Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

Francisco Edinaldo Martins

O uso do Geogebra como ferramenta pedagógica para o ensino de cônicas: elipse, hipérbole e parábola

Teresina - 2023

PROFMAT

Francisco Edinaldo Martins

Dissertação de Mestrado:

O uso do Geogebra como ferramenta pedagógica para o ensino de cônicas: elipse, hipérbole e parábola

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - Profmat, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática na modalidade profissional.

Orientador:
Prof. Dr. Carlos Humberto Soares Júnior.

Teresina - 2023

Universidade Federal do Piauí - UFPI, Centro de Ciência da Natureza - CCN, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Mestrado Profissional em Matemática. Cep 64049-550 - Teresina, PI.

FICHA CATALOGRÁFICA

Universidade Federal do Piauí

Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBi/UFPI

Biblioteca Setorial do CCN

M379u Martins, Francisco Edinaldo.

O uso do Geogebra como ferramenta pedagógica para o ensino de cônicas: elipse, hipérbole e parábola / Francisco Edinaldo Martins. - 2023.

115 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Piauí, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2023.

“Orientador: Prof. Dr. Carlos Humberto Soares Júnior.”

1. Geometria analítica. 2. Software Geogrebra. 3. Recursos didáticos. I. Soares Júnior, Carlos Humberto. II. Titulo.

CDD 515

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes - CRB3/1461

Francisco Edinaldo Martins

O uso do Geogebra como ferramenta pedagógica para o ensino de cônicas: elipse, hipérbole e parábola

Dissertação submetida à banca examinadora abaixo discriminada em defesa pública e aprovada em 22/08/2023.

BANCA EXAMINADORA

Carlos Humberto Soares Júnior (Orientador)
Universidade Federal do Piauí

Antônio Kelson Vieira da Silva
Universidade Federal do Piauí

Liane Mendes Feitosa Soares
Universidade Federal do Piauí

Rodolfo Soares Teixeira
Secretaria da Educação do Estado do Ceará

Teresina - 2023

Dedico este trabalho às minhas filhas: Maria Eduarda, Lívia Esther e Ana Cecília.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pois sem a sua presença em minha vida, nada seria possível, guiando meus caminhos e concedendo saúde para seguir em frente, me fortalecendo e protegendo nos momentos difíceis e proporcionando-me momentos de alegrias.

Agradeço a minha esposa Maria Janete Rodrigues de Moura que sempre me motivou nos momentos mais difíceis, me compreendendo e dando forças para que eu pudesse seguir em frente.

Ao meu irmão Francisco Daniel Martins, pelo apoio durante as viagens que foram fundamentais para a realização dessa conquista.

Ao meu orientador, Professor Dr. Carlos Humberto Soares Junior pela atenção, compromisso, paciência e seriedade com que me guiou no período de elaboração e confecção desse trabalho, fazendo- me acreditar que era possível.

Agradeço ao apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamentos de Nível Superior - CAPES, que foi de suma importância para a realização desse trabalho.

"*Gigantes são os mestres nos ombros dos quais eu me elevei.*".

Isaac Newton.

Resumo

Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de mostrar a importância do *software* educacional Geogebra como suporte pedagógico para o ensino das Cônicas (elipse, hipérbole e parábola).

Introduzimos os principais conceitos, definições e propriedades representadas pelos lugares geométricos e equações que representam esse tema da geometria analítica em nível de ensino médio. Ressaltamos a importância da utilização do Método Fedathi, sempre focando o protagonismo do aluno no desenvolvimento dos temas propostos, tornando o ensino da matemática mais significativo, onde o aluno é motivado á construção do conhecimento matemático. Desse modo, desenvolvemos uma sequência didática pelo método tradicional de ensino, e outra com o uso do Geogebra.

Os resultados obtidos mostram que a turma na qual fizemos a intervenção com o uso do Geogebra absorveu melhor o conteúdo, quando comparados com a turma que desenvolvemos os conteúdos de forma tradicional de ensino. Concluímos que o uso do *software* Geogebra é um importante recurso tecnológico que pode auxiliar o professor no processo de ensino-aprendizagem, permitindo ao estudante investigar, explorar, conjecturar, despertando e estimulando o interesse pelo conhecimento matemático.

Palavras-chaves: Ensino, matemática, cônicas, Geogebra, sequências Fedathi.

Abstract

This work was developed with the objective of showing the importance of the educational software Geogebra as a pedagogical support for the teaching of Conics (ellipse, hyperbola and parabola).

We introduce the main concepts, definitions and properties represented by the loci and equations that represent this subject of analytic geometry at high school level. We emphasize the importance of using the Fedathi Method, always focusing on the student's protagonism in the development of the proposed themes, making the teaching of mathematics more meaningful, where the student is motivated to build mathematical knowledge. In this way, we developed a didactic sequence using the traditional teaching method, and another using Goegebra.

The results obtained show that the class in which we did the intervention using Geogebra absorbed the content better, when compared to the class that developed the content in a traditional way of teaching. We conclude that the use of *software* Geogebra is an important technological resource that can help the teacher in the teaching-learning process, allowing the student to investigate, explore, conjecture, awakening and stimulating interest in mathematical knowledge.

Key words: Education, mathematics, conics, geogebra, fedathi sequences

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Atualmente, o ensino da matemática em nível de escola pública deixa de abordar alguns temas do currículo que são de fundamental importância para uma formação consistente do discente a nível de ensino médio. É fato que o currículo é extenso, no entanto, se faz necessário que o professor encontre recursos didáticos que possam melhorar sua prática pedagógica e que resultem em efeitos positivos no processo de ensino-aprendizagem de seus educandos, sem a perda do rigor matemático e cumprindo o programa curricular estabelecido para cada série. Nesse sentido, se faz necessário o uso de novas ferramentas que possam possibilitar uma forma mais objetiva de fazer uma transposição didática dos conteúdos. Portanto, o professor de matemática deve ter domínio de recursos modernos que possam auxiliar em sala de aula para melhorar sua prática pedagógica, é fundamental o uso do computador e *softwares* educacionais voltados para o ensino da matemática. O novo cenário educacional tem passado por grandes mudanças, pois a escola não é mais um ambiente apenas de transmissão de conhecimento, o professor agora tem a função de mediador entre o conhecimento e o aluno. As novas tecnologias voltadas para o ensino da matemática podem desempenhar um papel importante nessa mediação, contribuindo para que as aulas de matemática se tornem mais dinâmicas e atrativas e consequentemente seja um ambiente favorável para a construção de conhecimento matemático, levando os alunos a analisar, criticar e tirar conclusões de informações analisadas com os auxílios das ferramentas tecnológicas.

> O impacto da tecnologia na vida de cada indivíduo vai exigir competências que vão além do simples lidar com as máquinas. A velocidade do surgimento e renovação de saberes e de formas de fazer em todas as atividades humanas tornarão rapidamente ultrapassadas a maior parte das competências adquiridas por uma pessoa ao início de sua vida profissional. O trabalho ganha então uma nova exigência, que é a de aprender continuamente em um processo não mais solitário. O indivíduo, imerso em um mar de informações, se liga a outras pessoas, que, juntas, complementar-se-ão em um exercício coletivo de memória, imaginação, percepção, raciocínios e competências para a produção e transmissão de conhecimentos. Esse impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento (PCN's 2000,p.41).

Portanto, os professores de matemática precisam se adaptar as novas tecnologias direcionadas para o ensino da matemática. Considerando o potencial que essas ferramentas têm para apoiar o ensino. É fundamental que se tenha uma proposta metodológica de ensino objetiva, de tal forma que saiba o que quer fazer, como pensa o ensino e o que é realmente a aprendizagem, daí então, fazer o uso da tecnologia como aliada para fortalecer essa proposta. Destacamos então a importância do uso do *software* Geogebra, porque permite que o estudante veja de forma bem mais clara do que quando o professor está apenas expondo e escrevendo os conceitos no quadro. Umas das questões fortes desse *software* é o fato da movimentação, fazer mudança de valores nas variáveis e rapidamente observar essas transformações. Isso faz com que o aluno tenha uma melhor percepção e consiga refletir melhor sobre o conceito que está sendo estudado.

Os PCN's de Matemática para o Ensino Fundamental (BRASIL,1998, p.124) afirmam a importância de se trabalhar geometria usando os *softwares* dinâmicos em sala de aula.

> As atividades que envolvem as transformações de uma figura no plano devem ser privilegiadas nesses ciclos, porque permitem o desenvolvimento de conceitos geométricos de uma forma significativa, além de obter um caráter mais dinâmico para este estudo. Atualmente, existem softwares que exploram problemas envolvendo transformações das figuras. Também é interessante propor aos alunos situações para que comparem duas figuras, em que a segunda é resultante da reflexão da primeira (ou da translação ou da rotação) e descubram o que permanece invariante e o que muda. Tais atividades podem partir da observação e identificação dessas transformações em tapeçarias, vasos, cerâmicas, azulejos, pisos etc. (BRASIL,1998, p.124).

Analisando esse contexto, citado nos PCN's, podemos fazer uma reflexão sobre a necessidade de fazer pesquisas com a utilização de *software* educacionais voltados para o ensino de alguns temas relevantes da matemática. Daremos ênfase em nossa pesquisa ao uso do Geogebra no ensino das cônicas: elipse, hipérbole e parábola, tópicos importantes da geometria analítica que devem ser abordados em nível de ensino médio. Serão desenvolvidas atividades de forma que o uso desse recurso tecnológico possa contribuir para o ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos.

A geometria analítica, tema que aparece no referencial curricular para ser trabalhado pelos docentes de matemática no terceiro ano do ensino médio, é considerado um tema difícil de ensinar, pois apresenta um grau de abstração que dificulta a compreensão dos alunos. Podemos enfatizar como tópicos da geometria analítica, as Cônicas que são curvas especiais em que se podem destacar a elipse, a parábola e a hipérbole. As Cônicas, muitas vezes, em grande parte das escolas públicas, nem são ensinadas a nível de ensino médio, seja pela o grau complexidade do assunto ou devido ao quantitativo de aulas durante o ano. Quando apresentado em sala de aula de modo tradicional por meio de quadro negro e giz, onde o professor escreve na lousa e os alunos reproduzem no caderno, essa exposição acaba ocorrendo da forma superficial.

1.1 Objetivos

Nesse sentido, o objetivo da pesquisa é abordar a parte teórica, e desenvolver uma sequência de atividades sobre as Cônicas: elipse, hipérbole e parábola utilizando dois métodos: o tradicional que é mais usado em grande parte das escolas públicas e outro utilizando o *software* Geogebra. Em ambos os métodos usaremos a sequência Fedathi, proposta metodológica apresentada por um grupo de educadores do estado do Ceará. Esse referencial propõe que os conhecimentos matemáticos sejam ensinados pelo professor, baseados no desenvolvimento científico de um matemático e tendo como princípios a realização de quatro fases básicas: tomada de posição, maturação, solução e prova. Estas fases da sequência Fedathi serão norteadoras para observarmos as potencialidades de uma sequência de ensino sobre a aprendizagem das principais Cônicas (elipse, hipérbole e parábola) com o uso do *software* Geogebra. Portanto, através dessa pesquisa, visamos fortalecer a importância do ensino da matemática utilizando as novas tecnologias e consequentemente despertar o gosto por essa disciplina. O *software* Geogebra será utilizado como ferramenta pedagógica para enriquecer e torna mais significativo o ensino das Cônicas a nível de ensino médio.

1.2 Organização do Trabalho

Apresentaremos nos capítulos subsequentes desse trabalho, como foi desenvolvido o tema Cônicas (elipse, hipérbole e parábola) com o uso do *software* Geogebra. Evidenciamos conceitos ligados as novas tecnologias e o ensino, como também conceitos geométricos ligados ao tema. Elaboramos uma sequência didática para fazermos o estudo de como o uso das novas tecnologias pode impactar positivamente na forma de trabalhar o ensino da matemática. Dessa forma , os capítulo seguintes estão organizados conforme a estrutura a seguir. O segundo capítulo faz referências ao ensino da matemática e as novas tecnologias, conhecendo o *software* Geogebra e o método Fedhati. No terceiro capítulo enfatizamos os conceitos, definições propriedades e representações dos lugares geométricos das cônicas, enfatizando os principais elementos, equações e representações gráficas. No quarto capítulo, desenvolvemos a parte prática do trabalho, com a aplicação de uma sequência didática envolvendo o tema e analisando os resultados obtidos por meio de aplicação de questionário. Por fim, no quinto capítulo fizemos as considerações finais.

A instituição na qual desenvolvemos os trabalhos de pesquisa, Escola de Ensino Médio Anastácio Alves Braga, pertence à rede estadual de ensino regular do estado do ceará. Fica localizada na avenida Duque de Caxias, Nº 888, Centro, Itapipoca-Ce. CEP 62500-000, Fone: (88) 3631-3087, e-mail: anastaciobraga@escola.ce.gov.br. Código INEP 23035684. A unidade escolar pertence a 2ª Cordenadoria Regional de Desenvolvimento da Educação - 2ª Crede, Itapipoca, Ceará.

Capítulo 2

O Ensino da Matemática e as Novas Tecnologias

A matemática está presente constantemente em nosso cotidiano, sendo fundamental nos mais diversos fazeres e construção do conhecimento humano. Nesse sentido, enfatizamos a importância do seu ensino nas escolas, desde as séries primárias até a universidade. Sendo assim, indispensável para uma formação completa de qualquer indivíduo, exercendo seu caráter prático e utilitário e permitindo o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático. A matemática tem sua importância como ferramenta a serviço das ciências e nas atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos da realidade social.

Segundo (SOUSA, 2001):

> A utilidade da Matemática é algo sempre questionado nas aulas dessa disciplina. Acreditamos que não é fácil para o professor justificar essa utilidade de maneira imediata, principalmente quando os alunos ainda não têm maturidade para compreender a amplitude dessa discussão. É uma resposta que necessita de tempo, leitura e experiência para que se possa compreendê-la de maneira clara e convincente, até mesmo para o professor.

Analisando os questionamentos de Sousa (2001), nos deparamos com uma realidade cotidiana no ensino da matemática, onde os alunos rotineiramente questionam ao professor: Para que serve isso? Onde vou aplicar? Como vou utilizar esse conteúdo no meu dia a dia? De fato, é um grande desafio para o professor explicar isso de forma imediata. Esse distanciamento de alguns conteúdos da realidade do aluno, acaba tornando o ensino de alguns temas importantes, desmotivador por parte do professor e do aluno. Portanto, é desafiador para o professor despertar o interesse de seus alunos apenas com métodos tradicionais, sendo fundamental desenvolver novas metodologias que permita o envolvimento de todos, através da troca de conhecimentos prévios e experiências, reflexão, construção e formulação de métodos para encontrar a resolução de situações problemas no ensino da matemática. Partindo dessa premissa, faz-se necessário buscar meios que tornem as aulas mais interessantes, criativas e dinâmicas. Nesse sentido, o uso das novas tecnologias surge como uma alternativa indispensável no processo de ensino-aprendizagem, podendo ser um fator determinante para despertar o interesse e motivar os alunos a aprenderem matemática.

Segundo (Garcia,2013):

> As vantagens da inserção das tecnologias são notórias em todas as áreas, inclusive na educação, área em que os recursos tecnológicos devem ser bem empregados e bastante utilizados, pois a educação é a base para a formação dos cidadãos, preparando-os para a vida, para a sociedade nos dias de hoje. Entretanto, é necessário saber usufruir desses recursos, fazendo com que eles contribuam para a melhoria da qualidade do processo de ensino-aprendizagem e não sejam utilizados simplesmente como uma nova forma de ensinar, mantendo as metodologias de ensino.

Logo, diante dessas novas tecnologias, os professores precisam se adaptar ao uso desses recursos modernos, tendo conhecimento de suas limitações e consciência de que essas ferramentas devem ser usadas de forma a agregar valor a aprendizagem da disciplina. Sedo importante ressaltar, que o uso excessivo e de forma não adequada pode contribuir para insucesso, visto que algumas ferramentas podem buscar resultados já prontos que podem atrapalhar o raciocínio lógico matemático.

As mudanças que podem ocorrer com a utilização das novas tecnologias em sala de aula devem influenciar significativamente na maneira de ensinar e aprender os diversos conteúdos, se tornando necessário o uso das tecnologias para enriquecer o processo de aprendizagem no ensino da matemática. Essas ferramentas tecnológicas ressignificam e afloram novas potencialidades de modo a enriquecer a aprendizagem, obtendo novos conhecimentos e habilidades.

As inovações tecnológicas estão presentes em todos os segmentos da sociedade trazendo inúmeros avanços científicos, na educação, tem proporcionado grandes mudanças, especialmente no ensino da matemática. Esses notáveis avanços vêm contribuindo com a criação de ferramentas que servem como apoio pedagógico ao trabalho do professor, possibilitando maior acesso aos recursos e informações disponíveis tornando o ensino dinâmico, eficiente e inovador. Dessa forma, o principal objetivo de se empregar as novas tecnologias é formar alunos ativos e independentes, sendo o professor o principal mediador desse processo objetivando resultados satisfatórios. Além de romper com o ensino tradicional, representa para o educador uma ampliação de possibilidades estimulando a construção de novos conhecimentos.

2.1 Os *Softwares* Educacionais

Podem ser considerados programas educativos, os *software* que têm como objetivo auxiliar uma metodologia que os contextualizem no processo ensino-aprendizagem. É importante ressaltar que mesmo tendo sido detalhadamente planejado para essa função, esses softwares podem não atingir seu objetivo principal, que é mediar e auxiliar novas metodologias. O sucesso ou fracasso da aplicação desses recursos dependerá, muitas vezes, da metodologia usada pelo professor que pode ser adequada ou adaptada a algumas situações específicas de aprendizagem. Esses *software* educativos, têm se tornado importantes, pois potencializam o trabalho do educando e das instituições de ensino em geral, sendo por desenvolver uma sequência de instruções para levar o educando a se apropriar de novos conhecimentos e capacitações ou pelo aperfeiçoamento de professores e das próprias instituições de ensino. Através de computadores, celulares e diversas outras formas de tecnologias, esses *software* educacionais têm se tornado um suporte pedagógico importante para o desenvolvimento do trabalho do professor.

A respeito dos avanços dessas ferramentas no âmbito educacional, observa-se que:

> O *software* educativo proporciona aos alunos uma melhor visualização do conteúdo abordado levando o mesmo a pensar e refletir sobre o que está sendo trabalhado naquele momento em sala de aula, isso faz com que o aluno tire suas próprias conclusões sobre o conteúdo exposto e que ele aprenda a pensar e não espere que o professor já venha com suas respostas prontas e acabadas, e as metodologias ativas chegaram para que se pudesse repensar a forma tradicional de ensinar, e por meio da gamificação, que é uma metodologia ativa, o aluno tem a oportunidade de aprender de forma participativa e lúdica e o professor não será mais o centro do processo de aprendizagem, e sim o aluno. A gamificação é uma metodologia que permite o uso de jogos (virtuais ou presenciais) para a transmissão de conhecimento. Por se tratar de uma forma mais "divertida", gera mais engajamento dos colaboradores. O *software* educativo proporciona aos professores a trabalharem com campos conceituais, facilitando a aprendizagem de conceitos matemáticos (CUNHA, OLIVEIRA, 2021, P. 01).

Dessa forma, compreende-se a importância da contribuição que essas tecnologias educacionais podem acrescentar ao trabalho pedagógico do professor em sala de aula. Tendo em vista a diversidade de recursos que visam a melhoria do ensino, apresentamos neste trabalho o *software* educacional Geogebra e sua contribuição para o processo de ensino-aprendizagem, explorando o ensino das Cônicas (elipse, hipérbole e parábola) na modalidade ensino médio.

2.2 O *Software* Geogebra

O Geogebra é um *software* de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino. Foi criado em 2001 como objeto de tese de doutorado de Markus Hohenwarter na Universidade de Salzburg, Áustria, objetivando viabilizar a comunicação matemática nas escolas básicas. O *software* Geogebra representa uma possibilidade de novas estratégias de ensino de conteúdos matemáticos, tais como: geometria, álgebra, cálculo e estatística. Abrindo novas possibilidades para professores e alunos explorar propriedades, fazer deduções e analisar de forma dinâmica as diversas áreas do conhecimento matemático. De fato, pela sua diversidade de recursos esse aplicativo torna-se um apoio pedagógico que possibilita mais interatividade e dinamismo nas aulas de matemática, apresentando uma diversidade de ferramentas que permitem criação de objetos, fazer demonstrações geométricas, observar inúmeras propriedades matemáticas, analisar comportamento das diversas funções reais, criar e fazer inúmeras observações em figuras em ambientes 3D, visualizando as propriedades particulares de cada uma.

> Esse aplicativo traz muitos recursos interativos e dinâmicos para a sala de aula, o tornando uma ferramenta de grande valia para ensinar de maneira mais simples os mais complexos assuntos da matéria, com inúmeras ferramentas para criação de objetos deixando a matemática mais acessível aos estudantes, e pode estar presente nos computadores, tablets e nos Chromebooks dos laboratórios móveis. A ideia, é que os estudantes ao se familiarizarem com o aplicativo, pela facilidade que os jovens têm com as ferramentas tecnológicas, possam manipulá-lo sem mesmo perceber que poderão aprender brincando e se divertindo. (MORELLO, SILVA, 2022).

Dessa forma, acreditamos na potencialidade que o Geogebra pode representar no processo de transposição didática e no dinamismo de situações que permitem ao professor apresentar conjecturas e levantar hipóteses matemáticas. Portanto, a utilização desse *software* será fundamental para a introdução de novos conceitos, alinhado com o conhecimento prévio já existente na estrutura cognitiva dos alunos. Tornando a aprendizagem mais significativa com uma participação ativa por parte dos educandos.

2.3 A sequência didática Fedathi

A sequência Fedathi teve seu surgimento, especificamente, no ano de 1971 em pesquisas realizadas no Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará (UFC). Idealizada pela professor Hermínio Borges Neto que, naquela época, lecionava no curso de Bacharelado em Matemática, sua principal motivação para desenvolver essa sequência didática, surgiu ao fazer algumas observações e questionamentos sobre o Ensino da Matemática.

Segundo Santos, Neto e Pinheiro (2019):

> Durante esse período, duas questões foram observadas pelo idealizador do método e estavam relacionadas com o desempenho acadêmico dos estudantes do curso diante do alto índice de reprovação nas disciplinas: a) qual seria o verdadeiro sentido da matemática e que serviço essa ciência estava prestando aos alunos; b) a falta de compreensão dos professores do curso em relação ao papel da matemática. Por duas décadas e meia, os questionamentos serviram de base e deram forma a sequência didática que Borges Neto (2016) foi desenvolvendo, primeiramente, como Sequência McLane e, posteriormente, Sequência Fedathi.

Essa proposta teórico-metodológica, idealizada por um grupo de Educadores Matemáticos do estado do Ceará, conhecido como “Grupo Fedathi”, vem propor que os conhecimentos matemáticos sejam ensinados pelo professor, dando ênfase ao desenvolvimento do trabalho científico de um matemático.

Dessa forma, a sequência Fedathi se comporta como um método que propicia ao aluno agir como um matemático na construção de conhecimento, sendo o professor o mediador do processo de ensino aprendizagem.

> O educador deve assumir a posição de orientador, fortalecendo o protagonismo do aluno no processo, exercitando seus conhecimentos de maneira mais independente. Assim, está evidente que o suposto fracasso consequente do erro vai de desmitificar, promovendo a autonomia do educando. (NETO, 2018, P. 63).

Nesse processo, o professor tem a função de provocar reflexões nos alunos durante a fase de resolução de problemas, tendo como princípios as quatro etapas da sequência Fedathi: tomada de posição, maturação, solução e prova.

1. Tomada de posição: apresentação da situação problema.

Consiste na apresentação de uma situação problema, objetivando tornar a sala de aula um ambiente favorável a troca de experiências e construção de conhecimento, visando desenvolver nos estudantes ações e reflexões na resolução de uma determinada situação problema. É importante ressaltar, que ao escolher o problema a ser estudado, o professor deve ter feito um diagnóstico prévio do nível de conhecimento de seus alunos. Nessa fase, é fundamental estabelecer um vínculo na relação professor, aluno e saber. A situação desafiadora permitirá ao aluno a discussão do tema a ser desenvolvido, implicando diretamente na construção, interpretação e raciocínio, desenvolvendo e expondo seus conceitos sobre o problema apresentado. No caso do ensino da matemática, os problemas propostos devem instigar os alunos a estudar situações gerais abordadas por meio de conjecturas matemáticas, ou seja, ao processo de investigação matemática.O professor terá a função de investigador de sua sala de aula, observando os pontos fortes e os pontos fracos de seus alunos. Dessa forma, de posse do diagnóstico de sua turma, iniciará seu trabalho docente consciente da realidade do nível de aprendizagem e deverá realizar seu planejamento com base nesses resultados. O objetivo dessa fase é viabilizar os elementos necessários, imergindo o aluno no saber que se pretende ensinar.

2. Maturação: compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema

Esta fase da sequência Fedathi proporciona ao estudante se tornar o protagonista da situação problema, atuando de maneira investigativa na busca de solução do problema proposto pelo professor na tomada de posição. Portanto, é um momento de refletir sobre a situação proposta, buscando identificar as variáveis e dados que serão fundamentais para uma estratégia de resolução. Nesse sentido, a maturação é essencial no processo de ensino-aprendizagem, pois proporciona o desenvolvimento do cognitivo, da maturação de ideias e do desenvolvimento do raciocínio lógico. Assim, os alunos devem se debruçar sobre o problema, analisar o que já sabem sobre o assunto e o que precisam aprender para avançar, através de questionamentos, dúvidas, ideias, hipóteses matemáticas e uma série de ações mentais que se assemelham a de um matemático, atingindo o objetivo da Sequência Fedathi, que é levar os alunos a pensarem como matemáticos. O professor terá a incumbência de fazer intervenções através de perguntas motivadoras, esclarecedoras e observar como os alunos estão desenvolvendo suas atividades.

3. Solução: representação e organização de modelos e esquemas que visem a solução do problema

Nesse processo, após ter refletido e maturado sua ideia, o estudante se propõe a apresentar suas estratégias de solução que serão analisadas pelo professor e por todo o grupo, que irão observar se sua solução é satisfatória ou apresenta erros, fazendo comparações e discussões entre as diversas possibilidades de soluções apresentadas. No entanto, o professor deve estar atento para que a diversidade de estratégias de soluções defendidas não gere desentendimento entre os alunos, mostrando que a construção de conhecimento matemático esta associada a erros, acertos e confrontação de ideais. Cabe ao professor, analisar e valorizar as soluções feitas por seus alunos, independentemente de estarem certas ou erradas, valorizando o raciocínio desenvolvido em cada resposta.

4. Prova: apresentação e formalização do modelo matemático a ser ensinado

Etapa em que o estudante presenta uma solução mais consolidada, ocorrendo o processo de validação do conteúdo em questão, através da modelagem matemática. O professor formaliza o modelo geral alcançado. Na matemática é o momento em que são apresentadas as demonstrações rigorosas de um problema devidamente finalizado. O objetivo desta fase é estabelecer relações cognitivas entre o que foi pensado e as conjecturas expostas pelos alunos.

É fato que esta dissertação terá como foco o ensino das cônicas com o uso do software Geogebra, no entanto, o desenvolvimento das atividades e soluções serão articuladas com o uso da sequência didática Fedathi, dando ênfase ao raciocínio lógico ,a reflexão e ao pensamento matemático do aluno na resolução dos problemas propostos.

Capítulo 3

Elipse, Hipérbole e Parábola. Explorando conceitos elementares

3.1 Preliminares

Nesta seção, abordaremos conceitos básicos que são pré-requisitos fundamentais para compreendermos o estudo das cônicas, suas propriedades e definições. Assim, daremos ênfase a alguns temas da geometria analítica que irão nos auxiliar na investigação e compreensão de algumas propriedades e provas existente nos estudo das principais cônicas: elipse, hipérbole e parábola.

3.1.1 Coordenadas Cartesiana no Plano

Idealizado pelo o filósofo e matemático René Descartes, na França no século XVII, o sistema de coordenadas cartesianas é bastante utilizado no campo da matemática, seja na construção e análise de gráficos, nos estudos cartográficos ou em outras aplicações. Fundamentando-se no plano cartesiano e na localização de seus pontos, foi possível construir todos os conceitos da geometria analítica. Permitindo demonstrar, por outros caminhos, resultados que já estavam demonstrados e resultados que ainda não eram possíveis, possibilitando a descoberta de muitas propriedades que, até então, não tinham sido observadas. Aplicando o conceito de plano cartesiano e distância entre dois pontos, foi possível obter diversas figuras geométricas, através do conceito de lugares geométricos.

Coordenadas no plano é um par de eixos, OX e OY, com unidade de medida de igual comprimento e que se intersectam perpendicularmente no ponto O denominado origem. Por convenção, OX é denominado eixo das abscissas e OY eixo das ordenadas. A esse par de eixos perpendiculares , chamaremos de plano cartesiano ortogonal, ou abreviadamente, de sistema OXY, como na figura abaixo.

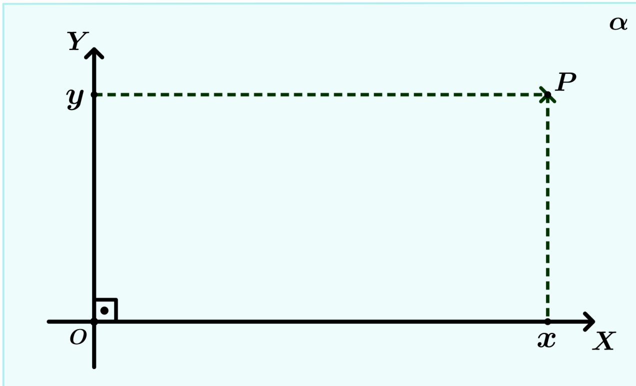


Figura 3.1

Logo, temos que os números x, $y \in \mathbb{R}$ representam o par ordenado (x, y) associados ao ponto P são as coordenadas cartesianas do ponto P, sendo x a abscissa ou primeira coordenada de P e y é a ordenada ou segunda coordenada de P.

3.1.2 Distância entre dois pontos

Dados os pontos A e B no plano cartesiano, definiremos a distância do ponto A ao ponto B como sendo a medida do segmento de reta que liga A à B. Usando princípios básicos da geometria analítica, podemos traçar esses pontos no plano como pares ordenados da forma (x, y). Desse modo, podemos fazer deduções e obter uma fórmula aplicando o teorema de Pitágoras, no caso em que os pontos traçados formam um triângulo retângulo. Nos demais casos, a dedução é de forma imediata, como na figura abaixo.

