Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sistema Termoelástico não-Linear com Coeficientes não-Local

Marcos Paulo da Rocha Silva

Teresina - 2019

Marcos Paulo da Rocha Silva

Dissertação de Mestrado:

Sistema Termoelástico não-Linear com Coeficientes não-Local

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark

Teresina - 2019

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

R672s Rocha, Marcos Paulo da Silva.
Sistema termoelástico não-linear com coeficientes não-locais/ Marcos Paulo da Silva Rocha. – Teresina, 2019.
64 f.: il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2019.
Orientador: Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark

1. Análise Funcional. 2. Sistema Termoelástico Não-Linear. I. Título.

CDD 515.7

Bibliotecária : Caryne Maria da Silva Gomes / CRB3-1461

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sistema Termoelástico não-Linear com Coeficientes não-Locais

Marcos Paulo da Rocha Silva

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 22 de Fevereiro de 2019.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark - Orientador

Prof. Dr. Haroldo Rodrigues Clark (UFPI)

Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus (UFPI)

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo (UEPB)

Luciano de Sousa Ramos (In memoriam).

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, em quem minha fé esta alicerçada e cujo o conceito é a força motivadora para a investigação da realiadade, feita através da matemática, ciência de explêndida beleza.

Agradeço imensamente à minha mãe, Maria do Carmo Nunes da Rocha, pelo seu amor, atenção, grandiosidade e exemplo na vida, por ter proporcionado com muito sacrifício a educação que possuo. Agradeço também à minha família: Eliene Maria Nunes da Rocha (irmã), Fernanda da Silva Rocha (irmã), Carmem Lúcia da Rocha Silva (irmã), por estamos juntos nos momentos difíceis da vida. Agradeço também aos demais parentes por estarem sempre por perto dando apoio nas horas que precisei.

Agradeço ao professor Marconde Rodrigues Clark, por ter acreditado em mim e desde o terceiro período da graduação tem me orientado pelo caminhos dos números os quais muitas vezes são difíceis. Fico feliz por fazer parte do time de matemáticos liderado pelo professor Marcondes.

Agradeço aos amigos que estiveram comigo, dando risadas e enfrentando os problemas matemáticos e pessoais, que esse laço de amizade por se fortalecer ainda mais ao longo do tempo e que o espirito junvenil nunca se perca de nossos sorrisos. Luziana Mendes, Lucas Emanuel, Ronnyê Paz, Ronaldo Carvalho, Nadiel Cicero, Luân Soares, Thyago Mayson, Pablo Rêgo, Elizana Dayenne, Alverlanny , Aldelanny Passos, Hyon cordeiro, Franscica Sebastião, Rafaelber de Carvalho, Ydenilson Adlmeida, Valéria Sousa, Kelvin Jonhoson, Leonardo Nascimento, Oliveiro ..., Edmilson Lopes, Josimauro Borges, José Edilson, Arrilson Codá.

Agradeço ao corpo de professores do Departamento de Matemática da UFPI por se empenharem tanto em seus cursos, que não deixam a desejar em relação aos cursos dados em outros centros de pós-graduação espalhados pelo país.

Agradeço (a CAPES, ao CNPq, a FAPEPI) pelo apoio financeiro.

"ventos de um futuro erguem as asas de um sonho".

Marcos paulo.

Resumo

O objetivo principal desta dissertação é estabelecer a existência e unicidade de soluções fortes e o decaimento exponencial da energia do seguinte sistema termoelastico não-linear com coeficiente não-local:

$$u''(t) - M(x,t,|\nabla u(t)|^2)\Delta u(t) + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta = 0 \text{ em } Q$$
$$\theta'(t) + B\cdot\theta + (\mathbf{a}\cdot\nabla)u' = 0 \text{ em } Q$$

onde $Q = \Omega\times]0,T[$, com $T > 0$ arbitrário e Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$.

Palavras Chaves: Existência e unicidade de Solução fortes, sistema termoelastico não-linear com coefientes não-local, decaimento da energia

Abstract

The main goals of this dissertation is to establish existence and uniqueness of strong solutions and exponential decay of the energy of following nonlinear thermoelastic system with nonlocal coefficients:

$$u''(t) - M(x, t, |\nabla u(t)|^2)\Delta u(t) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\theta = 0 \text{ in } Q$$
$$\theta'(t) + B \cdot \theta + (\mathbf{a} \cdot \nabla)u' = 0 \text{ in } Q$$

where $Q = \Omega \times]0, T[$, with $T > 0$ is a arbitrary real number and Ω is a open bounded of $\mathbb{R}^n$.
Keyworks: Existence and Uniqueness of the strong solutions, nonlinear thermoelastic system with nonlocal coefficients, decay of the energy.

Sumário

Introdução

Este trabalho foi inspirado principalmente no artigo dos professores,Haraldo Clark, e ,Ronald Guardia [6] onde estudamos a existência e unidade de solução para um Sistema Termoelástico Acoplado, bem como o decaimento da Energia associado ao sistema.

