



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ANTONIO NILSON ALVES SILVA JÚNIOR

HIPERSUPERFÍCIES TRANSLACIONAIS NO ESPAÇO EUCLIDIANO

Teresina - 2021

Antonio Nilson Alves Silva Júnior

Dissertação de Mestrado:

**HIPERSUPERFÍCIES TRANSLACIONAIS NO ESPAÇO
EUCLIDIANO**

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Hipersuperfícies Translacionais no Espaço Euclidiano

Antonio Nilson Alves Silva Júnior

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 25 de Fevereiro de 2021.

Banca Examinadora:

Paulo Alexandre Araújo Sousa

Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa - Orientador

Barnabé Pessoa Lima

Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima - UFPI

Newton Luís Santos

Prof. Dr. Newton Luís Santos - UFPI

Juscelino Pereira Silva

Prof. Dr. Juscelino Pereira Silva - UFCA

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial de Ciências da Natureza – CCN
Serviço de Processamento Técnico

S586h Silva Júnior, Antonio Nilson Alves.
Hipersuperfícies translacionais no espaço Euclidiano /
Antonio Nilson Alves Silva Júnior. – 2021.
45 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí,
Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em
Matemática, 2021.

“Orientador: Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa.”

1. Curvatura. 2. Gráfico Translacional. 3. Curvatura de
Gauss-Kronecker. 4. Espaço Euclidiano. I. Sousa, Paulo
Alexandre Araújo. II. Título.

CDD 516.15

Agradecimentos

Agadeço primeiramente a Deus por ter permitido tudo acontecer, por ter me dado forças em todos os momentos de desânimo, por colocar as pessoas certas na minha vida, por me fazer continuar a estudar, trabalhar e não desistir. Sem dúvidas tudo que aconteceu e está acontecendo é graças a Ele.

Agradeço muito meus pais Antonio Nilson e Maria das Graças, e meu irmão Caio, pelo apoio e incentivo. Meus pais sempre me educaram, me incentivaram estudar e seguir meu próprio caminho.

Agradeço a todos os familiares e amigos que ajudaram de alguma forma e que torceram pelo sucesso. Em especial meu grande amigo Valdinar, por ter me apoiado principalmente em momentos que foram difíceis para mim. Também quero demonstrar minha gratidão aos meus padrinhos Pedro e Islânia, e meus Tios, Tia Gorete e Tio Liar, pelo exemplo, apoio e incentivo.

Agradeço a todos os professores que contribuíram para minha formação desde o início no maternal, jardim, alfabetização até a conclusão do mestrado.

Agradeço aos amigos e colegas da pós-graduação pelos momentos de ajuda e apoio.

Agradeço ao Paulo Alexandre por ter me orientado no mestrado e também na graduação durante um ano no programa de iniciação científica, e aos professores Juscelino, Barnabé e Newton por terem aceito fazer parte da banca.

Agradeço a UFPI pelo auxílio estudantil BAE por dois anos durante a graduação.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

“O vento sopra onde quer, você ouve o barulho, mas não sabe de onde ele vem, nem para onde vai. Acontece a mesma coisa com quem nasceu do Espírito.”

Jo 3,8.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é demonstrar alguns resultados de rigidez e classificação para hipersuperfícies translacionais e hipersuperfícies translacionais generalizadas, com curvatura média ou curvatura de Gauss - Kronecker constante, no espaço Euclidiano.

Palavras-chave: Hipersuperfície translacional. Hipersuperfície translacional generalizado. Curvatura média. Curvatura de Gauss - Kronecker.

Abstract

The main objective of this work is to demonstrate some results of rigidity and classification for translational hypersurfaces and generalized translational hypersurfaces, with average curvature or constant Gauss - Kronecker curvature, in the Euclidean space.

Key-words: Translational hypersurface. Generalized translational hypersurface. Mean curvature. Gauss - Kronecker curvature.

Sumário

Resumo	5
Abstract	6
1 Noções Preliminares	4
1.1 Elementos da Teoria de Variedades Diferenciáveis	4
1.2 Elementos da Teoria de Hipersuperfícies no Espaço Euclidiano	10
1.2.1 A Aplicação de Weingarten	11
1.2.2 Curvatura de Hipersuperfícies	13
2 Gráficos Translacionais	18
2.1 Curvatura de gráficos translacionais	18
2.2 Resultados no \mathbb{R}^3	22
2.3 Resultados no Espaço Euclidiano	25
Referências Bibliográficas	36

Introdução

O interesse em estudar superfícies mínimas remota ao século XVIII, com as obras seminais de Euler, Lagrange e Meusnier. Eles também deram os primeiros exemplos não triviais de tais superfícies, além dos planos: os catenóides (as únicas superfícies mínimas de revolução) e os helicoides (as únicas superfícies mínimas reguladas).

Outra importante família de exemplos, as superfícies de Scherk, apareceu pela primeira vez em um artigo publicado por Scherk em 1835. No mesmo artigo, ele caracterizou essa família como as únicas superfícies mínimas (além dos planos) da forma $z = f(x) + g(y)$ para f e g funções suaves de uma única variável. Estas superfícies são chamadas de superfícies de Scherk e são dados por

$$z = \frac{1}{a} \log \left| \frac{\cos ay}{\cos ax} \right|,$$

onde a é uma constante não nula.

As superfícies de Scherk podem ser expressas como a soma de duas curvas planas, a saber, $\alpha(x) = (x, 0, f(x))$ e $\beta(y) = (0, y, g(y))$. Outra superfície mínima que pode ser escrita como a soma de duas curvas, que já era conhecida por Lie, é o helicóide

$$\psi(u, v) = (\cos v \cdot \cos u, \cos v \cdot \sin u, u)$$

que se obtém como a soma de uma hélice circular α consigo mesma. De fato, considere a hélice $\alpha(s) = \frac{1}{2}(\cos s, \sin s, s)$, a mudança de coordenadas $u = \frac{(s+t)}{2}$ e $v = \frac{(s-t)}{2}$ dá

$$\alpha(s) + \alpha(t) = \psi(u, v).$$

Em geral, uma superfície $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ é chamada de superfície translacional se puder ser expressa em uma forma paramétrica como

$$\psi(u, v) = \alpha(u) + \beta(v),$$

onde $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\beta : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ são duas curvas regulares com $\alpha'(s) \times \beta'(t) \neq 0$. Um caso particular das superfícies translacionais são os gráficos translacionais. No espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 , uma superfície M^2 é chamada de **Gráfico Translacional** se for dada

como imagem de uma imersão $\Psi : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ da forma

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, z(\mathbf{x}, \mathbf{y})),$$

onde $z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{y})$ para f e g funções suaves de uma única variável, isto é, Ψ é obtida como uma translação euclidiana da curva suave, $\alpha(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, 0, f(\mathbf{x}))$, pontualmente ao longo da curva $\beta(\mathbf{y}) = (0, \mathbf{y}, g(\mathbf{y}))$.

Mais recentemente, vários autores têm demonstrado interesse em estudar gráficos translacionais. Por exemplo, Liu [8] obteve uma classificação para os gráficos translacionais com curvatura média constante não nula ou Curvatura Gaussiana constante no espaço Euclidiano de dimensão 3.

Teorema 0.1 (Liu,1999). *Seja $M_f^2 \subset \mathbb{R}^3$ um gráfico translacional com curvatura Gaussiana constante K_f . Então M_f é congruente a um cilindro, assim $K_f \equiv 0$.*

Teorema 0.2 (Liu,1999). *Seja $M_f^2 \subset \mathbb{R}^3$ um gráfico translacional com curvatura média constante $H_f \neq 0$. Então M_f é congruente à superfície dada pelo gráfico de*

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{\sqrt{1 + \mathbf{a}^2}}{2H_f} \sqrt{1 - 4H_f^2 \mathbf{x}^2 + \mathbf{a}\mathbf{y}}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}.$$

Apresentaremos as demonstrações destes resultados na Seção 2.2.

O conceito de gráfico translacional em \mathbb{R}^3 foi generalizado por Dillen, Verstraelen e Zafindratafa [3] para o espaço \mathbb{R}^{n+1} . A saber, dizemos que uma hipersuperfície M^n do espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} é um **Gráfico Translacional** se for o gráfico de uma função dada por $F(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = f_1(\mathbf{x}_1) + \dots + f_n(\mathbf{x}_n)$, onde $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ são coordenadas cartesianas e cada f_i é uma função suave de uma variável real. Em [3], os autores obtiveram uma classificação dos gráficos translacionais mínimos no espaço Euclidiano de dimensão $n + 1$. Em [2], Chen, Sun e Tang classificaram as gráficos translacionais com curvatura média constante não nula, e Seo em [11] classificou os gráficos translacionais com curvatura de Gauss-Kronecker constante em \mathbb{R}^{n+1} . Estes resultados generalizam os teoremas do Liu, e também apresentaremos suas demonstrações.

Agora, seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientada e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são suas curvaturas principais. Para cada $r = 1, \dots, n$ podemos considerar problemas similares, associados ao r -ésimo polinômio simétrico elementar S_r , dado por $S_r = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_r}$. Em particular, S_1 é a curvatura média, S_2 é a curvatura escalar e S_n é a curvatura de Gauss-Kronecker.

Lima, Santos e Sousa [6] apresentaram uma descrição completa de todos os gráficos translacionais com curvatura escalar constante no espaço Euclidiano $(n + 1)$ -dimensional. Lima et al. [5] obtiveram uma classificação completa dos gráficos translacionais com r -curvatura S_r constante no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} , onde $3 \leq r \leq n - 1$.

Recentemente, Moruz e Munteanu [9] definiram uma nova classe de gráficos translacionais em \mathbb{R}^4 , como o gráfico de uma função da forma

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = g(\mathbf{x}) + h(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

No mesmo trabalho, os autores obtiveram uma classificação completa dos gráficos translacionais mínimos. Ressaltamos que os gráficos translacionais, segundo a definição de Moruz e Munteanu, também têm curvatura de Gauss-Kronecker nula.

Este novo conceito foi generalizado para dimensões mais altas por Munteanu, Palmas e Hernández [10], que denominaram de **Gráficos Translacionais Generalizados (GTG)**. Eles estudaram os GTG mínimos. Em particular, obtiveram uma expressão para a curvatura média de um GTG que apresentamos nesta dissertação.

Seguindo essa linha, Aydin [1] propôs o seguinte

Problema. *Classificar os GTG de curvatura de Gauss-Kronecker constante e os GTG de curvatura média constante em \mathbb{R}^{n+1} , sem impor restrições ou restrições não naturais.*

Em [7], os autores responderam à questão proposta por Aydin. A saber,

Teorema 0.3 (Lima, Santos, Sousa, 2019). *Sejam $\phi : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ e $\psi : \mathbf{V} \subset \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis. Considere o gráfico translacional generalizado M_f em \mathbb{R}^{p+q+1} , definido pela função $f : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \phi(\mathbf{u}) + \psi(\mathbf{v})$. Se a curvatura de Gauss-Kronecker K_f de M_f é constante, então $K_f = 0$.*

Teorema 0.4 (Lima, Santos, Sousa, 2019). *Seja f uma função diferenciável como no teorema anterior. Se o gráfico translacional generalizado $M_f \subset \mathbb{R}^{p+q+1}$ tem curvatura média constante $H_f \neq 0$, então $K_f \equiv 0$.*

Finalmente, demonstraremos tais resultados na Seção 2.3.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar elementos da teoria de variedades diferenciáveis e de hipersuperfícies no espaço Euclidiano, que serão necessários para os cálculos das curvaturas média e de Gauss-Kronecker.

1.1 Elementos da Teoria de Variedades Diferenciáveis

Seja M um espaço topológico. Dizemos que M é uma *variedade topológica de dimensão n* ou *n -variedade topológica* se satisfaz as seguintes propriedades:

- M é um *Espaço Hausdorff*: para todo par de pontos distintos $p, q \in M$, existem subconjuntos abertos disjuntos $U, V \subset M$ tais que $p \in U$ e $q \in V$.
- M possui uma base *enumerável*: existe uma base enumerável para a topologia de M .
- M é *localmente Euclidiano*: cada ponto de M tem uma vizinhança que é homeomorfa a um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n .