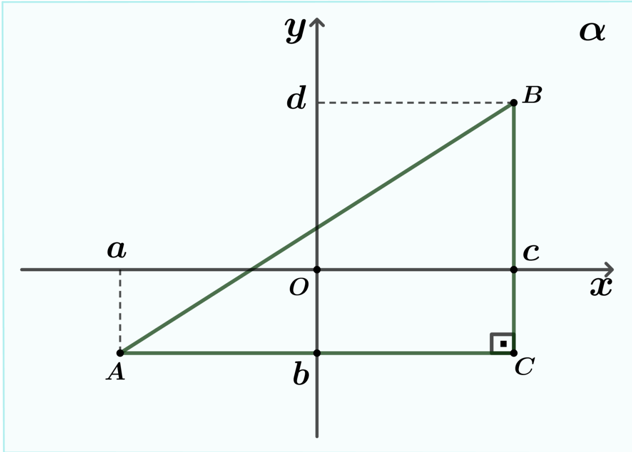


Figura 3.2

Sejam A e B pontos do plano α de coordenadas (a, b) e (c,d), respectivamente. Em relação ao sistema de eixos ortogonais XOY, a distância de A a B, que denotamos por $d(A, B)$ é a medida da hipotenusa AB do triângulo retângulo ABC. Sendo a distância entre dois pontos de um eixo igual ao módulo da diferença de suas coordenadas, daí temos que as medidas AC e BC são, respectivamente, $|AC| = |a - c|$ e $|BC| = |b - d|$. Então, pelo teorema de Pitágoras, segue-se que:

$$d(A, B) = |AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2} = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}.$$

Portanto, a distância $d(A, B)$ entre dois pontos A e B é a rais quadrada da soma dos quadrados das diferenças das coordenadas correspondente.

3.1.3 Lugares Geométricos

No estudo da Matemática, especificamente, de alguns temas relevante como a geometria plana e geometria analítica, é necessário conhecer algumas propriedades importantes de um conjunto de pontos. Daremos ênfase, ao conceito de lugar geométrico, que é definido como um conjunto de pontos que gozam de uma determinada propriedade. Esse conjunto de pontos também pode ter uma expansão tridimensional e representar algumas figuras espaciais, tais como superfícies esféricas, cilíndricas elipsoidais entre outras. Assim, esses lugares geométricos podem gerar superfícies, curvas e retas.

Definição 3.1.1 *Uma figura é o lugar geométrico de um conjunto de pontos quando todos os seus pontos, e apenas eles, tem uma certa propriedade em comum.*

Vejamos alguns lugares geométricos básicos:

Sejam A e B dois pontos distintos de um plano α. Temos que o lugar geométrico dos pontos de α, equidistantes de A e B, é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

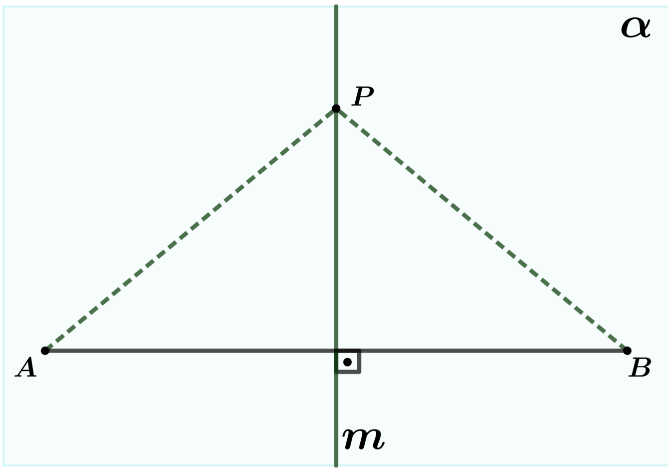


Figura 3.3

Dai, no plano α, todos os pontos que estão à mesma distância de A e de B pertencem a mediatriz m, e, reciprocamente, todos os pontos de m são equidistante de A e de B.

Dado um ponto O pertencente a um plano α e seja r um número real positivo. Observe na figura abaixo, que o lugar geométrico dos pontos de α, que estão a uma distância r de O, é uma circunferência de centro O e raio r.

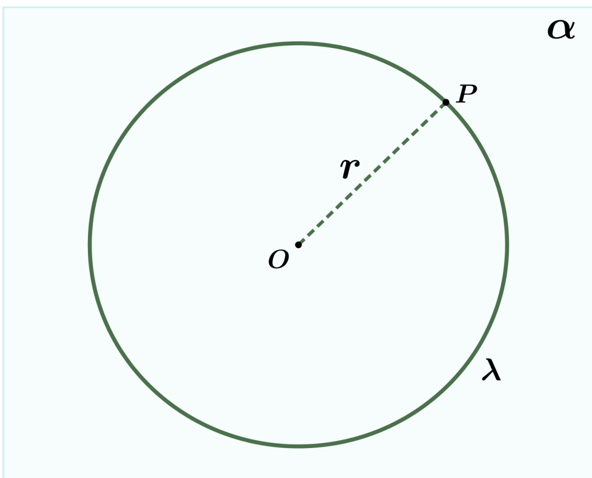


Figura 3.4

Assim, temos que no plano α, todos os pontos que estão à uma distância r do ponto O pertencem a circunferência λ. Reciprocamente, todos os pontos que pertencem a circunferência λ, estão a uma mesma distância r do ponto O.

Portanto, lugar geométrico nada mais é do que um conjunto de pontos que compartilham a mesma propriedade e, como todo conjunto, ele deve estar bem definido. Focaremos em três lugares geométricos, obtidas a partir de pontos que gozam de uma propriedade em comum, conhecidas no campo de estudos da geometria analítica como, as cônicas: Elipse, Hipérbole e Parábola.

3.2 Elipse

A elipse é uma cônica, obtida a partir da interseção de um plano em um cone. Ou seja, ao seccionar um cone com um plano, de tal modo que esse plano não passe pelo vértice e corte todas as geratrizes desse cone, a seção transversal formada é uma elipse.

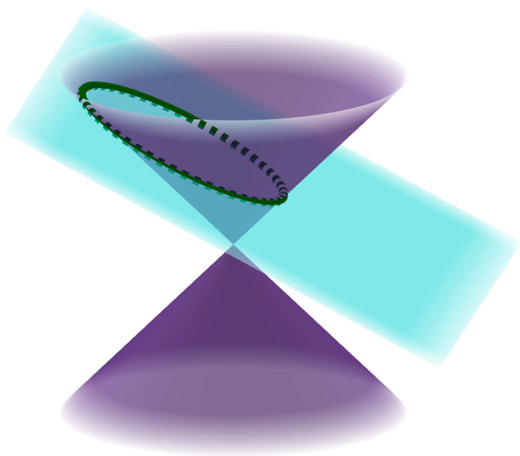


Figura 3.5

No entanto, para nosso estudo analítico dessa cônica, usaremos uma definição alternativa. Ou seja, o lugar geométrico que tem uma propriedade comum a todos os seus pontos.

Definição 3.2.1 *Sejam F_1 e F_2, pontos pertencentes a um plano α, tal que a distância entre F_1 e F_2 seja positiva. Definiremos elipse como sendo o conjunto dos pontos P do plano α, cuja soma das distâncias $d(P, F_1)$ e $d(P, F_2)$ é uma constante $2a$, maior que $2c$. Isto é:*

$$Elipse = \{P \in \alpha \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$$

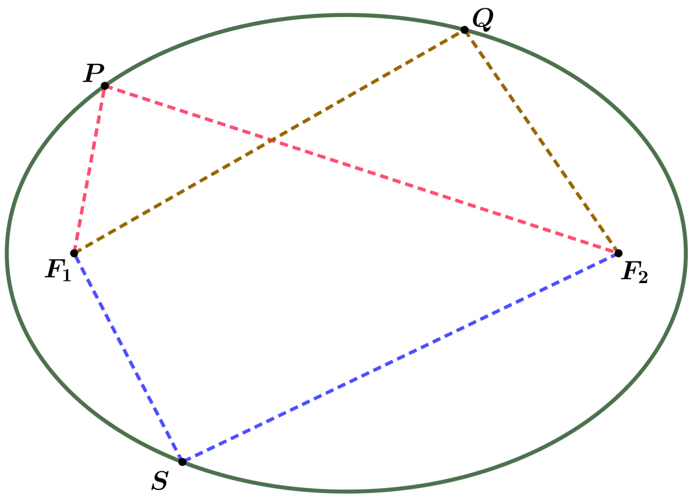


Figura 3.6

Logo, temos que:

$$d(Q, F_1) + d(Q, F_2) = 2a$$

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$d(S, F_1) + d(S, F_2) = 2a$$

Sendo que os pontos P, Q e S pertencem a elipse.

3.2.1 Principais elementos da elipse

Os principais elementos que compõem a elipse são definidos como: centro, focos, eixo maior, eixo menor e seus vértices. Fundamentados nessas definições, será possível obter em uma elipse, algumas relações importantes.

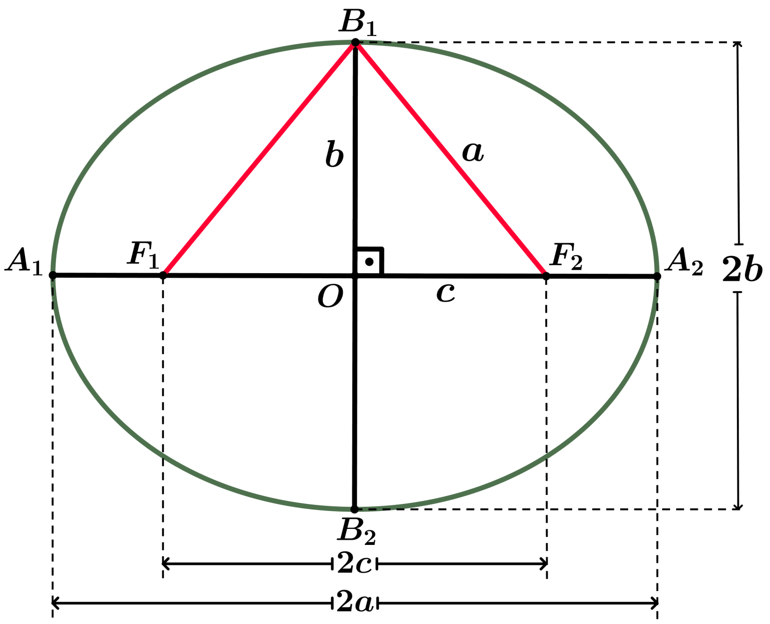


Figura 3.7

Portanto, da figura anterior temos que:

- Os pontos F_1 e F_2 são os focos da elipse.
- Sejam A_1 e A_2, os pontos definidos como os pontos da elipse de menor distância à F_1 e F_2, respectivamente.
- Os pontos A_1 e A_2 são chamados de vértices da elipse sobre o eixo focal.
- O centro O é o ponto médio do segmento A_1A_2.
- Chamaremos de distância focal à distância entre os pontos F_1 e F_2, isto é, $d(F_1, F_2) = 2c$.
- Chamamos de eixo maior, ou eixo focal ao segmento A_1A_2, cuja medida é $d(A_1, A_2) = 2a$.
- Sejam B_1 e B_2, os pontos definidos como a interseção entre a elipse e a mediatriz do eixo maior
- Os pontos B_1 e B_2 são chamados de vértices da elipse sobre o eixo não focal.
- Chamamos de eixo menor ou eixo não focal, de comprimento $2b$, o segmento B_1B_2.

Podemos ainda observar que temos duas relações notáveis, relevantes no estudo da elipse, são elas:

Excentricidade

Definição 3.2.2 *Chamamos de excentricidade da elipse, a razão entre a distância focal e a distância entre os vértices que estão sobre o eixo focal.*

Portanto podemos determinar seu valor, da seguinte forma:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Caso o eixo maior da elipse pertença ao eixo das ordenadas a excentricidade será definida , da seguinte forma:

$$e = \frac{c}{b}$$

A excentricidade mede o grau de achatamento de uma elipse, a medida que o valor da excentricidade aumenta, a elipse se aproxima de uma circunferência. De fato,o eixo maior tem comprimento maior que a distância focal, então, consequentemente, temos que $c < a$, portanto, a razão será sempre um número compreendido entre 0 e 1.

Relação notável: Teorema de Pitágoras

Note que no triângulo retângulo OB_1F_2 da figura acima, temos que $OB_1 = b$, $B_1F_2 = a$ e $OF_2 = c$. Assim, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OB_1F_2. Segue-se que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

3.2.2 Equação reduzida da Elipse com centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas

O estudo da elipse de forma analítica é feito no plano cartesiano. A geometria analítica busca descrever, por meio de equações, as figuras da geometria plana. Sendo assim, é possível descrever a figura por meio da chamada equação reduzida da elipse.

Dado um sistema de coordenadas cartesianas tais que os segmentos $A_1A_2 \in Ox$ e $B_1B_2 \in Oy$ e focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. Como na figura abaixo:

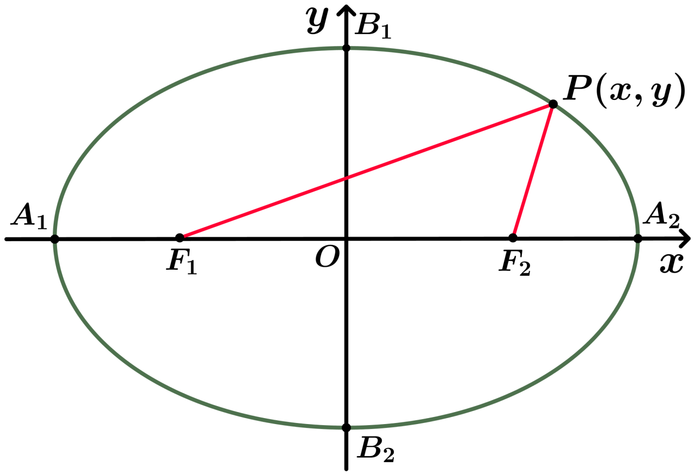


Figura 3.8

Por definição, temos que:

$$P \in Elipse \Longleftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Daí, aplicando a fórmula da distância entre dois pontos, é possível determinar a equação reduzida da elipse de forma imediata. Vejamos:

$$\begin{aligned} d(PF_1) + (PF_2) = 2a \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a \\ &\Rightarrow \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \end{aligned}$$

Subtraindo $\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ de ambos os membros da equação, temos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando ambos os membro ao quadrado e desenvolvendo, segue-se que:

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2 &= (2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2 \Longrightarrow \\
(x+c)^2+y^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2 \Longrightarrow \\
x^2+2cx+c^2+y^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2
\end{aligned}
$$

Fazendo as devidas simplificações, temos:

$$
\begin{aligned}
2cx &= 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}-2cx \Longrightarrow \\
4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= 4a-4cx \Longrightarrow \\
4(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}) &= 4(a^2-cx) \Longrightarrow \\
a\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= a^2-cx \Longrightarrow \\
(a\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2 &= (a^2-cx)^2 \Longrightarrow \\
a^2(x-c)^2+a^2y^2 &= a^4-2a^2cx+a^2c^2 \Longrightarrow \\
a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2 &= a^4-2a^2cx+c^2x^2 \Longrightarrow \\
a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2 &= a^4-a^2c^2.
\end{aligned}
$$

Colocando (a^2-c^2) em evidência, segue-se que:

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

Considerando que $a^2=b^2+c^2$, logo $a^2-c^2=b^2$. Então:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

Dividindo a equação por a^2b^2, conclui-se que:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Portanto, determinamos a equação na forma reduzida com centro na origem do sistema de coordenadas.

Por outro lado, caso a elipse apresenta eixo maior pertencente ao eixo das ordenadas, ou seja, $A_1A_2 \in Oy$ e $B_1B_2 \in Ox$, como na figura abaixo.

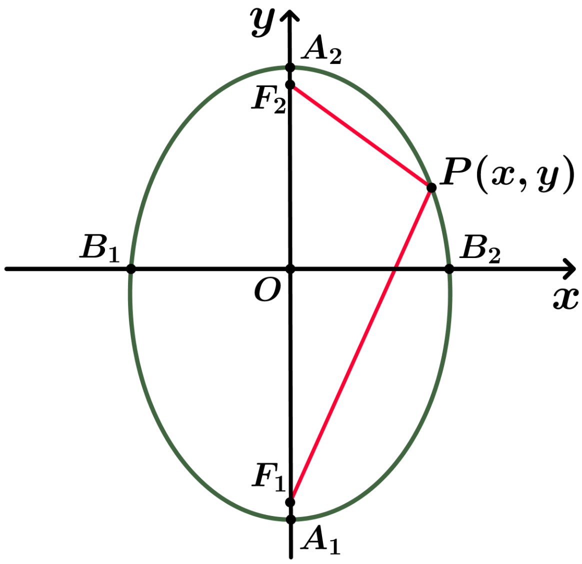


Figura 3.9

Então:

$$P \in Elipse \Longleftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

Daí, de modo análogo, temos que:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = 2a.$$

Desenvolvendo, obtemos a equação reduzida da elipse de centro O, localizada na origem do sistema de coordenadas cartesianas, com eixo maior pertencente ao eixo das ordenadas. Veja:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

3.2.3 Equação da Elipse transladada

Existem casos em que o centro da elipse não pertence a origem do plano cartesiano, o que não é impedimento ao desenvolvimento de sua equação reduzida.

Ao transladarmos uma elipse, cuja seu eixo maior é paralelo ao eixo das abscissas, da origem O do sistema de coordenadas xOy, para um sistema de coordenadas auxiliar $\overline{x}\overline{O}\overline{y}$. Figura abaixo.

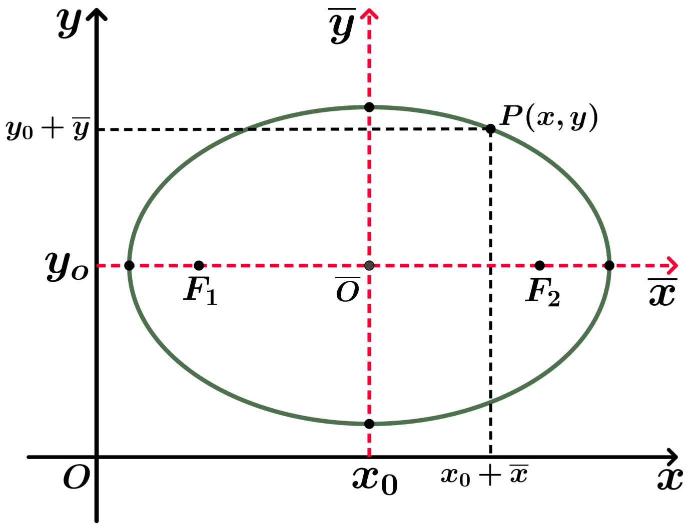


Figura 3.10

Daí, em relação ao novo sistema de coordenadas, por definição temos que:

$$P \in Elipse \iff d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Portanto, sua equação pode ser deduzida da seguinte forma:

$$\frac{(\overline{x})^2}{a^2} + \frac{(\overline{y})^2}{b^2} = 1$$

No entanto, observe na figura anterior, que existe uma correspondência, tal que $P(x, y) = (\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0)$, logo:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Por outro lado, caso a elipse tenha eixo maior paralelo ao eixo das ordenadas, procedemos de modo análogo. Figura abaixo

Por definição:

$$P \in Elipse \iff d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Portanto, sua equação pode ser deduzida da seguinte forma:

$$\frac{(\overline{y})^2}{a^2} + \frac{(\overline{x})^2}{b^2} = 1$$

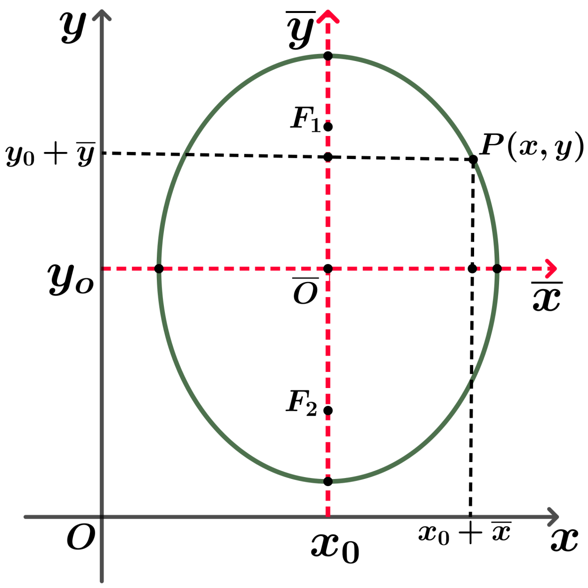


Figura 3.11

No entanto, observe na figura anterior que existe uma correspondência, tal que $P(x, y) = (\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0)$. Logo:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

3.3 Hipérbole

A hipérbole é uma seção cônica definida como a interseção entre uma superfície cônica circular regular e um plano que passa através das duas metades do cone, de tal modo que este plano não seja paralelo à linha oposta ao corte, podendo indicar toda a seção do corte, ou ainda uma das curvas que a formam. As duas curvas são iguais, e recebem a denominação de hipérboles opostas.

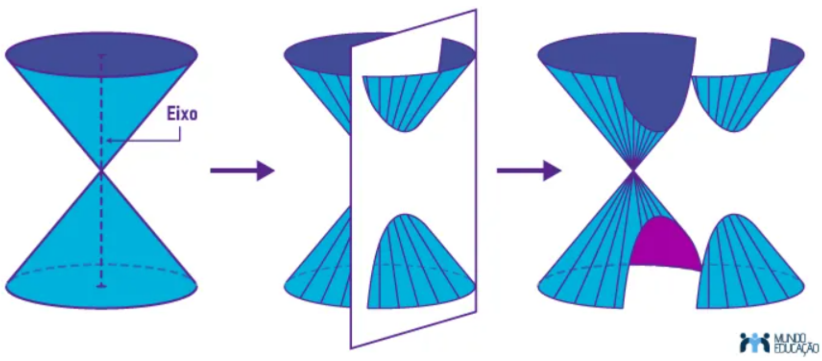


Figura 3.12: Fonte: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/equacao-hiperbole.htm

Podemos também definir como o lugar geométrico do todos os pontos coplanares para os quais a diferença das distâncias a dois pontos fixos (denominados por focos) é constante.

Definição 3.3.1 *Dados dois pontos distintos F_1 e F_2, pertencentes a um plano α, seja $2c$ a distância entre eles. Hipérbole é o conjunto dos pontos de α cuja diferença (em valor absoluto) das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$ (sendo $0 < 2a < 2c$).*

$$\textit{Hipérbole } = \{P \in \alpha \mid |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}$$

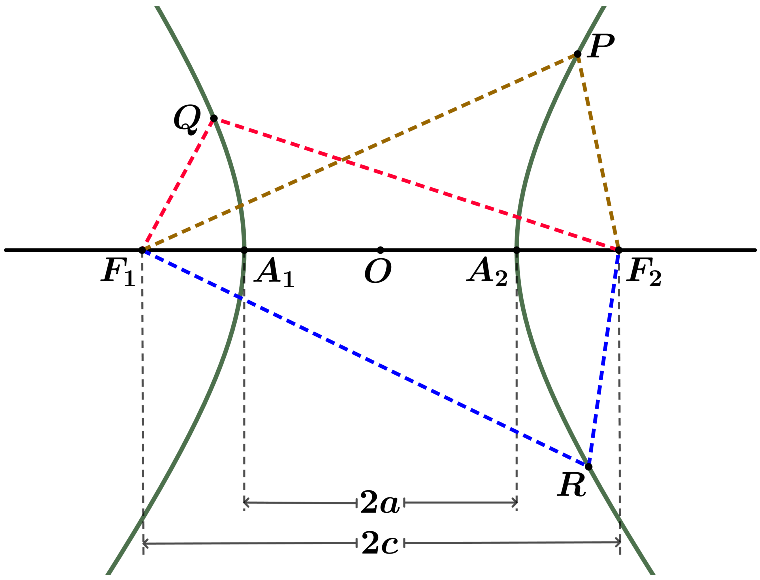


Figura 3.13

Da figura anterior, segue-se que:

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$$

$$d(Q, F_2) - d(Q, F_1) = 2a$$

$$d(R, F_1) - d(S, F_2) = 2a$$

Veja que podemos desconsiderar o módulo, visto que podemos considerar a diferença da maior para a menor distância.

3.3.1 Principais elementos da Hipérbole

Os principais elementos que compõem uma hipérbole são: classificados como: focos, centro, eixo maior, eixo menor e seus vértices. Fundamentados neles, será possível obter em uma elipse, algumas relações importantes.

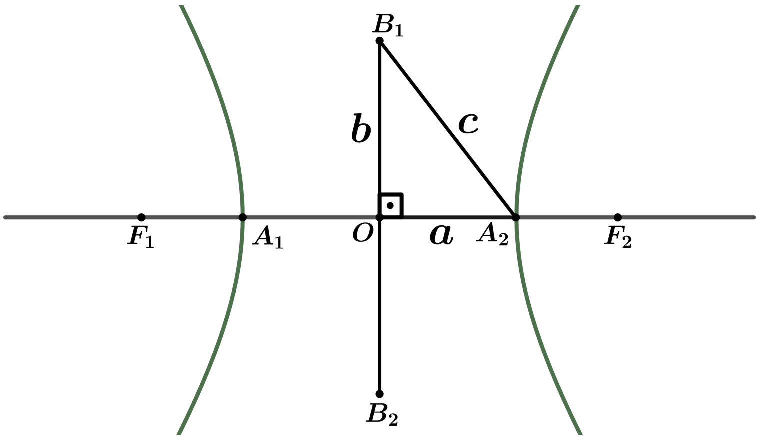


Figura 3.14

Portanto, da figura acima temos terminologias importante e algumas definições.Vejamos:

- Os pontos F_1 e F_2 são dois pontos fixos, chamados de focos da hipérbole.
- Os pontos A_1 e A_2, definidos como os pontos da hipérbole de menor distância à F_1 e F_2, respectivamente. São chamados de vértices da hipérbole.
- O centro, ponto médio do segmento A_1A_2, representado pela letra O.
- Chamaremos de distância focal à distância entre F_1 e F_2, isto é:, $d(F_1, F_2) = 2c$.
- Chamaremos de eixo real ou transverso ao segmento A_1A_2, cuja medida é $d(A_1, A_2) = 2a$.
- Os pontos B_1 e B_2 pertencentes a mediatriz do eixo real, são as extremidades do eixo imaginário de uma hipérbole, e sua distância é: $d(B_1, B_2) = 2b$.

Observe que ainda podemos obter duas relações importantes para o estudo da hipérbole. Vejamos:

Excentricidade

O número $e = \dfrac{c}{a}$ é denominado excentricidade da hipérbole. Podemos observar que esse número é determinado pela razão entre a hipotenusa e um cateto do triângulo retângulo OB_1A_2, daí concluímos que $e \geq 1$.

Relação Notável: Teorema de Pitágoras

Vejamos que no triângulo retângulo OB_1F_2, de hipotenusa $B_1A_2 = c$ e catetos $OB_1 = b$ e $OA_2 = a$, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras, assim temos que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

3.3.2 Equação reduzida da Hipérbole

Dada uma hipérbole no plano cartesiano, podemos determinar uma equação para descrever essa figura geométrica, afim de representá-la de forma algébrica.
Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer pertencente a hipérbole centrada na origem $O(0, 0)$ e de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. Como na figura abaixo.

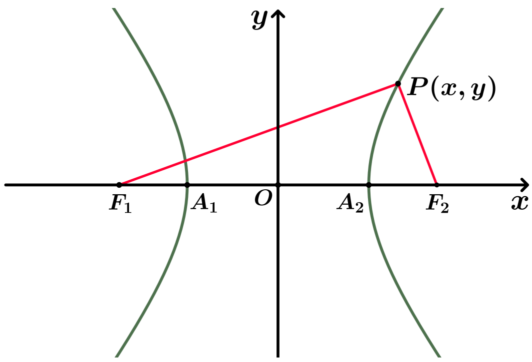


Figura 3.15

Aplicando fórmula da distância entre dois pontos, temos que a dedução sairá de forma imediata:

$$P \in \textit{Hipérbole} \iff |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

Daí, segue-se que:

$$\begin{aligned}
|\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}| &= 2a \implies \\
\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} &= \pm 2a \implies \\
\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= \sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a
\end{aligned}$$

Podemos então, elevar ao quadrado ambos os membros da equação e fazer os possíveis desenvolvimentos:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2 &= (\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a)^2 \implies \\
(x+c)^2+y^2 &= (x-c)^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2 \implies \\
x^2+2xc+c^2+y^2 &= x^2-2xc+c^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2
\end{aligned}$$

Simplificando, temos que:

$$\begin{aligned}
2xc &= -2xc\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2 \implies \\
4xc &= \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2 \implies \\
4xc-4a^2 &= \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \implies \\
4(xc-a^2) &= 4(\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}) \implies \\
xc-a^2 &= \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}
\end{aligned}$$

Elevando novamente os membros ao quadrado, segue-se que:

$$\begin{aligned}
(xc-a^2)^2 &= (\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2 \implies \\
(cx-a^2)^2 &= a^2(x-c)^2+a^2y^2 \implies \\
c^2x^2-2cxa^2+a^4 &= a^2(x^2-2xc+c^2)+a^2y^2 \implies \\
c^2x^2-2cxa^2+a^4 &= a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2 \implies \\
c^2x^2+a^4 &= a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2 \implies \\
c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2 &= a^2c^2-a^4 \implies \\
(c^2-a^2)x^2-a^2y^2 &= a^2(c^2-a^2)
\end{aligned}$$

Veja que na hipérbole vale a relação notável: $c^2 = a^2 + b^2$, então $b^2 = c^2 - a^2$, daí

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Considerando $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então temos que $a^2b^2 \neq 0$, logo fazendo a divisão da equação por a^2b^2, concluimos que:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Portanto, deduzimos a equação de uma hipérbole na forma reduzida, com centro $O(0,0)$ localizado na origem do sistema de coordenadas cartesianas.

Analogamente, o mesmo cálculo pode ser feito se a hipérbole apresenta eixo maior pertencente ao eixo das ordenadas, ou seja, $A_1A_2 \in Oy$ e $B_1B_2 \in Ox$, como na figura abaixo.