Assim tomando $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto limitado com fronteira suave Γ. Em Chipotle-Lover [13] foi investigada uma equação parabólica descrevendo a média da difusão, por exemplo, da temperatura em todo o seu domínio. Mais precisamente, se $\theta = \theta(x,t)$ é a temperatura relativa, a equação:

$$\theta^{'} - a(l(\theta))\Delta\theta = 0 \text{ em } Q \tag{1}$$

é um modelo aproximado para tais problemas, em que a é uma função contínua limitada de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, l é um funcional linear contínuo de $L^2(\Omega)$ em $\mathbb{R}$ que depende do coeficiente de difusão não local $\int_\Omega \theta(t)dx$.

O termo não-local da equação (1) é obtido mediante a aplicação da lei não-local de Fourier , onde o fluxo de calor depende das medições de temperatura feitas não localmente, mas, em média, através do condutor Ω. Assim, a lei material pode ser declarada como $\overrightarrow{q}(x,t) = -k(t)\nabla\theta(x,t)$, onde a função k é dada por $k(t) = k(\int_\Omega \theta(t)dx)$, isto é, o fluxo de calor depende da energia térmica total armazenada em Ω.

Uma generalização direta do coeficiente de difusão não-local da equação (1) é o operador B definido por

$$B(t)\theta(\cdot,t) = -\sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}(\theta(\cdot,t),t)\partial^2_{x_ix_j}\theta(\cdot,t) \text{ com } B_{ij} : L^1(\Omega) \times [0,\infty[\to \mathbb{R}, \tag{2}$$

que será usado ao longo deste trabalho. Este aperador B também foi considerado em Fernandez-Cara [4].

Em Límaco [8] foi derivado um modelo para pequenas vibrações transversais de uma membrana elástica assumindo que a densidade do material não é constante. Mais precisamente, quando $u = u(x,t)$ é a deformação da membrana, um modelo aproximado para este fenômeno físico pode ser escrito para uma equação dissipativa do tipo de membrana com coeficientes variáveis como este.

$$u'' - M\Big(\cdot,\cdot,\int_\Omega |\nabla u(t)|^2_{\mathbb{R}}\Big)\Delta u + k(\cdot,\cdot)u' = 0 \text{ em } Q \tag{3}$$

onde $M = M(x,t,\lambda) = M_1(x,t) + M_2(x,t,\lambda)$ e $k = k(x,t)$ são funções reais definidas em $\Omega \times [0,\infty) \times [0,\infty)$ e $\Omega \times [0,\infty)$, respectivamente.
Se o momento, ku' for anulado temos um modelo de membrana conservativa

$$u'' - M\Big(\cdot,\cdot,\int_\Omega |\nabla u(t)|^2_{\mathbb{R}}\Big)\Delta u = 0 \text{ em } Q, \tag{4}$$

considerando o efeito da temperatura em alguns fenêmenos oscilatórios origina-se o sistema termoelátisco acoplado, um acoplamento natural é através do operador $(a \cdot \nabla)$ definido por $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \partial_{x_i}$ sendo $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ constante.
Assim iremos investigar a existência e unicidade do seguinte problema:

$$\begin{gathered} u'' - M\Big(\cdot,\cdot,\int_\Omega |\nabla u(t)|^2_{\mathbb{R}}\Big)\Delta u + (a\cdot\nabla)\theta = 0 \text{ em } Q \\ \theta' + B\theta + (a\cdot\nabla)u' = 0 \text{ em } Q \\ u = \theta = 0 \text{ em } \Sigma \\ u(x,0) = u_0(x), u'(x,0) = u_1(x), \theta(x,0) = \theta_0(x) \text{ em } \Omega \end{gathered} \tag{5}$$

onde as derivadas de (5) são no sentido das distribuições de Schwartz.
A existência de soluções globais do problema (5) é estabelicida impondo algunas restrições sobre as condições iniciais u_0, u_1 e θ_0, onde supomos que $u_0 \in H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1, \theta_0 \in H^1_0(\Omega)$ e defimos a seguinte constante real positiva

$$K_0 = \frac{1}{2}\Big[|\nabla u_1|^2 + |\nabla\theta_0|^2 + C_0 f(|\nabla u_0|^2)\Big]|\Delta u_0|^2 \tag{6}$$

Capítulo 1

Notações e Resultados

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados necessários, para que o leitor possa ter uma melhor compreensão dos conteúdos abordados nos capitulos seguintes.

1.1 Tópicos de Análise Funcional

1.1.1 Convergência Fraca e Fraca Estrela

Definição 1.1.1. *Seja* E *um espaço vetorial normado. O dual topológico de* E*, ou simplesmente dual de* E*, o qual representamos por* E'*, é o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos* $f : E \to \mathbb{R}$.

Definição 1.1.2. *(Convergência Fraca). Sejam* E *um espaço de Banach e* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de* E*. Então,* x_k *converge fraco para* x *em* E*, notação* $x_k \rightharpoonup x$*, se, e somente se,* $\langle f, x_k\rangle \to \langle f, x\rangle$*, para todo* $f \in E'$.

Definição 1.1.3. *(Convergência Fraca Estrela). Sejam* E *um espaço de Banach e* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de* E'*. Então,* f_k *converge fraco estrela para* f *em* E'*, notação* $f_k \rightharpoonup f$*, se, e somente se,* $\langle f_k, x\rangle \to \langle f, x\rangle$*, para todo* $x \in E$.