Uma *carta coordenada* em M é um par (U, φ) , onde U é um subconjunto aberto de M e $\varphi : U \rightarrow \hat{U}$ é um homeomorfismo de U sobre um subconjunto aberto $\hat{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Seja M uma n -variedade topológica. Se (U, φ) e (V, ψ) são duas cartas tais que $U \cap V \neq \emptyset$, a aplicação composta $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ é chamada a *aplicação de transição de φ para ψ* . Duas cartas (U, φ) , (V, ψ) são ditas ser *suavemente compatíveis* se ou $U \cap V = \emptyset$ ou $\psi \circ \varphi^{-1}$ é um difeomorfismo. Definimos um *atlas para M* como uma coleção de cartas cujo os domínios cobrem M . Um atlas \mathcal{A} é chamado um *atlas diferenciável* se quaisquer duas cartas em \mathcal{A} são *suavemente compatíveis*.

Um atlas é chamado *maximal* se não está contido propriamente em nenhum outro atlas diferenciável. Se M é uma variedade topológica, uma *estrutura diferenciável em M* é um atlas maximal diferenciável. Uma *variedade diferenciável* é um par (M, \mathcal{A}) , onde M

é uma variedade topológica e \mathcal{A} é uma estrutura diferenciável. Se M é uma n -variedade diferenciável, qualquer carta (U, φ) contida em um atlas diferenciável maximal é chamada uma *carta diferenciável*.

Proposição 1.1. *Seja M uma variedade topológica. Todo atlas diferenciável \mathcal{A} para M está contido em um único atlas diferenciável maximal chamado a estrutura diferenciável determinada por \mathcal{A} .*

Demonstração. Ver [4], proposição 1.17. □

Exemplo 1.1 (Gráficos de Funções Diferenciáveis). *Se $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ é uma função diferenciável, o gráfico de f , $\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k : x \in U \text{ e } y = f(x)\}$, é uma n -variedade topológica. Seja $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ a projeção sobre o primeiro fator. O atlas formado por uma única carta $\{(\Gamma(f), \varphi)\}$, $\varphi : \Gamma(f) \rightarrow U$ (restrição de π_1 a $\Gamma(f)$) determina a estrutura diferenciável em $\Gamma(f)$.*

Exemplo 1.2 (Subvariedades Abertas). *Seja M^n é uma variedade diferenciável e $U \subseteq M$ um subconjunto aberto. Considere o atlas definido em U por*

$$\mathcal{A}_U = \{\text{cartas diferenciáveis } (V, \varphi) \text{ para } M; V \subseteq U\}.$$

Todo ponto $p \in U$ está contido no domínio de alguma carta (W, φ) para M . Se $V = U \cap W$, então $(V, \varphi|_V)$ é uma carta em \mathcal{A}_U cujo domínio contém p . Além disso, o atlas é diferenciável.

Exemplo 1.3 (Conjuntos de Nível). *Suponha $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e seja $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Para qualquer $c \in \mathbb{R}$, o conjunto $\Phi^{-1}(c)$ é chamado um **conjunto de nível de Φ** . Escolha $c \in \mathbb{R}$ tal que $M = \Phi^{-1}(c) \neq \emptyset$, suponha que $\nabla \Phi(a)$ é não nulo em cada ponto $a \in \Phi^{-1}(c)$, então existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(a) \neq 0$ e pelo Teorema da Função Implícita existe uma vizinhança $a \in V_a \subset M$ que é localmente um gráfico de uma função $\xi_a : U_a \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$. Segue do Exemplo 1.1 que o conjunto $\mathcal{A} = \{(\Gamma(\xi_a), \varphi_a)\}$ constitui um atlas para M e determina uma estrutura diferenciável em M .*

Suponha M uma n -variedade diferenciável e $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, uma função qualquer. Dizemos que f é uma *função diferenciável* se para todo ponto $p \in M$, existe uma carta diferenciável (U, φ) para M cujo domínio contém p e tal que a função composta $f \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável no conjunto aberto $\hat{U} = \varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Sejam M e N variedades diferenciáveis e $F : M \rightarrow N$ uma função qualquer. Dizemos que F é uma *aplicação diferenciável* se para todo ponto $p \in M$ existem cartas diferenciáveis (U, φ) contendo p e (V, ψ) contendo $F(p)$ talque $F(U) \subseteq V$ e a aplicação composta $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável de $\varphi(U)$ para $\psi(V)$.

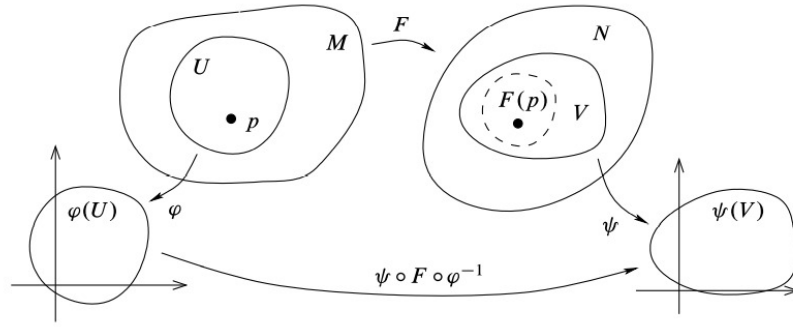


Figura 1.1: Representação coordenada de F .

Um *difeomorfismo de M para N* é uma aplicação F bijetiva diferenciável que tem inversa diferenciável. Dizemos que M e N são *difeomorfas* se existe um difeomorfismo entre elas.

Exemplo 1.4. Se M é uma variedade diferenciável e (U, φ) é uma carta coordenada em M , então $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo.

Uma aplicação linear $\nu : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada uma *derivadação em p* se satisfaz

$$\nu(fg) = f(p)\nu g + g(p)\nu f, \quad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

O conjunto de todas as derivadações de $C^\infty(M)$ em p , denotado por $T_p M$, é um espaço vetorial chamado *espaço tangente a M em p* . Um elemento de $T_p M$ é chamado um *vetor tangente em p* .

O *Fibrado Tangente de M* , denotado por TM , é a união disjunta dos espaços tangentes em todos os pontos de M :

$$TM = \coprod_{p \in M} T_p M.$$

Escrevemos um elemento desta união disjunta como um par ordenado (p, ν) , com $p \in M$ e $\nu \in T_p M$. Prova-se que o fibrado tangente de uma variedade diferenciável M^n é uma variedade diferenciável $2n$ -dimensional. No caso particular que $M = \mathbb{R}^n$, mostra-se que $T\mathbb{R}^n$ é isomorfo a \mathbb{R}^{2n} .

Exemplo 1.5. A aplicação $D_\nu(\mathbf{a}) : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$D_\nu(\mathbf{a})f = D_\nu f(\mathbf{a}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f(\mathbf{a} + t\nu)$$

é uma derivadação.

Se $\nu = \sum v_i e_i$, em termos da base canônica, então $D_\nu(\mathbf{a})f$ pode ser escrita como

$$D_\nu(\mathbf{a})f = \sum v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}).$$

Proposição 1.2. Denotemos por \mathbb{R}_a^n é o espaço dos vetores de \mathbb{R}^n que tem origem no ponto \mathbf{a} . A aplicação $\mathbf{v}_a \mapsto D_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})$ é um isomorfismo de \mathbb{R}_a^n em $T_a\mathbb{R}^n$.

Corolário 1.1. Para qualquer $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, as n derivações

$$\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_{\mathbf{a}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_{\mathbf{a}} \text{ definidas por } \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\mathbf{a}} f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{a})$$

formam uma base para $T_a\mathbb{R}^n$. Segue que $T_a\mathbb{R}^n$ tem dimensão n .

Se M e N são variedades diferenciáveis e $F : M \rightarrow N$ é uma função diferenciável, para cada $\mathbf{p} \in M$ é possível definir a aplicação

$$dF_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}M \rightarrow T_{F(\mathbf{p})}N,$$

chamada *diferencial de F em \mathbf{p}* . A saber, dado $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}M$ define-se $dF_{\mathbf{p}}(\mathbf{v})$ como a derivação em $F(\mathbf{p})$ que age em $f \in C^\infty(N)$ pela regra

$$dF_{\mathbf{p}}(\mathbf{v})f = \mathbf{v}(f \circ F).$$

Proposição 1.3 (*Dimensão do Espaço Tangente*). Se M^n é uma variedade diferenciável, então para cada $\mathbf{p} \in M$, o espaço tangente $T_{\mathbf{p}}M$ é um espaço vetorial de dimensão n .

Demonstração. Ver [4], proposição 3.10. □

Sejam M uma variedade diferenciável e (U, φ) uma carta diferenciável. Pelo Exemplo 1.4, φ é em particular um difeomorfismo sobre $\varphi(U)$. Logo $d\varphi_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}M \rightarrow T_{\varphi(\mathbf{p})}\mathbb{R}^n$ é um isomorfismo. Pelo Corolário 1.1, as derivações $\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_{\varphi(\mathbf{p})}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_{\varphi(\mathbf{p})}$ formam uma base de $T_{\varphi(\mathbf{p})}\mathbb{R}^n$. Portanto as preimagens $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\mathbf{p}} = d(\varphi^{-1})_{\varphi(\mathbf{p})} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(\mathbf{p})} \right)$ destes vetores formam uma base para $T_{\mathbf{p}}M$. No caso especial em \mathbb{R}^n , os vetores $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\mathbf{p}}$ são literalmente os operadores derivada parcial.

Se M é uma variedade, definimos uma *curva em M* como uma aplicação contínua $\gamma : J \rightarrow M$, onde $J \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo aberto. Agora seja M uma variedade diferenciável. Dado uma curva diferenciável em $t_0 \in J$, definimos o *vetor velocidade de γ em t_0* denotado por $\gamma'(t_0)$, como o vetor

$$\gamma'(t_0) = d\gamma \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \right) \in T_{\gamma(t_0)}M.$$

Proposição 1.4. Seja M uma variedade diferenciável e $\mathbf{p} \in M$. Todo $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}M$ é a velocidade de alguma curva diferenciável em M .

Sejam M e N variedades diferenciáveis. Dado uma aplicação diferenciável $F : M \rightarrow N$ e um ponto $\mathbf{p} \in M$, definimos o *posto de f em \mathbf{p}* como o posto da aplicação linear

$dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$, que é o posto da matriz jacobiana de F . Se F tem o mesmo posto r em todo ponto, dizemos que tem *posto constante* e escrevemos $\text{posto } F = r$.

Como o posto de uma aplicação linear nunca é maior que a dimensão do domínio ou contradomínio, obtemos que $\text{posto}(F) \leq \min\{\dim M, \dim N\}$. Quando ocorre a igualdade dizemos que F tem *posto máximo em p* , e se F tem posto máximo em todo ponto dizemos que F tem *posto máximo*.

As aplicações de posto constante mais importantes são as de posto máximo. Uma aplicação $F : M \rightarrow N$ é uma *submersão diferenciável* se a diferencial é sobrejetiva em cada ponto (ou equivalentemente $\text{posto}(F) = \dim M$). Uma aplicação $F : M \rightarrow N$ é uma *imersão diferenciável* se a aplicação $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ é injetiva em cada ponto (ou equivalentemente $\text{posto}(F) = \dim N$).

Exemplo 1.6. Se $\gamma : J \rightarrow M$ é uma curva diferenciável em uma variedade diferenciável M , então γ é uma imersão se, e somente se, $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in J$.

Um *mergulho diferenciável de M em N* é uma imersão diferenciável que também é um mergulho topológico, isto é, um homeomorfismo sobre $F(M) \subseteq N$ na topologia de subespaço. Uma *subvariedade mergulhada de M* é um subconjunto $S \subseteq M$ que é uma variedade com a topologia de subespaço, provida com uma estrutura diferenciável na qual a aplicação inclusão $\iota : S \hookrightarrow M$ é um mergulho diferenciável. Se S é uma subvariedade mergulhada de M , a diferença $\dim M - \dim S$ é chamada a *codimensão de S em M* . Uma *hipersuperfície mergulhada* é uma subvariedade mergulhada de codimensão 1.

Proposição 1.5. Sejam M, N variedades diferenciáveis, $U \subseteq M^m$ aberto e $f : U \rightarrow N^n$ diferenciável. Considere $\Gamma(f) \subseteq M \times N$. Então $\Gamma(f)$ é uma subvariedade mergulhada de dimensão m de $M \times N$.

