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j \left\{ \sum_{r \geq j} \Delta_{r-2}(|\mathbf{u}|^2) S_{r-2} \mathbf{u} \right\}\|_{L_x^1 L_T^2} \\
 &\lesssim \|S_0(|\mathbf{u}|^2)S_0 \mathbf{u}\|_{L_x^1 L_T^2} + \sum_{r \geq 0} 2^r \|\Delta_{r-2} \mathbf{u} S_{r-3}(|\mathbf{u}|^2)\|_{L_x^1 L_T^2} \\
 &\quad + \sum_{r \geq 0} 2^r \|\Delta_{r-2}(|\mathbf{u}|^2) S_{r-2} \mathbf{u}\|_{L_x^1 L_T^2}. \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

Agora, aplicando a desigualdade de Hölder chegamos que

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j(I_1)\|_{L_T^\infty L_x^2} &\lesssim \|S_0(|\mathbf{u}|^2)\|_{L_{x,T}^2} \|S_0 \mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty} + \sum_{r \geq 0} 2^r \|\Delta_{r-2} \mathbf{u}\|_{L_x^\infty L_T^2} \|S_{r-3}(|\mathbf{u}|^2)\|_{L_x^1 L_T^\infty} \\
 &\quad + \sum_{r \geq 0} 2^r \|\Delta_{r-2}(|\mathbf{u}|^2)\|_{L_{x,T}^2} \|S_{r-2} \mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \\
 &\lesssim T^{\frac{1}{2}} N_1(\mathbf{u})^2 N_3(\mathbf{u}) + N_2(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u})^2 + N_3(\mathbf{u}) \sum_{r \geq 1} 2^r \|\Delta_r(|\mathbf{u}|^2)\|_{L_{x,T}^2}. \tag{3.26}
 \end{aligned}$$

Faremos a estimativa de  $\sum_{r \geq 1} 2^r \|\Delta_r(|\mathbf{u}|^2)\|_{L_{x,T}^2}$  usando (3.9), (1.36), (1.37) e a desigualdade de Hölder como segue:

$$\begin{aligned}
 \sum_{r \geq 1} 2^r \|\Delta_r(|\mathbf{u}|^2)\|_{L_{x,T}^2} &\lesssim \sum_{r \geq 1} 2^r \|\Delta_r(|S_0 \mathbf{u}|^2)\|_{L_{x,T}^2} + \sum_{r \geq 1} 2^r \|\Delta_r \mathbf{u} S_r \bar{\mathbf{u}}\|_{L_{x,T}^2} \\
 &\lesssim T^{\frac{1}{2}} N_1(\mathbf{u})^2 + N_2(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u}). \tag{3.27}
 \end{aligned}$$

As estimativas (3.24) – (3.27) levam-nos ao resultado.  $\square$

**Lema 3.2.3.** *Seja  $0 < T \leq 1$ . Então*

$$\begin{aligned}
 N_1(I_2) &\lesssim T N_1(\mathbf{u})^3 + T^{\frac{1}{2}} N_1(\mathbf{u}) N_2(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u}) + T^{\frac{13}{40}} N_1(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u}) N_4(\mathbf{u}) \\
 &\quad + T^{\frac{1}{40}} N_3(\mathbf{u}) N_4(\mathbf{u}) N_5(\mathbf{u}) + N_3(\mathbf{u})^2 N_2(\mathbf{u}).
 \end{aligned}$$

*Demonstração.* Pelo Lema 2.3.2 com  $s = 0$ ,  $p = q = 4$ , temos:

$$\|U(t)S_0 \mathbf{u}_0\|_{L_{x,T}^4} \lesssim T^{\frac{1}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{L_x^2}, \tag{3.28}$$

e daí, por (2.15) no Lemma 2.2.3 (considerando  $\phi = S_0 \mathbf{u}_0$  na estimativa (2.14)) com  $f = S_0(u_k \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u}))$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $p_2 = q_2 = 4$  e  $r_2 = \frac{1}{4}$ , segue que

$$\|S_0 I_2\|_{L_T^\infty L_x^2} \lesssim T^{\frac{1}{4}} \sum_{k=1}^n \|S_0(u_k \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u}))\|_{L_{x,T}^{\frac{4}{3}}}. \quad (3.29)$$

Usando (3.10) podemos escrever

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \|S_0(u_k \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u}))\|_{L_{x,T}^{\frac{4}{3}}} &\lesssim \sum_{k=1}^n \left\{ \|S_0\{S_0 u_k S_0 \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u})\}\|_{L_{x,T}^{\frac{4}{3}}} + \sum_{r \geq 0} \|\Delta_{r+1} u_k S_r \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_{x,T}^{\frac{4}{3}}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r \geq 0} \|\Delta_{r+1} \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u}) S_{r+1} u_k\|_{L_{x,T}^{\frac{4}{3}}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Então, pelas propriedades de  $\Delta_r$  e  $S_r$ ,  $r \geq 0$  ( $\Delta_r$  e  $S_r$  são limitados em  $L^p$ , para todo  $1 \leq p \leq \infty$ ), pela desigualdade de Hölder e imersão de Sobolev, temos:

$$\begin{aligned} T^{\frac{1}{4}} \sum_{k=1}^n \|S_0\{S_0 u_k S_0 \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u})\}\|_{L_{x,T}^{\frac{4}{3}}} &\lesssim T^{\frac{1}{4}} T^{\frac{3}{4}} \sum_{k=1}^n \|S_0 u_k\|_{L_T^\infty L_x^4} \|S_0 \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_T^\infty L_x^2} \\ &\lesssim T \|S_0 \mathbf{u}\|_{L_T^\infty L_x^4} \sum_{k=1}^n \|S_0(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_T^\infty L_x^2} \\ &\lesssim T \|\mathbf{u}\|_{L_T^\infty L_x^4}^3 \lesssim T N_1(\mathbf{u})^3, \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} T^{\frac{1}{4}} \sum_{k=1}^n \sum_{r \geq 0} \left\{ \|\Delta_{r+1} u_k S_r \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_{x,T}^{\frac{4}{3}}} + \|\Delta_{r+1} \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u}) S_{r+1} u_k\|_{L_{x,T}^{\frac{4}{3}}} \right\} \\ \lesssim T^{\frac{1}{4}} \sum_{k=1}^n \sum_{r \geq 0} \left\{ \|\Delta_{r+1} u_k\|_{L_{x,T}^4} \|S_r \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_{x,T}^2} + \|\Delta_{r+1} \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_{x,T}^2} \|S_{r+1} u_k\|_{L_{x,T}^4} \right\} \\ \lesssim T^{\frac{1}{2}} N_1(\mathbf{u}) \sum_{k=1}^n \left\{ \|\partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_{x,T}^2} + \sum_{r \geq 1} \|\Delta_r \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_{x,T}^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Agora usando a decomposição diádica (1.32), o Lema 1.5.2 e a identidade (1.37), com  $f = u_k$  e  $g = \mathbf{u}$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left\{ \|\partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_{x,T}^2} + \sum_{r \geq 1} \|\Delta_r \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_{x,T}^2} \right\} \\ \lesssim \sum_{k=1}^n \|S_0(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_{x,T}^2} + \sum_{k=1}^n \sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_{x,T}^2} \\ \lesssim T^{\frac{1}{2}} N_1(\mathbf{u})^2 + \sum_{k=1}^n \sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j(S_0 \bar{u}_k S_0 \mathbf{u})\|_{L_{x,T}^2} + \sum_{k=1}^n \sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j(\sum_{r \geq j} \Delta_{r-2} \bar{u}_k S_{r-3} \mathbf{u})\|_{L_{x,T}^2} \\ + \sum_{k=1}^n \sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j(\sum_{r \geq j} \Delta_{r-2} \mathbf{u} S_{r-2} \bar{u}_k)\|_{L_{x,T}^2} \end{aligned}$$

e daí,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^n \left\{ \|\partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_{x,T}^2} + \sum_{r \geq 1} \|\Delta_r \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_{x,T}^2} \right\} \\
 & \lesssim T^{\frac{1}{2}} N_1(\mathbf{u})^2 + \sum_{k=1}^n \sum_{r \geq 0} 2^r \|\Delta_{r-2} \bar{u}_k S_{r-3} \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^2} + \sum_{k=1}^n \sum_{r \geq 0} 2^r \|\Delta_{r-2} \mathbf{u} S_{r-2} \bar{u}_k\|_{L_{x,T}^2} \\
 & \lesssim T^{\frac{1}{2}} N_1(\mathbf{u})^2 + \sum_{r \geq 1} 2^r \|\Delta_r \mathbf{u}\|_{L_x^\infty L_T^2} \|S_r \mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \\
 & \lesssim T^{\frac{1}{2}} N_1(\mathbf{u})^2 + N_2(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u}). \tag{3.33}
 \end{aligned}$$

Portanto, de (3.30), (3.32) e (3.33), encontramos

$$\|S_0 I_2\|_{L_T^\infty L_x^2} \lesssim T N_1(\mathbf{u})^3 + T^{\frac{1}{2}} N_1(\mathbf{u}) N_2(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u}). \tag{3.34}$$

Vamos agora obter uma estimativa para  $\sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j I_2\|_{L_T^\infty L_x^2}$ . Por (3.10) e (3.11), temos

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j I_2\|_{L_T^\infty L_x^2} & \lesssim \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j \int_0^t U(t-s) \sum_{k=1}^n \{S_0 u_k S_0 \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u})\} ds\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
 & + \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j \int_0^t U(t-s) \sum_{k=1}^n \sum_{r \geq j} \partial_x(\Delta_{r-2} u_k S_{r-3}(\bar{u}_k \mathbf{u})) ds\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
 & + \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j \int_0^t U(t-s) \sum_{k=1}^n \sum_{r \geq j} \Delta_{r-2} \partial_x u_k S_{r-3}(\bar{u}_k \mathbf{u}) ds\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
 & + \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j \int_0^t U(t-s) \sum_{k=1}^n \sum_{r \geq j} \Delta_{r-2} \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u}) S_{r-2} u_k ds\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
 & := \sum_{m=1}^4 \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j I_{2,m}\|_{L_T^\infty L_x^2}. \tag{3.35}
 \end{aligned}$$

Usando o Lema 1.5.2, o fato de  $S_0 \partial_x$  ser limitado em  $L^2$  e imersão de Sobolev, obtemos

$$\sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j I_{2,1}\|_{L_T^\infty L_x^2} \lesssim T \sum_{k=1}^n \|S_0 u_k S_0 \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_T^\infty L_x^2} \lesssim T N_1(\mathbf{u})^3. \tag{3.36}$$

