Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Algumas aplicações de desigualdades ao Ensino Básico

Raimundo Alves de Brito

Teresina - 2016

Raimundo Alves de Brito

Dissertação de Mestrado:

Algumas aplicações de desigualdades ao Ensino Básico

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. João Xavier da Cruz Neto

Teresina - 2016

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

B862a Brito, Raimundo Alves de.
Algumas aplicações de desigualdades ao ensino básico / Raimundo Alves de Brito – Teresina, 2016.
41f.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2016.
Orientador: Prof. Dr. João Xavier da Cruz Neto.

1. Modelagem Matemática. 2. Função Convexa. I. Título

CDD 511.8

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

SBM

Dissertação de Mestrado submetida à Coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **Mestre em Matemática** intitulada: **Algumas Aplicações de Desigualdades ao Ensino Básico**, defendida por Raimundo Alves de Brito em 31/08/2016 e aprovada pela banca constituída pelos professores:

João Xavier da Cruz Neto

João Xavier da Cruz Neto
Presidente da Banca examinadora

Jurandir de Oliveira Lopes

Jurandir de Oliveira Lopes
Examinador

Pedro Antonio Soares Júnior

Pedro Antonio Soares Neto
Examinador

À minha esposa Rosiane e à minha filha Sofia, que nascerá no próximo mês de outubro, motivos de toda alegria na minha vida.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus, que é responsável por tudo de bom que acontece na minha vida. Agradeço também:

À minha esposa Rosiane pelo companheirismo incondicional e pela força dada em todas as minhas decisões.

Aos meus pais Francisco e Francisca, sem os quais eu não estaria escrevendo este texto.

Ao Prof. Xavier, pelas orientações e por me confiar este trabalho.

Aos professores Jurandir de Oliveira Lopes e Pedro Antonio Soares Júnior, por aceitarem participar da minha banca de avaliadores.

Às minhas chefes diretas, Aurilene e Kuerly, pelo apoio e compreensão, sem os quais seria muito difícil concluir este texto.

Aos professores do PROFMAT-UFPI pelo compromisso, seriedade e competência com que tratam a educação.

Ao grandes amigos da turma PROFMAT-2014, em especial aos colegas, Bruno, Delano, Gildeone, Gilson, Huerllen, Jerson, Pedro, Renné, Rubens e Samuel.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

"Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela, tampouco, a sociedade muda.".

Paulo Freire

Resumo

Neste trabalho estudamos o conceito, as principais propriedades e algumas aplicações das funções convexas de uma variável real, onde nosso principal objetivo foi mostrar sua utilização em problemas que envolvem desigualdades. Demonstramos as desigualdades de Jensen, de Bernoulli, Young, de Hölder, de Minkowski e estudamos as médias de potências, que culminam nas desigualdades entre médias. Finalmente, apresentamos uma seção com problemas que envolvem máximos ou mínimos, nos quais aplicamos as técnicas estudadas ao longo deste trabalho.

Palavras-chave: Função convexa, Desigualdades, Médias, Ensino Básico.

Abstract

In this work we study the concept, the main properties and some applications of convex functions of a real variable, where our main objective was to show its use in problems involving inequalities. We demonstrate the Jensen, Bernoulli, Young, Hölder, Minkowsk inequalities and studied the power means, culminating in the inequalities between means. Finally, we present a section with problems involving maxima or minima, in which we apply the techniques studied throughout this work.

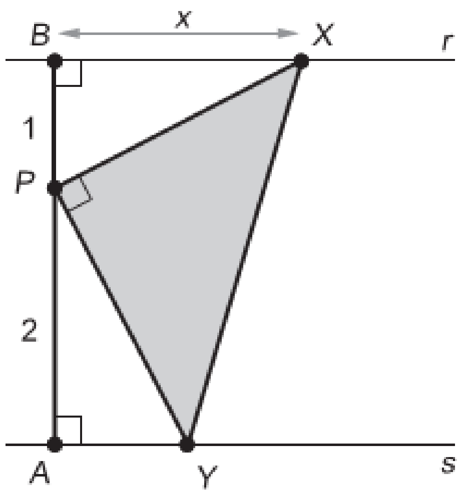
Key-words: Convex functions, Inequalities, Means, Basic Education.

Sumário

Introdução

A escolha por fazer este trabalho sobre desigualdades talvez tenha se dado, de modo inconsciente, em 2012, quando vimos uma das soluções apresentadas pela banca examinadora, para o item (d) do problema abaixo, que corresponde ao 4º problema da OBMEP 2012 - 2ª fase - Nível 3, vide [10].

"Na figura abaixo, as retas r e s são paralelas. O segmento AB é perpendicular a essas retas e o ponto P, nesse segmento, é tal que $AP = 2$ e $BP = 1$. O ponto X pertence à reta r e a medida do segmento BX é indicada por x. O ponto Y pertence à reta s e o triângulo XPY é retângulo em P. (a) Explique por que os triângulos PAY e XBP são semelhantes.



(b) Calcule a área do triângulo XPY em função de x.
(c) Para quais valores de x a área do triângulo XPY é igual a $\frac{5}{2}$?
(d) Determine o valor de x para o qual a área do triângulo XPY é mínima e calcule essa área."

O itens (a) e (b) saíram naturalmente de algumas aplicações de Geometria Plana e o item (c) se reduziu à resolução de uma simples equação do 2º grau. No item (b)

foi mostrado que a área do triângulo XPY é $A[XPY] = x + \frac{1}{x}$ e , finalmente, o item (d) pedia que fosse calculado o valor mínimo para essa área, ou seja, para $x + \frac{1}{x}$. Fizemos uma solução para este item usando funções quadráticas e depois ficou tudo certo. Acontece que quando saiu a pauta com o gabarito da prova, este item apresentou 5 resoluções diferentes para nosso espanto, pois havíamos pensado uma e com dificuldades. Em particular, a 5ª solução dizia exatamente o que se segue:

"5ª solução: a desigualdade aritmético-geométrica diz que se a e b são dois números positivos então sua média aritmética é maior que sua média geométrica, isto é, $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ (exercício). Fazendo $x = a$ e $\frac{1}{x} = b$, temos $\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geqslant \sqrt{x.\frac{1}{x}} = 1$, ou seja, $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ para qualquer valor de x; como para $x = 1$ temos $x + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1} = 2$, segue que esse é o valor mínimo da área."

No final de 2015, quando nos reunimos com o Professor Xavier, nosso orientador, para discutirmos sobre qual seria o conteúdo deste trabalho, ele apresentou (antes que se falasse disso!) algumas notas de aulas que poderiam nos ajudar e, qual não foi a surpresa, intitulava-se simplesmente "DESIGUALDADES". Destino? Não há como saber! Fato é que aceitamos na hora, pois teríamos a oportunidade de ampliar nosso estudo sobre funções convexas, suas principais propriedades e aplicar as desigualdades que delas derivam em problemas do Ensino Básico.

No capítulo 1 apresentamos o conceito de função convexa de uma variável real, e como primeira aplicação mostramos a Desigualdade de Jensen. Mostraremos as caracterizações de primeira e segunda ordem. Apresentamos, ainda, uma demonstração da Desigualdade de Bernoulli usando funções convexas.

No capítulo 2, estudamos algumas das desigualdades geradas por funções convexas, iniciando com a definição de Médias de Potências. Mostramos, em seguida, as famosas desigualdades entre médias, mais precisamente, $MH \leqslant MG \leqslant MA \leqslant MQ$. Em ato contínuo, mostramos as desigualdades de Young, Hölder e Minkowski. Buscamos, durante todo o texto, apresentar exemplos que ilustrem os conceitos abordados e que, além de tudo, ajudem a elucidar o que está sendo proposto da maneira mais didática que conseguimos.

No capítulo 3, apresentamos problemas do Ensino Básico, retirados da OBM, OBMEP, de livros didáticos usados em uma escola "comum", dos bancos de questões da OBMEP(não é a OBMEP, mas os cadernos que recebemos da comissão organizadora), do banco de provas e exames do PROFMAT, etc.

Finalmente, o capítulo 4 trata das considerações finais acerca deste trabalho.

As principais referências que utilizamos durante o desenvolvimento deste trabalho foram as notas de aulas não publicadas dos Professores João Xavier da Cruz Neto e Orizon Pereira Ferreira, intituladas “Desigualdades”, [2], e os livros “Análise Real, volume 1”do Professor Elon Lages Lima, [6] e “Tópicos de Matemática Elementar: Introdução à Análise”do Professor Antonio Caminha Muniz Neto, [8], mas além destas, consultamos diversas outras referências em busca de um certo enriquecimento, ou amadurecimento, nas ideias.

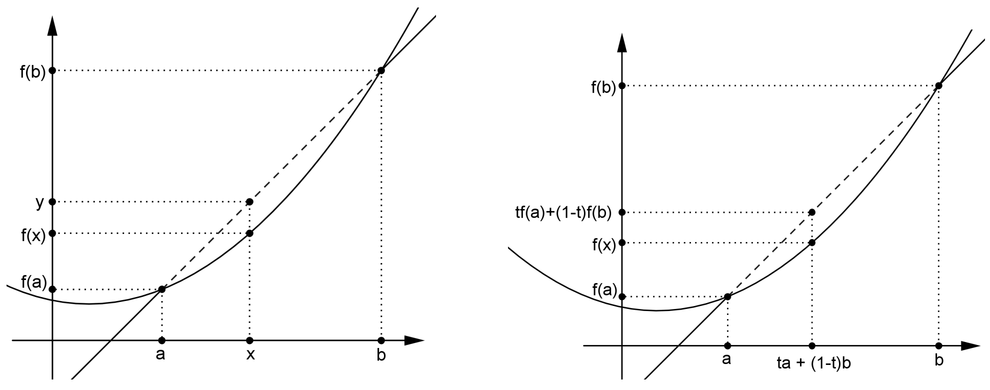
Capítulo 1

Funções convexas

Neste capítulo definiremos as funções convexas de uma variável real, estudaremos algumas de suas principais propriedades e caracterizações. Apresentaremos, também, as funções estritamente convexas, côncavas e estritamente côncavas. Como primeiras aplicações, traremos, além de variados exemplos, a desigualdade de Jensen e a de Bernoulli. As definições e resultados que aqui apresentamos podem ser encontradas em [2], [6] e [8].

1.1 Noções Preliminares

Definição 1. *Seja* $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo. Uma função é dita convexa quando, dados* a, x, $b \in I$*, com* $a \leqslant x \leqslant b$*, o ponto* $(x, f(x))$ *do gráfico de* f *está abaixo da reta que contém* $(a, f(a))$ *e* $(b, f(b))$*, conforme a figura 1.1.*



(a) (b)

Figura 1.1: Função convexa

Sabemos que o coeficiente angular da reta que contém $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é dado por $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ e, com isso, a equação da referida reta é tal que $y = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ ou que $y = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)+f(b)$. Assim podemos concluir que se o ponto $(x, f(x))$ pertence ao gráfico de f, para que a mesma seja convexa, deve ser verificado simplesmente que $f(x) \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ ou que $f(x) \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)+f(b)$, isto é:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \tag{1.1}$$

ou

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b} \geqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \tag{1.2}$$

ou seja,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(x)-f(b)}{x-b}. \tag{1.3}$$

Essas inequações significam que a secante que passa por $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$ tem inclinação menor que aquela que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ e esta, finalmente, tem inclinação menor que a que passa por $(x, f(x))$ e $(b, f(b))$.

Exemplo 1. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ é convexa. Com efeito, sendo a e b reais, com $a < b$ e $x \in (a, b]$, vamos usar a desigualdade* (1.1)*, que equivale a mostrar que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} - \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$. Ora,*

$$\begin{aligned}
\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \frac{b^2-a^2}{b-a} - \frac{x^2-a^2}{x-a} \\
&= \frac{(b-a)(b+a)}{b-a} - \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} \\
&= b+a-(x+a) \\
&= b-x \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Portanto a função quadrática $f(x) = x^2$ é convexa em $\mathbb{R}$.