Demonstração. Defina a aplicação $\gamma_f : U \rightarrow M \times N$ por

$$\gamma_f(x) = (x, f(x)).$$

É claro que γ_f é uma aplicação diferenciável cuja imagem é $\Gamma(f)$. Como a projeção $\pi_M : M \times N \rightarrow M$ satisfaz $\pi_M \circ \gamma_f = \text{id}$ para todo $x \in U$, a composição $d(\pi_M)_{(x, f(x))} \circ d(\gamma_f)_x$ é a identidade em $T_x M$ para cada $x \in U$. Portanto, $d(\gamma_f)$ é injetiva, logo γ_f é uma imersão diferenciável. Além disso γ_f é um homeomorfismo sobre a imagem porque $\pi_M|_{\Gamma(f)}$ é uma inversa contínua. Portanto, $\Gamma(f)$ é uma subvariedade mergulhada difeomorfa a U . \square

Se $\Phi : M \rightarrow N$ é uma aplicação diferenciável, um ponto $p \in M$ é dito ser um *ponto regular de Φ* se $d\Phi_p : T_p M \rightarrow T_{\Phi(p)} N$ é sobrejetiva, e um *ponto crítico de Φ* caso contrário. Um ponto $c \in N$ é dito ser *valor regular de Φ* se todo ponto do conjunto de nível $\Phi^{-1}(c)$ é um ponto regular, e *valor crítico* caso contrário.

Uma *subvariedade imersa* de M é um subconjunto $S \subseteq M$ provido com uma topologia com respeito a qual é uma variedade topológica, e uma estrutura diferenciável com respeito a qual a aplicação inclusão $\iota : S \hookrightarrow M$ é uma imersão diferenciável. Toda subvariedade mergulhada é uma subvariedade imersa. Uma *hipersuperfície diferenciável* é uma subvariedade imersa de codimensão 1.

Proposição 1.6 (Imagens de Imersões como Subvariedades). *Suponha que M e N são variedades diferenciáveis e $F : M \rightarrow N$ uma imersão diferenciável injetiva. Seja $S = F(M)$. Então S tem uma única topologia e estrutura diferenciável tal que é uma subvariedade diferenciável de N .*

Demonstração. Ver [4], proposição 5.18. □

Suponha $S \subseteq M$ uma subvariedade imersa de dimensão k . Uma *parametrização local* de S é uma aplicação contínua $X : U \rightarrow M$ cujo domínio é um subconjunto aberto $U \subseteq \mathbb{R}^k$, cuja imagem é um subconjunto aberto de S e que considerando como uma aplicação em S , é um homeomorfismo sobre a imagem. É chamado uma *parametrização local diferenciável* se é um difeomorfismo sobre sua imagem. Se a imagem de X é toda S , é chamada uma *parametrização global*.

Exemplo 1.7 (Parametrizações de Gráficos). *Suponha $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma aplicação diferenciável. A aplicação $\gamma_f : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ dada por $\gamma_f(u) = (u, f(u))$ é uma parametrização global diferenciável de $\Gamma(f)$.*

Pela proposição 1.5, γ_f é uma imersão.

Um *campo de vetores diferenciável* é uma aplicação diferenciável $X : M \rightarrow TM$ tal que $X(p) = X_p \in T_p M$ para cada $p \in M$. Para qualquer carta diferenciável (U, φ) podemos escrever X_p em termos da base coordenada de vetores:

$$X_p = \sum_{i=1}^n X^i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p.$$

Isto define n funções $X^i : U \rightarrow \mathbb{R}$, chamadas as funções componentes de X na carta dada. Na proposição abaixo apresentamos um critério para a diferenciabilidade de um campo de vetores em função de suas funções componentes.

Proposição 1.7 (Critério de Diferenciabilidade para Campos de Vetores). *Seja M uma variedade diferenciável e $X : M \rightarrow TM$ um campo de vetores. Se (U, φ) é qualquer carta coordenada diferenciável em M , então a restrição de X a U é diferenciável se, e somente se, as funções componentes com respeito a esta carta são diferenciáveis.*

1.2 Elementos da Teoria de Hipersuperfícies no Espaço Euclidiano

A partir de agora todas as variedades consideradas serão subconjuntos do espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} .

Associado a cada função diferenciável $f : \mathbf{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ temos um campo de vetores diferenciável chamado o *gradiente* ∇f de f , definido por

$$\nabla f(\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(\mathbf{p}) \right).$$

Vimos no Exemplo 1.3 que os conjuntos de nível de funções $f : \mathbf{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são hipersuperfícies de \mathbb{R}^{n+1} . O campo gradiente de f desempenha um importante papel na obtenção do espaço tangente a cada ponto de um conjunto de nível, conforme enunciamos no seguinte

Teorema 1.1. *Seja \mathbf{U} um conjunto aberto em \mathbb{R}^{n+1} e seja $f : \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$ é valor regular de f e $\mathbf{p} \in \mathbf{U}$ é tal que $\mathbf{c} = f(\mathbf{p})$, então o conjunto de todos os vetores tangentes a $f^{-1}(\mathbf{c})$ em \mathbf{p} é igual a $[\nabla f]^\top$.*

Toda hipersuperfície do espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} é localmente gráfico de alguma função $\xi : \mathbf{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Além disso, podemos expressar gráficos como conjuntos de nível.

Exemplo 1.8. *Seja $f : \mathbf{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Vimos que o gráfico de f*

$$\Gamma(f) = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\}$$

é uma hipersuperfície em \mathbb{R}^{n+1} . Agora observe que $\Gamma(f) = \mathbf{g}^{-1}(0)$, onde a função \mathbf{g} é dada como $\mathbf{g}(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1} - f(x_1, \dots, x_n)$ e $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{p}) = (-\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}, 1)$ nunca se anula.

Se um campo de vetores em uma hipersuperfície M é tal que $X(\mathbf{p})$ é tangente para cada $\mathbf{p} \in M$, é chamado *campo de vetores tangente* em M . Se $X(\mathbf{p})$ é ortogonal a M para cada $\mathbf{p} \in M$, é chamado *campo de vetores normal* em M .

Um subconjunto $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ é dito ser *conexo por caminhos* se para cada par de pontos $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in M$ existe uma aplicação contínua $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ tal que $\alpha(a) = \mathbf{p}$ e $\alpha(b) = \mathbf{q}$, ou seja, α liga os pontos \mathbf{p} e \mathbf{q} .

Teorema 1.2. *Seja $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície conexa. Então existe em M exatamente dois campos de vetores normais unitários N_1 e N_2 , tal que $N_2(\mathbf{p}) = -N_1(\mathbf{p})$ para todo $\mathbf{p} \in M$.*

A escolha de um campo de vetores normal unitário diferenciável em uma hipersuperfície $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ é chamado uma *orientação*. Uma hipersuperfície junto com a escolha de

uma orientação é chamada uma hipersuperfície *orientada*. A cada hipersuperfície orientada M está associada uma aplicação $N : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ tal que $|N(\mathbf{p})| = 1$ para todo $\mathbf{p} \in M$, chamada a *Aplicação de Gauss*. A imagem da aplicação de Gauss

$$N(M) = \{\mathbf{q} \in \mathbb{S}^n : \mathbf{q} = N(\mathbf{p}) \text{ para algum } \mathbf{p} \in M\},$$

é chamada a *imagem esférica* da hipersuperfície orientada M .

1.2.1 A Aplicação de Weingarten

Considere o campo normal N definido sobre uma hipersuperfície $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Para $\mathbf{p} \in M$ e $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}M$, a derivada direcional de N no ponto \mathbf{p} na direção de \mathbf{v} , denotada por $\nabla_{\mathbf{v}}N(\mathbf{p})$, é ortogonal a $N(\mathbf{p})$. Com efeito,

$$0 = \nabla_{\mathbf{v}}(1) = \nabla_{\mathbf{v}}(N \cdot N)(\mathbf{p}) = \nabla_{\mathbf{v}}N(\mathbf{p}) \cdot N(\mathbf{p}) + N(\mathbf{p}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}}N(\mathbf{p}) = 2 \cdot \nabla_{\mathbf{v}}N(\mathbf{p}) \cdot N(\mathbf{p}).$$

Com isto, a aplicação linear $L_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}M \rightarrow T_{\mathbf{p}}M$ dada por $L_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = -\nabla_{\mathbf{v}}N(\mathbf{p})$ fica bem definida. A aplicação $L_{\mathbf{p}}$ é denominada *aplicação de Weingarten* de M em \mathbf{p} , ou *Operador Shape* de M em \mathbf{p} . A seguir, apresentamos um resultado que mostra a matriz que representa $L_{\mathbf{p}}$ no caso que a hipersuperfície é um conjunto de nível.

Proposição 1.8. *Seja $M = f^{-1}(c)$ uma hipersuperfície em \mathbb{R}^{n+1} , orientada por $\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$. Suponha que existe $\mathbf{p} \in M$ tal que $\frac{\nabla f(\mathbf{p})}{|\nabla f(\mathbf{p})|} = \mathbf{e}_{n+1}$, onde $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{n+1}\}$ é base canônica de \mathbb{R}^{n+1} . Então a matriz de $L_{\mathbf{p}}$ com relação a base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset T_{\mathbf{p}}M$ é*

$$\left(-\frac{1}{|\nabla f|} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{p}) \right). \quad (1.1)$$

Demonstração. Considere $N = (N_1, \dots, N_n, N_{n+1}) = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$, donde obtemos $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p}) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{p}) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(\mathbf{p}) = |\nabla f(\mathbf{p})|$. Para obtermos a matriz de $L_{\mathbf{p}}$ usaremos que

$$L_{\mathbf{p}}(\mathbf{e}_i) = -(\nabla_{\mathbf{e}_i}N_1, \dots, \nabla_{\mathbf{e}_i}N_n, \nabla_{\mathbf{e}_i}N_{n+1})(\mathbf{p}),$$

e vamos calcular $\nabla_{\mathbf{e}_i}N_j(\mathbf{p})$ para $i = 1, \dots, n$. Temos,

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{e}_i}N_j(\mathbf{p}) &= \frac{\partial N_j}{\partial x_i}(\mathbf{p}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}}{|\nabla f|} \right)(\mathbf{p}) \\ &= \frac{1}{|\nabla f(\mathbf{p})|} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{p}) + \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{p}) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{|\nabla f|} \right)(\mathbf{p}) \\ &= \frac{1}{|\nabla f(\mathbf{p})|} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

Da igualdade obtida concluímos o resultado. □

No teorema a seguir apresentamos uma importante propriedade do operador de Weingarten.

Teorema 1.3. *A aplicação de Weingarten L_p é auto-adjunta, isto é,*

$$L_p(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot L_p(\mathbf{w})$$

para quaisquer $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p M$.

Demonstração. Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície. É sabido que localmente podemos expressar M como conjunto de nível. Assim, dado um ponto $\mathbf{q} \in M$ existe uma vizinhança $U_q \subset M$ e uma função $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $U_q = f^{-1}(c)$ para algum valor regular $c \in \mathbb{R}$. Desta forma, o campo normal sobre $U_q \subset M$ é $\mathbf{N} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$. Então, para todo $\mathbf{p} \in U_q$ vale

$$\begin{aligned} L_p(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} &= -\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{N}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{w} \\ &= -\nabla_{\mathbf{v}} \left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right) (\mathbf{p}) \cdot \mathbf{w} \\ &= -\left[\nabla_{\mathbf{v}} \left(\frac{1}{|\nabla f|} \right) \nabla f(\mathbf{p}) + \frac{1}{|\nabla f(\mathbf{p})|} \nabla_{\mathbf{v}}(\nabla f)(\mathbf{p}) \right] \cdot \mathbf{w} \\ &= -\nabla_{\mathbf{v}} \left(\frac{1}{|\nabla f|} \right) (\mathbf{p}) \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{w} - \frac{1}{|\nabla f(\mathbf{p})|} \nabla_{\mathbf{v}}(\nabla f)(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Desde que $\nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{w} = 0$, o primeiro termo se anula. Portanto

$$\begin{aligned} L_p(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} &= -\frac{1}{|\nabla f(\mathbf{p})|} \nabla_{\mathbf{v}}(\nabla f)(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{w} \\ &= -\frac{1}{|\nabla f(\mathbf{p})|} \left(\nabla_{\mathbf{v}} \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \nabla_{\mathbf{v}} \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} \right) (\mathbf{p}) \cdot \mathbf{w} \\ &= -\frac{1}{|\nabla f(\mathbf{p})|} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1} (\mathbf{p}) v_i, \dots, \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_{n+1}} (\mathbf{p}) v_i \right) \cdot \mathbf{w} \\ &= -\frac{1}{|\nabla f(\mathbf{p})|} \sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\mathbf{p}) v_i w_j, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{n+1})$ e $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{n+1})$. O mesmo cálculo trocando \mathbf{w} e \mathbf{v} mostra que

$$L_p(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{|\nabla f(\mathbf{p})|} \sum_{i,j=1}^{n+1} \sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\mathbf{p}) w_i v_j.$$

Desde que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\mathbf{p}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (\mathbf{p})$, concluímos que $L_p(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = L_p(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}$.

