Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

p-Parabolicidade em variedades Riemannianas

JÔNATAS ARRAIS DE CASTRO

Teresina - 2021

Jônatas Arrais de Castro

Dissertação de Mestrado:

p-Parabolicidade em variedades Riemannianas

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Leandro de Freitas Pessoa

Teresina - 2021

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

p-Parabolicidade em variedades Riemannianas

Jônatas Arrais de Castro

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 24 de Junho de 2021.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
gov.br
Leandro de Freitas Pessoa
Data: 09/07/2021 16:52:22-0300
CPF: 027.036.353-03
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Leandro de Freitas Pessoa - Orientador

Documento assinado digitalmente
gov.br
Antonio Wilson Rodrigues da Cunha
Data: 09/07/2021 18:20:56-0300
CPF: 662.404.173-00
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Antonio Wilson Rodruigues da Cunha - UFPI

Documento assinado digitalmente
gov.br
Gregorio Pacelli Feitosa Bessa
Data: 09/07/2021 17:19:08-0300
CPF: 209.692.953-91
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa - UFC

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial de Ciências da Natureza – CCN
Serviço de Processamento Técnico

C355p Castro, Jônatas Arrais de.

p-Parabolicidade em variedades Riemannianas / Jônatas Arrais de Castro. – 2021.
61 f.: il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2021.
“Orientador: Prof. Dr. Leandro de Freitas Pessoa. ”

1. Geometria Diferencial. 2. p-Laplaciano. 3. Geometria Riemanniana. I. Pessoa, Leandro de Freitas. II. Titulo.

CDD 516.36

Bibliotecária (o): Caryne Maria da Silva Gomes – CRB3/1461

Agradecimentos

Agradeço a Deus por seu grande amor por mim, pela capacidade que me deu de aprender e por atender as minhas orações.

Agradeço ao meu pai Gerson de Castro, minha mãe Teresa Arrais de Castro e irmãs Érika e Vanessa que estiveram sempre ao meu lado me apoiando.

Agradeço à Gabriela pelo seu amor e carinho que foram importantes em cada dia desses anos de mestrado.

Agradeço ao meu orientador Leandro de Freitas Pessoa pela paciência, pelas aulas de análise real aos sábados, que foram importantes para minha aprovação no mestrado, pelo planejamento e as cobranças.

Agradeço aos amigos do mestrado que fizeram dias de lutas serem divertidos.

Agradeço a todos da IBNC, em especial ao professor Francisco de Sousa Oliveira pelas palavras de motivação e por seu exemplo.
Agradeço (a CAPES, ao CNPq) pelo apoio financeiro.

"Tudo posso naquele que me fortalece."

Filipenses 4:13

Resumo

Neste trabalho introduzimos o conceito de p-parabolicidade para uma variedade Riemanniana. Este importante invariante está relacionado com a Teoria Potencial não-linear do operador p-Laplaciano. A p-parabolicidade de uma variedade é estudada através da p-capacidade de conjuntos compactos, bem como da existência (ou não) de uma função de Green positiva. Critérios para a validade desta propriedade são discutidos fazendo-se uso de estimativas para p-capacidade em termos de crescimento de área e volume, além de estimativas geométricas com o uso de integrais de hipersuperfícies.

Palavras-chave: p-Parabolicidade; p-Laplaciano; p-Capacidade; Crescimento de Volume

Abstract

In this work we introduce the concept of $\mathfrak{p}$-parabolicity for a Riemannian manifold. This important invariant is related to the Nonlinear Potential Theory of the $\mathfrak{p}$-Laplacian operator. The $\mathfrak{p}$-parabolicity of a manifold is studied using the $\mathfrak{p}$-capacity of compact sets, as well as from the existence (or not) of a positive Green's function. Criteria for the validity of this property are discussed using estimates for $\mathfrak{p}$-capacity in terms of area and volume growth, as well as geometric estimates using hypersurface integrals.

Keywords: $\mathfrak{p}$-Parabolicity; $\mathfrak{p}$-Laplacian; $\mathfrak{p}$-Capacity; Volume Growth.

Sumário

Introdução

Dado um domínio conexo Ω em uma variedade Riemanniana M e D um subconjunto compacto de Ω. Definiremos p-capacidade para um condensador (D, Ω) como

$$\mathrm{Cap}_p(D, \Omega) = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^p : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C_0^0(\Omega), u \geqslant 1 \text{ em } D \right\}.$$

Assim, podemos compreender o comportamento das funções do espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ contínuas em Ω e com valor maior ou igual a 1 em D, com relação a p-Dirichlet integral

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx.$$

A partir da definição apresentaremos algumas propriedades, resultados para o caso em que D é um conjunto p-polar, isto é, $\mathrm{Cap}_p(D, \Omega) = 0$, a relação entre conjuntos limitados com dimensão de Hausdorff s $(0 < s < n - 1)$ e mostraremos que, se $\mathrm{Cap}_p(D, \Omega) = 0$ para algum subconjunto compacto $D \subset \Omega$ com interior não-vazio, então $\mathrm{Cap}_p(D', \Omega) = 0$ para todo subconjunto compacto $D' \subset \Omega$. A importância desse resultado reflete na caracterização de Ω como um domínio do tipo p-parabólico ou p-hiperbólico.

Diremos que Ω é p-parabólico se existir um compacto D com interior não-vazio tal que $\mathrm{Cap}_p(D, \Omega) = 0$. Caso contrário, diremos que Ω é p-hiperbólico. Expandiremos a definição de p-parabolicidade para a não existência de uma função de Green positiva para o operador p-Laplaciano

$$\Delta_p u = \mathrm{div}(\|\nabla u\|^{p-2} \nabla u).$$

Em seguida, construiremos a definição de p-capacidade em termos de integrais de hipersuperfícies, e algumas estimativas geométricas. Com isto, é possível ver que $\mathbb{R}^n$ é p-parabólico para $p \geqslant n$ e p-hiperbólico para $p < n$. Uma variedade completa com volume finito é 1-parabólico, e veremos mais a frente que é p-parabólico para todo $1 \leqslant p < \infty$.

Introduziremos um pouco da teoria do potencial gráficos, e apresentaremos a definição de p-capacidade neste ambiente. Veremos que se um gráfico com geometria limitada é

p-parabólico, então ela será q-parabólico para todo $q \geqslant p$. Concluiremos com o resultado: Se M é uma variedade Riemanniana com geometria limitada e p-parabólico, então M será q-parabólico para todo $q \geqslant p$.

Uma variedade Riemanniana (M, g) completa é p-hiperbólico quando p é menor ou igual a dimensão isoperimétrica($d_{isop}(M, g)$) e p-parabólico quando p maior ou igual ao grau de crescimento de $M(d_{gr}(M, g))$. A dimensão parabólica de M é o número

$$d_{par}(M, g) = \inf\{p \geqslant 1 : \text{M é } p\text{-parabólico }\}.$$

No caso em que M tem geometria limitada. Então, podemos também definir d_{par} como o número

$$d_{par(M,g)} = \sup\{p \geqslant 1 : \text{M é } p\text{-hiperbólico}\}.$$

Uma variedade completa com curvatura de Ricci não-negativa é p-parabólico para todo $p \geqslant d_{gr}$. Uma variedade simplesmente conexa com curvatura seccional $K \leqslant -1$ é p-hiperbólico para todo $p < \infty$.

Por fim, a n-parabolicidade é uma propriedade conformemente invariante das variedades. Com isto se uma variedade Riemanniana completa (M, g_0) é tal que $d_{isop} > n$, então $d_{gr}(M, g) \geqslant n$ para toda métrica g conformemente equivalente à g_0.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Iremos apresentar algumas noções básicas sobre a teoria dos espaços de Sobolev, medida, dimensão de Hausdorff e operador p-Laplaciano.

1.1 O espaço de Sobolev

Vamos iniciar com a teoria do espaço de Sobolev em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dado uma função $u \in L^1(\Omega)$ e um multi-índice α, definimos a derivada distribucional $D_\alpha u$ de u por

$$\langle D_\alpha u, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D_\alpha \varphi dx$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, onde $C_0^\infty(\Omega)$ é o conjunto das funções suaves com suporte compacto em Ω. Uma distribuição T é dito estar em L^p se existe uma função $f \in L^p(\Omega)$ tal que $\langle T, \varphi \rangle = \int_\Omega f\varphi dx$. Dado $k \in \mathbb{N}$, e $p \geqslant 1$, definimos

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : |\alpha| \leqslant k, D_\alpha u \in L^p(\Omega)\}.$$

Por definição, $W^{k,p}(\Omega)$ é o espaço de Sobolev com ordem p de integrabilidade e ordem k de diferenciabilidade. O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach quando munido com a norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{i=0}^{k} \sum_{|\alpha|=i} \|D_\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Outra possibilidade é definir o espaço de Sobolev $H^{k,p}(\Omega)$ como o fecho com respeito à norma $\|.\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ do conjunto das funções $u \in C^\infty(\Omega)$, o qual $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} < +\infty$.

Teorema 1.1. *Para qualquer inteiro* k *e qualquer* $p \geqslant 1$ *temos* $W^{k,p}(\Omega) = H^{k,p}(\Omega)$.

Demonstração. Vide [2]. □

Agora, vejamos o caso para uma variedade Riemanniana. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geqslant 1$. Para $k \in \mathbb{N}$ e $p \geqslant 1$, definimos $C^{k,p}(M)$ o conjunto das funções $u \in C^{\infty}(M)$ de tal modo que $\int_{\Omega} |\nabla^i u|_g^p d\mu < +\infty$, para todo $i \in 1, 2, ..., k$. Sendo assim, definiremos o espaço de Sobolev para uma variedade Riemanniana da seguinte forma.

Definição 1.1. *O espaço de Sobolev* $W^{k,p}(M, g)$ *é o fecho em* $L^p(M)$ *de* $C^{k,p}(M)$ *com respeito à norma*

$$||u||_{W^{k,p}} := \sum_{i=0}^{k} ||\nabla^i u||_p$$

onde $||\nabla^i u||_p$ *é a norma* L^p *da função* $|\nabla^i u|$. *O espaço de Sobolev* $W_0^{k,p}(M)$ *é o fecho de* $C_0^{\infty}(\Omega)$.

Para este trabalho, iremos utilizar apenas o espaço de Sobolev de ordem $k = 1$. A seguir, veremos algumas propriedades deste espaço a serem utilizadas posteriormente. As demonstrações podem ser encontradas em [3, Capítulo 1].

Lema 1.1. *Se* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *com* $\nabla u = 0$, *então* $u = 0$. *Se* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *então* $u^+ = \max\{u, \lambda\} \in W^{1,p}(\Omega)$ *e* $u^- = \min\{u, \lambda\} \in W^{1,p}(\Omega)$, *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.2. *Se* $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, *então as funções* $\max\{u, v\}$ *e* $\min\{u, v\}$ *estão em* $W^{1,p}(\Omega)$.

Lema 1.2. *Se* $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *então* $\min\{u, v\}$ *e* $\max\{u, v\}$ *estão em* $W_0^{1,p}(\Omega)$. *Se* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *é não negativa, então existe uma sequência de funções não negativa* $\varphi_j \in C_0^{\infty}(\Omega)$ *convergindo para* u *em* $W^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 1.3. *Suponha que* u *e* v *são funções limitadas em* $W^{1,p}(\Omega)$. *Então,*

i) $uv \in W^{1,p}(\Omega)$ *e* $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$.

ii) Se $uv \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *então* $uv \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Um importante fato sobre os espaços $W^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega)$ é a de serem sequencialmente fracamente compacto. Para $p > 1$ dizemos que uma sequência $u_j \in L^p(\Omega)$ converge fracamente em $L^p(\Omega)$ para uma função $u \in L^p(\Omega)$ se

$$\int_{\Omega} v u_j d\mu \to \int_{\Omega} v u d\mu$$

qualquer que seja $v \in L^{p/(p-1)}(\Omega)$.

Teorema 1.4. *Suponha que* u_j *é uma sequência limitada em* $W^{1,p}(\Omega)$. *Então, existe uma subsequência* u_{j_i} *e uma função* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *tal que* $u_{j_i} \to u$ *fracamente em* $L^p(\Omega)$ *e* $\nabla u_{j_i} \to \nabla u$ *fracamente em* $L^p(\Omega)$. *Além disso, se* $u_j \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *então* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Vide [3, 1.31]. □

Teorema 1.5. *Suponha que* u_j *é uma sequência limitada em* $W^{1,p}(\Omega)$ *tal que* $u_j \to u$ *pontualmente quase sempre. Então,* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $u_j \to u$ *fracamente em* $L^p(\Omega)$, *e* $\nabla u_j \to \nabla u$ *fracamente em* $L^p(\Omega)$. *Além disso, se* $u_j \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *então* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Vide [3, 1.32]. □

Teorema 1.6. *(Desigualdade de Poincaré) Se* Ω *é limitado, então*

$$\int_\Omega |\varphi|^p \, d\mu \leqslant C \int_\Omega |\nabla \varphi|^p \, d\mu$$

para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Demonstração. Vide [3, 1.4]. □

1.2 Noções básicas de medida

Introduziremos a noção geral de medida em um espaço X. Iniciaremos definindo X um conjunto e F uma σ-algebra de subconjuntos, isto é, F é uma família não-vazia de subconjuntos de X, fechados sobre uma união enumerável, complementar e interseção de enumeráveis subconjuntos. Também, temos que (X, F) é um espaço mensurável. Note que, se $S \in F$, então $X \backslash S \in F$, $X = S \cup (X \backslash S) \in F$ e também $X^c = \emptyset \in F$.

Definição 1.2. *Uma medida* μ *em* (X, F) *é uma função* $\mu : F \to [0, \infty]$ *satisfazendo as seguintes condições:*

i) $\mu(\emptyset) = 0$;

ii) $S_j \in F$ *disjuntos, enumerável* $\implies \mu(\cup_j S_j) = \sum_j \mu(S_j)$

As seguintes propriedades são satisfeitas por μ:

1. $S_j \in F, S_1 \subset S_2 \implies \mu(S_1) \leqslant \mu(S_2)$;

2. $S_j \in F$ enumerável $\implies \mu(\cup_j S_j) \leqslant \sum_j \mu(S_j)$.

Definição 1.3. *Seja* μ *uma medida de* X *e* $A \subset X$*. Então* μ *restrito a* A*, denotado por*

$$\mu \llcorner S_1,$$

é a medida definida por

$$(\mu \llcorner S_1)(S_2) = \mu(S_1 \cap S_2), \forall S_2 \subset X.$$

Definição 1.4. *Um conjunto* $A \subset X$ *é* μ*-mensurável se para cada conjunto* $B \subset X$

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B - A)$$

Observação 1. *Se* $\mu(A) = 0$*, então* A *é* μ*-mensurável.* A *é* μ*-mensurável se, e somente se,* $X - A$ *é* μ*-mensurável. Observe que se* A *é qualquer subconjunto de* X*, então qualquer conjunto* μ*-mensurável é também* $\mu \llcorner A$*-mensurável.*

Definição 1.5. *Uma coleção de subconjuntos* $\mathcal{A} \subset F$ *é uma* σ*-álgebra quando*

i. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;

ii. $S \in \mathcal{A} \implies X - S \in \mathcal{A}$;

iii. $S_j \in \mathcal{A} \implies \cup_j S_j \in \mathcal{A}$.

Sendo assim, a coleção de todos subconjuntos μ-mensurável de X forma uma σ-álgebra.