Exemplo 2. *Mostre que a função $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ é convexa para $x \in (0, +\infty)$.*

Solução. Considere a, b nas condições do domínio de f e x entre a e b. Devemos mostrar, de acordo com (1.2), que $\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \geqslant 0$. Para tanto, veja que:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(b)}{x-b} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} &= \frac{x+\dfrac{1}{x}-\left(b+\dfrac{1}{b}\right)}{x-b} - \frac{b+\dfrac{1}{b}-\left(a+\dfrac{1}{a}\right)}{b-a} \\
&= \frac{(x-b)+\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{b}\right)}{x-b} - \frac{(b-a)+\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right)}{b-a} \\
&= \frac{x-b+\dfrac{b-x}{bx}}{x-b} - \frac{b-a+\dfrac{a-b}{ab}}{b-a} \\
&= \frac{\dfrac{(x-b)(bx-1)}{bx}}{x-b} - \frac{\dfrac{(b-a)(ab-1)}{ab}}{b-a} \\
&= \frac{bx-1}{bx} - \frac{ab-1}{ab} \\
&= \frac{a(bx-1)-x(ab-1)}{abx} \\
&= \frac{abx-a-abx+x}{abx} \\
&= \frac{x-a}{abx} \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Portanto a função estudada é convexa em $(0,+\infty)$. □

Ainda supondo $a < b$, e x em $[a,b]$, segue que $0 \leqslant \dfrac{b-x}{b-a} \leqslant 1$. Seja, diante disto, $t = \dfrac{b-x}{b-a} \Leftrightarrow (b-x) = t(b-a)$. Daí temos que cada ponto x do intervalo $[a,b]$ se escreve como $ta+(1-t)b$ e, com isso, $f(x) \leqslant [f(b)-f(a)]\dfrac{x-a}{b-a}+f(a)$ equivale (note, pois vamos precisar na desigualdade abaixo, que $x-a = at+(1-t)b-a = (1-t)(b-a)$) a:

$$\begin{aligned}
f(ta+(1-t)b) &\leqslant [f(b)-f(a)].\frac{x-a}{b-a}+f(a) \\
&= [f(b)-f(a)].\frac{(1-t)(b-a)}{b-a}+f(a) \\
&= (1-t)f(b)-(1-t)f(a)+f(a) \\
&= (1-t)f(b)+f(a)[1-(1-t)] \\
&= tf(a)+(1-t)f(b),
\end{aligned}$$

ou seja, uma função $f : I \to R$ é convexa se, e somente se, dados a, b em I e $t \in [0,1]$, tivermos (veja a figura 1.1b)

$$f(ta+(1-t)b) \leqslant tf(a)+(1-t)f(b). \tag{1.4}$$

Exemplo 3. *A função modular* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = |x|$ *é convexa. De fato, considerando* $t \in [0,1]$, a *e* b *reais, temos*

$$\begin{aligned} f(ta + (1-t)b) &= |ta + (1-t)b| \\ &\leqslant |ta| + |(1-t)b| \\ &= t|a| + (1-t)|b| \\ &= tf(a) + (1-t)f(b). \end{aligned}$$

O próximo exemplo estuda a convexidade da função real $f(x) = e^x$, mas para isso precisamos apresentar o seguinte lema:

Lema 1. *Mostre que* $e^x \geqslant 1 + x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = e^x - x - 1$. Sabendo que $g'(x) = e^x - 1$, temos que o único ponto crítico de g ocorre em $x = 0$. Note também que $g'(x) \leqslant 0$ em $(-\infty, 0]$ e que $g'(x) \geqslant 0$ para $x \in [0, \infty)$, donde concluímos que g é monótona não crescente em $(-\infty, 0]$ e monótona não decrescente em $[0, \infty)$. Como $g(0) = 0$, temos que $g(x) \geqslant 0$ para todo x real, ou seja, sempre temos $e^x \geqslant 1 + x$, concluindo a demonstração do lema. □

Exemplo 4. *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = e^x$ *é convexa.*

Solução. Devemos mostrar que

$$e^{tx+(1-t)y} \leqslant te^x + (1-t)e^y, \tag{1.5}$$

com x e y reais e $t \in [0,1]$. Note, antes disso, que $e^{-tx-(1-t)y} > 0$ e que multiplicando a desigualdade (1.5) por $e^{-tx-(1-t)y}$ temos

$$\begin{aligned} 1 = e^{tx+(1-t)y}.e^{-tx-(1-t)y} &\leqslant te^x.e^{-tx-(1-t)y} + (1-t)e^y.e^{-tx-(1-t)y} \\ &= te^{x-tx-(1-t)y} + (1-t)e^{y-tx-y+ty} \\ &= te^{x(1-t)-(1-t)y} + (1-t)e^{-t(x-y)} \\ &= te^{(1-t)(x-y)} + (1-t)e^{-t(x-y)}. \end{aligned}$$

Ou seja, para provar que f é convexa basta mostrar que

$$te^{(1-t)(x-y)} + (1-t)e^{-t(x-y)} \geqslant 1. \tag{1.6}$$

Ora, de acordo com o lema 1, temos que $e^x \geqslant 1+x$ para todo x real. Assim, desenvolvendo o lado esquerdo de (1.6), temos:

$$\begin{aligned} te^{(1-t)(x-y)} + (1-t)e^{-t(x-y)} &\geqslant t(1+(1-t)(x-y)) + (1-t)(1-t(x-y)) \\ &= t(1+x-y-tx+ty) + (1-t)(1-tx+ty) \\ &= t+tx-ty-t^2x+t^2y+1-tx+ty-t+t^2x-t^2y \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto a função exponencial $f(x) = e^x$ é convexa em $\mathbb{R}$. □

Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é concava quando $-f$ é convexa. Aliás, vamos formalizar uma definição para funções côncavas.

Definição 2. *Seja* $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo. Uma função é dita côncava quando, dados* a*,* x*,* $b \in I$*, com* $a \leqslant x \leqslant b$*, o ponto* $(x, f(x))$ *do gráfico de* f *está acima da reta que contém* $(a, f(a))$ *e* $(b, f(b))$*, conforme a figura 1.2.*

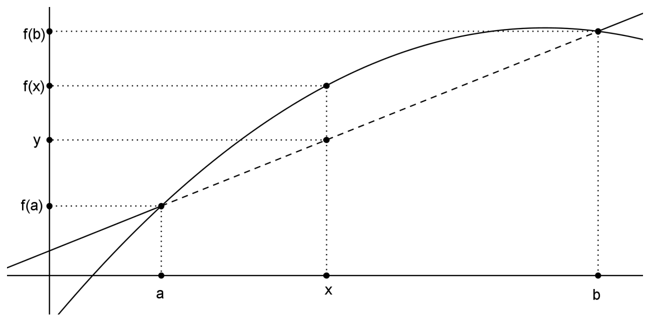


Figura 1.2: Função côncava

Analogamente ao que foi exposto para funções convexas, temos que uma função é côncava se, e somente se, dados a, b em I com $a < b$ e x entre a e b, tivermos

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geqslant \frac{f(x)-f(b)}{x-b}. \tag{1.7}$$

Da mesma forma que foi apresentado para funções convexas, uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é côncava se, e somente se, dados a, b em I e $t \in [0, 1]$, tivermos

$$f(ta + (1-t)b) \geqslant tf(a) + (1-t)f(b). \tag{1.8}$$

Exemplo 5. *Já vimos no exemplo 2 que a função* $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ *é tal que*

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{x-a}{abx}.$$

Então, sendo a, $b \in (-\infty, 0)$ *com* $a < b$ *e* x *entre* a *e* b, *temos a desigualdade* $\frac{f(x)-f(b)}{x-b} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant 0$, *ou seja, a função é côncava em* $(-\infty, 0)$.

Exemplo 6. *Mostre que a função logarítmica* $f(x) = \ln x$ *definida para* $x \in (0, +\infty)$ *é côncava.*

Solução. Devemos mostrar que $e^{t\ln x+(1-t)\ln y} \leqslant e^{\ln(tx+(1-t)y)}$. Iniciemos lembrando que, pelo exemplo 4, a função exponencial $f(x) = e^x$ é convexa em $\mathbb{R}$. Assim, para x e y reais e $t \in [0, 1]$, segue que

$$
\begin{aligned}
e^{t\ln x+(1-t)\ln y} &\leqslant te^{\ln x} + (1-t)e^{\ln y} \\
&= tx + (1-t)y \\
&= e^{\ln(tx+(1-t)y)},
\end{aligned}
$$

isto é, $e^{t\ln x+(1-t)\ln y} \leqslant e^{\ln(tx+(1-t)y)}$ e, finalmente, $\ln(tx+(1-t)y) \geqslant t\ln x+(1-t)\ln y$, como queríamos. □

Quando valem as desigualdades estritas em (1.3) e em (1.7) dizemos que as funções são, respectivamente, estritamente convexa e estritamente côncava.

1.2 A desigualdade de Jensen

Proposição 1 (Desigualdade de Jensen). *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função convexa. Sejam os números* $x_1, x_2, ..., x_k$ *em* I *e os números* $t_1, t_2, ..., t_k$ *em* $\mathbb{R}$ *satisfazendo*

$$t_i \geqslant 0 \ \textit{para} \ i = 1, 2, ..., k \ \textit{e} \ \sum_{i=1}^{k} t_i = 1,$$

vale a desigualdade

$$f(\sum_{i=1}^{k} t_i x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{k} t_i f(x_i). \tag{1.9}$$

Se f *é estritamente convexa, então a igualdade em* (1.9) *é assumida somente se os números* x_1, x_2, ..., x_n *forem todos iguais.*

Demonstração. Se $k = 2$, a relação é trivial quando $t_1 = 0$ ou $t_2 = 0$. Caso contrário, tome $t_1 = t$ e $t_2 = (1-t)$, daí a convexidade de f resulta em $f(t_1x+t_2y) \leqslant t_1f(x)+t_2f(y)$. Agora, suponha por indução, que a relação seja verdadeira para $k-1$ e considere os pontos

$x_1, ..., x_k$ em I e os números positivos $t_1, ..., t_k$, tais que $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$. Se $t_k = 0$ ou $t_k = 1$, então não há nada a provar. Caso contrário, temos

$$t_1x_1 + ... + t_kx_k = (t_1 + ... + t_{k-1}) \left(\frac{t_1}{t_1 + ... + t_{k-1}} x_1 + ... + \frac{t_{k-1}}{t_1 + ... + t_{k-1}} x_{k-1} \right) + t_kx_k. \tag{1.10}$$

Para facilitar os cálculos, fixando $\overline{t_1} = \frac{t_1}{t_1+..+t_{k-1}}, ..., \overline{t_{k-1}} = \frac{t_{k-1}}{t_1+..+t_{k-1}}$ (Note que $\overline{t_1} + ... + \overline{t_{k-1}} = 1$), segue que (1.10) pode se reescrita como

$$t_1x_1 + ... + t_kx_k = (t_1 + ... + t_{k-1}) \left(\overline{t_1}x_1 + ... + \overline{t_{k-1}}x_{k-1} \right) + t_kx_k. \tag{1.11}$$

Como $(t_1 + ... + t_{k-1}) + t_k = 1$ e f é convexa, temos pelo caso $k = 2$ e por (1.11) que

$$f(t_1x_1 + ... + t_kx_k) \leqslant (t_1 + ... + t_{k-1})f(\overline{t_1}x_1 + ... + \overline{t_{k-1}}x_{k-1}) + t_kf(x_k). \tag{1.12}$$

Além disso, usando a hipótese de indução, o fato de que $\overline{t_1} + ... + \overline{t_{k-1}} = 1$ e a convexidade de f, temos de (1.12) que

$$\begin{aligned} f(t_1x_1 + ... + t_kx_k) &\leqslant (t_1 + ... + t_{k-1})f(\overline{t_1}x_1 + ... + \overline{t_{k-1}}x_{k-1}) + t_kf(x_k) \\ &\leqslant (t_1 + ... + t_{k-1})(\overline{t_1}f(x_1) + ... + \overline{t_{k-1}}f(_{k-1})) + t_kf(x_k) \\ &= t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + ... + t_nf(x_n). \end{aligned}$$

Portanto a desigualdade é válida para todo k. □

Como uma primeira aplicação da Desigualdade de Jensen, vamos mostrar a famosa desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.