□

Por L_p ser uma aplicação linear auto-adjunta, existe uma base ortonormal de autovetores para $T_p M$. Seja $\mathbf{v} \in T_p M$ tal que $\|\mathbf{v}\| = 1$. O número $k(\mathbf{v}) = L_p(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$ é

chamado *curvatura normal* de M em \mathbf{p} na direção de \mathbf{v} . Os autovalores $k_1(\mathbf{p}), \dots, k_n(\mathbf{p})$ da aplicação de Weingarten $L_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}M \rightarrow T_{\mathbf{p}}M$ são chamados *curvaturas principais* de M em \mathbf{p} , e os autovetores unitários são chamados *direções principais*.

Associado a transformação linear auto-adjunta $L_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}M \rightarrow T_{\mathbf{p}}M$, está uma função $\mathcal{L}_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\mathcal{L}_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = L_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}.$$

A função $\mathcal{L}_{\mathbf{p}}$ é a *forma quadrática* associada com $L_{\mathbf{p}}$. A forma quadrática associada com a aplicação de Weingarten $L_{\mathbf{p}}$ em um ponto \mathbf{p} de uma hipersuperfície orientada $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ é chamada *segunda forma fundamental* de M em \mathbf{p} . A *primeira forma fundamental* de M em \mathbf{p} é a forma quadrática $\mathcal{F}_{\mathbf{p}}$ associada com a aplicação identidade em $T_{\mathbf{p}}M$. Portanto $\mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$, para todo $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}M$.

1.2.2 Curvatura de Hipersuperfícies

O determinante $K(\mathbf{p}) = \det L_{\mathbf{p}}$ é chamado a *Curvatura de Gauss-Kronecker* de M em \mathbf{p} . A curvatura média de M em \mathbf{p} é definida como $H(\mathbf{p}) = \frac{1}{n} \operatorname{tr}(L_{\mathbf{p}})$.

Teorema 1.4. *Seja M uma hipersuperfície orientada em \mathbb{R}^{n+1} e $\mathbf{p} \in M$. Seja X qualquer campo normal não-nulo em M tal que $\mathbf{N} = \frac{X}{|X|}$ e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ uma base qualquer em $T_{\mathbf{p}}M$. Então*

$$K(\mathbf{p}) = (-1)^n \frac{\det A}{|X(\mathbf{p})|^n \det B} \quad (1.2)$$

onde $A = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{v}_1} X \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{v}_n} X \\ X(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \\ X(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$, e cada vetor representa uma linha da matriz.

Demonstração. Desde que $X = |X| \cdot \mathbf{N}$,

$$\begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{v}_1} X \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{v}_n} X \\ X(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{v}_1} (|X|) \mathbf{N}(\mathbf{p}) + (|X(\mathbf{p})|) \nabla_{\mathbf{v}_1} \mathbf{N} \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{v}_n} (|X|) \mathbf{N}(\mathbf{p}) + (|X(\mathbf{p})|) \nabla_{\mathbf{v}_n} \mathbf{N} \\ |X(\mathbf{p})| \mathbf{N}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}.$$

Denotaremos por $\mathbf{l}_i = \nabla_{\mathbf{v}_i} (|X|) \mathbf{N}(\mathbf{p}) + (|X(\mathbf{p})|) \nabla_{\mathbf{v}_i} \mathbf{N}$ a i -ésima linha da matriz acima, onde $i = 1, \dots, n$, e $\mathbf{l}_{n+1} = |X(\mathbf{p})| \mathbf{N}(\mathbf{p})$. Trocando cada linha \mathbf{l}_i por $\mathbf{l}_i - \frac{\nabla_{\mathbf{v}_i} (|X|)}{|X(\mathbf{p})|} \mathbf{l}_{n+1}$

obtemos uma nova matriz que possui o mesmo determinante. Daí,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} |X(\mathbf{p})|\nabla_{v_1} N \\ \vdots \\ |X(\mathbf{p})|\nabla_{v_n} N \\ |X(\mathbf{p})|N(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = |X(\mathbf{p})|^n \det \begin{pmatrix} \nabla_{v_1} N \\ \vdots \\ \nabla_{v_n} N \\ |X(\mathbf{p})|N(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \\ &= (-1)^n |X(\mathbf{p})|^n \det \begin{pmatrix} L_p(v_1) \\ \vdots \\ L_p(v_n) \\ X(\mathbf{p}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{pmatrix} L_p(v_1) \\ \vdots \\ L_p(v_n) \\ X(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & [L_p]^\top & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \\ X(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

onde $[L_p]$ é a matriz de L_p , com respeito a base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de $T_p M$ e $[L_p]^\top$ sua transposta. Portanto,

$$\det \begin{pmatrix} L_p(v_1) \\ \vdots \\ L_p(v_n) \\ X(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \det[L_p] \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \\ X(\mathbf{p}) \end{pmatrix}.$$

Daí concluímos que,

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^n |X(\mathbf{p})|^n \det[L_p] \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \\ X(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \\ &= (-1)^n |X(\mathbf{p})|^n \det[L_p] \det B \\ &= (-1)^n |X(\mathbf{p})|^n K(\mathbf{p}) \det B. \end{aligned}$$

Isto completa a demonstração. □

Exemplo 1.9. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. A curvatura de Gauss-Kronecker K_f , do gráfico de f denotado por $\Gamma(f)$, é dada pela fórmula*

$$K_f = \frac{\det(\text{Hess } f)}{(1 + |\nabla f|^2)^{\frac{n+2}{2}}} \quad (1.3)$$

onde a orientação \mathbf{N} é escolhida tal que $\mathbf{N}(\mathbf{p}) \cdot (0, \dots, 0, 1) > 0$, para todo $\mathbf{p} \in \mathbf{U}$.

Demonstração. Defina $\mathbf{g} : \mathbf{U} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $\mathbf{g}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = x_{n+1} - f(x_1, \dots, x_n)$. Temos $\Gamma(f) = \mathbf{g}^{-1}(0)$, $\nabla \mathbf{g} = (-\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}, 1)$ e $\mathbf{N} = \nabla \mathbf{g}/|\nabla \mathbf{g}|$.

Seja $\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, \dots, 0, \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p})), \dots, \mathbf{v}_n = (0, \dots, 1, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{p}))\}$ uma base de $T_{\mathbf{p}}M$. Veja que

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{v}_1}(\nabla \mathbf{g}) \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{v}_n}(\nabla \mathbf{g}) \\ \nabla \mathbf{g} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & -\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & -\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} & 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & -\frac{\partial f}{\partial x_n} & 1 \end{pmatrix}_{(n+1) \times (n+1)} \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \end{pmatrix} \\ &= (-1)^n \det \text{Hess } f. \end{aligned}$$

Prova-se por indução que

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \\ \nabla \mathbf{g} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ -\frac{\partial f}{\partial x_1} & -\frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & -\frac{\partial f}{\partial x_n} & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 = |\nabla \mathbf{g}|^2. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.4, obtemos que a expressão da curvatura de Gauss-Kronecker do gráfico de f é

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_f &= (-1)^n \frac{(-1)^n \det \text{Hess } f}{|\nabla \mathbf{g}|^n |\nabla \mathbf{g}|^2} \\ &= \frac{\det \text{Hess } f}{(1 + |\nabla f|^2)^{\frac{n+2}{2}}}, \end{aligned}$$

como queríamos. □

Vamos agora a uma expressão da curvatura média H de uma hipersuperfície.

Proposição 1.9. *Seja M^n uma hipersuperfície orientada por \mathbf{N} em \mathbb{R}^{n+1} . Então a*

curvatura média de \mathbf{M} é dada por

$$H(\mathbf{p}) = -\frac{\operatorname{div} \mathbf{N}}{\mathbf{n}}.$$

Demonstração. A prova segue diretamente do seguinte fato:

$$\operatorname{div} \mathbf{N} = \operatorname{tr}\{\mathbf{v} \mapsto \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{N}\} = \operatorname{tr}(-L_{\mathbf{p}}).$$

□

Exemplo 1.10. A curvatura média H_f do gráfico de $f : \mathbf{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, denotado por $\Gamma(f)$, é

$$H_f = \frac{1}{\mathbf{n}} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right). \quad (1.4)$$

Demonstração. Defina $\mathbf{g} : \mathbf{U} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $\mathbf{g}(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1} - f(x_1, \dots, x_n)$. Assim $\Gamma(f) = \mathbf{g}^{-1}(0)$. Temos que $\mathbf{N} = \frac{\nabla \mathbf{g}}{|\nabla \mathbf{g}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}, 1 \right)$, $\Delta \mathbf{g} = -\Delta f$ e $\nabla \mathbf{g} = (-\nabla f, 1)$.

Vamos usar a propriedade do divergente $\operatorname{div}(\mathbf{hX}) = \mathbf{h} \operatorname{div} \nabla f + \langle \nabla \mathbf{h}, \nabla f \rangle$, aplicado a $\mathbf{h} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}$ e $\mathbf{X} = \nabla \mathbf{g}$. Para isto, veja que

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) &= \frac{-\left(\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_j}, \dots, \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_j}, 0 \right)}{(1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{(-\operatorname{Hess} f \cdot \nabla f, 0)}{(1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Por um lado, temos

$$\begin{aligned} H_f &= -\frac{1}{\mathbf{n}} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \mathbf{g}(\mathbf{p})}{|\nabla \mathbf{g}(\mathbf{p})|} \right) \\ &= -\frac{1}{\mathbf{n}} \left[\frac{\operatorname{div} \nabla \mathbf{g}}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} + \left\langle \nabla \left(\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right), \nabla \mathbf{g} \right\rangle \right] \\ &= -\frac{1}{\mathbf{n}} \left[\frac{-\Delta f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} + \left\langle \frac{(-\operatorname{Hess} f \cdot \nabla f, 0)}{(1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}}, (-\nabla f, 1) \right\rangle \right] \\ &= \frac{1}{\mathbf{n}} \left[\frac{\Delta f}{(1 + |\nabla f|^2)} - \left\langle \frac{\operatorname{Hess} f \cdot \nabla f}{(1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}}, \nabla f \right\rangle \right]. \end{aligned}$$

Agora observe que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathbf{n}} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) &= \frac{1}{\mathbf{n}} \left[\frac{\operatorname{div} \nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} + \left\langle \frac{-\operatorname{Hess} f \cdot \nabla f}{(1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}}, \nabla f \right\rangle \right] \\
&= \frac{1}{\mathbf{n}} \left[\frac{\Delta f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} - \left\langle \frac{\operatorname{Hess} f \cdot \nabla f}{(1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}}, \nabla f \right\rangle \right] \\
&= \frac{(1 + |\nabla f|^2) \Delta f - \langle \operatorname{Hess} f \cdot \nabla f, \nabla f \rangle}{\mathbf{n} (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Com isto concluimos a demonstração. □

Corolário 1.2 (da demonstração). *A curvatura média do gráfico de $f : \mathbf{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por*

$$\mathbf{H}_f = \frac{(1 + |\nabla f|^2) \Delta f - \langle \operatorname{Hess} f \cdot \nabla f, \nabla f \rangle}{\mathbf{n} (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{1.5}$$

Capítulo 2

Gráficos Translacionais

Este capítulo ficou dividido em três seções. Primeiro iremos definir os gráficos translacionais (generalizados) no espaço Euclidiano e obter expressões para as curvaturas média e de Gauss-Kronecker destas hipersuperfícies. As demonstrações dos principais resultados serão apresentadas em outras duas seções, uma com os teoremas de Liu em \mathbb{R}^3 e outra com resultados no espaço Euclidiano de dimensão qualquer.

2.1 Curvatura de gráficos translacionais

Abaixo apresentamos as definições de gráficos translacionais e gráficos translacionais generalizados.

Definição 2.1. *Sejam $f_i : J_i \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável de uma variável, J_i um intervalo aberto, para $i = 1, \dots, n$, e considere a função $f : J_1 \times \dots \times J_n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n)$. Uma hipersuperfície M^n no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} , $n \geq 2$, é um **Gráfico Translacional** se é dada como imagem de uma imersão*

$$\Psi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} : \Psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)),$$

onde $U = J_1 \times \dots \times J_n$.

Definição 2.2. *Sejam $\phi : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ e $\psi : V \subset \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis e $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(u, v) = \phi(u) + \psi(v)$. Uma hipersuperfície M^{p+q} no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{p+q+1} é um **Gráfico Translacional Generalizado** se é dada como imagem de uma imersão*

$$\Psi : U \times V \subset \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \mathbb{R}^{p+q+1} : \Psi(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$

Usaremos as notações $u = (x_1, \dots, x_p)$ e $v = (y_1, \dots, y_q)$, e M_ϕ, M_ψ e M_f para denotar os gráficos de ϕ, ψ e f , respectivamente.