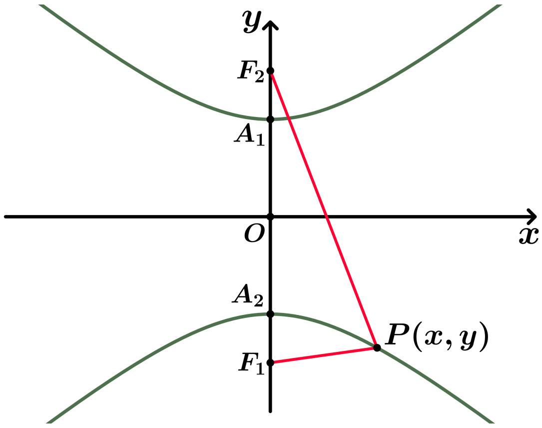


Figura 3.16

Por definição:

$$P \in \textit{Hipérbole} \iff |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = \pm 2a.$$

Então, segue-se que:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} - \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = \pm 2a.$$

Aplicando a distância entre dois pontos e desenvolvendo os binômios, obtemos a equação reduzida da hipérbole de centro O, localizada na origem do sistema de coordenadas cartesianas. Veja:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

3.3.3 Equação da Hipérbole transladada

Caso a hipérbole não possua centro na origem O do plano cartesiano, podemos desenvolver de forma elementar sua equação reduzida.

Note que, ao transladarmos a hipérbole, cuja o segmento A_1A_2 é paralelo ao eixo Ox, da origem O do sistema de coordenadas xOy, para um sistema auxiliar $\overline{x}\overline{O}\overline{y}$. Ver figura abaixo

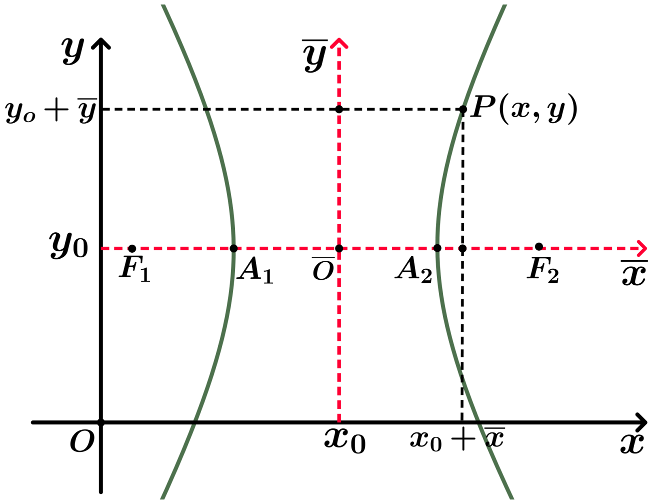


Figura 3.17

Daí, por definição, temos que:

$$P \in \textit{Hipérbole} \iff |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = \pm 2a.$$

Note que, relação ao plano $\overline{x}\overline{O}\overline{y}$, sua equação reduzida, é:

$$\frac{(\overline{x})^2}{a^2} - \frac{(\overline{y})^2}{b^2} = 1$$

No entanto, na figura anterior temos a correspondência $P(x, y) = (\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0)$. Daí, segue-se que:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Caso a hipérbole tenha centro no ponto $\overline{O} = (\overline{x}, \overline{y})$, tal que o segmento A_1A_2 é paralelo ao eixo Oy, ver figura abaixo

De modo análogo, temos que sua equação reduzida em relação ao sistema $\overline{x}\overline{O}\overline{y}$, é dada por:

$$\frac{(\overline{y})^2}{a^2} - \frac{(\overline{x})^2}{b^2} = 1$$

No entanto, na figura acima, temos a correspondência $P(x, y) = (\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0)$. Daí, temos que sua equação em relação ao sistema de coordenadas cartesiana $\overline{x}\overline{O}\overline{y}$ é obtida

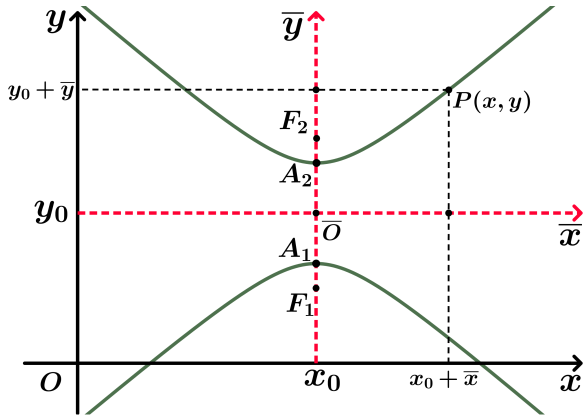


Figura 3.18

por:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

3.4 Parábola

A parábola é uma seção cônica que é gerada pela interseção de um plano com a superfície lateral de um cone, como na figura abaixo. No entanto, para uma melhor compreensão do lugar geométrico que representa essa cônica, deve-se saber que essa figura geométrica plana é formada por um conjunto de pontos que estão a uma mesma distância de uma determinada reta d chamada de diretriz e um ponto fixo F definido como foco da parábola.

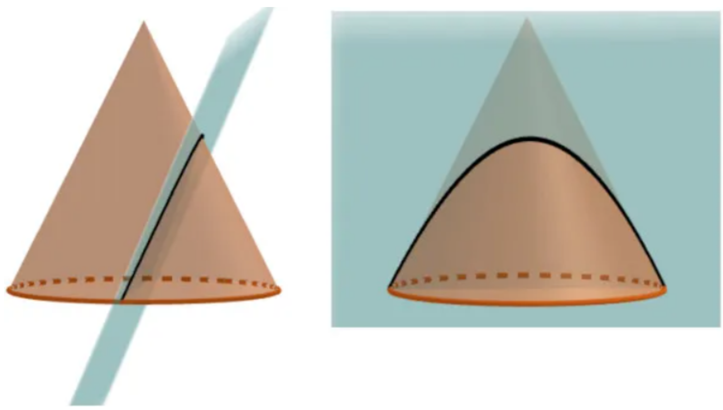


Figura 3.19: Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/parabola.htm

As parábolas também representam geometricamente gráficos de funções do segundo grau. No ensino médio, fazem parte do estudo das cônicas em geometria analítica. Suas aplicações estão presentes em diversos setores da sociedade, seja nas áreas da física e da engenharia como no projeto de antenas parabólicas, radares, faróis de automóveis, etc.

Definição 3.4.1 *Dado um ponto F e uma reta d, pertencentes a um plano α, com $F \notin d$, seja p a distância entre F e d. Parábola é o conjunto de pontos de α que estão a uma mesma distância de F e de d.*

$$P \in \textit{Parábola} \iff \{P \in \alpha \mid d(P,F) = d(P,d)\}$$

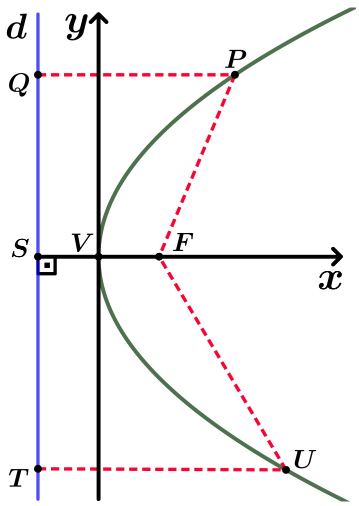


Figura 3.20

Logo, por definição, temos que:

$$d(P,F) = d(P,Q)$$

$$d(F,U) = d(U,T)$$

Portanto, na figura anterior, todos os pontos que estão à uma mesma distância de d e F que são chamados, respectivamente, de diretriz e foco da parábola, é o lugar geométrico que representa o gráfico de uma função quadrática. Sendo o ponto médio entre o foco F e a reta diretriz d, o vértice V da parábola.

3.4.1 Elementos principais da Parábola

Temos algumas terminologias e definições importantes sobre os elementos que compõem uma parábola e que fazem parte de sua construção. Estes elementos são: vértice, foco, diretriz, parâmetro e eixo de simetria.

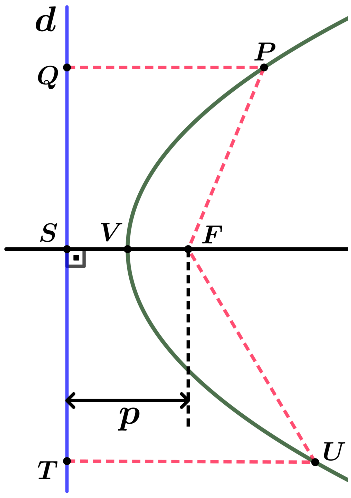


Figura 3.21

Da figura acima, temos que:

- O ponto onde a parábola muda de sentido, chamaremos de vértice, representado pela letra V.

- O ponto simétrico da reta d, em relação ao vértice V, chamaremos de foco da parábola, representado pela letra F.

- Chamaremos de diretriz, a reta d, cuja a distância entre esta e qualquer ponto da parábola é sempre igual à distância entre esse mesmo ponto da parábola e seu foco.

- Chamaremos de parâmetro, presentado pela letra p, a medida da distância entre o foco F e a diretriz d.

- A reta que contém o foco e divide a parábola em duas partes simétricas, sendo perpendicular à diretriz , chamaremos de eixo de simetria.

Relação notável

Seja o segmento VF que tem extremidades no vértice da parábola e no seu foco, é fácil notar que:

$$VF = \frac{p}{2}$$

Ou seja, o vértice da parábola pertence ao ponto médio do parâmetro p que é a distância entre seu foco e a diretriz.

3.4.2 Equação reduzida da Parábola com vértice na origem

Fundamentados pelos conceitos básicos da geometria analítica, tais como: identificar pontos no plano cartesiano e determinar a distância entre dois pontos, podemos representar o lugar geométrico formado por uma parábola de forma algébrica, ou seja, por meio de uma equação que será deduzida com base na sua definição. Para deduzir essas equações devemos colocar o vértice da parábola na origem de um plano cartesiano. Assim, temos de analisar duas situações básicas: o caso em que a diretriz da parábola é paralela ao eixo das ordenadas Oy, e o caso em que a diretriz é paralela ao eixo das abscissas Ox.

Suponha que a diretriz dessa parábola é paralela ao eixo Oy do plano, como na figura abaixo

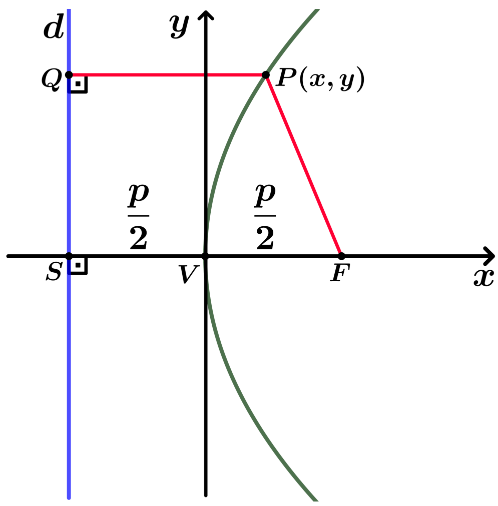


Figura 3.22

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da parábola, temos as seguintes hipóteses:

- **As coordenadas do foco F:** Notemos que o eixo Ox, nessa construção, é o eixo de simetria da parábola. Então, as coordenadas do pontos F é representado por $(\frac{p}{2}, 0)$, visto que o segmento $VF = \frac{p}{2}$.
- **Coordenadas de Q :** O ponto Q pertence à diretriz, e a distância de P até Q é igual à distância de P até F. Daí, temos que as coordenadas do ponto Q são: $(-\frac{p}{2}, y)$. Observe que o ponto Q tem a mesma ordenada que o ponto P, sendo sua distância até o eixo das ordenadas Oy igual a distância de V até F, com sinal contrário.

Portanto, diante dessas hipóteses e aplicando a definição de parábola, a dedução é imediata:

$$P \in Parábola \iff d(P,Q) = d(P,F)$$

então:

$$\begin{aligned} d(P,Q) &= d(P,F) \implies \\ \sqrt{(x - [-\frac{p}{2}])^2 + (y-y)^2} &= \sqrt{(\frac{p}{2} - x)^2 + (0-y)^2} \implies \\ \sqrt{(x + \frac{p}{2})^2 + (0)^2} &= \sqrt{(\frac{p}{2} - x)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, temos que:

$$\begin{aligned} (x + \frac{p}{2})^2 &= (\frac{p}{2} - x)^2 + y^2 \implies \\ x^2 + px + \frac{p^2}{4} &= \frac{p^2}{4} - px + x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Daí, fazendo as devidas simplificações, seque que:

$$\begin{aligned} px &= -px + y^2 \implies \\ px + px &= y^2 \implies \\ 2px &= y^2 \end{aligned}$$

Logo, concluímos que:

$$y^2 = 2px.$$

De modo análogo, porém com a reta diretriz da parábola paralelo ao eixo Ox, podemos determinar uma outra forma da equação reduzida que possua vértice na origem do sistema de coordenadas cartesianas. Observe a figura abaixo.

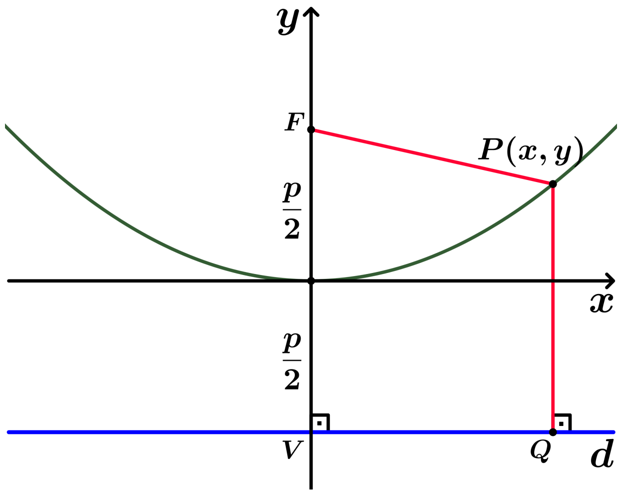


Figura 3.23

Temos que a parábola apresenta vértice na origem e seu foco pertence ao eixo das ordenadas, portanto as coordenadas dos pontos F e Q são respectivamente $(0, \frac{p}{2})$ e $(x, -\frac{p}{2})$. Logo por definição, temos que:

$$\begin{aligned} d(P,F) &= d(P,Q) \Longrightarrow \\ \sqrt{(x-0)^2 + (y-\frac{p}{2})^2} &= \sqrt{(x-x)^2 + (y+\frac{y}{2})^2}. \end{aligned}$$

Daí, fazendo o desenvolvimento da igualdade decorre a equação reduzida da parábola do tipo:

$$x^2 = 2py.$$

3.4.3 Equação reduzida da parábola com vértice fora da origem

Transladando o vértice da parábola para o ponto de coordenadas $\overline{O}(\overline{x}, \overline{y})$ e sendo sua diretriz paralela ao eixo das ordenadas. Veja na figura abaixo

Note que depois de transladada e aplicando a definição de parábola, temos que a

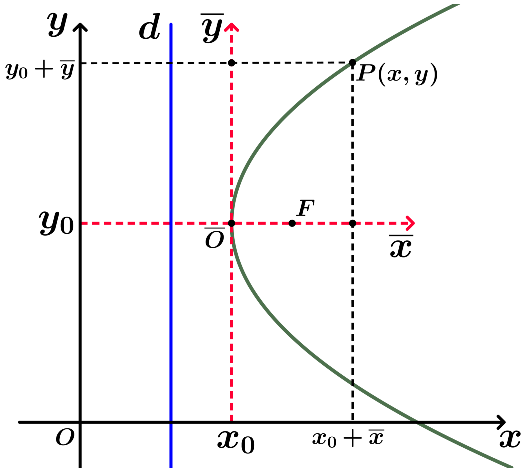


Figura 3.24

equação reduzida em relação ao novo sistema de coordenadas $\overline{x}\overline{O}\overline{y}$, é da forma:

$$(\overline{y})^2 = 2p\overline{x}$$

Daí, observando a translação, temos a correspondência $P(x,y) = (x_0+\overline{x}, y_0+\overline{y})$, então:

$$\begin{array}{rcl} x & = & x_0+\overline{x} \implies \\ \overline{x}=x-x_0 & \text{e} & y=y_0+\overline{y} \implies \\ \overline{y} & = & y-y_0 \end{array}$$

Logo:

$$\begin{array}{rcl} (\overline{y})^2 & = & 2p\overline{x} \implies \\ (y-y_0)^2 & = & 2p(x-x_0) \end{array}$$

Portanto, concluímos que a equação reduzida da parábola que possui centro no ponto $\overline{O}=(\overline{x},\overline{y})$ é:

$$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0).$$

Analogamente, se tomarmos uma parábola com vértice no ponto $\overline{O} = (\overline{x}, \overline{y})$, porém com diretriz paralela ao eixo das abscissas. Ver figura abaixo:

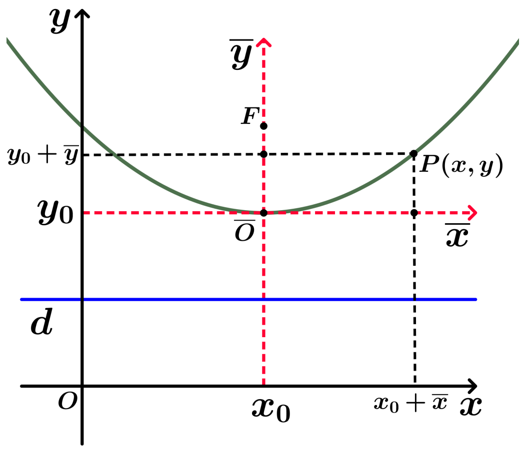


Figura 3.25

Segue-se que sua equação é definida como:

$$(\overline{x})^2 = 2p\overline{y}$$

No entanto, como vimos, em relação ao sistema de coordenadas cartesianas xOy, temos que sua equação será:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0).$$

Capítulo 4

Práticas pedagógicas: método tradicional e uso do *software* Geogebra.

Tradicionalmente, o ensino da matemática esta vinculado a práticas pedagógicas que exigem o uso de poucos recursos didáticos por parte dos professores. Isso se dá por falta desses recursos nas próprias instituições de ensino, em outras, por falta de formação adequada do professor ou falta de motivação para fazer algo diferente em suas aulas. Em fim, as aulas de matemática são ministradas, em sua grande maioria, com o uso frequente do quadro, pincel, giz e lista de exercícios para os alunos praticaram repetitivamente as resoluções. Esse modelo de ensino vem sofrendo alterações, principalmente com o avanço das novas tecnologias e com uso dessas ferramentas no ambiente escolar.

> Para que possamos oferecer ao aluno um ensino de qualidade frente às Novas Tecnologias é imprescindível que estejamos preparados e habilitados para se trabalhar nesse inovador método de ensino e aprendizagem. Estar inserido nesse novo meio quer dizer não deixar de usar as tecnologias já existentes e sim, introduzi-las e ter o conhecimento técnico para utilizá-las e para desenvolver atividades pedagógicas eficientes. Ninguém é capaz de ensinar aquilo que não aprendeu. Somente se ensina o que se conhece. E, para se trabalhar com Novas Tecnologias é preciso ter conhecimento técnico e, assim saber lidar como toda essa informatização de forma a produzir bons frutos com essa prática que é tão prazerosa e nos mostra na prática o que a teoria nos ensina. (RIBEIRO, PAZ , 2012 P. 19).

Portanto, buscando proporcionar uma metodologia que possa desenvolver no educando interesse pelo os conteúdos matemáticos, inserimos o uso das novas tecnologias em nossa pesquisa. Neste capítulo, serão descrito a sequencia de atividades que foram desenvolvidas usando o método tradicional de ensino e também fazendo o uso do Geogebra. Destacamos ainda a importância da utilização do método Fedathi no desenvolvimento das atividades, tanto no método tradicional , quanto com o uso do Geogebra. Após a aplicação de questionários de avaliação e obtenção de resultados para analise de dados estatísticos, que seriam norteadores para analisarmos os efeitos dessas metodologias, foi exposto uma apresentação gráfica dos resultados obtidos.

4.1 Perfil das turmas selecionadas para aplicação da pesquisa

As atividades foram desenvolvidas durante o segundo semestre do ano de 2022, nos meses de outubro e novembro. As turmas selecionadas foram do turno tarde, são elas: 3º ano E e G, sendo o 3º ano E composta por 32 alunos e o 3º ano G composta por

33 alunos, respectivamente. É importante ressaltar que para mantermos confidencial e sigilosa a pesquisa, foram omitidos os nomes ou qualquer tipo de informação que possam levar à identificação dos alunos participantes. Assim os alunos da turma E, a qual foram desenvolvidas as atividades com a intervenção pedagógica do Geogebra, receberam uma nomenclatura específica, sendo denominados por: E-1, E-2,..., E-32. Da mesma forma, os alunos da turma G, na qual foram desenvolvidas as atividade de forma tradicional, e que chamaremos de turma de controle, receberam as denominações específicas de G-1, G-2, ..., G-33. Durante as duas primeiras semanas, foi feito um trabalho de conscientização das turmas a respeito da seriedade e importância de nossas atividades, com o uso do projetor, foram apresentados, separadamente, para as turmas o tema da pesquisa e como seria desenvolvido.

4.2 Plano de Ensino

A seguir apresentamos as etapas do desenvolvimentos de um plano de aula de matemática. O modelo de plano é único, para a aplicação das práticas pedagógicas usando o método tradicional e com o uso do *software* Geogebra.

4.2.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste planejamento consiste em proporcionar uma aprendizagem de modo construtivo sobre as Cônicas, levando o aluno a compreender os conteúdos e proporcionando uma aprendizagem consistente sobre o tema estudado. Deste modo, após a aplicação, espera-se que o aluno possa saber:

- Identificar as Cônicas (elipse, hipérbole e parábola), a partir do lugar geométrico que representa cada uma de suas equações;
- Identificar os principais elementos (centro, o eixo maior, o eixo menor, a distância focal, as coordenadas dos focos, excentricidade) das Cônicas (elipse, hipérbole e parábola) a partir de suas equações ou representações gráficas no plano cartesiano;
- Classificar as principais Cônicas em: elipse, hipérbole e parábola, usando suas propriedades e definições.

4.2.2 Objetivo Específico

Os objetivos específico foram organizados e planejados de modo a contemplar cada um dos conteúdos: elipse, hipérbole e parábola

- Conceituar as cônicas através de suas definições;
- Esboçar graficamente uma cônica;
- Identificar os principais elementos de uma cônica através de sua equação.
- Identificar os principais elementos de uma cônica através do seu gráfico.

4.2.3 Pré-Requisitos

É fundamental que o aluno apresente os seguintes conhecimentos:

- Localizar e marcar pontos no plano cartesiano;
- Representar pares ordenados no plano;
- Aplicar o teorema de Pitágoras em um triângulo retângulo;
- Desenvolver cálculos algébricos com produtos notáveis;
- Calcular a distância entre dois pontos;
- Conhecer o computador e suas funções básicas.

4.2.4 Componente Curricular

- **Tema**: Geometria Analítica;
- **Conteúdo**: Cônicas;
- **Modalidade**: Ensino Médio - 3º ano;
- **Currículo**: Matemática.

4.2.5 Recursos Didáticos

Listamos os recursos que foram utilizados nas duas partes da pesquisa, tanto no método tradicional, quanto com o uso do Geogebra.

- Livro didático;
- Caderno do aluno;
- Quadro branco, pincel, apagador;
- Lista de exercícios propostos;
- Projetor multimídia;
- Laboratório de informática;
- Software Geogebra;
- Questionário para avaliação e análise de resultados.

4.2.6 Cronograma de aplicação da pesquisa

Para o desenvolvimento desse plano de aula, foram necessários 48 aulas, divididas por metodologia, sendo 21 horas-aula para o desenvolvimento das atividades voltadas para o método tradicional e 21 horas-aula para as atividades desenvolvidas com o uso do Geogebra, e 6 horas-aula reservadas para aplicação do questionário para analise de dados, da seguinte forma:

Método tradicional

- 3 horas-aula para desenvolver a introdução a elipse, mais 3 horas-aulas de discussão e resolução de exercícios elaborados pelo professor pesquisador e do livro didático do aluno em anexo no **Apêndice C**.
- 3 horas-aula para desenvolver a introdução a hipérbole, mais 3 horas-aula de discussão e resolução de exercícios elaborados pelo professor pesquisador e do livro didático do aluno em anexo no **Apêndice C**.

- 3 horas-aula para desenvolver a introdução a parábola, mais 3 horas-aula de discussão e resolução de exercícios elaborados pelo professor pesquisador e do livro didático do aluno em anexo no **Apêndice C**.

- 3 horas-aula para responder os questionários de Cônicas, sendo 1 hora-aula reservado para o questionário sobre elipse, 1 hora-aula reservado para o questionário sobre hipérbole e 1 hora-aula reservado para o questionário sobre parábola. Sendo que os questionários foram resolvidos separadamente, após finalizar o estudo da elipse foi aplicado 4 questões sobre elipse, e assim seguimos o mesmo modelo para a hipérbole e a parábola.

Uso do Geogebra

- 2 horas-aula reservadas para o primeiro contato com o Geogebra e conhecer suas principais ferramentas;

- 4 horas-aula reservadas para observar o comportamento dos principais elementos de cada Cônica estudada, através da janela algébrica do Geogebra;

- 1 hora-aula para conceituar o lugar geométrico representado pela elipse, através de observações no *software* Geogebra;

- 3 horas-aula para fazer análise, discussões, anotações e chegar a devida solução das atividades propostas no Geogebra sobre elipse e em seguida apresentar suas conclusões, deduções e conjecturas formuladas sobre a Cônica estudada.

- 1 hora-aula para conceituar o lugar geométrico representado pela hipérbole, através de observações no Os objetivos específicos foram organizados para cada um dos conteúdos, a saber: cônicas: elipse, hipérbole e parábola Geogebra;

- 3 horas-aula para fazer análise, discussões, anotações e chegar a devida solução das atividades propostas no Geogebra sobre hipérbole, e em seguida apresentar suas conclusões, deduções e conjecturas formuladas sobre a Cônica estudada.

- 1 hora-aula para conceituar o lugar geométrico representado pela parábola, através de observações no Geogebra;

- 3 horas-aula para fazer análise, discussões, anotações e chegar a devida solução das atividades propostas no Geogebra sobre parábola, e em seguida apresentar suas conclusões, deduções e conjecturas formuladas sobre a Cônica estudada.

- 3 horas-aula para responder os questionários de Cônicas, sendo 1 hora-aula reservado para o questionário sobre elipse, 1 hora-aula reservado para o questionário sobre hipérbole e 1 hora-aula reservado para o questionário sobre parábola. Sendo que os questionários foram resolvidos separadamente, após finalizar o estudo da elipse foi aplicado 4 questões sobre elipse, e assim seguimos o mesmo modelo para a hipérbole e a parábola.

4.3 O método Fedathi e sua aplicação no desenvolvimento das atividades.

Selecionamos uma sequência de soluções apresentadas pelos alunos, que usaremos como descrição dos detalhes de como foram desenvolvidas alguns exercícios dentro da metodologia da Sequência Fedhat. Essas soluções foram escolhidos no decorrer da pesquisa e nos resultados apresentados na aplicação do questionário para análise de dados e resultados.

A finalidade dos exercícios desenvolvidos foram, reconhecer e identificar os principais elementos das Cônicas (elipse, hipérbole e parábola) e as relações importantes existente entre eles, através de sua representação gráfica. É importante ressaltar que o uso do método Fedhat não é o foco principal dessa pesquisa, mais sim, um método que usamos acreditando que poderíamos chegar em soluções mais construtiva por parte dos alunos, incentivando o protagonismo no decorrer do processo de ensino-aprendizagem. Vejamos a seguir a sequência metodológica seguida na resolução das atividades:

Tomada de posição

Analisar, observar, questionar e levantar hipóteses a partir dos conhecimentos prévios da turma sobre os principais elementos e conceitos geométricos, que permitem identificar as propriedades e os principais elementos de uma Cônica. Nesse estágio, foram questionados os conhecimentos prévios de geometria analítica da turma nos seguintes pontos:

- Localizar as coordenadas de um ponto no plano cartesiano.
- Identificar os pontos de um lugar geométrico no plano cartesiano.
- Fatorar e desenvolver cálculos algébricos com produtos notáveis.
- Conceituar e determinar a distância entre dois pontos quaisquer no plano cartesiano.

Maturação

Compreender e identificar as variáveis envolvidas, que possam levar a resolução da situação - problema. Nos exercícios propostos, os alunos concentram-se em identificar os dados e variáveis que serão o ponto de partida para as estratégias de resolução. Procedimentos:

- Identificar na situação problema os principais elementos da elipse (focos, centro, vértices, eixo maior, eixo menor, excentricidade).
- Identificar na situação problema os principais elementos da hipérbole (focos, centro, vértices, eixo real, excentricidade).
- Identificar na situação problema os principais elementos da parábola (focos, vértice, diretriz, parâmetro, eixo de simetria).
- Conceituar os principais elementos das cônicas (elipse, hipérbole e parábola).
- Determinar a medida do comprimento da distância focal, eixo maior e eixo menor da elipse e da hipérbole.
- Calcular a excentricidade da elipse e da hipérbole e compreender seu significado.
- Usar a definição do lugar geométrico representados pelas Cônicas (elipse, hipérbole e parábola), para determinar sua equação, a partir da fórmula da distância entre dois pontos, conhecimentos de fatoração e produtos notáveis.

Solução

Após maturar e refletir, os estudantes apresentam suas soluções e estratégias que foram usadas para resolver a situação problema.

Prova

Finalização do processo, elaboração do modelo geral, representação genérica ou fórmula a ser apresentada pelo aluno para resolução de outras situações problemas. Nesse momento, a partir de cálculo algébricos, o aluno deve conseguir formalizar a equação geral de uma cônica.

4.4 Atividades desenvolvidas pelo método tradicional

Vejamos a seguir uma sequência de exercícios, que usaremos como descrição dos detalhes de como foram desenvolvidas alguns exercícios pelo método tradicional de ensino dentro da metodologia da Sequência Fedathi. Com a finalidade de, reconhecer e identificar os principais elementos das Cônicas (elipse, hipérbole e parábola) e as relações importantes existente entre eles, através de sua representação gráfica e equações algébricas.

4.4.1 Exercício 01 - Elipse

Observe a representação gráfica da elipse. Determine os seguintes elementos: as coordenadas do centro, vértices e focos; a medida do comprimento do eixo maior, eixo menor e distância focal; calcule e excentricidade e encontre sua equação reduzida.

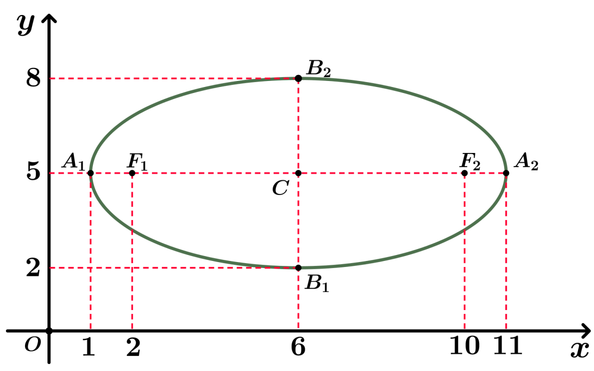


Figura 4.1

4.4.2 Execício 02 - Hipérbole

Observe a representação gráfica da hipérbole. Determine os seguintes elementos: as coordenadas do centro, vértices e focos; a medida do comprimento do eixo maior, eixo menor e distância focal; calcule e excentricidade e encontre sua equação reduzida.