Exemplo 7. *Mostre que, para quaisquer números reais positivos* x_1, x_2, ..., x_n *vale a desigualdade* $\sqrt[n]{x_1x_2...x_n} \leqslant \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$.

Solução. Já vimos que a função $f(x) = e^x$ é convexa. Considere, agora, $t_1 = ... = t_n = \dfrac{1}{n}$ e os números reais positivos x_1, x_2, ..., x_n. Sejam $a_1 = \ln x_1$, $a_2 = \ln x_2$, ..., $a_n = \ln x_n$. Daí, temos $x_1 = e^{a_1}$, $x_2 = e^{a_2}$, ..., $x_n = e^{a_n}$ e:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{x_1x_2...x_n} &= x_1^{\frac{1}{n}}.x_2^{\frac{1}{n}}.....x_n^{\frac{1}{n}} \\ &= e^{\frac{a_1}{n}}.e^{\frac{a_2}{n}}.....e^{\frac{a_n}{n}} \\ &= e^{\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n}+...+\frac{a_n}{n}} \\ &= f(t_1a_1 + t_2a_2 + ... + t_na_n). \end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Jensen na última igualdade, temos o que segue:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} &= f(t_1 a_1 + t_2 a_2 + ... + t_n a_n) \\
&\leqslant t_1 f(a_1) + t_2 f(a_2) + ... + t_n f(a_n) \\
&= \frac{1}{n} e^{\ln x_1} + \frac{1}{n} e^{\ln x_2} + ... + \frac{1}{n} e^{\ln x_n} \\
&= \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.
\end{aligned}$$

□

Notemos que a Desigualdade de Jensen pode ser reescrita, nos casos em que vale a relação $t_1 = ... = t_k = \frac{1}{n}$, como $f\left(\frac{x_1 + ... + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + ... + f(x_n)}{n}$.

A soma de funções convexas gera uma função também convexa. De fato, sendo $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ duas funções convexas, e $f + g : I \to \mathbb{R}$ definida em x como $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, considere a, b em I e $t \in [0,1]$. Desse modo, aplicando $f + g$ a $ta + (1-t)b$, temos

$$\begin{aligned}
(f+g)(ta + (1-t)b) &= f(ta + (1-t)b) + g(ta + (1-t)b) \\
&\leqslant tf(a) + (1-t)f(b) + tg(a) + (1-t)g(b) \\
&= t(f(a) + g(a)) + (1-t)(f(b) + g(b)) \\
&= t(f+g)(a) + (1-t)(f+g)(b).
\end{aligned}$$

A desigualdade acima significa que $f + g$ representa uma função convexa.

Seguindo com nossa proposta, vamos mostrar que a composição de duas funções convexas resulta em uma função convexa, mas para isso é necessário que a função "externa"seja não decrescente. De um modo mais formal, temos o seguinte: considere $f : I \to J$ e $g : J \to \mathbb{R}$ funções convexas, com g não decrescente, então $g \circ f : I \to \mathbb{R}$, definida em x como $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ é convexa. Realmente, sejam $f : I \to J$ e $g : J \to \mathbb{R}$ funções convexas, com g não decrescente. Então se considerarmos a, b em I e $t \in [0,1]$, temos que

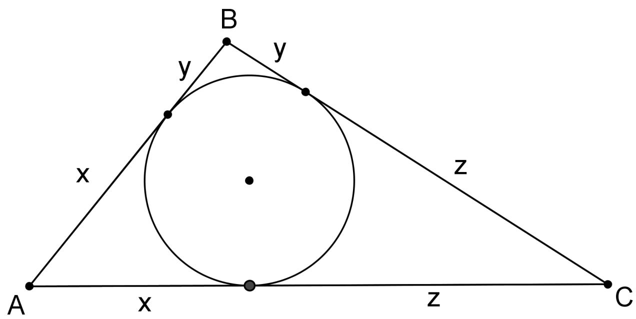
$$\begin{aligned}
(g \circ f)(ta + (1-t)b) &= g[f(ta + (1-t)b)] \\
&\leqslant g[tf(a) + (1-t)f(b)] \\
&\leqslant t.g[f(a)] + (1-t)g[f(b)] \\
&= t(g \circ f)(a) + (1-t)(g \circ f)(b).
\end{aligned}$$

Note que a hipótese de que g seja não decrescente se faz necessária na passagem da linha 1 para a linha 2, na demonstração acima. O produto de duas funções convexas f e g definido em x como $(f.g)(x) = f(x).g(x)$ pode não gerar uma função convexa. Com efeito, as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^2 - 1$ são convexas em $\mathbb{R}$ e, ao contrário, $(fg)(x) = x^4 - x^2$ não é convexa em $\mathbb{R}$.

Exemplo 8 (POTI [11]). *(IMO) Se* a, b *e* c *são os comprimentos dos lados de um triângulo, prove que*

$$abc \geqslant (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b). \tag{1.13}$$

Solução. Sendo, na figura abaixo, um triângulo ABC de lados $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$ e sua circunferência inscrita, temos as relações $a = y + z$, $b = x + z$ e $c = x + y$ e, imediatamente, $2x + 2y + 2z = a + b + c \Leftrightarrow x + y + z = \dfrac{a+b+c}{2} = p$, onde p é o semiperímetro do triângulo ABC.



Com isso, temos que

$$x = x + y + z - (y + z) = p - (y + z) = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2},$$

$$y = x + y + z - (x + z) = p - (x + z) = \frac{a+b+c}{2} - b = \frac{a+c-b}{2},$$

$$z = x + y + z - (x + y) = p - (x + y) = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2}.$$

Como a, b e c são lados de um triângulo, pela desigualdade triangular, segue que vale $a + b - c > 0$, $b + c - a > 0$ e $c + a - b > 0$. Então sendo $u = a + b - c, v = b + c - a$ e $w = c + a - b$, segue que

$$a = y + z = \frac{a+c-b}{2} + \frac{a+b-c}{2} = \frac{w+u}{2},$$

$$b = x + z = \frac{b + c - a}{2} + \frac{a + b - c}{2} = \frac{v + u}{2},$$

$$c = x + y = \frac{b + c - a}{2} + \frac{a + c - b}{2} = \frac{v + w}{2}.$$

Assim a desigualdade (1.13) passa a ser escrita da seguinte forma:

$$\left(\frac{w + u}{2}\right)\left(\frac{v + u}{2}\right)\left(\frac{v + w}{2}\right) \geqslant u.v.w. \tag{1.14}$$

Com a mudança de variáveis acima, para resolver o problema basta mostrar a desigualdade (1.14), que é uma aplicação direta da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica já que, sendo u, v e w positivos, temos $\frac{w + u}{2} \geqslant \sqrt{w.u}$, $\frac{v + u}{2} \geqslant \sqrt{v.u}$ e $\frac{v + w}{2} \geqslant \sqrt{v.w}$, donde

$$\begin{aligned}\left(\frac{w + u}{2}\right)\left(\frac{v + u}{2}\right)\left(\frac{v + w}{2}\right) &\geqslant \sqrt{w.u}.\sqrt{v.u}.\sqrt{v.w}\\ &= \sqrt{u^2.v^2.w^2}\\ &= u.v.w.\end{aligned}$$

Isso termina nossa resolução. □

1.3 Caracterização de Primeira Ordem

Proposição 2. *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável no intervalo aberto* I. *Então* f *é convexa se, e somente se,*

$$f'(a)(x - a) + f(a) \leqslant f(x), \tag{1.15}$$

para todo $x, a \in I$.

Demonstração. Suponha inicialmente, f convexa. Então, sendo $a, x \in I$, temos por hipótese que $f\big(tx+(1-t)a\big) \leqslant tf(x)+(1-t)f(a) \Rightarrow f\big(tx+a-ta\big) \leqslant tf(x)+f(a)-tf(a) \Rightarrow f\big(t(x - a) + a\big) - f(a) \leqslant t(f(x) - f(a))$, ou seja,

$$\frac{f\big(a + t(x - a)\big) - f(a)}{t} \leqslant f(x) - f(a), \tag{1.16}$$

para todo $t \in [0,1]$. Fazendo $t(x-a) = h$ temos $t = \dfrac{h}{x-a}$ e a expressão (1.16) passa a ser escrita como $\dfrac{f\big(a+h\big) - f(a)}{\dfrac{h}{x-a}} \leqslant f(x) - f(a)$, isto é,

$$\frac{f\big(a+h\big) - f(a)}{h}(x-a) \leqslant f(x) - f(a). \tag{1.17}$$

Como $t(x-a) = h$, temos que $h \to 0$ equivale a $t \to 0$. Assim, passando o limite com $h \to 0$ na desigualdade (1.17) temos $f'(a)(x-a)+f(a) \leqslant f(x)$, que é o resultado desejado. Reciprocamente, dados $x, y \in I$ e $t \in [0,1]$ tome $a = tx + (1-t)y$. Então da equação (1.15) segue-se que

$$f'\big(tx + (1-t)y\big)(x - tx - (1-t)y) + f\big(tx + (1-t)y\big) \leqslant f(x) \Leftrightarrow$$

$$f'\big(tx + (1-t)y\big)(1-t)(x-y) + f\big(tx + (1-t)y\big) \leqslant f(x) \tag{1.18}$$

e

$$f'\big(tx + (1-t)y\big)(y - tx - (1-ty)) + f\big(tx + (1-t)y\big) \leqslant f(y) \Leftrightarrow$$

$$-f'\big(tx + (1-t)y\big)t(x-y) + f\big(tx + (1-t)y\big) \leqslant f(y). \tag{1.19}$$

Assim, multiplicando (1.18) por t e (1.19) por $(1-t)$, temos,

$$tf'\big(tx + (1-t)y\big)(1-t)(x-y) + tf\big(tx + (1-t)y\big) \leqslant tf(x)$$

e

$$-(1-t)f'\big(tx + (1-t)y\big)t(x-y) + (1-t)f\big(tx + (1-t)y\big) \leqslant (1-t)f(y).$$

Finalmente, somando essas duas últimas desigualdades, obtemos

$$f\big(tx + (1-t)y\big) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y).$$

Isto conclui a prova da proposição. □

Perceba que $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ é a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. Portanto, esta caracterização evidencia que uma função convexa, diferenciável, está acima de todas as suas tangentes em I. Além disso, também concluímos que todo ponto crítico em uma função diferenciável convexa é ponto de mínimo global. De fato, sendo $(a, f(a))$ um ponto crítico, temos $f'(a) = 0$, donde, pela proposição anterior segue que $f(x) \geqslant f(a)$, para todo $x \in I$. Esta foi a demonstração do resultado que enunciaremos logo abaixo:

Corolário 1. *Se* $f : I \to \mathbb{R}$ *é uma função diferenciável e convexa, então todo ponto crítico de* f *é um ponto de mínimo global.*

Proposição 3. *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável no intervalo aberto* I*. Então* f *é convexa se, e somente se,*

$$\big(f'(x) - f'(y)\big)(x - y) \geqslant 0, \tag{1.20}$$

para todo $x, y \in I$.