No próximo teorema obtemos uma expressão para a curvatura média de gráficos translacionais.

Teorema 2.1. *Sejam $f_i : J_i \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável de uma variável, J_i um intervalo aberto, onde $i = 1, \dots, n$, e $f : J_1 \times \dots \times J_n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n)$. A curvatura média H_f de M_f é dada por*

$$H_f = \frac{\sum_{i=1}^n (1 + \sum_{j \neq i, j=1}^n (f'_j)^2) f''_i}{n (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.1)$$

Demonstração. É fácil verificar que $\nabla f = (f'_1, \dots, f'_n)$, $\text{Hess } f = \text{diag}(f''_1, \dots, f''_n)$ e $\Delta f = \sum_{i=1}^n f''_i$. Aplicamos a matriz hessiana de f no gradiente da f obtemos

$$\text{Hess } f \cdot \nabla f = (f'_1 f''_1, \dots, f'_n f''_n).$$

Agora, fazendo o produto interno do vetor obtido com o gradiente da f temos

$$\langle \text{Hess } f \cdot \nabla f, \nabla f \rangle = \sum_{i=1}^n (f'_i)^2 f''_i.$$

Substituindo esses elementos na expressão da curvatura média do gráfico da f (em (1.5)) concluímos que

$$\begin{aligned} H_f &= \frac{(1 + \sum_{j=1}^n (f'_j)^2) \sum_{i=1}^n f''_i - \sum_{i=1}^n (f'_i)^2 f''_i}{n (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (1 + \sum_{j=1}^n (f'_j)^2) f''_i - \sum_{i=1}^n (f'_i)^2 f''_i}{n (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (1 + \sum_{j=1}^n (f'_j)^2 - (f'_i)^2) f''_i}{n (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (1 + \sum_{j \neq i, j=1}^n (f'_j)^2) f''_i}{n (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

como queríamos. □

Teorema 2.2. *Sejam $f_i : J_i \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável de uma variável, J_i um intervalo aberto, onde $i = 1, \dots, n$, e $f : J_1 \times \dots \times J_n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n)$. A curvatura de Gauss-Kronecker K_f de M_f é dada por*

$$K_f = \frac{f''_1 \cdots f''_n}{(1 + |\nabla f|^2)^{\frac{n+2}{2}}}. \quad (2.2)$$

Demonstração. Note que $\text{Hess } f = \text{diag}(f''_1, \dots, f''_n)$. Segue do Exemplo 1.9 que

$$\begin{aligned} K_f &= \frac{\det(\text{diag}(f''_1, \dots, f''_n))}{(1 + |\nabla f|^2)^{\frac{n+2}{2}}} \\ &= \frac{f''_1 \cdots f''_n}{(1 + |\nabla f|^2)^{\frac{n+2}{2}}}. \end{aligned}$$

□

Muntenu, Palmas e Ruiz-Hernández [10] obtiveram uma expressão para a curvatura Média de um gráfico translacional generalizado. A saber

Teorema 2.3 (Muntenu, Palmas e Ruiz-Hernández, 2016). *Sejam $\phi : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ e $\psi : \mathbf{V} \subset \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis e $f : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \phi(\mathbf{u}) + \psi(\mathbf{v})$. Então a curvatura média H_f de M_f é dada por*

$$H_f = \frac{pW_\phi^3 H_\phi + qW_\psi^3 H_\psi + |\nabla\psi|^2 \Delta\phi + |\nabla\phi|^2 \Delta\psi}{(p+q)W_f^3}, \quad (2.3)$$

onde $W_f = \sqrt{1 + |\nabla\phi|^2 + |\nabla\psi|^2}$, $W_\phi = \sqrt{1 + |\nabla\phi|^2}$ e $W_\psi = \sqrt{1 + |\nabla\psi|^2}$.

Demonstração. Pelo Corolário 1.2 temos as seguintes expressões para as curvaturas média dos gráficos de ϕ e ψ ,

$$pH_\phi W_\phi^3 = W_\phi^2 \Delta\phi - \langle \text{Hess } \phi \cdot \nabla\phi, \nabla\phi \rangle \text{ e } qH_\psi W_\psi^3 = W_\psi^2 \Delta\psi - \langle \text{Hess } \psi \cdot \nabla\psi, \nabla\psi \rangle,$$

respectivamente. Agora veja que $\nabla f = (\nabla\phi, \nabla\psi)$, $|\nabla f|^2 = |\nabla\phi|^2 + |\nabla\psi|^2$ e $\Delta f = \Delta\phi + \Delta\psi$. Além disso,

$$\text{Hess } f = \begin{pmatrix} \text{Hess } \phi & 0 \\ 0 & \text{Hess } \psi \end{pmatrix}.$$

Aplicando $\text{Hess } f$ a ∇f obtemos

$$\begin{pmatrix} \text{Hess } \phi & 0 \\ 0 & \text{Hess } \psi \end{pmatrix} (\nabla\phi, \nabla\psi) = (\text{Hess } \phi \nabla\phi, \text{Hess } \psi \nabla\psi).$$

Agora fazemos o produto interno do vetor acima com ∇f temos

$$\begin{aligned} \langle \text{Hess } f \cdot \nabla f, \nabla f \rangle &= \langle (\text{Hess } \phi \cdot \nabla\phi, \text{Hess } \psi \cdot \nabla\psi), (\nabla\phi, \nabla\psi) \rangle \\ &= \langle \text{Hess } \phi \cdot \nabla\phi, \nabla\phi \rangle + \langle \text{Hess } \psi \cdot \nabla\psi, \nabla\psi \rangle. \end{aligned}$$

Novamente aplicando o Corolário 1.2 concluímos que

$$\begin{aligned}
H_f &= \frac{(1 + |\nabla\phi|^2 + |\nabla\psi|^2) (\Delta\phi + \Delta\psi) - \langle \text{Hess } \phi \cdot \nabla\phi, \nabla\phi \rangle - \langle \text{Hess } \psi \cdot \nabla\psi, \nabla\psi \rangle}{n (1 + |\nabla\phi|^2 + |\nabla\psi|^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{W_\phi^2 \Delta\phi + |\nabla\psi|^2 \Delta\phi + W_\psi^2 \Delta\psi + |\nabla\phi|^2 \Delta\psi - \langle \text{Hess } \phi \cdot \nabla\phi, \nabla\phi \rangle - \langle \text{Hess } \psi \cdot \nabla\psi, \nabla\psi \rangle}{(p+q) (1 + |\nabla\phi|^2 + |\nabla\psi|^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{W_\phi^2 \Delta\phi - \langle \text{Hess } \phi \nabla\phi, \nabla\phi \rangle + W_\psi^2 \Delta\psi - \langle \text{Hess } \psi \nabla\psi, \nabla\psi \rangle + |\nabla\psi|^2 \Delta\phi + |\nabla\phi|^2 \Delta\psi}{(p+q) (1 + |\nabla\phi|^2 + |\nabla\psi|^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{pH_\phi W_\phi^3 + qH_\psi W_\psi^3 + |\nabla\psi|^2 \Delta\phi + |\nabla\phi|^2 \Delta\psi}{(p+q) (1 + |\nabla\phi|^2 + |\nabla\psi|^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

□

Uma expressão para a curvatura de Gauss-Kronecker de um gráfico translacional generalizado foi obtida em [7]. A saber

Teorema 2.4 (Lima, Santos, Sousa, 2019). *Sejam $\phi : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ e $\psi : \mathbf{V} \subset \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$. Defina $f : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \subset \mathbb{R}^{p+q+1} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \phi(\mathbf{u}) + \psi(\mathbf{v})$. Então a curvatura de Gauss-Kronecker K_f de M_f é dada por*

$$K_f = \frac{K_\phi W_\phi^{p+2} K_\psi W_\psi^{q+2}}{W_f^{p+q+2}}, \quad (2.4)$$

onde K_ϕ e K_ψ são as curvaturas de Gauss-Kronecker dos gráficos de ϕ e ψ respectivamente.

Demonstração. Pelo Exemplo 1.9, temos $K_\phi W_\phi^{p+2} = \det \text{Hess } \phi$ e $K_\psi W_\psi^{q+2} = \det \text{Hess } \psi$. Desde que a hessiana de f é dada por

$$\text{Hess } f = \begin{pmatrix} \text{Hess } \phi & 0 \\ 0 & \text{Hess } \psi \end{pmatrix},$$

obtemos que $\det \text{Hess } f = \det (\text{Hess } \phi) \det (\text{Hess } \psi)$. Novamente aplicando o resultado obtido no Exemplo 1.9 temos

$$\begin{aligned}
K_f &= \frac{\det \text{Hess } f}{W_f^{p+q+2}} \\
&= \frac{\det (\text{Hess } \phi) \det (\text{Hess } \psi)}{W_f^{p+q+2}} \\
&= \frac{K_\phi W_\phi^{p+2} K_\psi W_\psi^{q+2}}{W_f^{p+q+2}}.
\end{aligned}$$

□

2.2 Resultados no \mathbb{R}^3

Nesta seção apresentaremos os resultados de Liu para gráficos translacionais em \mathbb{R}^3 .

Teorema 2.5 (Liu, 1999). *Seja M_f um gráfico translacional com curvatura de Gauss constante K_f no espaço Euclidiano de dimensão 3. Então M_f é congruente a um cilindro, assim $K_f \equiv 0$.*

Demonstração. Considere M_f dada pelo gráfico da função $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = g(x) + h(y)$, onde $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis, I e J são intervalos abertos. Por (2.2) a curvatura de Gauss de M_f , para $n = 2$, é dada pela expressão

$$K_f = \frac{g''(x)h''(y)}{(1 + g'(x)^2 + h'(y)^2)^2}.$$

Por hipótese K_f é constante. Derivando K_f com relação a y temos

$$0 = \frac{g''(x)h'''(y)(1 + |\nabla f|^2)^2 - 4g''(x)h'(y)(h''(y))^2(1 + |\nabla f|^2)}{(1 + |\nabla f|^2)^4},$$

logo

$$0 = g''(x)h'''(y)(1 + |\nabla f|^2)^2 - 4g''(x)h'(y)(h''(y))^2(1 + |\nabla f|^2).$$

Dividindo a equação por $1 + |\nabla f|^2$ e colocando $g''(x)$ em evidência obtemos

$$0 = g''(x) [h'''(y)(1 + |\nabla f|^2) - 4h'(y)(h''(y))^2]. \quad (2.5)$$

Suponha $g''(x) \neq 0$. Então temos

$$h'''(y)(1 + |\nabla f|^2) = 4h'(y)(h''(y))^2. \quad (2.6)$$

Da nossa suposição $g'(x)$ é não constante, em particular $g'(x) \neq 0$. Vamos mostrar que $h'''(y) = 0$. Derivamos a equação (2.6) com relação a x obtem-se

$$h'''(y)2g'(x)g''(x) = 0.$$

Portanto $h'''(y) = 0$. Voltando para a equação (2.6) temos

$$h'(y)(h''(y))^2 = 0.$$

Se fosse $h'' \neq 0$ teríamos h' não constante, em particular $h' \neq 0$, um absurdo. Portanto $h'' = 0$. Integrando temos $h(y) = ay + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Considere $\Psi : U = I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3$

dada por $\Psi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ uma parametrização de M_f , então

$$\begin{aligned}\Psi(x, y) &= (x, y, g(x) + ay + b) \\ &= (x, 0, g(x) + b) + y(0, 1, a),\end{aligned}$$

que é um cilindro. Por outro lado, supondo $g''(x) = 0$, g temos que g é linear, assim, concluímos em qualquer caso que M_f é um cilindro e portanto $K_f \equiv 0$. \square

Teorema 2.6 (Liu, 1999). *Seja M_f um gráfico translacional com curvatura média constante $H_f \neq 0$ no espaço Euclidiano de dimensão 3. Então M_f é congruente a superfície dada pelo gráfico de*

$$f(x, y) = -\frac{\sqrt{1+a^2}}{2H_f} \sqrt{1-4H_f^2x^2} + ay, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Considere M_f dada pelo gráfico da função $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = g(x) + h(y)$, onde $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis, I e J são intervalos abertos. Por (2.1) a curvatura média de M_f , para $n = 2$, é dada pela expressão

$$H_f = \frac{g''(x)(1+(h'(y))^2) + h''(y)(1+(g'(x))^2)}{2(1+|\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.7)$$