Fazendo uso das mesmas ferramentas empregadas na obtenção de (3.26), chegamos que

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j(I_{2,2})\|_{L_T^\infty L_x^2} & \lesssim \sum_{k=1}^n \sum_{r \geq 0} 2^r \|\Delta_{r-2} u_k\|_{L_x^\infty L_T^2} \|S_{r-3}(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^\infty} \\
 & \lesssim N_3(\mathbf{u})^2 N_2(\mathbf{u}). \tag{3.37}
 \end{aligned}$$

Para obter uma estimativa para  $\sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j I_{2,3}\|_{L_T^\infty L_x^2}$ , usamos comutador para escrever

$$\begin{aligned} \Delta_{r-2} \partial_x u_k S_{r-3}(\bar{u}_k \mathbf{u}) &= -S_{r-3}(\bar{u}_k \mathbf{u}) \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} D_x^{\frac{1}{2}} \Delta_{r-2} u_k \\ &= [\tilde{D}_x^{1/2}, S_{r-3}(\bar{u}_k \mathbf{u})] D_x^{\frac{1}{2}} \Delta_{r-2} u_k - \tilde{D}_x^{1/2} (S_{r-3}(\bar{u}_k \mathbf{u}) D_x^{\frac{1}{2}} \Delta_{r-2} u_k), \end{aligned} \quad (3.38)$$

e então,

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j I_{2,3}\|_{L_T^\infty L_x^2} &\lesssim \sum_{k=1}^n \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j \int_0^t U(t-s) \sum_{r \geq j} [\tilde{D}_x^{1/2}, S_{r-3}(\bar{u}_k \mathbf{u})] D_x^{\frac{1}{2}} \Delta_{r-2} u_k ds\|_{L_T^\infty L_x^2} \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j \int_0^t U(t-s) \sum_{r \geq j} \tilde{D}_x^{1/2} (S_{r-3}(\bar{u}_k \mathbf{u}) D_x^{\frac{1}{2}} \Delta_{r-2} u_k) ds\|_{L_T^\infty L_x^2} \\ &:= \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j I_{2,3,1}\|_{L_T^\infty L_x^2} + \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j I_{2,3,2}\|_{L_T^\infty L_x^2}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Como  $(\frac{2}{5}, 20, \frac{20}{9})$  é  $2^*$ -admissível,

$$\|U(t) \Delta_j \mathbf{u}_0\|_{L_x^{20} L_T^{\frac{20}{9}}} \lesssim T^{\frac{1}{40}} 2^{-\frac{2}{5}j} \|\Delta_j \mathbf{u}_0\|_{L^2}. \quad (3.40)$$

Segue então do Lema 2.3.4 com  $(\alpha_2, p_2, q_2) = (\frac{2}{5}, 20, \frac{20}{9})$ , Lema 1.5.4 (com  $\beta = 0$  e  $\alpha = \frac{1}{2}$ ) e a desigualdade de Hölder, que

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j I_{2,3,1}\|_{L_T^\infty L_x^2} &\lesssim T^{\frac{1}{40}} \sum_{k=1}^n \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{10}} \sum_{r \geq j} \|[\tilde{D}_x^{1/2}, S_{r-3}(\bar{u}_k \mathbf{u})] D_x^{\frac{1}{2}} \Delta_{r-2} u_k\|_{L_x^{\frac{20}{19}} L_T^{\frac{20}{11}}} \\ &\lesssim T^{\frac{1}{40}} \sum_{k=1}^n \sum_{r \geq 1} 2^{\frac{r}{10}} \|D_x^{1/2} S_{r-3}(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_x^{\frac{4}{3}} L_T^{\frac{4}{3}}} \|D_x^{\frac{1}{2}} \Delta_{r-2} u_k\|_{L_x^5 L_T^{\frac{10}{3}}} \\ &\lesssim T^{\frac{1}{40}} \sum_{r \geq 1} 2^{\frac{r}{10}} \cdot 2^{\frac{r}{2}} \|\Delta_r \mathbf{u}\|_{L_x^5 L_T^{\frac{10}{3}}} \|D_x^{1/2} \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^4} \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \\ &\lesssim T^{\frac{1}{40}} N_5(\mathbf{u}) N_4(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Pelo Corolário 2.3.1, a Proposição 1.4.2, o fato de  $S_{r-3}$  ser limitado em  $L_x^1 L_T^\infty$  e pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j I_{2,3,2}\|_{L_T^\infty L_x^2} &\lesssim \sum_{k=1}^n \sum_{r \geq 1} 2^{\frac{r}{2}} \|S_{r-3}(\bar{u}_k \mathbf{u}) D_x^{\frac{1}{2}} \Delta_{r-2} u_k\|_{L_x^1 L_T^2} \\ &\lesssim \sum_{k=1}^n \sum_{r \geq 1} 2^{\frac{r}{2}} \|S_{r-3}(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^\infty} \|D_x^{\frac{1}{2}} \Delta_{r-2} u_k\|_{L_x^\infty L_T^2} \\ &\lesssim \|\mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty}^2 \sum_{r \geq 0} 2^{\frac{r}{2}} \cdot 2^{\frac{r}{2}} \|\Delta_r \mathbf{u}\|_{L_x^\infty L_T^2} \\ &\lesssim N_3(\mathbf{u})^2 N_2(\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Portanto, por (3.41) e (3.42), temos

$$\sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j I_{2,3}\|_{L_T^\infty L_x^2} \lesssim T^{\frac{1}{40}} N_5(\mathbf{u}) N_4(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u}) + N_3(\mathbf{u})^2 N_2(\mathbf{u}). \quad (3.43)$$

Finalmente, estimaremos  $\sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j I_{2,4}\|_{L_T^\infty L_x^2}$ . Para isso usaremos novamente a estimativa de comutador do Lema (1.5.4). Primeiro escrevemos

$$\begin{aligned} S_{r-2} u_k \Delta_{r-2} \partial_x (u_k \mathbf{u}) &= -S_{r-2} u_k D_x^{\frac{1}{2}} \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} \Delta_{r-2} (\bar{u}_k \mathbf{u}) \\ &= [D_x^{1/2}, S_{r-2} u_k] \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} \Delta_{r-2} (\bar{u}_k \mathbf{u}) - D_x^{1/2} (S_{r-2} u_k \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} \Delta_{r-2} (\bar{u}_k \mathbf{u})), \end{aligned} \quad (3.44)$$

e então,

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j I_{2,4}\|_{L_T^\infty L_x^2} &\lesssim \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j \int_0^t U(t-s) \sum_{r \geq j} \sum_{k=1}^n [D_x^{1/2}, S_{r-2} u_k] \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} \Delta_{r-2} (\bar{u}_k \mathbf{u}) ds\|_{L_T^\infty L_x^2} \\ &\quad + \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j \int_0^t U(t-s) \sum_{r \geq j} \sum_{k=1}^n D_x^{1/2} (S_{r-2} u_k \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} \Delta_{r-2} (\bar{u}_k \mathbf{u})) ds\|_{L_T^\infty L_x^2} \\ &:= \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j I_{2,4,1}\|_{L_T^\infty L_x^2} + \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j I_{2,4,2}\|_{L_T^\infty L_x^2}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Pelo Lema 2.3.4 com  $(\alpha_2, p_2, q_2) = (\frac{2}{5}, 20, \frac{20}{9})$ , Lema 1.5.4 (com  $\beta = 0$  e  $\alpha = \frac{1}{2}$ ) e a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j I_{2,4,1}\|_{L_T^\infty L_x^2} &\lesssim T^{\frac{1}{40}} \sum_{k=1}^n \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{10}} \sum_{r \geq j} \| [D_x^{1/2}, S_{r-2} u_k] \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} \Delta_{r-2} (\bar{u}_k \mathbf{u}) \|_{L_x^{\frac{20}{19}} L_T^{\frac{20}{11}}} \\ &\lesssim T^{\frac{1}{40}} \sum_{k=1}^n \sum_{r \geq 0} 2^{\frac{r}{10}} \| D_x^{1/2} S_{r-2} u_k \|_{L_{x,T}^4} \| D_x^{\frac{1}{2}} \Delta_{r-2} (\bar{u}_k \mathbf{u}) \|_{L_x^{\frac{10}{7}} L_T^{\frac{10}{3}}} \\ &\lesssim T^{\frac{1}{40}} N_4(\mathbf{u}) \sum_{k=1}^n \sum_{r \geq 1} 2^{\frac{r}{10}} \| D_x^{\frac{1}{2}} \Delta_r (\bar{u}_k \mathbf{u}) \|_{L_x^{\frac{10}{7}} L_T^{\frac{10}{3}}}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Usando (3.12) e (3.13), a desigualdade de Hölder e as propriedades de  $S_r$ , temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{r \geq 1} 2^{\frac{r}{10}} \| D_x^{\frac{1}{2}} \Delta_r (\bar{u}_k \mathbf{u}) \|_{L_x^{\frac{10}{7}} L_T^{\frac{10}{3}}} &\lesssim \sum_{k=1}^n \sum_{r \geq 0} 2^{\frac{r}{10}} \left\{ \| D_x^{\frac{1}{2}} \Delta_r (S_0 \bar{u}_k S_0 \mathbf{u}) \|_{L_x^{\frac{10}{7}} L_T^{\frac{10}{3}}} \right. \\ &\quad \left. + \| D_x^{\frac{1}{2}} \Delta_r (\sum_{l \geq r} \Delta_{l-2} \bar{u}_k S_{l-3} \mathbf{u}) \|_{L_x^{\frac{10}{7}} L_T^{\frac{10}{3}}} + \| D_x^{\frac{1}{2}} \Delta_r (\sum_{l \geq r} \Delta_{l-2} \mathbf{u} S_{l-2} \bar{u}_k) \|_{L_x^{\frac{10}{7}} L_T^{\frac{10}{3}}} \right\} \\ &\lesssim \sum_{k=1}^n \left\{ \| S_0 u_k \|_{L_x^2 L_T^{10}} \| S_0 \mathbf{u} \|_{L_{x,T}^5} + \sum_{r \geq 0} 2^{\frac{r}{10}} \cdot 2^{\frac{r}{2}} \sum_{l \geq r} \| \Delta_{l-2} \bar{u}_k S_{l-3} \mathbf{u} \|_{L_x^{\frac{10}{7}} L_T^{\frac{10}{3}}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r \geq 0} 2^{\frac{r}{10}} \cdot 2^{\frac{r}{2}} \sum_{l \geq r} \| \Delta_{l-2} \mathbf{u} S_{l-2} \bar{u}_k \|_{L_x^{\frac{10}{7}} L_T^{\frac{10}{3}}} \right\} \\ &\lesssim T^{\frac{3}{10}} \| S_0 \mathbf{u} \|_{L_x^2 L_T^\infty} \| S_0 \mathbf{u} \|_{L_T^\infty L_x^5} + \sum_{l \geq 1} 2^{\frac{3l}{5}} \| \Delta_l \mathbf{u} \|_{L_x^5 L_T^{\frac{10}{3}}} \| S_l \mathbf{u} \|_{L_x^2 L_T^\infty} \\ &\lesssim T^{\frac{3}{10}} N_1(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u}) + N_3(\mathbf{u}) N_5(\mathbf{u}), \end{aligned}$$

e assim, por (3.46) temos

$$\sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j I_{2,4,1}\|_{L_T^\infty L_x^2} \lesssim T^{\frac{13}{40}} N_1(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u}) N_4(\mathbf{u}) + T^{\frac{1}{40}} N_3(\mathbf{u}) N_4(\mathbf{u}) N_5(\mathbf{u}). \quad (3.47)$$