Observação 1.1.1. *Lembremos que as topologias fraca e fraca estrela, num espaço* E*, são representadas por* $\sigma(E, E')$ *e* $\sigma(E', E)$*, respectivamente.*

1.1.2 Espaços Separáveis e Reflexivos

Seja E um espaço normado. Em E podemos definir a aplicação

$$J : E \to E'', \langle J(x), f\rangle = \langle f, x\rangle \text{ para todos } x \in E \text{ e } f \in E',$$

à qual é chamada de *mergulho canônico* de E em E''.

Definição 1.1.4. *(Espaço Reflexivo). Um espaço normado* E *é dito reflexivo quando o mergulho canônico for sobrejetivo, isto é,* $J(E) = E''$.

Definição 1.1.5. *Um espaço normado* E *que tem um subconjunto enumerável e denso em* E *é dito separável.*

Teorema 1.1.1. *(Banach-Aloglu-Bourbaki) Para todo espaço normado* E*, a bola*

$$B_E' = \{f \in E'; \|f\| \leqslant 1\}$$

é compacta da topologia fraca estrela.

Demonstração. Vide [1], pag.66.

Lembremos que um espaço topológico X é metrizável quando existir uma métrica em X que define a topologia de X. Agora, podemos enuciar o seguinte:

Teorema 1.1.2. *Seja* E *um espaço de Banach. Então,* E *é separável se, somente se, a bola unitária* $(B_E', \sigma(E', E))$ *for metrizável.*

Demonstração. Vide [1], pag.74.

Corolário 1.1.1. *Sejam* E *um espaço de Banach separável e* $(f_k)_{k\in\mathbb{R}}$ *uma sequência limitada do seu dual* E'*. Então existe uma subsequência* $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{R}}$ *de* $(f_k)_{k\in\mathbb{R}}$ *que converge fraco estrela.*

Demonstração. Vide [1], pag.76.

Teorema 1.1.3. *Em uma espaço de Banach reflexivo, toda sequência limitada possui subsequência fracamente convergente.*

Demonstração. Vide [1], pag.69.

1.2 Teoria das Distribuição Escalares

1.2.1 Notações

Chamamos de multi-índice a qualquer n-upla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, onde $\alpha_i \in \mathbb{N}$, para cada $i = 1, \dots, n$. Escrevemos $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A ordem de um multi-índice α, denotada por $|\alpha|$ é o inteiro positivo

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

O operador derivada parcial, de ordem α, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, denotado por D^α, é definido por

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

1.2.2 O espaço $C_0^\infty(\Omega)$

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função real contínua. O suporte de ϕ, denotado por $\text{supp}\phi$, é o fecho do conjunto dos pontos $x \in \Omega$, tal que $\phi(x) \neq 0$. Representamos por

$$\text{supp}\phi = \overline{\{x \in \Omega; \phi(x) \neq 0\}}^{\Omega}$$

Definição 1.2.1. *Denotamos por $C_0^\infty(\Omega)$ a classe de funções reais em Ω, infinitamente diferenciáveis e cujo o suporte é compacto, isto é,*

$$\phi \in C_0^\infty(\Omega) \Rightarrow \phi \in C^\infty(\Omega) \text{ e } \text{supp}\phi \text{ é compacto.}$$

Definição 1.2.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $(\phi_k)_{k\in\mathbb{R}}$ uma sequência contida em $C_0^\infty(\Omega)$. Dizemos que $(\phi_k)_{k\in\mathbb{R}}$ converge para ϕ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando:*

1. *$\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ e existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $\text{supp}\phi \subset K$ e $\text{supp}\phi_k \subset K$, para todo $k \in \mathbb{R}$;*
2. *$D^\alpha\phi_k \to D^\alpha\phi$, uniformemente, para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$.*

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido com a noção de convergência acima é denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

1.2.3 A Derivada Distribucional

Definição 1.2.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Uma aplicação $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é uma distribuição, quando for linear e contínua, ou seja,*

1. *$T(\alpha\psi + \beta\phi) = \alpha T(\psi) + \beta T(\phi)$, para todos $\psi, \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$*
2. *Se $\phi_k \to \phi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$ então $T(\phi_k) \to T(\phi)$ em $\mathbb{R}$.*

O valor da distribuição T em $\mathcal{D}(\Omega)$ será reprsentado por $\langle T, \phi \rangle$.

O espaço das distribuições em $\mathcal{D}(\Omega)$ também pode ser munido com uma noção de convergência, á qual, é dada a seguir através da seguinte definição.

Definição 1.2.4. *Considere o espaço das distribuições em* $\mathcal{D}(\Omega)$*. Dizemos que a sequência* $(T_k)_{k\in\mathbb{R}}$ *converge para* T*, nesse espaço, quando a sucessão* $(\langle T_k, \phi\rangle)_{k\in\mathbb{R}}$ *converge para* $\langle T, \phi\rangle$*, para todo* $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$*.*

O espaço das distribuições em $\mathcal{D}(\Omega)$, munido com a noção de convergência acima, é denotado por $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$.