Derivando H_f com relação a x temos

$$\begin{aligned}0 &= \frac{[g'''(1+(h')^2) + 2h''g'g''] (1+|\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}}{2(1+|\nabla f|^2)^3} \\ &\quad - \frac{[g''(1+(h')^2) + h''(1+(g'(x))^2)] 3(1+|\nabla f|^2)^{\frac{1}{2}}g'g''}{2(1+|\nabla f|^2)^3}.\end{aligned}$$

Reorganizando os termos temos

$$0 = \frac{[g'''(1+(h')^2) + 2h''g'g'']}{2(1+|\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{[g''(1+(h')^2) + h''(1+(g')^2)] 3(1+|\nabla f|^2)^{\frac{1}{2}}g'g''}{2(1+|\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}(1+|\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Substituindo a expressão da curvatura média na segunda parcela da última equação obtemos

$$\frac{3H_f(1+|\nabla f|^2)^{\frac{1}{2}}g'g''}{(1+|\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{[g'''(1+(h')^2) + 2h''g'g'']}{2(1+|\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.8)$$

Multiplicamos a igualdade (2.8) por $2(1+|\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}$ temos

$$6H_f(1+|\nabla f|^2)^{\frac{1}{2}}g'g'' = [g'''(1+(h')^2) + 2h''g'g'']. \quad (2.9)$$

Agora derivamos esta última igualdade com relação a \mathbf{y}

$$6H_f(1 + |\nabla f|^2)^{-\frac{1}{2}}g'g''h'h'' = [g'''2h'h'' + 2h'''g'g''].$$

Daí concluímos que

$$6H_f g'g''h'h'' = 2[g'''h'h'' + h'''g'g''] (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.10)$$

Vamos mostrar que $g'' = 0$ ou $h'' = 0$. Então vamos supor $g'' \neq 0$ e $h'' \neq 0$. Logo f' e g' são não constantes, em particular $f' \neq 0$ e $g' \neq 0$. Portanto $g'g''h'h'' \neq 0$. Dividimos a equação (2.10) por $g'g''h'h''$. Temos

$$3H_f = \left(\frac{g'''}{g'g''} + \frac{h'''}{h'h''} \right) (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.11)$$

Veja que $\frac{h'''}{h'h''}$ depende apenas de \mathbf{y} . Derivando a equação com relação a \mathbf{x} temos

$$0 = \left(\frac{g'''}{g'g''} \right)' (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{g'''}{g'g''} + \frac{h'''}{h'h''} \right) (1 + |\nabla f|^2)^{-\frac{1}{2}}g'g''. \quad (2.12)$$

Multiplicando (2.12) por $1 + |\nabla f|^2$ temos

$$0 = \left(\frac{g'''}{g'g''} \right)' (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{g'''}{g'g''} + \frac{h'''}{h'h''} \right) (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{1}{2}}g'g''.$$

Substituindo a equação (2.11) na última equação temos

$$0 = \left(\frac{g'''}{g'g''} \right)' (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}} + 3H_f g'g''. \quad (2.13)$$

Veja que $g'g''$ depende apenas de \mathbf{x} e H_f é constante. Derivando a última igualdade com relação a \mathbf{y} temos

$$0 = \left(\frac{g'''}{g'g''} \right)' 3(1 + |\nabla f|^2)^{\frac{1}{2}}h'h''.$$

Por hipótese $h'h'' \neq 0$. Logo $\left(\frac{g'''}{g'g''} \right)' = 0$. Voltando para a equação (2.13) temos $3H_f g'g'' = 0$, um absurdo, pois $g'g'' \neq 0$. Donde concluímos que $g'' = 0$ ou $h'' = 0$. Consideremos $h'' = 0$ e vamos supor sem perda de generalidade que $\mathbf{h}(\mathbf{y}) = \mathbf{a}\mathbf{y}$, $\mathbf{a} \neq 0$, pois o caso $\mathbf{a} = 0$ segue de imediato. Substituindo \mathbf{h} na expressão da curvatura média temos

$$H_f = \frac{g''(x)(1 + a^2)}{2((1 + (g'(x))^2 + a^2)^{\frac{3}{2}})}.$$

E portanto temos a seguinte equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$2H_f(1 + (g'(x))^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} = g''(x)(1 + a^2). \quad (2.14)$$

Defina $g(x)$ por

$$g(x) = -\frac{\sqrt{1 + a^2}}{2H_f} \sqrt{1 - 4H_f^2 x^2}.$$

Vamos mostrar que g é solução de (2.14). O lado esquerdo da igualdade (2.14) por ser escrito como

$$\begin{aligned} 2H_f(1 + (g'(x))^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} &= 2H_f \left(1 + a^2 + \left(\sqrt{1 + a^2} 2H_f \frac{x}{\sqrt{1 - 4H_f^2 x^2}} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \\ &= 2H_f \left((1 + a^2) \left(1 + \frac{4H_f^2 x^2}{1 - 4H_f^2 x^2} \right) \right)^{\frac{3}{2}} \\ &= 2H_f \left(\frac{1 + a^2}{1 - 4H_f^2 x^2} \right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$g''(x)(1 + a^2) = \frac{\sqrt{1 + a^2} 2H_f}{(1 - 4H_f^2 x^2)^{\frac{3}{2}}} (1 + a^2).$$

Como queríamos, M_f é o gráfico da função desejada. O Teorema fica demonstrado. \square

Uma consequência desse teorema é que a curvatura de Gauss-Kronecker é nula. De fato, considere

$$\Psi(x, y) = (x, y, -\frac{\sqrt{1 + a^2}}{2H_f} \sqrt{1 - 4H_f^2 x^2} + ay).$$

uma parametrização de M_f . Veja que

$$\Psi(x, y) = (x, 0, -\frac{\sqrt{1 + a^2}}{2H_f} \sqrt{1 - 4H_f^2 x^2}) + y(0, 1, a),$$

que é um cilindro, logo $K_f \equiv 0$.

2.3 Resultados no Espaço Euclidiano

Nesta seção abordaremos os resultados para gráficos translacionais (generalizados) no espaço Euclidiano.

Teorema 2.7 (Chen, Sun e Tang, 2003). *Seja M_f um gráfico translacional no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} com curvatura média $H_f \neq 0$ constante. Então M_f é o gráfico da seguinte função*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = -\frac{\sqrt{c}}{nH_f} [1 - (nH_f x_1 + c_1)^2]^{\frac{1}{2}} + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + c_2,$$

onde $c = 1 + \sum_{i=2}^n a_i^2$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Considere $M_f \subset \mathbb{R}^{n+1}$ como gráfico da função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n)$, onde $f_i : J_i \rightarrow \mathbb{R}$ é suave e J_i é um intervalo aberto, para $i = 1, \dots, n$. Por (2.2) a expressão da curvatura média de um gráfico translacional é dada pela expressão

$$H_f = \frac{\sum_{i=1}^n (1 + \sum_{j \neq i, j=1}^n (f'_j)^2) f''_i}{n (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Derivamos H_f com relação a x_1 . Temos

$$0 = \frac{\left[(f_1)''' \left(1 + \sum_{j \neq 1, j=1}^n (f'_j)^2 \right) + \sum_{i=2}^n f''_i (2f'_1 f''_i) \right] (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}}{n (1 + |\nabla f|^2)^3} - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \left(1 + \sum_{j \neq i, j=1}^n (f'_j)^2 \right) f''_i \right) 3 (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{1}{2}} f'_1 f''_1}{n (1 + |\nabla f|^2)^3}.$$

Reorganizaremos a segunda parcela do lado direito para aparecer a expressão da curvatura média, ou seja,

$$0 = \frac{\left[(f_1)''' \left(1 + \sum_{j \neq 1, j=1}^n (f'_j)^2 \right) + (2f'_1 f''_1) \sum_{i=2}^n f''_i \right]}{n (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \left(1 + \sum_{j \neq i, j=1}^n (f'_j)^2 \right) f''_i \right) 3 (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{1}{2}} f'_1 f''_1}{n (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}} (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Substituindo a expressão da curvatura média na última equação obtemos

$$\frac{3H_f f'_1 f''_1}{(1 + |\nabla f|^2)} = \frac{\left[(f_1)''' \left(1 + \sum_{j \neq 1, j=1}^n (f'_j)^2 \right) + (2f'_1 f''_1) \sum_{i=2}^n f''_i \right]}{n (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Multiplicando a equação por $n (1 + |\nabla f|^2)$ concluímos que

$$3nH_f f'_1 f''_1 = \frac{\left[(f_1)''' \left(1 + \sum_{j \neq 1, j=1}^n (f'_j)^2 \right) + (2f'_1 f''_1) \sum_{i=2}^n f''_i \right]}{(1 + |\nabla f|^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Derivamos agora a última equação com relação a x_2 , e usando que o lado esquerdo da equação não depende de x_2 , obtemos

$$0 = \frac{2 [f_1''' f_2' f_2'' + f_1' f_1'' f_2'''] (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 + |\nabla f|^2)} - \frac{\left[(f_1)''' \left(1 + \sum_{j \neq 1, j=1}^n (f_j')^2 \right) + \sum_{i=2}^n f_i'' (2f_1' f_1'') \right] (1 + |\nabla f|^2)^{-\frac{1}{2}} f_2' f_2''}{(1 + |\nabla f|^2)}.$$

Substituindo a penúltima igualdade no numerador da segunda parcela, na última equação, segue que

$$0 = \frac{2 [f_1''' f_2' f_2'' + f_1' f_1'' f_2'''] (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{1}{2}} - 3n f_1' f_1'' H_f f_2' f_2''}{(1 + |\nabla f|^2)}.$$

Daí concluímos que

$$3n f_1' f_1'' H_f f_2' f_2'' = 2 [f_1''' f_2' f_2'' + f_1' f_1'' f_2'''] (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.15)$$

Vamos mostrar que f_1 ou f_2 é linear, ou seja, $f_1'' = 0$ ou $f_2'' = 0$. Suponha que $f_1'' \neq 0$ e $f_2'' \neq 0$, em particular, $f_1' \neq 0$ e $f_2' \neq 0$. Daí $f_1' f_1'' \neq 0$ e $f_2' f_2'' \neq 0$, e podemos dividir a equação (2.15) por $f_1' f_1'' f_2' f_2''$ obtendo

$$3n H_f = 2 \left[\frac{f_1'''}{f_1' f_1''} + \frac{f_2'''}{f_2' f_2''} \right] (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.16)$$

Veja que $\frac{f_2'''}{f_2' f_2''}$ depende apenas de x_2 . Derivamos (2.16) com relação a x_1 temos

$$0 = 2 \left(\frac{f_1'''}{f_1' f_1''} \right)' (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{1}{2}} + 2 \left[\frac{f_1'''}{f_1' f_1''} + \frac{f_2'''}{f_2' f_2''} \right] (1 + |\nabla f|^2)^{-\frac{1}{2}} f_1' f_1''. \quad (2.17)$$

Multiplicamos (2.17) por $1 + |\nabla f|^2$ obtem-se

$$0 = 2 \left(\frac{f_1'''}{f_1' f_1''} \right)' (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}} + 2 \left[\frac{f_1'''}{f_1' f_1''} + \frac{f_2'''}{f_2' f_2''} \right] (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{1}{2}} f_1' f_1''.$$

Substituindo (2.16) na igualdade obtida temos

$$0 = 2 \left(\frac{f_1'''}{f_1' f_1''} \right)' (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}} + 3n H_f f_1' f_1''. \quad (2.18)$$

Vamos mostrar que $\left(\frac{f_1'''}{f_1' f_1''} \right)' = 0$. Derivando (2.18) com relação a x_2 obtemos

$$0 = 6 \left(\frac{f_1'''}{f_1' f_1''} \right)' (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{1}{2}} f_2' f_2''.$$

Por hipótese $f_2' f_2'' \neq 0$, logo $\left(\frac{f_1'''}{f_1' f_1''}\right)' = 0$. Voltando para (2.18), temos $3nH_f f_1' f_1'' = 0$, um absurdo, já que o lado esquerdo da igualdade é diferente de zero. A contradição veio em supormos que $f_1'' \neq 0$ e $f_2'' \neq 0$, então vamos admitir sem perda de generalidade que $f_1'' \neq 0$ e $f_2'' = 0$. Ressaltamos que o procedimento acima pode ser para a variável x_1 e qualquer outra variável x_i , ao invés de x_2 , donde concluímos que $f_i'' = 0$ para qualquer $i = 2, \dots, n$. Ou seja, $f_i(x_i) = a_i x_i + b_i$ para $i = 2, \dots, n$. Substituindo na expressão da curvatura média obtemos a seguinte equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$nH_f \left(1 + (f_1'(x_1))^2 + \sum_{i=2}^n (a_i)^2 \right)^{\frac{3}{2}} = \left(1 + \sum_{i=2}^n a_i^2 \right) f_1''(x_1). \quad (2.19)$$