Pela Proposição 1.4.2, o Corolário 2.3.1, o fato de  $S_{r-2}$  ser limitado em  $L_T^\infty L_x^2$  e pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j I_{2,4,2}\|_{L_T^\infty L_x^2} &\lesssim \sum_{k=1}^n \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \sum_{r \geq j} \|S_{r-2} u_k \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} \Delta_{r-2}(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^2} \\ &\lesssim \sum_{k=1}^n \sum_{r \geq 0} 2^{\frac{r}{2}} \|S_{r-2} u_k\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|\tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} \Delta_{r-2}(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_{x,T}^2} \\ &\lesssim N_3(\mathbf{u}) \sum_{k=1}^n \sum_{r \geq 1} 2^r \|\Delta_r(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_{x,T}^2} \lesssim N_2(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u})^2. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Logo, por (3.47) e (3.48) obtemos

$$\sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j I_{2,4}\|_{L_T^\infty L_x^2} \lesssim T^{\frac{13}{40}} N_1(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u}) N_4(\mathbf{u}) + T^{\frac{1}{40}} N_3(\mathbf{u}) N_4(\mathbf{u}) N_5(\mathbf{u}) + N_2(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u})^2. \quad (3.49)$$

Juntando as estimativas (3.34), (3.36), (3.37), (3.43) e (3.49), chegamos ao resultado.  $\square$

**Proposição 3.2.1.** *Seja  $0 < T \leq 1$ . Então*

$$\begin{aligned} N_m(I) &\lesssim T N_1(\mathbf{u})^3 + T^{\frac{1}{2}} N_1(\mathbf{u}) N_2(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u}) + T^{\frac{13}{40}} N_1(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u}) N_4(\mathbf{u}) \\ &\quad + T^{\frac{1}{2}} N_1(\mathbf{u})^2 N_3(\mathbf{u}) + T^{\frac{1}{40}} N_3(\mathbf{u}) N_4(\mathbf{u}) N_5(\mathbf{u}) + N_3(\mathbf{u})^2 N_2(\mathbf{u}), \end{aligned} \quad (3.50)$$

para  $m = 1, 2, 3, 4, 5$ .

*Demonstração.* Pelos Lemas 3.2.2 e 3.2.3 vemos que a estimativa (3.50) vale para  $N_1(I)$ .

Consideremos agora o caso  $m = 2$ . Por imersão de Sobolev e pelas propriedades de  $S_0$  (mais precisamente, o item iii) da Proposição 1.4.1),

$$\|S_0 I\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim T^{\frac{1}{2}} \|S_0 I\|_{L_{x,T}^\infty} \lesssim T^{\frac{1}{2}} \|J^{\frac{1}{2}+} S_0 I\|_{L_T^\infty L_x^2} \lesssim T^{\frac{1}{2}} \|S_0 I\|_{L_T^\infty L_x^2}. \quad (3.51)$$

Daí por (3.24) e (3.34),

$$\|S_0 I\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim T^{\frac{1}{2}} \{\|S_0 I_1\|_{L_T^\infty L_x^2} + \|S_0 I_2\|_{L_T^\infty L_x^2}\} \lesssim T N_1(\mathbf{u})^3 + T^{\frac{1}{2}} N_1(\mathbf{u}) N_2(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u}). \quad (3.52)$$

Por (2.31) e (2.32),

$$\sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j(I_1)\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim \sum_{j \geq 1} \|\Delta_j(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^2} + \sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^2}.$$

Daí, pelas estimativas (3.25), (3.26) e (3.39),

$$\sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j(I_1)\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim T^{\frac{1}{2}} N_1(\mathbf{u})^2 N_3(\mathbf{u}) + N_2(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u})^2. \quad (3.53)$$

Fazendo a mesma decomposição feita em (3.35), temos

$$\sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j I_2\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim \sum_{m=1}^4 \sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j I_{2,m}\|_{L_x^\infty L_T^2}. \quad (3.54)$$

Pelos Lemas 1.5.2, 2.2.1 (item i) e pela estimativa (3.36), obtemos:

$$\sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j I_{2,1}\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim T N_1(\mathbf{u})^3. \quad (3.55)$$

Usando (2.31), (2.32) e as mesmas informações empregadas na obtenção da estimativa (3.37), chegamos que

$$\sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j(I_{2,2})\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim N_3(\mathbf{u})^2 N_2(\mathbf{u}). \quad (3.56)$$

Para estimar  $\sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j(I_{2,3})\|_{L_x^\infty L_T^2}$ , primeiro fazemos a mesma decomposição feita em (3.39) para escrever

$$\sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j I_{2,3}\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim \sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j I_{2,3,1}\|_{L_x^\infty L_T^2} + \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j I_{2,3,2}\|_{L_x^\infty L_T^2}. \quad (3.57)$$

Observemos que, como  $(\frac{1}{2}, \infty, 2)$  é 1-admissível e  $(\frac{2}{5}, 20, \frac{20}{9})$  é 2-admissível, segue do Lemma 2.3.1 que

$$\|U(t)\Delta_j \mathbf{u}_0\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim 2^{-\frac{j}{2}} \|\Delta_j \mathbf{u}_0\|_{L^2} \quad (3.58)$$

e

$$\|U(t)\Delta_j \mathbf{u}_0\|_{L_x^{20} L_T^{\frac{20}{9}}} \lesssim 2^{-\frac{2j}{5}} \|\Delta_j \mathbf{u}_0\|_{L^2}, \quad (3.59)$$

respectivamente. Daí, pelo Lema 2.3.4 (estimativa (2.25)) com  $p_1 = \infty$ ,  $q_1 = 2$ ,  $p_2 = 20$ ,  $q_2 = \frac{20}{9}$ ,

$$\sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j I_{2,3,1}\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim T^{\frac{1}{40}} \sum_{k=1}^n \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{10}} \sum_{r \geq j} \|[\tilde{D}_x^{1/2}, S_{r-3}(\bar{u}_k \mathbf{u})] D_x^{\frac{1}{2}} \Delta_{r-2} u_k\|_{L_x^{\frac{20}{19}} L_T^{\frac{20}{11}}}.$$

que por (3.41) nos leva à estimativa

$$\sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j I_{2,3,1}\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim T^{\frac{1}{40}} N_5(\mathbf{u}) N_4(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u}). \quad (3.60)$$

Pela Proposição 1.4.2, os efeitos regularizantes (2.31) e (2.32), e a estimativa (3.42), temos

$$\sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j I_{2,3,2}\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim \sum_{k=1}^n \sum_{r \geq 1} 2^{\frac{r}{2}} \|S_{r-3}(\bar{u}_k \mathbf{u}) D_x^{\frac{1}{2}} \Delta_{r-2} u_k\|_{L_x^1 L_T^2} \lesssim N_3(\mathbf{u})^2 N_2(\mathbf{u}). \quad (3.61)$$

Portanto, por (3.60) e (3.61), temos

$$\sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j I_{2,3}\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim T^{\frac{1}{40}} N_5(\mathbf{u}) N_4(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u}) + N_3(\mathbf{u})^2 N_2(\mathbf{u}). \quad (3.62)$$

Para estimar  $\sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j(I_{2,4})\|_{L_x^\infty L_T^2}$ , fazemos a mesma divisão que em (3.45) para escrever

$$\sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j I_{2,4}\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim \sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j I_{2,4,1}\|_{L_x^\infty L_T^2} + \sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j I_{2,4,2}\|_{L_x^\infty L_T^2}. \quad (3.63)$$

Pelo Lema 2.3.4 com  $(\alpha_1, p_1, q_1) = (\frac{1}{2}, \infty, 2)$  e  $(\alpha_2, p_2, q_2) = (\frac{2}{5}, 20, \frac{20}{9})$ ,

$$\sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j I_{2,4,1}\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim T^{\frac{1}{40}} \sum_{k=1}^n \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{10}} \sum_{r \geq j} \| [D_x^{1/2}, S_{r-2} u_k] \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} \Delta_{r-2}(\bar{u}_k \mathbf{u}) \|_{L_x^{\frac{20}{19}} L_T^{\frac{20}{11}}}. \quad (3.64)$$

Daí, pelas estimativas (3.46) – (3.47),

$$\sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j I_{2,4,1}\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim T^{\frac{13}{40}} N_1(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u}) N_4(\mathbf{u}) + T^{\frac{1}{40}} N_3(\mathbf{u}) N_4(\mathbf{u}) N_5(\mathbf{u}). \quad (3.65)$$

Pela Proposição 1.4.2, as estimativas (2.31) e (2.32), o fato de  $S_{r-3}$  ser limitado em  $L_x^\infty L_T^2$  e pela desigualdade de Hölder, temos

$$\sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j I_{2,4,2}\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim \sum_{k=1}^n \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \sum_{r \geq j} \|S_{r-2} u_k \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} \Delta_{r-2}(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^2} \quad (3.66)$$

Portanto, por (3.48)

$$\sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j I_{2,4,2}\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim N_3(\mathbf{u}) \sum_{k=1}^n \sum_{r \geq 1} 2^r \|\Delta_r(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_{x,T}^2} \lesssim N_2(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u})^2. \quad (3.67)$$

Logo, por (3.63) – (3.67) obtemos

$$\sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j I_{2,4}\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim T^{\frac{13}{40}} N_1(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u}) N_4(\mathbf{u}) + T^{\frac{1}{40}} N_3(\mathbf{u}) N_4(\mathbf{u}) N_5(\mathbf{u}) + N_2(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u})^2. \quad (3.68)$$

As estimativas (3.52) – (3.68) mostram que (3.50) é satisfeita por  $N_2(I)$ .