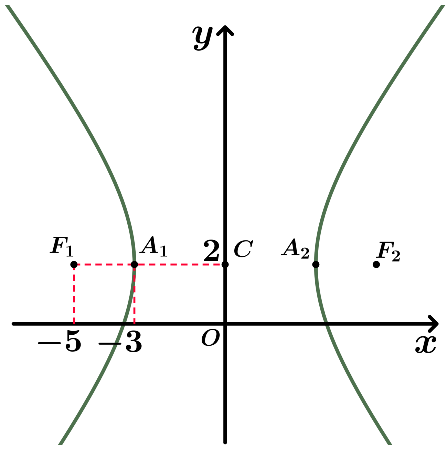


Figura 4.2

4.4.3 Exercício 03 - Parábola

Observe a representação gráfica da elipse. Determine os seguintes elementos: as coordenadas do centro, vértices e focos; a medida do comprimento do eixo maior, eixo menor e distância focal; calcule e excentricidade e encontre sua equação reduzida.

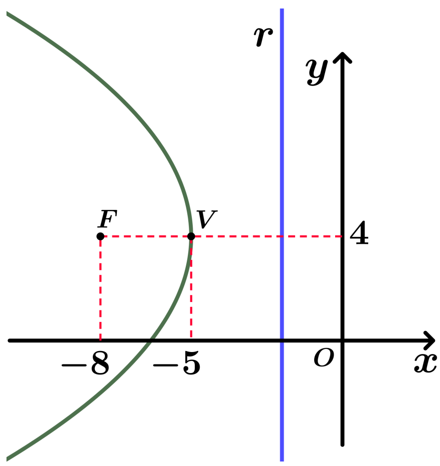


Figura 4.3

As soluções dos exercícios acima, estão em anexo no **apêndice A** da dissertação .

4.5 Procedimentos e metodologias para o uso *software* Geogebra.

No decorrer da pesquisa, o uso do *software* Geogebra nas atividades propostas, foi pensado de forma a motivar os alunos para o estudo dos temas abordados, e promover o protagonismo do aluno na construção do conhecimento. Os primeiro encontros, foram para apresentar os alunos a dinâmica de como seriam desenvolvidas as etapas da pesquisa. Com o auxilio do retroprojetor tivemos uma breve exposição do Geogebra e algumas de suas funções que iríamos precisar em nossos estudos posteriores, em seguida uma visita no laboratória de informática para um primeiro contato com *software* instalado nos computadores. Ao fazer uso dos computadores e ter seu primeiro contado com o *software*, os estudantes demonstraram-se motivados, interessados e curiosos em relação a experiência de utilizar essa ferramenta interativa e tornar as aulas mais dinâmicas. Visando uma aprendizagem significativa dos conceitos, definições e propriedades das cônicas, as atividades foram desenvolvidas sempre dando ênfase ao método Fedathi.

A princípio foram detectados, através de observações e indagações de alguns alunos, dificuldades de manuseio de algumas funções do *software*. No entanto, para ser mais objetivo em nossa pesquisa e atingir a participação construtiva de todos, foi necessário planejar uma estratégia que motivasse a participação de toda turma. Portanto fomos motivados pela ideia de deixar salva em cada computador a Cônica que iríamos estudar, como veremos nas figuras a seguir, assim garantimos uma participação mais consistente de todos, para que os alunos, através da ferramenta controle deslizante, pudessem fazer translações verticais e horizontais observando o comportamento de seus elementos e suas propriedades, a partir dessas translações e observando os resultado obtidos na janela algébrica fazer conclusões e deduções sobre a Cônica estudada.

4.6 Primeiros contatos com o Geogebra, conhecendo as cônicas e seus elementos através da janela algébrica.

Veremos nas figuras a seguir, as ilustrações dos primeiros ensaios com o Geogebra. Em cada situação, foram elaborados e planejados pelo professor pesquisador uma representação gráfica da cônica em estudo, que ficou salva em cada computador. Através da ferramenta "controle deslizante"o aluno poderia movimentar a figura e fazer observações dos resultados obtidos através da janela algébrica. Era o momento oportuno para o aluno fazer suas anotações e começar o processo de maturação das ideias, e posteriormente conseguir fazer atividades do forma individual. Essas atividades foram realizadas no laboratório de informática intercalando com a sala de aula, utilizando a lousa para a teoria.

4.6.1 Representação gráfica da elipse

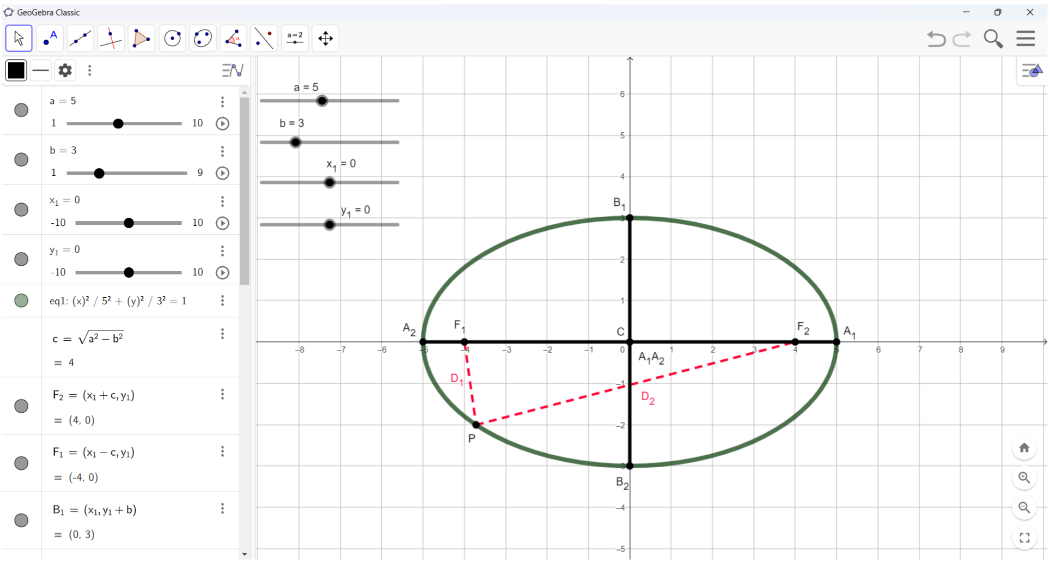


Figura 4.4

Descrição e funções dos elementos representandos na janela algébrica

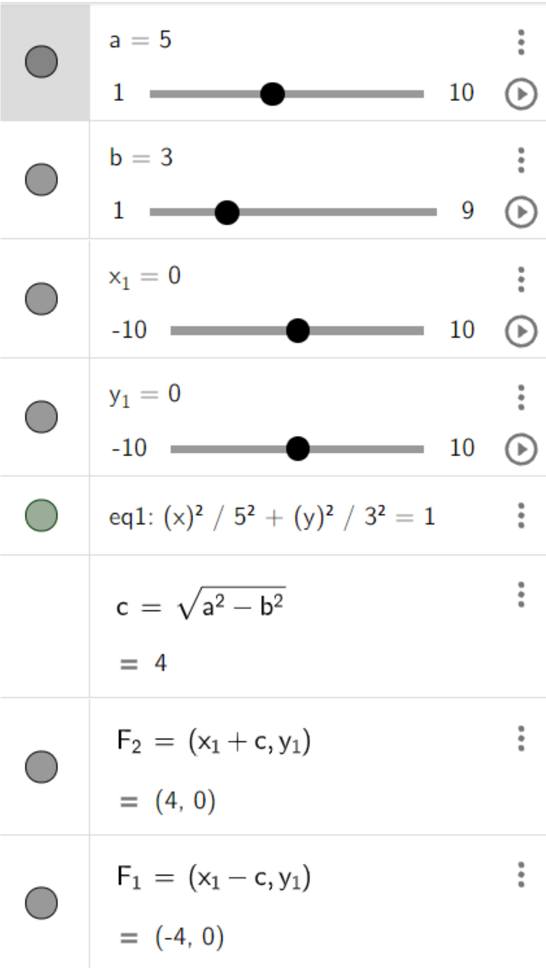


Figura 4.5

- Controles deslizante a e b, representam os semi-eixo maior e menor, respectivamente. Estes controles tem função de alterar vários elementos da elipse, tais como: comprimentos dos eixos, distância focal, excentricidade.
- Controles deslizantes x_1 e y_1, tem a função dinâmica de movimentar a elipse na horizontal e vertical.
- $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$ equação da elipse.
- $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, Aplicação do teorema de Pitágoras no triângulo B_1F_2C para observar os pontos dos focos F_1 e F_2 da elipse.
- $F_1 = (x_1 + c, y_1)$ e $F_2 = (x_1 - c, y_1)$ representam os focos da elipse.

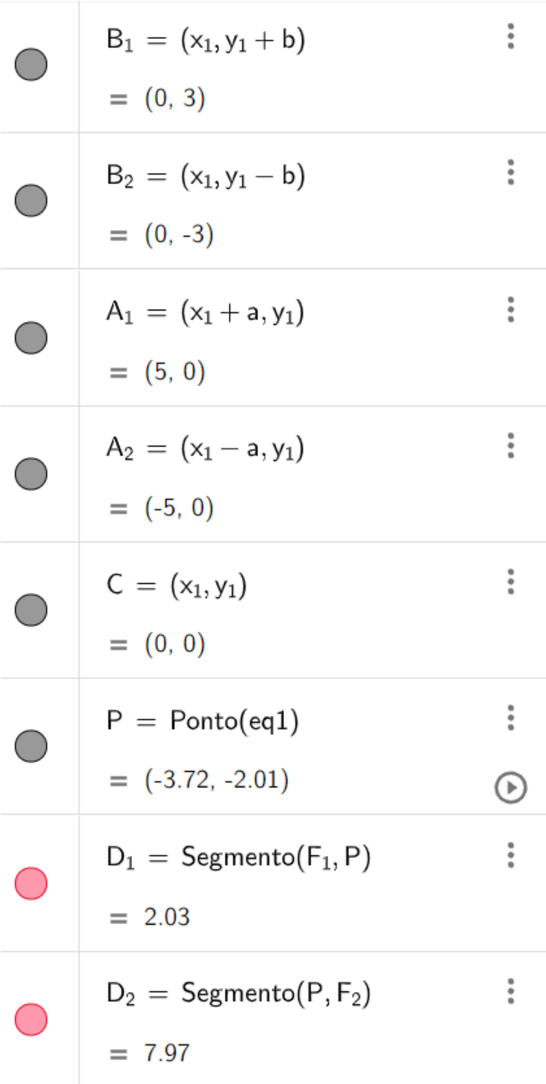


Figura 4.6

- $B_1 = (x_1, y_1{+}b)$ e $B_2 = (x_1, y_1{-}b)$, são os pontos dos vértice sobre o eixo menor.
- $A_1 = (x_1 + a, y_1)$ e $A_2 = (x_1 - a, y_1)$, são os pontos dos vértice sobre o eixo maior.
- $C = (x_1, y_1)$ são a coordenadas do ponto que representa o centro.
- O ponto P, esta associado as coordenadas de um ponto qualquer sobre a elipse..
- D_1 representa o comprimentos do segmento (F_1, P), ou seja, é a distância do ponto P ao foco F_1.
- D_2 representa o comprimentos do segmento (P, F_2), ou seja, é a distância do ponto P ao foco F_1.

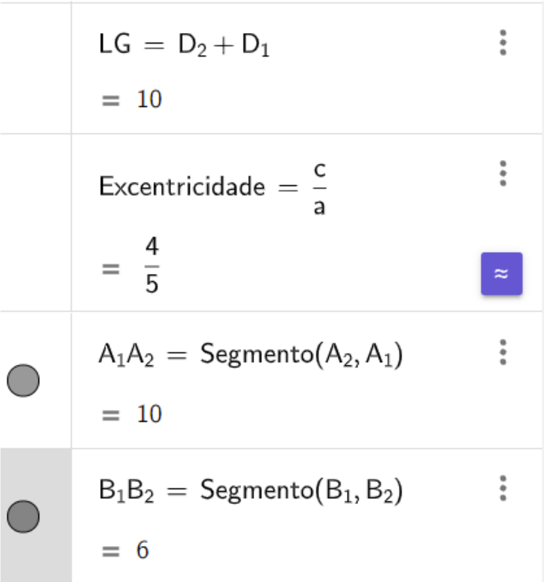


Figura 4.7

- $LG = D_2 + D_1$ lugar geométrico da elipse, cuja a soma das distâncias D_1 e D_2 é constante.
- Excentricidade $= \dfrac{c}{a}$, mede o grau de achatamento da elipse.
- O segmente A_1A_2, representa a medida do eixo maior.
- O segmente B_1B_2, representa a medida do eixo menor.

4.6.2 Representação gráfica da hipérbole.

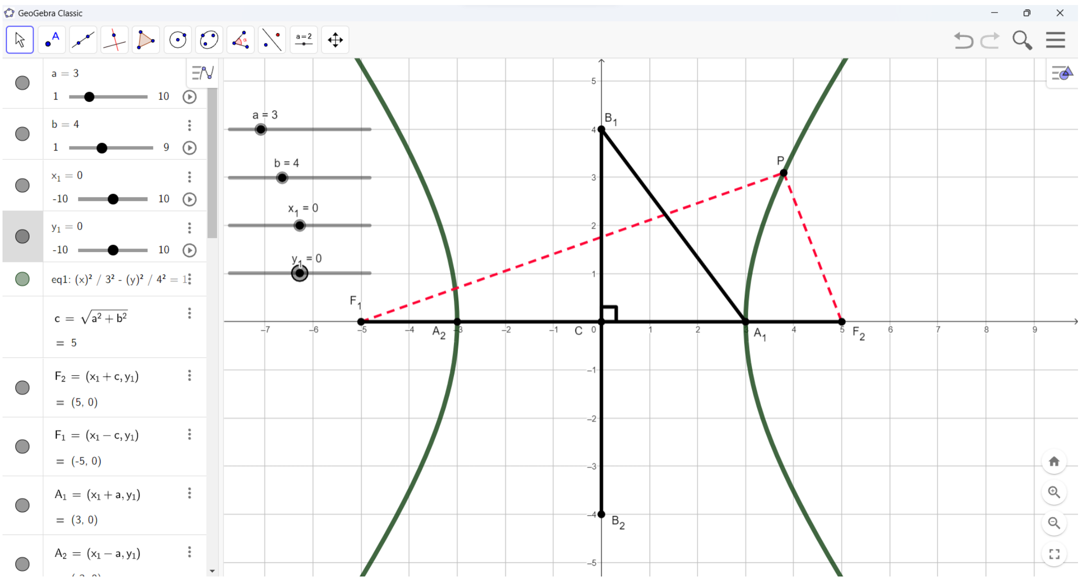
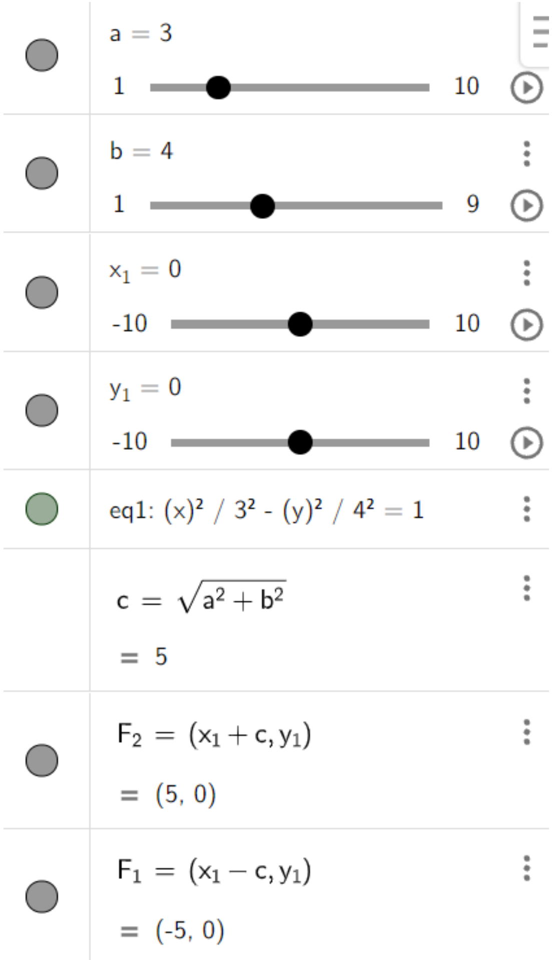


Figura 4.8

Descrição e funções dos elementos representandos na janela algébrica



- Controles deslizante a e b, tem função de alterar vários elementos da hipérbole, tais como: comprimentos dos eixos, distância focal, excentricidade.
- Controles deslizantes x_1 e y_1, tem a função de transladar a hipérbole na direção horizontal e vertical.
- $\dfrac{x^2}{3^2} - \dfrac{y^2}{4^2} = 1$ equação da hipérbole.
- $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, Aplicação do teorema de Pitágoras no triângulo B_1F_2C para observar os pontos dos focos F_1 e F_2 da hipérbole.
- $F_1 = (x_1 + c, y_1)$ e $F_2 = (x_1 - c, y_1)$ representam os focos.

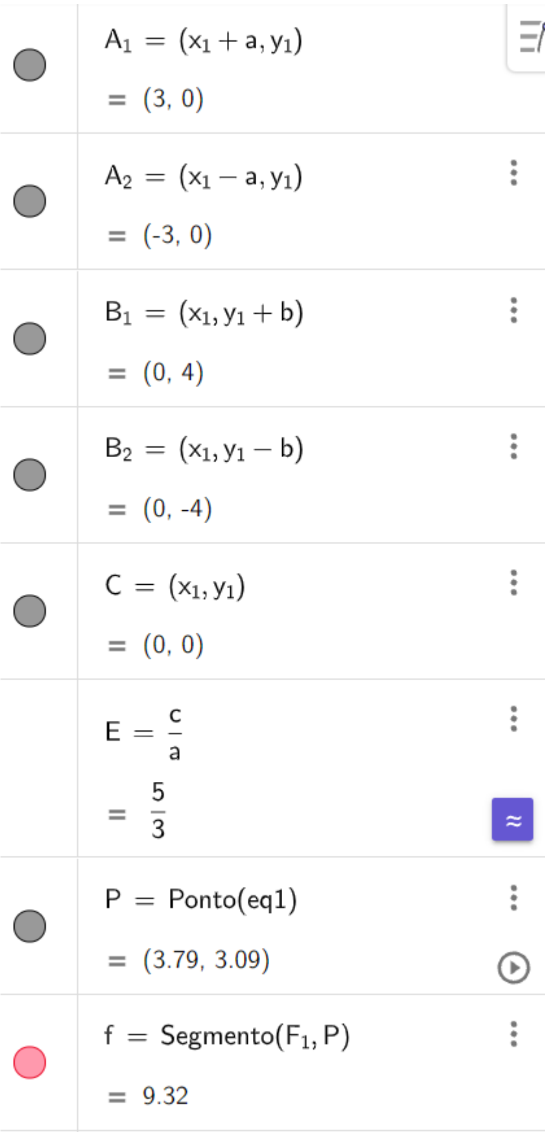


Figura 4.9

- $A_1 = (x_1 + a, y_1)$ e $A_2 = (x_1 - a, y_1)$, são os pontos dos vértice sobre o eixo focal..
- $B_1 = (x_1, y_1+b)$ e $B_2 = (x_1, y_1-b)$, são os pontos dos vértice sobre o eixo imaginário.
- $C = (x_1, y_1)$ são a coordenadas do ponto que representa o centro.
- $E = \dfrac{c}{a}$ é a excentricidade. É determinado pela razão entre a hipotenusa e um cateto do triângulo retângulo B_1A_1C da figura 4.8.
- O ponto P, esta associado as coordenadas de um ponto qualquer sobre a hipérbole.
- O segmento (F_1, P) representa a distância do foco F_1, ao ponto P da hipérbole.

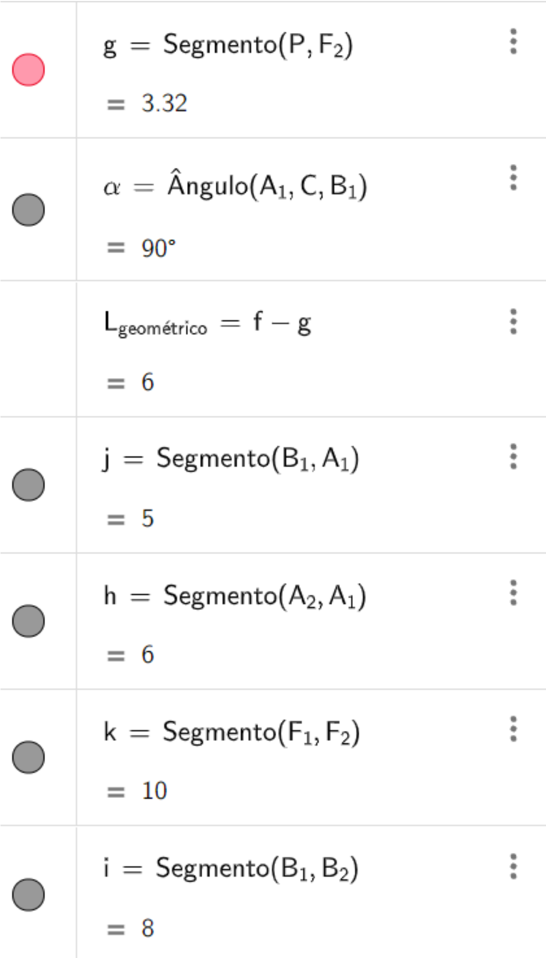


Figura 4.10

- O segmento (P, F_2) representa a distância do ponto P, ao foco F_2 da hipérbole.
- $L = f - g$ é o lugar geométrico da hipérbole, cuja a diferença das distâncias f e g é constante.
- O segmente A_1A_2, é a medida da distância entre os vértices que estão sobre o eixo real.
- O segmentos F_1F_2, é a medida da distância entre os focos da hipérbole.
- O segmente B_1B_2, é a medida da distância entre os vértices que estão sobre o eixo imaginário.

4.6.3 Representação gráfica da parábola.

Figura 4.11

Descrição e funções dos elementos representandos na janela algébrica

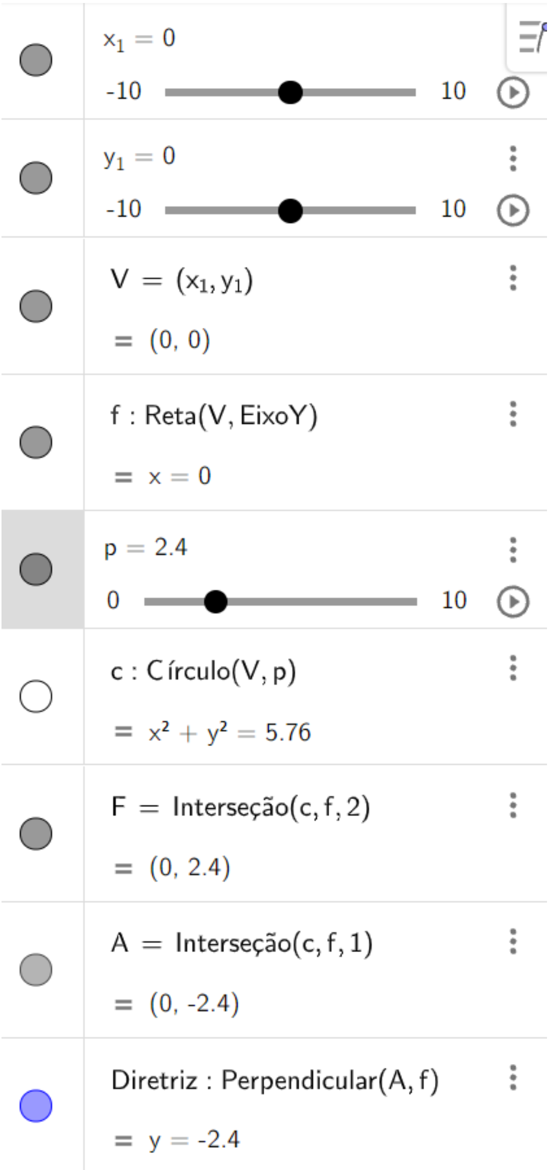


Figura 4.12

- O controle deslizante x_1, translada a parábola na direção horizontal.
- O controle deslizante y_1, translada a parábola na direção vertical.
- $V = (x_1, y_1)$ é ponto do vértice da parábola.
- A reta f é o eixo de simetria, é a reta que contém o foco e divide a parábola em duas partes simétricas, sendo perpendicular à diretriz.
- O controle deslizante p representa o parâmetro da parábola, tem a função de movimentar o foco e a reta diretriz, em relação ao vértice da parábola.
- O Ponto F é o foco da parábola.
- A reta $y = -2,4$ é a diretriz da parábola.

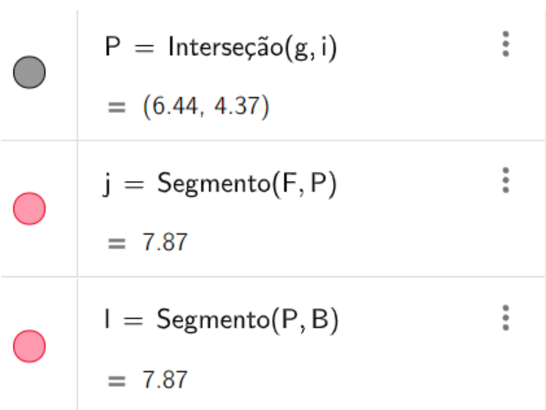


Figura 4.13

- O ponto P, esta associado as coordenadas de um ponto qualquer pertencente a parábola.
- $j = segmento(FP)$ é a distância do foco F ao ponto P qualquer pertencente a parábola.
- $l = segmento(PB)$ é a distância de um ponto P qualquer pertencente a parábola, ao ponto B da reta diretriz.

4.7 Sequências de atividades aplicadas com o uso do *software* Geogebra

Com o uso do *software* Geogrebra, inicialmente foram desenvolvidas no laboratório de informática uma sequência de exercícios, com o objetivo de reconhecer, identificar e observar o comportamentos dos principais elementos das cônicas (elipse, hipérbole e parábola) e as relações impostantes existente entre eles. A partir de suas equações e análise de gráficos, sempre fundamentos com as fases do método Fedathi.

Vejamos a seguir uma sequência de ilustrações gráficas para as cônicas, determinadas a partir de suas equações, apresentada pelos alunos, que serão mencionados por suas denominações fictícias em cada solução. Após ter encontrado o gráfico de cada equação, a partir dessas ilustrações, o aluno é motivado a fazer suas conclusões e encontrar a devida solução correta. Veremos as ilustrações de algumas dessas soluções no **Apêndice B**.

4.7.1 Exercício 1 - Elipse

Usando a ferramenta "controle deslizante", apresentada na tela inicial do Geogebra, represente geometricamente o gráfico correspondente a acada equação dada abaixo, em seguida faça uma análise gráfica e a partir dessa análise, determine o centro, o eixo maior, o eixo menor, a distância focal, as coordenadas dos focos , excentricidade e as relações existente entre essas variáveis.

01. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

02. $\dfrac{y^2}{9} + \dfrac{x^2}{4} = 1$

03. $\dfrac{(x-6)^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

04. $\dfrac{(y-4)^2}{9} + \dfrac{(x+2)^2}{1} = 1$

Vejamos a seguir algumas ilustrações gráficas, que foram selecionadas pelo professor pesquisador, sobre as equações das elipses acima, apresentadas pelo aluno E-15.

- Gráfico da equação 01. :

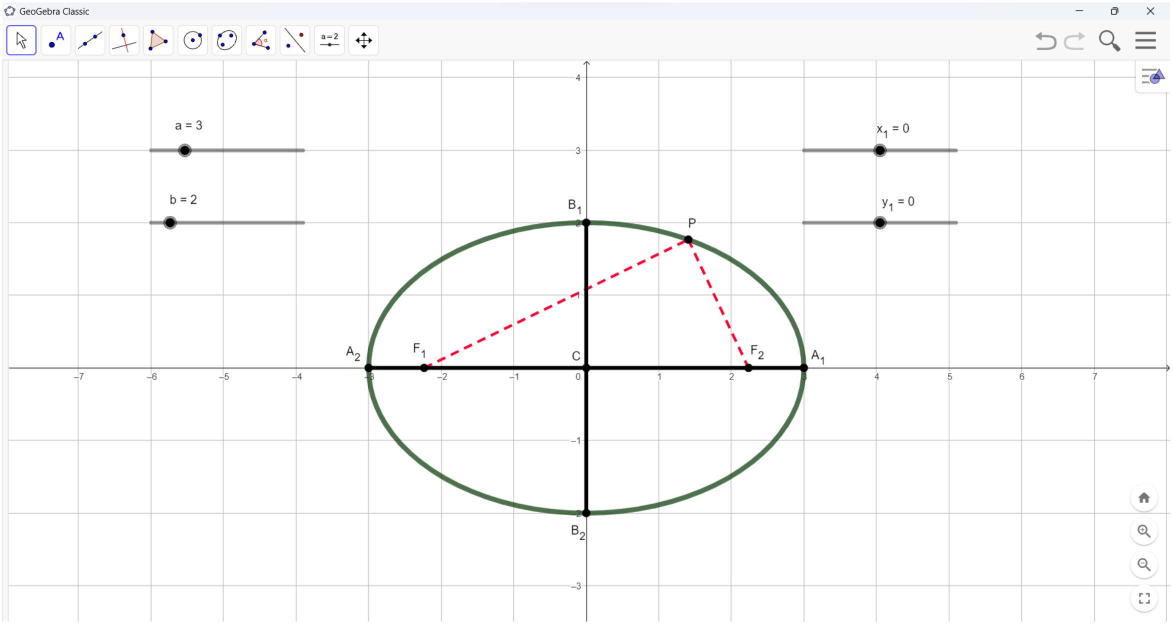


Figura 4.14

- Gráfico da equação 02.