Tomemos a função $f_1(x_1) = -\frac{\sqrt{c}}{nH_f} [1 - (nH_f x_1 + c_1)^2]^{\frac{1}{2}}$, $c = 1 + \sum_{i=2}^n a_i^2$ e $c_1 \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que f_1 assim definida é solução da equação diferencial ordinária. Substituindo no lado esquerdo (L_e) da EDO, temos

$$L_e = nH_f \left(c + \left(\sqrt{c}(nH_f x_1 + c_1) [1 - (nH_f x_1 + c_1)^2]^{-\frac{1}{2}} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Seguindo, obtemos

$$L_e = nH_f \left(c + \frac{c(nH_f x_1 + c_1)^2}{1 - (nH_f x_1 + c_1)^2} \right)^{\frac{3}{2}} = nH_f \left(\frac{c}{1 - (nH_f x_1 + c_1)^2} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Agora observe que o lado direito (L_d) da EDO pode ser escrito como

$$L_d = c f_1''(x_1) = c \sqrt{c} nH_f \frac{1}{(1 - (nH_f x_1 + c_1)^2)^{\frac{3}{2}}} = nH_f \left(\frac{c}{1 - (nH_f x_1 + c_1)^2} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Como queríamos, donde concluímos que M_f é gráfico da função

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = -\frac{\sqrt{c}}{nH_f} [1 - (nH_f x_1 + c_1)^2]^{\frac{1}{2}} + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + c_2,$$

onde $c = 1 + \sum_{i=2}^n a_i^2$, $c_1 \in \mathbb{R}$ e $c_2 = b_2 + \dots + b_n$. □

Como consequência, a hipersuperfície obtida tem curvatura de Gauss-Kronecker nula. De fato, tomemos a parametrização

$$\Psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, -\frac{\sqrt{c}}{nH_f} [1 - (nH_f x_1 + c_1)^2]^{\frac{1}{2}} + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + c_2),$$

que pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Psi(x_1, \dots, x_n) = & (x_1, 0, \dots, 0, -\frac{\sqrt{c}}{nH_f} [1 - (nH_f x_1 + c_1)^2]^{\frac{1}{2}} + c_2) \\ & + (0, x_2, \dots, x_n, x_2 a_2 + \dots + x_n a_n) \end{aligned}$$

que é um cilindro. Portanto $K_f \equiv 0$.

Teorema 2.8 (Seo, 2013). *Seja M_f um gráfico translacional com curvatura de Gauss-Kronecker constante K_f em \mathbb{R}^{n+1} . Então M_f é congruente a um cilindro, e portanto $K_f \equiv 0$.*

Demonstração. Considere que M_f seja gráfico da função $f : \mathbf{U} = J_1 \times \dots \times J_n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n)$ onde $f_i : J_i \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e J_i é um intervalo aberto, para $i = 1, \dots, n$. Por (2.2) a curvatura de Gauss-Kronecker de M_f é dada pela expressão

$$K_f = \frac{f_1'' \dots f_n''}{(1 + |\nabla f|^2)^{\frac{n+2}{2}}}.$$

Por hipótese K_f é constante. Derivando a expressão de K_f com relação a x_1 , temos

$$0 = \frac{f_1''' f_2'' \dots f_n'' (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{n+2}{2}} - f_1'' \dots f_n'' (n+2) (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{n}{2}} f_1' f_1''}{(1 + |\nabla f|^2)^{n+2}},$$

logo

$$0 = f_1''' f_2'' \dots f_n'' (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{n+2}{2}} - f_1'' \dots f_n'' (n+2) (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{n}{2}} f_1' f_1''.$$

Dividindo a equação por $(1 + |\nabla f|^2)^{\frac{n}{2}}$ temos

$$0 = f_1''' f_2'' \dots f_n'' (1 + |\nabla f|^2) - f_1'' \dots f_n'' (n+2) f_1' f_1''.$$

Colocando $f_2'' \dots f_n''$ em evidência concluímos que

$$0 = f_2'' \dots f_n'' \left[f_1''' (1 + |\nabla f|^2) - (n+2) f_1' (f_1'')^2 \right].$$

Vamos supor $f_2'' \dots f_n'' \neq 0$, então

$$f_1''' (1 + |\nabla f|^2) = (n+2) f_1' (f_1'')^2. \quad (2.20)$$

Da nossa suposição, $f_i' \neq 0$ para $i = 2, \dots, n$. Vamos mostrar que $f_1''' = 0$. Derivando a equação anterior com relação a x_2 , temos $f_1''' f_2' f_2'' = 0$. Portanto $f_1''' = 0$. Daí $f_1'' = 0$

constante. Voltando para (2.20) temos

$$(\mathbf{n} + 2) f_1' (f_1'')^2 = 0.$$

Portanto $f_1'' = 0$, assim $f_1(x_1) = \mathbf{a}x_1 + \mathbf{b}$, onde $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$. Considere $\Psi : \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma parametrização de M_f , definida por

$$\begin{aligned} \Psi(x_1 \dots x_n) &= (x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \\ &= (x_1, \dots, x_n, f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n)). \end{aligned}$$

Substituindo f_1 temos

$$\begin{aligned} \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (x_1, x_2, \dots, x_n, \mathbf{a}x_1 + \mathbf{b} + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n)) \\ &= (0, x_2, \dots, x_n, \mathbf{b} + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n)) + x_1(1, 0, \dots, 0, \mathbf{a}), \end{aligned}$$

que é um cilindro. Por outro lado, supondo $f_2'' \dots f_n'' = 0$ existe $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ tal que $f_i'' = 0$. Logo $f_i(x_i) = \mathbf{a}x_i + \mathbf{b}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$. Como no caso anterior concluímos que M_f é um cilindro e portanto, $K_f \equiv 0$. □

Antes de darmos continuidade, e apresentarmos as demonstrações dos teoremas que classificam os gráficos translacionais generalizados, vamos enunciar um resultado provado em [10], que será utilizado nas demonstrações.

Lema 2.1 (Muntenu, Palmas e Ruiz-Hernández, 2016). *Seja f uma função eikonal em um domínio de \mathbb{R}^n tal que o Laplaciano é constante. Então f é uma função afim.*

Definição 2.3. *Uma função $f : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita eikonal quando $|\nabla f| = \lambda$, onde λ é constante.*

A seguir apresentamos um resultado sobre hipersuperfícies translacionais generalizadas que são gráficos de funções expressas como soma de duas funções ϕ, ψ eikonais.

Teorema 2.9 (Muntenu, Palmas e Ruiz-Hernández, 2016). *Sejam $\phi : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ e $\psi : \mathbf{V} \subset \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ funções eikonais. Considere o gráfico translacional generalizado $M_f \subseteq \mathbb{R}^{p+q+1}$ definido pela função $f : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \phi(\mathbf{u}) + \psi(\mathbf{v})$. Se a curvatura média H_f é constante, então M_f é um hiperplano e portanto mínima.*

Demonstração. Suponha que $|\nabla \phi| = \lambda$ e $|\nabla \psi| = \mu$ são constantes. Agora veja que $\nabla f = (\nabla \phi, \nabla \psi)$, logo $|\nabla f|^2 = |\nabla \phi|^2 + |\nabla \psi|^2 = \lambda^2 + \mu^2$ e f é eikonal. Também temos

$$\begin{aligned} H_f &= \frac{\operatorname{div} \nabla f}{(\mathbf{p} + \mathbf{q})\sqrt{1 + \lambda^2 + \mu^2}} \\ &= \frac{\Delta f}{(\mathbf{p} + \mathbf{q})\sqrt{1 + \lambda^2 + \mu^2}}. \end{aligned}$$

Como H_f é constante segue que Δf também é constante. Pelo Lema 2.1 temos que f é uma função afim. Logo M_f é um hiperplano e portanto uma hipersuperfície mínima. \square

No que segue demonstraremos mais dois resultados sobre gráficos translacionais generalizados.

Teorema 2.10 (Lima, Santos, Sousa, 2019). *Sejam $\phi : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ e $\psi : V \subset \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis. Considere o gráfico translacional generalizado M_f em \mathbb{R}^{p+q+1} definido pela função $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(u, v) = \phi(u) + \psi(v)$. Se a curvatura de Gauss-Kronecker K_f é constante, então $K_f = 0$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.4 temos

$$K_f = \frac{K_\phi (1 + |\nabla\phi|^2)^{\frac{p+2}{2}} K_\psi (1 + |\psi|^2)^{\frac{q+2}{2}}}{(1 + |\nabla\phi|^2 + |\nabla\psi|^2)^{\frac{p+q+2}{2}}}.$$

Desde que K_f é constante, derivando parcialmente temos

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_i} (K_f) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{K_\phi (1 + |\nabla\phi|^2)^{\frac{p+2}{2}}}{(1 + |\nabla\phi|^2 + |\nabla\psi|^2)^{\frac{p+q+2}{2}}} \right) K_\psi (1 + |\psi|^2)^{\frac{q+2}{2}}$$

para $i = 1, \dots, n$. Supondo por contradição que $K_f \neq 0$, temos $K_\phi \neq 0$ e $K_\psi \neq 0$, implicando que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{K_\phi (1 + |\nabla\phi|^2)^{\frac{p+2}{2}}}{(1 + |\nabla\phi|^2 + |\nabla\psi|^2)^{\frac{p+q+2}{2}}} \right) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Portanto, para cada $i = 1, \dots, n$, temos

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_\phi (1 + |\nabla\phi|^2)^{\frac{p+2}{2}} \right) (1 + |\nabla\phi|^2 + |\nabla\psi|^2)^{\frac{p+q+2}{2}} = \\ & K_\phi (1 + |\nabla\phi|^2)^{\frac{p+2}{2}} (p + q + 2) (1 + |\nabla\phi|^2 + |\nabla\psi|^2)^{\frac{p+q}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i} (|\nabla\phi|^2). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Dividimos (2.21) por $(1 + |\nabla\phi|^2 + |\nabla\psi|^2)^{\frac{p+q}{2}}$. Temos

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_\phi (1 + |\nabla\phi|^2)^{\frac{p+2}{2}} \right) (1 + |\nabla\phi|^2 + |\nabla\psi|^2) = \\ & K_\phi (1 + |\nabla\phi|^2)^{\frac{p+2}{2}} (p + q + 2) \frac{\partial}{\partial x_i} (|\nabla\phi|^2). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Se $\frac{\partial}{\partial x_i} (|\nabla\phi|^2) \equiv 0, \forall i = 1, \dots, n$, segue que ϕ é eikonal, isto é, possui norma do

gradiente constante. Caso contrário, existe uma vizinhança \mathbf{U}_0 e $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (|\nabla \phi|^2)(x) \neq 0, \forall x \in \mathbf{U}_0.$$

Desta maneira, obtemos de (2.22) que $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_\phi (1 + |\nabla \phi|^2)^{\frac{p+2}{2}} \right) \neq 0 \forall x \in \mathbf{U}_0$. Agora tomando a derivada de (2.22) com relação a y_j , para $j = 1, \dots, q$, temos

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_\phi (1 + |\nabla \phi|^2)^{\frac{p+2}{2}} \right) \frac{\partial}{\partial y_j} (|\nabla \psi|^2) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y_j} (|\nabla \psi|^2) = 0, \forall j.$$

Portanto concluímos que uma das funções ϕ ou ψ é eikonal. Assumimos sem perda de generalidade que a função ϕ é eikonal. Neste caso $|\nabla \phi|^2 = c_1$, assim $\sqrt{1 + |\nabla \phi|^2}$ é constante e $\sqrt{1 + |\nabla \phi|^2 + |\nabla \psi|^2}$ não depende das variáveis x_1, \dots, x_p . Derivando a expressão de K_f temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x_i} (K_f) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{K_\phi (1 + |\nabla \phi|^2)^{\frac{p+2}{2}} K_\psi (1 + |\nabla \psi|^2)^{\frac{q+2}{2}}}{(1 + |\nabla \phi|^2 + |\nabla \psi|^2)^{\frac{p+q+2}{2}}} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} (K_\phi) (1 + |\nabla \phi|^2)^{\frac{p+2}{2}} \frac{K_\psi (1 + |\nabla \psi|^2)^{\frac{q+2}{2}}}{(1 + |\nabla \phi|^2 + |\nabla \psi|^2)^{\frac{p+q+2}{2}}}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Donde concluímos que $\frac{\partial}{\partial x_i} (K_\phi) = 0, \forall i = 1, \dots, p$, logo K_ϕ é constante. Com isto temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \sum \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)^2 = |\nabla \phi|^2 = c_1; \\ \det (\text{Hess } \phi) = K_\phi (1 + |\nabla \phi|^2)^{\frac{p+2}{2}} = \mathbf{b} \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Tomamos a derivada com relação a x_j , na primeira equação, temos

$$2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} = 0 \forall j = 1, \dots, q.$$

Isso é o mesmo que $\text{Hess } \phi(\nabla \phi) = 0$. Se tivermos $\nabla \phi \equiv 0$, então $\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \equiv 0$ e $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} \equiv 0$ donde podemos afirmar que $\text{Hess } \phi = 0$. Daí, $\det \text{Hess } \phi = 0$ implicando $K_\phi \equiv 0$, donde $K_f \equiv 0$ contradizendo nossa suposição. Desta forma, existe x tal que $\nabla \phi(x) \neq 0$. Então $\det \text{Hess } \phi(x) = 0$, pois se $\det \text{Hess } \phi(x) \neq 0$ então $\text{Hess } \phi(x)$ seria invertível e teríamos $\nabla \phi(x) = (\text{Hess } \phi^{-1}(x) \circ \text{Hess } \phi(x))(\nabla \phi(x)) = 0$. Desde que $\det \text{Hess } \phi = \mathbf{b} \in \mathbb{R}$, segue que $\det \text{Hess } \phi \equiv 0$. Daí concluímos que $K_f \equiv 0$, contradizendo nossa suposição. Concluindo a prova do Teorema. □

Teorema 2.11 (Lima, Santos, Sousa, 2019). *Seja f uma função diferenciável como no*

Teorema anterior. Se o gráfico translacional generalizado $M_f \subset \mathbb{R}^{p+q+1}$ tem curvatura média constante $H_f \neq 0$, então $K_f \equiv 0$.

