Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

SOBRE HIPERSUPERFÍCIES EM ESPAÇOS CONFORMEMENTE PLANOS E RIGIDEZ DE SUPERFÍCIES CAPILARES

Bruno Vasconcelos Mendes Vieira

Teresina - 2022

Bruno Vasconcelos Mendes Vieira

Tese de Doutorado:

Sobre Hipersuperfícies em Espaços Conformemente Planos e Rigidez de Superfícies Capilares

Tese submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática. Área de Concentração: Geometria Diferencial.

Orientador:
Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima
Co-Orientador:
Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa

Teresina - 2022

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sobre hipersuperfície em espaços conformemente plano
e rigidez de superfícies capilares

Bruno Vasconcelos Mendes Vieira

Esta Tese foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Doutor em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Tese aprovada em 20 de setembro de 2022.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima - Orientador

Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa - UFPI

Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista - UFPI

Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior - UFC

Prof. Dr. Luquésio Petrola de Melo Jorge - UFC

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco
Divisão de Representação da Informação

V658s Vieira, Bruno Vasconcelos Mendes.
Sobre hipersuperfícies em espaços conformemente planos e rigidez de superfícies capilares / Bruno Vasconcelos Mendes Vieira. -- 2022.
63 f.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Piauí, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2022.
"Orientador: Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima".
"Coorientador: Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa".

1. Espaço conformemente plano. 2. Hipersuperfície Helicoidal. 3. Curvatura média prescrita. 4. Gráfico translacional generalizado. 5. Curvatura média. I. Lima, Barnabé Pessoa. II. Sousa, Paulo Alexandre Araújo. III. Título.

CDD 516.36

Bibliotecária: Francisca das Chagas Dias Leite - CRB3/1004

Dedico este trabalho aos meus pais Aderaldo e Eugênia, à minha esposa Maria de Jesus e à minha filha Maria Vitória.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus por ter concedido força, luz e determinação para a realização de mais um sonho. Por ter nascido em uma família que amo tanto, de pais maravilhosos, que sempre mesmo com dificuldades me ajudaram como podiam, ter posto em minha vida pessoas de moral e de grandeza espiritual nas quais procuro me espelhar.

Agradeço aos professores Paulo Alexandre Araújo Sousa, Rondinelle Marcolino Batista, Ernani de Sousa Ribeiro Júnior, Luquésio Petrola de Melo Jorge, por aceitarem participar da banca de defesa de Tese de Doutorado e pelas valiosas sugestões e correções do texto, que vão contribuir ainda mais para o enriquecimento deste trabalho

Agradeço especialmente ao meu orientador e amigo Barnabé Pessoa Lima por ter me orientado da iniciação cientifica ao doutorado, a sua contribuição foi fundamental nesta trajetória e sem ela nada disso estaria acontecendo. Meu muito obrigado por me conduzir em todo o desenvolvimento do trabalho com suas dicas e sugestões, e por sempre acreditar no meu potencial, pela paciência e confiança.

Agradeço aos professores José Francisco, Leandro Pessoa, Gleison Nascimento, Antônio Wilson que tiveram contribuição importante na minha formação. Gostaria também de estender estes agradecimentos aos demais professores e técnicos da Pós-Graduação em Matemática, que sempre nos ajudaram na nossa luta diária.

Agradeço a minha família que teve um papel importante para conclusão desta etapa, em especial a meus pais: Eugênia e Aderaldo, pelo apoio e confiança. Agradeço também aos meus irmãos: Gustavo e Natália pela grande amizade e amor.

Agradeço também a minha esposa Maria de Jesus pelo companheirismo e pelo apoio incondicional em todos os momentos desta difícil caminhada. Sou grato por tudo o que você tem feito por mim.

Agradeço a minha querida filha Maria Vitória, pois ela veio ao mundo durante o curso deixando assim a caminhada mais feliz e agradável.

Agradeço também a meu sogro Fernando, pelo apoio e confiança.

Agradeço aos professores do curso de Matemática da Universidade Federal do Piauí - UFPI, Campus Senador Helvídio Nunes de Barros - CSHNB, da cidade de Picos por permitirem o meu afastamento para cursar o Doutorado: Cícero, Pedro Paulo, Antônio José, Alex, Erik, Anísia, Kláudia, João Santos e Daniel. Em especial gostaria de agradecer ao professor Francisco Gilberto por ter aceito ser membro suplente da banca avaliadora e contribuir com dicas para melhoria na escrita deste trabalho.

Agradeço ao meu amigo José Edilson pelo incetivo e palavras de motivação para seguir nessa difícil jornada.

Por fim, gostaria de estender meus agradecimentos, a todos os amigos da pós-graduação em Matemática-UFPI, em especial a João Vinícius, Erisvaldo, José Márcio, Ruan Diego, Edimilson Lopes, Christopher, Jaciane, Atécio Alves, Jefferson Brito, Jefferson Nascimento, Alexandre Bezerra, Pedro Paulo, Dieme e Gustavo.

"A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê."

Arthur Schopenhauer.

Resumo

Na primeira parte deste trabalho investigamos hipersuperfícies helicoidais em uma variedade Riemanniana, que é o espaço Euclidiano munido de uma métrica conformemente plana, e mostramos que uma hipersuperfície helicoidal é mínima neste espaço. Construímos uma família a 2-parâmetros de superfícies helicoidais com curvatura média prescrita em um espaço tridimensional conformemente plano com métricas cilíndricas gerais. Finalmente, damos uma caracterização para uma classe de superfícies translacionais mínimas em um espaço tridimensional conformemente plano. Na segunda parte, investigamos a geometria de gráficos translacionais generalizados (GTG) imersos no espaço Euclidiano equipado com uma métrica conforme à métrica Euclidiana e obtemos resultados que caracterizam tais hipersuperfícies. Aplicando os resultados de caracterização e usando técnicas de resolução de EDO, construímos exemplos de GTG satisfazendo propriedades geométricas não válidas em relação à métrica Euclidiana. Na terceira parte, obtemos uma estimativa precisa para o comprimento $L(\partial\Sigma)$ do bordo $\partial\Sigma$ de uma superfície capilar mínima Σ^2 em M^3, onde M é uma variedade compacta tridimensional com bordo estritamente convexo, assumindo que Σ tem índice um. A estimativa é em termos do gênero de Σ, do número de componentes conexas de $\partial\Sigma$ e do ângulo de contato θ. Fazendo uma suposição extra sobre a geometria de M ao longo de ∂M, caracterizamos a geometria global de M, que é atingida apenas pelas bolas Euclidianas tridimensionais. Para superfícies CMC capilares estáveis, também obtemos resultados semelhantes.

Palavras-chave: Espaço conformemente plano, Hipersuperfície helicoidal, Curvatura média prescrita, Gráfico translacional generalizado, Curvatura média.

Abstract

In the first part of this work we investigate helicoidal hypersurfaces in a Riemannian manifold, which is the Euclidean space endowed with a conformally flat metric, and we show that a helicoidal hypersurface is minimal in this space. We build a 2-parameter family of helicoidal surfaces with prescribed mean curvature in a confroamlly flat 3-space with general cylindrial metrics. Finally, we give a characterization for a class of minimal translation surfaces in a conformally flat 3-space. In the second part we investigate the geometry of generalized translation graph (GTG) immersed in Euclidean space equipped with a metric conformal to Euclidean metric and obtain results that characterize such hypersurfaces. Applying the characterization results, and using ODE solving techniques, we build examples of GTG satisfying geometric properties not valid in relation to the Euclidean metric. In the third part, we obtain one sharp estimate for the length $L(\partial\Sigma)$ of the boundary $\partial\Sigma$ of a capillary minimal surface Σ^2 in M^3, where M is a compact 3-manifold with strictly convex boundary, by assuming that Σ has index one. The estimate is obtained in term of the genus of Σ, the number of connected components of $\partial\Sigma$ and the contact angle θ. By making an additional assumption on the geometry of M along ∂M we characterize the global geometry of M, which is achieved only by the 3-dimentional Euclidean ball. For capillary stable CMC surfaces we also obtain similar results.

Keywords: Conformally flat at space, Helicoidal hypersurface, Prescibed mean curvature, Generalized translation graph, Mean curvature, Capillary surfaces.

Sumário

Introdução

No presente trabalho de tese estudamos hipersuperfícies helicoidais, gráficos translacionais generalizados em espaços conformemente planos e Rigidez de superfícies capilares em variedades tridimensionais com bordo estritamente convexo, o trabalho está dividido em quatro capítulos, no Capítulo 1 veremos alguns resultados preliminares que são necessários para a prova dos nossos resultados.

No Capítulo 2 trabalharemos com o espaço conformemente plano $(\mathbb{E}_F^{n+1}, \langle , \rangle)$ cujo tensor métrico é dado por $\langle , \rangle = \frac{1}{F^2}\langle , \rangle_0$, onde $\langle , \rangle_0$ é a métrica padrão do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ e $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ é um fator conforme positivo.

O estudo de espaços conformemente planos é um tópico clássico da Geometria Diferencial e constitui um ambiente frutífero para investigar problemas envolvendo subvariedades do espaço Euclidiano. Em [12] Colding e Minicozzi deram uma caracterização variacional de self-shrinkers do fluxo da curvatura média em $\mathbb{R}^{n+1}$ mostrando que são hipersuperfícies mínimas do espaço $\mathbb{E}_F^{n+1}$ com fator conforme $F(x) = e^{\frac{|x|^2}{4n}}$. Espaços conformemente planos incluem importantes espaços de curvatura constante, tal como $\mathbb{S}^n - \{p\}$ e o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ (para $n \geqslant 3$), bem como alguns espaços produto. Em [2] Araújo, Corro e Pina provaram que o espaço produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{S}^1$ é isométrico a $\mathbb{E}_F^3 := \{\mathbb{R}^3 - \{z - eixo\}\}$ munido com uma métrica conforme onde $F(r) = \sqrt{r}$, para $r = x_1^2 + x_2^2$. No mesmo trabalho, eles provaram que o espaço produto warped $\mathbb{H}^2 \times_f \mathbb{R}$ com função warped $f = F^{-1}$, é isométrico ao espaço conformemente plano $\mathbb{E}_F^3$ cujo fator conforme é dado por $F(r) = \frac{1-r}{2}$, para $0 < r < 1$.

Outra fonte de motivação vem do fato de que espaços conformemente planos têm sido usados para dar respostas negativas a alguns problemas importantes, como em [14] onde Corro, Pina e Souza provaram a existência de superfícies completas com curvatura gaussiana estritamente negativa em um espaço conformemente plano, em contraste com o Teorema de Efimov para $\mathbb{R}^{n+1}$ e o Teorema de Schlenker para $\mathbb{H}^{n+1}$. Recentemente, Ou e Tang [46] obtiveram uma resposta negativa à conjectura generalizada de Chen sobre subvariedades biharmônicas.

Superfícies imersas isometricamente em formas espaciais e espaços produto têm sido estudadas em diversos trabalhos sob algumas condições geométricas, como curvatura média constante, superfícies de translação e rotação (ver [6], [14], [15], [33], [35] , [36], [47]). Em particular, destacamos a classificação de todas as superfícies de rotação completa com curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$ devido a Kenmotsu [27] e a extensão deste resultado dada por do Carmo e Dajczer [16] para hipersuperfícies de rotação imersas em espaços formas de dimensão $(n+1)$. Outros resultados de classificação para superfícies invariantes em $\mathbb{S}^3$ foram obtidos em [17, 41].

Uma generalização natural das superfícies de rotação em formas espaciais são as chamadas superfícies helicoidais. A grosso modo, caracterizam-se como superfícies invariantes sob a ação do subgrupo helicoidal de isometrias, cujos elementos podem ser vistos como a composição de uma translação com uma rotação para um dado eixo. Em um trabalho célebre [15], do Carmo e Dajczer descreveram o espaço de todas as superfícies em $\mathbb{R}^3$ que possuem curvatura média constante e são invariantes por movimentos helicoidais. Resultados semelhantes aos obtidos por do Carmo e Dajczer foram dados por Sá Earp-Toubiana [60], para superfícies em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Mais tarde, Caddeo e outros em [8] generalizaram um resultado clássico de Bour sobre superfícies helicoidais no espaço Euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$ para o caso de superfícies helicoidais nas variedades Riemannianas tridimensionais cujas métricas têm grupos de isometrias de dimensão 4 ou 6.

Superfícies helicoidais de curvatura média constante foram também consideradas por Edelen e Solomon [21], e superfícies helicoidais mínimas foram caracterizadas por Perdomo [49] (ver também [47]). No espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$, Martínez, dos Santos e Tenenblat [38] estendem a classificação de superfícies planas de rotação, devido a Kokubu, Umehara e Yamada [28], para superfícies helicoidais por meio de dados meromórficos e Ripoll [52] provou alguns resultados referentes a superfícies helicoidais mínimas. Superfícies mínimas helicoidais em $\mathbb{S}^3$ foram investigadas em [20, 53] e uma classificação completa em termos de funções ângulo lineares foi fornecida por Manfio e dos Santos em [37]. Mais geralmente, superfícies invariantes sob a ação de algum subgrupo de isometrias com curvatura média ou gaussiana constante têm sido estudadas: Roussos [54] provou que uma superfície helicoidal em $\mathbb{R}^3$ tem curvatura média constante se, e somente se, seus eixos principais fazem um ângulo constante com as órbitas; Figueroa e outros em [22] estudaram superfícies invariante dos grupos de Heisenberg; superfícies mínimas e com curvatura média constante $\mathsf{SO}(2)$-invariantes em espaços tridimensionais homogêneos foram consideradas por Caddeo e outros em [9]; Montaldo e Onnis [40] deram um procedimento de redução para determinar as superfícies invariantes com curvatura de Gauss constante em uma variedade tridimensional.

Mais recentemente, superfícies helicoidais foram estudadas no espaço conformemente plano $\mathbb{E}^3_F$ munido de um fator conforme cilíndrico $F(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1^2 - x_2^2}$ por Araújo, Cui e Pina [3], onde os autores provaram que essas superfícies são minimamente imersas em $\mathbb{E}^3_F$. Nosso primeiro teorema fornece uma extensão deste resultado para hipersuperfícies helicoidais em $\mathbb{E}^{n+2}_F$ (Teorema 4).

Superfícies de rotação definidas no espaço Euclidiano por uma função de curvatura média prescrita foram intensamente estudadas, veja, por exemplo, [5, 27]. Prescrever a curvatura média é um problema antigo que remonta aos problemas de Christoffel e Minkowski para ovaloides (cf. [1, 11, 50]). Recentemente, tem sido investigado para superfícies de curvatura média constante completa, veja Bueno e outros em[6] e suas referências. Ao considerar uma curva perfil que gera uma superfície helicoidal, Baikoussis e Koufogiorgos [4] descreveram superfícies helicoidais com curvaturas média ou gaussiana em termos de equações diferenciais ordinárias. Em [29], Lee, Lee e Yoon construíram uma família a 2-parâmetros de superfícies helicoidais com curvatura média prescrita no espaço conformemente plano $\mathbb{E}^3_F$ cujo fator conforme é escolhido como $F(x_1, x_2, x_3) = F(r) = \sqrt{r}$, onde $r = x_1^2 + x_2^2$. Em nosso segundo resultado, estendemos o resultado dado em [29] considerando um fator conforme cilíndrico genérico $F(x_1, x_2, x_3) = F(r)$ (Teorema 5).

Outra classe importante de superfícies é dada pelos gráficos mínimos sobre um domínio aberto em um espaço forma ou espaço produto. Os esforços para estudar gráficos mínimos, principalmente relacionados ao célebre problema de Bernstein, deram uma forte contribuição para o surgimento da Análise Geométrica, veja Dierkes e outros em [18] e referências nele contidas. Uma caracterização de gráficos mínimos no espaço conforme $\mathbb{E}^3_F$, com fator conforme cilíndrico $F(x_1, x_2, x_3) = F(r)$, $r = x_1^2 + x_2^2$, foi provada por Souza em [63]. Estendemos esta caracterização para espaços conformemente planos de dimensão superior $\mathbb{E}^{n+1}_F$, onde $F(x_1, \cdots, x_{n+1}) = F(r)$ e $r = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ (Proposição 3).

A Proposição 3 fornece uma condição necessária e suficiente para que um gráfico seja mínimo no espaço $\mathbb{E}_F^{n+1}$. Neste contexto, surge naturalmente uma questão.

Pergunta 1. *Seja* $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função suave. Existe um fator conforme* F *tal que o gráfico de* φ *é uma hipersuperfície mínima em* $\mathbb{E}_F^{n+1}$*?*

Apresentamos uma resposta positiva à Pergunta 1 no caso particular que o gráfico é um parabolóide (Exemplo 3).