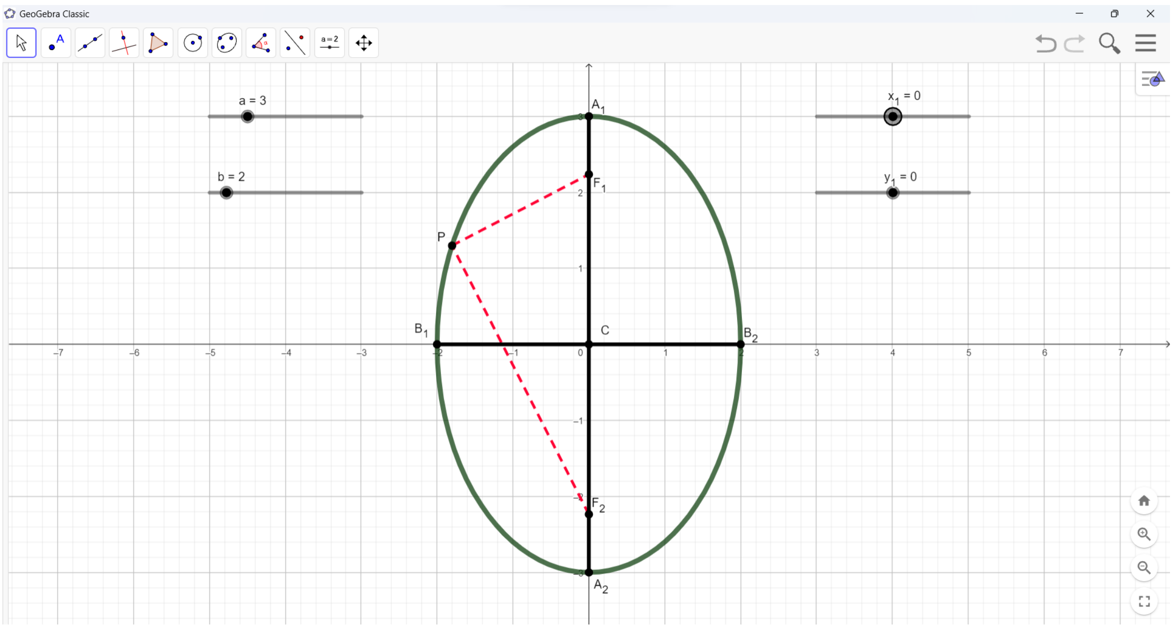


Figura 4.15

- Gráfico da equação 03.

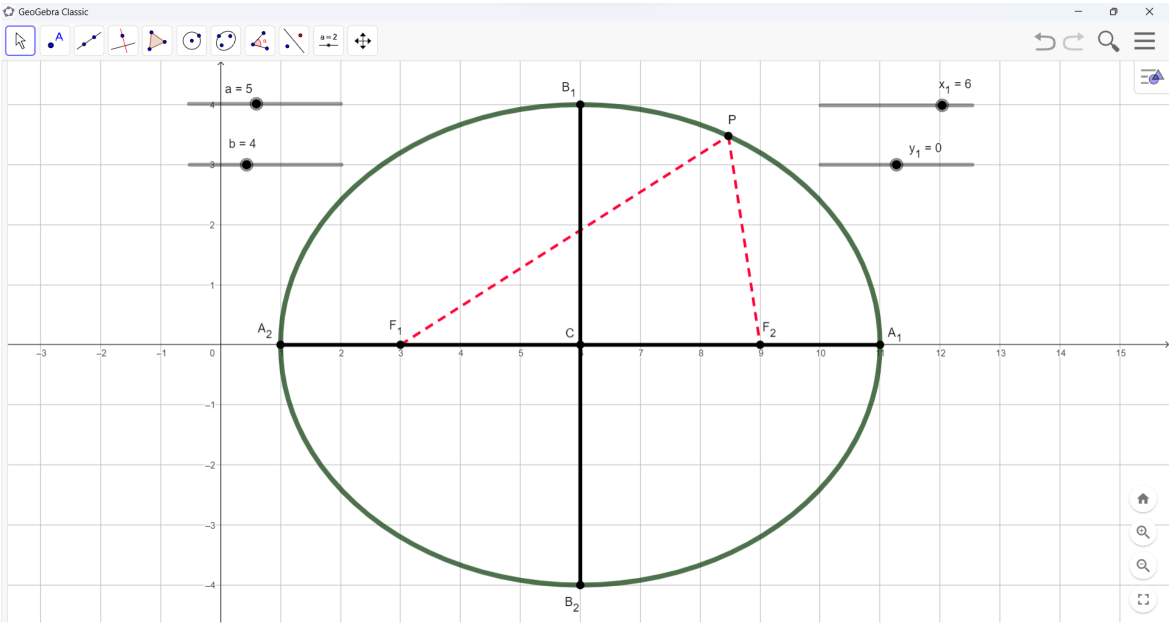


Figura 4.16

- Gráfico da equação 04.

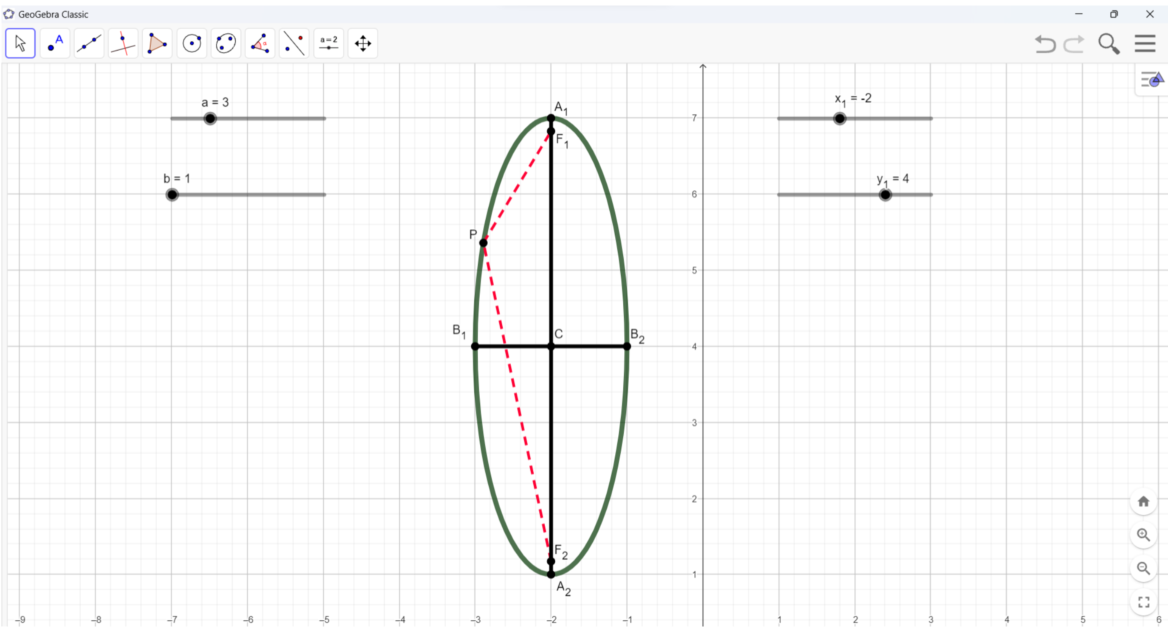


Figura 4.17

4.7.2 Exercício 02 - Hipérbole

Usando a ferramenta "controle deslizante", apresentada na tela inicial do Geogebra, represente geometricamente o gráfico correspondente a cada equação das hipérboles dadas abaixo, em seguida faça uma análise gráfica e a partir dessa análise, determine o centro, o eixo maior, o eixo menor, a distância focal, as coordenadas dos focos, excentricidade e as relações existente entre essas variáveis.

01. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

02. $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1$

03. $\dfrac{(x-3)^2}{9} - \dfrac{(y-4)^2}{16} = 1$

04. $\dfrac{(y-5)^2}{9} - \dfrac{(x+2)^2}{16} = 1$

Vejamos a seguir algumas ilustrações gráficas, que foram selecionadas pelo professor pesquisador, sobre as equações das hipérboles acima, apresentadas pelo aluno E-4.

- Gráfico da equação 01.

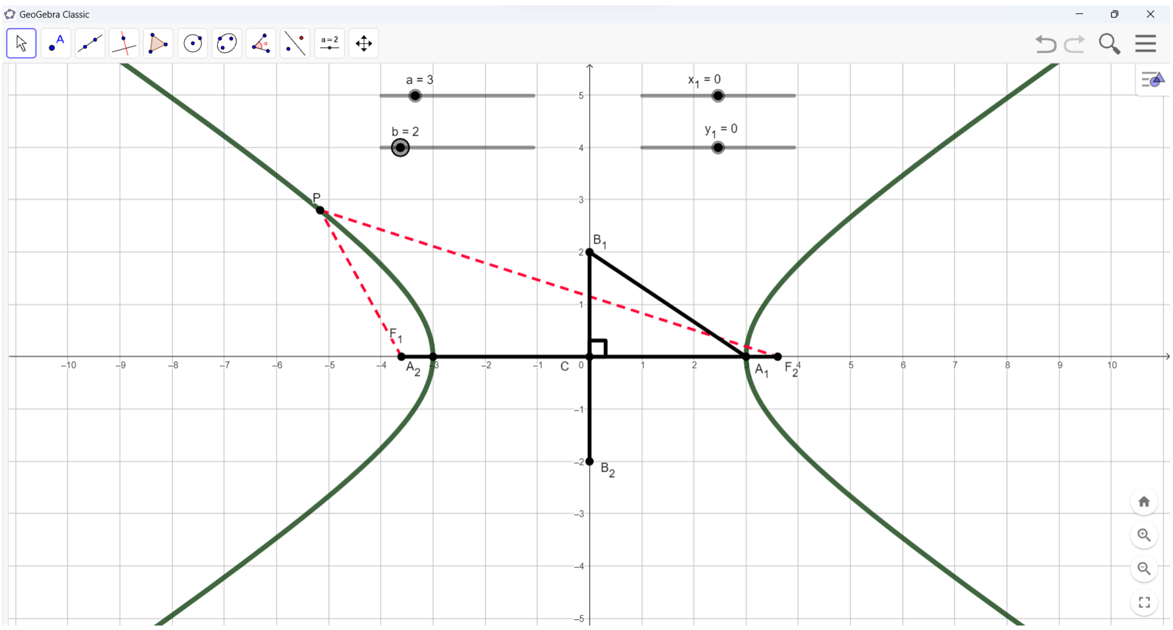


Figura 4.18

- Gráfico da equação 02.

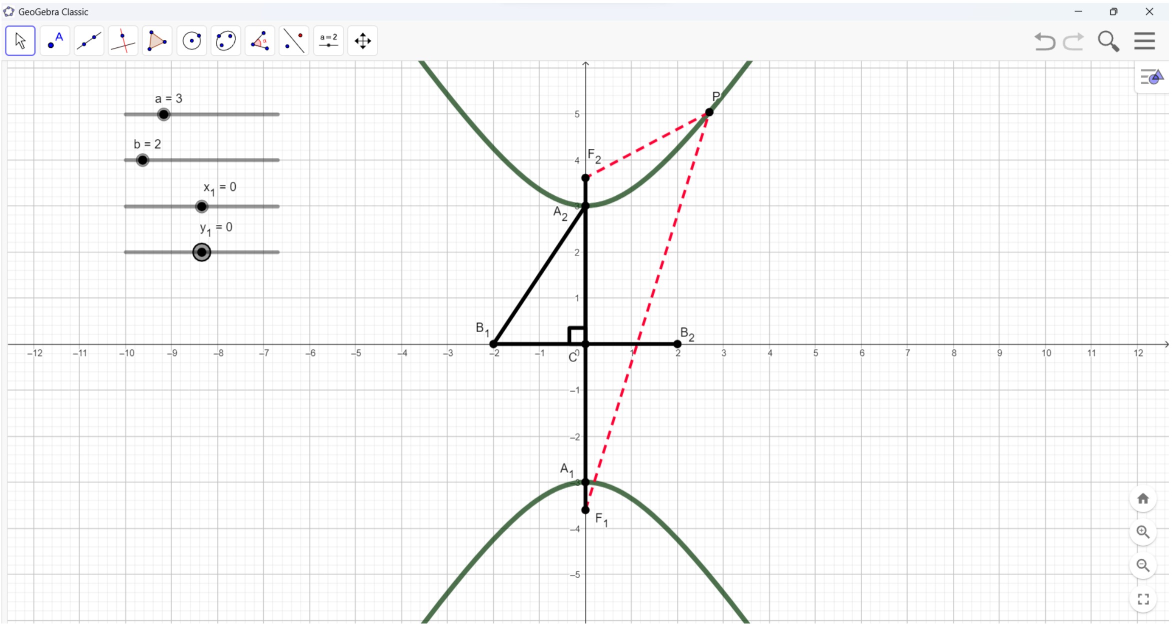


Figura 4.19

- Gráfico da equação 03.

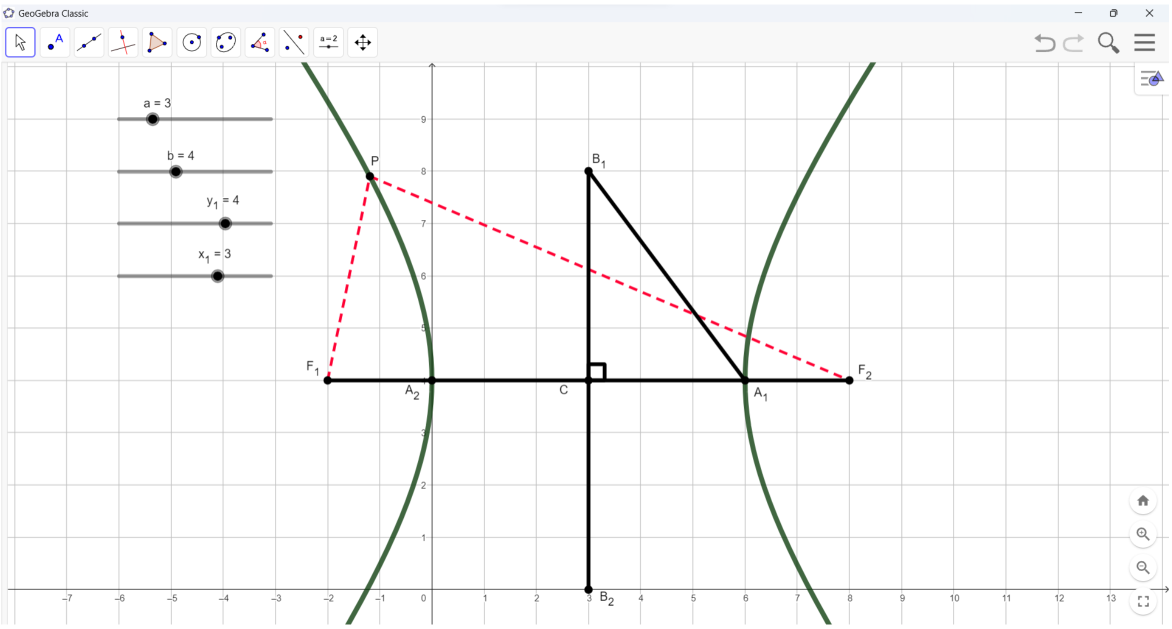


Figura 4.20

- Gráfico da equação 04.

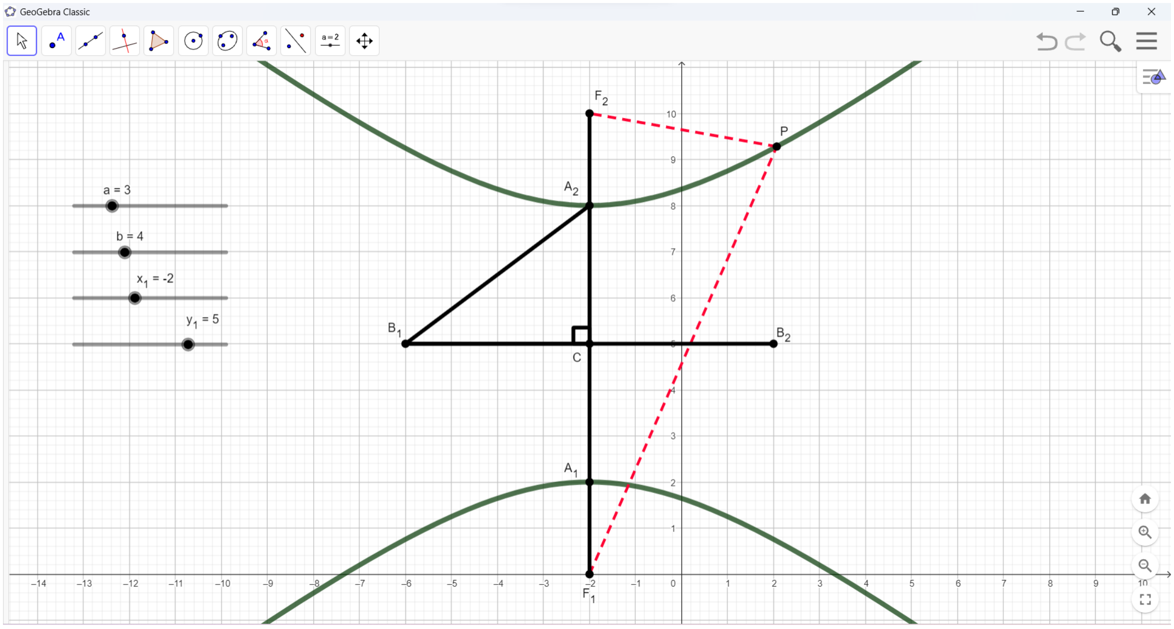


Figura 4.21

4.7.3 Exercício 03 - Parábola

Usando a ferramenta controle deslizante, apresentada na tela inicial do Geogebra, represente geometricamente o gráfico correspondente a cada equação das equações das parábolas dadas abaixo, em seguida faça uma análise gráfica e a partir dessa análise, determine as coordenadas do vértice, o foco, parâmetro e as relações existente entre essas variáveis. .

01. $y^2 = 2x$

02. $x^2 = -4y$

03. $(y+5)^2 = 4(x-6)$

04. $x^2 = -4(y-2)$

Vejamos a seguir algumas ilustrações gráficas, que foram selecionadas pelo professor pesquisador, sobre as equações das parábolas acima, apresentadas pelo aluno E-23.

- Gráfico da equação 01.

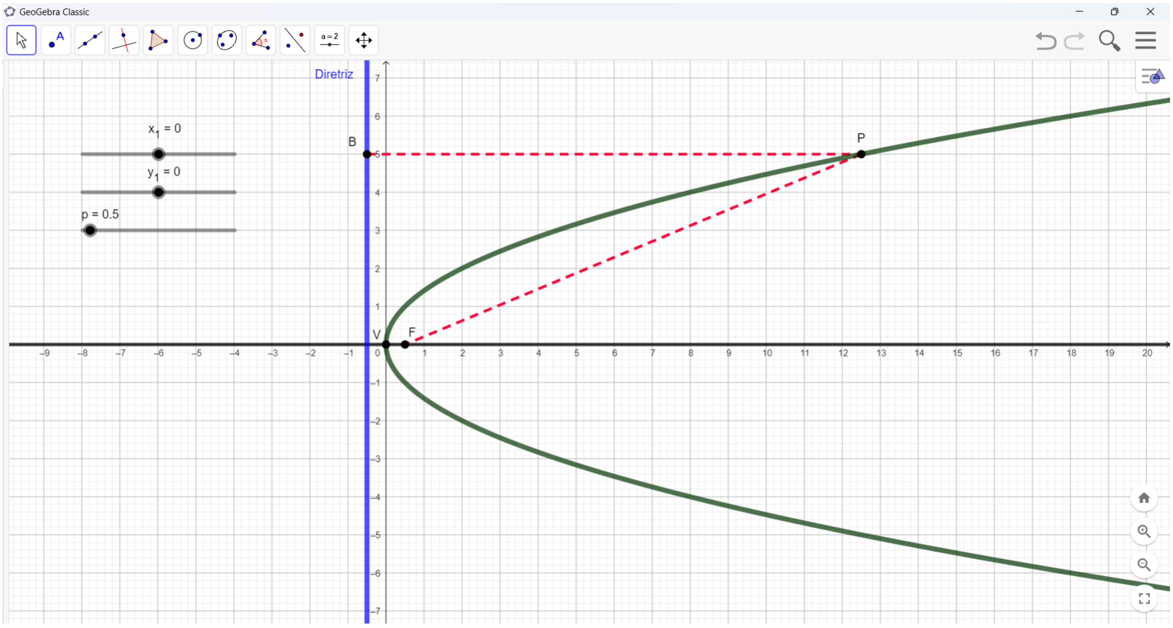


Figura 4.22

- Gráfico da equação 02.

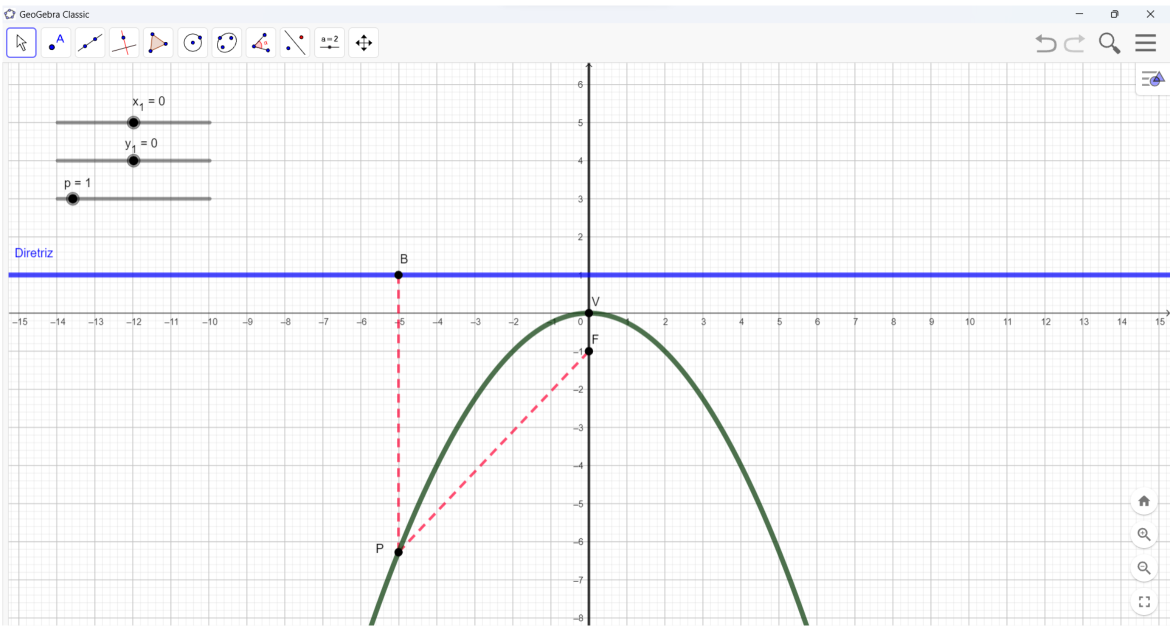


Figura 4.23

- Gráfico da equação 03.

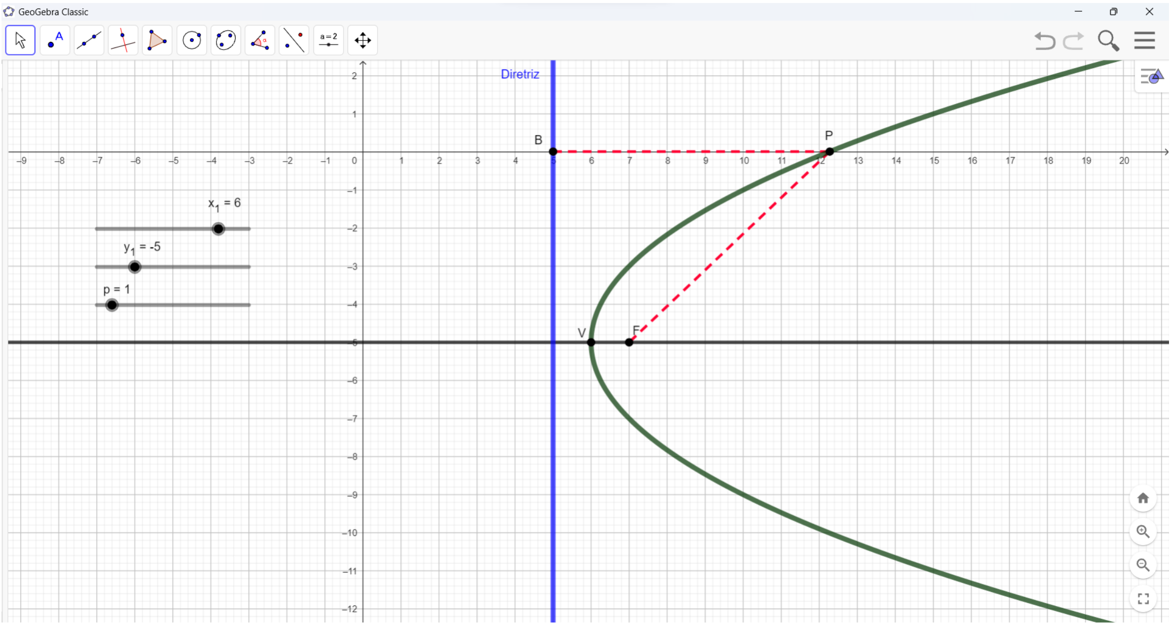


Figura 4.24

- Gráfico da equação 04.

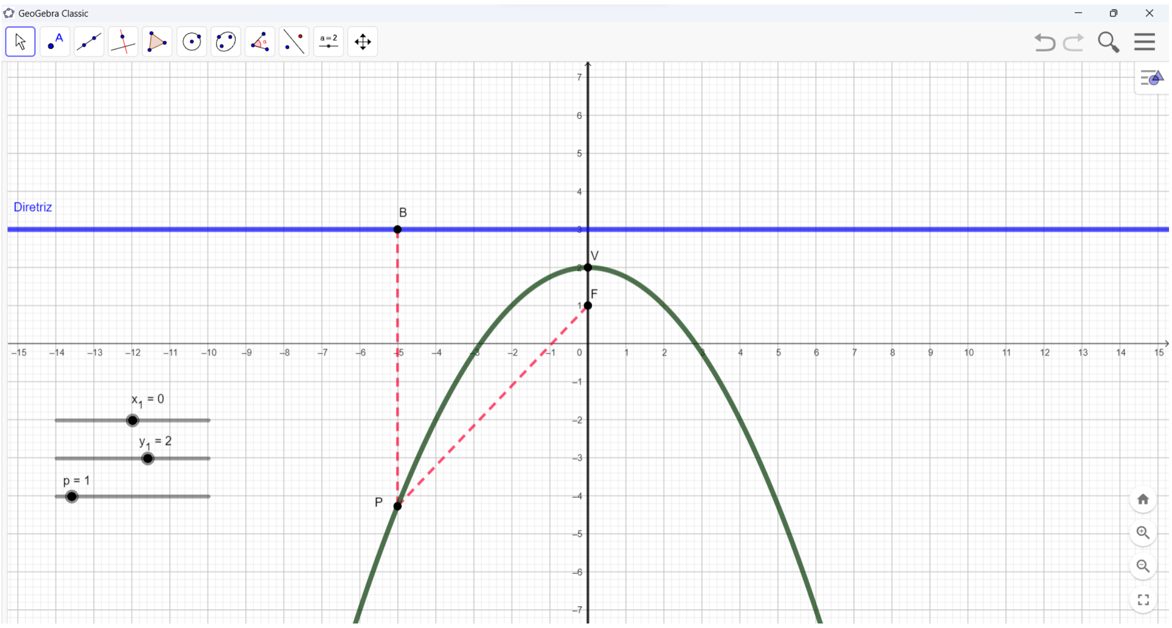


Figura 4.25

4.8 Análise e resultados

Nesta seção faremos uma análise dos resultados que foram alcançados a partir das metodologias aplicadas em nossa pesquisa. Para analisarmos o nível de aprendizagem, foram aplicados, às duas turmas, um questionário composto por 12 questões objetivas com o tema cônicas (elipse, hipérbole e parábola). As questões foram divididas, da seguinte forma: 4 questões de elipse, 4 questões de hipérbole e 4 questões de parábola. Todos os exercícios foram selecionados com base nas atividades desenvolvidas durante a pesquisa e nas sequências de livros inseridos como referência neste trabalho.

4.8.1 Questionário para análise de resultados

Elipse: Questões de 01 á 04

01. (UFPB-2011) A secretaria de infraestrutura de um município contratou um arquiteto para fazer o projeto de uma praça. Na figura a seguir, está o esboço do projeto proposto pelo arquiteto: uma praça em formato retangular medindo $80m$ x $120m$, onde deverá ser construído um jardim em forma de uma elipse na parte central

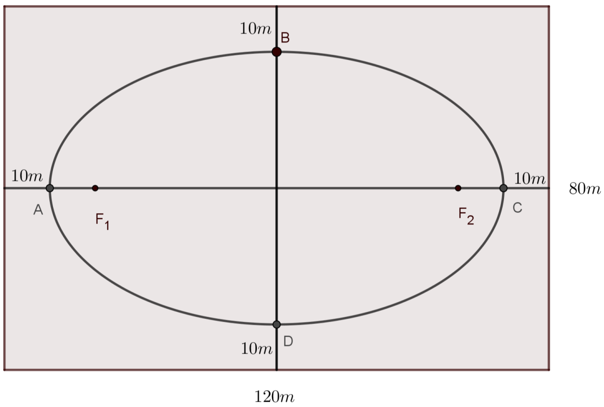


Figura 4.26

Estão destacados na figura os seguimentos AC e BD que são, respectivamente , o eixo maior e o eixo menor da elipse, bem como os focos F_1 e F_2, que são os focos da elipse onde deverão ser colocados os dois postes de iluminação. Com base nessas informações, conclui-se que a distância entre os postes de iluminação será, aproximadamente, de:

a) $68m$

b) $72m$

c) $76m$

d) $80m$

e) $84m$

02. (Cesgranrio-2011) Uma câmara dos sussurros é um espaço em que, se duas pessoas estão nas posições especificadas como foco, elas podem falar entre si, mesmo sussurrando, a uma distância considerável. Isso porque os painéis colocados atrás delas são partes de uma mesma elipse cujos focos são as posições das cabeças das pessoas. Na câmara de sussurros representada na Figura a seguir, a distância entre as duas pessoas é de 20 m, e a distância de cada pessoa até um vértice da elipse é de 2 m.