Definição 1.6. *A* σ*-álgebra de Borel de* $\mathbb{R}^n$ *é a menor* σ*-álgebra de* $\mathbb{R}^n$ *contendo subconjuntos abertos de* $\mathbb{R}^n$*.*

Definição 1.7. *A seguir algumas definições.*

i) *Uma medida* μ *em* X *é regular se para cada conjunto* $S_1 \subset X$ *existe um conjunto* S_2 μ*-mensurável tal que* $S_1 \subset S_2$ *e* $\mu(S_1) = \mu(S_2)$*.*

ii) *Uma medida* μ *em* $\mathbb{R}^n$ *é chamada de Borel se todo conjunto de Borel é* μ*-mensurável.*

iii) *Uma medida* μ *em* R^n *é Borel regular se* μ *é Borel e para cada* $S_1 \subset \mathbb{R}^n$ *existir um conjunto de Borel* B *tal que* $S_1 \subset B$ *e* $\mu(S_1) = \mu(B)$*.*

iv) *Uma mediada* μ *em* $\mathbb{R}^n$ *é uma medida de Radon se* μ *é Borel regular e* $\mu(K) < \infty$ *para cada conjunto compacto* $K \subset \mathbb{R}^n$*.*

Dimensão de Hausdorff

Seja $s > 0$ e $0 < \delta \leqslant \infty$. Para um conjunto E em $\mathbb{R}^n$ definiremos

$$H_s^\delta(E) = \inf \sum r_i^s$$

onde o ínfimo é tomado sobre toda cobertura de E, por bolas abertas B_i com diâmetro r_i não excedendo δ. Observe que H_s^δ é uma medida exterior, isto é, para todos os conjuntos $E_1, E_2, ... \subset \mathbb{R}^n$ tem -se

i. $H_s^\delta(\emptyset) = 0$;

ii. $H_s^\delta(E_1) \leqslant H_s^\delta(E_2)$ *se* $E_1 \subset E_2$;

iii. $H_s^\delta(\underset{i}{\cup} E_i) \leqslant \sum\limits_i H_s^\delta(E_i)$.

Agora definiremos a medida de Hausdorff de E por

$$H_s(E) = \sup_{\delta > 0} H_s^\delta(E) = \lim_{\delta \to 0} H_s^\delta(E).$$

A medida H_s é regular em um conjunto de Borel, isto é, uma medida aditiva em um conjunto de Borel em $\mathbb{R}^n$ e para cada $E \subset \mathbb{R}^n$ existe um conjunto de Borel B tal que $E \subset G$ e $H_s(E) = H_s(G)$. Ver [3, Pág. 61].

Teorema 1.7. *Se* $H_s < \infty$*, então* $H_t(E) = 0$ *para todo* $t > s$.

Demonstração. Seja $H_s(E) < \infty$ e $\delta > 0$. Então existe uma cobertura por bolas abertas B_i com diâmetro r_i não excedendo δ e

$$\sum_i r_i^s \leqslant H_s^\delta(E) + 1 \leqslant H_s(E) + 1.$$

Daí,

$$H_t^\delta(E) \leqslant \sum_i r_i^t = \sum_i r_i^s . r_i^{t-s} \leqslant \delta^{t-s} \sum_i r_i^s \leqslant \delta^{t-s}(H_s^\delta(E) + 1)$$

e fazendo $\delta \to 0$, concluímos que $H_t(E) = 0$. □

O menor $s \geqslant 0$ que satisfaz $H_t^\delta(E) = 0$ para todo $t > s$ é chamado de dimensão de Hausdorff de E.

Lema 1.3. *Suponha que* $0 < \delta \leqslant \infty$*. Então* $H_s(E) = 0$ *se, e somente se* $H_s^\delta(E) = 0$.

Demonstração. Desde que

$$H_s(E) \geqslant H_s^{\delta}(E)$$

é suficiente mostrar que $H_s(E) = 0$ se $H_s^{\delta}(E) = 0$. Então, assuma que $H_s^{\delta}(E) = 0$ e fixe $\epsilon > 0$. Escolha uma cobertura de E por bolas abertas B_i com diâmetro r_i não excedendo δ tal que

$$\sum_i r_i^s < \epsilon^s.$$

Então, $r_i < \epsilon$ e

$$H_s^{\epsilon}(E) \leqslant \sum_i r_i^s < \epsilon^s.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ nós obtemos

$$H_s(E) = \lim_{\epsilon \to 0} H_s^{\epsilon}(E) = 0$$

como queríamos provar. □

Seja h uma função real crescente em $[0, 1)$ satisfazendo $\lim\limits_{t \to 0} h(t) = h(0) = 0$. Definimos a medida h-Hausdorff de E por

$$H_h(E) = \sup_{\delta > 0} \inf \sum_i h(r_i),$$

onde o ínfimo é tomado sobre toda cobertura de E, por bolas abertas B_i com diâmetro r_i não excedendo δ. A medida $H_h(E)$ é regular em um conjunto de Borel em $\mathbb{R}^n$. A escolha $h(t) = t^s$ nos dá a medida s-Hausdorff $H_s(E)$.

Lema 1.4. *Assuma que* $0 < s < n,\ f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *e seja*

$$E = \left\{ x \in \Omega : \limsup_{r \to 0} \frac{1}{r^s} \int_{B(x,r)} |f| dy > 0 \right\}.$$

Então, $H^s(E) = 0$.

Demonstração. Vide [4, Pág. 109]. □

O Espaço BV(Ω)

Apresentaremos de forma superficial o espaço das funções com variação limitada em um aberto de uma variedade Riemanniana. Para mais informação sobre este tema é recomendado a leitura de [13] e [5].

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana conexa n-dimensional consideremos uma família de formas semi-contínuas por baixo e quadráticas $G_x : T_xM \to [0, \infty]$ e

$$\mathcal{D}(x) := \{v \in T_xM : G_x(v) < \infty\}.$$

Aqui, G_x induz um produto escalar g_x em $\mathcal{D}(x)$ satisfazedo

$$g_x(v, v) = G_x(v) \;\; \forall x \in \mathcal{D}(x).$$

Para $\Omega \subset M$ aberto, denotaremos $\Gamma(\Omega, \mathcal{D})$ como

$$\Gamma(\Omega, D) := \{X : X \text{ é um campo de vetor suave em } \Omega,\ X(x) \in \mathcal{D}(x) \text{ para todo } x \in \Omega\ \}.$$

Também denotaremos

$$\Gamma^g(\Omega) := \{X \in \Gamma(\Omega, \mathcal{D}) : g_x(X(x), X(x)) \leqslant 1 \;\; \forall x \in \Omega\}.$$

Definição 1.8. *Seja $\Omega \subset M$ um subconjunto aberto de M e $u \in L^1(\Omega)$. Dizemos que u tem variação limitada em Ω, e escrevemos $u \in BV(\Omega)$ se $D_X u$ existe para todo $X \in \Gamma^g(\Omega)$ e*

$$\sup\{|D_X u|(\Omega) : X \in \Gamma^g(\Omega)\} < \infty.$$

Denotaremos por $||D_g u||$ a medida de Radon em Ω. Se $E \subset M$ é um conjunto de Borel, dizemos E tem perímetro finito se $\chi_E \in BV(\Omega)$, munido com a norma

$$||u||_{BV(\Omega)} = ||u||_{L^1(\Omega)} + |\nabla u|(\Omega)$$

Teorema 1.8. *Seja $u \in BV(\Omega)$. Então existe uma sequência de funções $(u_j) \in C^\infty(\Omega)$ tal que $u_j \to u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e*

$$\lim_{j \to \infty} \int_\Omega |\nabla u_j| dx = ||u||_{BV(\Omega)}.$$

Além disso, se $u \in L^1(\Omega)$, então $u_j \to u \in L^1(\Omega)$.

Demonstração. Vide [5, Pág. 298]. □

1.3 O p-Laplaciano

Seja M uma variedade Riemanniana não-compacta munida com a métrica $\langle , \rangle$ e a forma Riemanniana de volume $d\mu$. Dizemos que um campo vetorial $\nabla u \in L^1_{loc}(M)$ é o gradiente de uma função $u \in L^1_{loc}(M)$ se

$$\int_M \langle \nabla u, V \rangle d\mu = -\int_M u \operatorname{div} V d\mu$$

para todo campo de vetores $V \in C_0^1(M)$.

Seja $\mathcal{A} : TM \to TM$ um operador satisfazendo as seguintes propriedades:

i. A aplicação $\mathcal{A}_x = \mathcal{A}|T_xM : T_xM \to T_xM$ é contínua para quase todo $x \in M$ e a aplicação $x \mapsto \mathcal{A}_x(X)$ é mensurável para todo campo de vetores mensurável X, para quase todo $x \in M$ e para todo $h \in T_xM$;

ii. $\langle \mathcal{A}_x(h), h \rangle = |h|^p$;

iii. $|\mathcal{A}_x(h)| = |h|^{p-1}$;

iv $\langle \mathcal{A}_x(h_1) - \mathcal{A} - x(h_2), h_1 - h_2 \rangle > 0$, para quaisquer $h_1 \neq h_2$;

v. $\mathcal{A}_x(h) = |\lambda|^{p-2}\lambda \mathcal{A}_x(h)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Dizemos que o operador $\mathcal{A}$ é o operador p-Laplaciano quando

$$\mathcal{A}_x(h) = |h|^{p-2}|h|.$$

Uma função $u \in W^{1,p}_{loc}(M)$ é uma solução fraca da equação do p-Laplaciano

$$\Delta_p u = -\operatorname{div}(\mathcal{A}_x(u)) = -\operatorname{div}(\| \nabla u \|^{p-2} \nabla u) = 0 \tag{1}$$

em M se

$$\int_M \langle \| \nabla u \|^{p-2} \nabla u, \nabla \varphi \rangle d\mu = 0 \tag{2}$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(M)$. Soluções contínuas para a equação (1) são chamadas de p-harmônica. Uma função $u \in W^{1,p}_{loc}(M)$ é chamada de p-supersolução em M se satisfaz

$$\int_M \langle \| \nabla u \|^{p-2} \nabla u, \nabla \varphi \rangle d\mu \geqslant 0$$

para toda função não-negativa $\varphi \in C_0^\infty(M)$. Equivalentemente, nomeamos uma função $v \in W^{1,p}_{loc}(M)$ de p-subsolução em M quando

$$\int_M \langle \| \nabla u \|^{p-2} \nabla u, \nabla \varphi \rangle d\mu \leqslant 0$$

para toda função não-negativa $\varphi \in C_0^\infty(M)$.

Lema 1.5. *(Princípio da Comparação): Se* $u \in W^{1,p}(M)$ *é* p*-supersolução,* $v \in W^{1,p}(M)$ *é uma* p*-subsolução e* $\max(v-u,0) \in W_0^{1,p}(M)$*, então* $u \geqslant v$ *quase sempre em* M*.*

Demonstração. Faça $\varphi = \max(v-u,0) \in W_0^{1,p}(M)$ e utilizando a desigualdade de Tartar obteremos

$$\begin{aligned} 0 &\geqslant \int_M \langle \| \nabla v \|^{p-2} \nabla v, \nabla \varphi \rangle d\mu - \int_M \langle \| \nabla u \|^{p-2} \nabla u, \nabla \varphi \rangle d\mu \\ &= \int_{u<v} \langle \| \nabla v \|^{p-2} \nabla v - \| \nabla u \|^{p-2} \nabla u, \nabla \varphi \rangle d\mu \geqslant 0 \end{aligned}$$

Portanto, $\nabla \varphi = 0$ quase sempre em M. □

Uma importante propriedade de uma solução da equação (1) é a de ser minimizante da integral p-Dirichlet na classe de funções φ com mesmo valor na fronteira que u, em outras palavras, dado $u \in W^{1,p}(\Omega)$, para cada $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u - \varphi \in W_0^{1,p}$ teremos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^p &= \int_\Omega \langle |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla u \rangle \\ &= \int_\Omega \langle |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla \varphi \rangle \\ &\leqslant \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} |\nabla u| . |\nabla \varphi| \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-1} |\nabla \varphi| \\ &\leqslant \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^p \right)^{\frac{1}{p}} . \end{aligned}$$

Portanto $\int_\Omega |\nabla u|^p \leqslant \int_\Omega |\nabla \varphi|^p$.

Teorema 1.9. *Suponha que* Ω *é limitado e que* $v \in W^{1,p}(\Omega)$*. Existe uma única solução* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *da equação (1) em* Ω *com* $u - v \in W_0^{1,p}(\Omega)$*.*

Demonstração. Vide [3, Pág. 68]. □

Teorema 1.10. *(Desigualdade de Harnack.) Seja* h *uma função* p*-harmônica não negativa em um domínio* Ω*. Então, existe uma constante* $c > 0$ *tal que*

$$\sup_B h \leqslant c \inf_B h$$

onde B *é uma bola em* Ω *tal que* $2B \subset \Omega$*.*

Demonstração. Vide [3, 6.2]. □

Teorema 1.11. *(Princípio do máximo forte). Uma função não-constante e* p*-harmônica em um domínio* $\Omega \subset M$ *não atinge seu supremo ou ínfimo.*

Demonstração. Se $u(x_o) = \max_\Omega u = M$, então a função $v = M - u$ é não-negativa e p-harmônica em Ω. Desde que $v(x_0) = 0$ segue, pela desigualdade de Harnack, que $v \equiv 0$ em Ω. O caso do mínimo é tratado de forma análoga. □

Teorema 1.12. *(Princípio de Harnack). Suponha que* h_i, $i = 1, 2, ...$ *seja uma sequência crescente de funções* p*-harmônica em um domínio* Ω*. Então a função* $h = \lim_{i \to \infty} h_i$ *é uma função* p*-harmônica ou ela é identicamente* $+\infty$*.*

Demonstração. Vide [3, 6.14]. □

Capítulo 2

p-Capacidade

O conceito de p-capacidade é indispensável para entendermos o comportamento local das funções no espaço de Sobolev. Veremos que podemos usá-la para caracterizar as variedades Riemanniana.

Definição 2.1. *Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana,* $\Omega \subset M$ *um domínio conexo em M e* $D \subset \Omega$ *um conjunto compacto. Para* $1 \leqslant p < \infty$*, a* p*-capacidade de D em* Ω *é definida por:*

$$\mathrm{Cap}_p(D, \Omega) := \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^p ; u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C_0^0(\Omega),\ u \geqslant 1 \text{ em } D\right\}$$

onde $W_0^{1,p}(\Omega)$ *é o fecho de* $C_0^1(\Omega)$*, com respeito à norma*

$$\| u \|_{1,p} := \| u \|_{L^p} + \| |\nabla u| \|_{L^p} .$$

Consideremos $W(D, \Omega) = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C_0^0(\Omega) : u \geqslant 1 \text{ em } D\}$ e denotaremos $A(D, \Omega) = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C_0^0(\Omega)\colon\ 0 \leqslant u \leqslant 1$ e $u = 1$ em $D\}$. Pela propriedade do ínfimo, temos que

$$\mathrm{Cap}_p(D, \Omega) \leqslant \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^p : u \in A(D, \Omega)\right\}$$

pois $A(D, \Omega) \subset W(D, \Omega)$. Dado $\epsilon > 0$, existe $u \in W(D, \Omega)$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \leqslant \mathrm{Cap}_p(D, \Omega) + \epsilon.$$

Então, por um argumento de truncamento, neste caso $v = \max\{0, \min\{|u|, 1\}\} \in A(D, \Omega)$ e $|\nabla v| \leqslant |\nabla u|$ quase sempre. Assim,

$$\mathrm{Cap}_p(D,\Omega) \leqslant \int_\Omega |\nabla v|^p \leqslant \int_\Omega |\nabla u|^p \leqslant \mathrm{Cap}_p(D,\Omega) + \epsilon.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ obtemos

$$\inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^p : u \in A(D,\Omega)\right\} = \mathrm{Cap}_p(D,\Omega)$$

Com isto fica provado que podemos restringir a definição acima para as funções $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C_0^0(\Omega)$ tal que $0 \leqslant u \leqslant 1$ e $u = 1$ em D.

Apresentaremos algumas observações e propriedades acerca da p-capacidade.