Demonstração. Primeiro mostraremos que uma das funções ϕ ou ψ é eikonal. Para isto, suponha por contradição que ambas não são eikonais. Então, existem pontos $x_0 \in U$ e $y_0 \in V$ tal que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (|\nabla \phi|^2)(x_0) \neq 0 \text{ e } \frac{\partial}{\partial y_j} (|\nabla \psi|^2)(y_0) \neq 0$$

para algum $i = 1, \dots, p$ e $j = 1, \dots, q$. Por continuidade, existem vizinhanças U_0 de x_0 e V_0 de y_0 tais que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (|\nabla \phi|^2)(x) \neq 0 \text{ e } \frac{\partial}{\partial y_j} (|\nabla \psi|^2)(y) \neq 0$$

para todo $x \in U_0$ e $y \in V_0$. Pela expressão de H_f no caso de gráfico translacional generalizado, segue que

$$(p + q)W_f^3 H_f = pW_\phi^3 H_\phi + qW_\psi^3 H_\psi + |\nabla \psi|^2 \Delta \phi + |\nabla \phi|^2 \Delta \psi. \quad (2.24)$$

Derivando (2.24) parcialmente com relação a x_i e y_j respectivamente, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} ((p + q)W_f^3 H_f) &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} (pW_\phi^3 H_\phi + qW_\psi^3 H_\psi) + \\ &\quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} (|\nabla \psi|^2 \Delta \phi + |\nabla \phi|^2 \Delta \psi) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} (|\nabla \psi|^2 \Delta \phi) + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} (|\nabla \phi|^2 \Delta \psi) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta \phi) \frac{\partial}{\partial y_j} (|\nabla \psi|^2) + \frac{\partial}{\partial x_i} (|\nabla \phi|^2) \frac{\partial}{\partial y_j} (\Delta \psi). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} ((p + q)W_f^3 H_f) &= (p + q)H_f \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} (W_f^3) \\ &= (p + q)H_f \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (W_f) \frac{\partial}{\partial y_j} (|\nabla \psi|^2) \\ &= (p + q)H_f \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial y_j} (|\nabla \psi|^2) \frac{1}{2} \frac{1}{W_f} \frac{\partial}{\partial x_i} (|\nabla \phi|^2) \\ &= (p + q)H_f \frac{3}{4} \frac{H_f}{W_f} \frac{\partial}{\partial x_i} (|\nabla \phi|^2) \frac{\partial}{\partial y_j} (|\nabla \psi|^2). \end{aligned}$$

Concluimos que na vizinhança $U_0 \times V_0$ é válido que

$$(p + q)H_f \frac{3}{4} \frac{H_f}{W_f} \frac{\partial}{\partial x_i} (|\nabla \phi|^2) \frac{\partial}{\partial y_j} (|\nabla \psi|^2) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta \phi) \frac{\partial}{\partial y_j} (|\nabla \psi|^2) + \frac{\partial}{\partial x_i} (|\nabla \phi|^2) \frac{\partial}{\partial y_j} (\Delta \psi).$$

Consequentemente, dividindo a última igualdade por $\frac{\partial}{\partial x_i}(|\nabla\phi|^2)\frac{\partial}{\partial y_j}(|\nabla\psi|^2)$ temos

$$\frac{3}{4}(\mathfrak{p} + \mathfrak{q})\frac{H_f}{W_f} = \frac{\frac{\partial}{\partial x_i}(\Delta\phi)}{\frac{\partial}{\partial x_i}(|\nabla\phi|^2)} + \frac{\frac{\partial}{\partial y_j}(\Delta\psi)}{\frac{\partial}{\partial y_j}(|\nabla\psi|^2)}. \quad (2.25)$$

Agora derivaremos (2.25) com relação a x_i e y_j . Para isto, note que a derivada de segunda ordem lado direito de (2.25) será igual a zero já que cada termo é independente. Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{3}{4}(\mathfrak{p} + \mathfrak{q})H_f \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{1}{W_f} \right) \right) = \frac{3}{4}(\mathfrak{p} + \mathfrak{q})H_f \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{W_f^3} \frac{\partial}{\partial y_j} (|\nabla\psi|^2) \right) \\ &= \frac{3}{4}(\mathfrak{p} + \mathfrak{q})H_f \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{\partial}{\partial y_j} (|\nabla\psi|^2) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{W_f^3} \right) \\ &= \frac{3}{4}(\mathfrak{p} + \mathfrak{q})H_f \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{\partial}{\partial y_j} (|\nabla\psi|^2) \left(-\frac{3}{2} \frac{1}{W_f^5} \frac{\partial}{\partial x_i} (|\nabla\phi|^2) \right) \\ &= \frac{9}{16}(\mathfrak{p} + \mathfrak{q}) \frac{H_f}{W_f^5} \frac{\partial}{\partial x_i} (|\nabla\phi|^2) \frac{\partial}{\partial y_j} (|\nabla\psi|^2). \end{aligned}$$

Um absurdo, pois $H_f \neq 0$ e supomos que as funções ϕ e ψ não são eikonais. Portanto, podemos assumir sem perda de generalidade que a função ϕ é eikonal. Desta forma $|\nabla\phi|^2$ é constante e tem-se $\frac{\partial}{\partial x_i}(|\nabla\phi|^2) = 0$, para $i = 1, \dots, \mathfrak{p}$. Da igualdade

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} ((\mathfrak{p} + \mathfrak{q})W_f^3 H_f) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\Delta\phi) \frac{\partial}{\partial y_j} (|\nabla\psi|^2) + \frac{\partial}{\partial x_i} (|\nabla\phi|^2) \frac{\partial}{\partial y_j} (\Delta\psi)$$

segue que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\Delta\phi) \frac{\partial}{\partial y_j} (|\nabla\psi|^2) = 0, \quad \forall(i, j).$$

Se $\frac{\partial}{\partial x_i}(\Delta\phi) = 0$, para cada $i = 1, \dots, \mathfrak{p}$, então temos que $\Delta\phi$ é constante e pelo Lema 2.1 segue que ϕ é uma função afim. Daí, $\text{Hess } \phi = 0$ e $K_\phi = \frac{\det \text{Hess } \phi}{W_\phi} = 0$. Da expressão de K_f ,

$$K_f = \frac{K_\phi (1 + |\nabla\phi|^2)^{\frac{\mathfrak{p}+2}{2}} K_\psi (1 + |\psi|^2)^{\frac{\mathfrak{q}+2}{2}}}{(1 + |\nabla\phi|^2 + |\nabla\psi|^2)^{\frac{\mathfrak{p}+\mathfrak{q}+2}{2}}},$$

concluimos que $K_f = 0$.

Por outro lado, se $\frac{\partial}{\partial y_j} (|\nabla\psi|^2) = 0$ para $i = 1, \dots, \mathfrak{p}$ isso implica que $|\nabla\psi|^2$ é constante, isto é, ψ é eikonal. Neste caso, W_ψ é constante e também W_ϕ e W_f são constantes. Logo

$$H_\psi = \frac{1}{q} \text{div} \left(\frac{\nabla\psi}{W_\psi} \right) = \frac{1}{q} \frac{\text{div}(\nabla\psi)}{W_\psi} = \frac{\Delta\psi}{qW_\psi}. \quad (2.26)$$

Inserindo a expressão obtida para H_ψ na expressão da curvatura média para gráfico translacional generalizado temos

$$\begin{aligned}
H_f &= \frac{pW_\phi^3 H_\phi + W_\psi^2 \Delta\psi + |\nabla\psi|^2 \Delta\phi + |\nabla\phi|^2 \Delta\psi}{(p+q)W_f^3} \\
&= \frac{pW_\phi^3 H_\phi + |\nabla\psi|^2 \Delta\phi + (W_\psi^2 + |\nabla\phi|^2) \Delta\psi}{(p+q)W_f^3}.
\end{aligned}$$

Derivando esta última igualdade com relação a y_j obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y_j} ((W_\psi^2 + |\nabla\phi|^2) \Delta\psi) &= 0 \\
\Rightarrow (W_\psi^2 + |\nabla\phi|^2) \frac{\partial}{\partial y_j} (\Delta\psi) &= 0 \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y_j} (\Delta\psi) &= 0, \quad \forall j = 1, \dots, q.
\end{aligned}$$

Portanto o laplaciano $\Delta\psi$ é constante. Pelo Lema 2.1, segue que ψ é uma função afim. Então, $\text{Hess } \psi = 0$ e $K_\psi = \frac{\det \text{Hess } \psi}{W_\psi^3} = 0$ implicando que $K_f = 0$. Em qualquer caso concluímos que $K_f \equiv 0$. O teorema fica demonstrado.

□

Referências Bibliográficas

- [1] Aydin, M.E. *Affine translation hypersurfaces in Euclidean and isotropic spaces*, <https://arxiv.org/abs/1611.05608v3>, 31 Aug. 2017.
- [2] Chen, C.; Sun, H.; Tang, L. On translation hypersurfaces with constant mean curvature in $(n + 1)$ -dimensional spaces, *J. Beijing Inst. Technol.* 12 (2003) 322–325
- [3] Dillen, F.; Verstraelen, L.; Zafindratafa, G.; *A generalization of the translational surfaces of Scherk*, in: *Differential Geometry in Honor of Radu Rosca*, Catholic University of Leuven, Belgium, 1991, pp. 107–109.
- [4] Lee, John M. *Introduction to Smooth Manifolds*, 2.ed. New York: Springer-Verlag, 2012.
- [5] Lima, B. P.; Santos, N. L.; Silva, J. P.; Sousa, P. A. *Translation Hypersurfaces with Constant S_r Curvature in the Euclidean Space*, *Anais da Academia Brasileira de Ciências*(2016) 88(4): 2039-2052
- [6] Lima, B. P.; Santos, N. L.; Sousa, P. A. *Translation Hypersurfaces with Constant Scalar Curvature into the Euclidean Space*, *Israel J Math*, 2014, 201: 797-811.
- [7] Lima, B. P.; Santos, N. L.; Sousa, P. A. *Generalized translation hypersurfaces in Euclidean space*, *Math. Anal. Appl.*(2018),1129-1135
- [8] Liu, H. *Translation surfaces with constant mean curvature in 3-dimensional spaces*, *J. Geom.* 64 (1991) 141–149.
- [9] Moruz, M.; Munteanu, M.I. *Minimal translation hypersurfaces in R^4* , *J. Math. Anal. Appl.* 439 (2016) 798–812.
- [10] Munteanu, M. I.; Palmas, O.; Ruiz-Hernández G. *Minimal translation hypersurfaces in Euclidean space*, *Mediterr. J. Math.* 13 (2016) 2659–2676.
- [11] Seo, K. *Translation hypersurfaces with constant curvature in space forms*, *Osaka J. Math.* 50 (2013) 631–641.
- [12] Thorpe, Jhon A. *Elementary Topics in Differential Geometry*, 1.ed. New York: Springer-Verlag, 1979.