Para fazer as demais estimativas iremos usar sucessivas vezes o Lema 2.2.1 combinado com o Lema 2.2.3, assim como o Lema 2.3.1 combinado com o Lema 2.3.4. Vejamos  $N_3(I)$ :



As estimativas (3.18) e (3.28) nos fornecem as hipóteses para concluirmos do Lema 2.2.3 que

$$\begin{aligned} \|S_0 I\|_{L_x^2 L_T^\infty} &\lesssim T^{\frac{1}{4}} \left( \|S_0(1 + i\partial_x)(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})\|_{L_{x,T}^{\frac{4}{3}}} + \sum_{k=1}^n \|S_0(u_k \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u}))\|_{L_{x,T}^{\frac{4}{3}}} \right) \\ &\lesssim T^{\frac{1}{4}} \left( \| |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \|_{L_{x,T}^{\frac{4}{3}}} + \sum_{k=1}^n \|S_0(u_k \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u}))\|_{L_{x,T}^{\frac{4}{3}}} \right), \end{aligned} \quad (3.69)$$

onde usamos o item iii) da Proposição 1.4.1 para obtermos o primeiro termo no lado direito da última desigualdade acima. Daí, por (3.30) – (3.33) inferimos de (3.69) que

$$\|S_0 I\|_{L_x^2 L_T^\infty} \lesssim T N_1(\mathbf{u})^3 + T^{\frac{1}{2}} N_1(\mathbf{u}) N_2(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u}). \quad (3.70)$$

Pelo Lema 2.3.3

$$\|U(t) \Delta_j \mathbf{u}_0\|_{L_x^2 L_T^\infty} \lesssim 2^{-j(-\frac{1}{2})} \|\Delta_j \mathbf{u}_0\|_{L^2}. \quad (3.71)$$

As estimativas (3.71) e (3.58) permitem usar o Lema 2.3.4 para concluir que

$$\sum_{j \geq 1} \|\Delta_j I_1\|_{L_x^2 L_T^\infty} \lesssim \sum_{j \geq 1} \|\Delta_j(1 + i\partial_x)(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^2},$$

e daí, pela Proposição 1.4.2 e por (3.25) - (3.39),

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 1} \|\Delta_j I_1\|_{L_x^2 L_T^\infty} &\lesssim \sum_{j \geq 1} \|\Delta_j(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^2} + \sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^2}, \\ &\lesssim T^{\frac{1}{2}} N_1(\mathbf{u})^2 N_3(\mathbf{u}) + N_2(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u})^2. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Para obter uma estimativa para  $\sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j I_2\|_{L_x^2 L_T^\infty}$  vamos usar a mesma notação da estimativa (3.35) e escrever:

$$\sum_{j \geq 1} \|\Delta_j I_2\|_{L_x^2 L_T^\infty} \lesssim \sum_{m=1}^4 \sum_{j \geq 1} \|\Delta_j I_{2,m}\|_{L_x^2 L_T^\infty}. \quad (3.73)$$

As estimativas (3.71) e (3.72) novamente nos dão permissão de usar o Lema 2.3.4 para concluir que

$$\sum_{j \geq 1} \|\Delta_j I_{2,1}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \lesssim \sum_{j \geq 1} \|\Delta_j \{S_0 u_k S_0 \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u})\}\|_{L_x^1 L_T^2},$$

e daí, aplicando o Lema 1.5.2 e depois a desigualdade de Hölder e o item iii) da Proposição

1.4.1, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \geq 1} \|\Delta_j I_{2,1}\|_{L_x^2 L_T^\infty} &\lesssim \sum_{k=1}^n \|S_0 u_k S_0 \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^2} \\
 &\lesssim \sum_{k=1}^n \|S_0 u_k\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|S_0 \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_{x,T}^2} \\
 &\lesssim N_3(\mathbf{u}) \sum_{k=1}^n \|\bar{u}_k \mathbf{u}\|_{L_{x,T}^2} \lesssim T^{\frac{1}{2}} N_1(\mathbf{u})^2 N_3(\mathbf{u}). \tag{3.74}
 \end{aligned}$$

Pelas mesmas ferramentas usadas na obtenção de (3.74) e de (3.37),

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \geq 1} \|\Delta_j I_{2,2}\|_{L_x^2 L_T^\infty} &\lesssim \sum_{k=1}^n \sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j (\sum_{r \geq j} \Delta_{r-2} u_k S_{r-3}(\bar{u}_k \mathbf{u}))\|_{L_x^1 L_T^2} \\
 &\lesssim \sum_{k=1}^n \sum_{r \geq 1} 2^r \|\Delta_{r-2} u_k S_{r-3}(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^2} \lesssim N_3(\mathbf{u})^2 N_2(\mathbf{u}). \tag{3.75}
 \end{aligned}$$

Agora vamos estimar  $\sum_{j \geq 1} \|\Delta_j I_{2,3}\|_{L_x^2 L_T^\infty}$ . Usando a mesma notação que em (3.39), escrevemos

$$\sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j I_{2,3}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \lesssim \sum_{j \geq 1} \|\Delta_j I_{2,3,1}\|_{L_x^2 L_T^\infty} + \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j I_{2,3,2}\|_{L_x^2 L_T^\infty}. \tag{3.76}$$

Usando as estimativas (3.71) e (3.40), segue do Lema 2.3.4 e de (3.41) que

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j I_{2,3,1}\|_{L_x^2 L_T^\infty} &\lesssim T^{\frac{1}{40}} \sum_{k=1}^n \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{10}} \sum_{r \geq j} \|[\tilde{D}_x^{1/2}, S_{r-3}(\bar{u}_k \mathbf{u})] D_x^{\frac{1}{2}} \Delta_{r-2} u_k\|_{L_x^{\frac{20}{19}} L_T^{\frac{20}{11}}} \\
 &\lesssim T^{\frac{1}{40}} N_5(\mathbf{u}) N_4(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u}). \tag{3.77}
 \end{aligned}$$

Pelas estimativas 3.71 e (3.58), obtemos do Lema 2.3.4 e de (3.42) (ou (3.61)):

$$\sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j I_{2,3,2}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \lesssim \sum_{k=1}^n \sum_{r \geq 1} 2^{\frac{r}{2}} \|S_{r-3}(\bar{u}_k \mathbf{u}) D_x^{\frac{1}{2}} \Delta_{r-2} u_k\|_{L_x^1 L_T^2} \lesssim N_3(\mathbf{u})^2 N_2(\mathbf{u}). \tag{3.78}$$

Finalmente, para estimar  $\sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j(I_{2,4})\|_{L_x^2 L_T^\infty}$ , fazemos a mesma divisão que em (3.45) e escrevemos

$$\sum_{j \geq 1} \|\Delta_j I_{2,4}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \lesssim \sum_{j \geq 1} \|\Delta_j I_{2,4,1}\|_{L_x^2 L_T^\infty} + \sum_{j \geq 1} \|\Delta_j I_{2,4,2}\|_{L_x^2 L_T^\infty}. \tag{3.79}$$

Com as estimativas (3.71) e (3.59) usadas como hipótese no Lema 2.3.4 e depois usando (3.41), obtemos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j I_{2,4,1}\|_{L_x^2 L_T^\infty} &\lesssim T^{\frac{1}{40}} \sum_{k=1}^n \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{10}} \sum_{r \geq j} \|[\tilde{D}_x^{1/2}, S_{r-3}(\bar{u}_k \mathbf{u})] D_x^{\frac{1}{2}} \Delta_{r-2} u_k\|_{L_x^{\frac{20}{19}} L_T^{\frac{20}{11}}} \\
 &\lesssim T^{\frac{13}{40}} N_1(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u}) N_4(\mathbf{u}) + T^{\frac{1}{40}} N_3(\mathbf{u}) N_4(\mathbf{u}) N_5(\mathbf{u}).
 \end{aligned}$$

Por (3.71) e (3.58), segue do Lema 2.3.4 que

$$\sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j I_{2,4,2}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \lesssim \sum_{k=1}^n \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \sum_{r \geq j} \|S_{r-2} u_k \tilde{D}_x^{\frac{1}{2}} \Delta_{r-2}(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^2}. \quad (3.80)$$

Daí, procedendo como na obtenção de (3.48), chegamos à desigualdade:

$$\sum_{j \geq 1} \|\Delta_j I_{2,4,2}\|_{L_x^2 L_T^\infty} \lesssim N_2(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u})^2. \quad (3.81)$$

Das estimativas (3.72) – (3.81) vemos que  $N_3(I)$  satisfaz (3.50).

Começemos a verificar se  $N_4(I)$  satisfaz (3.50). Por imersão de Sobolev e a pela Proposição 1.4.1,

$$\|S_0 I\|_{L_{x,T}^4} \lesssim T^{\frac{1}{4}} \|J^{\frac{1}{4}} S_0 I\|_{L_T^\infty L_x^2} \lesssim \|S_0 I\|_{L_T^\infty L_x^2} \quad (3.82)$$

e daí, por (3.24) e (3.34)

$$\|S_0 I\|_{L_{x,T}^4} \lesssim T N_1(\mathbf{u})^3 + T^{\frac{1}{2}} N_1(\mathbf{u}) N_2(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u}). \quad (3.83)$$

As estimativas (3.22) e (3.16) nos possibilitam usar o Lema 2.3.4 para deduzir que

$$\sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j(I_1)\|_{L_{x,T}^4} \lesssim \sum_{j \geq 1} \|\Delta_j(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^2} + \sum_{j \geq 1} 2^j \|\Delta_j(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^2}.$$

Então, pelas estimativas (3.25), (3.26) e (3.39),

$$\sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j(I_1)\|_{L_{x,T}^4} \lesssim T^{\frac{1}{2}} N_1(\mathbf{u})^2 N_3(\mathbf{u}) + N_2(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u})^2. \quad (3.84)$$

No intuito de não ficar muito repetitivo, vamos omitir os demais cálculos para verificar que  $N_4(I)$  e  $N_5(I)$  satisfazem (3.50), porque basta usar os lemas 2.3.1 e 2.3.4, e depois as estimativas já feitas para  $N_1(I)$ .  $\square$

### 3.3 Boa colocação em $B_2^{\frac{1}{2},1}(\mathbb{R})$ .

Nesta seção vamos fazer a demonstração do Teorema 3.1.1, isto é, a boa colocação local para o sistema (2) (ou seja, a equação integral (3.1)) com dado inicial pequeno em  $B_2^{\frac{1}{2},1}(\mathbb{R})$ . Para elaborar esta seção, nos apoiamos principalmente nas referências [33, 40].