Lema 2.1. *Suponha $\Omega \subset M$ com volume finito. Se $\mathrm{Cap}_p(D,\Omega) = 0$, então $\mathrm{Cap}_q(D,\Omega) = 0$ para todo $1 \leqslant q < p$.*

Demonstração. Dados $p, q \in \mathbb{R}$ tais que $1 \leqslant q < p$, temos que $p/(p-q) > 1$ e $p/q > 1$ com a soma de suas inversas igual a 1. Logo, pela desigualdade de Hölder,

$$\int_\Omega |\nabla u|^q \leqslant \left(\int_\Omega 1\right)^{\frac{p-q}{p}} \left(\int_\Omega (|\nabla u|^q)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{q}{p}}.$$

$$\leqslant (\mathrm{Vol}(\Omega))^{\frac{p-q}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{\frac{q}{p}}$$

Passando o ínfimo sobre as funções em $A(D,\Omega)$, concluímos que $\mathrm{Cap}_q(D,\Omega) = 0$. $\square$

Teorema 2.1. *A p-capacidade satisfaz as seguintes propriedades:*

i) $\Omega_1 \subset \Omega_2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Cap}_p(D,\Omega_1) \geqslant \mathrm{Cap}_p(D,\Omega_2)$;

ii) $D_1 \subset D_2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Cap}_p(D_1,\Omega) \leqslant \mathrm{Cap}_p(D_2,\Omega)$;

iii) $\mathrm{Cap}_p(D,\Omega_1) = \inf\{\mathrm{Cap}_p(U,\Omega_1);$ *U é aberto e* $D \subset U \Subset \Omega\}$;

iv) $\mathrm{Cap}_p(D_1 \cup D_2,\Omega) \leqslant \mathrm{Cap}_p(D_1,\Omega) + \mathrm{Cap}_p(D_2,\Omega) - \mathrm{Cap}_p(D_1 \cap D_2,\Omega)$;

v) Se $U \Subset \Omega$ *é aberto, então* $\mathrm{Cap}_p(\overline{U},\Omega) = \mathrm{Cap}_p(\partial U,\Omega)$;

vi) Se $D \subset \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \subset \underset{i}{\cup}\Omega_i = \Omega$, *então* $\mathrm{Cap}_p(D,\Omega) = \lim\limits_{i\to\infty} \mathrm{Cap}_p(D,\Omega_i)$.

Demonstração. i) Observe que $A(D,\Omega_1) \subset A(D,\Omega_2)$, logo pela definição de ínfimo concluímos que $\mathrm{Cap}_p(D,\Omega_1) \geqslant \mathrm{Cap}_p(D,\Omega_2)$. Já em ii) temos que $A(D_2,\Omega) \subset A(D_1,\Omega)$, portanto $\mathrm{Cap}_p(D_1,\Omega) \leqslant \mathrm{Cap}_p(D_1,\Omega)$.

iii) Se $D \subset U \Subset \Omega$, então

$$D \subset U \Rightarrow \mathrm{Cap}_p(D,\Omega) \leqslant \mathrm{Cap}_p(U,\Omega).$$

Logo $\mathsf{Cap}_p(D,\Omega_1) \leqslant \inf\{\mathsf{Cap}_p(U,\Omega_1);$ U é aberto e $D \subset U \Subset \Omega\}$. Por outro lado, dado $\epsilon > 0$ existe $u \in A(D,\Omega)$ tal que $u = 1$ em uma vizinhança aberta U de D e

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \leqslant \mathsf{Cap}_p(D,\Omega) + \epsilon.$$

Assim,

$$\mathsf{Cap}_p(U,\Omega) \leqslant \mathsf{Cap}_p(D,\Omega) + \epsilon,$$

e fazendo $\epsilon \to \infty$ teremos $\inf\{\mathsf{Cap}_p(U,\Omega);\ U$ aberto e $D \subset U \Subset \Omega\} \leqslant \mathsf{Cap}_p(D,\Omega)$ concluindo a igualdade do item iii).

iv) Dado $\epsilon > 0$, tomemos $u \in A(D_1,\Omega)$ e $v \in A(D_2,\Omega)$ tais que

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \leqslant \mathsf{Cap}_p(D_1,\Omega) + \frac{\epsilon}{2} \quad e \quad \int_\Omega |\nabla v|^p \leqslant \mathsf{Cap}_p(D_2,\Omega) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Observe que, $w_1 = \max\{u,v\} \in A(D_1 \cup D_2,\Omega)$ e $w_2 = \min\{u,v\} \in A(D_1 \cap D_2,\Omega)$ e

$$\int_\Omega |\nabla w_1|^p + \int_\Omega |dw_2|^p = \int_\Omega |\nabla u|^p + \int_\Omega |\nabla v|^p.$$

Como

$$\mathsf{Cap}_p(D_1 \cup D_2,\Omega) + \mathsf{Cap}_p(D_1 \cap D_2) \leqslant \int_\Omega |\nabla w_1|^p + \int_\Omega |\nabla w_2|$$

concluímos que

$$\mathsf{Cap}_p(D_1 \cup D_2,\Omega) + \mathsf{Cap}_p(D_1 \cap D_2) \leqslant \mathsf{Cap}_p(D_1,\Omega) + \mathsf{Cap}_p(D_2,\Omega).$$

v) É imediato que $\mathsf{Cap}_p(\partial U,\Omega) \leqslant \mathsf{Cap}_p(\overline{U},\Omega)$. Seja A um aberto contendo $\overline{U}$. Definindo $D_1 = U$ e $D_2 = A \backslash U$, pelo item anterior,

$$\mathsf{Cap}_p(A,\Omega) \leqslant \mathsf{Cap}_p(A \backslash U,\Omega).$$

Consequentemente, $\inf_A\{\mathsf{Cap}_p(A,\Omega)\} \leqslant \inf_A\{\mathsf{Cap}_p(A \backslash U,\Omega)\}$. Isto prova o resultado.

vi) Observe que pelo item i) concluímos que tal limite existe, pois é uma sequência monótona e limitada inferiormente. Dado $\epsilon = 2^{-k} > 0$, existe $u \in A(D,\Omega)$ tal que

$$\mathsf{Cap}_p(D,\Omega) \leqslant \int_\Omega |\nabla u|^p \leqslant \mathsf{Cap}(D,\Omega) + \epsilon.$$

Existe $i(k) \in \mathbb{N}$ suficientemente grande com $i(k) \to \infty$, quando $k \to \infty$, de tal modo que $supp(u) \subset \Omega_i$. Daí

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p = \int_{\Omega_i} |d(u|_{\Omega_i})|^p,$$

logo

$$Cap_p(D, \Omega) \leqslant Cap_p(D, \Omega_i) \leqslant \int_{\Omega_i} |d(u|_{\Omega_i})|^p = \int_{\Omega} |\nabla u|^p \leqslant Cap_p(D, \Omega) + \frac{1}{2^k}.$$

Fazendo $k \to \infty$ teremos

$$\lim_{k\to\infty} Cap(D, \Omega_{i(k)}) = Cap_p(D, \Omega),$$

e concluímos a demonstração do teorema. □

A definição de p-capacidade pode ser estendida para conjuntos arbitrários $A \subset \Omega$. Primeiro, para um aberto $U \subset \Omega$ definiremos

$$Cap_p(U, \Omega) := \sup\{Cap_p(D, \Omega) \colon D \subset U \ \ compacto\}.$$

De fato, dado $\epsilon > 0$ existe um compacto $D'_\epsilon \subset U$ tal que

$$\sup_{U \supset D}\{Cap_p(D, \Omega)\} - \epsilon \leqslant Cap_p(D'_\epsilon, \Omega) \leqslant \sup_{U \supset D}\{Cap_p(D, \Omega)\}.$$

como $D' \subset U$, pelo item ii) do Teorema 2.1, temos

$$\sup_{U \supset D}\{Cap_p(D, \Omega)\} - \epsilon \leqslant Cap_p(D'_\epsilon, \Omega) \leqslant Cap_p(U, \Omega) \leqslant \sup_{U \supset D}\{Cap_p(D, \Omega)\},$$

e fazendo $\epsilon \to 0$, concluímos a igualdade estabelecida. A partir disso, podemos estender a definição para um conjunto arbitrário $A \subset \Omega$ como sendo

$$Cap_p(A, \Omega) := \inf\{Cap_p(U, \Omega) \colon A \subset U \subset \Omega \ \ aberto\},$$

utilizando argumento semelhante, neste caso para o ínfimo.

Definição 2.2. *Um conjunto $E \subset M$ (não necessariamente compacto) é dito conjunto de p-capacidade nula, ou simplesmente p-polar, se para todo par de bolas abertas $B_1 \Subset B_2$ tivermos*

$$Cap_p(E \cap \overline{B_1}, B_2) = 0.$$

Caso contrário, o conjunto E é dito de p-capacidade localmente positiva.

Lema 2.2. *Se* E *é um conjunto* p*-polar, então E também é um conjunto q-polar para todo* $q \leqslant p$.

Demonstração. Dados $B_1 \Subset B_2$ bolas abertas. Temos que volume de B_2 é finito e $Cap_p(E \cap \overline{B_1}, B_2) = 0$. Então, pelo Lema 2.1, $Cap_q(E \cap \overline{B_1}, B_2) = 0$. Portanto E é q-polar. □

Teorema 2.2. *Conjuntos com* p*-capacidade nula em uma variedade Riemanniana M de dimensão n possuem as seguintes propriedades:*

i) Se E *é limitado e* $Cap_p(E, U) = 0$ *para alguma vizinhança aberta* U *relativamente compacto, então* E *é um conjunto* p*-polar;*

ii) Uma união enumerável de conjuntos p*-polar é um conjunto* p*-polar;*

iii) Conjuntos p*-polar tem medida (n-dimensional) nula;*

iv) Se existe uma constante $c < \infty$ *tal que para todo aberto* $U \supset E$ *tivermos* $Cap_p(E, U) \leqslant c$*, então* E *é um conjunto* p*-polar.*

Demonstração. i) Sendo E limitado, podemos cobri-lo com uma coleção finita de bolas abertas $\{B_i\}$ de tal modo que $E \subset E' = \cup B_i$, $E' \subset U$ e que B_2 seja uma bola da coleção. Para qualquer $B_1 \Subset B_2$ tem-se $Cap_p(E \cap \overline{B_1}, U) = 0$. Então, podemos tomar $u \in W(E \cap \overline{B_1}, U) \cap C_0^\infty(U)$ com a condição $\int_U |\nabla u|^p < \epsilon$ e dado $v \in W(E \cap \overline{B_1}, B_2)$, pelo Teorema 1.3, $uv \in W(E \cap \overline{B_1}, B_2)$. Segue que

$$\begin{aligned} Cap_p(E \cap \overline{B_1}, B_2) &\leqslant \int_{B_2} |\nabla(uv)|^p \\ &\leqslant 2^p \max |v|^p \int_{B_2} |\nabla u|^p + 2^p \max |\nabla v|^p \int_{B_2} |u|^p \\ &< 2^p \max |v|^p \epsilon + c \int_{B_2} |\nabla u|^p < \epsilon(c), \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos Poincaré.

Fazendo $\epsilon \to 0$ concluímos que $Cap_p(E \cap \overline{B_1}, B_2) = 0$.

ii) Seja $E = \bigcup_i E_i$ a união enumerável de conjuntos p-polares, teremos pela generalização do Teorema 2.1, item iv), que $Cap_p(\bigcup_i E_i, \Omega) \leqslant \sum_i Cap_p(E_i, \Omega) = 0$. Aqui, temos que a p-capacidade da interseção de k conjuntos p-polares é também um conjunto p-polar pelo simples fato de $\bigcap_i E_i \subset E_i$.

iii) Dado $\epsilon > 0$, escolhemos $u \in A(E, \Omega)$ tal que $\int_\Omega |\nabla u|^p < \epsilon$, existe uma vizinhança$U$ de E, satisfazendo

$$|E| \leqslant |U| \leqslant \int_\Omega |u|^p \leqslant c \int_\Omega |\nabla u|^p < c\epsilon.$$

Portanto, E tem medida nula.

iv) Escolhendo uma sequência decrescente de conjuntos abertos limitados tais que

$$U_1 \Supset U_2 \Supset \cdots \Supset \bigcap_i U_i = E,$$

e escolhendo $\varphi_i \in C_0^\infty(U_i)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ com $\varphi = 1$ em E e também

$$\int_{U_i} |\nabla \varphi_i|^p \, dx \leqslant C + 1.$$

Pela desigualdade de Poincaré

$$\int_{U_i} |\varphi_i|^p \, dx \leqslant M$$

onde M é uma constante que não depende de i. Como φ_i converge pontualmente para a função ψ o qual assume os valores 1 em E e 0 em $U_1 \backslash E$, com $\nabla \psi = 0$ quase sempre. Pelo Teorema 1.5 temos que $\psi \in W_0^{1,p}(U_1)$. E portanto,

$$Cap_p(E, U_1) \leqslant \int_{U_1} |\nabla \psi|^p \, dx = 0.$$

□

Agora veremos algumas conexões entre a p-capacidade e medida de Hausdorff.

Lema 2.3. *Seja* M *uma variedade Riemanniana completa. Dado* $x_0 \in M$ *e* $0 < r \leqslant 1$. *Então, existe uma constante* $c = c(n, p)$ *tal que*

$$Cap_p(B(x, r)) \leqslant c r^{n-p}.$$

Demonstração. Defina a função

$$u(y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y \in B(x_0, r); \\ 2 - \frac{|y - x_0|}{r} & \text{se } y \in B(x_0, 2r) \backslash B(x_0, r); \\ 0, & \text{se } y \in \Omega \backslash B(x_0, 2r). \end{cases}$$

Observe que $0 \leqslant u \leqslant 1$ e $|\nabla u| \leqslant 1/r$ quase sempre. Logo $u \in A(B(x, r), \Omega)$ e

$$\begin{aligned} Cap_p(B(x, r), \Omega) &\leqslant \int_{B(x,2r)} |u(y)|^p \, dy + \int_{B(x,2r)} |\nabla u(y)|^p \, dy \\ &\leqslant (1 + r^{-p}) Vol(B(x, 2r)) \\ &\leqslant (2r^{-p}) Vol(B(x, 2r)) \\ &= c r^{n-p}. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.3. *Seja* $1 < p < n$*. Então, existe uma constante* $c = c(n, p)$ *tal que*

$$\mathrm{Cap}_p(E, \Omega) \leqslant cH^{n-p}(E)$$

para todo $E \subset \Omega$ *limitado.*

Demonstração. Seja $B(x_i, r_i)$, $i = 1, 2, ...$ uma cobertura de E tal que $r_i \leqslant \delta$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Temos

$$\mathrm{Cap}_p(E, \Omega) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Cap}_p(B(x_i, r_i)) \leqslant c \sum_{i=1}^{\infty} r_i^{n-p}$$

tomando o ínfimo sobre toda cobertura por tais bolas e observando que $H^s_\delta(E) \leqslant H^s(E)$ obtemos

$$\mathrm{Cap}_p(E, \Omega) \leqslant cH^{n-p}_\delta(E) \leqslant cH^{n-p}(E).$$

□

Lema 2.4. *Assuma que* $1 < p < n$*. Se* $\mathrm{Cap}_p(E, \Omega) = 0$*, então* $H^s(E) = 0$ *para todo* $s > n - p$*.*

Demonstração. Se $\mathrm{Cap}_p(E, \Omega) = 0$ para cada $i \in \mathbb{N}$, então existe uma sequência de funções $u_i \in A(E, \Omega)$ tal que $\|u_i\|^p_{W^{1,p}} \leqslant 2^{-i}$. Defina $u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \in W^{1,p}(\Omega)$. Ora, seja $v_k = \sum_{i=1}^{k} u_i$, $k = 1, 2, ...$, então $v_k \in W^{1,p}(\Omega)$ e

$$\|v_k\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \Big\| \sum_{i=1}^{k} u_i \Big\| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \|u_i\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \infty.$$

Assim, (v_k) é uma sequência limitada em $W^{1,p}(\Omega)$. Desde que $0 \leqslant u_i \leqslant 1$, observamos que v_k é crescente e assim $v_k \to u$ quase sempre. Pelo Teorema 1.5 concluímos que $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Ademais $u \geqslant 1$ em E.