Como notamos, a ligação entre espaços conformemente planos, espaços forma e espaços produto, torna esta questão bastante geral. De fato, vários resultados de rigidez envolvendo superfícies mínimas foram provados em muitos espaços ambientes (ver [12, 36, 48]). No último resultado do Capítulo 2, investigamos restrições de rigidez restritas à classe de superfícies translacionais bidimensionais em $\mathbb{E}_F^3$. Lembramos que uma superfície translacional é o gráfico de uma função $\varphi(u, v) = f(u) + g(v)$, onde f e g são funções suaves. Por exemplo, no espaço Euclidiano, isto é, para $F = 1$ Scherk [61] provou que, além dos planos, as únicas superfícies translacionais mínimas são dadas por

$$z(x, y) = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{\cos(ay)}{\cos(ax)} \right|,$$

onde a é uma constante diferente de zero. Essa superfície, única a menos de isometrias, é chamada de superfície mínima de Scherk. Superfícies translacionais no espaço Euclidiano também foram estudadas em [33, 35, 36].

Liu [33] considerou as superfícies translacionais com curvatura constante no espaço Euclidiano tridimensional e no espaço de Lorentz-Minkowski. Assumindo que a curvatura gaussiana K é constante, o autor provou que se as superfícies translacionais são congruentes a um cilindro, então $K = 0$. No caso de curvatura média constante, Liu provou que

$$z(x, y) = -\frac{\sqrt{1 + a^2}}{2H} \sqrt{1 - 4H^2 \cdot x^2} - ay, \ \ a \in \mathbb{R}.$$

O conceito de superfícies translacionais foi generalizado para hipersuperfícies de $\mathbb{R}^{n+1}$ por Dillen, Verstraelen e Zafindratafa [19], eles consideraram gráficos de funções dadas por $F(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) + \cdots + f_n(x_n)$ e obteveram uma classificação de hipersuperfícies translacionais mínimas do espaço Euclidiano $(n + 1)$-dimensional.

Uma classificação de hipersuperfícies translacionais com curvatura média constante no $(n + 1)$-dimensional espaço Euclidiano foi feito por Chen, Sun e Tang [10]. Ou seja, eles provaram que

$$F(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{\sqrt{c}}{nH}\left[1 - (nHx_1 + c_1)^2\right]^{\frac{1}{2}} + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + c_2,$$

onde a_i, c, c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

Observe que essas hipersuperfícies têm curvatura de Gauss-Kronecker nula. Por outro lado, Seo [62] classificou hipersuperfícies translacionais com curvatura constante de Gauss-Kronecker no espaço Euclidiano. Mais precisamente, Seo provou que tais hipersuperfícies são congruentes a um cilindro e, portanto, a curvatura de Gauss-Kronecker deve ser zero.

Mais recentemente, Moruz e Munteanu [42] definiram uma nova classe de hipersuperfícies translacionais em $\mathbb{R}^4$ como um gráfico da forma

$$w(x, y, z) = f(x) + g(y, z).$$

Este novo conceito foi generalizado para dimensões superiores por Munteanu e outros em [43], conforme veremos no Capítulo 1.

Em [42], Moruz e Munteanu consideraram hipersuperfícies translacionais generalizadas mínimas em $\mathbb{R}^4$ e deram uma classificação dessas hipersuperfícies. Em um trabalho recente [32] Lima e outros deram uma classificação de hipersuperfícies translacionais generalizadas com curvatura média constante ou curvatura de Gauss-Kronecker constante. Mais precisamente, os autores provaram que em ambos os casos a curvatura de Gauss-Kronecker deve ser zero. Munteanu e outros em [43], estudaram hipersuperfícies translacionais generalizadas em $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura média zero impondo condições naturais em ϕ e ψ, como harmonicidade, minimalidade e eikonalidade .

Dessa forma, como no Capítulo 2, no Capítulo 3 consideramos o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ munido com uma métrica $\langle\, , \rangle = \frac{1}{F^2}\langle\, , \rangle_0$. Observe que, se F é limitado, então $\mathbb{E}_F^{n+1} = (\mathbb{R}^{n+1}, \langle\, , \rangle)$ é completo.

É interessante estudar hipersuperfícies mínimas em espaços conformemente planos pois possuem geometrias interessantes e podem ter significado físico. Em [2] Araújo, Corro e Pina consideraram superfícies mínimas helicoidais no espaço conformemente plano tridimensional $\mathbb{E}_F^3 = (\mathbb{R}^3, \langle\, , \rangle)$, onde $F(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1^2 - x_2^2}$. Esta métrica aparece como uma solução da equação de Einstein obtida por Pina e Tenenblat em [51].

Inspirados nesses trabalhos, consideramos o espaço $\mathbb{E}_F^{p+q+1} = (\mathbb{R}^{p+q+1}, \langle\, , \rangle)$ cujo fator de conformidade $F : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dado por $F(x, y, z) = e^{-u(|x|^2)}$, para alguma função suave $u : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, e um gráfico translacional generalizado M_f em $\mathbb{E}_F^{p+q+1}$ definido pela função $f(x, y) = \phi(x) + \psi(y)$, onde $\phi : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ e $\psi : V \subset \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ são funções suaves. No Teorema 7 consideramos o caso em que as funções ϕ e ψ são eikonais. Como aplicação do Teorema 7 provamos um resultado da existência de GTG mínimo em $\mathbb{E}_F^{p+q+1}$, satisfazendo as hipóteses do Teorema 7, que não é um hiperplano, contrário ao Teorema 3.2 de [43].

Nos Teoremas 8 e 9 apenas uma das funções é eikonal. Se ϕ for afim e u pertencer a uma classe especial de funções, aplicamos o Teorema 8 para obter uma caracterização de M_ψ. Mais especificamente, quando ϕ é afim, impomos uma restrição adequada na primeira derivada da função u e provamos que M_ψ é um gráfico mínimo em $\mathbb{R}^{q+1}$.

Em um trabalho recente [59], Ruiz-Hernández estudou a geometria das hipersuperfícies translacionais generalizadas cuja curvatura média não é zero e depende de suas primeiras p ou de suas segundas q variáveis. Motivados por este trabalho obtemos um resultado em nosso Teorema 9, onde consideraremos hipersuperfícies translacionais generalizadas cuja curvatura média depende de suas primeiras p variáveis. Uma consequência fácil, mas útil do Teorema 9 será obtida, mais precisamente, classificaremos as hipersuperfícies translacionais generalizadas mínimas no caso especial $p = 1$ e $u(t) = \sqrt{t}$.

No Teorema 10, obtivemos um resultado quando a função ψ é não-eikonal. Com as suposições do Teorema 10, se $p = 1$, $\Delta\psi = 0$ e existe t tal que $u'(t) \neq 0$, provamos que M_f é um 1-cilindro sobre a hipersuperfície mínima M_ψ. Este fato amplia o resultado comprovado por Munteanu e outros em (Corolário 6.2, [43]) para uma grande classe de variedades.

Finalmente, no Capítulo 4 abordamos um problema variacional muito interessante e importante em geometria diferencial, o problema de bordo livre para hipersuperfícies de curvatura média constante (CMC) ou mínimas. Dada uma variedade Riemanniana compacta (M^{n+1}, g) com bordo não vazio, o problema consiste em encontrar pontos críticos do funcional área entre todas as hipersuperfícies compactas $\Sigma \subset M$ com $\partial\Sigma \subset \partial M$ que divide M em dois subconjuntos de volumes prescritos. Os pontos críticos para este problema são hipersuperfícies mínimas ou de curvatura média constante $\Sigma \subset M$, encontrando ∂M ortogonalmente ao longo de $\partial\Sigma$ e são conhecidas como hipersuperfícies mínimas ou CMC com bordo livre. Nos últimos anos, este assunto tem sido estudado por muitos autores, por exemplo, [7], [23], [56], [55], [57], [58], [45] e [39].

Uma generalização natural de hipersuperfícies de bordo livre são hipersuperfícies capilares. Estas são pontos críticos de um determinado funcional energia, que será apresentado na Seção 1.4. Como será deduzido posteriormente, elas podem ser caracterizadas como hipersuperfícies mínimas ou CMC cujo bordo encontra o bordo do ambiente em um ângulo constante.

Assim como no caso de bordo livre, questões relacionadas à topologia e à geometria das hipersuperfícies despertam muita atenção dos geômetras. O primeiro resultado nesse sentido foi obtido por Nitsche [44], que provou que qualquer disco capilar imerso na esfera unitária de $\mathbb{R}^3$ deve ser uma calota esférica ou um disco plano. Mais tarde, Ros e Souam [57] estenderam este resultado para discos capilares em bolas tridimensionais de espaços forma. Recentemente, Wang e Xia [64] analisaram o problema em dimensão arbitrária e provaram que qualquer hipersuperfície capilar estável, imersa na bola em espaços forma é totalmente umbílica.

Motivados pelos resultados citados acima, impomos condições na curvatura da variedade ambiente tridimensional e procuramos restrições na topologia de possíveis superfícies capilares mínimas ou CMC imersas. Nosso objetivo neste Capítulo 4 é estender o resultado provado por Mendes [39], para superfícies mínimas de bordo livre imersas em variedades compactas tridimensionais com bordo não vazio estritamente convexo, para superfícies mínimas capilares.

Capítulo 1

Noções Preliminares

No presente capítulo, discutiremos alguns resultados básicos que serão utilizados na prova dos resultados principais.

1.1 Notações e fórmulas em um espaço conformemente plano

Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, consideremos uma hipersuperfície parametrizada regular $X : U \to \mathbb{R}^{n+1}$. Vamos denotar por N a aplicação de Gauss, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ as curvaturas principais e H_0 a curvatura média de $X(U)$ com a métrica induzida pela métrica Euclidiana padrão $\langle , \rangle_0$. O conjunto $\mathbb{E}_F^{n+1}$ é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ munido com a métrica conforme plana $\langle , \rangle = F^{-2}\langle , \rangle_0$, onde $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ é um fator conforme positivo. A curvatura média $\tilde{H}$ e as curvaturas principais $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \cdots, \tilde{\lambda}_n$ de $X(U)$ imersa em $\mathbb{E}_F^{n+1}$, as curvaturas médias e as curvaturas principais com respeito às duas métricas, são relacionadas como segue.

Proposição 1. *Seja $X(U)$ uma hipersuperfície imersa em $\mathbb{E}_F^{n+1}$. Então*

$$\tilde{H} = FH_0 - \langle N, \operatorname{grad} F\rangle_0 \quad e \quad \tilde{\lambda}_i = F\lambda_i - \langle N, \operatorname{grad} F\rangle_0$$

para $i = 1, \cdots, n$.

Prova. Veja Teorema 1 em [14], a prova segue linhas similares. ∎

1.2 Hipersuperfícies helicoidais

Seja $\Pi \subset \mathbb{R}^{n+2}$ um 2−plano, e seja $L \subset \Pi$ uma linha reta. Lembramos que uma hipersuperfície de rotação em $\mathbb{R}^{n+2}$ é definida pela rotação de uma curva perfil $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \Pi$ em torno de uma reta L, chamada de eixo de rotação. Uma generalização natural das hipersuperfícies de rotação é dada assumindo que a curva perfil γ gira em torno do eixo L deslocando linhas paralelas ortogonais a L, de modo que a velocidade de deslocamento é proporcional à velocidade de rotação. Uma hipersuperfície definida ao longo desta construção é chamada de hipersuperfície helicoidal com eixo L e passo $a_j \in \mathbb{R}$, para $1 \leqslant j \leqslant n$, onde $\sum a_j^2 \neq 0$. É fácil ver que hipersuperfícies de rotação correspondem à escolha complementar $a_j = 0, \quad \forall j = 1, \cdots, n$.

A partir de agora, sem perda de generalidade, assumiremos que L é o eixo e_{n+2}, o plano Π é gerado pelos vetores $\{e_1, e_{n+2}\}$ e a curva perfil é parametrizada por

$$\gamma(u) = (u, 0, \cdots, 0, \varphi(u)),$$

onde φ é uma função diferenciável para todo $u \in I$. Assim, a hipersuperfície helicoidal correspondente com o eixo e_{n+2} e passo $a_j \in \mathbb{R}$ é dada por

$$X(u, \theta_1, \cdots, \theta_n) = \left(u\phi(\theta_1, \cdots, \theta_n), \varphi(u) + \sum_1^n a_j\theta_j \right),$$

onde $\phi(\theta_1, \cdots, \theta_n)$ é a parametrização ortogonal (em coordenadas polares) da esfera unitária em $\mathbb{R}^{n+1}$. A saber, escrevendo $\phi = (\phi^1, \cdots, \phi^{n+1})$, temos

$$\begin{aligned}
\phi^1 &= \operatorname{sen}\theta_n \cdots \operatorname{sen}\theta_3 \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\theta_1, \\
\phi^2 &= \operatorname{sen}\theta_n \cdots \operatorname{sen}\theta_3 \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_1, \\
\phi^3 &= \operatorname{sen}\theta_n \cdots \operatorname{sen}\theta_3 \cos\theta_2, \\
&\vdots \\
\phi^{n-1} &= \operatorname{sen}\theta_n \operatorname{sen}\theta_{n-1} \cos\theta_{n-2}, \\
\phi^n &= \operatorname{sen}\theta_n \cos\theta_{n-1} \\
\phi^{n+1} &= \cos\theta_n,
\end{aligned}$$

onde $0 \leqslant \theta_1 \leqslant 2\pi$ e $0 \leqslant \theta_i \leqslant \pi$ para $i = 2, \cdots, n$. É bem sabido que $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0$, $\forall \ i \neq j$, onde $\phi_0 = \phi$ e $\phi_i = \frac{\partial \phi}{\partial \theta_i}$, $\forall i = 1, \cdots, n$. Seja g_{ij} os coeficientes da primeira forma fundamental de ϕ, com respeito a métrica Euclidiana $\langle , \rangle_0$. Então, $g_{ij} = 0$, se $i \neq j$, e não é difícil verificar que g_{ii} não depende da variável θ_1.

Um ingrediente principal na prova do Teorema 4 é a seguinte

Proposição 2. *Seja M^{n+1} uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+2}$ parametrizada por*

$$X(u, \theta_1, \cdots, \theta_n) = (u\phi(\theta_1, \cdots, \theta_n), k + a\theta_1),$$

onde $a \neq 0$ e k são constantes e $\phi(\theta_1, \cdots, \theta_n)$ é parametrização ortogonal em $\mathbb{R}^{n+1}$. Então, M^{n+1} é uma hipersuperfície mínima de $\mathbb{R}^{n+2}$.

Prova. Os campos coordenados associados a X são dados por

$$\begin{aligned} X_0 &:= \tfrac{\partial X}{\partial u}(u, \theta) = (\phi(\theta), 0), \\ X_1 &:= \tfrac{\partial X}{\partial \theta_1}(u, \theta) = (u\phi_1(\theta), a), \\ X_i &:= \tfrac{\partial X}{\partial \theta_i}(u, \theta) = (u\phi_i(\theta), 0), \quad \forall i = 2, \cdots, n. \end{aligned}$$

Calculando os coeficientes da primeira forma fundamental de X, obteremos

$$G_{00} = \langle X_0, X_0 \rangle_0 = 1, G_{11} = \langle X_1, X_1 \rangle_0 = u^2 g_{11} + a^2,$$

$$G_{ii} = \langle X_i, X_i \rangle_0 = u^2 g_{ii} \text{para} 2 \leqslant i \leqslant n,$$

e

$$G_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle_0 = 0$$

se $i \neq j$. Portanto, a matriz da métrica $G = (G_{ij})$ é diagonal, assim como sua inversa G^{-1}.

Para calcular a aplicação de Gauss N observe que N é uma combinação linear dos vetores $\{X_1, e_{n+2}\}$. Um cálculo simples mostra que N satisfaz

$$WN = aX_1 - (u^2 g_{11} + a^2)e_{n+2},$$

onde $W = |aX_1 - (u^2 g_{11} + a^2)e_{n+2}|$. Assim, a segunda forma fundamental $B = (B_{ij})$ de X satisfaz

$$WB_{ij} = \langle W \cdot N, X_{ij} \rangle_0.$$

Como

$$X_{00} = (0, \cdots, 0) \quad e \quad X_{ii} = (u\phi_{ii}(\theta), 0), \quad \forall i = 1, \cdots, n,$$

concluímos que $WB_{00} = 0$ e $WB_{ii} = a\langle X_1, X_{ii}\rangle_0$ para $1 \leqslant i \leqslant n$. Portanto podemos ver que $WB_{11} = \frac{a}{2}\frac{\partial}{\partial\theta_1}(|X_1|^2)$ e, se $2 \leqslant i \leqslant n$, temos

$$WB_{ii} = a\langle X_1, X_{ii}\rangle_0 = -a\langle X_{1_i}, X_i\rangle_0 = -a\langle X_{i1}, X_i\rangle_0 = -\frac{a}{2}\frac{\partial}{\partial\theta_1}(|X_i|^2).$$

Agora usando que $|X_1|^2 = u^2 g_{11} + a^2$ e $|X_i|^2 = u^2 g_{ii}$ não depende da variável θ_1, para qualquer $2 \leqslant i \leqslant n$, obtemos $B_{ii} = 0$ para todo $i = 1, \cdots, n$. Assim, finalmente concluímos que a curvatura média H_0 de X, com respeito à métrica Euclidiana, é dada por

$$H_0 = \frac{1}{n+1}\mathrm{tr}(G^{-1}B) = 0.$$

■

1.3 Hipersuperfícies translacionais

No espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$, uma superfície M^2 é chamada superfície translacional se é dada por uma imersão

$$\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

definida por $\Phi(x, y) = (x, y, z(x, y))$, onde $z(x, y) = f(x) + g(y)$, para f e g funções suaves de uma variável, isto é, Φ é obtida com uma translação Euclidiana da curva suave, $\alpha(x) = (x, 0, f(x))$ pontualmente ao longo da curva $\beta(y) = (0, y, g(y))$.