Consideremos a aplicação

$$\Phi_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{u})(t) = U(t) \mathbf{u}_0 + \int_0^t U(t-s) \left\{ -i|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} + \partial_x(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) + \sum_{k=1}^n u_k \partial_x(u_k \mathbf{u}) \right\}(s) ds. \quad (3.85)$$

à qual vamos nos referir simplesmente por  $\Phi(\mathbf{u})$ .

Provaremos que existem  $a = a(\|\mathbf{u}_0\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}}) > 0$  e um  $T \in (0, 1]$ , tal que, se

$$\mathbf{u} \in X_T(a) := \{ \mathbf{u} \in X_T : \|\mathbf{u}\|_{X_T} \leq a \},$$

então  $\Phi(\mathbf{u}) \in X_T(a)$  e  $\Phi : X_T(a) \rightarrow X_T(a)$  é uma contração.

Já sabemos do Lema 3.2.1 que existe um  $c > 0$  tal que,

$$\|U(t)\mathbf{u}_0\|_{X_T} \leq c\|\mathbf{u}_0\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}}. \quad (3.86)$$

Como  $\|I\|_{X_T} = \sum_{m=1}^5 N_m(I)$ , segue da Proposição 3.50 que

$$\begin{aligned} \|I\|_{X_T} &\lesssim TN_1(\mathbf{u})^3 + T^{\frac{1}{2}}N_1(\mathbf{u})N_2(\mathbf{u})N_3(\mathbf{u}) + T^{\frac{13}{40}}N_1(\mathbf{u})N_3(\mathbf{u})N_4(\mathbf{u}) \\ &\quad + T^{\frac{1}{2}}N_1(\mathbf{u})^2N_3(\vec{u}) + T^{\frac{1}{40}}N_3(\mathbf{u})N_4(\mathbf{u})N_5(\mathbf{u}) + N_3(\mathbf{u})^2N_2(\mathbf{u}), \end{aligned}$$

e daí, existe um  $c > 0$  tal que

$$\|I\|_{X_T} \leq c \cdot (1 + p(T))\|\mathbf{u}\|_{X_T}^3, \quad (3.87)$$

onde  $p(t) = t + t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{13}{40}} + t^{\frac{1}{40}}$  (notemos que  $p(0) = 0$ ). Portanto, de (3.86) e (3.87) deduzimos que

$$\|\Phi_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{u})\|_{X_T} \leq c\|\mathbf{u}_0\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}} + c(1 + p(T))\|\mathbf{u}\|_{X_T}^3. \quad (3.88)$$

Como queremos  $\|\Phi_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{u})\|_{X_T} \leq a$ , vamos escolher  $a = a(\|\mathbf{u}_0\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}}) > 0$  tal que

$$c\|\mathbf{u}_0\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}} < \frac{a}{2} \quad \text{e} \quad 2c\|\mathbf{u}_0\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}} < a < 4c\|\mathbf{u}_0\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}}.$$

Assim,

$$c \cdot p(T)\|\mathbf{u}\|_{X_T}^3 \leq cp(T)a^2a \leq cp(T)(4c\|\mathbf{u}_0\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}})^2a.$$

Escolhendo então um  $T > 0$  tal que

$$4cp(T)(4c\|\mathbf{u}_0\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}})^2 \leq \frac{1}{2}, \quad (3.89)$$

tem-se que

$$c\|\mathbf{u}_0\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}} + c(1 + p(T))\|\mathbf{u}\|_{X_T}^3 \leq a.$$

Escolha  $\delta > 0$  tal que  $(4c)^3\|\mathbf{u}_0\|_{X_T} < (4c)^3\delta^2$ , assim,

$$(4c)^3\delta^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \delta^2 = \frac{1}{4^4c^3} \Rightarrow \delta = \frac{1}{4^2c^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \delta = \frac{1}{2(4c)^{\frac{3}{2}}}$$

Portanto, escolhendo  $a$  e  $T$  como acima, segue que

$$\Phi_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{u}) \in X_T(a), \quad \forall \mathbf{u} \in X_T(a),$$

ou seja

$$\Phi_{\mathbf{u}_0} : X_T(a) \rightarrow X_T(a).$$

Para mostrarmos que  $\Phi_{\mathbf{u}_0}$  é uma contração, sejam  $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in X_T(a)$ . Então

$$\begin{aligned} \|\Phi_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{u}) - \Phi_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{w})\|_{X_T} &= \|I(\mathbf{u}) - I(\mathbf{w})\|_{X_T} \\ &\leq \|I_1(\mathbf{u}) - I_1(\mathbf{w})\|_{X_T} + \|I_2(\mathbf{u}) - I_2(\mathbf{w})\|_{X_T}. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Pelas estimativas para  $I_1$ ,

$$\begin{aligned} \|I_1(\mathbf{u}) - I_1(\mathbf{w})\|_{X_T} &= \left\| \int_0^t U(t-t')(1+i\partial_x)(|\mathbf{u}|^2\mathbf{u} - |\mathbf{w}|^2\mathbf{w})dt' \right\|_{X_T} \\ &\leq \left\| \int_0^t U(t-t')(1+i\partial_x)\{|\mathbf{u}|^2(\mathbf{u}-\mathbf{w})\}dt' \right\|_{X_T} \\ &\quad + \left\| \int_0^t U(t-t')(1+i\partial_x)\{(\mathbf{u}-\mathbf{w})\bar{\mathbf{u}}\mathbf{w}\}dt' \right\|_{X_T} \\ &\quad + \left\| \int_0^t U(t-t')(1+i\partial_x)\{(\bar{\mathbf{u}}-\bar{\mathbf{w}})\mathbf{w}^2\}dt' \right\|_{X_T} \\ &\lesssim (T+T^{\frac{1}{2}})\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|_{X_T}(\|\mathbf{u}\|_{X_T}^2 + \|\mathbf{u}\|_{X_T}\|\mathbf{w}\|_{X_T} + \|\mathbf{w}\|_{X_T}^2) \\ &\lesssim (1+T+T^{\frac{1}{2}})\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|_{X_T}(\|\mathbf{u}\|_{X_T} + \|\mathbf{w}\|_{X_T})^2. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Pelas estimativas para  $I_2$ ,

$$\begin{aligned} \|I_2(\mathbf{u}) - I_2(\mathbf{w})\|_{X_T} &\lesssim \left\| \int_0^t U(t-s)(u_k\partial_x(\bar{u}_k\mathbf{u}) - w_k\partial_x(\bar{w}_k\mathbf{w}))ds \right\|_{X_T} \\ &\lesssim \left\| \int_0^t U(t-s)(u_k - w_k)\partial_x(\bar{u}_k\mathbf{u})ds \right\|_{X_T} \\ &\quad + \left\| \int_0^t U(t-s)u_k\partial_x((\bar{u}_k - \bar{w}_k) \cdot \mathbf{u})ds \right\|_{X_T} \\ &\quad + \left\| \int_0^t U(t-s)u_k\partial_x(\bar{w}_k(\mathbf{u}-\mathbf{w}))\bar{\mathbf{u}}\mathbf{w}ds \right\|_{X_T} \\ &\lesssim (T+T^{\frac{5}{6}}+T^{\frac{2}{3}}+T^{\frac{1}{2}}+T^{\frac{13}{40}}+T^{\frac{1}{40}}+1)\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|_{X_T}(\|\mathbf{u}\|_{X_T}+\|\mathbf{w}\|_{X_T})^2. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Portanto, por (3.90) – (3.92),

$$\begin{aligned} \|\Phi_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{u}) - \Phi_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{w})\|_{X_T} &\lesssim (T+T^{\frac{5}{6}}+T^{\frac{2}{3}}+T^{\frac{1}{2}}+T^{\frac{13}{40}}+T^{\frac{1}{40}}+1)\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|_{X_T}(\|\mathbf{u}\|_{X_T}+\|\mathbf{w}\|_{X_T})^2 \\ &\leq 4c(T+T^{\frac{5}{6}}+T^{\frac{2}{3}}+T^{\frac{1}{2}}+T^{\frac{13}{40}}+T^{\frac{1}{40}}+1)a^2\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|_{X_T} \\ &\leq 4c(T+T^{\frac{5}{6}}+T^{\frac{2}{3}}+T^{\frac{1}{2}}+T^{\frac{13}{40}}+T^{\frac{1}{40}}+1)(4c)^2\|\mathbf{u}_0\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}}^2\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|_{X_T}. \end{aligned}$$

Agora, escolhendo  $T$  em (3.89) segue que  $\Phi_{\mathbf{u}_0}(\cdot)$  é uma contração em  $X_T(a)$ .

Usando um argumento padrão, vamos estabelecer a unicidade do resultado em uma classe maior do que  $X_T(a)$ . Seja  $\tilde{\mathbf{u}}$  uma solução de (3.85) no intervalo de tempo  $[0, T_1]$  com  $T_1 < T$ . Além disso, assumamos que  $\tilde{\mathbf{u}} \in X_{T_1}(a_1)$  para algum  $a_1 > a$ , com  $\mathbf{u} \in C([0, T_1]; B_2^{\frac{1}{2}, 1}(\mathbb{R}))$ . Desta maneira,  $\tilde{\mathbf{u}}$  satisfaz a equação integral (3.85). Sendo  $\tilde{\mathbf{u}} : [0, T_1] \rightarrow B_2^{\frac{1}{2}, 1}(\mathbb{R})$  contínua, temos que existe  $T_2 \in (0, T_1)$  tal que

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{B_2^{\frac{1}{2}, 1}} \leq a.$$

De maneira similar, conseguimos mostrar que existe um  $T_3 \in (0, T_2)$  de modo que para as demais seminormas que compõem a norma  $X_T(a)$ , a solução,  $\tilde{\mathbf{u}}$  pertence à bola  $X_{T_3}(a)$ , e conseqüentemente,  $\mathbf{u}(x, t) \equiv \tilde{\mathbf{u}}(x, t)$ , para  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T_4]$ . Reaplicando este processo à equação (3.85) com dado inicial  $\mathbf{u}(x, T_3)$  conseguimos estender a unicidade ao intervalo  $[0, T]$  com um número finito de iterações.

Para demonstrar que existe uma vizinhança da origem na qual a aplicação dado inicial-solução é suave, basta seguir os passos da demonstração do Corolário 3.2 da referência M. Cardoso [4], usando as ferramentas lá citadas e as estimativas não lineares que fizemos na seção anterior.

### 3.4 Boa colocação local em $H^s(\mathbb{R})$ , $s > \frac{1}{2}$ .

Vamos nesta seção demonstrar o Teorema 3.1.2. Na preparação desta parte, tivemos como base Molinet/Ribaud [33] e (principalmente) Pilod [40].