Se $s > n - p$, então

$$\limsup_{r \to 0} \int_{B(x,r)} |\nabla u|^p \, dy = \infty$$

para todo $x \in E$, [4, Pág. 112]. Assim,

$$E \subset \left\{ x \in \Omega : \frac{1}{r^s} \int_{B(x,r)} |\nabla u|^p \, dy = \infty \right\} \subset \left\{ x \in \Omega : \frac{1}{r^s} \int_{B(x,r)} |\nabla u|^p \, dy > 0 \right\}.$$

Pelo Lema 1.5,

$$H^s(E) \leqslant H^s \left(\left\{ x \in \Omega : \frac{1}{r^s} \int_{B(x,r)} |\nabla u|^p \, dy > 0 \right\} \right) = 0.$$

Isto mostra que $H^s(E) = 0$ para qualquer que seja $s \in (n - p, n)$. Como $H^s(E) = 0$ implica em $H^t(E) = 0$ para todo $t \geqslant s$, chegamos ao resultado. □

Teorema 2.4. *Seja* $E \subset M$ *um conjunto limitado com dimensão de Hausdorff* s $(0 < s < n-1)$*. Então* E *é* p*-polar para* $1 < p < (n-s)$ *e* E *é um conjunto com* p*-capacidade localmente positiva se* $p > (n-s)$*.*

Demonstração. Seja $p \in (1, n-s)$. Então, pelo Teorema 2.3 e a definição de dimensão de Hausdorff temos

$$\mathrm{Cap}_p(E, M) \leqslant cH^{n-p}(E) = 0$$

portanto E é p-polar.

Agora, suponha $p > n-s$ e $\mathrm{Cap}_p(E, \Omega) = 0$. Então, $s > n-p$ e pelo Lema 2.4 $H^t(E) = 0$ para todo $t > n-p$ contrariando o fato de s ser a dimensão de Hausdorff de M.

□

Proposição 2.1. *Um conjunto fechado* $E \subset M$ *é* p*-polar se, e somente se, para toda vizinhança* U *de* E *e todo* $\epsilon > 0$*, existir uma função* $u \in C^1(M)$ *tal que*

i) O suporte de u está contido em $M \backslash E$*;*

ii) $0 \leqslant u \leqslant 1$*;*

iii) $u \equiv 1$ *em* $M \backslash U$*;*

iv) $\int_\Omega |\nabla u|^p \leqslant \epsilon$*.*

Demonstração. Seja $E \subset M$ um conjunto p-polar. Primeiramente, suponha E limitado. Pelo item i) do Teorema 2.2, para cada vizinhança U de E temos $\mathrm{Cap}_p(E, U) = 0$. Dado $\epsilon > 0$ existe $v \in C_0^1(U)$ tal que $v = 1$ em uma vizinhança $U' \subset U$ de E com $0 \leqslant v \leqslant 1$ e $\int |\nabla v|^p \leqslant \epsilon$. Definindo $u \in C^1(M)$ por

$$u(x) = \begin{cases} 1 - v(x), & \text{se } \ x \in U \\ 1, & \text{se } \ x \in M \backslash U \end{cases}$$

veremos que u satisfaz as propriedades i)-iv). Para cada $x_0 \in E$ existe uma vizinhança V de x_0 contida em U' tal que $u(x) = 0$, para todo $x \in V$, logo $x \notin \mathrm{supp}(u)$. Consequentemente $\mathrm{supp}(u) \in M \backslash E$. Os itens ii) e iii) são claramente satisfeitas pela construção de u. E, finalmente, temos que $\int_M |\nabla u|^p \leqslant \int_M |\nabla v|^p \leqslant \epsilon$. Agora, suponha $E \subset M$ ilimitado. Seja U alguma vizinhança de E. Podemos decompor E como a união enumerável de conjuntos disjuntos e limitados, $E = \bigcup E_i$. Para cada E_i podemos encontrar uma vizinhança U_i limitada tal que $E_i \subset U_i \subset U$ e que a cobertura $\{U_i\}$ de E seja localmente finita, isto é, cada compacto de M intersecta apenas um número finito de conjuntos da coleção. Para cada i existe $u_i \in C^1(M)$ satisfazendo

i. $supp(u_i) \subset M \backslash E_i$;

ii. $0 \leqslant u_i \leqslant 1$;

iii. $u_i \equiv 1 \;\; em \;\; M \backslash U_i$;

iv. $\int_M |\nabla u_i|^p \leqslant 2^{-pi}\epsilon$.

Por construção, a função $u = \prod u_i \in C^1(M)$ satisfaz as propriedades.

Reciprocamente, escolhamos um par de bolas $B_1 \Subset B_2 \subset M$ e uma vizinhança U de E tal que $Vol(U \cap B_2) < \epsilon$. Seja $\varphi : M \to [0,1]$ uma função suave com $\varphi = 1$ em B_1 e $supp\varphi \subset B_2$. Faça $c := ||\varphi||_{L^\infty}$. Seja $u : M \to [0,1]$ uma função satisfazendo as propriedades da hipótese. Defina $w : M \to [0,1]$ por

$$w := \min\{\varphi, 1-u\},$$

e veja que $w = 1$ em uma vizinhança de $E \cap B_1$ e $supp(w) \subset U \cap B_2$. Logo

$$||dw||_{L^p(B_2)} = ||\nabla w||_{L^p(U\cap B_2)} \leqslant ||\nabla(1-u)||_{L^p(U\cap B_2)} + ||\nabla \varphi||_{L^p(U\cap B_2)}. \tag{2.1}$$

Temos que $||\nabla(1-u)||_{L^p(U\cap B_2)} = ||\nabla u||_{L^p(U\cap B_2)} \leqslant \epsilon^{1/p}$. E,

$$||\nabla\varphi||_{L^p(U\cap B_2)} = \left(\int_{U\cap B_2} |\nabla\varphi|^p\right)^{1/p} \leqslant \sup|\nabla\varphi| \int_{U\cap B_2} 1 \leqslant c\epsilon^{1/p}.$$

Assim, substituindo isto em (2.1) obteremos

$$||\nabla w||_{L^p(B_2)} \leqslant (1+c)\epsilon^1/p$$

e fazendo $\epsilon \to 0$ concluímos que $Cap_p(E, M) = 0$. □

Suponha $\Omega \subset M$ um domínio conexo de M e $D \subset \Omega$ um subconjunto compacto. Seja $U_i \Subset \Omega$ uma sequência crescente de subconjuntos abertos de Ω tal que $D \subset U_1$ e $\bigcup_i U_i = \Omega$. Seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ uma função tal que $\varphi = 1$ em uma vizinhança U de D e $supp\varphi \subset U_1$. Então, pelo Teorema 1.9 existe uma única função p-harmônica

$u_i \in W^{1,p}(U_i \backslash D)$ com $u_i - \varphi \in W_0^{1,p}(U_i \backslash D)$. Façamos $u_i = 1$ em D e $u_i = 0$ em $\Omega \backslash U_i$. Pela propriedade minimizante temos a seguinte desigualdade

$$\mathsf{Cap}_p(D, \Omega) \leqslant \int_\Omega |\nabla u_i|^p = \int_{U_i} |\nabla u_i|^p \leqslant \mathsf{Cap}_p(D, U_i).$$

Como (u_i) é uma sequência crescente e limitada de funções p-harmônica em $U_i \backslash D$, pelo princípio de Harnack, a função $u = \lim u_i$ é p-harmônica em $\Omega \backslash D$. Assim, pela desigualdade acima concluímos que

$$\mathsf{Cap}_p(D, \Omega) = \int_\Omega |\nabla u|^p.$$

Esta função u é chamada de p-potencial de D em Ω. Esclarecido isto, a proposição a seguir afirma que se um compacto $D_2 \subset \Omega$ contém um compacto D_1 com interior não-vazio e p-capacidade nula então ele também será de p-capacidade nula.

Proposição 2.2. *Seja Ω um domínio conexo em M e $D_1 \Subset D_2 \Subset \Omega$ conjuntos compactos. Suponha que D_1 tenha interior não vazio e que $\mathsf{Cap}_p(D_1, \Omega) = 0$. Então $\mathsf{Cap}_p(D_2, \Omega) = 0$.*

Demonstração. Pela monotonicidade da p-capacidade podemos assumir que D_1 e D_2 são fechos de domínios suaves. Escolha uma exaustão de Ω por conjuntos abertos, limitados e com fronteira suave U_i de tal forma que

$$D_1 \Subset D_2 \Subset U_1 \Subset \cdots \Subset U_k \Subset \Omega.$$

A partir disso, para cada U_i existe uma única solução contínua $u_i : \overline{U_i} \to \mathbb{R}$ para o problema de p-Dirichlet

$$\begin{cases} u_i = 1 & \text{em } D_1; \\ u_i = 0 & \text{em } \partial U_i; \\ \Delta_p u_i = 0 & \text{em } U_i \backslash D_1. \end{cases}$$

Pelo princípio do máximo, concluímos acerca de cada u_i que: $0 \leqslant u \leqslant 1$, c:= $\inf_{D_2}(u_i) > 0$ em D_2 e que $u_{i+1} \geqslant u_i$ em U_i. Em particular, a função u_i assume valores maiores que $c > 0$ em D_2. Podemos observar, pelo comentário anterior, que a integral p-Dirichlet da função u_i é a p-capacidade de D_1 em U_i, isto é,

$$\mathsf{Cap}_p(D_1, U_i) = \int_{U_i} |\nabla u_i|^p.$$

Defina a função $\nu_i : \Omega \to \mathbb{R}$ como sendo $\nu_i = u_i/c$ e $\nu_i = 0$ em $\Omega \backslash U_i$. Apartir dessa definição teremos que $\nu_i \geqslant 1$ em D_2. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathrm{Cap}_p(D_2, \Omega) &\leqslant \lim_{i\to\infty} \int_\Omega |\nabla \nu_i|^p \\ &= \frac{1}{c^p} \lim_{i\to\infty} \int_{U_i} |\nabla u_i|^p \\ &= \frac{1}{c^p} \lim_{i\to\infty} \mathrm{Cap}_p(D_1, U_i) \\ &= \frac{1}{c^p} \mathrm{Cap}_p(D_1, \Omega) = 0. \end{aligned}$$

□

Corolário 2.1. *Se* $\mathrm{Cap}_p(D, \Omega) = 0$ *para algum subconjunto compacto* $D \subset \Omega$ *com interior não vazio, então* $\mathrm{Cap}_p(D', \Omega) = 0$ *para todo subconjunto compacto* $D' \subset \Omega$.

Demonstração. Tome $D_2 \subset \Omega$ compacto tal que $D \cup D' \subset D_2$. Pela Proposição 2.2 $\mathrm{Cap}_p(D_2, \Omega) = 0$ e portanto $\mathrm{Cap}_p(D', \Omega) \leqslant \mathrm{Cap}_p(D_2, \Omega) = 0$. □

Com este resultado concluímos que se um subconjunto compacto de interior não-vazio D em uma variedade Riemanniana M tem p-capacidade nula, então a p-capacidade de qualquer outro subconjunto compacto de M também será nula. Por outro lado, se D tem p-capacidade positiva, então todo subconjunto compacto de M tem p-capacidade positiva. Em outras palavras, p-capacidade ser ou não positiva em um compacto é uma propriedade válida para todo compacto na variedade M.

Capítulo 3

Parabolicidade

Definição 3.1. *Seja* Ω *um domínio conexo em um variedade Riemanniana* (M, g) *e* $p \geqslant 1$. *Dizemos que* Ω *é* p*-parabólico se existir um compacto* $D \subset \Omega$ *com interior não-vazio tal que* $\mathrm{Cap}_p(D, \Omega) = 0$. *Dizemos que* Ω *é* p*-hiperbólico se existir um conjunto compacto* $D \subset \Omega$ *com interior não-vazio tal que* $\mathrm{Cap}_p(D, \Omega) > 0$.

A definição acima classifica todo domínio em duas categorias: p-parabólico e p-hiperbólico. De fato, pelo Corolário 2.1, se existir um compacto $D \subset \Omega$ tal que $\mathrm{Cap}_p(D, \Omega) = 0$, então o mesmo ocorre para todo compacto $D' \subset \Omega$. Portanto, esse domínio Ω será p-parabólico. Por outro lado, caso exista um compacto $D \subset \Omega$ com interior não vazio tal que $\mathrm{Cap}_p(D, \Omega) > 0$ o mesmo Corolário nos dá que não existe $D' \subset \Omega$ com interior não-vazio e $\mathrm{Cap}_p(D', \Omega) = 0$. Se houvesse teríamos $\mathrm{Cap}_p(D, \Omega) = 0$. Concluímos que a caracterização do domínio é dicotômica.

O lema a seguir mostra que a propriedade p-hiperbólica é preservada quando passamos para subconjuntos.

Lema 3.1. *Se* (N, g) *é uma variedade Riemanniana* p*-hiperbólica, então todo domínio aberto* $\Omega \subset N$ *é* p*-hiperbólico.*

Demonstração. Suponha $\Omega \subset N$ p-parabólico. Então, existe uma bola aberta $B \subset \Omega$ tal que $\mathrm{Cap}_p(B, \Omega) = 0$. Daí teremos $\mathrm{Cap}_p(B, N) = 0$, pelo item i) do Teorema 2.1. Logo N seria p-parabólico, o que é absurdo. $\square$

Proposição 3.1. *O domínio* Ω *é* p*-parabólico se, e somente se, existe uma sequência de funções* $u_j \in C_0^1(\Omega)$ *tal que* $0 \leqslant u_j \leqslant 1$, $u_j \to 1$ *uniformemente em todo subconjunto compacto de* Ω *e* $\int_\Omega |\nabla u_j|^p \to 0$.

Demonstração. Suponhamos que Ω seja p-parabólico. Seja $D \subset \Omega$ um compacto com interior não-vazio tal que $\mathrm{Cap}_p(D, \Omega) = 0$. Tomemos uma exaustão

$$D \subset D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset \Omega$$

de Ω por subconjuntos compactos. Pelo Corolário 2.1 temos $\mathrm{Cap}_p(D_j, \Omega) = 0$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Podemos definir funções $u_j \in C_0^1(\Omega)$ tais que $0 \leqslant u_j \leqslant 1$ e $u_j \equiv 1$ em D_j, com $\int_\Omega |\nabla u_j|^p \leqslant \frac{1}{j}$. Observe que, dado um subconjunto compacto $K \subset \Omega$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset D_j$ para todo $j \geqslant j_0$. Portanto, $u_j \to 1$ uniformemente em K, e ainda, $\int_\Omega |\nabla u_j|^p \to 0$.

Reciprocamente, dado u_j uma sequência de funções satisfazendo as propriedades impostas no enunciado, podemos tomar uma bola aberta $B \subset \Omega$ e $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $u_j \geqslant 1\backslash 2$ em B para todo $j \geqslant j_o$. Daí, $2u_j \in C_0^1(\Omega)$ e $2u_j \geqslant 1$ em B. Como $2\int_\Omega |\nabla u_j|^p \to 0$, concluímos que $\mathrm{Cap}_p(B, \Omega) = 0$. Portanto, Ω é p-parabólico. □

Definição 3.2. *(Função de Green para o p-Laplaciano) Seja y um ponto de um domínio regular $U \Subset M$. Uma função $g = g(\cdot, y)$ é chamada de função de Green para o p-Laplaciano quando satisfaz as seguintes propriedades:*

i. *g é p-superharmônica em Ω;*

ii. *g é p-harmônica em $U \backslash \{y\}$;*

iii. $\lim\limits_{x \to z} g(x) = 0$*, para todo* $z \in \partial U$*;*

iv. $\lim\limits_{x \to y} g(x) = \infty$*;*

v. $\mathrm{Cap}_p(\{x \in U : g(x) \geqslant b\}, \{x \in U : g(x) > a\}) = (b - a)^{1-p}$*, para todo* $b > a \geqslant 0$.