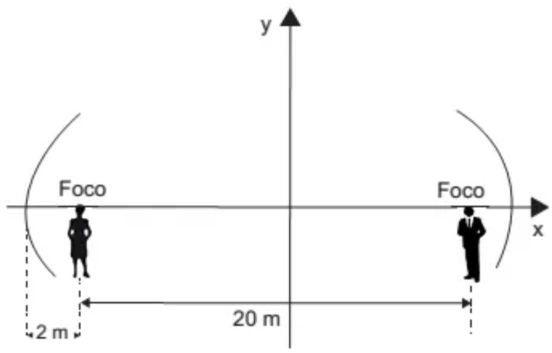


Figura 4.27

A equação da elipse que contém os painéis da câmara representada no sistema de eixos proposto na Figura é:

a) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{44} = 1$

b) $\dfrac{x^2}{44} + \dfrac{y^2}{100} = 1$

c) $\dfrac{x^2}{44} + \dfrac{y^2}{144} = 1$

d) $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{44} = 1$

e) $\dfrac{x^2}{144} + \dfrac{y^2}{44} = 1$

03. (Ufpe) Considere dois pontos distintos A e B de um plano. O lugar geométrico dos pontos P deste plano tal que a soma das distâncias de P aos pontos A e B é constante, é uma curva denominada:

a) circunferência

b) parábola

c) hipérbole

d) elipse

e) reta

04.(Unep) A equação da elipse de focos $F_1 = (-2, 0)$, $F_2 = (2, 0)$ e eixo maior igual a 6 é dada por

a) $\dfrac{x^2}{10} + \dfrac{y^2}{20} = 1$

b) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$

c) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{15} = 1$

d) $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{15} = 1$

e) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

Hipérbole: Questões de 05 á 08

05. (UFPI) O gráfico da equação $x^2 - y^2 = 4$ representa uma hipérbole. Os focos dessa hipérbole sâo:

a) $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(-\frac{1}{2}, 0)$.

b) $(2, 0)$ e $(-2, 0)$

c) $(2\sqrt{2}, 0)$ e $(-2\sqrt{2}, 0)$

d) $(0, \sqrt{2})$ e $(0, -\sqrt{2})$

e) $(0, \frac{1}{2})$ e $(0, -\frac{1}{2})$

06. Seja $2a$ a medida do eixo real e $2b$ a medida do eixo imaginário da hipérbole de equação $\frac{(y-2)^2}{8} - \frac{(x+1)^2}{32} = 1$, então, $2a + 2b$ é:

a) $8\sqrt{2}$

b) $10\sqrt{2}$

c) $12\sqrt{2}$

d) $14\sqrt{2}$

e) $15\sqrt{2}$

07. A equação da hipérbole com centro em $(3, -1)$, eixo focal vertical, eixo real igual a 8 e eixo imaginário igual a 4 é:

a) $\frac{(y+1)^2}{16} - \frac{(x-3)^2}{4} = 1$

b) $\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{4} = 1$

c) $\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x+3)^2}{16} = 1$

d) $\frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$

e) $\frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(x+3)^2}{4} = 1$

08. O conjunto de pontos cujo módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos é constante é uma:

a) circunferência

b) elipse

c) hipérbole

d) parábola

e) reta

Parábola: Questões de 09 á 12

09. A respeito da definição de parábola, assinale a alternativa correta:

a) Uma parábola é uma figura geométrica que representa a equação $y = ax^2 + bx + c$.

b) Uma parábola é um conjunto de pontos cuja distância até um ponto chamado foco é constante.

c) Uma parábola é um conjunto de pontos cuja distância até uma reta é constante.

d) Uma parábola é um conjunto de pontos no qual, dado um ponto P, a distância de P até a reta diretriz é igual à distância de P até o foco.

e) Uma parábola é uma curva cuja distância até o foco é fixa.

10. A respeito dos elementos de uma parábola, assinale entre as alternativas abaixo aquela que for correta.

a) O foco de uma parábola é uma reta, que participa da definição dessa figura.

b) A diretriz de uma parábola é uma reta, que participa da definição dessa figura.

c) O parâmetro, em uma parábola, é a menor distância entre o foco e a própria parábola.

d) O parâmetro, em uma parábola, é a maior distância entre o foco e a própria parábola.

e) O vértice de uma parábola jamais poderá estar sobre o segmento de reta conhecido como parâmetro.

11. O conjunto dos pontos $P = (x, y)$ que estão a uma mesma distância do ponto $F = (0, 2)$ e do eixo Ox no plano cartesiano xy é:

a) $y = x^2 + 4$

b) $y = x^2 + 1$

c) $y = 4x^2 + 1$

d) $y = 2x^2 + 1$

e) $y = x^2 + 3$

12. O foco da parábola de equação $y^2 = 12x$ é:

a) $F(0, 3)$

b) $F(-3, 0)$

c) $F(6, 0)$

d) $F(3, 0)$

e) $F(-6, 0)$

4.8.2 Resultados.

Na tabela a seguir serão apresentados os resultados obtidos, após aplicação do questionário. Consideramos apenas a quantidade de alunos que acertaram determinada questão por turma, resultando mais subsídios para a avaliação do nosso estudo. Durante a aplicação do questionário houve ausência de alguns alunos, nesse casso, esses ficaram fora da análise dos resultados finais, posteriormente faremos um gráfica do percentual de acertos das turmas por questão. Na turma E tivemos um total de 30 alunos que participaram do questionário, enquanto na turma G tivemos 29 participantes. Vejamos:

Questões	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	**Total**
Acertos turma E	24	16	26	15	12	18	20	25	20	28	11	21	236
Acertos turma G	19	16	20	13	9	12	12	25	21	20	10	13	190

Ao planejarmos nossa pesquisa, tínhamos uma perspectiva de elaborar um trabalho que pudéssemos contribuir com o ensino da matemática, através de uma sequência didática onde investigaríamos os resultados de uma aplicação do *software* Geogebra, para isso, propomos desenvolver a pesquisa em duas situações antagônicas e depois comparar os resultados obtidos. Como vimos, em todo o desenrolar do trabalho, enfatizamos sempre o uso do método Fedathi nas duas situações. Estudamos conceitos e resolvemos situações-problemas pelo método tradicional e com o uso do Geogebra, sempre com o objetivo de proporcionar a compreensão dos diversos conceitos e propriedades existente sobre o tema, possibilitando e estimulando mudanças na percepção do aluno sobre a forma de estudar matemática. No entanto, foi fundamental orientar os alunos quanto ao uso do *software*, pois muitos deles apresentavam imensas dificuldades. Para que possamos obter informações mais consistente apresentamos o gráfico abaixo, que relaciona a porcentagem de acertos de questões por turma:

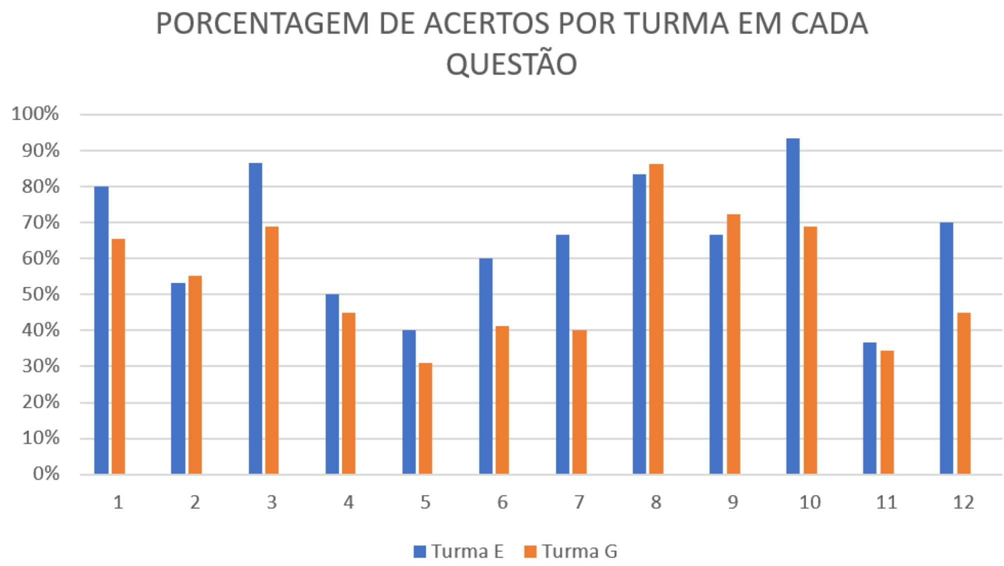


Figura 4.28

Analisando sucintamente, é notório que os resultados obtidos foram positivos, pois há uma diferença significativa em termos quantitativos entre as duas turmas. Além disso, durante todo o desenvolvimento da pesquisa, tivemos um nível de atenção maior na turma na qual fizemos a intervenção com uso do *software* Geogebra. Ressaltamos ainda a importância do aluno ser o protagonista no processo de ensino-aprendizagem, pois acreditamos que, em algumas situações, o ensino da matemática se encontra centralizado na figura do professor como o detentor do conhecimento e o aluno como um agente passivo que deve receber as respostas prontas.

Esse contato com as novas tecnologias, que foi possível a partir do uso do Geogebra, foi uma experiência de aprendizagem muito positiva para todos. Nesse sentido, deve ser compartilhado com os demais estudantes e assim ser utilizado em outras situações didáticas, pois se trata de uma ferramenta de fácil manuseio e que pode ser usado para incentivar a construção de conhecimento em diversas áreas da matemática, estimulando a criatividade, e o questionamentos através de sua interatividade e dinamismo.

Capítulo 5

Considerações finais

Esta pesquisa foi desenvolvida, de modo a incentivar e motivar o aluno a se apropriar ativamente da construção de novos conhecimentos, sendo o principal protagonista no seu desenvolvimento, dessa forma procuramos sempre instigar no aluno o processo de investigação matemática, buscando coloca-lo no centro da construção do processo de ensino-aprendizagem, se apropriando de novos conhecimentos pela participação ativa da construção deles. O uso de novas tecnologias no ensino da matemática, foi a principal motivação para aplicar novas metodologias em sala de aula e consequentemente, mostrarmos resultados satisfatórios.

O Uso do Geogebra permitiu que os alunos realizassem visualizações de forma mais dinâmica em diversas situações envolvendo as cônicas e suas propriedades, tornando a aprendizagem mais significativa e motivadora, diferentemente das situações que envolvem o método tradicional, como nos mostra os resultados obtidos na pesquisa. O uso do *software* permite formulação de conjecturas, a partir de observações facilitando a compreensão dos conceitos geométricos com mais clareza e dinamismo que no método tradicional, que envolve apenas os recursos básicos que um professor pode ter em sala de aula. Tais como: pincel, quadro, apagador, livro didático e lista de exercícios para que o aluno pratique, muitas vezes, de forma exaustiva para fixar o conhecimento.

Atualmente, o ensino das Cônicas dificilmente é abordado no ensino médio, muitas vezes, quando é ensinado, são ensinados as fórmulas para somente depois relacionar com o conceito de lugar geométrico. Partindo desse pressuposto, nosso estudo propôs ao aluno a possibilidade de fazer com que seguíssemos um método inverso, por meio do *software* Geogebra e o método Fedhati, desenvolvemos nossos estudos, com o aluno tendo o primeiro contado com o lugar geométrico que representa cada Cônica, para a partir desse contado conhecer seus elementos, fazer deduções e chegar a um resultado que possa levar a conjecturar sua fórmula.

Finalmente, destacamos a importância de promover as discussões durante a resolução de cada questão, isto foi fundamental, visto que todas as atividades tem o objetivo de levar os alunos a refletir, agir, e a partir dessas ações, levantar hipóteses e fazer deduções sobre o conteúdo estudado.

Referências Bibliográficas

[1] PAIS, Luiz Carlos. *Didática da Matemática - uma análise da influência francesa*. 2 edição, editora Autêntica. Belo Horizonte 2005.

[2] AMBROSIO, D Ubiratan. *Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade*. 3 edição, editora autêntica. Belo Horizonte 2009.

[3] BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria euclidiana plana*. 11ed. Rio de Janeiro: SBM 2012.

[4] LEZZI, Gelson. *Fundamentos de matemática elementar: geometria analítica*. 4 ed, São Paulo: atual, 1993.

[5] NETO, Hermínio Borges. Et al. *Sequência Fedathi: fundamentos*. 3 volume. Curitiba: CRV 2018.

[6] CHAVANTE, Eduardo. PRESTES, Diego. *Matemática e suas tecnologias: sistemas lineares e geometria analítica*, 3 edição. São Paulo, 2020: editora SM.

[7] DELGADO, Jorge. FRENSEL, Katia. CRISSAFF, Lhaylla. *Geometria analítica*. 2 edição. Rio de Janeiro, 2017. Editora SBM.

[8] LIMA, Elon Lages. CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. Et al. *A matemática do ensino Médio* – volume 3. 6 ediçao. Rio de Janeiro: SBM 2006.

[9] GEOGEBRA. Disponível em: <https//www.geogebra.org.com.br shtml. São Paulo, 20 de abril de 2023>. Acesso em: 20 de abril de 2023.

[10] Disponível em <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/equacao-hiperbole shtml>. Acesso em: 25 de jun de 2023.

[11] Disponível em:https://brasilescola.uol.com.br/matematica/parabola.htm. Acesso em 25 de jun 2023.

[12] SANTOS, Joelma Nogueira dos. NETO, Hermínio Borges. PINHEIRO, Ana Cláudia Mendonça. *A origem e os fundamentos da sequência fedathi: uma análise histórico-conceitual. Boletim cearense de educação e história da matemática*. Volume 6, Fortaleza Ce 2019.

[13] MORELLO, Marcelo. SILVA, Joccitiel Dias da. *O geogebra como ferramenta tecnológica para ensinar função quadrática na 1ª série do ensino médio*. Revista Humanidades e Inovação v.8, n.59.

[14] SOUZA, Maria José Araújo. *Informática educativa na educação matemática: estudo de geometria no ambiente do software cabri-geometri*. Dissertação (Mestrado) Universidade Federal do Ceará. Fortaleza Ce 2001.

[15] Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998.

[16] OLIVEIRA, Edvaldo Ramalho de. CUNHA, Douglas da Silva. *O uso da tecnologia no ensino da Matemática: contribuições do software GeoGebra no ensino da função do 1º grau*. Disponível em:https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/21/36/o-uso-da-tecnologia-no-ensino-da-matematica-contribuicoes-do-isoftwarei-geogebra-no-ensino-da-funcao-do-1-grau. Acesso em 30 de jun de 2023.

[17] GARCIA, Fernanda Wolf.*A importância do uso das tecnologias no processo de ensino-aprendizagem*. v. 3, n. 1, p. 25-48, jan./dez. 2013. Piracicaba.

Apêndice A

Ilustrações das soluções: método tradicional de ensino

A.1 Solução do Exercício 01 - Elipse

Observe a representação gráfica da elipse. Determine os seguintes elementos: as coordenadas do centro, vértices e focos; a medida do comprimento do eixo maior, eixo menor e distância focal; calcule e excentricidade e encontre sua equação reduzida.

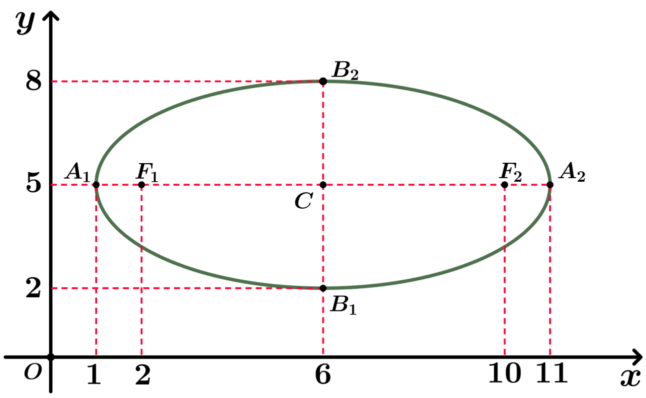
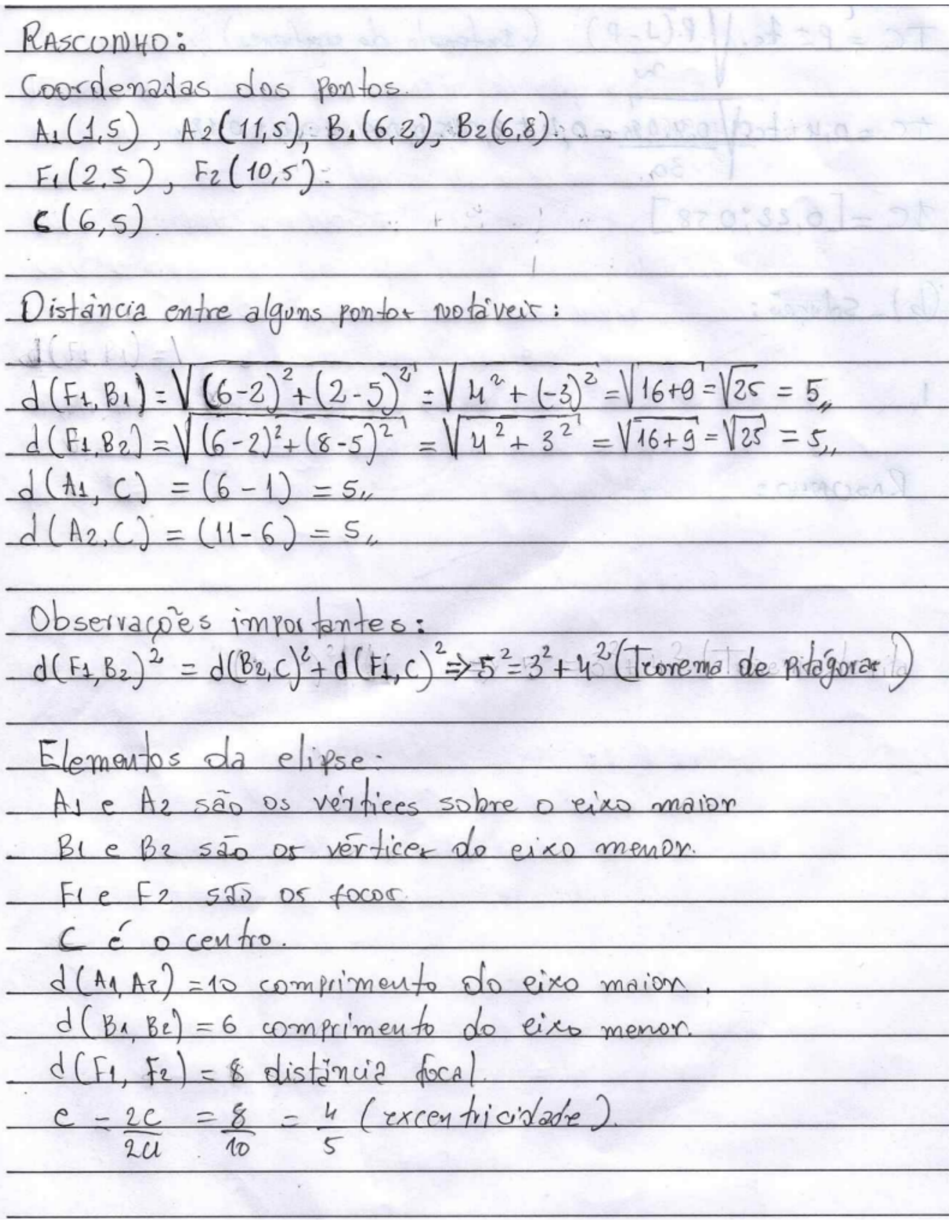


Figura A.1

Vejamos a solução apresentada pelo aluno com denominação G-7.



RASCUNHO:

Coordenadas dos pontos.

$A_1(1,5)$, $A_2(11,5)$, $B_1(6,2)$, $B_2(6,8)$.

$F_1(2,5)$, $F_2(10,5)$.

$C(6,5)$

Distância entre alguns pontos notáveis:

$d(F_1,B_1) = \sqrt{(6-2)^2+(2-5)^2} = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$d(F_1,B_2) = \sqrt{(6-2)^2+(8-5)^2} = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$d(A_1,C) = (6-1) = 5$

$d(A_2,C) = (11-6) = 5$

Observações importantes:

$d(F_1,B_2)^2 = d(B_2,C)^2 + d(F_1,C)^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2+4^2$ (Teorema de Pitágoras)

Elementos da elipse:

A_1 e A_2 são os vértices sobre o eixo maior

B_1 e B_2 são os vértices do eixo menor.

F_1 e F_2 são os focos.

C é o centro.

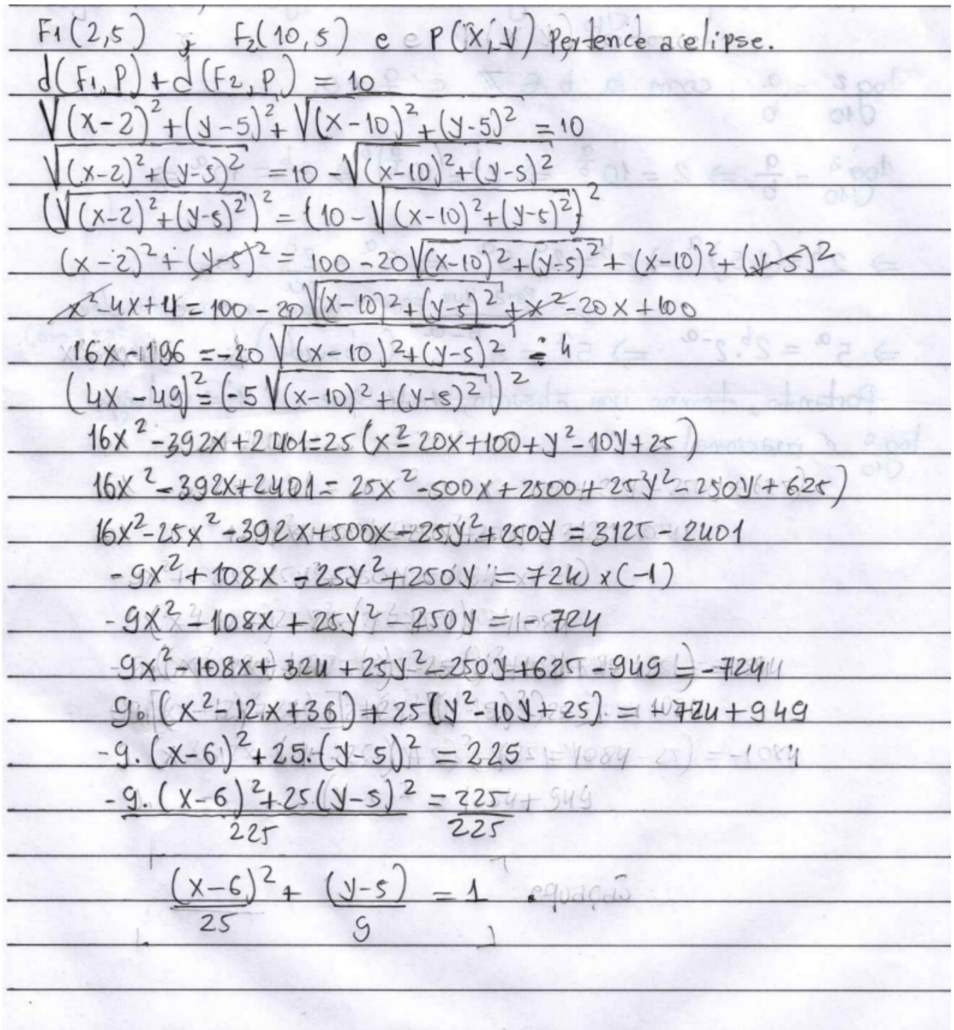
$d(A_1,A_2) = 10$ comprimento do eixo maior.

$d(B_1,B_2) = 6$ comprimento do eixo menor.

$d(F_1,F_2) = 8$ distância focal

$e = \frac{2c}{2a} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ (excentricidade).

Figura A.2



$F_1(2,5)$; $F_2(10,5)$ e $P(x,y)$ Pertence a elipse.

$d(F_1,P)+d(F_2,P)=10$

$\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}+\sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2}=10$

$\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}=10-\sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2}$

$\left(\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}\right)^2=\left(10-\sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2}\right)^2$

$(x-2)^2+\cancel{(y-5)^2}=100-20\sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2}+(x-10)^2+\cancel{(y-5)^2}$

$\cancel{x^2}-4x+4=100-20\sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2}+\cancel{x^2}-20x+100$

$16x-196=-20\sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2}\ \div 4$

$(4x-49)^2=\left(-5\sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2}\right)^2$

$16x^2-392x+2401=25(x^2-20x+100+y^2-10y+25)$

$16x^2-392x+2401=25x^2-500x+2500+25y^2-250y+625)$

$16x^2-25x^2+392x+500x-25y^2+250y=3125-2401$

$-9x^2+108x-25y^2+250y=724\ x(-1)$

$-9x^2-108x+25y^2-250y=-724$

$9x^2-108x+324+25y^2-250y+625-949=-724$

$9.(x^2-12x+36)+25(y^2-10y+25)=-724+949$

$-9.(x-6)^2+25.(y-5)^2=225$

$\frac{-9.(x-6)^2+25(y-5)^2}{225}=\frac{225}{225}$

$\frac{(x-6)^2}{25}+\frac{(y-5)}{9}=1$

Figura A.3

A.2 Solução do Exercício 02 - Hipérbole

Observe a representação gráfica da hipérbole. Determine os seguintes elementos: as coordenadas do centro, vértices e focos; a medida do comprimento do eixo maior, eixo menor e distância focal; calcule e excentricidade e encontre sua equação reduzida.

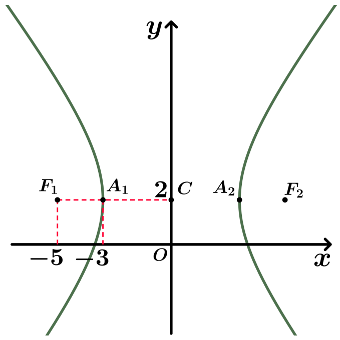
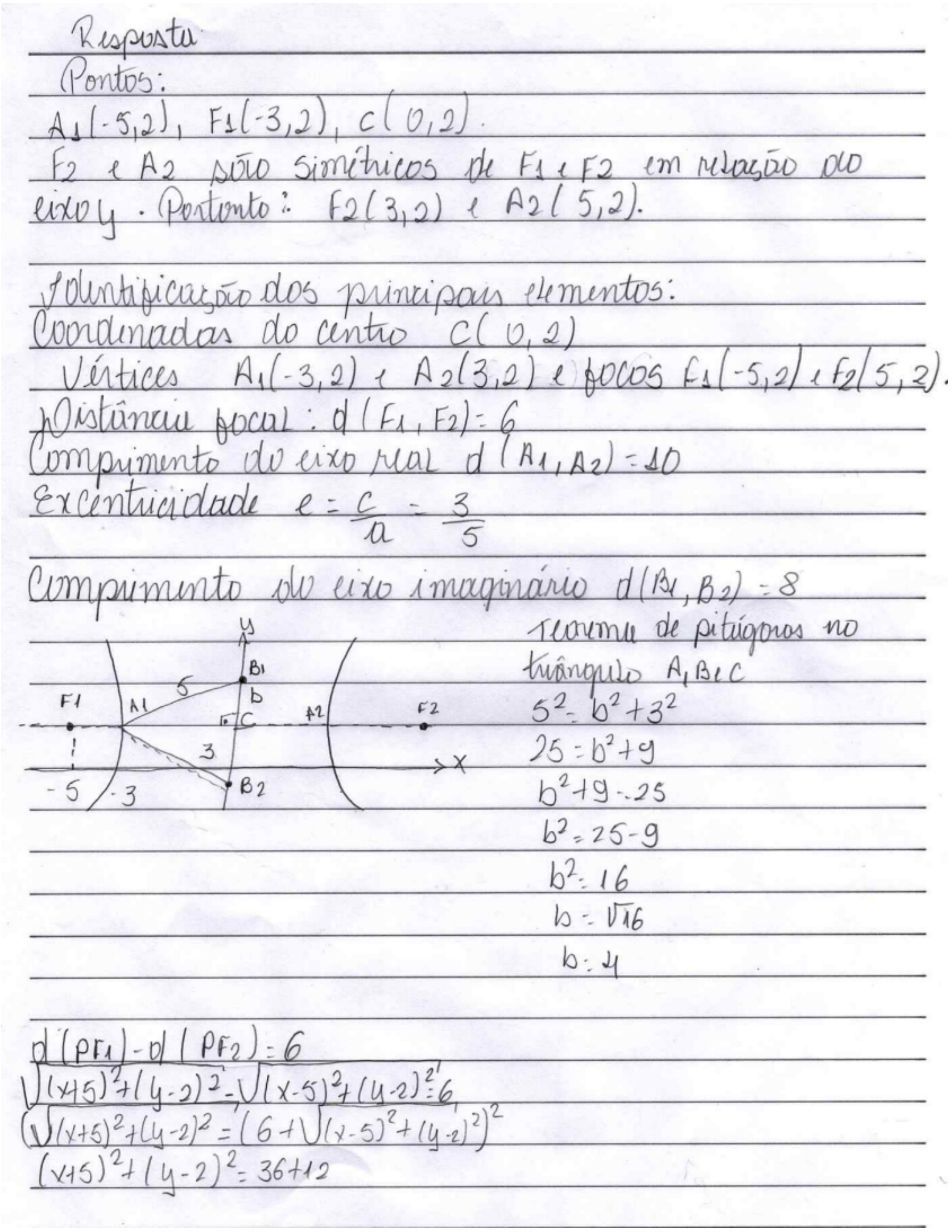


Figura A.4

Vejamos a solução apresentada pelo aluno com denominação G-12.



Resposta

Pontos:

$A_1(-5,2)$, $F_1(-3,2)$, $C(0,2)$.

F_2 e A_2 são simétricos de F_1 e F_2 em relação ao eixo y. Portanto: $F_2(3,2)$ e $A_2(5,2)$.

Identificação dos principais elementos:

Coordenadas do centro $C(0,2)$

Vértices $A_1(-3,2)$ e $A_2(3,2)$ e focos $F_1(-5,2)$ e $F_2(5,2)$.