O conceito de superfícies translacionais foi generalizado para hipersuperfícies do $\mathbb{R}^{n+1}$ por Dillen, Verstraelen e Zafindratafa [19], eles consideraram gráficos de funções dadas por $F(x_1, \cdots, x_n) = f_1(x_1) + \cdots + f_n(x_n)$. Muito recentemente, Moruz e Munteanu [42] definiram uma nova classe de hipersuperfícies translacionais em $\mathbb{R}^4$ como um gráfico da forma

$$w(x, y, z) = f(x) + g(y, z).$$

Este novo conceito foi generalizado para dimensões maiores por Munteanu, Palmas e Ruiz-Hernández em [43], como segue.

Definição 1. *Sejam* $\phi : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *e* $\psi : V \subset \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ *funções suaves e seja* $f : U \times V \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x, y) = \phi(x) + \psi(y)$*. O gráfico de* f*, denotado por* M_f*, é chamado gráfico translacional generalizado (GTG).*

Agora, dados um aberto $W \subset \mathbb{R}^n$ e uma função suave $\xi : W \to \mathbb{R}$ denotamos por $M_\xi = \{(x, \xi(x)) : x \in W\}$ o gráfico de ξ e por H_ξ a curvatura média de M_ξ. Também consideramos as seguintes notações: $\nabla\xi$, $\Delta\xi$ e $\mathrm{Hess}\xi$ para o gradiente, o Laplaciano e a Hessiana de ξ. É conhecido que a curvatura média H_ξ de M_ξ é dada por

$$H_\xi = \frac{1}{n}\mathrm{div}\left(\frac{\nabla\xi}{\sqrt{1 + |\nabla\xi|^2}}\right).$$

Em [43] Munteanu, Palmas e Ruiz-Hernández obtiveram uma expressão para curvatura média de um gráfico translacional generalizado. Mais precisamente

Lema 1 (Teorema 2.3,[43])**.** *Sejam* $\phi : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *e* $\psi : V \subset \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ *funções suaves. Defina* $f : U \times V \subset \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}$ *por* $f(u, v) = \phi(u) + \psi(v)$*. Então a curvatura média de* M_f *em* $\mathbb{R}^{p+q+1}$ *é dada por*

$$H_f = \frac{pW_\phi^3 H_\phi + qW_\psi^3 H_\psi + |\nabla\psi|^2\Delta\phi + |\nabla\phi|^2\Delta\psi}{(p+q)W_f^3},$$

onde $W_f = \sqrt{1 + |\nabla\phi|^2 + |\nabla\psi|^2}, W_\phi = \sqrt{1 + |\nabla\phi|^2}$ *e* $W_\psi = \sqrt{1 + |\nabla\psi|^2}$.

Sabemos que uma função é eikonal quando seu gradiente tem norma constante. Consideremos então o seguinte lema, que usaremos nas provas dos nossos resultados sobre gráficos translacionais generalizados.

Lema 2 (Lema 3.1,[43])**.** *Seja* f *uma função eikonal em um domínio no* $\mathbb{R}^n$ *tal que seu laplaciano é constante. Então* f *é uma função afim.*

1.4 Hipersuperfícies capilares mínimas e CMC

Seja (M^{n+1}, g) uma variedade Riemanniana com bordo não vazio ∂M. Seja Σ^n uma variedade compacta suave com bordo não vazio e seja $\varphi : \Sigma \to M$ uma imersão suave de Σ em M. Dizemos que φ é uma imersão própria se $\varphi(\Sigma) \cap \partial M = \varphi(\partial\Sigma)$.

Assumimos que φ é orientável. Fixe um campo vetorial normal unitário N para Σ ao longo de φ e denote por ν o conormal unitário exterior para $\partial\Sigma$ em Σ. Além disso, seja

$\overline{N}$ o normal unitário que aponta para fora para ∂M e seja $\overline{\nu}$ o normal unitário para $\partial\Sigma$ em ∂M tal que as bases $\{N, \nu\}$ e $\{\overline{N}, \overline{\nu}\}$ determinam a mesma orientação em $(T\partial\Sigma)^{\perp}$.

Denote por A e H a segunda forma fundamental e a curvatura média da imersão φ, respectivamente. Precisamente, $A(X,Y) = -g(D_X N, Y)$ e $H = \mathrm{tr}(A)$, onde D é a conexão de Levi-Civita de M. Além disso, seja $\mathrm{II}(v, w) = g(D_v \overline{N}, w)$ a segunda forma fundamental de ∂M.

Uma função suave $\Phi : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é chamada de variação própria de φ se as aplicações $\varphi_t : \Sigma \to M$, definidas por $\varphi_t(x) = \Phi(x,t)$, são imersões próprias para todos os $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e $\varphi_0 = \varphi$.

Vamos fixar uma variação própria Φ de φ. O campo vetorial variacional associado a Φ é o campo vetorial $\xi : \Sigma \to TM$ ao longo de φ definido por

$$\xi(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, 0), \ \ x \in \Sigma.$$

Para esta variação, o funcional área $\mathcal{A} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ e o funcional volume $\mathcal{V} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ são definidos por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t) &= \int_{\Sigma} dA_{\varphi_t^* g}, \\ \mathcal{V}(t) &= \int_{\Sigma \times [0,t]} \Phi^*(dV), \end{aligned}$$

onde $dA_{\varphi_t^* g}$ denota o elemento área de $(\Sigma, \varphi_t^* g)$ e dV é o elemento volume de M. Dizemos que a variação Φ preserva volume se $\mathcal{V}(t) = 0$ para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Outro funcional área, que é chamado de funcional área "*molhada*" $\mathcal{W} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ é definido por

$$\mathcal{W}(t) = \int_{\partial\Sigma \times [0,t]} \Phi^*(dA_{\partial M}),$$

onde $dA_{\partial M}$ denota o elemento área de ∂M. Fixe um número real $\theta \in (0, \pi)$, o funcional energia $E : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ é definido por

$$E(t) = \mathcal{A}(t) - \cos\theta \cdot \mathcal{W}(t).$$

As fórmulas primeiras variação de $\mathcal{V}(t)$ e $E(t)$ para uma variação com um campo vetorial de variação $\xi(x)$ são dadas por

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}'(0) &= \int_\Sigma g(\xi, N)dA; \\
E'(0) &= -\int_\Sigma Hg(\xi, N)dA + \int_{\partial\Sigma} g(\xi, \nu - \cos\theta\overline{\nu})ds,
\end{aligned}$$

onde dA e ds são o elemento área de Σ e $\partial\Sigma$, respectivamente.

Dizemos que a imersão φ é uma imersão capilar CMC se $E'(0) = 0$ para cada variação preservando o volume de φ. Se $E'(0) = 0$ para cada variação de φ, chamamos φ de imersão capilar mínima.

Observe que Σ é uma hipersuperfície capilar CMC se, e somente se, Σ tem curvatura média constante e $g(N, \overline{N}) = \cos\theta$ ao longo de $\partial\Sigma$, esta última condição significa que $\partial\Sigma$ encontra ∂M em um ângulo de contato θ. Da mesma forma, Σ é uma hipersuperfície capilar mínima quando Σ é uma hipersuperfície mínima e $\partial\Sigma$ encontra ∂M em um ângulo de contato θ. Quando $\theta = \frac{\pi}{2}$, usamos o termo hipersuperfície de bordo livre CMC (ou mínimo).

Para uma hipersuperfície capilar CMC ou mínima Σ, com ângulo de contato $\theta \in (0, \pi)$, as bases ortonormais $\{N, \nu\}$ e $\{\overline{N}, \overline{\nu}\}$ estão relacionadas pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
\overline{N} &= \cos\theta \cdot N + \operatorname{sen}\theta \cdot \nu; \\
\overline{\nu} &= -\operatorname{sen}\theta \cdot N + \cos\theta \cdot \nu.
\end{aligned}$$

Sejam $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ uma função suave que satisfaça $\int_\Sigma f dA = 0$ e φ uma imersão capilar CMC, para uma variação própria preservando volume de φ tal que $f = g(\xi, N)$. A segunda fórmula variacional de E é dada por

$$E''(0) = -\int_\Sigma [\Delta f + (\mathrm{Ric}(N) + \|A\|^2)f] f \, dA + \int_{\partial\Sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - qf \right) f \, ds,$$

onde Δ é o operador de Laplace em Σ em relação à métrica induzida de M e

$$q = \frac{\mathrm{II}(\overline{\nu}, \overline{\nu})}{\operatorname{sen}\theta} + \cot\theta A(\nu, \nu).$$

Definição 2. *A imersão capilar CMC* $\varphi : \Sigma \to M$ *(ou apenas* Σ*) é chamada de estável se* $E''(0) \geqslant 0$ *para qualquer variação que preserva volume de* φ*. Se* φ *for uma imersão* *capilar mínima, nós a chamamos de estável sempre que* $E''(0) \geqslant 0$ *para cada variação de* φ.

Alternativamente, seja $\mathcal{F} = \{f \in H^1(\Sigma) : \int_\Sigma f dA = 0\}$, onde $H^1(\Sigma)$ é o primeiro espaço de Sobolev de Σ. A forma índice $Q : H^1(\Sigma) \times H^1(\Sigma) \to \mathbb{R}$ de Σ é dada por

$$Q(f, h) = \int_\Sigma [g(\nabla f, \nabla h) - (\mathrm{Ric}(N) + \|A\|^2) fh] dA - \int_{\partial\Sigma} qfh\, ds,$$

onde ∇ é o gradiente em Σ em relação à métrica induzida de M. Então φ é uma imersão estável capilar CMC se, e somente se, $Q(f, f) \geqslant 0$ para cada $f \in \mathcal{F}$. Se φ é uma imersão capilar mínima, então ela é estável precisamente quando $Q(f, f) \geqslant 0$ para cada $f \in H^1(\Sigma)$.

Ros e Souam [57] mostraram que bolas totalmente geodésicas e calotas esféricas imersas na bola Euclidiana são capilares CMC estáveis. Por outro lado, o problema da unicidade foi primeiramente estudado por Ros e Vergasta [58] para hipersuperfícies mínimas ou CMC em caso de bordo livre, ou seja, $\theta = \frac{\pi}{2}$ e posteriormente Ros e Souam [57] para capilares gerais. Em [64], Wang e Xia provaram que hipersuperfícies capilares estáveis imersas em uma bola em formas espaciais são totalmente umbílicas.

Por outro lado, considerando as bolas totalmente geodésicas imersas na bola Euclidiana com ângulo de contato θ como hipersuperfícies capilares mínimas, temos que $1 \in H^1(\Sigma)$ é uma função admissível para testar a estabilidade. Então,

$$Q(1, 1) = -\frac{\mathrm{Area}(\partial\Sigma)}{sen\theta} < 0.$$

Portanto, bolas totalmente geodésicas com ângulo de contato θ são hipersuperfícies capilares mínimas instáveis. O índice de estabilidade de uma hipersuperfície capilar CMC (resp. mínima) Σ é a dimensão do maior subespaço vetorial de $\mathcal{F}$ (resp. $H^1(\Sigma)$) restrito ao qual a forma bilinear Q é definida negativa. O índice de Σ é indicado por $\mathrm{ind}(\Sigma)$. Assim, hipersuperfícies estáveis são aquelas que possuem índice igual a zero.

Nos Teoremas 11 e 12 do Capítulo 4, vamos utilizar o seguinte resultado.

Teorema 1 (Gabard,[24]). *Seja* M *uma superfície Riemanniana de bordo compacto e gênero* g*, com* r *componentes de bordo. Então, existe uma aplicação conforme (ramificada)* $f : M \to \Delta = \{z \in \mathbb{C} | \ \ |z| \leqslant 1\}$ *com grau menor do que ou igual a* $r + g$.

Além disso, será considerado também um lema bastante útil, que está baseado em um argumento apresentado em [26].

Lema 3 (Mendes,[39]). *Sejam* Σ^2 *uma superfície Riemanniana compacta com bordo* $\partial\Sigma$ *não vazio,* $F : \Sigma \to \overline{\mathbb{D}}$ *e* $\phi_1 : \Sigma \to [0, \infty)$ *funções contínuas. Suponha que* $F(\Sigma \setminus \partial\Sigma) \subset \mathbb{D}$*. Então existe* $h \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{D}})$ *tal que* $\int_\Sigma (h \circ F)\phi_1 dA = 0$.

Um resultado de grande utilidade na prova do Corolário 5, devido ao matemático C.Xia é o seguinte.

Teorema 2 (Xia,[65]). *Seja* $\overline{\Omega}$ *uma variedade Riemanniana compacta* $(n+1)$*-dimensional com curvatura de Ricci não negativa e bordo não vazio* $M = \partial\overline{\Omega}$ *munida com a métrica induzida de* $\overline{\Omega}$*, e seja* N *o normal unitário interior em M. Assuma que as curvaturas principais de* M *são limitadas por baixo por uma constante positiva* c *(ou seja, se denotarmos por* σ *a segunda forma fundamental de* M *em relação a* N*, então* $\sigma \geqslant cI$ *no sentido da matriz). Então, o primeiro autovalor diferente de zero do Laplaciano agindo nas funções em* M *satisfaz* $\lambda_1(M) \geqslant nc^2$ *com igualdade se, e somente se,* $\overline{\Omega}$ *é isométrico a uma bola Euclidiana* $(n+1)$*-dimensional de raio* $\dfrac{1}{c}$.

Ainda na prova do Corolário 5, como $\partial\Sigma$ não é uma geodésica do ∂M, não foi possível aplicar diretamente o Teorema de Toponogov, assim aplicamos o seguinte resultado.

Teorema 3 (Hang-Wang, [25]). *Seja* (M^2, g) *uma superfície compacta com bordo e curvatura Gaussiana* $K \geqslant 1$*. Suponha que a curvatura geodésica* k *do bordo* γ *satisfaz* $k \geqslant c \geqslant 0$*. Então,* $L(\gamma) \leqslant 2\pi/\sqrt{1 + c^2}$*. Além disso a igualdade ocorre se, e somente se,* (M, g) *é isométrica a um disco de raio* $\cot^{-1}(c)$ *em* $\mathbb{S}^2$.

Capítulo 2

Hipersuperfícies em espaços conformemente planos

Neste capítulo apresentamos resultados que podem ser encontrados no artigo [30], escrito pelo autor em parceria com B.P. Lima e P.A. Sousa, no qual estudamos hipersuperfícies helicoidais em uma variedade Riemanniana, que é o espaço Euclidiano munido de uma métrica conforme e mostramos que uma hipersuperfície helicoidal é mínima neste espaço. Construímos uma família a 2-parâmetros de superfícies helicoidais com curvatura média prescrita em um espaço tridimensional conforme com métrica cilíndrica geral. Para este tipo de métrica, também caracterizamos gráficos mínimos por meio de uma equação diferencial parcial. Finalmente, damos uma caracterização para uma classe de superfícies translacionais mínimas em um espaço tridimensional conforme.

2.1 Hipersuperfícies mínimas helicoidais em espaços conformemente planos

Lembramos que N denota a aplicação de Gauss de X, H_0 é a curvatura média com respeito a métrica Euclidiana $\langle , \rangle_0$ e $\tilde{\mathsf{H}}$ denota a curvatura média com respeito à métrica conformemente plana $\langle , \rangle = \frac{1}{\mathsf{F}^2}\langle , \rangle_0$.

Recentemente, superfícies helicoidais foram estudadas no espaço conformemente plano $\mathbb{E}^3_{\mathsf{F}}$ munida com um fator conforme cilíndrico $\mathsf{F}(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1^2 - x_2^2}$ por Araújo, Cui e Pina em [3]. Nosso primeiro teorema fornece uma extensão deste resultado para hipersuperfícies helicoidais.