Agora, iremos tratar de um conceito muito utilizado na teoria das Equações Diferenciais Parciais (EDP), que é a *derivada no sentido das distribuições* ou *derivada segundo Sobolev-Schawartz.*

Definição 1.2.5. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto,* $T \in \mathcal{D}^{'}(\Omega)$ *e* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *um nulti-índice. Definimos a derivada distribucional de ordem* α *de* T *como sendo a aplicação linear e contínua* $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$\langle D^\alpha T, \phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \phi\rangle, \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Segue da definição acima, que cada distribuição T possui derivadas de todas as ordens. Notemos que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} D^\alpha : & \mathcal{D}^{'}(\Omega) & \to & \mathcal{D}^{'}(\Omega) \\ & T & \to & D^\alpha T \end{array}$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$, ou seja, se $T_k \to T$ em $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$ então $D^\alpha T_k \to D^\alpha T$ em $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$.

1.3 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Definição 1.3.1. *Sejam* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *um subconjunto aberto e* $p \in \mathbb{R}$ *com* $1 \leqslant p < \infty$ *é definido*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \textit{ mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

O espaço $L^p(\Omega)$ com $1 \leqslant p < \infty$ é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\| f \|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 1.3.2. *Seja* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *um subconjunto aberto. Definimos:*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \textit{ menurável e } \exists C \textit{ constante tal que } |f(x)| \leqslant C\}$$

O espaço $L^\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\| f \|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; |f(x)| \leqslant C \text{ q.s em } \Omega\}.$$

Teorema 1.3.1. *(Desigualdade de Hölder). Sejam as funções $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leqslant p < \infty$ e q o expoente conjugado de p; isto é $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $f.g \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |fg| dx \leqslant \| f \|_{L^p(\Omega)} \| g \|_{L^q(\Omega)}$$

Demonstração. Vide [15], pag.8.

Teorema 1.3.2. *Sejam $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em L^p e $f \in L^p$, tal que $\| f_k - f \|_{L^p} \to 0$. Então existe uma subsequência $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e uma função $h \in L^p$ tal que*

(a) $f_{k_j}(x) \to f(x)$ *q.s em Ω.*

(b) $|f_{k_j}(x)| \leqslant h(x)$ *para todo k e q.s em Ω*

Demonstração. Vide [1], pag.94.

Definição 1.3.3. *Diz-se que a função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω, quando f é integrável à Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$. Em símbolos tem-se*

$$f \in L^1_{loc}(\Omega) \Longleftrightarrow \int_K |f| dx < \infty, \quad \textit{para todo compacto } K \subset \Omega.$$

Teorema 1.3.3. *(Desigualdade de Young). Sejam $p > 1$ e $q > 1$ reais tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dados $a \geqslant 0$ e $b \geqslant 0$ então vale*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

valendo a igualdade se $a^p = b^q$.

Demonstração. Vide [5], pag.622.

Lema 1.3.1. *(Du Bois Raymond). Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω.*

Demonstração. Vide [12], pag.8.

Observação 1.3.1. *Outro resultado interessante é que a derivada de uma função $L^1_{loc}(\Omega)$, não é em geral uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$.*

Tal fato, motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções conhecidas sob a denominação de *Espaços de Sobolev*.

1.4 Espaços de Sobolev

Definição 1.4.1. *Sejam uma aberto do* $\mathbb{R}^n$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *e* $m \in \mathbb{N}$. *O Espaço de Sobolev que denotamos por* $W^{m,p}(\Omega)$, *é o espaço vetorial das funções em* $L^p(\Omega)$ *cujas derivadas distribucionais de ordem* α *pertencem a* $L^p(\Omega)$, *para todo multi-índice* α *com* $|\alpha| \leqslant m$. *Simbolicamente escrevemos:*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \textit{ para todo } \alpha \textit{ tal que } |\alpha| \leqslant m\}.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ com $1 \leqslant p < \infty$ é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\| u \|_{W^{m,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}},$$

Também $W^{m,\infty}(\Omega)$ é um espaço de Banch com norma

$$\| u \|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sup \mathrm{ess} |D^\alpha u(x)|.$$

Quando $p = 2$, o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será representado por $H^m(\Omega)$ que é um Espaço de Hilbert, cujo produto interno e a correspondente norma induzida em $H^m(\Omega)$ são dadas por

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)} \;\text{ e }\; \| u \|_{H^m(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}}$$

Agora vamos apresentar algumas desigualdades de Sobolev que serão úteis no desenvolvimento do trabalho.

Corolário 1.4.1. *Supanhamos que* Ω *é um conjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$ *e de classe* C^1 *com* Γ *limitado, seja* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *então tem-se:*

$$\text{Se } p < n, \; W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega), \text{ onde } \tfrac{1}{p^*} = \tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{n};$$
$$\text{Se } p = n, \; W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ para todo } q \in [p, +\infty);$$
$$\text{Se } p > n, \; W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega).$$

e todas estas injeções são contínuas. Além disso, se $p > n$ *tem-se que para todo* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *vale:*

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C \| u \|_{W^{1,p}} |x - y|^\alpha \text{ q.s } x, y \in \Omega$$

onde $\alpha = 1 - (n/p)$ *e* C *dependa apenas do* Ω, p *e* n. *Em particular* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Vide [1], pag.285.