Se $U \subset M$ é um domínio regular e $y \in U$, então existe uma função de Green $g = g(\cdot, y)$ [7, 3.19]. Dado um subconjunto compacto $D \subset U$ tal que o ponto y pertença a ele, definindo o valor $c := \min\limits_{x \in \partial D} g(x, y)$ teremos que a função $u : \overline{U} \to R$ com $u = 1$ em D, $u = 0$ em ∂D e

$$u(x) = \frac{1}{c} g(x, y)$$

em $U \backslash D$, é uma função p-harmônica em $U \backslash D$ que se anula na fronteira fronteira $\partial(U \backslash D)$, e portanto, é a função p-potencial para D em U. Esta importante relação nos diz que na existência de uma função de Green em um domínio Ω a p-capacidade do condensador (D, Ω) é equivalente a variação de energia de $\frac{1}{c} g(x, y)$, isto é

$$\mathrm{Cap}_p(D, \Omega) = c^{-1} \int_{\Omega \backslash D} |\nabla g(x, y)|^p \, dx.$$

Lema 3.2. *Seja* g *uma função de Green e* $b > a \geqslant 0$*. Então,*

$$\int_D \langle \|\nabla g\|^{p-2}\nabla g, \nabla g\rangle = b - a$$

onde $D = \{x \in U : a < g(x) \leqslant b\}$.

Demonstração. Veja que, $g' = (g - a)/(b - a)$ é p-potencial para

$$E = (\{x \in U : g(x) \geqslant b\}, \{x \in U : g(x) > a\}).$$

Assim,

$$\begin{aligned}(b-a)^{1-p} = \mathrm{Cap}_p E &= \int_D \langle \|\nabla g'\|^{p-2}\nabla g', \nabla g'\rangle \\ &= (b-a)^{-p}\int_D \langle \|\nabla g\|^{p-2}\nabla g, \nabla g\rangle.\end{aligned}$$

donde concluímos o resultado. □

Teorema 3.1. *Seja* Ω *um domínio em uma variedade Riemanniana (M,g). Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) Ω *é* p*-parabólico;*

ii) Não existe uma função não-constante, positiva e p-superharmônica em Ω*;*

iii) Não existe uma função de Green positiva para o p*-Laplaciano em* Ω*.*

Demonstração. i) $\Rightarrow$ ii). Suponha que Ω é p-parabólico e que exista uma função não-constante, positiva e p-superharmônica em Ω. Seja $x_0 \in \Omega$ com $0 < u(x_0) < \infty$ e, seja $\epsilon > 0$ tal que $u(x_0) - \epsilon > 0$. Como u é p-superhamônica, temos que u é semicontínua inferiormente, e assim existe uma bola $B_0 = B(x_0, r) \Subset \Omega$ tal que $u(x) \geqslant u(x_0) - \epsilon$ para todo $x \in \overline{B_0}$. Considere uma exaustão $\{U_i\}$ de Ω tal que

$$\overline{B_0} \Subset U_1 \Subset U_2 \Subset ...\Omega.$$

Assim, existe uma função $h_i \in C^\infty(\Omega)$ tal que h_i é p-harmônica em $U_i \backslash \overline{B_0}$, $h_i = 0$ em $M\backslash U_i$ e $h_i = u(x_0) - \epsilon$ em $\overline{B_0}$. A função $h = \lim_{i\to\infty} h_i/(u(x_0) - \epsilon)$ é p-potencial para $\overline{B_0}$ em Ω. Como Ω é p-parabólico

$$\mathrm{Cap}_p(\overline{B_0}, \Omega) = \int_\Omega |dh|^p = 0$$

Com isto, temos que $h = u(x_0) - \epsilon$ para todo $x \in \Omega$. Por outro lado, $u \geqslant h_i$ em $U_i \backslash \overline{B_0}$. Assim $u \geqslant u(x_0) - \epsilon$ em M para todo $\epsilon > 0$. Fazendo $\epsilon \to 0$ obtemos $u \geqslant u(x_0)$. Como

u é não-constante, existe $x_1 \in \Omega$ tal que $u \geqslant u(x_1)$, pelo mesmo argumento, o que é uma contradição ja que $u(x_1) > u(x_0)$. Isto mostra que u é constante. Portanto concluímos a implicação.

ii) $\Rightarrow$ iii) Suponha que $g(\cdot, y)$ é uma função de Green positiva para o p-Laplaciano em Ω. Então, tomando $D \subset \Omega$ tal que y pertença a D e $c := \min_{x \in D \subset \Omega} g(x, y)$. Concluímos que a função $u = c$ em D e $u = g(x, y)$ em $\Omega \backslash D$ é uma função positiva, não-constante e p-superharmônica em Ω.

i) $\Leftrightarrow$ iii) Seja $\{U_i\}$ uma exaustão de Ω por domínio regulares

$$U_1 \Subset U_2 \Subset ... \Subset \bigcup_i U_i = \Omega$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$ existe uma função de Green $g_i = g(\cdot, y)$, $y \in U_1$, tal que $\{g_i\}$ é crescente. Pelo princípio de Harnack, temos que $g = \lim_{i \to \infty} g_i$ é identicamente $+\infty$ ou uma função p-harmônica em $\Omega \backslash \{y\}$.

Seja $D \subset U_1$ um subconjunto compacto de Ω com interior não vazio tal que $D \subset B$ é uma bola com centro y tal que $2B \subset U_1$ e $y \in D$ e que $m_1 = \{g_1(x) : x \in \partial D\} \geqslant 1$. Escreva

$$E_i(a, b) = (\{x \in U_i : g_i(x) \geqslant b\}, \{x \in U_i : g_i(x) > a\}),$$

$$m_i = \min\{g_i(x) : x \in \partial D\},$$

$$M_i = \max\{g_i(x) : x \in \partial D\}.$$

Segue que

$$\{x \in \Omega : g_i(x) \geqslant M_i\} \subset D \subset \{x \in \Omega : g_i(x) \geqslant m_i\}.$$

Pela desigualdade de Harnack,

$$M_i \leqslant \lambda_i m_i$$

Suponha que Ω seja p-hiperbólico. Então, $Cap_p(D, \Omega) > 0$ e

$$Cap_p(D, \Omega) \leqslant Cap_p(D, U_i) \leqslant Cap_p E_i(0, M_i) \leqslant Cap_p E_i(0, \lambda_i m_i) = (\lambda_i m_i)^{1-p}.$$

Consequentemente,

$$m_i \leqslant \lambda m_i \leqslant Cap_p(D, \Omega)^{\frac{1}{1-p}}.$$

Portanto existe $g = \lim_{i \to \infty} g_i$ uma função de Green definida em Ω.

Por outro lado, se Ω é p-parabólico e existe uma função de Green para o p-Laplaciano em Ω, então, para algum valor $b > 0$ tal que $D = \{x \in \Omega : g(x) \geqslant b\}$ seja compacto em Ω, a p-capacidade de D em Ω é igual a $b^{1-p} > 0$, o que contradiz Ω ser p-parabólico. $\square$

Teorema 3.2. *Seja $E \subset M$ um subconjunto em uma variedade Riemanniana M. Se $E \subset M$ tem p-capacidade localmente positiva, então $\Omega := M \backslash E$ é p-hiperbólico.*

Demonstração. Suponha que Ω é p-parabólico. Pela Proposição 3.1 podemos encontrar uma sequência de funções $u_j \in C_0^1(\Omega)$ tal que $0 \leqslant u_j \leqslant 1$, $u_j \to 1$ uniformemente em todo subconjunto compacto de Ω e $\int_\Omega |\nabla u_j|^p \to 0$. Com isso, pela Proposição 2.1, concluímos que E é um conjunto p-polar. □

Teorema 3.3. *Seja $E \subset M$ um subconjunto em uma variedade Riemanniana M. Se M é p-parabólico e $E \subset M$ é um conjunto p-polar, então $\Omega := M \backslash E$ é p-parabólico.*

Demonstração. Se M é p-parabólico, existe uma sequência de funções $v_j \in C_0^1(M)$ tal que $0 \leqslant v_j \leqslant 1$, $v_j \to 1$ uniformemente em todo subconjunto compacto de M e $\int_M |\nabla v_j|^p \to 0$. Dado E um conjunto p-polar, pela Proposição 2.1 existe outra sequência de funções $w_j : M \to [0, 1]$ suave com suporte em $M \backslash E$, tal que $w_j \to 1$ uniformemente em todo subconjunto compacto em $M \backslash E$ e $\int_\Omega |dw_j|^p \to 0$.
Agora, defina $u_j := v_j \cdot w_j : \Omega \to \mathbb{R}$ e teremos uma sequência de funções $u_j \in C_0^1(M)$, com $0 \leqslant u_j \leqslant 1$, $u_j \to 1$ uniformemente em todo subconjunto compacto de Ω e $\int_M |\nabla u_j|^p \to 0$. Portanto, Ω é p-parabólico. □

Corolário 3.1. *Seja M uma variedade Riemanniana fechada e $E \subset M$ um conjunto com dimensão de Hausdorff igual a s, com $(0 < s < n = \dim(M))$. Então, $\Omega := M \backslash E$ é p-parabólico se $1 < p < n - s$ e p-hiperbólico para valores $p > n - s$.*

Demonstração. Veja que, pelo Teorema 2.4, E é um conjunto p-polar para $1 < p < (n - s)$, o que implica em Ω ser p-parabólico, de acordo com o Teorema 3.3. Como, o conjunto E tem p-capacidade localmente positiva para valores $p > (n - s)$, concluímos a p-hiperbolicidade de Ω pelo Teorema 3.2. □

Capítulo 4

Estimativas Geométricas

4.1 p-Capacidade via p-fluxo

Sejam M uma variedade Riemanniana, $\Omega \subset M$ um domínio conexo e $D \Subset \Omega$ um subconjunto compacto em Ω. Definimos $\Lambda(D, \Omega)$ como a classe de funções $h : \Omega \to \mathbb{R}$ que satisfazem as seguintes propriedades:

i) h é contínua, localmente Lipschitz, não constante e limitada inferiormente;
ii) $D \subset \{x \in \Omega : h(x) = r_0 := \min h\}$;
iii) Se $r < \sup h$, então $\{x \in \Omega : h(x) \leqslant r\}$ é compacto.

O p-fluxo de uma função $h \in \Lambda(D, \Omega)$ é a função $\Phi_{h,p} : [r_0, r_1) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\Phi_{h,p}(r) = \int_{\partial\Omega_r} |\nabla h(x)|^{p-1} d\sigma(x),$$

onde $\Omega_r := \{x \in \Omega : h(x) < r\}$, $[r_0, r_1)$ é o intervalo de variação dos valores de h, isto é, $r_0 := \min h$ e $r_1 := \sup h \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, e $d\sigma$ é a medida de Hausdorff de dimensão $(n-1)$. Note que Ω_r é um domínio limitado para todo $r \in [r_0, r_1)$. Veja que se tivermos $p = 1$ então $\Phi_{h,1}$ é a área

$$\Phi_{h,1} = a_h(r) = \int_{\partial\Omega_r} d\sigma(x) = \sigma(\partial D)$$

Para uma função $h \in \Lambda(D, \Omega)$ de classe C^2, temos pelo Teorema da divergência

$$\Phi_{h,p}(r) = \int_{\partial\Omega_r} |\nabla h|^{p-2}\langle\nabla h, \mathbf{n}\rangle d\sigma = -\int_{\partial\Omega_r} (\Delta_p h) dV.$$

Definiremos por $Q_p(h)$, para $p > 1$, a seguinte integral

$$Q_p(h) = \left(\int_{r_0}^{r_1} \Phi_{h,p}(r)^{\frac{1}{1-p}} dr\right)^{1-p}.$$

Lema 4.1. *Seja* $m(r)$ *uma função positiva e limitada com* $p > 1$*. Então,*

$$\left(\int_0^1 m(r)^{\frac{1}{1-p}}\right)^{1-p} \leqslant \int_0^1 m(r)dr.$$

Demonstração. Pela desigualdade de Hölder,

$$1 = \int_0^1 \left(\frac{1}{m(r)}\right)^{\frac{1}{p}} m(r)^{\frac{1}{p}} dr \leqslant \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{m(r)}\right)^{\frac{1}{p-1}} dr\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^1 m(r)dr\right)^{\frac{1}{p}},$$

que por sua vez implica em

$$\left(\int_0^1 m(r)dr\right)^{-1} \leqslant \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{m(r)}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1}.$$

Assim

$$\left(\int_0^1 m(r)^{\frac{1}{1-p}}\right)^{1-p} \leqslant \int_0^1 m(r)dr.$$

□

Proposição 4.1. *Seja* $\lambda : \mathbb{R}\cup\{\infty\} \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ *uma função monótona localmente Lipschitz. Então para qualquer* $h \in \Lambda(D, \Omega)$

$$Q_p(\lambda \circ h) = Q_p(h).$$

Demonstração. Seja $h \in \Lambda(D, \Omega)$. A função λ define um homeomorfismo entre $[r_0, r_1]$ e $[t_0, t_1]$. Vamos supor que $\lambda'(r) > 0$ quase sempre. Fazendo $\tilde{h} := \lambda \circ h$, teremos

$$\begin{aligned}
\Phi_{\tilde{h},p}(\lambda(r)) &= \int_{\partial\Omega_{\lambda(r)}} |\nabla\tilde{h}|^{p-1} d\sigma \\
&= \int_{\partial\Omega_{\lambda(r)}} |\nabla(\lambda \circ h)|^{p-1} d\sigma \\
&= \int_{\partial\Omega_r} |\lambda'(r)|^{p-1} |\nabla h|^{p-1} d\sigma \\
&= \lambda'(r)^{p-1} \int_{\partial\Omega_r} |\nabla h|^{p-1} d\sigma \\
&= \lambda'(r)^{p-1} \Phi_{h,p}(r),
\end{aligned}$$

e portanto

$$\Phi_{h,p}(r) = \lambda'(r)^{1-p} \Phi_{\tilde{h},p}.$$

Daí

$$
\begin{aligned}
Q_p(r) &= \int_{r_0}^{r_1} \Phi_{h,p}(r)^{\frac{1}{1-p}} dr \\
&= \int_{r_0}^{r_1} \Phi_{\tilde{h},p}(r)^{\frac{1}{1-p}} |\lambda'(r)| dr \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \Phi_{\tilde{h},p}(r)^{\frac{1}{1-p}} dt = Q_p(\lambda \circ h).
\end{aligned}
$$

□

Corolário 4.1. *Podemos assumir* $|\nabla h(x)| \leqslant 1$ *quase sempre no cálculo de* $Q_p(h)$*.*

Demonstração. Escolha uma função positiva e suave $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|\nabla h(x)| \leqslant \varphi(h(x))$ quase sempre. Agora, a função $\lambda(r) = \int_{r_0}^{r_1} \frac{ds}{\varphi(s)}$ é monótona e localmente Lipschitz. Daí, para $\tilde{h} := \lambda \circ h$ temos que

$$
|\nabla \tilde{h}| = \lambda'(h(x))|\nabla h(x)| = \frac{1}{\varphi(s)} |\nabla h| \leqslant 1.
$$

Pela Proposição 4.1,

$$
Q_p(\tilde{h}) = Q_p(h).
$$

□

A seguir necessitaremos do seguinte teorema.