Teorema 4. *Seja* $\mathbb{E}_F^{n+2}$ *um espaço conformemente plano, com fator conforme*

$$F(x_2, \cdots, x_{n+2}) = e^{-x_1^2 - \cdots - x_{n+1}^2}.$$

Seja M^{n+1} *uma hipersuperfície helicoidal cuja parametrização* $X : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{E}_F^{n+1}$ *é dada por*

$$X(u, \theta_1, \cdots, \theta_n) = (u\phi(\theta_1, \cdots, \theta_n), k + a\theta_1),$$

onde $a \neq 0$ *e* k *são constantes e a função* $\phi(\theta_1, \cdots, \theta_n)$ *é a parametrização ortogonal em coordenadas polares da esfera unitária em* $\mathbb{R}^{n+1}$*. Então,* M^{n+1} *é uma hipersuperfície mínima de* $\mathbb{E}_F^{n+2}$*.*

Prova. Da Proposição 1 temos que $\tilde{H} = FH_0 - \langle N, \operatorname{grad} F\rangle_0$ e da Proposição 2 sabemos que $H_0 = 0$, assim teremos $\tilde{H} = -\langle N, \operatorname{grad} F\rangle_0$, onde $W \cdot N = aX_1 - (u^2 g_{11} + a^2)e_{n+2}$ e $\operatorname{grad} F$ é avaliado em $X(u, \theta_1, \cdots, \theta_n) = (u\phi(\theta_1, \cdots, \theta_n), k + a\theta_1)$. Como

$$\operatorname{grad} F = -2F(x_1, x_2, \cdots, x_{n+2}) \cdot (x_1, \cdots, x_{n+1}, 0),$$

temos

$$\operatorname{grad} F(X(u, \theta_1, \cdots, \theta_n)) = -2F(X(u, \theta_1, \cdots, \theta_n)) \cdot (u\phi(\theta_1, \cdots, \theta_n), 0).$$

Com isso em mãos, obtemos que $\tilde{H} = 0$, o que conclui a prova. ∎

A ligação entre espaços conformemente planos e espaços produtos fornece uma maneira muito interessante de construir novos exemplos de hipersuperfícies imersas isometricamente em espaços produto satisfazendo certas propriedades geométricas. Nos próximos exemplos apresentamos hipersuperfícies helicoidais que são minimamente imersas em espaços conformemente planos e que são isométricos a espaços produto hiperbólico, tais como $\mathbb{H}^{n+1} \times \mathbb{S}^1$ e $\mathbb{H}^{n+1} \times_f \mathbb{R}$ para alguma função de deformação f, veja [2] onde os autores provaram isso para espaços tridimensionais.

Exemplo 1. *Considere* $\mathbb{E}_F^{n+2} = (\mathbb{R}^{n+2}, \langle , \rangle)$ *um espaço conformemente plano com métrica* $\langle , \rangle = \frac{1}{F}\langle , \rangle_0$ *e* $F(x_1, \cdots, x_{n+2}) = F(r) = \sqrt{r}$ *com* $r = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2$*. Seja* M^{n+1} *uma hipersuperfície helicoidal cuja parametrização* $X : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{E}_F^{n+2}$ *é dada por*

$$X(u, \theta_1, \cdots, \theta_n) = (u\phi(\theta_1, \cdots, \theta_n), k + a\theta_1),$$

onde $a \neq 0$ *e* k *são constantes, e* $\phi(\theta) = \phi(\theta_1, \cdots, \theta_n)$ *é a parametrização ortogonal em coordenadas polares para a esfera unitária no* $\mathbb{R}^{n+1}$*. Como na prova do Teorema 4, segue que a aplicação de Gauss* N *satisfaz* $W \cdot N = aX_1 - (u^2 g_{11} + a^2)e_{n+2}$ *e a curvatura média* $\tilde{H} = -\langle N, \operatorname{grad} F\rangle$*. Sendo* $\operatorname{grad} F = \frac{1}{F}(x_1, \cdots, x_{n+1}, 0)$*, temos*

$$\operatorname{grad} F(X(u,\theta)) = \frac{1}{F(X(u,\theta))} \cdot (u\phi(\theta), 0).$$

Portanto, não é difícil mostrar que $\tilde{H} = 0$*. Seguindo as ideias de [2] é possível verificar que* $\mathbb{E}_F^{n+2}$ *é isométrico a* $\mathbb{H}^{n+1} \times \mathbb{S}^1$*.*

Exemplo 2. *Seja* $\mathbb{E}_F^{n+2}$ *um espaço conformemente plano com* $F(r) = \frac{1-r}{2}$ *definido para* $r = x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 < 1$*. A hipersuperfície helicoidal* $X(u,\theta)$ *é minimamente irmersa em* $\mathbb{E}_F^{n+2}$*. De fato, como* $\operatorname{grad} F = -(x_1, \cdots, x_{n+1}, 0)$ *então*

$$\operatorname{grad} F(X(u,\theta)) = -(u\phi(\theta), 0).$$

Assim facilmente concluímos que $\tilde{H} = 0$*. Novamente, usando ideias de [2] podemos provar que* $\mathbb{E}_F^{n+2}$ *é isométrico a* $\mathbb{H}^{n+1} \times_f \mathbb{R}$*, com função warped* $f = \frac{1}{F}$*.*

Em [29], Lee, Lee e Yoon construíram uma família a 2-parâmetros de superfícies helicoidais com curvatura média prescrita no espaço conformemente plano $\mathbb{E}_F^3$ cujo fator conforme escolhido foi $F(x_1, x_2, x_3) = F(r) = \sqrt{r}$, onde $r = x_1^2 + x_2^2$. Em nosso próximo teorema provamos uma extensão deste resultado, considerando um fator conforme cilíndrico genérico $F(x_1, x_2, x_3) = F(r)$.

Teorema 5. *Seja* $\gamma(u) = (u, 0, \lambda(u))$ *a curva perfil de uma superfície helicoidal*

$$X(u,v) = (u\cos v, u\operatorname{sen} v, \lambda(u) + hv)$$

imersa em $\mathbb{E}_F^3$*. Assuma que* $F(x_1, x_2, x_3) = F(r)$*, onde* $r = x_1^2 + x_2^2$*, e a curvatura média em um ponto* $(u, 0, \lambda(u))$ *é dada por* $\tilde{H}(u)$*. Então, para quaisquer constantes* c_1, c_2 *e* h*, existe uma família a 2-parâmetros de superfícies helicoidais geradas pela curva plana*

$$\gamma(u, \tilde{H}(u), h, c_1, c_2) = \left(u, 0, \pm \int \frac{\sqrt{(u^2+h^2)}(\int 2uF\tilde{H}du + c_1)}{u[F^4u^2 - (\int 2uF\tilde{H}du + c_1)]^{\frac{1}{2}}} du + c_2\right).$$

Reciprocamente, dada uma função suave $\tilde{H}(u)$*, podemos construir uma família a 2-parâmetros* *de curvas* $\gamma(u, \tilde{H}(u), h, c_1, c_2)$ *gerando superfícies helicoidais em* $\mathbb{E}^3_F$ *com curvatura média* $\tilde{H}(u)$ *e passo* h.

Prova.

Seja H_0 a curvatura média de $X(u,v)$ com respeito à métrica Euclidiana. Uma conta fácil dá

$$H_0 = \frac{(u^2+h^2)u\ddot{\lambda} + u^2\dot{\lambda}^3 + (u^2+2h^2)\dot{\lambda}}{2(u^2\dot{\lambda}^2+u^2+h^2)^{\frac{3}{2}}},$$

onde $\dot{\lambda}$ e $\ddot{\lambda}$ denotam as derivadas da função λ. Além disso, a aplicação de Gauss é dada por

$$N = \frac{1}{\sqrt{h^2+u^2\dot{\lambda}^2+u^2}}\Big(h sen v - u\dot{\lambda} cos v, -u\dot{\lambda} sen v - h cos v, u\Big).$$

Pela Proposição 2 segue que

$$\tilde{H} = FH_0 - \langle N, \operatorname{grad} F\rangle.$$

Como $\operatorname{grad} F = 2\dot{F}(x_1, x_2, 0)$ e $\operatorname{grad} F(X(u,v)) = 2\dot{F}(u cos v, u sen v, 0)$, onde $\dot{F}(r)$ denota a derivada de F com respeito a r, temos

$$\langle N, \operatorname{grad} F\rangle = -\frac{2\dot{F}u^2\dot{\lambda}}{\sqrt{u^2\dot{\lambda}^2+u^2+h^2}}.$$

Daí

$$\tilde{H} = F\left[\frac{(u^2+h^2)u\ddot{\lambda} + u^2\dot{\lambda}^3 + (u^2+2h^2)\dot{\lambda}}{2(u^2\dot{\lambda}^2+u^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\right] + \frac{2\dot{F}u^2\dot{\lambda}}{\sqrt{u^2\dot{\lambda}^2+u^2+h^2}},$$

isto é,

$$\tilde{H} = \frac{F[(u^2+h^2)u\ddot{\lambda} + u^2\dot{\lambda}^3 + (u^2+2h^2)\dot{\lambda}] + 4\dot{F}u^2\dot{\lambda}(u^2\dot{\lambda}^2+u^2+h^2)}{2(u^2\dot{\lambda}^2+u^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{2.1}$$

que depende apenas do parâmetro u. Para resolver a EDO (2.1) consideremos

$$\Psi = \frac{F^2\dot{\lambda}}{\sqrt{u^2\dot{\lambda}^2+u^2+h^2}}.$$

Diferenciando com respeito a u, e usando que $r(X(u,v)) = u^2$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\dot{\Psi} &= \frac{(4F\dot{F}u\dot{\lambda} + F^2\ddot{\lambda})\sqrt{u^2\dot{\lambda}^2 + u^2 + h^2} - \dfrac{F^2\dot{\lambda}(2u\dot{\lambda}^2 + 2u^2\dot{\lambda}\ddot{\lambda} + 2u)}{2\sqrt{u^2\dot{\lambda}^2 + u^2 + h^2}}}{u^2\dot{\lambda}^2 + u^2 + h^2} \\
&= \frac{(4u\dot{\lambda}F\dot{F} + F^2\ddot{\lambda})(u^2\dot{\lambda}^2 + u^2 + h^2) - F^2\dot{\lambda}(u\dot{\lambda}^2 + u^2\dot{\lambda}\ddot{\lambda} + u)}{(u^2\dot{\lambda}^2 + u^2 + h^2)^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

Veja que

$$
u\dot{\Psi} = \frac{(4u^2\dot{\lambda}F\dot{F} + uF^2\ddot{\lambda})(u^2\dot{\lambda}^2 + u^2 + h^2) - F^2\dot{\lambda}(u^2\dot{\lambda}^2 + u^3\dot{\lambda}\ddot{\lambda} + u^2)}{(u^2\dot{\lambda}^2 + u^2 + h^2)^{3/2}}.
$$

Daí

$$
\begin{aligned}
2\Psi + u\dot{\Psi} &= \frac{(4u^2\dot{\lambda}F\dot{F} + uF^2\ddot{\lambda})(u^2\dot{\lambda}^2 + u^2 + h^2) - F^2\dot{\lambda}(u^2\dot{\lambda}^2 + u^3\dot{\lambda}\ddot{\lambda} + u^2)}{(u^2\dot{\lambda}^2 + u^2 + h^2)^{3/2}} \\
&+ \frac{2F^2\dot{\lambda}}{\sqrt{u^2\dot{\lambda}^2 + u^2 + h^2}} \\
&= 2F\left[\frac{(4u^2\dot{\lambda}\dot{F} + uF\ddot{\lambda})(u^2\dot{\lambda}^2 + u^2 + h^2) - F\dot{\lambda}(u^2\dot{\lambda}^2 + u^3\dot{\lambda}\ddot{\lambda} + u^2)}{2(u^2\dot{\lambda}^2 + u^2 + h^2)^{3/2}}\right] \\
&+ 2F\left[\frac{F\dot{\lambda}}{\sqrt{u^2\dot{\lambda}^2 + h^2 + u^2}}\right] \\
&= 2F\left[\frac{F\dot{\lambda}}{\sqrt{u^2\dot{\lambda}^2 + h^2 + u^2}} + \frac{F(u^2+h^2)u\ddot{\lambda} - Fu^2\dot{\lambda}^3 - u^2F\dot{\lambda} + 4u^2\dot{\lambda}\dot{F}(u^2\dot{\lambda}^2 + u^2 + h^2)}{2(u^2\dot{\lambda}^2 + u^2 + h^2)^{3/2}}\right] \\
&= 2F\left[\frac{F[(u^2 + h^2)u\ddot{\lambda} + u^2\dot{\lambda}^3 + (u^2 + 2h^2)\dot{\lambda}] + 4\dot{F}u^2\dot{\lambda}(u^2\dot{\lambda}^2 + u^2 + h^2)}{2(u^2\dot{\lambda}^2 + u^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}\right].
\end{aligned}
$$

Assim, de (2.1), podemos deduzir

$$
2\Psi + u\dot{\Psi} = 2F\tilde{H},
$$

que implica

$$
\frac{d}{du}(u^2\Psi) = 2uF\tilde{H}.
$$

Integrando a equação acima podemos concluir que

$$\Psi = \frac{1}{u^2}\left(\int 2uF\tilde{H} + c_1\right)$$

para algum $c_1 \in \mathbb{R}$, que implica

$$\frac{1}{u^2}\left(\int 2uF\tilde{H} + c_1\right) = \frac{F^2\dot{\lambda}}{\sqrt{u^2\dot{\lambda}^2 + u^2 + h^2}}.$$

Tomando o quadrado em ambos os lados e fazendo algumas manipulações algébricas podemos escrever

$$u^2\dot{\lambda}^2\left[F^4u^2 - \left(\int 2Fu\tilde{H}du + c_1\right)^2\right] = (u^2+h^2)\left(\int 2uF\tilde{H}du + c_1\right)^2,$$

ou equivalentemente,

$$\dot{\lambda}^2 = \frac{(u^2+h^2)(\int 2uF\tilde{H}du + c_1)^2}{u^2[F^4u^2 - (\int 2uF\tilde{H}du + c_1)^2]}.$$

Portanto, a solução λ é dada por

$$\lambda = \pm\int \frac{\sqrt{(u^2+h^2)}(\int 2uF\tilde{H}du + c_1)}{u[F^4u^2 - (\int 2uF\tilde{H}du + c_1)^2]^{\frac{1}{2}}}du + c_2,$$

para algum $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Reciprocamente, suponha que $h \neq 0$ e $\tilde{H}(u)$ é uma função real suave definida em um intervalo $I \subset (0, +\infty)$. Seja $\mathcal{F} : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por

$$\mathcal{F}(u, c_1) = F^4u^2 - \left(\int 2uF\tilde{H}du + c_1\right)^2.$$

Para qualquer $u_0 \in I$, seja

$$\tilde{c_1} = -\left(\int 2uF\tilde{H}du\right)(u_0).$$

Assim, podemos encontrar um subintervalo aberto $\tilde{I} \subset I$ contendo u_0 e um intervalo aberto J contendo $\tilde{c_1}$, tal que a função $\mathcal{F}(u, c_1)$ é positiva para qualquer $(u, c_1) \in \tilde{I} \times J$. De fato, vale que

$$\mathcal{F}(u_0, \tilde{c_1}) = F_0^4u_0^2 > 0.$$

Por continuidade de $\mathcal{F}$, ela é positiva em $I\times\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$. Portanto para qualquer $(u, c_1) \in \tilde{I}\times J$,

$c_2 \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ e a função suave $\tilde{H}(u)$ dada, podemos definir uma família a 2-parâmetros de curvas

$$\gamma(u, \tilde{H}(u), h, c_1, c_2) = \left(u, 0, \pm \int \frac{\sqrt{u^2+h^2}(\int 2uF\tilde{H}du + c_1)}{u[F^4u^2 - (\int 2uF\tilde{H}du + c_1)^2]^{\frac{1}{2}}} du + c_2 \right).$$

■

2.2 Gráficos em espaços conformemente planos

Outra classe importante de superfícies é dada pelos gráficos mínimos sobre um domínio aberto em um espaço forma ou espaço produto. Os esforços para estudar gráficos mínimos, principalmente relacionados ao célebre problema de Bernstein, deram uma forte contribuição para o surgimento da Análise Geométrica, ver [18] e referências nele contidas. Uma caracterização de gráficos mínimos em um espaço conformemente plano $\mathbb{E}^3_F$, com fator conforme cilíndrico $F(x_1, x_2, x_3) = F(r)$, $r = x_1^2 + x_2^2$, foi provado em [63]. Nosso próximo resultado estende essa caracterização para dimensões mais altas, em espaços conformemente planos $\mathbb{E}^{n+1}_F$, onde $F(x_1, \cdots, x_{n+1}) = F(r)$ e $r = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.

Proposição 3. *Seja $\mathbb{E}^{n+1}_F$ um espaço conformemente plano como acima. Seja M^n um gráfico sobre um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ cuja parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^{n+1}_F$ é dada por*

$$X(u_1, \cdots, u_n) = (u_1, \cdots, u_n, \varphi(u_1, \cdots, u_n)).$$

Então X é uma hipersuperfície mínima em $\mathbb{E}^{n+1}_F$ se, e somente se, a função φ satisfaz a seguinte equação diferencial

$$H_0 = -\frac{2\dot{F}}{F\sqrt{1+\varphi_1^2 + \cdots + \varphi_n^2}}(u_1\varphi_1 + \cdots + u_n\varphi_n),$$

onde $\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}$, $\dot{F}(r)$ denota a derivada de F com respeito à variável r e H_0 a curvatura média de X com respeito à métrica Euclidiana.

Prova.

Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $\varphi : U \to \mathbb{R}$ uma função suave, sabemos que a curvatura média de um gráfico é dada por

$$H_0 = \frac{1}{n}\mathrm{div}\left(\frac{\mathrm{grad}\,\varphi}{\sqrt{1+|\mathrm{grad}\,\varphi|^2}}\right) \tag{2.2}$$

e a aplicação de Gauss é

$$N = \frac{1}{\sqrt{1+|\mathrm{grad}\,\varphi|^2}}(-\mathrm{grad}\,\varphi, 1).$$

Pela Proposição 1, a hipersuperfície X é mínima imersa em $\mathbb{E}_F^{n+1}$ se, e somente se,

$$H_0 = \frac{1}{F}\langle N, \mathrm{grad}\,F\rangle.$$

Como o fator conforme F satisfaz $F(x_1, \cdots, x_n) = F(r)$ com $r = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, obtemos

$$\mathrm{grad}\,F = 2\dot{F}(x_1, \cdots, x_n, 0).$$

Assim

$$\mathrm{grad}\,F(X(u_1, \cdots, u_n)) = 2\dot{F}(r)(x_1, \cdots, x_n, 0),$$

que implica

$$\begin{aligned}\langle N, \mathrm{grad}\,F\rangle &= \frac{2\dot{F}}{\sqrt{1+|\mathrm{grad}\,\varphi|^2}}\langle(-\varphi_1, \cdots, -\varphi_n, 1), (u_1, \cdots, u_n, 0)\rangle \\ &= -\frac{2\dot{F}}{\sqrt{1+|\mathrm{grad}\,\varphi|^2}}(u_1\varphi_1 + \cdots + u_n\varphi_n).\end{aligned}$$

Portanto

$$H_0 = -\frac{2\dot{F}}{F\sqrt{1+|\mathrm{grad}\,\varphi|^2}}(u_1\varphi_1 + \cdots + u_n\varphi_n)$$

que completa a prova. ■

No teorema seguinte provamos um resultado de rigidez para algumas superfícies translacionais imersas no espaço conformemente plano $\mathbb{E}_F^3$.

Teorema 6. *Seja* $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função suave. A superfície translacional* $X(u, v) = (u, v, au + b + g(v))$, *para* $a, b \in \mathbb{R}$, *é mínima no espaço conformemente plano* $\mathbb{E}_F^3$, *com fator conforme* $F(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1^2 - x_2^2}$ *se, e somente se,* $a = 0$ *e a função*

g *é dada por*

$$g(\nu) = \pm \int \frac{c_1 e^{2\nu^2}}{\sqrt{1 - c_1^2 e^{4\nu^2}}} d\nu + c_2,$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *são constantes satisfazendo* $1 - c_1^2 e^{4\nu^2} > 0$.

Prova.

Seja H_0 a curvatura média da superfície translacional $X(u, \nu) = (u, \nu, au + b + g(\nu))$, com respeito à métrica Euclidiana. Uma conta fácil mostra que

$$H_0 = \frac{\ddot{g}(1 + a^2)}{2(1 + a^2 + \dot{g}^2)^{3/2}}$$

e que aplicação de Gauss é

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + \dot{g}^2}}(-a, -\dot{g}, 1).$$

Como $\operatorname{grad} F = -2F \cdot (x_1, x_2, 0)$ e $\operatorname{grad} F(X(u, \nu)) = -2F \cdot (u, \nu, 0)$, sabemos que, pela Proposição 1, $X(u, \nu)$ é mínima imersa em $\mathbb{E}^3_F$ se, e somente se,

$$\frac{\ddot{g}(1 + a^2)}{2(1 + a^2 + \dot{g}^2)^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + a^2 + \dot{g}^2}}(ua + \nu\dot{g}),$$

ou equivalentemente

$$\frac{\ddot{g}(1 + a^2)}{1 + a^2 + \dot{g}^2} - 4\nu\dot{g} = 4ua.$$

Isto implica que $a = 0$, isto é, f é constante e

$$\frac{\ddot{g}}{1 + \dot{g}^2} = 4\nu\dot{g}.$$

Se $\dot{g} = 0$, segue que g é constante. Caso contrário, considerando a mudança de variável $z = \dot{g}$, temos

$$\frac{\dot{z}}{1 + z^2} = 4\nu z.$$

Separando as variáveis obtemos

$$\frac{dz}{z(1 + z^2)} = 4\nu d\nu.$$

Integrando esta última igualdade temos

$$\int \left(\frac{1}{z} - \frac{z}{1+z^2}\right) dz = \int \frac{dz}{z(1+z^2)} = \int 4v dv,$$

que implica

$$\ln\left(\frac{|z|}{\sqrt{1+z^2}}\right) = \ln|z| - \frac{1}{2}\ln(1+z^2) = 2v^2 + b_1$$

para algum $b_1 \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$\frac{|z|}{\sqrt{1+z^2}} = c_1 e^{2v^2},$$

para alguma constante $c_1 \in \mathbb{R}$. Como $z = \dot{g}$, obtemos

$$g(v) = \pm \int \frac{c_1 e^{2v^2}}{\sqrt{1 - c_1^2 e^{4v^2}}} dv + c_2$$

para algum $c_2 \in \mathbb{R}$, isso conclui a prova do teorema. ■

Concluímos este capítulo com um exemplo particular, onde exibimos um fator conforme para o qual o parabolóide é uma hipersuperfície mínima em $\mathbb{E}_F^{n+1}$.

Exemplo 3. *Seja* $X : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ *uma hipersuperfície parametrizada regular dada por*

$$X(u_1, \cdots, u_n) = (u_1, \cdots, u_n, \varphi(u_1, \cdots, u_n)),$$

onde $\varphi(u_1, \cdots, u_n) = u_1^2 + \cdots + u_n^2$. *Vamos considerar* $M^n = X(U)$ *como uma hipersuperfície no espaço conformemente plano* $\mathbb{E}_F^{n+1}$, *com fator conforme* $F(x_1, \cdots, x_{n+1}) = F(r)$, *onde* $r = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. *Mostraremos que* M^n *é uma hipersuperfície mínima em* $\mathbb{E}_F^{n+1}$ *se, e somente se, o fator conforme satisfaz*

$$F(r) = c \cdot \sqrt{\frac{(1+4r)^{1/n}}{r}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

De acordo com a prova da Proposição 3, veja (2.2), como $\operatorname{grad}\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ *temos*

$$nH_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u_i}\left[\frac{\varphi_i}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad}\varphi|^2}}\right].$$

Note que, para $1 \leqslant i \leqslant n$, *podemos calcular*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u_i}\left[\frac{\varphi_i}{\sqrt{1+|\operatorname{grad}\varphi|^2}}\right] &= \frac{\varphi_{ii}\cdot\sqrt{1+|\operatorname{grad}\varphi|^2}-\frac{\varphi_i\cdot\sum_{j=1}^{n}\varphi_j\varphi_{ji}}{\sqrt{1+|\operatorname{grad}\varphi|^2}}}{1+|\operatorname{grad}\varphi|^2}\\
&= \frac{\varphi_{ii}(1+|\operatorname{grad}\varphi|^2)-\varphi_i\cdot\sum_{j=1}^{n}\varphi_j\varphi_{ji}}{(1+|\operatorname{grad}\varphi|^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
H_0=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_{ii}(1+|\operatorname{grad}\varphi|^2)-\varphi_i\cdot\sum_{j=1}^{n}\varphi_j\varphi_{ji}}{(1+|\operatorname{grad}\varphi|^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{2.3}
$$

Agora, substituindo $\varphi = 2u_i$ *e* $\varphi_{ii} = 2$ *para qualquer* $1 \leqslant i \leqslant n$, $\varphi_{ij} = 0$ *para todo* $i \neq j$, *e* $r = r(X(u_1, \cdots, u_n)) = u_1^2 + \cdots + u_n^2$ *em (2.3) obtemos*

$$
\begin{aligned}
H_0 &= \frac{1}{n(1+\varphi_1^2+\cdots+\varphi_n^2)^{\frac{3}{2}}}\sum_{i=1}^{n}[\varphi_{ii}(1+\varphi_1^2+\cdots+\varphi_n^2)-\varphi_i^2\varphi_{ii}]\\
&= \frac{1}{n(1+4r)^{\frac{3}{2}}}\sum_{i=1}^{n}[2(1+4r)-8u_i^2]\\
&= \frac{2n(1+4r)-8r}{n(1+4r)^{\frac{3}{2}}},
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
H_0=\frac{2n(1+4r)-8r}{n(1+4r)^{\frac{3}{2}}}. \tag{2.4}
$$

Por outro lado, pela Proposição 3, M *é uma hipersuperfície mínima em* $\mathbb{E}_F^{n+1}$ *se, e somente se, a curvatura média* H_0 *de* M, *em relação à métrica Euclidiana, satisfaz*

$$
H_0=-\frac{\dot{F}}{F}\frac{4r}{\sqrt{1+4r}}.
$$

Assim substituindo (2.4) na equação acima podemos escrever

$$
\frac{\dot{F}}{F}=\frac{4r-n(1+4r)}{2nr(1+4r)}.
$$

Integrando a equação acima com respeito a r *obtemos*

$$\begin{aligned}
\ln F &= \int \frac{4r - n(1+4r)}{2nr(1+4r)} dr \\
&= \int \left(\frac{2}{n(1+4r)} - \frac{1}{2r} \right) dr \\
&= \ln \left(c \cdot \sqrt{\tfrac{(1+4r)^{1/n}}{r}} \right).
\end{aligned}$$

Então concluímos que

$$F(r) = c \cdot \sqrt{\frac{(1+4r)^{1/n}}{r}},$$

para alguma constante $c \in \mathbb{R}$.

Capítulo 3

GTG em espaços conformemente planos

Neste capítulo apresentamos resultados que podem ser encontrados em [31], escrito pelo autor em parceria com B.P. Lima e P.A. Sousa, no qual classificamos gráficos translacionais generalizados (GTG) M_f em $\mathbb{E}_F^{p+q+1} = (\mathbb{R}^{p+q+1}, \langle , \rangle)$ definidos por uma função $f(x,y) = \phi(x)+\psi(y)$, onde $\phi : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ e $\psi : U \subset \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$, cujo fator conforme $F : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definido por $F(x,y,z) = e^{-u(|x|^2)}$, para alguma função suave $u : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$.

3.1 Caso 2-eikonal

Nesta seção consideramos o caso em que ambos ϕ e ψ são eikonais, isto é, $|\nabla\phi| = \lambda$ e $|\nabla\psi| = \mu$ para λ e μ constantes. Denotando por $\tilde{H}_f$ a curvatura média de M_f provamos o seguinte resultado.

Teorema 7. *Assuma que ϕ e ψ são eikonais. Se $\tilde{H}_f$ é constante, então ψ é uma função afim e ϕ satisfaz a condição*

$$\Delta\phi - 2(p+q)u'(|x|^2)\langle x, \nabla\phi\rangle = \frac{(p+q)\tilde{H}_f\sqrt{1+|\nabla\phi|^2+|\nabla\psi|^2}}{e^{-u(|x|^2)}}.$$

Prova.
Seja M_f um gráfico translacional generalizado cuja parametrização $X : U \times V \to \mathbb{E}_F^{p+q+1}$ é dada por $X(x,y) = (x,y,f(x,y))$, onde $f(x,y) = \phi(x)+\psi(y)$. Denotando por H_f a

curvatura média de M_f com respeito à métrica Euclidiana, temos

$$H_f = \frac{1}{(p+q)} div \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla\phi|^2+|\nabla\psi|^2}} \right)$$

e a aplicação de Gauss é

$$N = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\phi|^2+|\nabla\psi|^2}}(-\nabla\phi, -\nabla\psi, 1).$$

Usando que ϕ e ψ são eikonais temos que $|\nabla\phi|$ e $|\nabla\psi|$ são constantes, implicando que

$$H_f = \frac{1}{(p+q)} \frac{\Delta f}{\sqrt{1+|\nabla\phi|^2+|\nabla\psi|^2}} = \frac{\Delta\phi+\Delta\psi}{(p+q)\sqrt{1+|\nabla\phi|^2+|\nabla\psi|^2}}.$$

Como $\nabla F(x,y,z) = -2u'(|x|^2)F \cdot (x,0,0)$ temos pela Proposição 1 que $\tilde{H}_f$ satisfaz

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_f &= F \cdot H_f - \langle N, \nabla F\rangle \\
&= F \cdot \frac{\Delta\phi+\Delta\psi}{(p+q)\sqrt{1+|\nabla\phi|^2+|\nabla\psi|^2}} - \frac{2u'(|x|^2)F}{\sqrt{1+|\nabla\phi|^2+|\nabla\psi|^2}}\langle x, \nabla\phi\rangle \\
&= \frac{F}{(p+q)\sqrt{1+|\nabla\phi|^2+|\nabla\psi|^2}}\left[\Delta\phi+\Delta\psi - 2(p+q)u'(|x|^2)\langle x,\nabla\phi\rangle\right],
\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{\tilde{H}_f(p+q)\sqrt{1+|\nabla\phi|^2+|\nabla\psi|^2}}{F} - \Delta\phi + 2(p+q)u'(|x|^2)\langle x,\nabla\phi\rangle = \Delta\psi.$$

Agora tomando as derivadas com respeito a y_i $(i = 1, \cdots, q)$ e usando que $|\nabla\phi|, |\nabla\psi|$ e $\tilde{H}_f$ são constantes obtemos $\frac{\partial}{\partial y_i}(\Delta\psi) = 0$, isto é, $\Delta\psi$ é constante. Então pelo Lema 2 concluímos que ψ é uma função afim, $H_\psi = \Delta\psi = 0$ e

$$\Delta\phi - 2(p+q)u'(|x|^2)\langle x,\nabla\phi\rangle = \frac{(p+q)\tilde{H}_f\sqrt{1+|\nabla\phi|^2+|\nabla\psi|^2}}{e^{-u(|x|^2)}}$$

finalizando a prova do teorema. ∎

Em [43] Munteanu, Palmas e Ruiz-Hernández provaram uma versão do Teorema 7 para GTG de curvatura média constante no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{p+q+1}$. Assumindo as mesmas hipóteses do Teorema 7 eles provaram que M_f é um hiperplano. A seguir construiremos um exemplo de GTG mínimo em $\mathbb{E}_F^{p+q+1}$ que não é um hiperplano, em contraste com o Teorema 3.2 de [43].

Corolário 1. *Seja* $u(t) = \frac{p-1}{2(p+q)} \ln t$. *Existe um gráfico translacional generalizado mínimo (GTG) em* $\mathbb{E}_F^{p+q+1}$ *que não é um hiperplano do espaço Euclidiano.*

Prova.

Seja $\phi : \mathbb{R}^p - \{0\} \to \mathbb{R}$ a função distância $\phi(x) = |x|$, uma conta fácil mostra que

$$\nabla\phi(x) = \frac{x}{|x|}, \quad \langle x, \nabla\phi(x)\rangle = |x|, \quad |\nabla\phi(x)| = 1 \quad e \quad \Delta\phi(x) = \frac{p-1}{|x|}.$$

Portanto, a função ϕ é uma solução da equação

$$\Delta\phi - 2(p+q)u'(|x|^2)\langle x, \nabla\phi\rangle = 0.$$

Agora considere $\psi : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ a função afim $\psi(y) = \langle a, y\rangle + b$, onde $a \in \mathbb{R}^q$ e $b \in \mathbb{R}$. Então $|\nabla\psi| = |a|$ e $\Delta\psi = 0$. Finalmente, seja $f : (\mathbb{R}^p \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \phi(x) + \psi(y)$. Da expressão obtida para $\tilde{H}_f$ na prova do Teorema 7 segue que o gráfico de f é GTG mínimo em $\mathbb{E}_F^{p+q+1}$.

■

3.2 Caso 1-eikonal

Nesta seção vamos considerar o caso onde uma das funções ϕ ou ψ é eikonal. O seguinte resultado caracteriza GTG mínimos no caso 1-ekonal.

Teorema 8. *Se* ϕ *é eikonal, então* M_f *é mínimo se, e somente se,* ϕ *e* ψ *satisfazem as condições*

$$\Delta\phi = 2(p+q)u'(|x|^2)\langle x, \nabla\phi\rangle + c$$

e

$$q(1 + |\nabla\psi|^2)^{\frac{3}{2}} H_\psi + \lambda^2\Delta\psi + c(1 + \lambda^2 + |\nabla\psi|^2) = 0,$$

onde $|\nabla\phi| = \lambda$, $c \in \mathbb{R}$ *e* H_ψ *denota a curvatura média de* M_ψ *em* $\mathbb{R}^{q+1}$.

Prova.