Distância focal: $d(F_1,F_2)=6$

Comprimento do eixo real $d(A_1,A_2)=10$

Excentricidade $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$

Comprimento do eixo imaginário $d(B_1,B_2)=8$

Teorema de pitágoras no triângulo A_1B_1C

$5^2=b^2+3^2$

$25=b^2+9$

$b^2+9=25$

$b^2=25-9$

$b^2=16$

$b=\sqrt{16}$

$b=4$

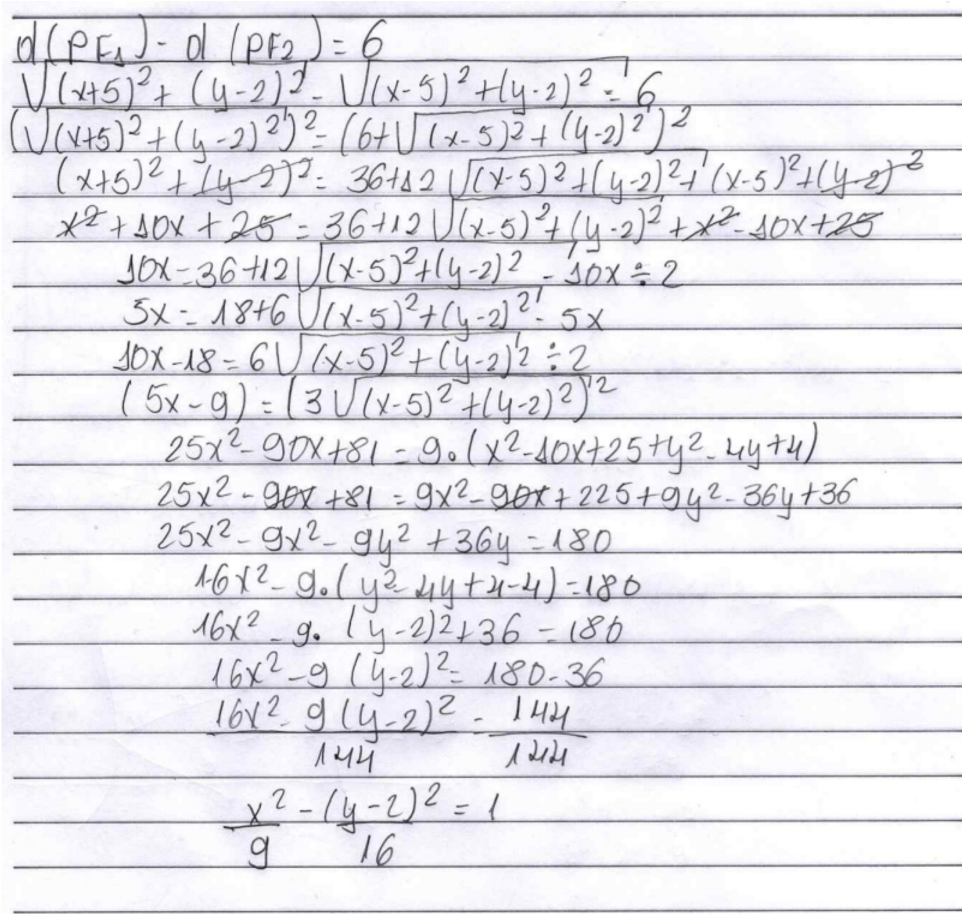
$d(PF_1)-d(PF_2)=6$

$\sqrt{(x+5)^2+(y-2)^2}-\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2}=6$

$\left(\sqrt{(x+5)^2+(y-2)^2}\right)^2=\left(6+\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2}\right)^2$

$(x+5)^2+(y-2)^2=36+12$

Figura A.5



$$d(PF_1) - d(PF_2) = 6$$
$$\sqrt{(x+5)^2+(y-2)^2} - \sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2} = 6$$
$$\left(\sqrt{(x+5)^2+(y-2)^2}\right)^2 = \left(6+\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2}\right)^2$$
$$(x+5)^2 + \cancel{(y-2)^2} = 36+12\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2} + (x-5)^2 + \cancel{(y-2)^2}$$
$$\cancel{x^2} + 10x + \cancel{25} = 36+12\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2} + \cancel{x^2} - 10x + \cancel{25}$$
$$10x = 36+12\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2} - 10x \div 2$$
$$5x = 18+6\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2} - 5x$$
$$10x - 18 = 6\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2} \div 2$$
$$(5x-9) = \left(3\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2}\right)^2$$
$$25x^2 - 90x + 81 = 9 \cdot (x^2 - 10x + 25 + y^2 - 4y + 4)$$
$$25x^2 - \cancel{90x} + 81 = 9x^2 - \cancel{90x} + 225 + 9y^2 - 36y + 36$$
$$25x^2 - 9x^2 - 9y^2 + 36y = 180$$
$$16x^2 - 9 \cdot (y^2 - 4y + 4 - 4) = 180$$
$$16x^2 - 9 \cdot (y-2)^2 + 36 = 180$$
$$16x^2 - 9(y-2)^2 = 180 - 36$$
$$\frac{16x^2}{144} - \frac{9(y-2)^2}{144} = \frac{144}{144}$$
$$\frac{x^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

Figura A.6

A.3 Solução do Exercício 03 - Parábola

Observe a representação gráfica da parábola. Determine os seguintes elementos: as coordenadas do vértices e foco, a reta diretriz, o parâmetro e encontre sua equação reduzida.

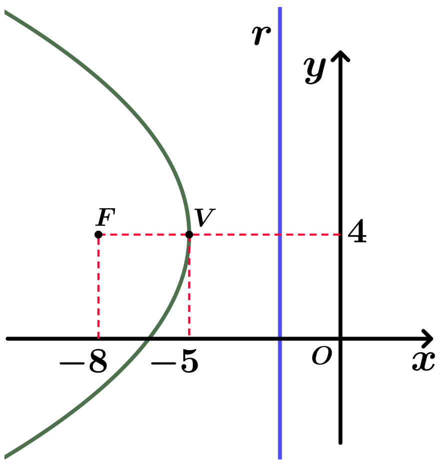


Figura A.7

Vejamos a solução apresentada pelo aluno com denominação G-3.

Respostas

Pontos:

$F(-8,4)$ e $V(-5,4)$

reta diretriz:

$x = -2$

medida do parâmetro

$p = 6$

Equação da parábola

$P(x,y)$, $F(-8,4)$ e $Q(-2,y) \in r$

$$d(F,P) = d(Q,P)$$

$$\sqrt{(x+8)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-y)^2}$$

$$\left(\sqrt{(x+8)^2 + (y-4)^2}\right) = \left(\sqrt{(x+2)^2}\right)^2$$

$$(x+8)^2 + (y-4)^2 = (x+2)^2$$

$$(y-4)^2 = (x+2)^2 - (x+8)^2$$

$$(y-4)^2 = x^2 + 4x + 4 - (x^2 + 16x + 64)$$

$$(y-4)^2 = \cancel{x^2} + 4x + 4 - \cancel{x^2} - 16x - 64$$

$$(y-4)^2 = -12x - 60$$

$$(y-4)^2 = -12(x+5)$$

Figura A.8

Apêndice B

Ilustrações das soluções: Uso do software Geogebra

B.1 Solução do Exercício 01 - Elipse

- Gráfico da equação 03 e solução completa apresentada pelo aluno E-15.

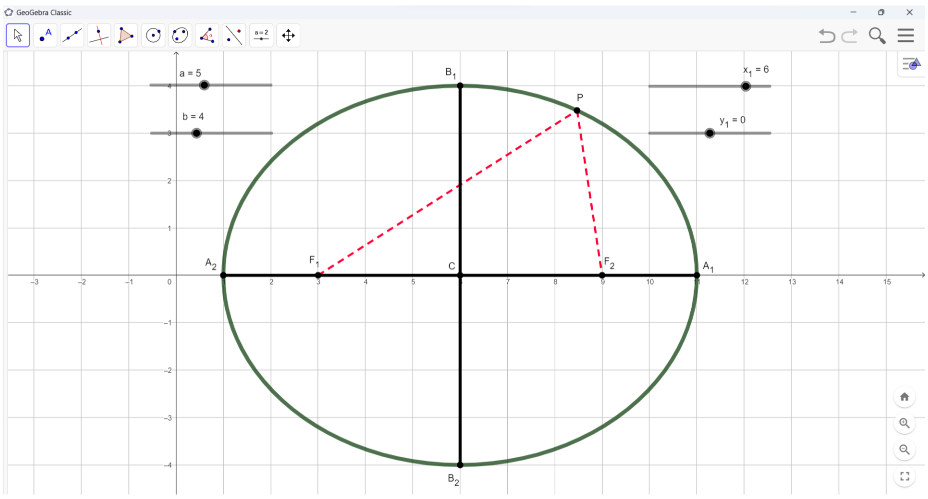
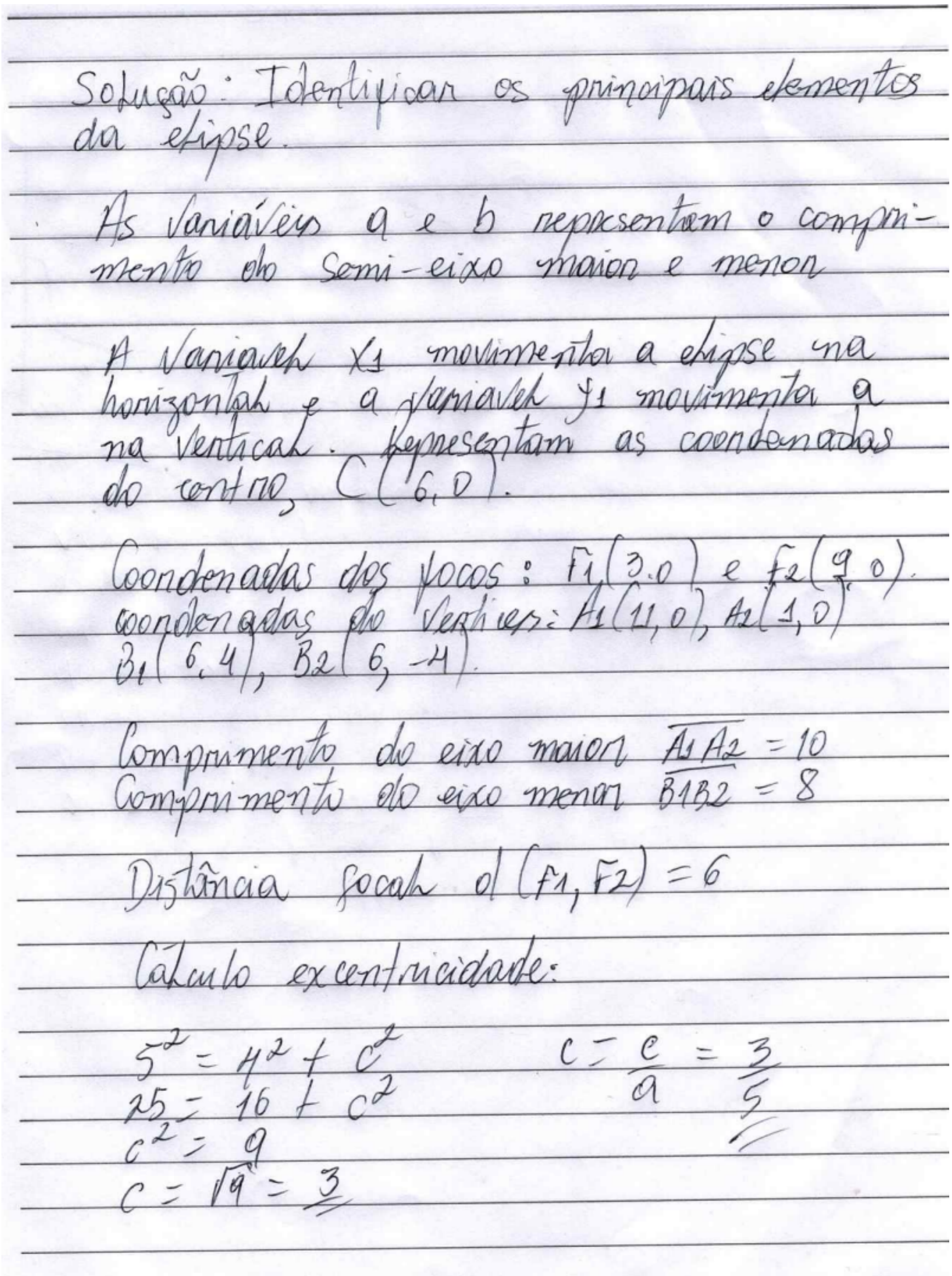


Figura B.1


Solução: Identificar os principais elementos da elipse.

As variáveis a e b representam o comprimento do semi-eixo maior e menor

A variavel x_1 movimenta a elipse na horizontal e a variavel y_1 movimenta a na vertical. Representam as coordenadas do centro, $C(6, 0)$.

Coordenadas dos focos: $F_1(3,0)$ e $F_2(9,0)$.
coordenadas do vertices: $A_1(11,0)$, $A_2(1,0)$
$B_1(6,4)$, $B_2(6,-4)$.

Comprimento do eixo maior $\overline{A_1A_2} = 10$
Comprimento do eixo menor $B_1B_2 = 8$

Distância focal $d(F_1, F_2) = 6$

Cálculo excentricidade:

$5^2 = 4^2 + c^2$
$25 = 16 + c^2$
$c^2 = 9$
$c = \sqrt{9} = 3$

$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$

Figura B.2

B.2 Solução do Exercício 02 - Hipérbole

- Gráfico da equação 04 e solução completa apresentada pelo aluno E-4.

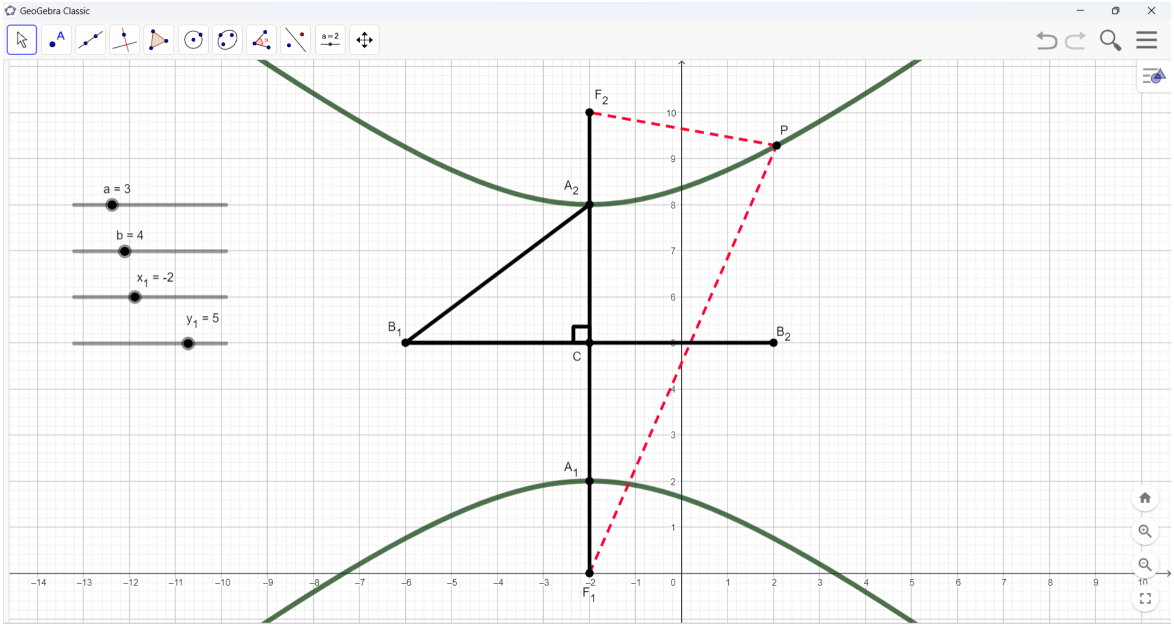
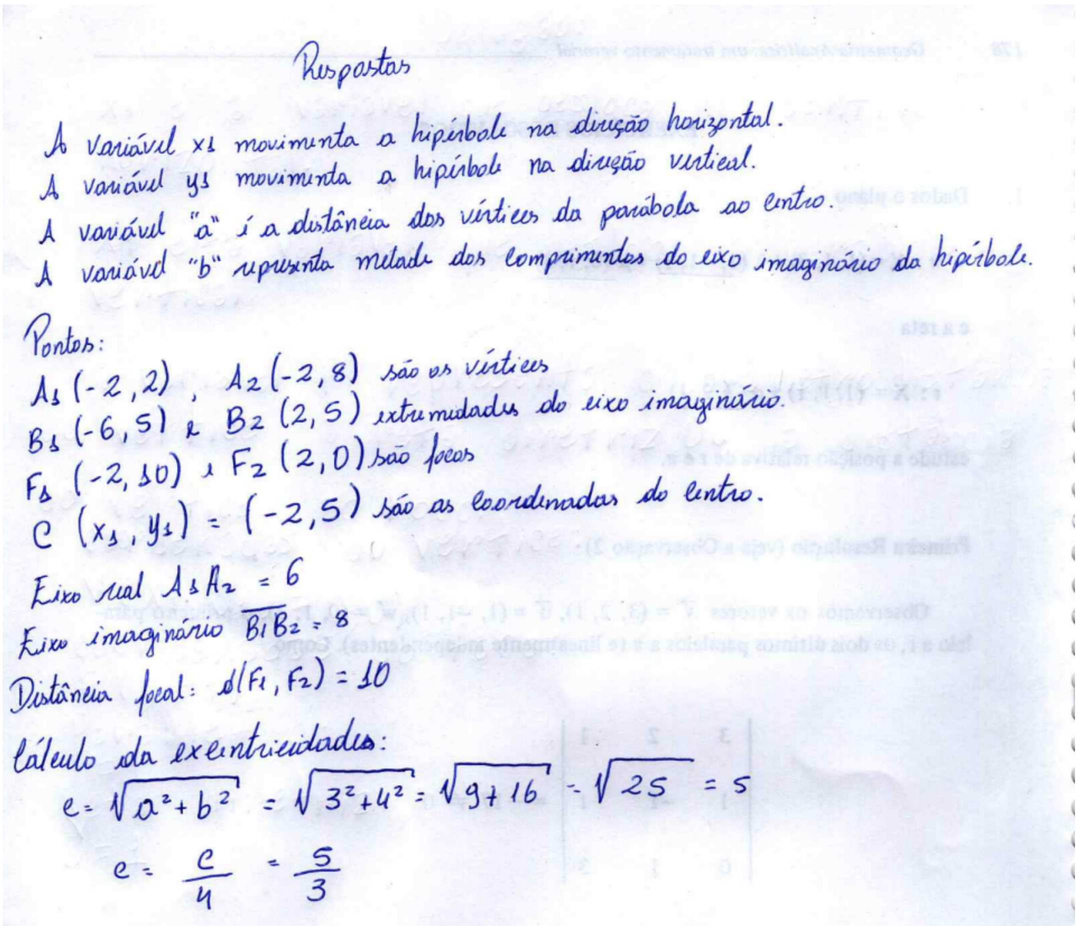


Figura B.3



Respostas

A variável x_1 movimenta a hipérbole na direção horizontal.
A variável y_1 movimenta a hipérbole na direção vertical.
A variável "a" é a distância dos vértices da parábola ao centro.
A variável "b" representa metade dos comprimentos do eixo imaginário da hipérbole.

Pontos:
$A_1(-2,2)$, $A_2(-2,8)$ são os vértices
$B_1(-6,5)$ e $B_2(2,5)$ extremidades do eixo imaginário.
$F_1(-2,10)$ e $F_2(2,0)$ são focos
$C(x_1,y_1) = (-2,5)$ são as coordenadas do centro.
Eixo real $A_1A_2 = 6$
Eixo imaginário $\overline{B_1B_2} = 8$
Distância focal: $d(F_1,F_2) = 10$
Cálculo da excentricidade:
$$e = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$
$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$$

Figura B.4

B.3 Solução do Exercício 03 - Parábola

- Gráfico da equação 02 e solução completa apresentada pelo aluno E-23.

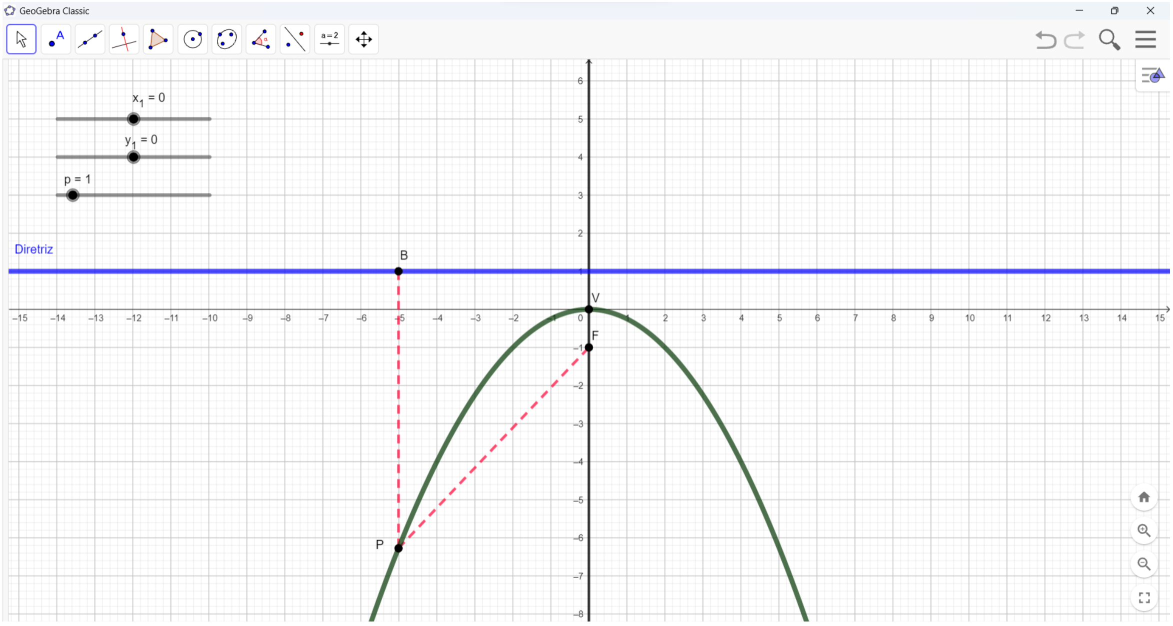


Figura B.5

Solução:

X_1 é a variável que desloca no sentido horizontal.

X_1 é a variável que desloca a parábola na vertical.

a variável "p" representa o parâmetro: distância do vértice a reta diretriz. Ou a distância do vértice ao foco.

coordenadas do vertice:

$V(X_1, Y_1) = (0,0)$

coordenadas do foco:

$F(0,-1)$

Parâmetro:

$P=1$

Reta diretriz:

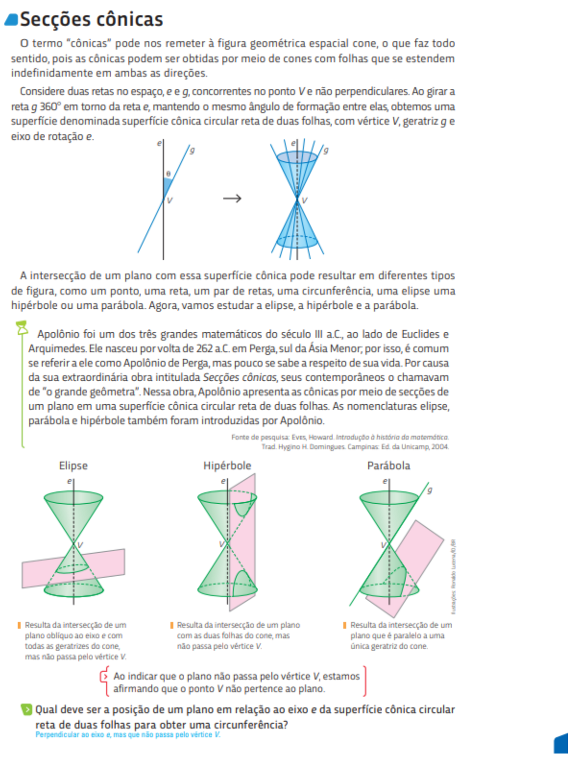
$Y=1$

Figura B.6

Apêndice C

Introduções e atividades propostas desenvolvidas do caderno do aluno.

Anexo-01: Introdução as cônicas.



Secções cônicas

O termo "cônicas" pode nos remeter à figura geométrica espacial cone, o que faz todo sentido, pois as cônicas podem ser obtidas por meio de cones com folhas que se estendem indefinidamente em ambas as direções.

Considere duas retas no espaço, *e* e *g*, concorrentes no ponto *V* e não perpendiculares. Ao girar a reta *g* 360° em torno da reta *e*, mantendo o mesmo ângulo de formação entre elas, obtemos uma superfície denominada superfície cônica circular reta de duas folhas, com vértice *V*, geratriz *g* e eixo de rotação *e*.

A intersecção de um plano com essa superfície cônica pode resultar em diferentes tipos de figura, como um ponto, uma reta, um par de retas, uma circunferência, uma elipse uma hipérbole ou uma parábola. Agora, vamos estudar a elipse, a hipérbole e a parábola.

Apolônio foi um dos três grandes matemáticos do século III a.C., ao lado de Euclides e Arquimedes. Ele nasceu por volta de 262 a.C. em Perga, sul da Ásia Menor; por isso, é comum se referir a ele como Apolônio de Perga, mas pouco se sabe a respeito de sua vida. Por causa da sua extraordinária obra intitulada *Secções cônicas*, seus contemporâneos o chamavam de "o grande geômetra". Nessa obra, Apolônio apresenta as cônicas por meio de secções de um plano em uma superfície cônica circular reta de duas folhas. As nomenclaturas elipse, parábola e hipérbole também foram introduzidas por Apolônio.

Fonte de pesquisa: Eves, Howard. *Introdução à história da matemática.* Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

Resulta da intersecção de um plano oblíquo ao eixo *e* com todas as geratrizes do cone, mas não passa pelo vértice *V*.

Resulta da intersecção de um plano com as duas folhas do cone, mas não passa pelo vértice *V*.

Resulta da intersecção de um plano que é paralelo a uma única geratriz do cone.

Ao indicar que o plano não passa pelo vértice *V*, estamos afirmando que o ponto *V* não pertence ao plano.

Qual deve ser a posição de um plano em relação ao eixo *e* da superfície cônica circular reta de duas folhas para obter uma circunferência?

Perpendicular ao eixo *e*, mas que não passa pelo vértice *V*.

Figura C.1

Anexo-02: Estudo da Elipse

Elipse

Para um estudo analítico dessa cônica, vamos defini-la por meio de propriedades métricas que seus pontos devem satisfazer.

> No estudo da Língua Portuguesa, a palavra "elipse" indica supressão de um termo que se subentende pelo contexto; por exemplo: "Na minha bolsa, há um estojo, no estojo, [há] canetas e lápis".

Elipse é o conjunto de pontos de um plano em que a soma das distâncias a dois pontos fixos é uma constante dada.

Esses pontos fixos são chamados focos da elipse.

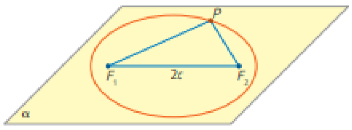
É possível provar que a elipse pode ser obtida seccionando a superfície cônica circular reta de duas folhas.

De maneira prática, podemos obter a representação geométrica de uma elipse marcando inicialmente dois pontos distintos em uma folha de papel, os quais serão os focos F_1 e F_2. Em seguida, fixamos neles as extremidades de um barbante com medida maior do que a distância entre os focos. Depois, traçamos uma curva contínua com o barbante sempre esticado para obtermos a representação dessa elipse.

A soma das distâncias de qualquer ponto dessa elipse aos pontos F_1 e F_2 é constante e, nesse caso, tem a mesma medida do barbante.

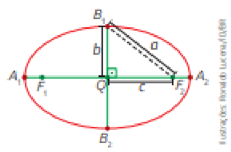
Considere dois pontos distintos F_1 e F_2, pertencentes a um plano α tal que a distância entre eles seja $2c$. Uma elipse de focos F_1 e F_2 é formada pelo conjunto de pontos P de α, cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a$, com $2a > 2c$.

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$
$$2a > 2c > 0$$



Observe os principais elementos de uma elipse:

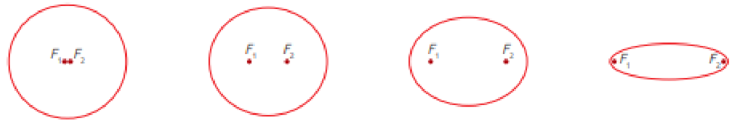
- focos: F_1 e F_2
- centro: O
- eixo maior: $\overline{A_1A_2}$
- eixo menor: $\overline{B_1B_2}$
- distância focal: $2c$
- medida do eixo maior: $2a$
- medida do eixo menor: $2b$
- excentricidade: $e = \frac{c}{a}$, com $0 < e < 1$
- relação notável: $a^2 = b^2 + c^2$



> O centro de uma elipse corresponde ao ponto médio de $\overline{F_1F_2}$, $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$.

Figura C.2

Quanto mais próximo de 0 for a excentricidade (e) de uma elipse, mais próxima de uma circunferência ela será e, quanto mais próximo de 1 for sua excentricidade, mais "achatada" será.



elipse com excentricidade 0,05 | elipse com excentricidade 0,35 | elipse com excentricidade 0,65 | elipse com excentricidade 0,95

Em 1609, na sua obra intitulada *Astronomia nova*, Johannes Kepler anunciou suas duas primeiras leis da Astronomia a respeito do movimento dos planetas. Em uma delas, ele afirma que os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, com o Sol sendo um dos focos da elipse. As leis de Kepler são consideradas marcos tanto na história da Astronomia como na da Matemática.

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl Benjamin. *História da matemática*. Trad. Helena Castro. São Paulo: Edgar Blücher, 2012.

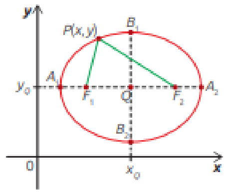
Astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630).

Pesquise mais informações sobre o assunto movimento dos planetas. Busque textos científicos para que possa analisá-los e compará-los com as informações apresentadas.

Agora, considere uma elipse no plano cartesiano com o eixo maior paralelo ao eixo das abscissas e um ponto qualquer $P(x, y)$ pertencente a essa cônica.

Desenvolvendo a igualdade $PF_1 + PF_2 = 2a$ e utilizando a relação notável $a^2 = b^2 + c^2$, obtemos a equação:

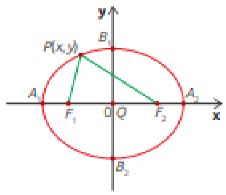
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$



Esta equação é chamada **equação reduzida** da elipse de centro $Q(x_0, y_0)$.

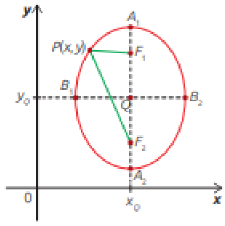
No caso particular em que o centro de uma elipse coincide com a origem do plano cartesiano $Q(0, 0)$ e os focos pertencem ao eixo das abscissas. A equação reduzida dessa elipse é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Ao considerarmos uma elipse no plano cartesiano com o eixo maior paralelo ao eixo das ordenadas, um ponto qualquer $P(x, y)$ pertencente a ela e centro $Q(x_0, y_0)$, temos a equação reduzida:

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$



No caso particular em que o centro de uma elipse coincide com a origem do plano cartesiano $Q(0, 0)$ e os focos pertencem ao eixo das ordenadas, qual será a equação reduzida dessa elipse? $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

Figura C.3

Tarefas

Anote as respostas no caderno.