Demonstração. Suponha, inicialmente, f convexa e considere $x, y \in I$. Daí, temos pela proposição 2 que

$$f'(x)(y - x) + f(x) \leqslant f(y) \quad \text{e} \quad f'(y)(x - y) + f(y) \leqslant f(x), \tag{1.21}$$

para todo x, y em I. Então, segue-se de (1.21) que

$$f(x) + f'(x)(y - x) \leqslant f(y) \leqslant f(x) + f'(y)(y - x),$$

Isto implica que $\big(f'(x) - f'(y)\big)(x - y) \geqslant 0$, para todo x, y em I e prova a primeira parte. Reciprocamente, é claro que o resultado é válido para $x = y$. Agora, dados $x, y \in I$ com $x \neq y$ e $t \in [0, 1]$, temos pelo Teorema do Valor Médio que, para todo $a \in (x, y)$, existem c' e c'' com $c' \in (x, a)$ e $c'' \in (a, y)$ tais que

$$f(a) - f(x) = f'(c')(a - x) \quad \text{e} \quad f(y) - f(a) = f'(c'')(y - a).$$

Multiplicando a primeira igualdade por $-t$, a segunda por $1 - t$, temos o que segue:

$$-tf(a) + tf(x) = -tf'(c')(a - x) \quad \text{e} \quad (1 - t)f(y) - f(a) + tf(a) = (1 - t)f'(c'')(y - a).$$

Agora, somando as duas últimas igualdade, temos

$$tf(x) + (1 - t)f(y) - f(a) = f'(c'')(1 - t)(y - a) - tf'(c')(a - x), \tag{1.22}$$

donde, tomando $a = tx + (1 - t)y$, temos

$$y - a = y - tx - (1 - t)y = y - tx - y + ty = t(y - x)$$

e

$$a - x = tx + (1 - t)y - x = tx + y - ty - x = (1 - t)(y - x),$$

e a igualdade (1.22) passa a ser escrita como

$$tf(x) + (1-t)f(y) - f\big(tx + (1-t)y\big) = f'(c'')(1-t)t(y-x) - f'(c')t(1-t)(y-x).$$

Finalmente, note que existe $k > 0$ tal que $c'' - c' = k(y - x)$, ou seja, $y - x = \dfrac{c'' - c'}{k}$. Assim, a igualdade anterior se reduz a

$$tf(x) + (1-t)f(y) - f\big(tx + (1-t)y\big) = \frac{(1-t)t}{k}\big(f'(c'') - f'(c')\big)(c'' - c').$$

Como $k > 0$ e $t \in [0,1]$ segue imediatamente da igualdade anterior e da desigualdade (1.20) que $tf(x) + (1-t)f(y) - f\big(tx + (1-t)y\big) \geqslant 0$, ou seja,

$$f\big(tx + (1-t)y\big) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y),$$

concluindo a demonstração. □

A desigualdade (1.20) significa que, sendo f convexa, sua derivada f' é monótona não-decrescente em I.

1.4 Caracterização de Segunda Ordem

Proposição 4. *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *duas vezes derivável no intervalo aberto* I*. Então* f *é convexa em* I *se, somente se*

$$f''(x) \geqslant 0, \tag{1.23}$$

para todo $x \in I$*. Agora, se a desigualdade* (1.23) *é estrita então* f *é estritamente convexa.*

Demonstração. Se f é convexa, segue-se da Proposição 3 que $\big(f'(x) - f'(y)\big)(x - y) \geqslant 0$, com x, $y \in I$ e $x \neq y$. Como $(x - y)^2 > 0$, segue que $\dfrac{\big(f'(x) - f'(y)\big)(x - y)}{(x-y)^2} \geqslant 0$, que equivale a

$$\frac{f'(x) - f'(y)}{(x - y)} \geqslant 0, \tag{1.24}$$

pois $x - y \neq 0$. Fazendo $x \to y$ na equação (1.24) obtemos, pois f' é derivável, $f''(x) \geqslant 0$, e isto prova a primeira parte. Reciprocamente, é claro que o resultado é válido para $x = y$. Agora, dados $x, y \in I$ com $x \neq y$, temos pelo Teorema do Valor Médio que existe a entre x e y tal que $f'(y) - f'(x) = f''(a)(y - x)$, isto é

$$(f'(y) - f'(x))(y - x) = f''(a)(y - x)^2. \tag{1.25}$$

Como $f''(a) \geqslant 0$ e $(y-x)^2 > 0$ segue-se que

$$\big(f'(y) - f'(x)\big)(y-x) \geqslant 0,$$

para todo $x, y \in I$. Portanto, pela Proposição 3 temos que f é convexa. □

Exemplo 9. *Além de convexa, como já vimos, a função* $f(x) = e^x$ *é estritamente convexa para todo* x *real pois* $f''(x) = e^x > 0$ *para todo* x *real.*

Exemplo 10. *Além de côncava, como já vimos, a função* $f(x) = \ln x$ *é estritamente côncava para* $x \in (0, +\infty)$ *pois* $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ *nesse intervalo.*

Exemplo 11 (POTI [11])**.** *Sejam* a, b *e* c *e* $(0,1)$ *com* $a+b+c=1$. *Calcule o valor mínimo para*

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^{10} + \left(b+\frac{1}{b}\right)^{10} + \left(c+\frac{1}{c}\right)^{10}. \tag{1.26}$$

Solução. Inicialmente, note que a função $g(x) = x^{10}$ apresenta $g'(x) = 10x^9 \geqslant 0$ para todo $x \in (0, +\infty)$ e, no mesmo intervalo, temos que $g''(x) = 90x^8 \geqslant 0$, o que nos faz concluir que g é não-decrescente e convexa em $(0, +\infty)$. Além disso, pelo exemplo (2) temos que $h(x) = x + \dfrac{1}{x}$ é convexa para $x \in (0, +\infty)$. Logo $f(x) = (g \circ h)(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{10}$ é convexa para $x \in (0, +\infty)$. Agora, usando a desigualdade de Jensen, temos

$$f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3},$$

ou seja, $f(a)+f(b)+f(c) \geqslant 3f\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)$. Mas

$$f(a)+f(b)+f(c) = \left(a+\frac{1}{a}\right)^{10} + \left(b+\frac{1}{b}\right)^{10} + \left(c+\frac{1}{c}\right)^{10}$$

e $3f\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right) = 3f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 3\left(\dfrac{1}{3}+3\right)^{10} = \dfrac{10^{10}}{3^9}$, isto é,

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^{10} + \left(b+\frac{1}{b}\right)^{10} + \left(c+\frac{1}{c}\right)^{10} \geqslant \frac{10^{10}}{3^9},$$

e o mínimo, $\dfrac{10^{10}}{3^9}$, ocorre quando $a = b = c = \dfrac{1}{3}$, resolvendo o problema. □

Exemplo 12 (FONTELES [5])**.** *(Seleção para IMO 99) Para reais positivos satisfazendo* $a+b+c = abc$, *mostre que*

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leqslant \frac{3}{2} \tag{1.27}$$

e determine quando a igualdade ocorre.

A escolha deste exemplo se deu, basicamente, pela elegante solução que encontramos no artigo "Trigonometria e Desigualdades em Problemas de Olimpíadas", do Professor Rafael Tajra Fonteles. Solução que apresentaremos, com algumas adaptações, a partir de agora.

Solução. Como sabemos, a função $f : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \tan x$ é bijetiva e, com isso, temos que qualquer número real y pode ser escrito como $\tan x$ para algum $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. De modo mais particular, façamos $a = \tan x$, $b = \tan y$ e $c = \tan z$, com x, y e z em $(0, \pi/2)$, já que a, b e c são positivos. Essa transformação é útil porque

$$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}}} = \sqrt{\cos^2} = \cos x.$$

Com a transformação acima, $a + b + c = abc$ passa a ser escrita como

$$\tan x + \tan y + \tan z = \tan x . \tan y . \tan z, \tag{1.28}$$

e, portanto, o que devemos provar agora, de (1.27), é que $\cos x + \cos y + \cos z \leqslant \frac{3}{2}$. Para isso, considere dois fatos relevantes:

(a) A função $f(x) = \cos x$ é estritamente côncava no intervalo $(0, \pi/2)$. De fato, temos $f'(x) = -\cos x$ e $f''(x) = -\sin x < 0$ para todo x em $(0, \pi/2)$

(b) Se vale (1.28), então $\tan(x + y + z) = 0$. Com efeito, veja que

$$\begin{aligned}\tan(x+y+z) = \tan[(x+y)+z] &= \frac{\tan(x+y)+\tan z}{1-\tan(x+y).\tan z}\\ &= \frac{\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x.\tan y}+\tan z}{1-\tan(x+y).\tan z}\\ &= \frac{\dfrac{\tan x+\tan y+\tan z-\tan x.\tan y.\tan z}{1-\tan x.\tan y}}{1-\tan(x+y).\tan z} = 0.\end{aligned}$$

Portanto, como x, y e $z \in (0, \pi/2)$ e $\tan(x + y + z) = 0$, segue que $x + y + x = \pi$. Assim, por (a), (b) e pela desigualdade de Jensem, temos

$$\frac{\cos x+\cos y+\cos z}{3} \leqslant \cos\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = \cos(\pi/3) = \frac{1}{2}.$$

Ou seja, $\cos x + \cos y + \cos z \leqslant \frac{3}{2}$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $x = y = z = \pi/3$ e, finalmente, se $a = b = c = \tan(\pi/3) = \sqrt{3}$, como queríamos. □

Exemplo 13. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, definida por* $f(x) = (1+x)^n$*, onde* $n \in \mathbb{N}$*. As derivadas de primeira e segunda ordem de* f *são dadas, respectivamente por*

$$f'(x) = n(x+1)^{n-1} \quad e \quad f''(x) = n(n-1)(x+1)^{n-2}. \tag{1.29}$$

Temos dois casos a considerar:

i) *Se* n *é par, então* $f''(x) \geqslant 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*. Então pela Proposição 4 segue-se que* f *é convexa em* $\mathbb{R}$*.*

ii) *Se* n *é impar, então temos dois casos:*

a) Se $x \in [-1, \infty)$*, então* $f''(x) \geqslant 0$ *e neste caso, pela Proposição 4 segue-se que* f *é convexa em* $[-1, \infty)$*.*

b) Se $x \in (-\infty, -1]$*, então* $f''(x) \leqslant 0$*, donde pela Proposição 4 segue-se que* $-f$ *é convexa em* $(-\infty, -1]$*.*

Exemplo 14. *Dados* s *e* t *números reais não nulos com* $s < t$*. Seja* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = x^{t/s}$*. A derivada segunda de* f *é dada*

$$f''(x) = (t/s)(t/s - 1)x^{t/s-2}.$$

Vamos dividir a análise deste exemplo em três casos:

i) *Se* $t > s > 0$*, então* $f''(x) > 0$ *para todo* $x \in (0, \infty)$*. Então pela Proposição 4 segue-se que* f *é estritamente convexa em* $\mathbb{R}$*.*

ii) *Se* $s < t < 0$*, então* $-f''(x) > 0$ *para todo* $x \in (0, \infty)$*. Então pela Proposição 4 segue-se que* $-f$ *é estritamente convexa em* $(0, \infty)$*.*

iii) *Se* $s < 0 < t$*, então* $f''(x) > 0$ *para todo* $x \in (0, \infty)$*. Então pela Proposição 4 segue-se que* f *é estritamente convexa em* $(0, \infty)$*.*

1.5 A Desigualdade de Bernoulli

Nesta seção vamos dar uma demonstração da desigualdade de Bernoulli usando o conceito de função convexa. A técnica que vamos utilizar tem a vantagem, sobre a prova usual por indução, de possibilitar a obtenção de uma melhor estimativa do intervalo onde a desigualdade é válida.