**Lema 3.4.1.** *Seja  $s > \frac{1}{2}$ . Então  $H^s(\mathbb{R})$  está continuamente imerso em  $B_2^{\frac{1}{2}, 1}(\mathbb{R})$ .*

*Demonstração.* Seja  $f \in H^s(\mathbb{R})$ . Então pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}} &= \|S_0 f\|_{L^2} + \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j f\|_{L^2} \\
 &= \|S_0 f\|_{L^2} + \sum_{j \geq 1} 2^{js} \|\Delta_j f\|_{L^2} 2^{j(\frac{1}{2}-s)} \\
 &\leq \|S_0 f\|_{L^2} + \left( \sum_{j \geq 1} (2^{js} \|\Delta_j f\|_{L^2})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{j \geq 1} (2^{j(\frac{1}{2}-s)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \|S_0 f\|_{L^2} + \left( \sum_{j \geq 1} 4^{js} \|\Delta_j f\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{j \geq 1} 4^{j(\frac{1}{2}-s)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \|S_0 f\|_{L^2} + \left( \sum_{j \geq 1} 4^{js} \|\Delta_j f\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{B_2^{s,2}} \sim \|f\|_{H^s},
 \end{aligned}$$

de modo que  $\|f\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}} \leq c \|f\|_{H^s}$ . E isso prova o lema.  $\square$

Agora, seja  $s > \frac{1}{2}$ . Assim como na demonstração do Teorema 3.1.1, queremos aplicar o Teorema do ponto fixo para contrações para resolver a equação integral (3.85) num espaço de funções adequado. Com esse intuito, definamos a seguinte seminorma:

$$\|\mathbf{u}\|_{X_{T,s}} = N_{1,s}(\mathbf{u}) + N_{2,s}(\mathbf{u}),$$

onde

$$\begin{aligned}
 N_{1,s}(\mathbf{u}) &= \|S_0 \mathbf{u}\|_{L_T^\infty L_x^2} + \left( \sum_{j \geq 1} 4^{js} \|\Delta_j \mathbf{u}\|_{L_T^\infty L_x^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\
 N_{2,s}(\mathbf{u}) &= \|S_0 \mathbf{u}\|_{L_x^\infty L_T^2} + \left( \sum_{j \geq 1} 4^{j(s+\frac{1}{2})} \|\Delta_j \mathbf{u}\|_{L_x^\infty L_T^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Dado  $\mathbf{u}_0 \in H^s(\mathbb{R})$ , pelo Lema anterior faz sentido definirmos

$$\lambda_s := \frac{\|\mathbf{u}_0\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}}}{\|\mathbf{u}_0\|_{H^s}}, \quad \text{com } \|\mathbf{u}_0\|_{H^s} \neq 0.$$

Do Lema 3.4.1 tem-se que  $\lambda_s \leq c$ , onde  $c$  independe de  $s$ .

Consideremos o seguinte espaço de Banach:

$$Y_{T,s} = \left\{ \mathbf{u} \in C([-T,T]; H^s(\mathbb{R})) : \|\mathbf{u}\|_{Y_{T,s}} := \|\mathbf{u}\|_{X_T} + \lambda_s \|\mathbf{u}\|_{X_{s,T}} < \infty \right\}.$$

Como  $\|\mathbf{u}\|_{X_T}$  já foi estimado, basta realizarmos estimativas para  $\|\mathbf{u}\|_{X_{s,T}}$ .

Pelo fato de o operador  $U(t)$  ser limitado em  $L_x^2$ , das desigualdades (3.15) e (3.16) junto com a definição de  $\lambda_s$ , deduzimos que

$$\begin{aligned} \|U(t)\mathbf{u}_0\|_{X_{s,T}} &= \|S_0U(t)\mathbf{u}_0\|_{L_T^\infty L_x^2} + \left( \sum_{j \geq 1} 4^{js} \|\Delta_j U(t)\mathbf{u}_0\|_{L_T^\infty L_x^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \|S_0U(t)\mathbf{u}_0\|_{L_x^\infty L_T^2} + \left( \sum_{j \geq 1} 4^{j(s+\frac{1}{2})} \|\Delta_j U(t)\mathbf{u}_0\|_{L_x^\infty L_T^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \|S_0\mathbf{u}_0\|_{L^2} + \left( \sum_{j \geq 1} 4^{js} \|\Delta_j \mathbf{u}_0\|_{L_x^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cong \|\mathbf{u}_0\|_{H^s}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Juntando as informações do Lema 3.2.1, (3.93) e a definição de  $\lambda_s$  segue que,

$$\|U(t)\mathbf{u}_0\|_{Y_{T,s}} = \|U(t)\mathbf{u}_0\|_{X_T} + \lambda_s \|U(t)\mathbf{u}_0\|_{X_{s,T}} \lesssim \|\mathbf{u}_0\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}} + \lambda_s \|\mathbf{u}_0\|_{H^s} \lesssim \|\mathbf{u}_0\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}}. \quad (3.94)$$

Vamos agora estimar a parte não linear de (3.85) na norma  $X_{s,T}$ . Das estimativas (3.24) e (3.34) obtemos:

$$\|S_0I\|_{L_T^\infty L_x^2} \lesssim TN_1(\mathbf{u})^3 + T^{\frac{1}{2}}N_1(\mathbf{u})N_2(\mathbf{u})N_3(\mathbf{u}) \lesssim (T + T^{\frac{1}{2}})\|\mathbf{u}\|_{X_T}^3. \quad (3.95)$$

Já da estimativa (3.52) também chegamos que

$$\|S_0I\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim TN_1(\mathbf{u})^3 + T^{\frac{1}{2}}N_1(\mathbf{u})N_2(\mathbf{u})N_3(\mathbf{u}) \lesssim (T + T^{\frac{1}{2}})\|\mathbf{u}\|_{X_T}^3. \quad (3.96)$$

Pelo Corolário 2.3.1 e o Lema 2.3.5,

$$\begin{aligned} &\left( \sum_{j \geq 1} 4^{js} \|\Delta_j I_1\|_{L_T^\infty L_x^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{j \geq 1} 4^{j(s+\frac{1}{2})} \|\Delta_j I_1\|_{L_x^\infty L_T^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \left( \sum_{j \geq 1} 4^{j(s-\frac{1}{2})} \|\Delta_j (|\mathbf{u}|^2\mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{j \geq 1} 4^{j(s+\frac{1}{2})} \|\Delta_j (|\mathbf{u}|^2\mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \left( \sum_{j \geq 1} 4^{j(s+\frac{1}{2})} \|\Delta_j (|\mathbf{u}|^2\mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.97)$$



Fazendo uso de (3.7), (3.8), do Lemas 1.5.2 e da desigualdade de Hölder, temos:

$$\begin{aligned}
 & \left( \sum_{j \geq 1} 4^{j(s+\frac{1}{2})} \|\Delta_j (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \|S_0(|\mathbf{u}|^2) S_0 \mathbf{u}\|_{L_x^1 L_T^2} + \\
 & \quad + \left( \sum_{r \geq 1} 4^{r(s+\frac{1}{2})} \|\Delta_r \mathbf{u} S_r (|\mathbf{u}|^2)\|_{L_x^1 L_T^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{r \geq 1} 4^{r(s+\frac{1}{2})} \|\Delta_r (|\mathbf{u}|^2) S_r \mathbf{u}\|_{L_x^1 L_T^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \lesssim T^{\frac{1}{2}} N_1(\mathbf{u})^2 N_3(\mathbf{u}) + N_3(\mathbf{u})^2 \left( \sum_{r \geq 1} 4^{r(s+\frac{1}{2})} \|\Delta_r \mathbf{u}\|_{L_x^\infty L_T^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad + N_3(\mathbf{u}) \left( \sum_{r \geq 1} 4^{r(s+\frac{1}{2})} \|\Delta_r (|\mathbf{u}|^2)\|_{L_x^2 L_T^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \lesssim T^{\frac{1}{2}} N_1(\mathbf{u})^2 N_3(\mathbf{u}) + N_3(\mathbf{u})^2 N_{2,s}(\mathbf{u}) + N_3(\mathbf{u}) \left( \sum_{r \geq 1} 4^{r(s+\frac{1}{2})} \|\Delta_r (|\mathbf{u}|^2)\|_{L_x^2 L_T^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Usando os mesmos recursos que na estimativa (3.27), obtemos:

$$\begin{aligned}
 & \left( \sum_{r \geq 1} 4^{r(s+\frac{1}{2})} \|\Delta_r (|\mathbf{u}|^2)\|_{L_x^2 L_T^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \lesssim \left( \sum_{r \geq 1} 4^{r(s+\frac{1}{2})} \|\Delta_r (|S_0 \mathbf{u}|^2)\|_{L_x^2 L_T^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{r \geq 1} 4^{r(s+\frac{1}{2})} \|\Delta_r \mathbf{u} S_r \bar{\mathbf{u}}\|_{L_x^2 L_T^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \lesssim \| |S_0 \mathbf{u}|^2 \|_{L_x^2 L_T^2} + \left( \sum_{r \geq 1} 4^{r(s+\frac{1}{2})} \|S_r \mathbf{u}\|_{L_x^2 L_T^\infty}^2 \|\Delta_r \mathbf{u}\|_{L_x^\infty L_T^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \lesssim T^{\frac{1}{2}} N_1(\mathbf{u})^2 + N_3(\mathbf{u}) \left( \sum_{r \geq 1} 4^{r(s+\frac{1}{2})} \|\Delta_r \mathbf{u}\|_{L_x^\infty L_T^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \lesssim T^{\frac{1}{2}} N_1(\mathbf{u})^2 + N_3(\mathbf{u}) N_{2,s}(\mathbf{u})
 \end{aligned}$$

e conseqüentemente,

$$\left( \sum_{j \geq 1} 4^{j(s+\frac{1}{2})} \|\Delta_j (|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim T^{\frac{1}{2}} N_1(\mathbf{u})^2 N_3(\mathbf{u}) + N_3(\mathbf{u})^2 N_{2,s}(\mathbf{u}). \quad (3.98)$$

De (3.97) e (3.98) segue que

$$\left( \sum_{j \geq 1} 4^{js} \|\Delta_j I_1\|_{L_T^\infty L_x^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{j \geq 1} 4^{j(s+\frac{1}{2})} \|\Delta_j I_1\|_{L_x^\infty L_T^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim T^{\frac{1}{2}} N_1(\mathbf{u})^2 N_3(\mathbf{u}) + N_{2,s}(\mathbf{u}) N_3(\mathbf{u})^2. \quad (3.99)$$