Seja H_f a curvatura média de M_f, com respeito à métrica Euclidiana. Do Lema 1

$$H_f = \frac{p(1 + |\nabla\phi|^2)^{\frac{3}{2}} H_\phi + q(1 + |\nabla\psi|^2)^{\frac{3}{2}} H_\psi + |\nabla\psi|^2\Delta\phi + |\nabla\phi|^2\Delta\psi}{(p+q)(1 + |\nabla\phi|^2 + |\nabla\psi|^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Como no Teorema 7, seja $X(u,v)$ a parametrização do GTG. Desde que o fator conforme F satisfaz $\nabla F = -2u'(|x|^2)F(X(u,v))\cdot(x,0,0)$ e a aplicação de Gauss é

$$N = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\phi|^2+|\nabla\psi|^2}}(-\nabla\phi,-\nabla\psi,1),$$

temos

$$\langle N,\nabla F\rangle = \frac{2u'(|x|^2)F}{\sqrt{1+|\nabla\phi|^2+|\nabla\psi|^2}}\langle x,\nabla\phi\rangle.$$

Segue da Proposição 1 que a curvatura média em $\mathbb{E}_F^{p+q+1}$ é dada por $\tilde{H}_f = FH_f - \langle N,\nabla F\rangle$. Então M_f é mínimo em $\mathbb{E}_F^{p+q+1}$ se, e somente se, $H_f = \frac{1}{F}\langle N,\nabla F\rangle$. Assim,

$$\frac{p(1+|\nabla\phi|^2)^{\frac{3}{2}}H_\phi + q(1+|\nabla\psi|^2)^{\frac{3}{2}}H_\psi + |\nabla\psi|^2\Delta\phi + |\nabla\phi|^2\Delta\psi}{(p+q)(1+|\nabla\phi|^2+|\nabla\psi|^2)} = 2u'(|x|^2)\langle x,\nabla\phi\rangle.$$

Como ϕ é eikonal temos $|\nabla\phi|^2$ constante e $p(1+|\nabla\phi|^2)^{\frac{1}{2}}H_\phi = \Delta\phi$. Substituindo na equação anterior obtemos

$$\begin{aligned}
2(p+q)u'(|x|^2)\langle x,\nabla\phi\rangle &= \frac{\Delta\phi(1+|\nabla\phi|^2) + q(1+|\nabla\psi|^2)^{\frac{3}{2}}H_\psi + |\nabla\psi|^2\Delta\phi + |\nabla\phi|^2\Delta\psi}{(1+|\nabla\phi|^2+|\nabla\psi|^2)}\\
&= \frac{\Delta\phi(1+|\nabla\phi|^2+|\nabla\psi|^2) + q(1+|\nabla\psi|^2)^{\frac{3}{2}} + |\nabla\phi|^2\Delta\psi}{1+|\nabla\phi|^2+|\nabla\psi|^2}\\
&= \Delta\phi + \frac{q(1+|\nabla\psi|^2)^{\frac{3}{2}}H_\psi + |\nabla\phi|^2\Delta\psi}{1+|\nabla\phi|^2+|\nabla\psi|^2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta\phi - 2(p+q)u'(|x|^2)\langle x,\nabla\phi\rangle = -\frac{q(1+|\nabla\psi|^2)^{\frac{3}{2}}H_\psi + |\nabla\phi|^2\Delta\psi}{1+|\nabla\phi|^2+|\nabla\psi|^2}.$$

Como o lado esquerdo da igualdade depende apenas da variável x e o lado direito depende apenas da variável y, existe uma constante $c\in\mathbb{R}$ tal que

$$\Delta\phi - 2(p+q)u'(|x|^2)\langle x,\nabla\phi\rangle = c$$

e

$$q(1+|\nabla\psi|^2)^{\frac{3}{2}}H_\psi + \lambda^2\Delta\psi + c(1+\lambda^2+|\nabla\psi|^2) = 0,$$

onde $|\nabla\phi| = \lambda\in\mathbb{R}$. Isto finaliza a prova do teorema. ■

Se ϕ é uma função afim e u pertence a uma classe especial de funções, aplicamos o Teorema 8 para obter uma caracterização de M_ψ. Mais especificamente, quando ϕ é afim impomos uma restrição adequada na primeira derivada da função u e provamos que M_ψ é um gráfico mínimo em $\mathbb{R}^{q+1}$.

Corolário 2. *Seja* $f : (0, \infty) \times V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ *uma função suave definida por* $f(x, y) = ax+b+\psi(y)$ *com* $a, b \in \mathbb{R}$. *Assuma que o gráfico de* f *é uma hipersuperfície translacional mínima em* $\mathbb{E}_F^{q+2}$, *onde* $F(x, y, z) = e^{-u(|x|^2)}$ *e* $u'(t^2) \cdot t$ *é não constante. Então* $a = 0$ *e o gráfico de* ψ *é mínimo em* $\mathbb{R}^{q+1}$.

Prova.
De fato, veja que $\nabla\phi = a$ e $\Delta\phi = 0$. Então segue da prova do Teorema 8 que

$$0 = 2a(1 + q)u'(x^2)x + c$$

e

$$q(1 + |\nabla\psi|^2)^{\frac{3}{2}} H_\psi + a^2\Delta\psi + c(1 + a^2 + |\nabla\psi|^2) = 0.$$

Como a função $u'(t^2)\cdot t$ não é constante, pela primeira identidade, obtemos que $a = c = 0$. Agora, substituindo na segunda equação dá

$$q(1 + |\nabla\psi|^2)^{\frac{3}{2}} H_\psi = 0.$$

Portanto, completamos a prova do corolário. ∎

Observação 1. *Uma função* $u(t)$ *não satisfaz a hipótese do Corolário 2 se, e somente se, existe uma constante* $k \in \mathbb{R}$ *tal que* $u'(t^2) \cdot t = k$, $\forall\, t > 0$. *Fazendo a mudança da variável* $s = t^2$ *obtemos*

$$u'(s) = \frac{k}{\sqrt{s}}\ ,\ \textit{então}\ u(s) = 2k\sqrt{s}.$$

Este fato implica que o resultado indicado no Corolário 2 vale essencialmente para qualquer função que não seja um múltiplo da função $u(s) = \sqrt{s}$.

Em um trabalho recente [59], Ruiz-Hernández estudou a geometria dos gráficos translacionais generalizados, cuja curvatura média não é zero e depende de suas primeiras p

ou de suas segundas q variáveis. Motivados por este trabalho, no próximo resultado consideraremos gráficos translacionais generalizados cuja curvatura média depende de suas primeiras p variáveis. Mais precisamente,

Teorema 9. *Se ψ é eikonal e $\tilde{H}_f = \tilde{H}_f(x, y) = \tilde{H}_f(x)$, então M_ψ é mínimo e*

$$\tilde{H}_f = \frac{e^{-u(|x|^2)}}{(p+q)\sqrt{1+|\nabla\phi|^2+\mu^2}}\left[\Delta\phi - 2(p+q)u'(|x|^2)\langle x, \nabla\phi\rangle - \frac{\mathrm{Hess}_\phi(\nabla\phi, \nabla\phi)}{1+|\nabla\phi|^2+\mu^2}\right],$$

onde $\mu = |\nabla\psi|$. Em particular, se ψ for constante obtemos

$$\tilde{H}_f = \frac{e^{-u(|x|^2)}}{(p+q)}\left[pH_\phi - 2(p+q)u'(|x|^2)\frac{\langle x, \nabla\phi\rangle}{\sqrt{1+|\nabla\phi|^2}}\right],$$

onde H_ϕ denota a curvatura média de M_ϕ em $\mathbb{R}^{p+1}$.

Prova.

Como ψ é eikonal, temos $|\nabla\psi| = \mu \in \mathbb{R}$. Considerando $W_f = \sqrt{1+|\nabla\phi|^2+\mu^2}$ e as notações introduzidas nas demonstrações dos Teoremas 7 e 8 temos

$$\begin{aligned} \tilde{H}_f &= FH_f - \langle N, \nabla F\rangle; \\ H_f &= \frac{1}{(p+q)}\left[-\frac{\mathrm{Hess}_\phi(\nabla\phi, \nabla\phi)}{W_f^3} + \frac{\Delta\phi + \Delta\psi}{W_f}\right]; \\ \langle N, \nabla F\rangle &= \frac{2u'(|x|^2)F}{W_f}\langle x, \nabla\phi\rangle, \end{aligned}$$

deste modo

$$\tilde{H}_f = \frac{e^{-u(|x|^2)}}{(p+q)W_f}\left[-\frac{\mathrm{Hess}_\phi(\nabla\phi, \nabla\phi)}{W_f^2} + \Delta\phi + \Delta\psi - 2(p+q)u'(|x|^2)\langle x, \nabla\phi\rangle\right].$$

Assim,

$$\frac{(p+q)\tilde{H}_f W_f}{e^{-u(|x|^2)}} + \frac{\mathrm{Hess}_\phi(\nabla\phi, \nabla\phi)}{W_f^2} - \Delta\phi + 2(p+q)u'(|x|^2)\langle x, \nabla\phi\rangle = \Delta\psi.$$

Como a função $\tilde{H}_f$ não depende da variável y, derivamos ambos os lados em relação a y_i e obtemos que $\Delta\psi$ é constante. Do Lema 2, segue que ψ é afim e $H_\psi = \Delta\psi = 0$.

Substituindo $\Delta\psi = 0$ na equação obtida para $\tilde{H}_f$ dá

$$\tilde{H}_f = \frac{e^{-u(|x|^2)}}{(p+q)W_f}\left[-\frac{\mathrm{Hess}_\phi(\nabla\phi,\nabla\phi)}{W_f^2} + \Delta\phi - 2(p+q)u'(|x|^2)\langle x,\nabla\phi\rangle\right].$$

Se a função ψ é constante temos $\mu = 0$ e

$$\tilde{H}_f = \frac{e^{-u(|x|^2)}}{(p+q)}\left[pH_\phi - 2(p+q)u'(|x|^2)\frac{\langle x,\nabla\phi\rangle}{\sqrt{1+|\nabla\phi|^2}}\right].$$

■

No próximo resultado obtemos uma classificação dos gráficos translacionais generalizados mínimos no caso especial $p = 1$ e $u(t) = \sqrt{t}$.

Corolário 3. *Seja* $f : (\alpha,\beta)\times V \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ *uma função suave definida por* $f(x,y) = \phi(x) + \psi(y)$*, onde* $\alpha > 0$ *e* ψ *é eikonal. Se o gráfico de* f *é uma hipersuperfície translacional generalizada mínima em* $\mathbb{E}_F^{q+2}$*, com* $F(x,y,z) = e^{-u(x^2)}$ *e* $u(t) = \sqrt{t}$*, então* ϕ *é constante ou*

$$\phi(x) = \pm\int \frac{1}{\sqrt{C_1 e^{-2(1+q)x} - \frac{C_2}{1+a^2}}}dx,$$

onde $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$ *e* $a = |\nabla\psi|$.

Prova.

A condição de minimalidade para M_f e o Teorema 9 dá

$$\phi'' - 2(1+q)u'(x^2)x\phi' - \frac{\phi''\cdot(\phi')^2}{1+(\phi')^2+a^2} = 0.$$

Como $u(t) = \sqrt{t}$ e $x > \alpha > 0$, obtemos $u'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ e

$$\phi'' - (1+q)\phi' - \frac{\phi''\cdot(\phi')^2}{1+(\phi')^2+a^2} = 0,$$

deste modo

$$\phi'' = (1+q)\phi' + \frac{1+q}{1+a^2}(\phi')^3.$$

Fazendo a mudança da variável $y = \phi'(x)$ obtemos a equação diferencial de Bernoulli abaixo

$$y' = (1+q)y + \frac{1+q}{1+a^2}y^3.$$

Observe que $y = 0$ é a solução trivial da equação. Neste caso, temos que ϕ é constante. Se $y \neq 0$, considere $w = y^{-2}$ daí $y = \pm\frac{1}{\sqrt{w}}$, substituindo os coeficientes da equação obtida na expressão geral da solução de uma equação de Bernoulli tem-se

$$\begin{aligned}
w &= \tilde{c_0}e^{-(-2)\int(-(1+q))dx} + e^{-(-2)\int(-(1+q))dx}\int e^{(-2)\int(-(1+q))dx}(-2)\frac{(1+q)}{1+a^2}dx \\
&= \tilde{c_0}e^{-2(1+q)x+k_1} + e^{-2(1+q)x+k_2}\int e^{2(1+q)x+k_3}(-2)\frac{(1+q)}{1+a^2}dx \\
&= \tilde{c_0}e^{-2(1+q)x+k_1} + e^{-2(1+q)x+k_2}\left[\frac{-e^{2(1+q)x+k_3}}{1+a^2} - \tilde{c_1}\right] \\
&= \tilde{c_0}e^{-2(1+q)x+k_1} + \tilde{c_1}e^{-2(1+q)x+k_2} - \frac{e^{k_2+k_3}}{1+a^2} \\
&= C_1e^{-2(1+q)x} - \frac{C_2}{1+a^2},
\end{aligned}$$

onde $C_1 = \tilde{c_0}e^{k_1} + \tilde{c_1}e^{k_2}$ e com isso segue que

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{C_1e^{-2(1+q)x} - \frac{C_2}{1+a^2}}},$$

então lembrando que $y = \varphi'(x)$ completamos a prova.

■

3.3 Caso ψ não-eikonal

No Teorema 7 consideramos o caso em que as funções ϕ e ψ são eikonal, no Teorema 8 e 9 apenas uma das funções é eikonal. No Teorema 10 abaixo, obtivemos um resultado quando a função ψ é não-eikonal.

Teorema 10. *Suponha que $\Delta\psi = a$ e H_ψ sejam constantes e que a função ψ não seja* *eikonal. Se* M_f *for mínimo em* $\mathbb{E}_F^{p+q+1}$*, então* $H_\psi = 0$*,* $\Delta\phi = 2(p+q)u'(|x|^2)\langle x, \nabla\phi\rangle$ *e*

$$H_\phi = \frac{2(p+q)u'(|x|^2)\langle x, \nabla\phi\rangle(1+|\nabla\phi|^2) - a|\nabla\phi|^2}{p(1+|\nabla\phi|^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Prova.

Novamente considerando as notações introduzidas nas demonstrações dos Teoremas 7 e 8, e usando as hipóteses, obtemos

$$\begin{aligned}&2(p+q)u'(|x|^2)\langle x, \nabla\phi\rangle(1+|\nabla\phi|^2+|\nabla\psi|^2) = \\ &p(1+|\nabla\phi|^2)^{\frac{3}{2}}H_\phi + q(1+|\nabla\psi|^2)^{\frac{3}{2}}H_\psi + |\nabla\psi|^2\Delta\phi + |\nabla\phi|^2\Delta\psi.\end{aligned} \tag{3.1}$$

A derivada em relação à variável y_j ($j = 1, 2, 3, ..., q$), na igualdade acima, dá

$$\frac{3}{2}q(1+|\nabla\psi|^2)^{\frac{1}{2}}H_\psi \cdot \frac{\partial(|\nabla\psi|^2)}{\partial y_j} + \Delta\phi\frac{\partial(|\nabla\psi|^2)}{\partial y_j} = 2(p+q)u'(|x|^2)\langle x, \nabla\phi\rangle\frac{\partial(|\nabla\psi|^2)}{\partial y_j}.$$

Isto é,

$$\left[\frac{3}{2}q(1+|\nabla\psi|^2)^{\frac{1}{2}}H_\psi + \Delta\phi - 2(p+q)u'(|x|^2)\langle x, \nabla\phi\rangle\right]\frac{\partial(|\nabla\psi|^2)}{\partial y_j} = 0.$$

Como ψ não é eikonal, devemos ter

$$\frac{3}{2}q(1+|\nabla\psi|^2)^{\frac{1}{2}}H_\psi + \Delta\phi - 2(p+q)u'(|x|^2)\langle x, \nabla\phi\rangle = 0.$$

Observando que o primeiro termo depende apenas de y, que o segundo e terceiro termos dependem apenas de x, concluímos que existe uma constante real b tal que

$$\frac{3}{2}q(1+|\nabla\psi|^2)^{\frac{1}{2}}H_\psi = \Delta\phi - 2(p+q)u'(|x|^2)\langle x, \nabla\phi\rangle = b.$$

Se $H_\psi \neq 0$, segue que $|\nabla\psi|^2$ é constante e portanto ψ é eikonal, contradizendo a hipótese. Assim, $b = H_\psi = 0$ e $\Delta\phi = 2(p+q)u'(|x|^2)\langle x, \nabla\phi\rangle$. Agora substituindo em

(3.1) obtemos

$$
\begin{aligned}
&2(p+q)u'(|x|^2)\langle x, \nabla\phi\rangle(1+|\nabla\phi|^2+|\nabla\psi|^2) = \\
&p(1+|\nabla\phi|^2)^{\frac{3}{2}}H_\phi + 2(p+q)u'(|x|^2)\langle x, \nabla\phi\rangle|\nabla\psi|^2 + a|\nabla\phi|^2,
\end{aligned}
$$

que implica

$$
p(1+|\nabla\phi|^2)^{\frac{3}{2}}H_\phi + a|\nabla\phi|^2 = 2(p+q)u'(|x|^2)\langle x, \nabla\phi\rangle(1+|\nabla\phi|^2),
$$

isto é,

$$
H_\phi = \frac{2(p+q)u'(|x|^2)\langle x, \nabla\phi\rangle(1+|\nabla\phi|^2) - a\,|\nabla\phi|^2}{p(1+|\nabla\phi|^2)^{\frac{3}{2}}}.
$$

■

Com as mesmas hipóteses do Teorema 10, no corolário abaixo obtemos a expressão geral da função ϕ no caso $p = 1$. Além disso, se $\Delta\psi = 0$ e existe t tal que $u'(t) \neq 0$, provamos que M_f é um 1-cilindro sobre a hipersuperfície mínima M_ψ.