Proposição 5. *Dado* $n \in \mathbb{N}$ *com* $n > 1$. *Se* $x \in [-1 - \sqrt[n-1]{n}, \infty)$, *então vale a desigualdade*

$$(x+1)^n \geqslant 1 + nx. \tag{1.30}$$

Demonstração. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (1+x)^n$, cuja convexidade foi estudada no exemplo 13. Vamos dividir a prova de (1.30) em duas partes:

i) A desigualdade é válida para $x \in \mathbb{R}$ e n par. De fato, pelo Exemplo 13 temos que f é convexa em $\mathbb{R}$, então pela Proposição 2 vale a desiguladade

$$f(x) \geqslant f(0) + f'(0)(x-0), \tag{1.31}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f(0) = 1$ e $f'(0) = n$, a desigualdade acima passa a ser escrita como $(x+1)^n \geqslant 1 + nx$, concluindo a parte **i)**.

ii) Vamos dividir o caso de n ser ímpar em dois casos, como segue:

a) A desigualadade é válida para $x \in [-1, \infty)$. De fato, Pelo Exemplo 13 temos que f é convexa em $[-1, \infty)$. Então pela Proposição 2, vale a desigualdade (1.31), ou seja, $(x+1)^n \geqslant 1 + nx$, concluindo o caso a).

b) A desigualadade é válida para $x \in [-1 - \sqrt[n-1]{n}, -1]$. Com efeito, se $x \in (-\infty, -1]$ então pelo Exemplo 13 temos que $-f$ é convexa. Daí, pela Proposição 2 vale a desiguladade

$$-f(x) \geqslant -f(-2) - f'(-2)(x+2).$$

Sendo $f(x) = (1+x)^n$, temos $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$, $f(-2) = -1$ e $f'(-2) = n$, já que $n-1$ é par. Com isso, a desigualdade acima é equivalente a

$$-(x+1)^n \geqslant 1 - n(x+2), \tag{1.32}$$

para todo $x \in (-\infty, -1]$. Assim, somando $2(x+1)^n$ aos dois lados da desigualdade (1.32), temos $2(x+1)^n - (x+1)^n \geqslant 2(x+1)^n + 1 - n(x+2)$, cujo desenvolvimento segue logo abaixo

$$\begin{aligned}
(x+1)^n &\geqslant 2(x+1)^n + 1 - n(x+2) \\
&= (1+nx) - (1+nx) + 2(x+1)^n + 1 - n(x+2) \qquad (1.33) \\
&= (1+nx) - nx + 2(x+1)^n - nx - 2n \\
&= (1+nx) + 2(x+1)^n - 2n(x+1) \\
&= 1 + nx + 2(x+1)\big((x+1)^{n-1} - n\big).
\end{aligned}$$

Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = (x+1)^{n-1} - n$, com n ímpar maior que 1. Note que $h\big(-1 - \sqrt[n-1]{n}\big) = (-1 - \sqrt[n-1]{n} + 1)^{n-1} - n = (-\sqrt[n-1]{n})^{n-1} - n = n - n = 0$. A derivada $h'(x) = (n-1)(x+1)^{n-2}$ é tal que $h'(x) \leqslant 0$ para $x \in (-\infty, -1]$ e isto implica que h é não-crescente nesse intervalo. Assim, para $x \in [-1 - \sqrt[n-1]{n}, -1]$, temos $h(x) \leqslant h\big(-1 - \sqrt[n-1]{n}\big) = 0$. Então, pela definição de h, temos que $(x+1)^{n-1} - n \leqslant 0$ para $x \in [-1 - \sqrt[n-1]{n}, -1]$.

Pelo que foi apresentado acima, temos que para $x \in [-1 - \sqrt[n-1]{n}, -1]$, vale $x + 1 \leqslant 0$ e $(x+1)^{n-1} - n \leqslant 0$, de onde segue que

$$(x+1)\big((x+1)^{n-1} - n\big) \geqslant 0. \tag{1.34}$$

Portanto, temos das desigualdades (1.33) e (1.34) que

$$\begin{aligned}(x+1)^n &\geqslant 1 + nx + 2(x+1)\big((x+1)^{n-1} - n\big)\\ &\geqslant 1 + nx,\end{aligned}$$

para $x \in [-1 - \sqrt[n-1]{n}, -1]$ e n natural ímpar maior que 1.

Assim, de **i)** e **ii)**, segue-se que a desiguladade $(x+1)^n \geqslant 1 + nx$ é válida no intervalo $[-1 - \sqrt[n-1]{n}, \infty)$ para todo número natural $n > 1$. □

Corolário 2 (Desigualdade de Bernoulli)**.** *Se* $n \in \mathbb{N}$ *e* $x \in [-2, \infty)$ *então vale a desigualdade*

$$(x+1)^n \geqslant 1 + nx. \tag{1.35}$$

Demonstração. O resultado acima é válido para $n = 1$. Agora para $n > 1$ note que $[-2, \infty) \subset [-1 - \sqrt[n-1]{n}, \infty)$. □

Proposição 6. *Se* $a < -2$ *então existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *e* $x_0 \in (a, -2)$ *tal que*

$$(x_0 + 1)^{n_0} < 1 + n_0 x_0, \tag{1.36}$$

isto é, o intervalo $[-2, \infty)$ *é o maior intervalo onde a desiguladade* (1.35) *é válida para todo* n.

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ tal que $a < -2 - \epsilon < -2$. Mostremos que, para $x_0 = -2 - \epsilon$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ ímpar satisfazendo a desigualdade (1.36) ou equivalentemente que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ ímpar satisfazendo

$$-(1+\epsilon)^{n_0} < 1 - (2+\epsilon)n_0. \tag{1.37}$$

Com efeito, suponha que não existe um tal n_0 que satisfaça a desiguladade (1.37). Então, para todo $n \in \mathbb{N}$ ímpar temos que

$$-(1+\epsilon)^n \geqslant 1-(2+\epsilon)n,$$

e esta desigualdade implica que

$$(2+\epsilon)n \geqslant (1+\epsilon)^n. \tag{1.38}$$

Asssim, pela desigualdade (1.38) e pelas propriedades da função logaritmo, obtemos que

$$\frac{\ln(2+\epsilon)}{n}+\frac{\ln n}{n} \geqslant \ln(1+\epsilon), \tag{1.39}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ ímpar. Mas como $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\ln(2+\epsilon)}{n}=0$ e $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$ temos que

$$\ln(1+\epsilon)=\lim_{n\to\infty}\ln(1+\epsilon) \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(2+\epsilon)}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0,$$

o que é um absurdo pois $\epsilon > 0$. Portanto, para $x_0=-2-\epsilon$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ ímpar satisfazendo a desigualdade (1.36) e $x_0 \in (a,-2)$. $\square$

Exemplo 15 (POTI [11])**.** *Dados* n *natural e* a *e* b *reais positivos, mostre que*

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}.$$

Solução. Dividindo ambos os membros da desigualdade do enunciado por 2^n, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\left(1+\frac{a}{b}\right)^n}{2^n}+\frac{\left(1+\frac{b}{a}\right)^n}{2^n} \geqslant \frac{2^{n+1}}{2^n} &\Leftrightarrow \left(\frac{1+\frac{a}{b}}{2}\right)^n+\left(\frac{1+\frac{b}{a}}{2}\right)^n \geqslant 2\\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2b}\right)^n+\left(\frac{1}{2}+\frac{b}{2a}\right)^n \geqslant 2\\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{a}{2b}\right)^n+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{b}{2a}\right)^n \geqslant 2\\
&\Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{2}+\frac{a}{2b}\right)^n+\left(1-\frac{1}{2}+\frac{b}{2a}\right)^n \geqslant 2.
\end{aligned}$$

Portanto, basta mostrar que

$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{a}{2b}\right)^n+\left(1-\frac{1}{2}+\frac{b}{2a}\right)^n \geqslant 2.$$

Ora, como $-\frac{1}{2}+\frac{a}{2b} > -1$ e $-\frac{1}{2}+\frac{b}{2a} > -1$, podemos aplicar a desigualdade de Bernoulli a cada parcela do primeiro membro da desigualdade acima, como segue

$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{a}{2b}\right)^n \geqslant 1+n\left(-\frac{1}{2}+\frac{a}{2b}\right) \tag{1.40}$$

e

$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{b}{2a}\right)^n \geqslant 1+n\left(-\frac{1}{2}+\frac{b}{2a}\right). \tag{1.41}$$

Agora, somando, membro a membro as desigualdades (1.40) e (1.41), temos

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{a}{2b}\right)^n + \left(1-\frac{1}{2}+\frac{b}{2a}\right)^n &\geqslant 1+n\left(-\frac{1}{2}+\frac{a}{2b}\right)+1+n\left(-\frac{1}{2}+\frac{b}{2a}\right)\\ &= 1-\frac{n}{2}+\frac{an}{2b}+1-\frac{n}{2}+\frac{bn}{2a}\\ &= 2+\frac{an}{2b}+\frac{bn}{2a}-n\\ &= 2+n\left(\frac{a}{2b}+\frac{b}{2a}-1\right),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{a}{2b}\right)^n + \left(1-\frac{1}{2}+\frac{b}{2a}\right)^n \geqslant 2+n\left(\frac{a}{2b}+\frac{b}{2a}-1\right). \tag{1.42}$$

Resta-nos mostrar na desigualdade (1.42) que $n\left(\frac{a}{2b}+\frac{b}{2a}-1\right) \geqslant 0$ e, para isso, basta aplicar a desigualdade $\mathsf{MA} \geqslant \mathsf{MG}$ para obter: $\frac{a}{2b}+\frac{b}{2a}-1 \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{2b}.\frac{b}{2a}}-1 = 0$, com igualdade ocorrendo se, e somente se, $\frac{a}{2b}=\frac{b}{2a}$, ou seja, $a=b$, terminando nossa resolução. $\square$

Capítulo 2

Algumas desigualdades clássicas

Neste capítulo definiremos a média das potências de ordem t dos números reais positivos $x_1, x_2, ..., x_n$ e ganharemos, como consequência, as conhecidas desigualdades entre as médias harmônica, geométrica, aritmética e quadrática. Em seguida apresentaremos as desigualdades de Young, Hölder e Minkowski. Os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em [1], [2] e [8].

2.1 Médias de Potências

Seja t um número real não nulo. A *média das potências de ordem* t dos números reais positivos $x_1, x_2, ..., x_n$ é definida por

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i {x_i}^t\right)^{\frac{1}{t}} = \left(\lambda_1 {x_1}^t + \lambda_2 {x_2}^t + \lambda_3 {x_3}^t ... + \lambda_n {x_n}^t\right)^{\frac{1}{t}}, \tag{2.1}$$

onde os pesos $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ são números reais não negativos com $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Podemos estender a definição de (2.1) em $t = 0$ como sendo igual a

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i} = x_1^{\lambda_1}.x_2^{\lambda_2}.x_3^{\lambda_3}.....x_n^{\lambda_n}, \tag{2.2}$$

pois

$$\lim_{t \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i {x_i}^t\right)^{\frac{1}{t}} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i}. \tag{2.3}$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i {x_i}^t\Big)^{\frac{1}{t}} &= \lim_{t\to 0}\Big(\lambda_1 {x_1}^t+\lambda_2 {x_2}^t+\lambda_3 {x_3}^t ...+\lambda_n {x_n}^t\Big)^{\frac{1}{t}} \\
&= \lim_{t\to 0} e^{\ln\Big(\lambda_1 {x_1}^t+\lambda_2 {x_2}^t+\lambda_3 {x_3}^t ...+\lambda_n {x_n}^t\Big)^{\frac{1}{t}}} \\
&= \lim_{t\to 0} e^{\dfrac{1}{t}\ln\Big(\lambda_1 {x_1}^t+\lambda_2 {x_2}^t+\lambda_3 {x_3}^t ...+\lambda_n {x_n}^t\Big)} \\
&= e^{lim_{t\to 0}\dfrac{\ln(\lambda_1 {x_1}^t+\lambda_2 {x_2}^t+\lambda_3 {x_3}^t ...+\lambda_n {x_n}^t)}{t}}.
\end{aligned}
$$

Sendo $t \to 0$, o limite acima cai numa indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$ pois (lembre-se que $\lambda_1 + ... + \lambda_n = 1$) $\lim_{t\to 0}\ln\Big(\lambda_1 {x_1}^t+\lambda_2 {x_2}^t+\lambda_3 {x_3}^t ...+\lambda_n {x_i}^t\Big) = 0$. Assim, aplicando a Regra de L'Hospital no limite acima, em relação a t, temos:

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i {x_i}^t\Big)^{\frac{1}{t}} &= e^{lim_{t\to 0}\dfrac{\lambda_1 x_1^t\ln x_1+...+\lambda_n x_n^t \ln x_n}{\lambda_1 {x_1}^t+\lambda_2 {x_2}^t+\lambda_3 {x_3}^t ...+\lambda_n {x_n}^t}} \\
&= e^{\dfrac{\lambda_1\ln x_1+...+\lambda_n\ln x_n}{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n}} \\
&= e^{\dfrac{\ln x_1^{\lambda_1}+\ln x_2^{\lambda_2}+...+\ln x_n^{\lambda_n}}{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n}} \\
&= e^{\ln(x_1^{\lambda_1}.x_2^{\lambda_2}.....x_n^{\lambda_n})} \\
&= x_1^{\lambda_1}.x_2^{\lambda_2}.....x_n^{\lambda_n} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i},
\end{aligned}
$$

conforme queríamos demonstrar.