10. Qual deve ser a posição de um plano em relação ao eixo *e* da superfície cônica circular reta de duas folhas para se obter um ponto? O plano deve formar com o eixo *e* um ângulo maior do que o formado pelas geratrizes e passar pelo vértice.

11. Determine a equação reduzida da elipse descrita em cada item.

a) Elipse de focos $F_1(2, 0)$ e $F_2(-2, 0)$, cujo comprimento do eixo maior é 6. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

b) Elipse de focos $F_1(0, 2)$ e $F_2(0, 3)$ que contém o ponto $O(0, 0)$.

c) Elipse de centro $Q(2, 2)$, foco $F_1(2, 1)$ e que passa por $A(0, 2)$. $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{5}=1$

12. Seja a elipse de equação $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, determine:

a) seu centro; $Q(1, 0)$

b) a medida de seu eixo maior; $2a=6$

c) a medida de seu eixo menor; $2b=4$

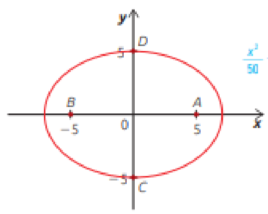
d) sua distância focal; $2\sqrt{5}$

e) sua excentricidade. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

11. b) $\frac{x^2}{6}+\frac{\left(y-\frac{5}{2}\right)^2}{\frac{25}{4}}=1$

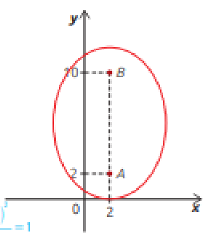
13. **Ferramentas** Em cada item, determine a equação da elipse representada na imagem, sabendo que os pontos A e B são seus focos.

a)



$\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{25}=1$

b)



$\frac{(x-2)^2}{20}+\frac{(y-6)^2}{36}=1$

Ilustrações: Ronaldo Lucena/ID/BR

14. Determine as coordenadas do centro e dos focos das elipses.

a) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{25}=1$

b) $\frac{x^2}{7}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$ $Q(0, 4)$; $F_1(0, 1)$; $F_2(0, 7)$

c) $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$ $Q(5, 2)$; $F_1(1, 2)$; $F_2(9, 2)$

14. a) $O(0, 0)$; $F_1(0, -2\sqrt{5})$; $F_2(0, 2\sqrt{5})$

15. As órbitas dos planetas em torno do Sol podem ser descritas por elipses. Observe o quadro a seguir.

Excentricidade da órbita dos planetas do Sistema Solar	
Planeta	**Excentricidade da órbita**
Mercúrio	0,2056
Vênus	0,0068
Terra	0,0167
Marte	0,0934
Júpiter	0,0485
Saturno	0,0556
Urano	0,0472
Netuno	0,0086

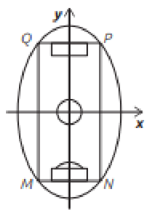
Fonte de pesquisa: Instituto de Física da UFRGS. Disponível em: <www.if.ufrgs.br/oei/solar/solar04/solar04.htm>. Acesso em: 8 jun. 2020.

Vênus, pois é o planeta que possui uma órbita elíptica com excentricidade mais próxima de zero.

De acordo com essas informações, qual planeta do Sistema Solar tem a órbita mais parecida com uma circunferência? Justifique sua resposta.

16. (EsPCEx-SP) Num estádio de futebol em forma de elipse, o gramado é o retângulo $MNPQ$, inscrito na cônica, conforme mostra a figura. Escolhendo o sistema de coordenadas cartesianas indicado e tomando o metro como unidade, a elipse é descrita pela equação $\frac{x^2}{36^2}+\frac{y^2}{60^2}=1$. Sabe-se também que os focos da elipse estão situados em lados do retângulo $MNPQ$.

Assim, a distância entre as retas MN e PQ é: Alternativa e.



EsPCEx/Fac-símile: ID/BR

a) 48 m

b) 68 m

c) 84 m

d) 92 m

e) 96 m

Figura C.4

Anexo-03: Estudo da Hipérbole

Hipérbole

Assim como fizemos com a elipse, vamos definir hipérbole com as propriedades métricas que seus pontos devem satisfazer.

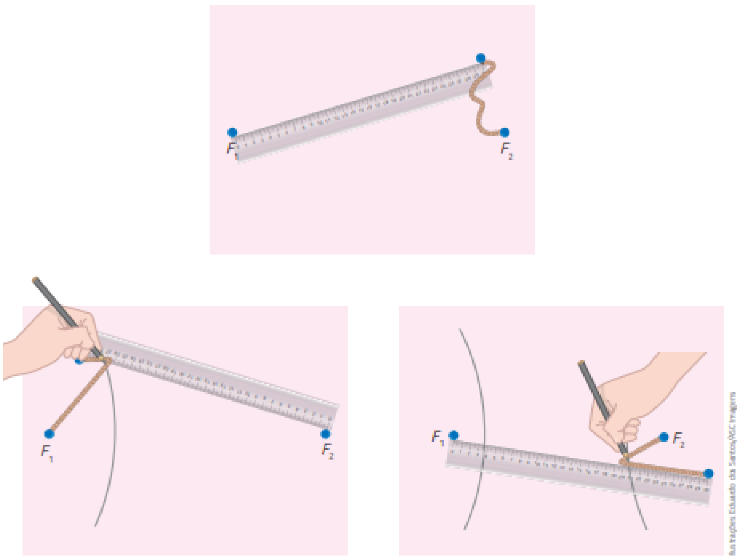
> Hipérbole é o conjunto de pontos de um plano cujo valor absoluto da diferença das distâncias a dois pontos fixos é uma constante dada.

Esses pontos fixos são chamados de focos da hipérbole.

É possível provar que a hipérbole pode ser obtida seccionando a superfície cônica circular reta de duas folhas.

> A palavra "hipérbole" é homônima à figura de linguagem que enfatiza expressões resultantes do exagero. Por exemplo: "Meu irmão morreu de medo do filme".

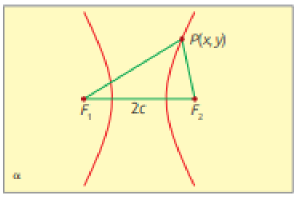
De maneira prática, podemos obter a representação geométrica de uma hipérbole marcando inicialmente dois pontos distintos em uma folha de papel, que serão os focos F_1 e F_2. Em seguida, fixamos a extremidade de uma régua em um desses pontos (F_1) e, na outra extremidade da régua, fixamos a extremidade de um barbante. No outro ponto (F_2), fixamos também a outra extremidade do barbante. A diferença, em módulo, entre o comprimento do barbante e o comprimento da régua deve ser menor do que a distância entre os focos. Depois, traçamos uma curva contínua com o lápis apoiado na régua e com o barbante sempre esticado para obtermos um ramo da representação dessa hipérbole. Procedendo de maneira semelhante, obtemos o outro ramo dessa hipérbole.



A diferença, em módulo, das distâncias de qualquer ponto dessa hipérbole aos pontos F_1 e F_2 é constante e menor do que $\overline{F_1F_2}$.

Figura C.5

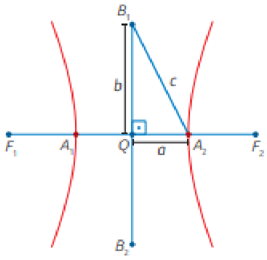
Considere dois pontos distintos F_1 e F_2, pertencentes a um plano α tal que a distância entre eles seja $2c$. Uma hipérbole de focos F_1 e F_2 é formada pelo conjunto de pontos P de α, cuja diferença, em módulo, das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a$, com $2a < 2c$.



$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$
$$0 < 2a < 2c$$

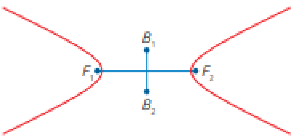
Observe os principais elementos de uma hipérbole:

- focos: F_1 e F_2
- centro: O
- eixo real ou transverso: $\overline{A_1A_2}$
- eixo imaginário: $\overline{B_1B_2}$
- distância focal: $2c$
- medida do eixo real: $2a$
- medida do eixo imaginário: $2b$
- excentricidade: $e = \frac{c}{a}$, com $e > 1$
- relação notável: $c^2 = a^2 + b^2$

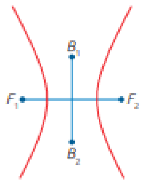


Os pontos B_1 e B_2 são pontos da mediatriz de $\overline{A_1A_2}$, que formam triângulos retângulos em O, com um dos catetos medindo a e hipotenusa medindo c.

Quanto mais próximo de 1 for a excentricidade (e) de uma hipérbole, mais "fechados" serão seus ramos e, quanto mais distante de 1 for sua excentricidade, mais seus ramos se aproximarão de retas.

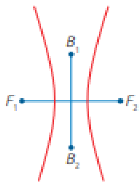


Hipérbole com excentricidade 1,1.

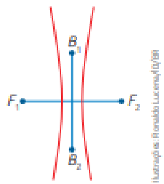


Hipérbole com excentricidade 2.

O centro de uma hipérbole corresponde ao ponto médio de $\overline{F_1F_2}$, $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$.



Hipérbole com excentricidade 3.

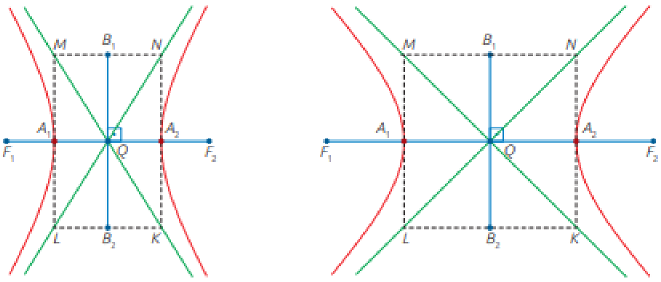


Hipérbole com excentricidade 5.

Figura C.6

Outro elemento importante das hipérboles são suas **retas assíntotas**. Para obtê-las, podemos construir um retângulo *KLMN*, que possui A_1, B_1, A_2 e B_2 como pontos médios de seus lados de medidas $2a$ e $2b$. Esse retângulo é chamado de retângulo de referência ou retângulo auxiliar da hipérbole.

As retas *KM* e *LN* que contêm as diagonais desse retângulo são denominadas assíntotas da hipérbole. A hipérbole não possui ponto em comum com as assíntotas e, quanto mais distante um ponto da hipérbole estiver de seu centro, mais próximo esse ponto estará da assíntota.



No caso em que o retângulo auxiliar for um quadrado (hipérbole à direita), isto é, quando $2a = 2b$, teremos uma hipérbole chamada hipérbole equilátera.

Agora, considere uma hipérbole no plano cartesiano com o eixo real paralelo ao eixo das abscissas e um ponto qualquer $P(x, y)$ pertencente a essa cônica.

Desenvolvendo a igualdade $|PF_1 - PF_2| = 2a$ e utilizando a relação notável $c^2 = a^2 + b^2$, obtemos a equação:

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1}$$

chamada **equação reduzida** da hipérbole de centro $Q(x_0, y_0)$.

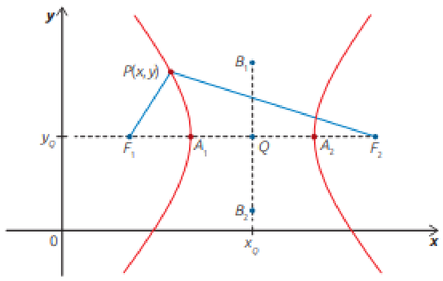
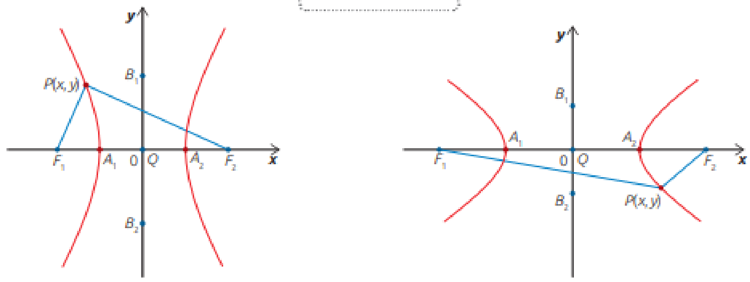


Figura C.7

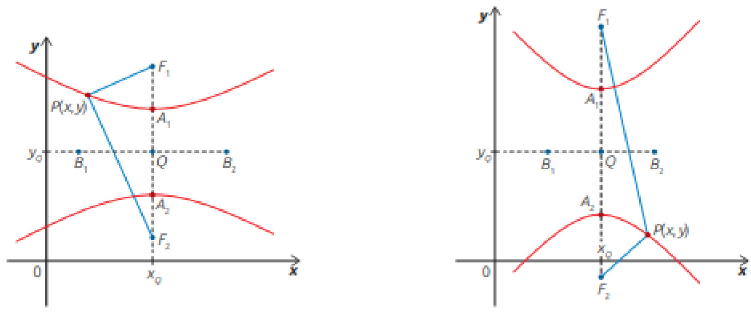
No caso particular em que o centro de uma hipérbole coincide com a origem do plano cartesiano, $Q(0,0)$, e os focos pertencem ao eixo das abscissas, a equação reduzida dessa hipérbole é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



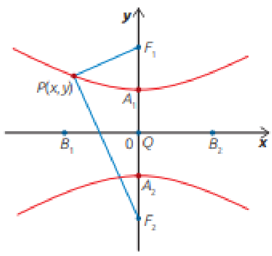
Ao considerar uma hipérbole no plano cartesiano com o eixo real paralelo ao eixo das ordenadas, um ponto qualquer $P(x, y)$ pertencente a ela e centro $Q(x_Q, y_Q)$, temos a equação reduzida:

$$\frac{(y - y_Q)^2}{a^2} - \frac{(x - x_Q)^2}{b^2} = 1$$



No caso particular em que o centro de uma hipérbole coincide com a origem do plano cartesiano, $Q(0, 0)$, e os focos pertencem ao eixo Oy, qual será a equação reduzida dessa hipérbole?

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$



Ilustrações: Ronaldo Lucena/ID/BR

Figura C.8

Tarefas Anote as respostas no caderno.

17. Determine a equação da hipérbole descrita em cada item.

a) Hipérbole de focos $F_1(5,0)$ e $F_2(-5,0)$ que contém o ponto $A_1(2,0)$. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{21}=1$

b) Hipérbole de focos $F_1(0,2)$ e $F_2(0,-2)$ e assíntotas $y=x$ e $y=-x$. $\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}=1$

c) Hipérbole com eixo real de extremos $A_1(5,1)$ e $A_2(-1,1)$ e assíntotas $y=x-1$ e $y=-x+3$.

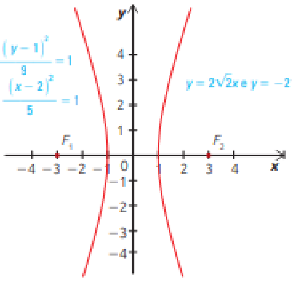
d) Hipérbole com um dos focos $F_1(2,1)$, centro $Q(2,-2)$ e eixo real de medida $2a=4$.

17. c) $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{9}=1$

17. d) $\frac{(y+2)^2}{4}-\frac{(x-2)^2}{5}=1$

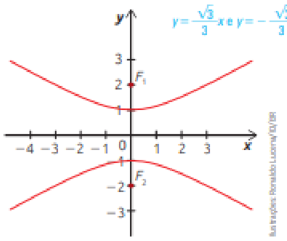
18. Em cada item, determine as equações das assíntotas da hipérbole representada, sabendo que F_1 e F_2 são seus focos.

a)



$y=2\sqrt{2}x$ e $y=-2\sqrt{2}x$

b)



$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ e $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$

19. Determine as coordenadas dos focos e a excentricidade das hipérboles abaixo.

a) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ $F_1(5,0)$, $F_2(-5,0)$ e $e=\frac{5}{4}$.

b) $\frac{y^2}{144}-\frac{x^2}{25}=1$ $F_1(0,13)$, $F_2(0,-13)$ e $e=\frac{13}{12}$.

c) $\frac{(x+2)^2}{6}-\frac{(y+5)^2}{10}=1$

$F_1(2,-5)$, $F_2(-6,-5)$ e $e=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

20. Vamos verificar que a hipérbole h: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$ não intersecta suas retas assíntotas. Primeiro, determinaremos suas assíntotas, s_1 e s_2. Como h está centrada na origem, suas assíntotas são dadas por $y=\pm\frac{b}{a}x$. Assim:

$$s_1: y=2x \text{ e } s_2: y=-2x$$

Vamos supor, por absurdo, que exista um ponto $P(x_0, y_0)$ na intersecção de h e s_1. Desse modo, temos:

$$y_0=2x_0 \text{ e } \frac{x_0^2}{4}-\frac{y_0^2}{16}=1$$

Assim:

$$1=\frac{x_0^2}{4}-\frac{y_0^2}{16}=\frac{x_0^2}{4}-\frac{(2x_0)^2}{16}=$$

$$=\frac{x_0^2}{4}-\frac{4x_0^2}{16}=\frac{x_0^2}{4}-\frac{x_0^2}{4}=0$$

o que é falso, pois $1\neq 0$. Dessa maneira, h e s_1 não se intersectam. De modo análogo, pode-se mostrar que h e s_2 não se intersectam.

Com argumentos semelhantes, mostre que as hipérboles abaixo não intersectam suas retas assíntotas. Resposta na **Resolução das tarefas** nas **Orientações para o professor**.

a) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{5}=1$

b) $\frac{(x-2)^2}{1}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$

c) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

21. Determine o valor de m, sendo $m\neq 0$, para que a hipérbole de equação $\frac{x^2}{m^2}-\frac{(y-2)^2}{9}=1$ tenha excentricidade igual a 2. $m=\sqrt{3}$

22. Em grupo Reúna-se com um colega e mostrem que a excentricidade de uma hipérbole equilátera é sempre igual a $\sqrt{2}$. Resposta na **Resolução das tarefas** nas **Orientações para o professor**.

23. Determine a equação da hipérbole equilátera de focos $F_1(4,0)$ e $F_2(-4,0)$. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$

Figura C.9

Anexo-04: Estudo da Parábola

Parábola

Provavelmente, você já estudou que a representação gráfica de uma função quadrática é uma parábola cujo eixo de simetria é paralelo ou coincidente ao eixo das ordenadas. Agora, realizaremos um estudo mais aprofundado dessa cônica.

Assim como realizamos com a elipse e com a hipérbole, vamos definir parábola com as propriedades métricas que seus pontos devem satisfazer.

Parábola é o conjunto de pontos de um plano cujas distâncias a um ponto fixo e a uma reta fixa são iguais.

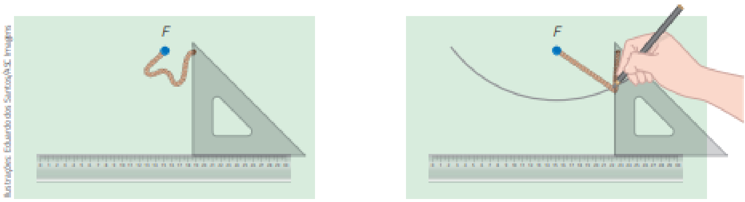
A palavra "parábola" também é utilizada para indicar narrativas alegóricas, cujo objetivo é transmitir mensagens, geralmente moral ou religiosa, de maneira metafórica, isto é, de modo indireto.

Essa reta fixa é chamada de diretriz e esse ponto fixo, não pertencente à diretriz, é chamado de foco da parábola.

É possível provar que a parábola pode ser obtida seccionando a superfície cônica circular reta de duas folhas.

De maneira prática, podemos obter a representação geométrica de uma parábola marcando primeiro um ponto em uma folha de papel, que será o foco F. Em seguida, fixamos uma extremidade de um barbante nesse ponto e a outra extremidade do barbante fixamos em um esquadro. Depois, com o auxílio de uma régua em um lugar fixo, traçamos uma reta e uma curva contínua deslizando o esquadro, apoiando-o na régua, no local em que está localizada a reta, com o barbante sempre esticado para obtermos a representação dessa parábola.

O comprimento do barbante deve ser aproximado ao comprimento do cateto do esquadro em que o barbante foi fixado.

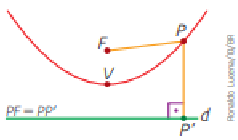


A distância de qualquer ponto dessa parábola à reta traçada e ao ponto F é a mesma.

Considere um ponto F e uma reta d pertencentes a um plano α, tal que F não pertence a d. Uma parábola de foco F e diretriz d é formada pelo conjunto de pontos P de α, que estão à mesma distância de F e de d. A distância entre o foco F e a diretriz d é denominada parâmetro.

Observe os principais elementos de uma parábola:

- foco: F
- vértice: V
- diretriz: d
- parâmetro: p
- eixo de simetria: e
- relação notável: $FV = \frac{p}{2}$



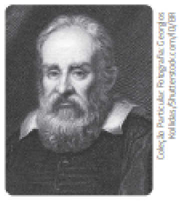
P' é a projeção ortogonal do ponto P sobre a reta d

O eixo de simetria, indicado pela reta e, é a reta que passa pelo foco F e é perpendicular à diretriz d.

Figura C.10

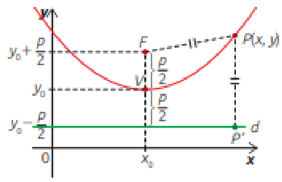
Galileu Galilei fez contribuições notáveis para a Matemática e outros ramos da Ciência nos séculos XVI e XVII. Entre elas, podemos destacar o invento do microscópio moderno, a construção de uma espécie de binóculos de longo alcance e a mecânica dos corpos em queda livre, com base no fato de a distância percorrida por um corpo em queda livre ser proporcional ao quadrado do tempo do início da queda. Foi ele também o primeiro a perceber que a trajetória de um projétil, desconsiderando a resistência do ar, é de natureza parabólica.

Fonte de pesquisa: Eves, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.



Astrônomo italiano Galileu Galilei (1564-1642).

Agora, considere uma parábola no plano cartesiano com a reta diretriz paralela ao eixo das abscissas, vértice acima da diretriz e um ponto qualquer $P(x, y)$ pertencente a essa cônica.



Desenvolvendo a igualdade $PF = PP'$, obtemos a equação:

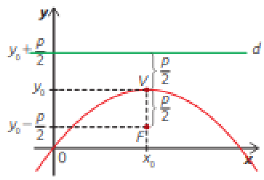
$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

chamada **equação reduzida** da parábola de vértice $V(x_0, y_0)$ acima da diretriz, foco $F\left(x_0, y_0 + \frac{p}{2}\right)$ e reta diretriz $y = y_0 - \frac{p}{2}$.

Podemos reescrever a equação reduzida da parábola como $y = ax^2 + bx + c$, sendo $a = \frac{1}{2p}$, $b = -\frac{x_0}{p}$ e $c = \frac{x_0^2}{2p} + y_0$.

Veja outras possibilidades de equações de parábola:

- parábola com a reta diretriz paralela ao eixo das abscissas e vértice abaixo da diretriz;

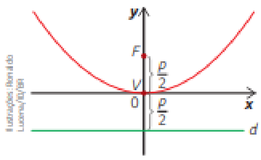


$$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$$

foco: $F\left(x_0, y_0 - \frac{p}{2}\right)$

reta diretriz: $y = y_0 + \frac{p}{2}$

- parábola com a reta diretriz paralela ao eixo das abscissas e vértice coincidindo com a origem $V(0, 0)$, mas acima da diretriz;



$$x^2 = 2py$$

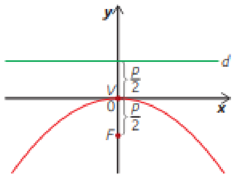
foco: $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$

reta diretriz: $y = -\frac{p}{2}$

Qual é a reta correspondente ao eixo de simetria dessa parábola? $x = 0$

Figura C.11

- parábola com a reta diretriz paralela ao eixo das abscissas e vértice coincidindo com a origem $V(0, 0)$, mas abaixo da diretriz;

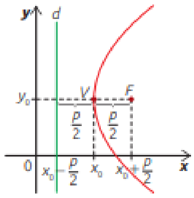


$\boxed{x^2 = -2py}$

foco: $F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$

reta diretriz: $y = \frac{p}{2}$

- parábola com a reta diretriz paralela ao eixo das ordenadas e vértice à direita da diretriz;

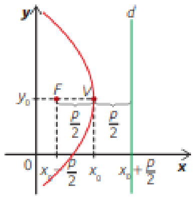


$\boxed{(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)}$

foco: $F\left(x_0 + \frac{p}{2}, y_0\right)$

reta diretriz: $x = x_0 - \frac{p}{2}$

- parábola com a reta diretriz paralela ao eixo das ordenadas e vértice à esquerda da diretriz;

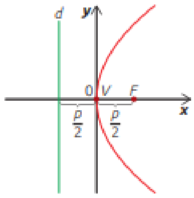


$\boxed{(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)}$

foco: $F\left(x_0 - \frac{p}{2}, y_0\right)$

reta diretriz: $x = x_0 + \frac{p}{2}$

- parábola com a reta diretriz paralela ao eixo das ordenadas e vértice coincidindo com a origem $V(0, 0)$, mas à direita da diretriz;

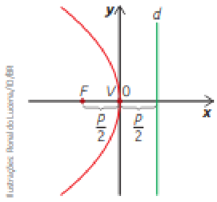


$\boxed{y^2 = 2px}$

foco: $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

reta diretriz: $x = -\frac{p}{2}$

- parábola com a reta diretriz paralela ao eixo das ordenadas e vértice coincidindo com a origem $V(0, 0)$, mas à esquerda da diretriz.



$\boxed{y^2 = -2px}$

foco: $F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$

reta diretriz: $x = \frac{p}{2}$

Figura C.12: caderno do aluno

Tarefas Anote as respostas no caderno.

24. Determine o foco, o vértice e a equação da reta diretriz das parábolas cujas equações são dadas abaixo. Em seguida, esboce cada parábola no plano cartesiano.

a) $(y+1)^2 = 4(x-4)$

b) $(x+2)^2 = -8(y+1)$

c) $(y+2)^2 = -16(x-3)$

Respostas na **Resolução das tarefas** nas **Orientações para o professor**.

25. c) $(x-2)^2 = 8(y-1)$

25. Em cada caso, determine a equação da parábola, sabendo que:

a) o vértice é $V(0, 0)$ e a equação da diretriz, $y = -2$. $x^2 = 8y$

b) o vértice é $V(2, 1)$ e o foco, $F(5, 1)$. $(y-1)^2 = 12(x-2)$

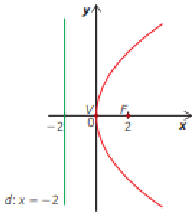
c) o foco é $F(2, 3)$ e a equação da diretriz, $y = -1$.

d) o vértice é $V(0, 0)$, o eixo de simetria coincide com o eixo das abscissas e a parábola passa pelo ponto $P(2, -3)$. $y^2 = \frac{9}{2}x$

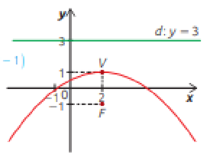
Figura C.13

26. Ferramentas Determine a equação de cada uma das parábolas representadas a seguir, em que estão indicados o foco F, o vértice V e a reta diretriz d.

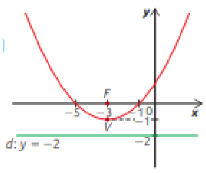
a) $y^2 = 8x$



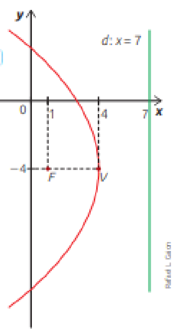
b) $(x-2)^2 = -8(y-1)$



c) $(x+3)^2 = 4(y+1)$

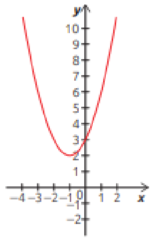


d) $(y+4)^2 = -12(x-4)$

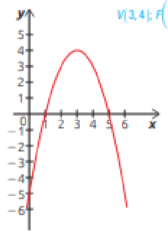


27. Determine o vértice, o foco e a equação da diretriz de cada parábola a seguir.

a) $y = x^2 + 2x + 3$ $V(-1, 2)$; $F\left(-1, \frac{9}{4}\right)$; d: $y = \frac{7}{4}$



b) $y = -x^2 + 6x - 5$ $V(3, 4)$; $F\left(3, \frac{15}{4}\right)$; d: $y = \frac{15}{4}$



28. Determine o foco e a equação da reta diretriz das parábolas.

a) $x^2 = 8y$ $F(0, 2)$; $y = -2$

b) $y^2 = -2x$ $F\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$; $x = \frac{1}{2}$

29. Determine os pontos de intersecção da parábola λ: $y = x^2$ com a elipse β: $x^2 + 5y^2 = 6$. $A(1, 1)$ e $B(-1, 1)$

30. Para qual valor de m a parábola $(x-6)^2 = m(y-1)$ intersecta o eixo das ordenadas em $(0, 4)$? $m = 12$

31. Determine a equação da parábola que passa pelos pontos $P(-4, 4)$, $V(0, 8)$ e $K(8, -8)$, conforme a figura. $x^2 = -4(y-8)$

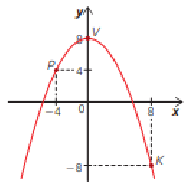


Figura C.14

Apêndice D

Autorização para aplicação de pesquisa

GOVERNO DO
ESTADO DO CEARÁ

EEFM ANASTÁCIO ALVES BRAGA
CNPJ 07 954 514/0034-93
INEP 23035684

SOLICITAÇÃO DE AUTORIZAÇÃO PARA PESQUISA

Através do presente instrumento, solicito ao Gestor da escola E.E.M Anastácio Alves Braga, autorização para realização da pesquisa integrante do Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática -PROFMAT. Tendo como pesquisador o docente integrante do quadro de profissionais desta instituição: Francisco Edinaldo Martins. Com o título: O USO DO GEOGEBRA COMO FERRAMENTA PEDAGÓGICA PARA O ENSINO DAS CÔNICAS: ELIPSE, HIPÉRBOLE E PARÁBOLA. A coleta de dados será realizada através do desenvolvimento de atividades pedagógicas e aplicação de questionário.

Francisco Edinaldo Martins

Assinatura Prof. Pesquisador

Deferido (X) Indeferido ( )

Onofre Fausto Melo Filho

Assinatura e carimbo do gestor

Onofre Fausto Melo Filho
Diretor Geral
D.O. 06/06/18
EEFM Anastácio A. Braga

Itapipoca-Ce, 15 de setembro de 2022.

Figura D.1