Novamente pelo Corolário 2.3.1 e pelo Lema 2.3.5,

$$\begin{aligned}
 & \left( \sum_{j \geq 1} 4^{js} \|\Delta_j I_2\|_{L_T^\infty L_x^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{j \geq 1} 4^{j(s+\frac{1}{2})} \|\Delta_j I_2\|_{L_x^\infty L_T^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \lesssim \left( \sum_{j \geq 1} 4^{j(s-\frac{1}{2})} \|\Delta_j \left( \sum_{k=1}^n u_k \partial_x (\bar{u}_k \mathbf{u}) \right)\|_{L_x^1 L_T^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.100)
 \end{aligned}$$

Usando a decomposição (3.11), o Lema 1.5.2 e a desigualdade de Hölder, vemos que

$$\begin{aligned}
 & \left( \sum_{j \geq 1} 4^{j(s-\frac{1}{2})} \|\Delta_j \sum_{k=1}^n u_k \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \lesssim \sum_{k=1}^n \left\{ \|S_0 u_k S_0 \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^2} + \left( \sum_{j \geq 1} 4^{j(s-\frac{1}{2})} \|\Delta_j (\sum_{r \geq j} \Delta_{r-2} u_k S_{r-3} \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u}))\|_{L_x^1 L_T^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\
 & \quad + \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j \geq 1} 4^{j(s-\frac{1}{2})} \|\Delta_j (\sum_{r \geq j} \Delta_{r-2} \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u}) S_{r-2} u_k)\|_{L_x^1 L_T^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \lesssim \sum_{k=1}^n \left\{ \|S_0 u_k\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|S_0 \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_{x,T}^2} + \left( \sum_{r \geq 1} 4^{r(s+\frac{1}{2})} \|\Delta_{r-2} u_k S_{r-3}(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
 & \quad \left. + \left( \sum_{r \geq 1} 4^{r(s-\frac{1}{2})} \|\Delta_{r-2} \partial_x u_k S_{r-3}(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
 & \quad \left. + \left( \sum_{j \geq 1} 4^{j(s-\frac{1}{2})} \|\Delta_j (\sum_{r \geq j} \Delta_{r-2} (\partial_x \bar{u}_k \mathbf{u}) S_{r-2} u_k)\|_{L_x^1 L_T^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\
 & \lesssim T^{\frac{1}{2}} N_1(\mathbf{u})^2 N_3(\mathbf{u}) + \sum_{k=1}^n \left\{ \left( \sum_{r \geq 1} 4^{r(s+\frac{1}{2})} \|\Delta_r u_k\|_{L_x^\infty L_T^2}^2 \|S_r(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^\infty}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
 & \quad \left. + \left( \sum_{r \geq 1} 4^{r(s-\frac{1}{2})} \|\Delta_r \partial_x u_k\|_{L_x^\infty L_T^2}^2 \|S_r(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^\infty}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
 & \quad \left. + \left( \sum_{r \geq 1} 4^{r(s-\frac{1}{2})} \|\Delta_r \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_{x,T}^2}^2 \|S_r u_k\|_{L_x^2 L_T^\infty}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\
 & \lesssim T^{\frac{1}{2}} N_1(\mathbf{u})^2 N_3(\mathbf{u}) + N_3(\mathbf{u})^2 N_{2,s}(\mathbf{u}) + N_3(\mathbf{u}) \sum_{k=1}^n \left( \sum_{r \geq 1} 4^{r(s+\frac{1}{2})} \|\Delta_r(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_{x,T}^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Por (3.12), (3.13) e pela desigualdade de Hölder,

$$\sum_{k=1}^n \left( \sum_{r \geq 1} 4^{r(s+\frac{1}{2})} \|\Delta_r(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_{x,T}^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim T^{\frac{1}{2}} N_1(\mathbf{u})^2 + N_3(\mathbf{u}) N_{2,s}(\mathbf{u})$$

e assim deduzimos que,

$$\left( \sum_{j \geq 1} 4^{j(s-\frac{1}{2})} \|\Delta_j \sum_{k=1}^n u_k \partial_x(\bar{u}_k \mathbf{u})\|_{L_x^1 L_T^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim T^{\frac{1}{2}} N_1(\mathbf{u})^2 N_3(\mathbf{u}) + N_3(\mathbf{u})^2 N_{2,s}(\mathbf{u}). \quad (3.101)$$

Portanto, de (3.100) e (3.101) segue que

$$\left( \sum_{j \geq 1} 4^{js} \|\Delta_j I_2\|_{L_T^\infty L_x^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{j \geq 1} 4^{j(s+\frac{1}{2})} \|\Delta_j I_2\|_{L_x^\infty L_T^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim T^{\frac{1}{2}} N_1(\mathbf{u})^2 N_3(\mathbf{u}) + N_3(\mathbf{u})^2 N_{2,s}(\mathbf{u}). \quad (3.102)$$

Logo, por (3.93), (3.95), (3.96), (3.99) e (3.102) obtemos:

$$\|\Phi_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{u})\|_{X_{s,T}} \leq \|U(t)\mathbf{u}_0\|_{X_{s,T}} + \|I\|_{X_{s,T}} \lesssim \|\mathbf{u}_0\|_{H^s} + (T + T^{\frac{1}{2}})\|\mathbf{u}\|_{X_T}^3 + N_3(\mathbf{u})^2 N_{2,s}(\mathbf{u})$$

e daí,

$$\begin{aligned} \lambda_s \|\mathbf{u}\|_{X_{s,T}} &\lesssim \|\mathbf{u}_0\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}} + \lambda_s (T + T^{\frac{1}{2}}) \|\mathbf{u}\|_{X_T}^3 + \lambda_s N_3(\mathbf{u})^2 N_{2,s}(\mathbf{u}) \\ &\lesssim \|\mathbf{u}_0\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}} + (T + T^{\frac{1}{2}}) \|\mathbf{u}\|_{X_T}^3 + N_3(\mathbf{u})^2 N_{2,s}(\mathbf{u}), \end{aligned}$$

pois  $\lambda_s \leq c$ . Assim, pela definição do espaço  $Y_{s,T}$  juntamente com as estimativas (3.86) e (3.87) temos que,

$$\|\Phi_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{u})\|_{Y_{s,T}} \leq c \|\mathbf{u}_0\|_{B_2^{\frac{1}{2},1}} + c(1 + p(T)) \|\mathbf{u}\|_{Y_{s,T}}^3. \quad (3.103)$$

Para concluir a demonstração do Teorema 3.1.2 basta agora seguir exatamente o mesmo roteiro da demonstração do Teorema 3.1.1 usando (3.103) no lugar de (3.3).

Para demonstrar que existe uma vizinhança da origem na qual a aplicação dado inicial-solução é suave, sugerimos seguir os passos da demonstração do Corolário 3.2 da referência M. Cardoso [4], usando as ferramentas lá citadas e as estimativas não lineares que fizemos nesta seção e na Seção 3.2.

# Capítulo 4

## Apêndice

Neste capítulo realizamos a demonstração de que o sistema em (1) possui quantidades conservadas ao longo do fluxo similares às da equação DNLS, a saber, os funcionais (5) e (6) exibidos na introdução. Nossa demonstração é feita com base na que fez Hayashi [15] para a equação DNLS (4).

Começamos com uma mudança de variável gauge para o sistema em (1) que será essencial para a demonstração de que esses funcionais são de fato leis de conservação para o referido sistema.

**Teorema 4.0.1.** *O sistema em (2) é gauge equivalente ao sistema*

$$\partial_t \mathbf{v} - i\partial_x^2 \mathbf{v} = i\mu |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} + 2(\gamma + a)|\mathbf{v}|^2 \partial_x \mathbf{v} + (\gamma + 2a)\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \partial_x \bar{\mathbf{v}} + \left( \frac{ia\gamma}{2} + 2ia \right) |\mathbf{v}|^4 \mathbf{v}. \quad (4.1)$$

com

$$\mathbf{v}(x, t) = e^{ia\rho} \mathbf{u}(x, t), \quad \text{onde} \quad \rho(x, t) = \frac{\gamma}{2} \int_{-\infty}^x |\mathbf{u}(y, t)|^2 dy \quad e \quad a \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

*Demonstração.* Aplicando em  $\mathbf{v}$  o operador  $(\partial_t - i\partial_x^2)$ , vemos que

$$\partial_t \mathbf{v} - i\partial_x^2 \mathbf{v} = e^{i\rho} (\partial_t \mathbf{u} - i\partial_x^2 \mathbf{u}) + ia e^{i\rho} \mathbf{u} (\partial_t \rho - i\partial_x^2 \rho + a(\partial_x \rho)^2) + 2a \partial_x \rho e^{i\rho} \partial_x \mathbf{u}.$$

Como

$$\partial_t \rho = i\partial_x \mathbf{u} \bar{\mathbf{u}} - i\mathbf{u} \partial_x \bar{\mathbf{u}} + \frac{3\gamma}{2} |\mathbf{u}|^4, \quad |\mathbf{u}|^2 = |\mathbf{v}|^2, \quad e \quad e^{ia\rho} \partial_x \mathbf{u} = \partial_x \mathbf{v} - ia|\mathbf{v}|^2 \mathbf{v},$$

segue que,

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} - i\partial_x^2 \mathbf{v} &= i\mu |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} + \gamma \mathbf{v} \partial_x (|\mathbf{v}|^2) + \gamma |\mathbf{v}|^2 \partial_x \mathbf{v} - ia\gamma |\mathbf{v}|^4 \mathbf{v} - a |\mathbf{v}|^2 \partial_x \mathbf{v} + ia^2 |\mathbf{v}|^4 \mathbf{v} \\ &\quad + \frac{3ia\gamma}{2} |\mathbf{v}|^4 \mathbf{v} + a\mathbf{v} \partial_x (|\mathbf{v}|^2) + 2ia |\mathbf{v}|^4 \mathbf{v} + 2a |\mathbf{v}|^2 \partial_x \mathbf{v} - 2ia^2 |\mathbf{v}|^4 \mathbf{v} \\ &\quad + a\mathbf{v} \partial_x (|\mathbf{v}|^2) - a |\mathbf{v}|^2 \partial_x \mathbf{v} + ia^2 |\mathbf{v}|^4 \mathbf{v} \\ &= i\mu |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} + (\gamma + 2a) \mathbf{v} \partial_x (|\mathbf{v}|^2) + \gamma |\mathbf{v}|^2 \partial_x \mathbf{v} + \left( \frac{ia\gamma}{2} + 2ia \right) |\mathbf{v}|^4 \mathbf{v}, \end{aligned}$$

que nos leva ao sistema desejado.  $\square$

**Corolário 4.0.1.** *O sistema em (2) é gauge equivalente ao sistema*

$$\partial_t \mathbf{v} - i\partial_x^2 \mathbf{v} = i\mu |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} - \gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \partial_x \bar{\mathbf{v}} - i \left( \frac{\gamma^2}{2} + 2\gamma \right) |\mathbf{v}|^4 \mathbf{v}. \quad (4.3)$$

*Demonstração.* Basta substituir no sistema (4.1)  $a$  por  $-\gamma$ , isto é, tomar  $a = -\gamma$ .  $\square$

**Teorema 4.0.2.** *O sistema em (1) (ou seja, em (2)) com  $\lambda = 0$  tem as seguintes leis de conservação ao longo do fluxo:*

$$Q(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 \quad (4.4)$$

e

$$E(\mathbf{u}) = \|\partial_x \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + 2\gamma^2 \|\mathbf{u}\|_{L^6}^6 + 3\gamma \text{Im}(\partial_x \mathbf{u}, |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})_{L^2}. \quad (4.5)$$

*Demonstração.* Para provar (4.4), basta "multiplicar" (produto escalar) ambos os lados de (2) por  $\bar{\mathbf{u}}$ , integrar em relação a  $x$  e tomar a parte real, para obter  $\frac{d}{dt} Q(\mathbf{u}) = 0$ ; e isso significa que  $Q(\mathbf{u})$  é constante, e portanto, é conservada ao longo do fluxo.