Corolário 4. *Com as suposições do Teorema 10, se $p = 1$ vale o seguinte:*

$$
\phi(x) = c_1 \cdot \int e^{(1+q)u(x^2)}dx + c_2, \text{ onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.
$$

Em particular, se $\Delta\psi = a = 0$ e existe t tal que $u'(t) \neq 0$, então ϕ é constante.

Prova.

Segue como consequência da prova do Teorema 10 que a função ϕ satisfaz $\phi'' = 2(1+q)u'(x^2)x\phi'$. A equação diferencial ordinária obtida é homogênea de segunda ordem e pode ser facilmente resolvida, cuja solução é

$$
\phi(x) = c_1 \cdot \int e^{(1+q)u(x^2)}dx + c_2, \text{ onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.
$$

Como $a = 0$, usando a expressão para a curvatura de uma curva regular e a expressão de H_ϕ dada pelo Teorema 10 temos

$$
\frac{c_1(1+q)2x\,u'(x^2)e^{(1+q)u(x^2)}}{(1+c_1^2e^{2(1+q)u(x^2)})^{3/2}} = \frac{2(1+q)u'(x^2)xc_1e^{(1+q)u(x^2)}}{(1+c_1^2e^{2(1+q)u(x^2)})^{1/2}},
$$

que implica

$$\frac{c_1u'(x^2)}{(1+c_1^2e^{2(1+q)u(x^2)})} = c_1u'(x^2)\,,\ \text{então}\ c_1^3u'(x^2)e^{2(1+q)u(x^2)} = 0.$$

Portanto, concluímos que $c_1 = 0$, então ϕ é constante e M_f é um 1-cilindro sobre a hipersuperfície mínima M_ψ. ∎

A seguir, consideramos um caso especial da função $u(t)$, no caso particular $p = 1$ e $q = 2$ obtemos um exemplo que nos assegura que a condição de minimalidade para M_f é essencial no Corolário 4.

Observação 2. *Considere o caso especial* $u(t) = \sqrt{t}$ *e tome* $p + 1 = q = 2$, *segue do Corolário 4 que*

$$\phi(x) = \frac{c_1}{1+q}e^{(1+q)x} + \tilde{c}_2.$$

Seja $\psi : (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2}) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\psi(y_1, y_2) = \arctan\left(\frac{y_2}{y_1}\right),$$

é fácil verificar que ψ *não é eikonal,* $\Delta\psi = a = 0$ *e* $H_\psi = 0$. *A função* ψ *satisfaz as hipóteses do Corolário 4 e a função* ϕ *é solução da equação*

$$\Delta\phi = 2(p+q)u'(|x|^2)\langle x, \nabla\phi\rangle.$$

Usando a expressão para a curvatura de uma curva regular, obtemos que a curvatura do gráfico de ϕ *é*

$$H_\phi = \frac{3c_1e^{(1+q)x}}{(1+c_1^2e^{2(1+q)x})^{3/2}} \neq \frac{2(p+q)u'(|x|^2)\langle x, \nabla\phi\rangle(1+|\nabla\phi|^2) - a\,|\nabla\phi|^2}{p(1+|\nabla\phi|^2)^{3/2}}.$$

Por outro lado, um cálculo fácil mostra que

$$\tilde{H}_f = -\frac{c_1^3e^{8x}}{\left(1+c_1^2e^{6x}+\frac{1}{y_1^2+y_2^2}\right)^{3/2}} \neq 0,\ \text{if}\ c_1 \neq 0.$$

Daí, concluímos que a condição de minimalidade para M, *no Corolário 4, é essencial.*

Capítulo 4

Rigidez de Superfícies Capilares

Neste capítulo, obtemos uma estimativa precisa para o comprimento $L(\partial\Sigma)$ do bordo $\partial\Sigma$ de uma superfície capilar mínima Σ^2 em M^3, onde M é uma variedade compacta tridimensional com bordo estritamente convexo, assumindo que Σ tem índice um. A estimativa é em termos do gênero de Σ, do número de componentes conexas de $\partial\Sigma$ e do ângulo de contato θ. Fazendo uma suposição extra sobre a geometria de M ao longo de ∂M, caracterizamos a geometria global de M, que é atingida apenas pelas bolas Euclidianas tridimensionais. Para superfícies capilares CMC estáveis também obtemos resultados semelhantes.

4.1 Superfícies capilares mínimas de índice um

Nessa seção estendemos os resultados provados por Mendes [39], que considerou superfícies mínimas de bordo livre imersas em variedades compactas tridimensionais com bordo não vazio estritamente convexo, para superfícies mínimas capilares. Mais precisamente,

Teorema 11. *Seja M^3 uma variedade Riemanniana compacta tridimensional com bordo não vazio ∂M. Suponha que $\mathrm{Ric}^M \geqslant 0$ e $\mathrm{II}^{\partial M} \geqslant 1$, onde Ric^M é o tensor Ricci de M e $\mathrm{II}^{\partial M}$ é a segunda forma fundamental de ∂M. Se Σ^2 for uma superfície mínima capilar propriamente mergulhada de índice um em M, com ângulo de contato constante $\theta \in (0,\pi)$, então o comprimento $L(\partial\Sigma)$ de $\partial\Sigma$ satisfaz*

$$L(\partial\Sigma) + \cos\theta \int_{\partial\Sigma} A(\nu,\nu)ds \leqslant 2\pi(\overline{g} + r)\mathrm{sen}\theta, \tag{4.1}$$

onde A denota a segunda forma fundamental de Σ, ν é o conormal unitário exterior para

$\partial\Sigma$ *em* Σ, $\overline{g}$ *é o gênero de* Σ *e* r *é o número de componentes conexas de* $\partial\Sigma$. *Além disso, se a igualdade ocorre, temos o seguinte:*

(i) Σ *é isométrica a um disco plano de raio* $\mathrm{sen}\theta$*;*

(ii) Σ *é totalmente geodésia em* M*;*

(iii) a curvatura geodésica de $\partial\Sigma$ *em* ∂M *é* $\overline{k} = \cot\theta$*;*

(iv) $\mathrm{II} = 1$*; e*

(v) todas as curvaturas seccionais de M *são nulas em* Σ.

Prova.

Seja $\phi_1 : \Sigma \to \mathbb{R}$ a primeira autofunção de Q. Conforme o Lema 1.35 em Colding e Minicozzi [13] ϕ_1 não muda de sinal. Então, sem perda de generalidade, podemos assumir $\phi_1 \geqslant 0$. Desde que $\mathrm{ind}(\Sigma) = 1$, para todo $f \in C^\infty(\Sigma)$ com $\int_\Sigma f \cdot \phi_1 dA = 0$, temos $Q(f, f) \geqslant 0$, ou seja,

$$\int_\Sigma \left[\|\nabla f\|^2 - (\mathrm{Ric}(N) + \|A\|^2)f^2\right] dA \geqslant \int_{\partial\Sigma} \left(\frac{\mathrm{II}(\overline{\nu}, \overline{\nu})}{\mathrm{sen}\theta} + \cot\theta \cdot A(\nu, \nu)\right) f^2 ds.$$

Pelo Teorema 1, existe uma aplicação conforme $F = (f_1, f_2) : \Sigma \to \overline{\mathbb{D}}^2$ satisfazendo $\deg(F) \leqslant \overline{g} + r$, onde $\overline{\mathbb{D}}^2 = \{z \in \mathbb{R}^2 : \|z\| \leqslant 1\}$ é o disco Euclidiano unitário. Pelo Lema 3, podemos assumir $\int_\Sigma f_i \cdot \phi_1 dA = 0$. Então, usando f_i como função teste, obtemos

$$\int_{\partial\Sigma} \left(\frac{\mathrm{II}(\overline{\nu}, \overline{\nu})}{\mathrm{sen}\theta} + \cot\theta \cdot A(\nu, \nu)\right) f_i^2 ds \leqslant \int_\Sigma \left[\|\nabla f_i\|^2 - (\mathrm{Ric}(N) + \|A\|^2)f_i^2\right] dA \leqslant \int_\Sigma \|\nabla f_i\|^2 dA.$$

Observe que, como F é conforme,

$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Sigma \|\nabla f_i\|^2 dA = \int_\Sigma \|\nabla F\|^2 dA = 2 \cdot \mathrm{Area}(F(\Sigma)) = 2 \cdot \mathrm{Area}(\overline{\mathbb{D}}^2)\deg(F) \leqslant 2\pi(\overline{g} + r).$$

Portanto, como $F(\partial\Sigma) = F(\Sigma) \cap \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^1$ (já que F é própria), $\mathrm{Ric} \geqslant 0$ e $\mathrm{II} \geqslant 1$,

$$\int_{\partial\Sigma} \left(\frac{1}{\mathrm{sen}\theta} + \cot\theta \cdot A(\nu, \nu)\right) ds \leqslant 2\pi\deg(F) \leqslant 2\pi(\overline{g} + r),$$

implicando

$$L(\partial\Sigma) + \cos\theta \int_{\partial\Sigma} A(\nu, \nu) ds \leqslant 2\pi(\overline{g} + r)\mathrm{sen}\theta.$$

o que garante (4.1).

Se a igualdade em (4.1) acontece, todas as desigualdades acima também são igualdades. Em particular, $A \equiv 0$ (Σ é totalmente geodésica) o que garante (ii), $\mathrm{Ric}(N) = 0$ e $\mathrm{II}(\overline{\nu}, \overline{\nu}) = 1$. Usando a equação de Gauss $R + H^2 - \|A\|^2 = 2(\mathrm{Ric}(N) + K)$, onde K é a curvatura gaussiana de Σ e R é a curvatura escalar de M, temos $2K = R \geqslant 0$.

Considere T a tangente unitária a $\partial\Sigma$. Como $\nu = sen\theta\, \overline{N} + \cos\theta\, \overline{\nu}$ ao longo de $\partial\Sigma$, a curvatura geodésica de $\partial\Sigma$ em Σ é dado por

$$\begin{aligned} k = -g(D_T T, \nu) &= g(D_T \nu, T) \\ &= g(D_T(sen\theta \overline{N} + \cos\theta \overline{\nu}), T) \\ &= sen\theta \cdot \mathrm{II}(T, T) + \cos\theta g(D_T \overline{\nu}, T). \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} g(D_T \overline{\nu}, T) &= g(D_T(-sen\theta\, N + \cos\theta\, \nu), T) \\ &= sen\theta \cdot A(T, T) + \cos\theta \cdot k = \cos\theta \cdot k. \end{aligned}$$

Daí concluímos que

$$k = sen\theta \cdot \mathrm{II}(T, T) + \cos^2\theta \cdot k,$$

ou seja,

$$k = \frac{\mathrm{II}(T, T)}{sen\theta} \geqslant \frac{1}{sen\theta}.$$

Além disso, ocorre igualdade se, e somente se, $\mathrm{II}(T, T) = 1$. Pelo teorema de Gauss-Bonnet

$$\begin{aligned} 2\pi(2 - 2\overline{g} - r) &= 2\pi\chi(\Sigma) = \int_\Sigma K dA + \int_{\partial\Sigma} k ds \\ &\geqslant \frac{L(\partial\Sigma)}{sen\theta} = 2\pi(\overline{g} + r), \end{aligned}$$

ou seja,

$$2\pi(2 - 2\overline{g} - r) \geqslant 2\pi(\overline{g} + r)$$

$$2 - 2\overline{g} - r \geqslant \overline{g} + r$$

$$2 \geqslant 3\overline{g} + 2r$$

o que implica $\overline{g} = 0$ e $r = 1$. Então todas as desigualdades acima devem ser igualdades. Então, $K = 0$, $L(\partial\Sigma) = 2\pi \mathrm{sen}\theta$, $k = \dfrac{1}{\mathrm{sen}\theta}$ garantindo assim (i) e $\mathrm{II}(T,T) = 1$. Além disso, observe que a curvatura geodésica $\overline{k}$ de $\partial\Sigma$ em ∂M satisfaz

$$\begin{aligned}
\overline{k} &= -g(D_T T, \overline{\nu}) = -g(D_T T, -\mathrm{sen}\theta \cdot N + \cos\theta \cdot \nu) \\
&= \mathrm{sen}\theta\, g(D_T T, N) - \cos\theta\, g(D_T T, \nu) \\
&= \mathrm{sen}\theta\, A(T,T) + \cos\theta\, k = \cos\theta\, k \\
&= \cot\theta,
\end{aligned}$$

o que nos garante (iii). Agora, sejam $x \in \Sigma$ e $\{e_1, e_2, e_3 = N\} \subset T_x M$ tais que $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonormal de $T_x\Sigma$ e denote por K_M a curvatura seccional de M. Desde que

$$\mathrm{Ric}(e_1, e_1) + \mathrm{Ric}(e_2, e_2) + \mathrm{Ric}(e_3, e_3) = R = 0$$

em Σ e $\mathrm{Ric} \geqslant 0$ em todos os pontos, temos $\mathrm{Ric}(e_i, e_i) = 0$ em Σ para $i = 1, 2, 3$, o que implica $K_M(e_i, e_j) = 0$ para $i \neq j$ provando (ν).

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a^2 + b^2 = 1$. Como $\mathrm{II}(\overline{\nu}, \overline{\nu}) = 1$ e $\mathrm{II}(T,T) = 1$, segue que

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}(a\overline{\nu} + bT, a\overline{\nu} + bT) &= a^2 \cdot \mathrm{II}(\overline{\nu}, \overline{\nu}) + 2ab \cdot \mathrm{II}(\overline{\nu}, T) + b^2 \cdot \mathrm{II}(T,T) \\
&= a^2 + b^2 + 2ab \cdot \mathrm{II}(\overline{\nu}, T),
\end{aligned}$$

da mesma forma

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}(a\overline{\nu} - bT, a\overline{\nu} - bT) &= a^2 \cdot \mathrm{II}(\overline{\nu}, \overline{\nu}) - 2ab \cdot \mathrm{II}(\overline{\nu}, T) + b^2 \cdot \mathrm{II}(T,T) \\
&= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \mathrm{II}(\overline{\nu}, T).
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}(a\overline{\nu} + bT, a\overline{\nu} + bT) &\geqslant 1, \quad \text{então } 2ab \cdot \mathrm{II}(\overline{\nu}, T) \geqslant 0; \\
\mathrm{II}(a\overline{\nu} - bT, a\overline{\nu} - bT) &\geqslant 1, \quad \text{então } -2ab \cdot \mathrm{II}(\overline{\nu}, T) \geqslant 0,
\end{aligned}$$

inferimos que $\mathrm{II}(\overline{\nu}, T) = 0$ e $\mathrm{II} = 1$ o que nos garante $(i\nu)$. ■

Se fizermos uma suposição extra sobre a geometria de M ao longo de ∂M, podemos caracterizar a geometria global de M quando a igualdade em (4.1) for válida.

Corolário 5. *Seja M^3 uma variedade Riemanniana tridimensional compacta com bordo não vazio ∂M. Suponha que $\mathrm{Ric} \geqslant 0$ e $\mathrm{II} \geqslant 1$ e $K_M(T_p\partial M) \geqslant 0$ para todo $p \in \partial M$, onde K_M é a curvatura seccional de M. Se Σ^2 for uma superfície mínima capilar propriamente* *mergulhada de índice um em* M*, com ângulo de contato constante* $\theta \in (0, \pi)$*, então*

$$L(\partial\Sigma) + \cos\theta \int_{\partial\Sigma} A(\nu, \nu) ds \leqslant 2\pi(\overline{g} + r)\operatorname{sen}\theta.$$

Além disso, se a igualdade ocorre, então M^3 *é isométrica a uma bola Euclidiana tridimensional e* Σ^2 *é isométrica ao disco Euclidiano de raio* $\operatorname{sen}\theta$*.*

Prova.

De acordo com o Teorema 11, a desigualdade é válida. Além disso, se ocorrer igualdade Σ^2 é totalmente geodésica e a curvatura geodésica de $\partial\Sigma$ em ∂M é $\overline{k} = \cot\theta$. Além disso, obtemos $L(\partial\Sigma) = 2\pi \operatorname{sen}\theta$. Podemos supor, por uma possível mudança de orientação, que $\overline{k} = \cot\theta \geqslant 0$.

Agora, denote por $K_{\partial M}$ a curvatura gaussiana de ∂M. Além disso, denote por k_1 e k_2 as curvaturas principais de ∂M em M. Pela equação de Gauss

$$K_{\partial M} = K_M(T_p\partial M) + k_1 k_2 \geqslant 1.$$

Como $\partial\Sigma$ é uma curva simples de ∂M (pois Σ está mergulhada em M), segue do Teorema 3 que $\partial\Sigma$ limita um domínio em ∂M que é isométrico a uma bola geodésica em $\mathbb{S}^2$. Cortamos ∂M ao longo de $\partial\Sigma$ para obter duas superfícies compactas com a geodésica $\partial\Sigma$ como bordo comum. Aplicando o Teorema 3 a qualquer uma dessas duas superfícies compactas com bordo, concluímos que ∂M é isométrica à 2-esfera unitária padrão.