Tomando os pesos $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 1/n$, então a expressão (2.2) passa a ser escrita como $x_1^{\frac{1}{n}}.x_2^{\frac{1}{n}}....x_n^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x_1.x_2.....x_x}$, que é a média geométrica, MG, dos números $x_1, x_2, ..., x_n$.

Tomando, ainda, $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 1/n$, em (2.1) destacamos os seguintes casos:

a) Para $t = -1$, temos:

$$\Big(\lambda_1 {x_1}^t+\lambda_2 {x_2}^t+\lambda_3 {x_3}^t ...+\lambda_n {x_i}^t\Big)^{\frac{1}{t}} = \Big(\frac{1}{n}\Big)^{-1}.\Big(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\Big)^{-1} = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}+...+\dfrac{1}{x_n}}$$

que é de média harmônica, MH, dos números reais positivos $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$.

b) Para $t = 1$, temos $\Big(\lambda_1 {x_1}^t+\lambda_2 {x_2}^t+\lambda_3 {x_3}^t ...+\lambda_n {x_n}^t\Big)^{\frac{1}{t}} = \Big(\dfrac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\Big)$, que é a média aritmética, MA, dos números positivos $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$.

c) Finalmente, para $t = 2$, segue que $\left(\lambda_1 {x_1}^t + \lambda_2 {x_2}^t + \lambda_3 {x_3}^t ... + \lambda_n {x_n}^t\right)^{\frac{1}{t}} = \sqrt{\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}$, que é a média quadrática, MQ, dos números positivos $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$.

Proposição 7. *Se* $s < t$ *então*

$$\left(\lambda_1 x_1^s + ... + \lambda_n x_n^s\right)^{\frac{1}{s}} \leqslant \left(\lambda_1 x_1^t + ... + \lambda_n x_n^t\right)^{\frac{1}{t}}. \tag{2.4}$$

A igualdade em (2.4) *é assumida se, e somente se,* $x_1 = ... = x_n$.

Demonstração. Dados s e t números reais não nulos. Seja $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^{t/s}$. Inicialmente vamos dividir a prova em dois casos:

i) Primeiros suponhamos que $0 < s < t$ ou $s < 0 < t$. Neste caso, pelo Exemplo 14, segue-se que f é estritamente convexa. Então aplicando a desigualdade de Jensen aos pontos $x_1^s, ..., x_n^s$ obtemos

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1^s + ... + \lambda_n x_n^s) &= \left(\lambda_1 x_1^s + ... + \lambda_n x_n^s\right)^{t/s} \\ &\leqslant \lambda_1 (x_1^s)^{t/s} + ... + \lambda_n (x_n^s)^{t/s} \\ &= \lambda_1 x_1^t + ... + \lambda_n x_n^t, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left(\lambda_1 x_1^s + ... + \lambda_n x_n^s\right)^{t/s} \leqslant \lambda_1 x_1^t + ... + \lambda_n x_n^t, \tag{2.5}$$

e a igualdade é assumida somente se $x_1 = ... = x_n$. Sendo $t > 0$ segue que a desigualdade (2.5) é equivalente a $\left[\left(\lambda_1 x_1^s + ... + \lambda_n x_n^s\right)^{t/s}\right]^{1/t} \leqslant [\lambda_1 x_1^t + ... + \lambda_n x_n^t]^{1/t}$, que é equivalente a (2.4), e a prova deste ítem esta concluida.

ii) Agora suponhamos que $s < t < 0$. Neste caso, pelo Exemplo (14), segue-se que $-f$ é estritamente convexa. Então aplicando a desigualdade de Jensen aos pontos $x_1^s, ..., x_n^s$ obtemos

$$\begin{aligned} -f(\lambda_1 x_1^s + ... + \lambda_n x_n^s) &= -\left(\lambda_1 x_1^s + ... + \lambda_n x_n^s\right)^{t/s} \\ &\leqslant -\lambda_1 (x_1^s)^{t/s} - ... - \lambda_n (x_n^s)^{t/s} \\ &= -\lambda_1 x_1^t - ... - \lambda_n x_n^t, \end{aligned}$$

ou seja,

$$-\left(\lambda_1 x_1^s + ... + \lambda_n x_n^s\right)^{t/s} \leqslant \lambda_1(-x_1^t) + ... + \lambda_n(-x_n^t), \tag{2.6}$$

e a igualdade é assumida somente se $x_1 = ... = x_n$. Multiplicando a desigualdade (2.6) por -1 e a elevando a $1/t$ com $t < 0$ a desigualdade é equivalente a (2.4), e este ítem está concluido.

Para finalizar, note que nos ítems i) e ii) foi provado que a desiguladade é válida para números reais não nulos $s < t$. Agora, tomando limite com $t \to 0$ no caso em que $s < 0$ e fazendo $s \to 0$ no caso em que $t > 0$, obtemos

$$\left(\lambda_1 x_1^s + ... + \lambda_n x_n^s\right)^{\frac{1}{s}} \leqslant x_1^{\lambda_1}.x_2^{\lambda_2}.x_3^{\lambda_3}.....x_n^{\lambda_n} \leqslant \left(\lambda_1 x_1^t + ... + \lambda_n x_n^t\right)^{\frac{1}{t}},$$

pois, como mostramos, $\lim_{t\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i {x_i}^t\right)^{\frac{1}{t}} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i}$

□

Note-se que a Proposição 7 em particular implica, já que $-1 < 0 < 1 < 2$, em

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \leqslant \frac{x_1 + ... + x_n}{n} \leqslant \sqrt[2]{\frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{n}}. \tag{2.7}$$

Isto é, $\mathsf{MH} \leqslant \mathsf{MG} \leqslant \mathsf{MA} \leqslant \mathsf{MQ}$ e a igualdade é assumida, em qualquer uma das desigualdades acima, somente se $x_1 = ... = x_n$.

Exemplo 16 (CVETKOVSKI [1]). *Sendo* a, b, c *e* d *números reais positivos obedecendo a relação* $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$, *mostre que*

$$a + b + c + d \geqslant ab + bc + cd + da. \tag{2.8}$$

Solução. Como $ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d)$, dividindo (2.8) por $(a + c)(b + d)$, devemos mostrar simplesmente que

$$\frac{1}{a + c} + \frac{1}{b + d} \geqslant 1. \tag{2.9}$$

De fato, usando a desigualdade $\mathsf{MA} \leqslant \mathsf{MQ}$, temos que $\dfrac{a + b + c + d}{4} \leqslant \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}}$, que equivale a $a + b + c + d \leqslant 4$. Além disso, da desigualdade $\mathsf{MA} \geqslant \mathsf{MH}$, segue que $\dfrac{\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+d}}{2} \geqslant \dfrac{2}{\frac{1}{\frac{1}{a+c}} + \frac{1}{\frac{1}{b+d}}} = \dfrac{2}{a + b + c + d}$, isto é

$$\frac{1}{a + c} + \frac{1}{b + d} \geqslant \frac{4}{a + b + c + d} \geqslant 4.\frac{1}{4} = 1.$$

□

Exemplo 17. *Sendo* $x \in \mathbb{R}$, *tem-se* $\sin x + \cos x \leqslant \sqrt{2}$. *De fato, note que a expressão* $\sin x + \cos x$ *tem seu valor máximo quando* $\sin x$ *e* $\cos x$ *são positivos. Assim, da relação* $MA \leqslant MQ$, *seque que* $\dfrac{\sin x + \cos x}{2} \leqslant \sqrt{\dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2}}$, *donde* $\sin x + \cos x \leqslant 2\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{2}$. *Além disso, o máximo para a expressão é* $\sqrt{2}$ *e ocorre quando* $\sin x = \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, *ou seja,* $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z$.

2.2 As Desigualdades de Young e de Hölder

Proposição 8. *(Desigualdade de Young) Dados* $p > 1$ *e* $q > 1$ *tais que* $1/p + 1/q = 1$ *temos*

$$xy \leqslant \frac{1}{p}|x|^p + \frac{1}{q}|y|^q \tag{2.10}$$

para todo número real x *e* y.

Demonstração. Já vimos que a função $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \ln x$ é estritamente côncava, daí segue que $f(x) = -\ln x$ é estritamente convexa no mesmo intervalo. Sejam $A = (x^p + y^q)^{1/p}$, $B = (x^p + y^q)^{1/q}$ e os números p, q, x e y, nas condições do enunciado. Então, usando a convexidade de f e as propriedades dos logaritmos, temos

$$\begin{aligned}
-\ln\left[\frac{1}{p}\left(\frac{|x|}{A}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|y|}{B}\right)^q\right] &\leqslant \frac{1}{p}\left[-\ln\left(\frac{|x|}{A}\right)^p\right] + \frac{1}{q}\left[-\ln\left(\frac{|y|}{B}\right)^q\right] \\
&= -\ln\left[\left(\frac{|x|}{A}\right)^p\right]^{1/p} - \ln\left[\left(\frac{|y|}{b}\right)^q\right]^{1/q} \\
&= -\ln\frac{|x|}{A} - \ln\frac{|y|}{B} \\
&= -\left(\ln\frac{|x|}{A} + \ln\frac{|y|}{B}\right) \\
&= -\left(\ln\frac{|x|.|y|}{A.B}\right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{|x||y|}{AB} \leqslant \frac{1}{p}\left(\frac{|x|}{A}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|y|}{B}\right)^q. \tag{2.11}$$

Note agora que $AB = (x^p + y^q)^{1/p}.(x^p + y^q)^{1/q} = (x^p + y^q)^{1/p+1/q} = x^p + y^q$ e que $A^p = B^q = x^p + y^q$. Com isso a desigualdade (2.11) passa a ser equivalente a $|x||y| \leqslant \frac{1}{p}|x|^p + \frac{1}{q}|y|^q$, que é o resultado que buscávamos, já que $xy \leqslant |x||y|$. □

Proposição 9. *(Desigualdade de Hölder) Sejam* $x_1, ..., x_n$ *e* $y_1, ..., y_n$ *duas sequências de* n *números reais. Se* p *e* q *são dois números reais tais que* $p > 1$, $q > 1$ *e* $1/p + 1/q = 1$, *então*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \Big)^{1/p} \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \Big)^{1/q} \tag{2.12}$$

e a igualdade é assumida se, e somente se, $\dfrac{x_1^p}{y_1^q} = \dfrac{x_2^p}{y_2^q} = ... = \dfrac{x_n^p}{y_n^q}$.

Demonstração. A demonstração dessa desigualdade segue basicamente os mesmos passos da demonstração de Desigualdade de Young: usaremos a função estritamente convexa $f(x) = -\ln(x)$ com $x \in (0, \infty)$ e, apenas, trocaremos A por $||x||_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \Big)^{1/p}$ e B por $||y||_q = \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \Big)^{1/q}$. Diante do exposto, usando esta notação, a convexidade de f, o fato de $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e as propriedades da função logaritmo temos, para cada i fixado, que

$$\begin{aligned}
-\ln\Big(\frac{1}{p} (\frac{|x_i|}{||x||_p})^p + \frac{1}{q} (\frac{|y_i|}{||y||_q})^q \Big) &\leqslant \frac{1}{p} \Big(-\ln(\frac{|x_i|}{||x||_p})^p \Big) + \frac{1}{q} \Big(-\ln(\frac{|y_i|}{||y||_q})^q \Big) \\
&= -\ln(\frac{|x_i|}{||x||_p}) - \ln(\frac{|y_i|}{||y||_q}) \\
&= -\Big[\ln(\frac{|x_i|}{||x||_p}) + \ln(\frac{|y_i|}{||y||_q}) \Big] \\
&= -\ln(\frac{|x_i|}{||x||_p} \frac{|y_i|}{||y||_q}).
\end{aligned}$$

E esta desigualdade implica que

$$\frac{|x_i|}{||x||_p} \frac{|y_i|}{||y||_q} \leqslant \frac{1}{p} (\frac{|x_i|}{||x||_p})^p + \frac{1}{q} (\frac{|y_i|}{||y||_q})^q. \tag{2.13}$$

Agora somando a desigualdade (2.13) para $i = 1, ..., n$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{||x||_p} \frac{1}{||y||_q} \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| &\leqslant \frac{1}{p} (\frac{1}{||x||_p})^p \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \frac{1}{q} (\frac{1}{||y||_q})^q \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \\
&= \frac{1}{p} (\frac{1}{||x||_p})^p (||x||_p)^p + \frac{1}{q} (\frac{1}{||y||_q})^q (||y||_q)^q \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Dessa última desidualdade segue, conforme queríamos demonstrar, que

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant ||x||_p ||y||_q = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \Big)^{1/p} \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \Big)^{1/q}.$$

□

Note que para o caso particular $p = q = 2$, na desigualdade de Hölder, temos $\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\Big)^{1/2}$, que é equivalente a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|\right)^2 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\Big). \tag{2.14}$$

A desigualdade (2.14) é muito usada e conhecida na literatura como desigualdade de Cauchy-Schwarz.