Para provar (4.5), seguimos os cálculos feitos por Hayashi em [15] para a equação DNLS (4). Tomando  $a = -\gamma/2$  em (4.2) e (4.1), vemos que o sistema em (2) é gauge equivalente ao sistema

$$\partial_t \mathbf{v} - i\partial_x^2 \mathbf{v} = i\mu |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} + \gamma |\mathbf{v}|^2 \partial_x \mathbf{v} - i \left( \frac{\gamma^2}{2} + \gamma \right) |\mathbf{v}|^4 \mathbf{v}. \quad (4.6)$$

Multiplicando (4.6) por  $i\partial_t \bar{\mathbf{v}}$ , tomando a parte real e integrando em relação a  $x$ , obtemos:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \left\{ |\partial_x \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{v}|^4 + \frac{1}{3} \left( \frac{\gamma^2}{2} + \gamma \right) |\mathbf{v}|^6 + i \frac{\gamma}{4} |\mathbf{v}|^2 (\bar{\mathbf{v}} \cdot \partial_x \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \partial_x \bar{\mathbf{v}}) \right\} dx = 0. \quad (4.7)$$

Já que

$$\|\partial_x \mathbf{v}\|_{L_x^2}^2 = \|\partial_x \mathbf{u}\|_{L_x^2}^2 + \frac{\gamma^2}{4} \|\mathbf{u}\|_{L_x^6}^6 + i \frac{\gamma}{2} \int_{\mathbb{R}} |\mathbf{u}|^2 (\bar{\mathbf{u}} \cdot \partial_x \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \partial_x \bar{\mathbf{u}}) dx$$

e

$$i\frac{\gamma}{4} \int_{\mathbb{R}} |\mathbf{v}|^2 (\bar{\mathbf{v}} \cdot \partial_x \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \partial_x \bar{\mathbf{v}}) dx = \frac{\gamma^2}{4} \|\mathbf{u}\|_{L_x^6}^6 - \frac{\gamma}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{u}|^2 \text{Im}(\partial_x \mathbf{u} \bar{\mathbf{u}}) dx,$$

segue de (4.7) que

$$\frac{d}{dt} \left\{ \|\partial_x \mathbf{u}\|_{L_x^2}^2 + \frac{\gamma}{3} (2\gamma + 1) \|\mathbf{u}\|_{L_x^6}^6 - \frac{\mu}{2} \|\mathbf{u}\|_{L_x^4}^4 + \frac{3\gamma}{2} \text{Im}(\partial_x \mathbf{u}, |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u})_{L_x^2} \right\} dx = 0, \quad (4.8)$$

e (4.5) segue de (4.8). □

# Bibliografia

- [1] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation Spaces An Introduction*, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [2] H. Biagioni and F. Linares, Ill-posedness for the derivative Schrödinger and generalized Benjamin-Ono equation, *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2001), 3649–3659.
- [3] P. Brenner, V. Thomée and L. B. Wahlbin, *Besov Spaces and Applications to Difference Methods for Initial Value Problems*, Lecture Notes in Mathematics 434, Springer Verlag, New York, 1975.
- [4] M. A. Caradoso, Sobre a boa colocação da equação de Schrödinger não linear não local, Dissertação de Mestrado em Matemática, CCN - UFPI, 2013.
- [5] M. Christ and A. Kiselev, Maximal functions associated to filtrations, *J. Funct. Anal.* **179** (2001), 409–425.
- [6] M. Colin and M. Ohta, Stability of solitary waves for derivative nonlinear Schrödinger equation, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **23** (2006), 753–764.
- [7] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, AMS, Providence, 2001.
- [8] G. B. Folland, *Fourier analysis and its applications*, Wadsworth, California, 1992.
- [9] G. B. Folland, *Real analysis, Modern Techniques and their Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1994.
- [10] G. Friedlander and M. Joshi, *Introduction to the Theory of Distributions*, 2nd edition, Cambridge University press, 1998.

- 
- [11] A. Grünrock, Bi- and trilinear Schrödinger estimates in one space dimension with applications to cubic NLS and DNLS, *Int. Math. Res. Not.* **2005** (2005), 2525–2558.
- [12] A. Grünrock and S. Herr, Low regularity well-posedness of the derivative nonlinear Schrödinger equation with periodic initial data, *SIAM J. Math. Anal.* **39** (2008), 1890–1920.
- [13] B. Guo and Y. Wu, Orbital stability for the nonlinear derivative Schrödinger equation, *J. Differential Equations* **123** (1995), 55–35.
- [14] A. Hasegawa and Y. Kodama, Solitons in Optical Communications, Oxford, New York, 1995.
- [15] N. Hayashi, The initial value problem for the derivative nonlinear Schrödinger equation in the energy space, *Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications* **20** (1993), 823–833.
- [16] N. Hayashi and T. Ozawa, On the derivative nonlinear Schrödinger equation, *Physica D* **55** (1992), 14–36.
- [17] N. Hayashi and T. Ozawa, Finite energy solutions of nonlinear Schrödinger equations of derivative type, *SIAM J. Math. Anal.* **25** (1994), 1488–1503.
- [18] S. Herr, On the Cauchy problem for the derivative nonlinear Schrödinger equation with periodic boundary condition, *Int. Math. Res. Not.* **2006** (2006), 1–33.
- [19] M. Hisakado and M. Wadati, integrable-multicomponent hybrid nonlinear Schrödinger equations, *J. Phys. soc. Japan* **64**, 1995, 408–413.
- [20] M. Hisakado, T. Izuka and M. Wadati, Coupled hybrid nonlinear Schrödinger equations and optical solitons, *J. Phys. soc. Japan* **63**, 1994, 2887–2894.
- [21] Y. S. Kivshar and G. P. Agrawal, Optical Solitons from Fibers to Photonic Crystals, Academic Press, New York, 2003.
- [22] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations, *Indiana University Math. J.*, Vol. **40**, (1991), 33-69.



- 
- [23] C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega, Small solutions to nonlinear Schrödinger equations, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **10** (1993), 255-288.
- [24] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg-de Vries equation, *J. Amer. Math. Soc.*, Vol. **4** (1991), 323-347.
- [25] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, Well-Posedness and scattering Results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle, *Comm. Pure Appl. Math.* **46** (1993), 527-620.
- [26] R. Iorio and V. M. Iorio, *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, Cambridge studies in advanced mathematics 70, Cambridge University Press, 2001.
- [27] F. Linares and G. Ponce, *Introduction to Nonlinear Dispersive equations*, Springer, 2009.
- [28] A. I. Maimistov, Solitons in nonlinear optics, *Quantum Electron* **40**, 2010, 756-781.
- [29] S. V. Manakov, On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves, *Sov. Phys. - JETP* **38**, 248-253.
- [30] Y. Matsuno, The  $N$ -soliton solution for a two-component modified nonlinear Schrödinger equation, *Phys. Lett. A* **375**, 2011, 2090–3004.
- [31] Y. Matsuno, The bright  $N$ -soliton solution for a multi-component modified nonlinear Schrödinger equation, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **44** (2011), 1–18.
- [32] L. Molinet and F. Ribaud, Well-posedness results for the generalized Benjamin-Ono equation with arbitrary initial data, *Int. Math. Res. Notices* **70** (2004), 3757–3795.
- [33] L. Molinet and F. Ribaud, Well-posedness results for the generalized Benjamin-Ono equation with small initial data, *J. Math. Pures Appl.* **9** 83(2004) n. 7 277-311.
- [34] R. de Moura and D. Pilod, Local well-posedness for the nonlocal nonlinear Schrödinger equation below the energy space, *Advances in Differential Equations* **15** (2010), 925–952.

- 
- [35] T. Ozawa, On the nonlinear Schrödinger equations of derivative type, *Indiana Univ. Math. J.* **45** (1996), 137–163.
- [36] T. Ozawa and Y. Tsutsumi, Space-time estimates for null gauge forms and nonlinear Schrödinger equations, *Differential Integral Equations* **11** (1998), 201–222.
- [37] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Appl. Math. Sciences **44**, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [38] F. Planchon, *Notes de cours*, DEA, Université Paris 13, 2003/2004, <http://math.unice.fr/fab/2003/dea/cours-paris13.pdf>.
- [39] J. Peetre, *New Thoughts on Besov Spaces*. Mathematics Series I - Duke University, 1976.
- [40] D. Pilod, On the Cauchy Problem for the higher-order nonlinear dispersive equation, *J. Differential Equations* **245** (2008), 2055–2077.
- [41] G. N. Santos, Desigualdade de Calderón para comutadores e a regra de Leibniz fracional, Dissertação de Mestrado em Matemática, IM - UFRJ, 2010.
- [42] E. Stein and R. Shakarchi, *Fourier Analysis, an Introduction*, Princeton Lectures in Analysis I, Princeton university Press, 2003.
- [43] H. Takaoka, Global well-posedness for Schrödinger equations with derivative in a nonlinear term and data in low-order Sobolev spaces, *Electron. J. Differential Equations* **2001** (2001), 1–23.
- [44] H. Takaoka, Well-posedness for the one-dimensional nonlinear Schrödinger equation with the derivative nonlinearity, *Adv. Differential Equations* **4** (1999), 561—580.