Teorema 4.1. *(Fórmula da coarea). Seja* M^n *uma variedade Riemanniana de dimensão n. Se* $h : M^n \to \mathbb{R}$ *é uma aplicação Lipschitz, então*

$$
\int_M \varphi(x)|\nabla h(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{h^{-1}(y)} \varphi(y) dH^n(y) \right) dt,
$$

onde $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ *é* H^{n+1}*-mensurável.*

Demonstração. Vide [9, Corolário 5.4]. □

Teorema 4.2. *Seja* $D \Subset \Omega \subset M$ *e* $p > 1$*. Então*

$$
\mathrm{Cap}_p(D, \Omega) = \inf_{h \in \Lambda(D,\Omega)} Q_p(h).
$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, seja $u \in C_0^1(\Omega)$ uma função tal que $0 \leqslant u \leqslant 1$, $u = 1$ em D e $\mathrm{Cap}_p(D, \Omega) \geqslant \int_\Omega |\nabla u|^p - \epsilon$. Faça $h(x) := 1 - u(x)$, então $h \in \Lambda(D, \Omega)$. Temos que

$r_0 := \min h = 0$ e $r_1 := \max h = 1$. Pela fórmula da coarea,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u|^p &= \int_\Omega |\nabla h|^p \\ &= \int_\Omega |\nabla h|^{p-1}|\nabla h| dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_{\partial\Omega_r} |\nabla h|^{p-1} d\sigma \right) dr \\ &= \int_0^1 \Phi_{h,p}(r) dr.\end{aligned}$$

Pelo Lema 4.1 obtemos a seguinte desigualdade

$$\mathrm{Cap}_p(D,\Omega) - \epsilon \geqslant \int_\Omega |\nabla u|^p = \int_0^1 \Phi_{h,p}(r) dr \geqslant \left(\int_0^1 \Phi_{h,p}(r)^{\frac{1}{1-p}} dr \right)^{1-p} = Q_p(h).$$

Consequentemente

$$\mathrm{Cap}_p(D,\Omega) \geqslant \inf_{h \in \Lambda(D,\Omega)} Q_p(h).$$

Reciprocamente, escolha uma função $h \in \Lambda(D,\Omega)$ e fixe um número $s \in (r_0, r_1]$, como sendo o intervalo de variação de h. Defina a função $u_s : \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$u_s(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } h(x) \leqslant r_0; \\ 1 - \gamma_s \int_{r_0}^{h(x)} \frac{dt}{\Phi_{h,p}(t)^{\frac{1}{p-1}}}, & \text{se } r_0 \leqslant h(x) \leqslant s; \\ 0, & \text{se } h(x) \geqslant s. \end{cases}$$

onde

$$\gamma_s := \left(\int_{r_0}^s \Phi_{h,p}(t)^{\frac{1}{1-p}} dt \right)^{-1}$$

e

$$|\nabla u_s(x)| = \begin{cases} \gamma_s \Phi_{h,p}(h(x))^{\frac{1}{1-p}} |\nabla h(x)|, & \text{se } r_0 \leqslant h(x) \leqslant s; \\ 0, & \text{se } h(x) \geqslant s \end{cases}$$

quase sempre. Pelo Corolário 4.1, podemos considerar $|\nabla h(x)| \leqslant 1$ e portanto u_s é

Lipschitz com suporte compacto em Ω. Assim, pelo Teorema 4.1

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\nabla u_s(x)|^p dx &= \int_{\Omega_s \setminus \Omega_{r_0}} |\gamma_s \Phi_{h,p}(h(x))^{\frac{1}{1-p}} |\nabla h(x)||^p dx \\
&= \gamma_s^p \int_{\Omega_s \setminus \Omega_{r_0}} |\Phi_{h,p}(h(x))|^{\frac{p}{1-p}} |\nabla h(x)|^p dx \\
&= \gamma_s^p \int_{\Omega_s \setminus \Omega_{r_0}} |\Phi_{h,p}(h(x))|^{\frac{p}{1-p}} |\nabla h(x)|^{p-1} |\nabla h(x)| dx \\
&= \gamma_s^p \int_{r_0}^{s} \left(\int_{\partial \Omega_r} \Phi_{h,p}(r)^{\frac{p}{1-p}} |\nabla h(x)|^{p-1} d\sigma \right) dr \\
&= \gamma_s^p \int_{r_0}^{s} \Phi_{h,p}(r)^{\frac{p}{1-p}} \left(\int_{\partial \Omega_r} |\nabla h(x)|^{p-1} d\sigma \right) dr \\
&= \gamma_s^p \int_{r_0}^{s} \Phi_{h,p}(r)^{\frac{p}{1-p}} \Phi_{h,p}(r) dr \\
&= \gamma_s^p \int_{r_0}^{s} \Phi_{h,p}(r)^{\frac{1}{1-p}} dr \\
&= \gamma_s^p . \gamma_s^{-1} \\
&= \gamma_s^{p-1}.
\end{aligned}$$

Assim

$$\mathrm{Cap}_p(D, \Omega) \leqslant \int_{\Omega} |\nabla u|^p = \gamma_s^{p-1}$$

para todo $s < r_1$. Pela continuidade, temos que

$$\lim_{s \to r_1} \gamma_s^{p-1} = Q_p(h).$$

Como a escolha de h foi arbitrária, obtemos

$$\mathrm{Cap}_p(D, \Omega) \leqslant \inf_{h \in \Lambda(D, \Omega)} Q_p(h),$$

o que conclui a demonstração do teorema. □

O Teorema 4.2 aborda somente o caso em que $p > 1$. A proposição a seguir se refere ao caso em que $p = 1$. Denotando por σ a medida $(n-1)$-dimensional de Hausdorff.

Proposição 4.2. *Seja* $D \Subset \Omega \subset M$. *Então*

$$\mathrm{Cap}_1(D, \Omega) = \inf \sigma(\partial U),$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos conjuntos $U \Subset \Omega$ *com perímetro finito contendo* D.

Demonstração. Escolha uma função $u : \mathbb{R} \to [0,1]$ com suporte compacto em Ω tal que $u = 1$ em D. Pela fórmula da coarea,

$$\int_\Omega |\nabla u| = \int_0^1 \left(\int_{\partial U_r} d\sigma \right) dr = \int_0^1 \sigma(\partial U_r) dr \geqslant \inf_r \sigma(\partial U_r)$$

onde $U_r := \{x \in \Omega; u(x) \geqslant t\}$. Logo

$$\mathrm{Cap}_1(D, \Omega) \geqslant \inf \sigma(\partial U).$$

Agora, considere um domínio regular $U \Subset \Omega$ contendo D. Como a função característica $\chi_U \in BV(\Omega)$ (Teorema 1.8), podemos encontrar uma sequência de funções $u_j \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_j = 1$ em D e

$$\lim_{j \to \infty} \int_\Omega |\nabla u_j| = \|\chi_U\|_{BV(\Omega)} = \int_\Omega \chi_U d\sigma = \sigma(\partial U).$$

Portanto

$$\mathrm{Cap}_1(D, \Omega) \leqslant \inf \sigma(\partial U).$$

□

4.2 Variedades com fins cilindricamente torcidos

Iniciamos esta seção com a seguinte definição.

Definição 4.1. *Uma variedade Riemanniana M é dita ter fins cilindricamente torcidos se existe uma variedade Riemanniana compacta (N, g_N) e um subconjunto compacto $D \subset M$ tal que $M \backslash D = N \times_f [1, \infty)$ é o produto torcido de $N \times [1, \infty]$ com a métrica $g = dt^2 + f^2(t) g_N$.*

Para o decorrer desta seção denotaremos $D_t \subset M$ o subconjunto

$$D_t := D \cup \{(y, s) : y \in N \text{ e } s < t\}.$$

Proposição 4.3. *Para $1 \leqslant r \leqslant R \leqslant \infty$ temos*

$$\mathrm{Cap}_p(\overline{D}_r, D_R) = \mathrm{Vol}_{n-1}(N) \left(\int_r^R f(t)^{\frac{n-1}{1-p}} dt \right)^{1-p}.$$

Particularmente, a p-capacidade de um anel esférico em $\mathbb{R}^n$ é dado por

$$\mathrm{Cap}_p(\overline{B}_r, B_R) = \alpha_{n-1} \left(\frac{R^\nu - r^\nu}{\nu} \right)^{1-p},$$

onde α_{n-1} *é a área da esfera unitária* S^{n-1} *e* $\nu = \frac{n-1}{1-p}$ *quando* $p \neq n$ *e para* $p = n$ *teremos*

$$\mathsf{Cap}_p(\overline{B}_r, B_R) = \alpha_{n-1}(\log(R/r))^{1-n}.$$

Demonstração. Seja $h \in \Lambda(D, \Omega)$ definida por $h(x) = 1$ em D e $h(x) = t$ para $x = (y, t) \in N \times \{t\}$. Logo, $|\nabla h(x)| = 1$ para todo $x \in M \backslash D$ e o p-fluxo de h é igual a área

$$\Phi_{h,p}(r) = \int_{\partial D_r} |\nabla h|^{p-1} d\sigma = \int_{\partial D_r} d\sigma = \sigma(\partial D_r).$$

Como

$$\sigma(\partial D_r) = \int_{N \times \{r\}} \sqrt{\det g}\, d\sigma = \int_{N \times \{r\}} f(r)^{n-1} d\sigma = \left(\int_N d\sigma \right) f(r)^{n-1} = vol_{n-1}(N) f(r)^{n-1}$$

temos que

$$\Phi_{h,p}(r) = \mathsf{Vol}_{n-1}(N) f^{n-1}(r).$$

Segue pelo Teorema 4.2 que

$$\begin{aligned}
\mathsf{Cap}_p(\overline{D}_r, D_R) \leqslant Q_p(h) &= \int_r^R \left(\Phi_{h,p}(r)^{\frac{1}{1-p}} \right)^{1-p} \\
&= \left(\int_r^R \left(\mathsf{Vol}_{n-1}(N) f(r)^{n-1} \right)^{\frac{1}{1-p}} dr \right)^{1-p} \\
&= \left(\mathsf{Vol}_{n-1}(N)^{\frac{1}{1-p}} \int_r^R f(r)^{\frac{n-1}{1-p}} \right)^{1-p} \\
&= \mathsf{Vol}_{n-1}(N) \left(\int_r^R f(r)^{\frac{n-1}{1-p}} \right)^{1-p}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, considere uma função arbitrária $u \in C_0^1(D_R)$ tal que $u \equiv 1$ em D_r. Temos que para cada $y \in N$

$$1 = |u(y, R) - u(y, r)| = \left| \int_r^R \frac{\partial u(y, t)}{\partial t} \right| dt \leqslant \int_r^R |\nabla u(y, t)| dt.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder vale

$$\begin{aligned}
1 \leqslant \int_r^R |\nabla u(y, t)| dt &= \int_r^R \left(|\nabla u(y, t)| f(t)^{\frac{n-1}{p}} \right) \left(f(t)^{\frac{1-n}{p}} \right) dt \\
&\leqslant \left(\int_r^R |\nabla u(y, t)|^p f(t)^{n-1} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_r^R f(t)^{\frac{1-n}{p-1}} dt \right)^{\frac{p-1}{p}},
\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_r^R |\nabla u|^p f(t)^{n-1} dt \geqslant \left(\int_r^R f(t)^{\frac{1-n}{p-1}} \right)^{1-p}$$

para todo $y \in N$. Integrando essa desigualdade sobre N obtemos

$$\int_N \int_r^R |\nabla u(y,t)|^p f(t)^{n-1} dt dy \geqslant \int_N \left(\int_r^R f(t)^{\frac{1-n}{p-1}} dt \right)^{1-p} dy,$$

o que implica em

$$\int_{D_r} |\nabla u|^p dx \geqslant \mathrm{Vol}_{n-1}(N) \left(\int_r^R f(t)^{\frac{n-1}{p-1}} \right)^{1-p}.$$

Desde que a função u foi escolhida de forma arbitrária, concluímos que

$$\mathrm{Cap}_p(\overline{D}_r, D_R) \geqslant \mathrm{Vol}_{n-1} \left(\int_r^R f(t)^{\frac{n-1}{1-p}} dt \right)^{1-p},$$

e segue a igualdade.

Em particular, podemos escrever $(\mathbb{R}^n, g_{can})$ como o produto $S^{n-1} \times (0, \infty)$ com a métrica em coordenadas polares

$$g = dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

onde $g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ é a métrica induzida de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{S}^{n-1}$. Fazendo $\nu = \frac{n-p}{p-1}$, tem pela igualdade provada acima, quando $p \neq n$, que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cap}_p(\overline{B}_r, B_R) &= \mathrm{Vol}_{n-1}(S^{n-1}) \left(\int_r^R r^{\frac{n-1}{1-p}} dt \right)^{1-p} \\
&= \alpha_{n-1} \left(\frac{R^\nu - r^\nu}{\nu} \right)^{1-p}.
\end{aligned}$$

Agora, quando $p = n$ temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cap}_p(\overline{B}_r, B_R) &= \mathrm{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \left(\int_r^R t^{-1} dt \right)^{1-p} \\
&= \alpha_{n-1} \left(\log(R) - \log(r) \right)^{1-n} \\
&= \alpha_{n-1} \left(\log(R/r) \right)^{1-n}.
\end{aligned}$$

□

Corolário 4.2. M *é* p*-parabólico se, e somente se*

$$\int_1^\infty f(t)^{\frac{n-1}{1-p}} = \infty.$$

Demonstração. Desde que $1 - p < 0$, temos que

$$\mathrm{Cap}_p(\overline{D}_r, M) = \mathrm{Vol}_{n-1}(N) \left(\int_0^\infty f(t)^{\frac{n-1}{1-p}} dt \right)^{1-p} = 0$$

equivale a

$$\int_0^\infty f(t)^{\frac{n-1}{1-p}} dt = \infty.$$

□

4.3 Perfil isoperimétrico

Seja $\Omega \subset M$ aberto e $D \subset \Omega$ compacto. Escolha uma função $h \in \Lambda(D,\Omega)$ e faça $\Omega_r := \{x \in \Omega : h(x) < r\}$. Seja $[r_0, r_1)$ o intervalo de variação da função h e defina $\nu(r) = \nu_h(r) := \mathrm{Vol}(\Omega_r)$ um homeomorfismo entre (r_0, r_1) e (ν_0, ν_1), onde $\nu_0 = \nu(r_0)$ e $\nu_1 = \nu(r_1)$. A função inversa é dada por $r(\nu) = \sup\{r : \mathrm{Vol}(\Omega_r) < r\}$ e

$$\nu(r) = \mathrm{Vol}(\Omega_r) = \int_{\Omega_r} d\sigma = \int_{\Omega_r} \frac{1}{|\nabla h|}|\nabla h| d\sigma.$$

Pela fórmula da coarea

$$\nu(r) = \int_{r_0}^{r} \left(\int_{\partial\Omega_r} \frac{d\sigma}{|\nabla h|} \right) dr,$$

e portanto,

$$\frac{d\nu}{dr} = \int_{\partial\Omega_r} \frac{d\sigma}{|\nabla h|}.$$

Denotaremos por $a(r) = a_h(r) := \sigma(\partial\Omega_r)$. Podemos expressar a área em função do volume ν pela composição $\tilde{a} = a(r(\nu))$.

Proposição 4.4. *Se* $p > 1$, *então*

$$Q_p(h) \geqslant \left(\int_{\nu_0}^{\nu_1} \tilde{a}(\nu)^{\frac{p}{1-p}} d\nu \right)^{1-p}.$$

Demonstração. Temos que

$$a_h(r) = \int_{\partial\Omega_r} d\sigma = \int_{\partial\Omega_r} |\nabla h|^{\frac{p-1}{p}} |\nabla h|^{\frac{1-p}{p}} d\sigma.$$

Pela desigualdade de Hölder segue que

$$a_h(r) \leqslant \left(\int_{\partial\Omega_r} |\nabla h|^{p-1} d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\partial\Omega_r} \frac{d\sigma}{|\nabla h|} \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Agora elevando essa desigualdade a $\frac{p}{1-p} < 0$ e utilizando o Teorema 4.2 obtemos

$$\begin{aligned} a_h(r)^{\frac{p}{1-p}} &\geqslant \left(\int_{\partial\Omega_r} |\nabla h|^{p-1} d\sigma \right)^{\frac{1}{1-p}} \left(\int_{\partial\Omega_r} \frac{d\sigma}{|\nabla h|} \right)^{\frac{p-1}{1-p}} \\ &= [\Phi_{h,p}(r)]^{\frac{1}{1-p}} \left(\int_{\partial\Omega_r} \frac{d\sigma}{|\nabla h|} \right)^{-1} \\ &= [\Phi_{h,p}(r)]^{\frac{1}{1-p}} \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\Phi_{h,p} \leqslant a_h(r)^{\frac{p}{1-p}} \frac{d\nu}{dr}.$$

Agora, integrando de r_0 a r_1 e elevando a $1-p<0$, tem-se

$$\begin{aligned} Q_p(h) = \left(\int_{r_0}^{r_1} \Phi_{h,p}(r)^{\frac{1}{1-p}} dr\right)^{1-p} &\leqslant \left(\int_{r_0}^{r_1} a_h(\nu)^{\frac{p}{1-p}} \frac{d\nu}{dr} dr\right)^{1-p} \\ &= \left(\int_{\nu_0}^{\nu_1} a_h(r(\nu))^{\frac{p}{1-p}} d\nu\right)^{1-p} \\ &= \int_{\nu_0}^{\nu_1} \tilde{a}(\nu)^{\frac{p}{1-p}} d\nu. \end{aligned}$$

□

Definição 4.2. *A função* $P:[0,V)\to\mathbb{R}$ *é um perfil isoperimétrico para* $\Omega\subset M$ *se existe constantes* $C,\eta>0$ *tais que* $\eta<V:=\mathrm{Vol}(\Omega)$ *e*

$$P(\mathrm{Vol}(D)) \leqslant C\ \mathrm{Area}(\partial D)$$

para toda região compacta $D\subset\Omega$ *com* $\mathrm{Vol}(D)\geqslant\eta$.