Teorema 1.4.1. *Supanhamos que Ω é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e de classe C^1 com Γ limitado, seja $1 \leqslant p \leqslant \infty$ então temos as seguintes injeções compactas*

$$\text{Se } p < n, \ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ para todo } q \in [1, p^*) \ \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n};$$
$$\text{Se } p = n, \ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ para todo } \ q \in [p, +\infty);$$
$$\text{Se } p > n, \ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}).$$

Em particular veja [1] $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, com injeções compacta para todo p e para todo n.

Demonstração. Vide [1], pag.285.

Definição 1.4.2. *Seja Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, definimos*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$$

Teorema 1.4.2. ***(Desigualdade de Poincaré).*** *Suponhamos que Ω é um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$ e $1 \leqslant p < \infty$. Então existe uma constante C (dependendo de Ω e p) tal que*

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} \leqslant C \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)}, \quad \textit{para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. Vide [1], pag.57.

1.4.1 Identidade de Gauss

Denotamos por $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ ao espaço formado pelas restrições à $\overline{\Omega}$ das funções $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Temos que se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, limitado cuja fronteira Γ bem regular então $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $H^1(\Omega)$. Além disso, se $f, g \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ vale a identidade

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(fg)dx = \int_\Gamma fg\nu_i d\Gamma,$$

onde $\nu_i = \cos(x_i, \nu)$, ν representando a normal unitária externa à Γ. Portanto,

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} g dx = -\int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma fg\nu_i d\Gamma,$$

para todo par $f, g \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Por densidade, temos que a indentidade acima, denominada *identidade de Gauss*, vale para todo para $f, g \in H^1(\Omega)$. Veja [12], por exemplo.

1.5 Espaços $L^p(0,T;X)$

Nessa seção, estendemos as noções de mensurabilidade e integrabilidade às funções $f:[0,T]\to X$, onde X é um espaço de Banach e cuja norma é representada por $\|\cdot\|_X$

Definição 1.5.1.

1. *Uma função* $s:[0,T]\to X$ *é chamada simples quando tem a forma*

$$s(t)=\sum_{i=n}^{n}\chi_{E_i}(t)u_i,$$

onde cada E_i *é um conjunto Lebesgue mensurável de* $[0,T]$*,* χ_{E_i} *é a função característica de* E_i *e* $u_i\in X$*, para cada* $i=1,\ldots,n$.

2. *Uma função* $f:[0,T]\to X$ *é fortemente mensurável quando existe uma sequência de funções simples* $s_k:[0,T]\to X$ *tal que*

$$s_k(t)\to f(t) \text{ em q.s de } [0,T].$$

Definição 1.5.2. *Seja* X *um espaço de Banach. Denotemos por* $L^p(0,T;X)$*, com* $1\leqslant p\leqslant\infty$*, o espaço vetorial das (classes de funções de f) funções* $f:(0,T)\to X$ *fortemente mensuráveis, tais que há aplicação* $t\mapsto\| f(t)\|_X\in L^p(0,T)$.

O espaço $L^p(0,T;X)$, com $1\leqslant p<\infty$ é um espaço de Banach com a norma

$$\| f\|_{L^p(0,T;X)}=\left(\int_0^T\| f(t)\|_X^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

O caso $p=\infty$, temos que $L^\infty(0,T;X)$ é completo com a norma

$$\| f\|_{L^\infty(0,T;X)}=\sup\operatorname{ess}\| f(t)\|_X .$$

Quando $p=2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert cujo produto interno é dado por

$$\langle f,g\rangle_{L^2(0,T;X)}=\int_0^T\langle f(t),g(t)\rangle_X dt.$$

Onde $\langle f(t),g(t)\rangle_X$ é um produto interno em X.

Observação 1.5.1. *Vemos que, quando* X *é reflexivo e separável e,* $1 < p < \infty$*, então* $L^p(0,T;X)$ *é reflexivo e separável e além disso, seu dual topológico* $L^p(0,T;X)'$ *identifica-se com o espaço de Banach* $L^q(0,T;X')$*, sendo* q *o conjugado de* p*, isto é,* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. A dualidade entre* $L^p(0,T;X)$ *e* $L^q(0,T;X')$ *é dada na forma integral*

$$\langle f, g\rangle_{L^q(0,T;X'),L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle f(t), g(t)\rangle_{X',X} dt,$$

onde $\langle ., .\rangle_{X',X}$ *representa a dualidade entre* X *e* X'*.*
O dual topológico de $L^1(0,T;X)$ *identifica-se com* $L^\infty(0,T;X')$*.*

A seguir, enuciamos importantes resultados concernentes aos espaços $L^p(0,T;X)$ e foram essenciais para o desenvolvimento de nosso trablaho.

Proposição 1.5.1. *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach e suponha* $X \hookrightarrow Y$*. Se* $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$ *então*

$$L^p(0,T;X) \hookrightarrow L^q(0,T;Y).$$

Demonstração. Vide [10] .