2.3 A Desigualdade de Minkowski

Proposição 10. *(Desigualdade de Minkowski) Sejam $x_1, ..., x_n$ e $y_1, ..., y_n$ duas sequências de n números reais. Se $p > 1$ então*

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\Big)^{1/p} \tag{2.15}$$

e a igualdade é assumida se, e somente se, $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2} = ... = \dfrac{x_n}{y_n}$.

Demonstração. Note inicialmente que $\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i||x_i + y_i|^{p-1}$, e que, usando a desigualdade triangular convencional, temos

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i||x_i + y_i|^{p-1}. \tag{2.16}$$

Como $p > 1$, considere q, também maior que 1, tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, ou seja, $q = \dfrac{p}{p-1} \Leftrightarrow p = q(p-1)$. A razão para tomarmos q dessa forma é que vamos usar a Desigualdade de Hölder em cada uma das parcelas do lado direito da desigualdade (2.16) da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |x_i||x_i + y_i|^{p-1} &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} (|x_i + y_i|^{p-1})^q\right)^{1/q} \qquad (2.17)\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1-1/p}, \end{aligned}$$

pois $\dfrac{1}{q} = \dfrac{p-1}{p} = 1 - \dfrac{1}{p}$. De maneira análoga ao que fizemos para obter (2.17), teremos

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i||x_i + y_i|^{p-1} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1-1/p}. \tag{2.18}$$

Agora, por (2.16), (2.17) e (2.18), segue que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{1-1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{1-1/p}\\ &=\left[\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{1/p}\right]\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{1-1/p}.\end{aligned}$$

Finalmente, dividindo a desigualdade acima por $\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{1-1/p}$ temos o resultado procurado. $\square$

Note que para o caso particular $p = q = 2$, na desigualdade de Minkowski, temos $\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\right)^{1/2}$, que é equivalente a

$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^2\right)} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2}. \tag{2.19}$$

A desigualdade (2.19) é conhecida como desigualdade triangular generalizada.

Exemplo 18 (CVETKOVSKI [1]). *(Desigualdade de Nesbitt) Sendo a, b e c números reais positivos, prove que*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2} \tag{2.20}$$

Solução. A ideia básica dessa resolução é usar a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Para isso note que que a desigualdade (2.20) equivale a

$$\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{a+c}+1+\frac{c}{a+b}+1 \geqslant \frac{3}{2}+3 \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+c}+\frac{a+b+c}{a+b} \geqslant \frac{9}{2},$$

ou seja

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right) \geqslant \frac{9}{2} \tag{2.21}$$

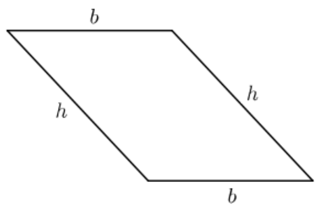
Desse modo, temos que mostrar a desigualdade (2.21). De fato, fazendo $x = \sqrt{b+c}$, $y = \sqrt{a+c}$ e $z = \sqrt{a+b}$, temos pela desigualdade de Cauchy-Schwarz que $(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{x^2}++\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right) \leqslant (1+1+1)^2 = 9$. Esta última desigualdade é equivalente à (2.21), concluindo nossa resolução. $\square$

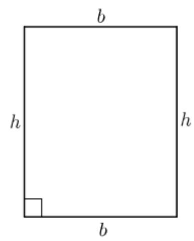
Capítulo 3

Aplicação em problemas do Ensino Básico

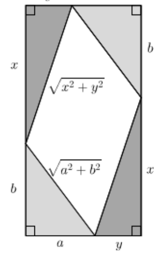
A seguir apresentamos uma série de problemas que podem ser aplicados a uma turma comum de Ensino Médio, por exemplo.

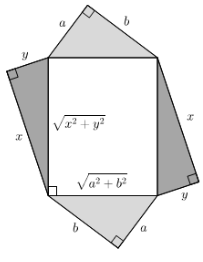
Problema 1 (FEITOSA [4]: Banco de questões OBMEP - 2016 nivel 3)**.** *(a) Um quadrilátero com lados opostos iguais é um paralelogramo. As figuras a seguir mostram dois paralelogramos com os mesmos lados, sendo o segundo um retângulo. Determine a maior área possível de um paralelogramo de lados* b *e* h*.*





(b) Considere as duas figuras a seguir, onde a, b, x *e* y *são números reais positivos. Mostre que a figura da direita possui maior área.*





(c) Usando o resultado do item anterior, prove a desigualdade de Cauchy-Schwarz para dois termos, ou seja $ax + by \leqslant \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{x^2+y^2}$.

Solução. (a) Considerando todos os paralelogramos com lados b e h, de base b, por exemplo, temos que a área máxima ocorre quando a altura do paralelogramo é h, into é, quando o paralelogramo é um retângulo. Portanto a área máxima de um paralelogramo de lados b e h é $b.h$ e ocorre quando o paralelogramo é um retângulo.

(b) Aqui temos uma aplicação do item anterior. Note que a figura da direita é igual à figura da esquerda trocando um paralelogramo de lados $\sqrt{a^2+b^2}$ e $\sqrt{x^2+y^2}$ por um retângulo de lados $\sqrt{a^2+b^2}$ e $\sqrt{x^2+y^2}$. Como a área do retângulo é maior que a área do paralelogramo, segue que a área da figura direita é maior.

(c) Usando o resultado e as figuras do item anterior, temos as quatro desigualdades equivalentes abaixo:

$$\begin{aligned} A[\text{Figura esquerda}] &\leqslant A[\text{Figura direita}] \\ (a+y)(b+x) &\leqslant 2\frac{ab}{2} + 2\frac{xy}{2} + \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{x^2+y^2} \\ ab + ax + by + xy &\leqslant ab + xy + \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{x^2+y^2} \\ ax + by &\leqslant \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Isso termina nossa resolução. □

Problema 2 (PROFMAT [7]: Exame nacional de acesso - 2012)**.** *Um fazendeiro deseja delimitar uma área retangular utilizando* 40m *de cerca e aproveitando um muro (de mais de* 40m*) que já está construído. Determine as dimensões do retângulo de maior área que o fazendeiro consegue delimitar.*

Solução. Sejam x e y as dimensões da superfície a ser cercada com, digamos, x perpendicular ao muro. Assim, temos que $2x + y = 40$. Veja que, pela desigualdade $MA \geqslant MG$, segue que $20 = \dfrac{2x+y}{2} \geqslant \sqrt{2xy}$, ou seja, $xy \leqslant 200$, $xy = 200$ se, e somente se, $2x = y$ e, portanto, $x = 10$ e $y = 20$. Concluindo, a maior área que o fazendeiro poderá cercar será um retângulo de $200m^2$ de área e dimensões $10m$ $20m$. □

Problema 3 (OBM [9]). *Prove as desigualdades:*

(a) $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$, *com* a, b *e* c *positivos;*

(b) $(1+a_1)(1+a_2).....(1+a_n) \geqslant 2^n$, *com* $a_1.a_2.....a_n = 1$ *e* $a_1 \geqslant 0$.

Solução. (a) Lembrando que $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, $\dfrac{b+c}{2} \geqslant \sqrt{bc}$ e $\dfrac{c+a}{2} \geqslant \sqrt{ca}$, temos $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8\sqrt{a.b.b.c.c.a} = 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$.

(b) Usando, ainda, a desigualdade $MA \geqslant MG$, temos que:

$$1 + a_1 \geqslant 2\sqrt{a_1},$$

$$1 + a_2 \geqslant 2\sqrt{a_2},$$

$$(...)$$

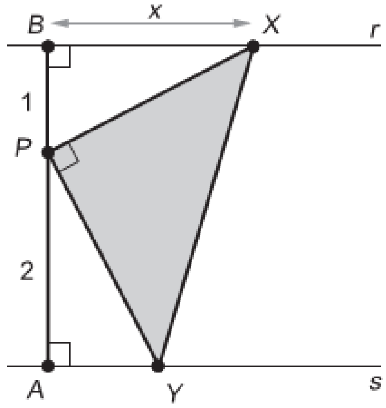
$$1 + a_n \geqslant 2\sqrt{a_n},$$

donde $(1+a_1)(1+a_2).....(1+a_n) \geqslant 2^n\sqrt{a_1.a_2.....a_n} = 2^n$. □

Problema 4 (OBM [9]). *Prove que* $(a+b)(a+c) \geqslant 2\sqrt{abc(a+b+c)}$ *para quaisquer números reais positivos* a, b *e* c.

Solução. Note que $(a+b)(a+c) = a^2+ac+ab+bc = a(a+b+c)+bc$. Agora, veja que $a(a+b+c)+bc \geqslant 2\sqrt{a(a+b+c).bc} = 2\sqrt{a^2bc+ab^2c+abc^2} = 2\sqrt{abc(a+b+c)}$, ou seja, $(a+b)(a+c) \geqslant 2\sqrt{abc(a+b+c)}$. □

Problema 5 (OBMEP [10]). *Na figura abaixo, as retas* r *e* s *são paralelas. O segmento* AB *é perpendicular a essas retas e o ponto* P, *nesse segmento, é tal que* $AP = 2$ *e* $BP = 1$. *O ponto* X *pertence à reta* r *e a medida do segmento* BX *é indicada por* x. *O ponto* Y *pertence à reta* s *e o triângulo* XPY *é retângulo em* P.



(a) Explique por que os triângulos PAY *e* XBP *são semelhantes.*

(b) Calcule a área do triângulo XPY *em função de* x*.*

(c) Para quais valores de x *a área do triângulo* XPY *é igual a* $\frac{5}{2}$*?*

(d) Determine o valor de x *para o qual a área do triângulo* XPY *é mínima e calcule essa área.*

Solução. (a) Note que os triângulos PAY e XBP são retângulos, respectivamente em A e B. Além disso, como $B\hat{X}P + B\hat{P}X = 90° = B\hat{P}X + A\hat{P}Y$, segue que $B\hat{X}P = A\hat{P}Y$ e, finalmente, que os triângulos PAY e XBP são semelhantes pelo caso AA.

(b) Como os triângulos PAY e XBP são semelhantes, temos que $\frac{\overline{AY}}{1} = \frac{2}{x}$. Assim, $A[XPY] = A[ABXY] - (A[XPB] + A[PAY])$, com $A[ABXY] = \frac{(x + \overline{AY}).3}{2} = \frac{\left(x + \frac{2}{x}\right).3}{2} = \frac{3x}{2} + \frac{3}{x}$, $A[XPB] = \frac{x}{2}$ e $A[PAY] = \frac{2.\overline{AY}}{2} = \overline{AY} = \frac{2}{x}$. Daí, temos que

$$\begin{aligned} A[XPY] &= \frac{3x}{2} + \frac{3}{x} - \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) \\ &= \left(\frac{3x}{2} - \frac{x}{2}\right) + \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x}\right) \\ &= x + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

(c) Basta resolver a equação $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$, que nos fornece duas raízes x_1 e x_2, com $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_2 = 2$.