Teorema 4.3. *Suponha que o domínio* $\Omega\subset M$ *admita um perfil isoperimétrico* $P:[0,V)\to\mathbb{R}$ *tal que*

$$\int_{\eta}^{V} \frac{d\nu}{[P(\nu)]^{\frac{p}{p-1}}} < \infty$$

$(1<p<\infty)$. *Então* Ω *é* p*-hiperbólico.*

Demonstração. Seja $D\subset\Omega$ um conjunto compacto com volume igual a η, e $h\in\Lambda(D,\Omega)$. Para todo compacto $D'\subset\Omega$ com $\mathrm{Vol}(D')\geqslant\eta$ temos pela Definição 4.2.

$$a(\nu) \geqslant \frac{1}{C} P(\nu).$$

Assim,

$$a(\nu)^{\frac{p}{1-p}} \leqslant \left(\frac{1}{C}\right)^{\frac{p}{1-p}} [P(\nu)]^{\frac{p}{1-p}}.$$

Integrando essa desigualdade sobre o intervalo de ν_0 a ν_1 obtemos

$$\int_{\nu_0}^{\nu_1} a(\nu)^{\frac{p}{1-p}} d\nu \leqslant I := C^{\frac{p}{p-1}} \int_{\nu_0}^{\nu_1} \frac{d\nu}{[P(\nu)]^{\frac{p}{p-1}}} < \infty.$$

Desde que $1-p<0$, temos

$$\left(\int_{\nu_0}^{\nu_1} a(\nu)^{\frac{p}{1-p}} d\nu\right)^{1-p} \geqslant I^{1-p}.$$

Utilizando a Proposição 4.4 e o Teorema 4.2 concluímos imediatamente que

$$\mathrm{Cap}_p(D,\Omega) = \inf_{h\in\Lambda(D,\Omega)} Q_p(h) \geqslant \left(\int_{\nu_0}^{\nu_1} a(\nu)^{\frac{p}{1-p}}\right)^{1-p} \geqslant I^{1-p} > 0.$$

Portanto Ω é p-hiperbólico.

□

4.4 Crescimento da área e do volume

Lema 4.2. *Ω é 1-parabólico se, e somente se, existe uma exaustão*

$$G_1 \subset G_2 \subset ... \Subset \Omega$$

por domínios regulares tais que $\liminf_{i\to\infty} \mathsf{Area}(\partial G_i) = 0.$

Demonstração. Dado uma exaustão de Ω por domínios regulares e um subconjunto compacto $D \subset \Omega$ tais que

$$D \Subset G_1 \Subset G_2 \subset ... \Subset \Omega$$

temos $\lim_{i\to\infty} \mathsf{Cap}_1(D, G_i) = 0$. Pela Proposição 4.2 concluímos que $\liminf_{i\to\infty} \mathsf{Area}(\partial G_i) = 0$.

Agora, veja que se existir uma exaustão de Ω por domínios regulares $\{G_i\}$ satisfazendo as hipóteses e $D \subset \Omega$ é um subconjunto compacto com interior não vazio e $D \Subset G_1$, novamente, pela Proposição 4.2

$$0 \geqslant \mathsf{Cap}_1(D, \Omega) = \liminf_{i\to\infty} \mathsf{Area}(\partial U) = \liminf_{i\to\infty} \mathsf{Area}(\partial G_i) = 0,$$

onde U é tomado sobre todos conjuntos $U \Subset \Omega$ contendo D. Portanto, Ω é 1-parabólico.

□

Corolário 4.3. *Uma variedade completa M com volume finito é 1-parabólico.*

Demonstração. Escolha um ponto $x_0 \in M$ e defina $v(r) = \mathsf{Vol}(B(x_0), r)$ e $a(r) = \mathsf{Area}(\partial B(x_0, r))$. Para $h \in \Lambda(\{x_0\}, M)$, com $h(x_0) = 0$ e $h(x) = r$ temos

$$\frac{dv}{dr} = \int_{\partial B(x_0,r)} \frac{d\sigma}{|\nabla h|} = a(r).$$

Suponha que M é 1-hiperbólico. Então, pelo Lema 4.2, temos

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{dv}{dr} = \lim_{r\to\infty} a(r) > 0,$$

o que implica em $\lim_{r\to\infty} v(r) = \infty$. Isto contradiz o fato de M ter volume finito. □

Seja $D \subset \Omega$ um subconjunto compacto de Ω. Escolha uma função $h \in \Lambda(D, \Omega)$ e denote $a_h(r) = \mathsf{Area}(\partial\Omega_r)$.

Proposição 4.5.

$$Q_p(h) \leqslant (\|\nabla h\|_{L^\infty})^{p-1} \left(\int_{r_0}^{r_1} a_h(r)^{\frac{1}{1-p}} \right)^{1-p}.$$

Demonstração. Suponha $|h(x)| \leqslant c$ para quase todo x. Daí,

$$\Phi_{h,p}(r) = \int_{\partial\Omega_r} |\nabla h|^{p-1} d\sigma \leqslant c^{p-1} \int_{\partial\Omega_r} d\sigma = c^{p-1} a_h(r).$$

Assim,

$$\begin{aligned} Q_p(h) &= \left(\int_{r_0}^{r_1} \Phi_{h,p}(r)^{\frac{1}{1-p}} dr \right)^{1-p} \\ &\leqslant \left(\int_{r_0}^{r_1} c^{-1} a_h(r)^{\frac{1}{1-p}} dr \right)^{1-p} \\ &= c^{p-1} \left(\int_{r_0}^{r_1} a_h(r)^{\frac{1}{1-p}} dr \right)^{1-p}. \end{aligned}$$

□

Corolário 4.4. *Seja* M *uma variedade completa tal que*

$$\int_0^\infty \frac{dr}{a(r)^{1/(p-1)}} = \infty,$$

onde $a(r) = \mathrm{Area}(\partial B(x_0, r))$. *Então* M *é* p*-parabólico.*

Demonstração. Ora, para $h(x) = d(x, x_0)$ temos

$$\mathrm{Cap}_p(\overline{B}, M) \leqslant Q_p(h) \leqslant \left(\int_0^\infty a_h(r)^{\frac{1}{(1-p)}} dr \right)^{1-p}.$$

Como $1 - p < 0$ e $\int_0^\infty a_h(r)^{\frac{1}{1-p}} dr = \infty$, concluímos que $\mathrm{Cap}_p(\overline{B}, M) = 0$. Portanto M é p-parabólico. □

Observação 2. *Pelo Corolário 4.2, para uma variedade com fim cilindricamente torcido, esta condição não é somente suficiente como também necessário para* M *ser* p*-parabólico. De fato,*

$$\begin{aligned} \int^\infty f(r)^{\frac{n-1}{1-p}} dr &= \int^\infty [f(r)^{n-1}]^{\frac{1}{1-p}} dr \\ &= \int^\infty [a(r)]^{-\frac{1}{p-1}} dr = \infty. \end{aligned}$$

Corolário 4.5. *Seja* M *uma variedade completa tal que*

$$\int^\infty \frac{dr}{\nu(r)^{\frac{1}{q}}} = \infty,$$

onde $\nu(r) = \mathrm{Vol}(B(x_0, r))$, *então* M *é* p*-parabólico para todo* $p > q$.

Demonstração. *Utilizando a desigualdade de Hölder*

$$\int^{\infty}\frac{dr}{\nu(r)^{\frac{1}{q}}}=\int^{\infty}\nu(r)^{-\frac{1}{q}}\nu'(r)^{\frac{1}{p}}\nu'(r)^{-\frac{1}{p}}dr$$
$$\leqslant\underbrace{\left(\int^{\infty}(\nu(r))^{-\frac{p}{q}}\nu'(r)dr\right)^{\frac{1}{p}}}_{(A)}\left(\int^{\infty}\nu'(r)^{-\frac{p}{p-1}}\nu'(r)dr\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Para $p>q$ *temos que (A) é limitada por uma substituição simples. Logo*

$$\int^{\infty}(\nu'(r))^{-\frac{p}{p-1}}\nu'(r)dr=\int^{\infty}\nu'(r)^{-\frac{1}{p-1}}dr$$
$$=\int^{\infty}\frac{1}{a(r)^{\frac{1}{p-1}}}dr=\infty.$$

Exemplo 1. *Se* M *é uma variedade completa tal que*

$$\mathrm{Vol}(B(x_0,r))\leqslant cr^{q},$$

então M *é* p*-parabólico para todo* $p\geqslant q$. *De fato,*

$$C\int^{\infty}r^{-1}dr\leqslant\int^{\infty}\mathrm{Vol}(B(x_0,r))^{-\frac{1}{q}}dr.$$

Se M^n *é uma variedade Riemanniana completa não-compacta com curvatura de Ricci não-negativa, então* $\mathrm{Vol}(B(x_0,r))\leqslant\omega_n r^n$, *onde* ω_n *é o volume da bola unitária Euclidiana [10, Proposição 1.2]. Em particular,* $\mathbb{R}^n$ *é* p*-parabólico para* $p>n$.

Corolário 4.6. *Seja* M *uma variedade completa tal que*

$$\int^{\infty}\left(\frac{r}{\mathrm{Vol}(B(x_0,r))}\right)^{\frac{1}{p-1}}=\infty,$$

então M *é* p*-parabólico.*

Demonstração. Seja $1<p<\infty$. Utilizando a desigualdade de Hölder temos

$$\int_0^t\left(\frac{r}{\nu(r)}\right)^{\frac{1}{p-1}}dr=\int_0^t\left(\frac{r}{\nu(r)}\right)^{\frac{1}{p-1}}\nu'(r)^{\frac{1}{p}}\nu'(r)^{-\frac{1}{p}}dr$$
$$\leqslant\left(\int_0^t\left(\frac{r}{\nu(r)}\right)^{\frac{p}{p-1}}\nu'(r)dr\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^t\left(\frac{1}{\nu'(r)}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Agora, utilizando integração por partes

$$\int_0^t\left(\frac{r}{\nu(r)}\right)^{\frac{p}{p-1}}\nu'(r)dr=(1-p)\left(\frac{r^p}{\nu(r)}\right)^{\frac{1}{p-1}}\Big|_0^t+p\int_0^t\left(\frac{r}{\nu(r)}\right)^{\frac{1}{p-1}}dr. \tag{4.1}$$

Como a primeira parte da soma não-positiva concluímos que

$$\int_0^\infty \left(\frac{r}{\nu(r)}\right)^{\frac{p}{p-1}} \nu'(r)dr \leqslant p\int_0^\infty \left(\frac{r}{\nu(r)}\right)^{\frac{1}{p-1}} dr.$$

Assim,

$$\int_0^\infty \left(\frac{r}{\nu(r)}\right)^{\frac{1}{p-1}} dr \leqslant p^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty \left(\frac{r}{\nu(r)}\right)^{\frac{1}{p-1}} dr\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{\nu'(r)}\right)^{\frac{1}{p-1}} dr\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Portanto

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{r}{\nu(r)}\right)^{\frac{p-1}{p}} dr\right)^{\frac{p-1}{p}} \leqslant p^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{a(r)}\right)^{\frac{1}{p-1}} dr\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Por hipótese e por comparação temos que

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{a(r)}\right)^{\frac{1}{p-1}} dr = \infty$$

possibilitando utilizarmos o Corolário 4.4. Portanto, M é p-parabólico.

□

*

4.5 Discretização

Apresentaremos algumas definições básicas sobre Teoria do Potencial discreta. O objetivo dessa seção é apresentar o seguinte resultado: Se uma variedade Riemanniana M com geometria limitada é p-parabólica, então M é uma variedade q-parabólica para todo $q \geqslant p$.

Um gráfico X é um conjunto $V = V(X)$ juntamente com uma relação simétrica e não reflexiva $\sim$. Os elementos de $V(X)$ são os vértices de um gráfico $(X, \sim)$. Um vértice y é dito ser uma vizinhança de x se $x \sim y$.

Uma aresta ordenada é um par ordenado $\vec{e} = [x, y]$ de vértices vizinhos. A aresta $[y, x]$ é chamado de aresta reversa e é denotada por $-\vec{e}$. Denotamos por $\alpha(\vec{e}) = x$ a origem de e e $\omega(\vec{e}) = y$ o vértice no fim da aresta.

O caminho de um gráfico X é uma sequência finita $x_1, x_2, ..., x_n$ de vértices tal que $x_i \sim x_{i+1}$. O número n é chamado de comprimento do caminho. O gráfico é dito ser conexo se cada par de vértices é conectado por um caminho. Dados $x, y \in V(X)$ definimos a distância $d_X(x, y)$ como o comprimento do menor caminho ligando os dois vértices. Veja que $x \sim y$ se, e somente se, $d(x, y) = 1$. Se X é um gráfico conexo, então $(V(X), d)$ é um espaço métrico.

O crescimento $deg(x)$ de um vértice é a cardinalidade do conjunto de suas vizinhanças. Dizemos que o gráfico X tem geometria limitada se ela é conexa, $V(X)$ é finito ou enumerável e $deg(x) \leqslant N$ para todo $x \in V(X)$, onde $N = N(X) < \infty$.

Uma 0-*cochain* de um gráfico X é uma função real $u : V(X) \to \mathbb{R}$, e uma 1-*cochain* é uma função $\eta : A(X) \to \mathbb{R}$ tal que $\eta(-\vec{e}) = -\eta(\vec{e})$. Aqui $A(X)$ é o conjunto das arestas, isto é, $\vec{e} \in A(X)$ é um par ordenado $\vec{e} = [x, y]$. Denotaremos por $\Omega^0(X)$ e $\Omega^1(X)$ os espaços das funções 0-*cochain* e 1-*cochain*, respectivamente, em X.

O diferencial de uma função $u \in \Omega^0(X)$ é uma 1-*cochain* du definida por:

$$du([x, y]) = u(y) - u(x).$$

O divergente de uma 1-*cochain* $\eta \in \Omega^1(X)$ é uma função $\delta\eta \in \Omega^0(X)$ definida por:

$$\delta\eta(x) = \sum_{y \sim x} \eta([y, x]).$$

A norma de uma 1-cochain $\eta \in \Omega^1(X)$ é uma função $||\eta|| \in \Omega^0$ definida por:

$$||\eta||(x) = \left(\sum_{y \sim x} (u(y) - u(x))^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Seja X um gráfico e $p \in [1, \infty)$ um número real. A integral p-Dirichlet de $u \in \Omega^0(X)$ é definido por

$$D_p(u) = \sum_{x \in V(X)} ||\nabla u(x)||^p = \sum_{x \in V(X)} \left(\sum_{y \sim x} (u(y) - u(x))^2 \right)^{\frac{p}{2}}.$$

Dizemos que $N = (X, r)$ é uma rede quando X é um gráfico finito não-vazio ou enumerável e r é uma função positiva em $A(X)$ com a propriedade $r(x, y) = r(y, x)$ para todo $x \sim y$ e

$$\sum_{y \in V(X)} \frac{1}{r(x, y)} < \infty$$

para todo $x \in V(X)$.