Teorema 1.5.1. *(Aubin-Lions). Sejam* B_0, B, B_1 *espaços de Banach,* B_0 *e* B_1 *reflexivos, a imersão de* B_0 *em* B *é compacta,* B *imerso continuamente em* B_1*,* $1 < p_0, p_1 < \infty$ *e* W *o espaço*

$$W = \{u \in L^{p_0}(0,T;B_0); u' \in L^{p_1}(0,T;B_1)\}$$

equipado da norma

$$\| u \|_W = \| u \|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \| u \|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}$$

Então W *é um espaço de Banach, e a imersão de* W *em* $L^{p_0}(0,T;B)$ *é compacta.*

Demonstração. Vide [7] .

Observação 1.5.2. *Uma consequência do teorema de Aubin-Lions: se* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência limitada em* $L^2(0,T;B_0)$ *e* $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência limitada em* $L^2(0,T;B_1)$ *então* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada em* W*. Daí, segue-se que existe uma subsequência* $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $u_{n_k} \to u$ *forte em* $L^2(0,T;B)$*.*

Proposição 1.5.2. *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach tais que* X *é imerso, contínua e densamente, em* Y*. Suponha que* $f \in L^1(0,T;X)$ *e* $f' \in L^1(0,T;Y)$*. então* $f \in C^0(0,T;Y)$*.*

Demonstração. Vide [2] .

1.5.1 Distribuição Vetorial

Sejam $f \in L^p(0,T;X)$, fixada arbitrariamente, e $\tau_f : \mathcal{D}(0,T) \to X$ a aplicação dada por

$$\langle \tau_f, \phi \rangle = \int_0^T f(t)\phi(t)dt, \ \forall \phi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Note, primeirante que a integral acima é um vetor de X. Observe também que τ_f é linear e contínua. Com efeito a linearidade é imediata e, quanto a continuidade, seja $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{D}(0,T)$ tal que $\phi_k \to 0$ quando $k \to \infty$. Então,

$$\begin{array}{rcl} \| \langle \tau_f, \phi \rangle \|_X & = & \left\| \int_0^T f(t)\phi_k dt \right\|_X \\ & \leqslant & \int_0^T \| f(t) \|_X |\phi_k(t)|_{\mathbb{R}} dt \\ & \leqslant & \left(\int_0^T \| f(t) \|_X^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^T |\phi_k|_{\mathbb{R}}^q \right)^{\frac{1}{q}} \end{array}$$

sendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Portanto,

$$\| \langle \tau_f, \phi \rangle \|_X \leqslant \| f \|_{L^p(0,T;X)} \| \phi_k \|_{L^q(0,T)}$$

Como $\phi_k \to 0$ uniformente, temos, que $\langle \tau_f, \phi \rangle\rangle \to 0$, quando $k \to \infty$. Concluímos que τ_f é contínua.

Dizemos que τ_f é uma distribuição $\mathcal{D}(0,T)$, a valores no espaço vetorial X, definida por uma função $f \in L^p(0,T;X)$ e escrevemos:

$$\tau_f \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T);X).$$

O espaços $\mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T);X)$ é denominado espaço vetorial de todas as distribuições em $\mathcal{D}(0,T)$ tomando valores em X.

1.6 Existência e Prolongamento de Soluções de EDO's

Seja D um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ cujos os elementos são denotados por (t,x), onde $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$ e seja $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma função não necessariamente contínua. Associado à função f e à um ponto $(t_0, x_0) \in D$ temos o Problema de Valor Inicial (PVI), também chamando de Problema de Cauchy,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & f(t,x) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Definição 1.6.1. *Uma solução, no sentido, do Problema de Cauchy (1.1) é uma função* $\phi(t)$ *absolutamente contínua, tal que, para algum número real* $\beta > 0$*, tenhamos*

- $(t, \phi(t)) \in D$ *para todo* $t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$,
- $\phi(t_0) = x_0$,
- $\phi^{'}(t) = f(t, \phi(t))$ *quase sempre em* $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$.

Definição 1.6.2. *Dizemos que uma função* $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+}$ *satisfaz as condições de Caratheodory quando:*

- $f(t, x)$ *é mensurável em* t*, para cada* x *fixado;*
- $f(t, x)$ *é contínua em* x*, para cada* t *fixado;*
- *para cada compacto* $K \subset D$ *existe uma função* $m_k(t)$*, integrável, tal que,*

$$\| f(t, x) \|_{\mathbb{R}^n} \leqslant m_k(t), \ \forall (t, x) \in D$$

Considere o retângulo $R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}; |t - t_0| \leqslant a \text{ e } |x - x_0| \leqslant b\}$ com $a, b > 0$.

Teorema 1.6.1. *(Teorema de Carathéodory). Seja* $f : R \to \mathbb{R}^n$ *satisfazendo as condições de Carathéodory em* R*. Então, o problema (1.1) admite um solução* $\phi(t)$ *sobre algum intervalo* $|t - t_0| \leqslant \beta$.

Demonstração. Vide [14], pag.156.

Uma consequência imediata do Teorema de Carathéodory é o seguinte resultado:

Corolário 1.6.1. *Sejam* $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *aberto e* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *satisfazendo as condições de Carathéodory. Então, o problema (1.1) tem solução, para todo* $(t_0, x_0) \in D$.