Assim pelo Teorema 2, M^3 é isométrica à bola Euclidiana tridimensional. Finalmente, usando que Σ^2 é totalmente geodésico, podemos concluir que Σ é isométrica ao disco Euclidiano de raio $\operatorname{sen}\theta$. ∎

No próximo resultado, obtemos uma estimativa superior sharp para a área de Σ, quando M^3 é um corpo estritamente convexo em $\mathbb{R}^3$.

Corolário 6. *Seja* Ω *um domínio limitado suave em* $\mathbb{R}^3$ *cujo bordo* $\partial\Omega$ *é estritamente convexo, digamos* $\mathrm{II} \geqslant 1$*, onde* II *é a segunda forma fundamental de* $\partial\Omega$ *em* $\mathbb{R}^3$*. Se* Σ^2 *for um disco capilar mínimo propriamente mergulhado de índice um em* Ω*, com ângulo de contato constante* $\theta \in (0, \pi)$*, então a área de* Σ *satisfaz*

$$A(\Sigma) \leqslant \frac{\left(2\pi \operatorname{sen}\theta - \cos\theta \int_{\partial\Sigma} A(\nu, \nu) ds\right)^2}{4\pi}.$$

Além disso, se a igualdade ocorre, então Ω é a bola Euclidiana unitária tridimensional e Σ^2 é o disco Euclidiano de raio $\mathrm{sen}\theta$.

Prova.
A desigualdade isoperimétrica para superfícies mínimas (ver Teorema 1, [34]) diz que

$$4\pi A(\Sigma) \leqslant L^2(\partial\Sigma).$$

Então, pelo Teorema 11,

$$A(\Sigma) \leqslant \frac{L^2(\partial\Sigma)}{4\pi} \leqslant \frac{\left(2\pi\mathrm{sen}\theta - \cos\theta\int_{\partial\Sigma} A(\nu,\nu)ds\right)^2}{4\pi}.$$

Observe que se ocorrer igualdade, pelo Corolário 5 inferimos que Ω é a bola Euclidiana tridimensional e Σ^2 é o disco Euclidiano de raio $\mathrm{sen}\theta$. ■

4.2 Superfícies estáveis capilares CMC

Wang e Xia [64] provaram que qualquer hipersuperfície capilar estável imersa em uma bola em formas espaciais é totalmente umbílica. Em nosso próximo resultado, consideramos superfícies capilares estáveis CMC imersas em uma variedade Riemanniana tridimensional compacta com curvatura de Ricci não negativa e bordo estritamente convexo e provamos o seguinte:

Teorema 12. *Seja M^3 uma variedade Riemanniana tridimensional compacta com bordo não vazio ∂M. Suponha que $\mathrm{Ric} \geqslant 0$ e $\mathrm{II} \geqslant 1$. Se Σ^2 for uma superfícies capilar estável CMC propriamente mergulhada em M, com ângulo de contato constante $\theta \in (0,\pi)$, então o comprimento $L(\partial\Sigma)$ de $\partial\Sigma$ satisfaz*

$$L(\partial\Sigma) + \cos\theta\int_{\partial\Sigma} A(\nu,\nu)ds \leqslant 2\pi(\overline{g} + r)\mathrm{sen}\theta,$$

onde A denota a segunda forma fundamental de Σ, ν é o conormal unitário externo para $\partial\Sigma$ em Σ, $\overline{g}$ é o gênero de Σ e r é o número de componentes conexas de $\partial\Sigma$. Além disso, se a igualdade ocorre, temos o seguinte:

(i) Σ é isométrica a um disco plano de raio $\mathrm{sen}\theta$;

(ii) Σ *é totalmente geodésica em* M*;*

(iii) *a curvatura geodésica de* $\partial\Sigma$ *em* ∂M *é* $\overline{k} = \cot\theta$*;*

(iv) $\mathrm{II} = 1$*; e*

(v) *todas as curvaturas seccionais de* M *são nulas em* Σ*.*

Prova.

Como na prova do Teorema 11, seja $F = (f_1, f_2) : \Sigma \to \overline{\mathbb{D}}^2$ uma aplicação conforme. Tomando $\phi_1 = 1$ no Lema 3, podemos supor

$$\int_\Sigma f_i \, dA = 0$$

para $i = 1$, 2. Como Σ é estável

$$\int_\Sigma \left[\|\nabla f_i\|^2 - (\mathrm{Ric}(N) + \|A\|^2) f_i^2\right] dA \geqslant \int_{\partial\Sigma} \left(\frac{\mathrm{II}(\overline{\nu}, \overline{\nu})}{\operatorname{sen}\theta} + \cot\theta \cdot A(\nu, \nu)\right) f_i^2 ds.$$

Somando em i e como $f_1^2 + f_2^2 = 1$ em $\partial\Sigma$, obtemos

$$\int_\Sigma \left[\|\nabla F\|^2 - (\mathrm{Ric}(N) + \|A\|^2)(f_1^2 + f_2^2)\right] dA \geqslant \int_{\partial\Sigma} \left(\frac{\mathrm{II}(\overline{\nu}, \overline{\nu})}{\operatorname{sen}\theta} + \cot\theta \cdot A(\nu, \nu)\right) ds.$$

Deste modo,

$$\frac{L(\partial\Sigma)}{\operatorname{sen}\theta} + \cot\theta \int_{\partial\Sigma} A(\nu, \nu) ds \leqslant 2\pi(\overline{g} + r).$$

Além disso, se a igualdade for válida, $A \equiv 0$ (Σ é totalmente geodésica), $\mathrm{Ric}(N) = 0$ e $\mathrm{II}(\overline{\nu}, \overline{\nu}) = 1$. Trabalhando exatamente como na prova do Teorema 11, temos o resultado.

■

Observação 3. *Os Corolários 5 e 6 também são verdadeiros se mudarmos a hipótese "mínimo de índice um"por "CMC estável ."*

Referências Bibliográficas

[1] Alexandrov, A.D.: Uniqueness theorems for surfaces in the large, I. Vestnik Leningrad Univ. 11, 5-17 (1956). English translation: Amer. Math. Soc. Transl. **21**(1962),341-354.

[2] Araújo, K.O., Corro, A., Pina, R., Souza, M.: Complete surfaces with zero curvatures in conformally at spaces. Publ. Math. Debrecen **96**(3-4) (2020), 363-376.

[3] Araújo, K.O., Cui, N., Pina, R.: Helicoidal Minimal Surfaces in a Conformally Flat 3-Space. Bull. Korean Math. Soc. **53** (N.2) (2016), 531-540 .

[4] Baikoussis, C., Koufogiorgos, T.: Helicoidal surfaces with prescribed mean or Gaussian curvature. J. Geom. **63**(1-2) (1998), 25-29 .

[5] Bueno, A., Gálvez, J., Mira, P.: Rotational hypersurfaces of prescribed mean curvature. J. Diferential Equations, **268**(5) (2020), 2394-2413 .

[6] Bueno, A., Gálvez, J., Mira, P.: The global geometry of surfaces with prescribed mean curvature in $\mathbb{R}^3$. Trans. Amer. Math. Soc. **373**(6) (2020), 4437-4467 .

[7] Brendle, S.: A sharp bound for the area of minimal surfaces in the unit ball. Geom. Funct. Anal., **22** (3) (2012), 621–626.

[8] Caddeo, R., Onnis, I.I., Piu, P. Bour's theorem and helicoidal surfaces with constant mean curvature in the Bianchi-Cartan-Vranceanu spaces. Ann. Mat. Pura Appl. **201** (2022),913-932 .

[9] Caddeo, R., Piu, P., Ratto, A.: $\mathsf{SO}(2)$-invariant minimal and constant mean curvature surfaces in three dimensional homogeneous spaces. Manuscripta Math. **87** (1995), 1-12.

[10] Chen, C., Sun, H., Tang, L.: On translation Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in $(n+1)$-Dimensional Spaces, J. Beijing Inst. Tech., **12** (2003), 322-325.

[11] Christoffel, E.B.: Über die Bestimmung der Gestalt einer Krummen Oberfläche durchokale Messungen auf derselben. J. Reine Angnew. Math. **64** (1865), 193-209 .

[12] Colding, T.H. and Minicozzi W.P.: Generic mean curvature ow I; generic singularities. Annals of Mathematics **175** (2012), 755-833.

[13] Colding, T. e Minicozzi, W.P.: A course in minimal surfaces, Graduate Studies in Mathematics, vol 121. American Mathematical Society.

[14] Corro, A. V., Pina, R., Souza, M: Surfaces of Rotation with Constant Extrinsic Curvature in a Conformally Flat Spaces. Results Math, **60** (2011), 225-234 .

[15] Dajczer, M., do Carmo, M.P.: Helicoidal surfaces with constant mean curvature. Tohoku Math Jour., **34**(9) (1982), 425-435 .

[16] Dajczer, M., do Carmo, M.P.: Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature. Trans. Amer. Math. **277**(1983), 665-709.

[17] Dajczer, M., Tojeiro, R.: On flat surfaces in space forms. Houston J. Math. **21**(2)(1995), 319-338.

[18] Dierkes, U., Hilderbrandt, S., Sauvigny, F.: Minimal Surfaces. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Grundlehren der mathematischen Wissenchaften 339,(2010).

[19] Dillen, F., Verstraelen, L., Zafindratafa, G.: A generalization of the translational surfaces of Scherk, Differential Geometry in honor of Radu Rosca, Catholic University of Leuven - Belgium (1991), 107-109.

[20] Edelen, N.: A conservation approach to helicoidal surfaces of constant mean curvature in $\mathbb{R}^3, \mathbb{S}^3$ and $\mathbb{H}^3$. arXiv:1110.168.

[21] Edelen, N.,Solomon, B.: Constant mean curvature, flux conservation, and symmetry. Pacific J. Math, **274** (1) (2015), 53-72 .

[22] Figueroa, C.B., Mercuri, F., Pedrosa, R.H.L. Invariant surfaces of the Heisenberg groups.Ann. Mat. Pura Appl. **177** (1999), 173-194.

[23] Fraser, A., Li, M. M. C.: Compactness of the space of embedded minimal surfaces with free boundary in three-manifolds with nonnegative Ricci curvature and convex boundary. J. Differ. Geom., **96** (2) (2014), 183–200.

[24] Gabard, A.: Sur la représentation conforme des surfaces de Riemann à bord et une caractérisation des courbes séparantes. Comment. Math. Helv., **81** (4) (2006), 945–964

[25] Hang, F., Wang, X.: Rigidity Theorems for Compact Manifolds with Boundary and Positive Ricci Curvature. J. Geom. Anal., **19** (2009), 628–642.

[26] Hersch, J.: Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques homogenes. C. R Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 270: (1970) A1645-A1648 .

[27] Kenmontsu, K.: Surfaces of revolution with prescribed mean curvature. Tohoku Math J. **2** 32 (1980),147-153.

[28] KoKubu, M., Umehara, M., Yamada, K.: Flat fronts in hyperbolic 3-space. Pacific J Math. **216** (2) (2004), 149-175.

[29] Lee, C. W.. Lee, J. W., Yoon, D. W.: On Helicoidal Surfaces in a Conformally Flat 3-Spaces. Mediterr. J. Math. **14**(2017). https://doi.org/10.1007/s00009-017-0967-x

[30] Lima, B.P., Sousa, P.A., Vieira, B.M. Helicoidal Hypersurfaces and Graphs in Conformally Flat Spaces. Results Math 77, 119 (2022). https://doi.org/10.1007/s00025-022-01658-9

[31] Lima, B.P., Sousa, P.A., Vieira, B.V.M. Generalized translation hypersurfaces in conformally flat spaces. J. Geom. 113, 25 (2022). https://doi.org/10.1007/s00022-022-00638-2

[32] Lima, B.P., Santos, N.L., Sousa, P.A.: Generalized translation hypersurfaces in Euclidean space, J. Math. Anal. Appl., **470** (2019), 1129-1135.

[33] Liu, H.: Translation Surfaces with Constant Mean Curavature in 3-Dimensional Spaces. J.Geom. **64**(1999), 141-149.

[34] Li, P., Schoen, R., Yau, S.T.: On the isoperimetric inequality for minimal surfaces. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, **11** (n.2) (1984), 237–244

[35] López, R.: minimal translation surfaces in hyperbolic space. Beitr. Algebra Geom. **52** (2011), 105-112.

[36] López, R., Perdomo, O.: Minimal Translation Surfaces in Euclidean Space. J Geom. Anal. **27**(2017), 2926-2937.

[37] Manfio, F. Santos, J. P.: Helicoidal flat surfaces in the 3-sphere. Math Nachr. **292**(1)(2019), 127-136 .

[38] Martínez, A., Santos, J. P.: Tenenblat, K.: Helicoidal flat surfaces in hyperbolic 3-space. Pacific J Math. **264**(1)(2013), 195-211 .

[39] Mendes, A.: Rigidity of Free Boundary Surfaces in Compact 3-Manifolds with Strictly Convex Boundary. J. Geom. Anal., DOI 10.1007/s12220-017-9861-9.

[40] Montaldo, S., Onnis, I.I. Invariant surfaces in a three-manifold with constant Gaussian curvature. J. Geom. Phys. **55**(2005), 440-449 .

[41] Montaldo, S., Onnis, I.: Helix surfaces in the Berger sphere. Israel J. Math. **201**(2)(2014), 949-966 .

[42] Moruz, M., Munteanu, M.I.:Minimal translation hypersurfaces in $\mathbb{R}^4$, J. Math. Anal. Appl., **439** (2016), 798-812.

[43] Munteanu, M.I., Palmas, O., Ruiz-Hernández, G.: Minimal Translation Hypersurfaces in Euclidean Space, Mediterr. J. Math., **13** (2016), 2659-2676.

[44] Nitsche, J.C.C.: Stationary partitioning of convex bodies. Arch. Rational Mech., Anal. **89** (1985), 1–19.

[45] Nunes, I.: On stable constant mean curvature surfaces with free boundary. Mathematische Zeitschrift, **287** (2016), 473–479.

[46] Ou, Y.L., Tang, L.: On the Generalized Chen's Conjecture on Biharmonic Submanifolds. Michigan Math. J. **61**(2012), 531-542 .

[47] Palmer, B., Perdomo, O. M.: Rotating drops with helicoidal summetry. Pacific J. Math. **273** (2)(2015), 413-441 .

[48] Pauls, S.D.: Minimal Surfaces in the Heisenberg Group. Geomtriae Dedicata **104**(2004), 201-231.

[49] Perdomo, O. M.: Helicoidal minial surfaces in $\mathbb{R}^3$. Illinois J. Math. **57**(1)(2013), 87-104.

[50] Pogorelov, A. V.: Extension of a general uniqueness theorem of A.D. Açeksandrov to the case of non analytic surfaces (in Russian). Dokaldy Akad, Nauk SSSR **62**(1948), 297-299.

[51] Pina, R., Tenenblat, K.: On solutions of the Ricci curvature equation and the Einstein equation, Israel J. Math., **171** (2009), 61-76.

[52] Ripoll, J.B.: Helicoidal minimal surfaces in hyperbolic space. Nagoya Math. J. **114**(1989), 65-75.

[53] Ripoll,J.B.: Uniquenesss of minimal rotational surfaces in $\mathbb{S}^3$. Amer. J. Math. **111**(4)(1989), 537-547.

[54] Roussos, I.M. A geometric characterization of helicoidal surfaces of constant mean curvature.Publ. Inst. Math.**43** (57)(1988), 137-142.

[55] Ros, A.: One-sided complete stable minimal surfaces. J. Differential Geom., **74** (n.1) (2006), 69–92.

[56] Ros, A.: Stability of minimal and constant mean curvature surfaces with free boundary. Mat. Contemp., **35** (2008), 221–240.

[57] Ros, A., Souam, R.: On stability of capillary surfaces in a ball. Pac. J. Math., **178** (2) (1997), 345–361.

[58] Ros, A., Vergasta, E.: Stability for hypersurfaces of constant mean curvature with free boundary. Geometriae Dedicata, **56** (1995), 19–33.

[59] Ruiz-Hernández, G.: Translation hypersurfaces whose curvature depends partially on its variables, J. Math. Anal. Appl., **497** (2021), 124913.

[60] Sá Earp, R., Toubiana, E. Screw motion surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Illinois J. Math. **49**(2005), 1323-1362.

[61] Scherk, H.F.: Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen. J. Reine Agnew. Math. **13**(1835), 185-208.

[62] Seo, K.: Translation Hypersurfaces with Constant Curvature in Space Forms, Osaka J. Math., **50** (2013), 631-641.

[63] Souza, M.A.: Minimal Surfaces in Conformally Flat Spaces and Finsler Sapces type Randers Hyperbolic. Doctoral thesis, Institute of Mathematics and Statistics, Federal University of Goiás,(2020).

[64] Wang, G., Xia, C.: Uniqueness of stable capillary hypersurfaces in a ball. Mathematische Annalen, **374** (2019), 1845–1882.

[65] Xia, C.: Rigidity of Compact Manifolds with Boundary and Nonnegative Ricci Curvature. Proc. Amer. Math. Soc., **125** (n.6) (1997), 1801–1806.