Por fim, definimos os conjuntos $D^p(N) = \{u \in \Omega^0(X) : D_p(u) < \infty\}$ e $D_0^p(N) = \{u \in \Omega_0^0(X) : d_p(N) < \infty\}$.

Lema 4.3. $D^p(N)$ *é um espaço de Banach com respeito à norma*

$$||u||_p = [D_p(u) + |u(x_0)|^p]^{\frac{1}{p}},$$

onde x_0 *é fixo.*

Demonstração. Vide [8, 2.1]. □

Lema 4.4. *Se* $u_n, u \in D^p(N)$ *e* $||u - u_n||_p \to 0$ *quando* $n \to \infty$*, então* $\{u_n\}$ *converge pontualmente para* u*.*

Demonstração. Vide [8]. □

Parabolicidade de Gráficos

Seja X um gráfico conexo e $A \subset X$ um conjunto finito. Então para $p \geqslant 1$, a p-capacidade de A em X é definido por:

$$\mathrm{Cap}_p(A, X) := \inf\{D_p(u) : u \in \Omega_0^0(X), 0 \leqslant u \leqslant 1 \text{ e } u = 1 \text{ em } A\}.$$

Teorema 4.4. *Seja* A *um subconjunto não-vazio finito de* X*. Então* $\mathrm{Cap}_p(A, X) = 0$ *se, e somente se,* $1 \in D_0^p(N)$*.*

Demonstração. Sendo $\mathrm{Cap}_p(A, X) = 0$, então existe uma sequência de funções (u_n) em $\Omega_0^0(X)$ tal que $u_n = 1$ em A e $D_p(u_n) \to 0$ quando $n \to \infty$. Para $x_0 \in A$, temos

$$||u_n - u_n(x_0)||_p = [D_p(u_n - u_n(x_0))]^{\frac{1}{p}} = [D_p(u_n)]^{\frac{1}{p}} \to 0.$$

Pelo Lema 4.4 temos que u_n converge pontualmente para $u(x_0) = 1$. Portanto $1 \in D_0^p(N)$.

Agora, suponha $1 \in D_0^p(N)$. Assim existe uma sequência (f_n) em $\Omega_0^0(X)$ tal que $||1 - f_n||_p \to 0$ quando $n \to 0$. Pelo Lema 4.4 temos que f_n converge pontualmente para 1 e $D_p(f_n) \to 0$. Defina $g_n \in \Omega^0(X)$ por $g_n = 1$ em A e $g_n = f_n$ em $X \backslash A$. Então $g_n \in \Omega_0^0$ e $||g_n - f_n|| \to 0$. Portanto, $D_p(g_n - f_n) \to 0$, logo $D_p(g_n) \to 0$. Desde que $\mathrm{Cap}_p(A, X) \leqslant D_p(g_n)$, concluímos que $\mathrm{Cap}_p(A, X) = 0$. □

Corolário 4.7. *Sejam* A *e* A' *dois subconjuntos não-vazio e finito de* X*. Então,* $\mathrm{Cap}_p(A, X) = 0$ *se, e somente se,* $\mathrm{Cap}_p(A', X) = 0$*.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.4, $\mathsf{Cap}_p(A, X) = 0$ implica em $1 \in D_0^p(N)$. Como A' é um subconjunto finito não-vazio de X e $1 \in D_0^p(N)$ aplicando o mesmo teorema concluímos que $\mathsf{Cap}_p(A', X) = 0$. Da mesma forma é provado a volta. Portanto $\mathsf{Cap}_p(A, X) = 0$ se, e somente se, $\mathsf{Cap}_p(A', X) = 0$. $\square$

O corolário acima nos induz para a próxima definição.

Definição 4.3. *Um gráfico X é p-parabólico se $\mathsf{Cap}_p(A, X) = 0$ para todo subconjunto finito $A \subset X$. Caso contrário, X é p-hiperbólico.*

A seguir veremos que se um gráfico com geometria limitada é p-parabólico, então ele será q-parabólico para todo $q \geqslant p$. Isto significa que o conjunto dos valores $p \geqslant 1$ tais que X é p-parabólico ou é vazio, e neste caso X será p-hiperbólico para todo $p \geqslant 1$, ou é um intervalo limitado inferiormente.

Proposição 4.6. *Seja X um gráfico com geometria limitada. Se X é p-parabólico, então X é também q-parabólico para todo $q \geqslant p$.*

Demonstração. Seja $A \subset V(X)$ um conjunto finito. Para todo $\epsilon > 0$ podemos encontrar uma função $u \in \Omega^0(X)$ com suporte finito, tal que $0 \leqslant u \leqslant 1$ para todo $x \in V(X)$, $u = 1$ em A e $D_p(u) < \epsilon$. Seja $\deg(x) \leqslant N$ para todo $x \in V(X)$, por X ter geometria limitada. Temos,

$$\begin{aligned} \frac{\|\nabla u(x)\|}{\sqrt{N}} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{y \sim x} (u(y) - u(x))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{y \sim x} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N}} = 1. \end{aligned}$$

Se $q \geqslant p$, então

$$\left(\frac{\|\nabla u(x)\|}{\sqrt{N}} \right)^q \leqslant \left(\frac{\|\nabla u(x)\|}{\sqrt{N}} \right)^p.$$

Isto implica que

$$D_q(u) \leqslant N^{\frac{q-p}{2}} D_p(u).$$

Por fim, passando o somatório para todo $x \in V(X)$ em ambos os lados e utilizando o fato de $D_p(u) < \epsilon$ para ϵ arbitrário, concluímos que X é q-parabólico. $\square$

Definição 4.4. *Uma variedade Riemanniana* M *tem geometria limitada se ela tem raio de injetividade positiva e curvatura de Ricci limitada por baixo.*

Dizemos que dois espaços métricos X e Y são quase-isométricos se existem uma aplicação $f : X \to Y$ e constantes $\lambda \geqslant 1$, $c \geqslant 0$ e $\epsilon \geqslant 0$ tais que:

i) $\frac{1}{\lambda} d(x_1, x_2) - c \leqslant d(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \lambda d(x_1, x_2) + c$ para todo $x_1, x_2 \in X$;

ii) Toda bola de raio ϵ em Y contém um ponto de $f(X)$.

Definição 4.5. *Uma discretização de uma variedade Riemanniana* M *é um gráfico* X *o qual é quasi-isométrico a* M*.*

Teorema 4.5. *Toda variedade Riemanniana* M *com geometria limitada admite uma discretização* X *com geometria limitada. Ainda,* M *é* p*-parabólico se, e somente se,* X *é* p*-parabólico.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [9, Seção 5] e [10, Lema 2.4]. □

Teorema 4.6. *Seja* M *uma variedade Riemanniana* p*-parabólica com geometria limitada. Então* M *é também* q*-parabólico para todo* $q \geqslant p$*.*

Demonstração. Seja X uma discretização de com geometria limitada de M. Pelo Teorema 4.4 temos que X é p-parabólico. Segue que X é q-parabólico para todo $q \geqslant p$ (Proposição 4.6). Pelo mesmo Teorema concluímos que M é q-parabólico para todo $q \geqslant p$. □

4.6 Dimensão de uma variedade no infinito

Nesta seção iremos assumir que (M, g) é uma variedade completa.

Definição 4.6. *Dizemos que uma variedade* M *satisfaz uma desigualdade isoperimétrica de ordem k se existir constantes* $C, \delta > 0$ $(\delta < \mathrm{Vol}(M))$ *tal que para todo domínio regular limitado* $D \Subset M$ *com* $\mathrm{Vol}(D) > \delta$ *tivermos*

$$\mathrm{Vol}(D)^{(k-1)} \leqslant C\ \mathrm{Area}(\partial D)^k.$$

M *é dito ser aberto no infinito se*

$$\mathrm{Vol}(D) \leqslant C\ \mathrm{Area}(\partial D).$$

A dimensão isoperimétrica de (M, g) *é o número*

$$d_{isop} = \sup\{k > 0;\ M \textit{ satisfaz uma desigualdade isoperimétrica de ordem } k\}.$$

Definição 4.7. *O grau de crescimento de uma variedade completa* (M, g) *é o número*

$$d_{gr}(M, g) = \inf\{m > 1 | \liminf_{r\to\infty} \frac{\nu(r)}{r^m} < \infty\},$$

onde $\nu(r) = \mathsf{Vol}(B(x_0, r))$ *é o volume de uma bola centrada em algum ponto* $x_0 \in M$.

Proposição 4.7. *Seja* (M, g) *uma variedade completa. Se* $p < d_{isop}(M)$*, então M é* p*-hiperbólico, e se* $p \geqslant d_{gr}(M)$*, então* M *é* p*-parabólico.(Se* M *é aberto no infinito, então M é* p*-hiperbólico para todo* p*.)*

Demonstração. Se $p < d_{isop} = k$, então $k = p + \epsilon$, $\epsilon > 0$. Temos

$$P(\nu) = \nu^{\frac{k-1}{k}} = \nu^{\frac{p+\epsilon-1}{p+\epsilon}}.$$

Assim,

$$[P(\nu)]^{\frac{p}{p-1}} = \nu^{\frac{p+\epsilon-1}{p+\epsilon}\cdot\frac{p}{p-1}}.$$

Note que $\frac{p+\epsilon-1}{p+\epsilon}\cdot\frac{p}{p-1} > 1$, isto é, existe $\delta > 0$ tal que

$$[P(\nu)]^{\frac{p}{p-1}} = \nu^{1+\delta}.$$

Logo,

$$\int_\eta^\infty \frac{d\nu}{[P(\nu)]^{\frac{p}{p-1}}} \leqslant \int_\eta^\infty \frac{d\nu}{\nu^{1+\delta}} < \infty.$$

Pelo Teorema 4.3 concluímos que M é p-parabólico. No caso em que M é aberto no infinto M satisfaz a desigualdade isoperimétrica para todo $p \geqslant 1$. Logo M é p-hiperbólico para todo $p \geqslant 1$.

Se $p \geqslant d_{gr} = m$, então p satisfaz

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\nu(r)}{r^p} < \infty.$$

Seja $\{r_k\}$ uma sequência tal que $r_k \to +\infty$ e $\nu(r_k) < cr_k^m$. Passando para um subsequência, se necessário, podemos assumir $2r_k < r_{k+1}$. Então,

$$\begin{aligned}\int_\eta^{+\infty} \left(\frac{r}{\nu(r)}\right)^{\frac{1}{p-1}} dr &> \sum_{k=1}^{\infty} \int_{r_k}^{r_{k+1}} \left(\frac{r}{cr_{k+1}^p}\right)^{\frac{1}{p-1}} dr \\ &= \frac{p-1}{pc^{1/(n-1)}} \sum_{k=1}^{\infty} r_{k+1}^{\frac{p}{1-p}} (r_{k+1}^{\frac{p}{p-1}} - r_k^{\frac{p}{p-1}}) \\ &= \frac{p-1}{pc^{1/(p-1)}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{r_k}{r_{k+1}}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right).\end{aligned}$$

Esta série é divergente assim como a integral. Pelo Corolário 4.6 concluímos o resultado.

□

Exemplo 2. *O espaço hiperbólico* $\mathbb{H}^n$ *é aberto no infinito, [11, Lema 2.1]. Portanto,* $\mathbb{H}^n$ p*-hiperbólico para todo* $p < \infty$*.*

Definição 4.8. *A dimensão parabólica de M é o número*

$$d_{par}(M) = \inf\{p \geqslant 1 : M \text{ é } p\text{-parabólico }\}.$$

Se M *é* p*-hiperbólico para todo* p*, então definiremos* $d_{par}(M) = \infty$*.*

Proposição 4.8. *Se* M *tem geometria limitada, então a dimensão parabólica também pode ser definida por*

$$d_{par}(M) = \sup\{p \geqslant 1 : M \text{ é } p\text{-hiperbólico}\}.$$

Demonstração. Pela definição da dimensão parabólica, M é q-parabólico para todo $q < d_{par}$. Pelo Teorema 6.3, M é p-parabólico para todo $p > d_{par}$. Portanto, o ínfimo do conjunto dos valores p tais que M é p-parabólico coincide com o supremo dos valores q tais que M é q-hiperbólico. □

Se (M, g) é uma variedade Riemanniana completa e conexa. Então, pelo o que foi apresentado, temos

$$d_{isop}(M, g) \leqslant d_{par}(M, g) \leqslant d_{gr}(M, g)$$

Teorema 4.7. *(Coulhon, Saloff-Coste). Seja* (M, g) *uma cobertura universal de uma variedade conexa e compacta* N*. Então*

$$d_{isop}(M, g) = d_{par}(M, g) = d_{gr}(M, g).$$

Demonstração. A prova pode ser encontrada em [12]. □

Sejam g e g_0 duas métricas conformemente equivalentes em uma variedade n-dimensional M, i.e, $g = \lambda g_0$ para alguma função $\lambda : M \to \mathbb{R}_+$. As formas de volume $dvol_g$ e $dvol_{g_0}$ são relacionadas do seguinte modo.

$$dvol_g = \lambda^n dvol_{g_0}.$$

Proposição 4.9. *A* n*-parabolicidade é uma propriedade conformalmente invariante de uma variedade.*

Demonstração. Seja α uma 1-forma de M, então

$$|\alpha|_g = \lambda^{-1}|\alpha|_{g_0}.$$

Assim,

$$|\nabla u|_g^n dvol_g = \lambda^{-n}\lambda^n vol_{g_0} = |\nabla u|_{g_0}^n dvol_{g_0}.$$

□

Teorema 4.8. *Seja* (M, g_0) *uma variedade Riemanniana* n*-dimensional completa tal que* $d_{isop}(M, g_0) > n$*. Então* $d_{gr}(M, g) \geqslant n$ *para toda métrica* g *conformalmente equivalente a* g_0*.*

Demonstração. Pela Proposição 4.7, (M, g_0) é n-hiperbólico. Daí, pela Proposição 4.9 temos que (M, g) também é n-hiperbólico. Assim, concluímos que $d_{gr} \geqslant n$. □

Referências Bibliográficas

[1] Hebey, Emmanuel e Robert, Frédéric. Sobolev spaces on manifolds. Handbook of Global Analysis.(2008) 10.1016/B978-044452833-9.50008-5.

[2] Meyers NG, Serrin J. H = W. Proc Natl Acad Sci U S A. (1964) Jun;51(6):1055-6.

[3] Heinonen, J., Kilpeläinen, T., and Martio. Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. Dover Publications, (2006).

[4] J Kinnunen, Sobolev Spaces. Department of Mathematics and Systems Analysis, (2017).

[5] V.G. Maz'ja. Sobolev Spaces. (1985) Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co.k.

[6] Taylor, Michael Eugene. Measure theory and integration. Graduate studies in mathematics, ISSN 1065-7339.

[7] Holopainen, I. Nonlinear potential theory and quasiregular mappings on Riemannian manifolds. Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Series A 1. Mathematica. Dissertationes,(1990) 74, 1-45.

[8] Maretsugu Yamasaki, Parabolic and hyperbolic infinite networks. Hiroshima Mathematical Journal, Hiroshima Math. J. 7(1), 135-146, (1977).

[9] Liviu I. Nicolaescu. The co-area formula. Disponível em: https://www3.nd.edu/ lnicolae/Coarea.pdf. Acesso em: 24 de maio 2021.

[10] Changyu Xia. Complete manifolds with nonnegative Ricci curvature and almost best Sobolev constant. Illinois Journal of Mathematics, Illinois J. Math. 45(4), 1253-1259, (Winter 2001).

[11] Bögelein, Verena & Duzaar, Frank & Scheven, Christoph. A sharp quantitative isoperimetric inequality in hyperbolic n-space. Calculus of Variations and Partial Differential Equations.(2015) 54. 10.1007/s00526-015-0928-9.

[12] T.Coulhon et L. Saloff-Coste. Isopérimétriepour les groups et les varietés. Revista Mathemática Iberoamericana 9 (1993) 293-314.

[13] Troyanov, Marc. (1999). Parabolicity of manifolds. Siberian Adv. Math.. 9.