(d) Este é o ítem que mais nos interessa, pois devemos minimizar a expressão $x + \frac{1}{x}$. Ora, usando o fato de que $MA \geqslant MG$, segue que $\frac{x + \frac{1}{x}}{x} \geqslant \sqrt{x.\frac{1}{x}} = 1$. Logo, $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente, $x = \frac{1}{x}$, isto é $x = 1$ e, portanto, a área mínima procurada é 2, concluindo nossa resolução □

Problema 6 (UFPI [12]: PSIU - 2º ano - 2007)**.** *O valor máximo que a expressão*

$$y = 2\cos x + \sin x$$

assume é:

(a) 1

(b) 2

(c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

(d) $\sqrt{5}$

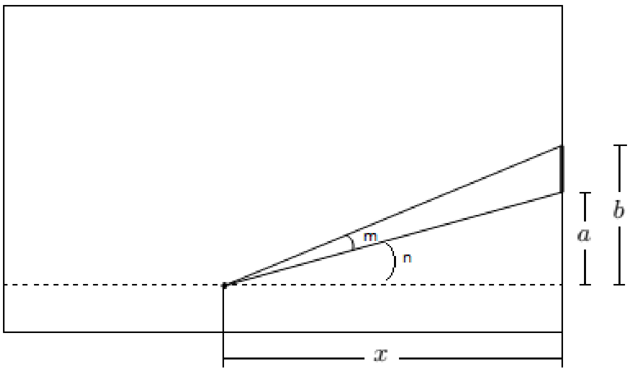
(e) 3

Solução. Note que a expressão acima tem seu valor máximo quando $\sin x$ e $\cos x$ são positivos. Assim, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$|2.\cos x + 1.\sin x| \leqslant \sqrt{2^2+1^2}.\sqrt{\sin^2+\cos^2} = \sqrt{5},$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, $\dfrac{2}{\cos x} = \dfrac{1}{\sin x}$, ou seja, se $\tan x = \dfrac{1}{2}$. Portanto o valor máximo de $y = 2\cos x + \sin x$ é $\sqrt{5}$, que corresponde à alternativa (d). □

Problema 7 (PROFMAT [7]:AV2-MA11-2011)**.** *Levando em conta que um ângulo é máximo num certo intervalo quando sua tangente é máxima, resolva o seguinte problema: Dentro de um campo de futebol, um jogador corre para a linha de fundo do time adversário ao longo de uma reta paralela à lateral do campo que cruza a linha de fundo fora do gol (ver figura). Os postes da meta distam* a *e* b*, com* $(a < b)$ *da reta percorrida por ele. Mostre que o jogador vê a meta sob ângulo máximo quando sua distância* x *ao fundo do campo é igual a* $\sqrt{ab}$

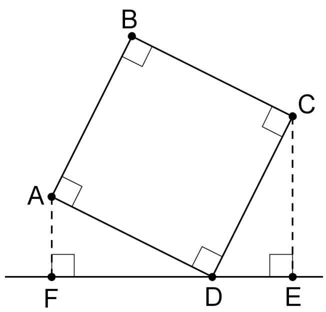


Solução. Em cada instante, o jogador vê o gol sob o ângulo $m = (m+n)-n$, onde $m+n$ e n são os ângulos entre sua trajetória e as retas que o ligam aos postes do gol, sendo que $\tan(m+n) = \dfrac{b}{x}$ e $\tan n = \dfrac{a}{x}$, temos:

$$\begin{aligned}\tan m &= \frac{\tan(m+n)-\tan n}{1+\tan m.\tan n}\\ &= \frac{\frac{b}{x}-\frac{a}{x}}{1+\frac{b}{x}.\frac{a}{x}}\\ &= \frac{\frac{b-a}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{ba}{x.x}}\end{aligned}$$

Ou seja, $\tan m = \dfrac{b-a}{x+\dfrac{ba}{x}}$. Note, agora, que $b-a$ é constante e, daí, segue que $\tan m$ será máxima quando o denominador for mínimo, isto é, precisamos encontrar o valor de x que minimiza a expressão $x+\dfrac{ba}{x}$. Como $MA \geqslant MG$, temos que $\dfrac{x+\dfrac{ba}{x}}{2} \geqslant \sqrt{x.\dfrac{ba}{x}} = \sqrt{ab}$, ou seja, o denominador da expressão acima é sempre maoir que ou igual a $2\sqrt{ab}$ e a igualdade ocorre somente se os termos da média forem iguais, isto é $x = \dfrac{ab}{x}$, isto é, $x = \sqrt{ab}$, concluindo nossa resolução. □

Problema 8 (FEITOSA [3]: Banco de questões OBMEP - 2015 nivel 3). *A figura a seguir mostra um quadrado de lado* 1 *com um vértice em comum com uma reta horizontal. Considerando todas as posições em que o quadrado "encosta"apenas um de seus vértices na reta, qual a maior área possível do pentágono* $ABCEF$ *onde* E *e* F *são as projeções ortogonais dos vértices* A *e* C *na reta horizontal?*



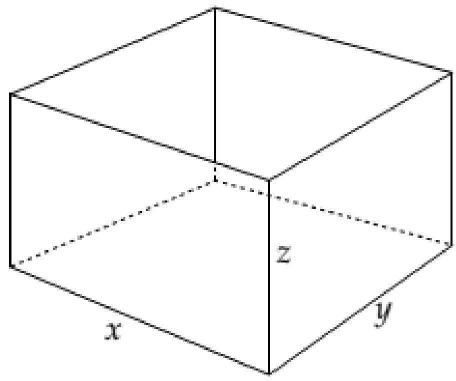
Solução. Note, pra início de conversa, que os triângulos ADF e DCE são congruentes pelo caso ALA pois $A\hat{D}F = 90° - C\hat{D}E = D\hat{C}E$, $\overline{AD} = \overline{CD}$ e $F\hat{A}D = 90° - A\hat{D}F = C\hat{D}E$. Além disso, como a área do pentágono é a soma da área do quadrado com a área dos dois triângulos, temos:

$$\begin{aligned} A[ABCEF] &= \frac{\overline{AF}.\overline{DF}}{2} + \frac{\overline{DE}.\overline{CE}}{2} + 1.1 \\ &= \frac{\overline{AF}.\overline{DF}}{2} + \frac{\overline{AF}.\overline{DF}}{2} + 1 \\ &= \overline{AF}.\overline{DF} + 1 \end{aligned}$$

Para encontrar a área máxima do pentágono $ABCEF$, devemos maximizar a expressão $\overline{AF}.\overline{DF} + 1$ e o faremos usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.

Para isso note que $\overline{\mathsf{AF}}.\overline{\mathsf{DF}}+1 \leqslant \dfrac{\overline{\mathsf{AF}}^2+\overline{\mathsf{DF}}^2}{2}+1=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$ (lembre-se que $\overline{\mathsf{AF}}^2+\overline{\mathsf{DF}}^2=\overline{\mathsf{AD}}^2=1$ porque o triângulo ADF é retângulo!). Além disso, a igualdade $\mathsf{A}[\mathsf{ABCEF}]=\dfrac{3}{2}$ ocorre se, e somente se, $\overline{\mathsf{AF}}=\overline{\mathsf{DF}}$. Portanto a maior área possível para o pentágono ABCEF é $\dfrac{3}{2}$. □

Problema 9 (PROFMAT [7]:AV2-MA12-2011)**.** *Uma caixa retangular sem tampa tem arestas medindo* x, y *e* z *(veja figura, onde as linhas tracejadas indicam segmentos de arestas obstruídos por alguma face).*



(a) Exprima a área e o volume da caixa em função de x, y *e* z.

(b) Use a desigualdade das médias para mostrar que, se o volume da caixa é igual a 32*, então sua área é maior ou igual a* 48.

(c) Determine as medidas das arestas da caixa de área mínima com volume igual a 32.

Solução. (a) A área da caixa é $A = xy + 2xz + 2yz$ e o volume, $V = xyz$.

(b) Usando a desigualdade das médias para os números xy, $2xz$ e $2yz$, segue que:

$$\frac{xy+2xz+2yz}{3} \geqslant \sqrt[3]{xy.2xz.2yz} = \sqrt[3]{4(xyz)^2} = \sqrt[3]{4.32^2} = 16$$

Já que xyz corresponde ao volume da caixa que vale, por hipótese, 32. Com isso, temos que $A = xy + 2xz + 2yz \geqslant 48$, como queríamos.

(c) Do item anterior, temos que a $A \geqslant 48$, com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $xy = 2xz = 2yz$, ou seja, $x = y = 2z$. Além disso, como o o volume da caixa é 32, segue que $4z^3 = 32 \Leftrightarrow z = 2$ e, finalmente, $x = y = 4$. Portanto as dimensões da caixa de área mínima são 2, 4 e 4. □

Capítulo 4

Considerações finais

Há uma certa convenção entre os professores de Matemática que os problemas que envolvem desigualdades, principalmente em olimpíadas, tornam-se mais difíceis que outro tipo de exercício porque não há, pelo menos em alguns casos, como saber qual técnica apresentar para tentar sua resolução. O que fizemos nesse trabalho foi apresentar algumas técnicas que podem - e são em muitos casos - ser úteis, e é por isso que esperamos ter cumprido com o que nos propomos. Por exemplo, o problema 6 do capítulo anterior foi proposto pela UFPI no PSIU de 2007 e nesse tempo eu era aluno do curso de Graduação na UFPI, em Teresina. Entre as aulas da Graduação eu tinha que ministrar algumas aulas particulares, e lembro que ouvi de muitos dos meus alunos que a dita questão deveria ser anulada porque o professor da escola lhe havia dito que sua resolução só seria possível com "uma tal de derivada".

Note-se que este é basicamente um texto para professores, então a "tal derivada"se faz extremamente necessária para uma sólida formação teórica no que diz respeito ao estudo das funções convexas e suas propriedades, de modo que o produto final, e aqui estou falando das belas desigualdades que apresentamos, é que deve ser aplicado a alunos de ensino básico nos moldes, por exemplo, dos muitos problemas apresentados no capítulo 4, que elucidam e ilustram, de forma didática, o conteúdo proposto.

Diante do exposto, espero que esta dissertação tenha cumprido com sua proposta inicial que era apresentar aplicações em desigualdades não triviais mas que poderiam ser aplicadas, sem restrição a alunos do Ensino Básico.

Referências Bibliográficas

[1] CVETKOVSKI, Zdravko . *Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems*. Skopje, Macedonia: Springer-Verlag, 2012.

[2] DA CRUZ NETO, João Xavier e Ferreira, Orizon Pereira. *Desigualdades*. Notas de aulas não publicadas.

[3] FEITOSA, Samuel Barbosa. et al *OBMEP - Banco de Questões 2015*. Rio de Janeiro: IMPA/OBMEP, 2015.

[4] FEITOSA, Samuel Barbosa. et al *OBMEP - Banco de Questões 2016*. Rio de Janeiro: IMPA/OBMEP, 2016.

[5] FONTELES, Rafael Tajra. *Trigonometria e desigualdades em problemas de olimpíadas*. Revista Eureka! nº 11, p. 24-33. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

[6] LIMA, Elon Lages. *Análise Real: Funcões de uma variável*. 12.ed. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. v.1.

[7] Mestrado Profissional em Rede - PROFMAT. Disponível em <www.profmat-sbm.org.br/>. Acesso em 02 de agosto de 2016.

[8] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar: Introdução à Análise*. 2.ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. v.3.

[9] Olimpíada Brasileira de Matemática - OBM. Disponível em <http://www.obm.org.br/>. Acesso em 02 de agosto de 2016.

[10] Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP. Disponível em <http://www.obmep.org.br/>. Acesso em 02 de agosto de 2016.

[11] POTI - Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo. Disponível em <http://poti.impa.br/>. Acesso em 02 de agosto de 2016.

[12] Universidade Federal do Piauí. Disponível em <www.ufpi.br/>. Acesso em 02 de agosto de 2016.