Sejam $\phi(t)$ uma solução de $x^{'} = f(t, x)$ sobre um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e J tal que $I \subset J$. Dizemos que $\phi(t)$ tem prolongamento até J quando existir umas aplicação $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ tal que φ é solução de $x^{'} = f(t, x)$ e $\varphi\Big|_I = \phi$. Um resultado muito importante para o nosso trabalho e que é consequência do Teorema 2, enunciado na pág. 159 de [14] é a seguinte proposição.

Proposição 1.6.1. *Sejam* $D = [0, T] \times B$*, sendo* T *um número real positivo,* $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leqslant b \text{ com } b > 0\}$ *e* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *satisfazendo as condições de Cathéodory. Além disso, considere* $\phi(t)$ *uma solução de*

$$\begin{cases} x^{'} & = & f(t, x); \\ x(t_0) & = & x_0, \ |x_0| \leqslant b. \end{cases}$$

Suponha que em qualquer intervalo I *onde* $\phi(t)$ *estiver definida, se tenha* $\phi(t) \leqslant M$*, para todo* $t \in I$*,* M *independente de* I *e* $M < b$*. Então* ϕ *tem um prolongamento até* $[0, T]$.

Demonstração. Vide [14], pag.164.

1.7 Funções Próprias e Decomposição Espectral

Teorema 1.7.1. *Suponha* Ω *um subonjunto aberto e limitado do* $\mathbb{R}^n$*. Então,*

1. *Existe uma sequência de números reais* $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *satisfazendo:*

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \dots$$

e

$$\lambda_k \to \infty \text{ quando } k \to \infty.$$

2. *Existe uma base ortonormal* $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *de* $L^2(\Omega)$ *tais que* $e_k \in H_0^1(\Omega)$ *e, além disso*

$$\begin{cases} -\Delta e_k &= \lambda_k e_k \\ e_k &= 0 \text{ em } \Gamma \end{cases}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$*. Onde* $\Gamma = \partial\Omega$ *fronteira de* Ω

Dizemos que os números $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *são autovalores de* $-\Delta$*, com a condição de Dirichlet,*$e_k = 0$ *em* Γ *e que as funções* e_k *são as autofunções associados aos autovalores. Se, além disso,* Γ *de classe* C^2 *então temos que* $e_k \in H^2(\Omega)$*, para* $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Vide [5], pag.335.

1.8 Desigualde de Gronwall

• **Forma integral** *Sejam* $C > 0$*,* $f : (s, T) \to \mathbb{R}$ *uma função integrável, com* $f(t) \geqslant 0$ *quase sempre em* (s, T) *e* $g : [s, T] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e não negativa,tal que*

$$g(t) \leqslant C + \int_s^t f(\xi) g(\xi) d\xi, \forall t \in [s, T]$$

Então

$$g(t) \leqslant C e^{\int_s^t f(\xi) d\xi}, \forall t \in [s, T]$$

Demonstração. Vide [2], pag.55.

- **Forma diferencial** *Seja* $\eta(.)$ *um função não negativa e absolutamente contínua em* $[0, T]$

  ◦ Se η satisfaz, para quase todo $t \in [0, T]$, a desigualdade diferencial

$$\eta'(t) \leqslant \psi(t) + \varphi(t)\eta(t),$$

onde $\psi(t)$ e $\eta(t)$ são funções não negativas e integráveis em $[0, T]$, então

$$\eta(t) \leqslant e^{\int_0^t \varphi(s)ds}\left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds\right]$$

para todo $0 \leqslant t \leqslant T$.

  ◦ Em particular, se $\eta' \leqslant \varphi\eta$ em $[0, T]$ e $\eta(0) = 0$, temos

$$\eta \equiv 0 \text{ em } [0, T].$$

Demonstração. Vide [5], pag.624.

Capítulo 2

Existência e Unicidade

Neste capítulo mostramos a existência e unicadade de soluções soluções fortes para o sistema termoelástico não-linear com coeficientes não-local

$$u''(t) - M(x, t, |\nabla u(t)|^2)\Delta u(t) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\theta = 0 \text{ em } Q \tag{2.1}$$

$$\theta'(t) + B \cdot \theta + (\mathbf{a} \cdot \nabla)u' = 0 \text{ em } Q \tag{2.2}$$

Submetido às condições iniciais de fronteira

$$u(x, 0) = u_0(x), u'(x, 0) = u_1(x), \theta(x, 0) = \theta_0(x) \text{ em } \Omega \tag{2.3}$$

$$u = \theta = 0 \text{ em } \Sigma \tag{2.4}$$

onde Ω é um suconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave e limitada. Denota-se $Q = \Omega \times]0, T[$. Para obter a existência e unicidade de soluções globais do problema misto (3.1)-(3.4) consideras-se as seguintes hipóteses adicionais sobre M, B:

$$\left|\begin{array}{c} M \in C^1(\overline{\Omega} \times [0, \infty) \times [0, \infty)),\ 0 < m_0 \leqslant M(x, t, \lambda) \leqslant C_0 f(\lambda) \\ M(x, t, \lambda) := M_1(x, t) + M_2(x, t, \lambda); \\ \partial_t M_1 \leqslant \rho < 0, |\partial_t M_2|_{\mathbb{R}} \leqslant C_1 g(\lambda), |\partial_t M|_{\mathbb{R}} \leqslant C_2 h(\lambda) \\ f, g, h \in C^1([0, \infty) \times [0, \infty)) \text{ são estritamente decrescente;} \end{array}\right. \tag{2.5}$$

$$\left|\begin{array}{c} B_{ij} : L^1(\Omega) \times [0, \infty[\to \mathbb{R} \text{ tais que :} \\ |B_{ij}(w, t) - B_{ij}(z, s)|_{\mathbb{R}} \leqslant L(|w - z|_{L^2(\Omega)} + |t - s|_{\mathbb{R}}) \\ \text{para todo } (w, s), (z, s) \in L^2(\Omega) \times [0, T], \\ \sum_{i,j=1}^{n} B_{i,j}(z, t)\xi_i \xi_j \geqslant B_0 |\xi|^2_{\mathbb{R}}\ ; \forall (z, t) \in L^1 \times (0, T); \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \end{array}\right. \tag{2.6}$$

2.1 Existência de Soluções Fortes

Mostra-se aqui a existência de soluções fortes para o sistema (3.1)-(3.4).

Definição 2.1.1. *Um par de funções* $\{u, \theta\}$ *definidas em* $\Omega \times [0, \infty)$ *com valores reais é solução forte do sistema (3.1)-(3.4), desde que*

$$u \in L^{\infty}_{loc}(0, \infty; H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)), u' \in L^{\infty}_{loc}(0, \infty; H^1_0(\Omega)),$$
$$\theta \in L^{\infty}_{loc}(0, \infty; H^1_0(\Omega)) \cap L^2_{loc}(0, \infty; H^2(\Omega)),$$
$$u'' \in L^{\infty}_{loc}(0, \infty; L^2(\Omega)), \theta' \in L^2_{loc}(0, \infty; L^2(\Omega)),$$

e as funções $\{u, \theta\}$ *satisfazem o sistema (3.1)-(3.4) quase sempre.*

Teorema 2.1.1. *Suponha* $u_0 \in H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1, \theta_0 \in H^1_0(\Omega)$ *e*

$$C_3\Big[g(\frac{2C_\Omega K_0}{m_0}) + h(\frac{2C_\Omega K_0}{m_0})K_0\Big] < -\frac{\rho}{2} \tag{2.7}$$

onde C_3 *é uma constante real positiva definada em (2.22). Então existe solução forte do sistema (3.1)-(3.4) com as hipóteses (3.5) e (3.6). Além disso, se* l *é uma função real contínua estritamente decrescente definida em* $[0, \infty[$ *e existe uma constante real positiva* C_4 *tal que*

$$|\nabla M(x, t, \lambda)|_{\mathbb{R}} \leqslant C_4 l(\lambda), \tag{2.8}$$

então a solução é única.

Demosntração: A demonstração do Teorema 2.7. é baseada nos métodos de Lions-Faedo-Galerkin e de compacidade, a qual é organizada nas seguintes seções:

3.1.1 Soluções do problema aproximado;

3.1.2 Estimativas "a priori "das soluções aproximadas;

3.1.3 Passagem ao limite das soluções aproximadas

3.1.4 Verificação dos dados iniciais;

3.1.5 Unicidade de soluções.

2.1.1 Soluções do Problema Aproximado

Usaremos aqui o método de Faedo-Galerkin-Lions, no qual tomamos uma base de auto-funções $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ solução do problema espectral:

$$(\nabla w_j, \nabla w) = \lambda_j(w_j, w), \forall w \in H^1_0(\Omega), \forall j = 1, 2, \ldots$$

Fixado $m \in \mathbb{N}$, considere o espaço $W_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$ e $u_m \in W_m$. Então podemos escrever:

$$u_m = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j(x), \;\; \theta_m = \sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)w_j(x)$$

Como estamos em $W_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$ podemos considerar v, w como uma das funções da base, $w_l \in H_0^1(\Omega)$ assim temos o seguinte problema aproximado.

$$\begin{aligned}
&(u''_m(t), v) - (M(., t, |\nabla u_m|^2, v) + ((a \cdot \nabla)\theta_m(t), v) = 0\\
&(\theta'_m(t), w) + (B(t)\theta_m, w) + ((a \cdot \nabla)u'_m(t), w) = 0\\
&u_m(x, 0) = u_{0m}(x) \to u_0 \;\text{ em }\; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \qquad .\\
&\theta_m(x, 0) = \theta_{0m}(x) \to \theta_0 \;\text{ em }\; H_0^1(\Omega)\\
&u'_m(x, 0) = u_{1m}(x) \to u_1 \;\text{ em }\; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Derivando as funções aproximadas temos

$$\begin{aligned}
u'_m(t) &= \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)w_j(x), \quad \theta'_m = \sum_{j=1}^{m} h'_{jm}(t)w_j(x)\\
u''_m(t) &= \sum_{j=1}^{m} g''_{jm}(t)w_j(x), \quad \theta''_m = \sum_{j=1}^{m} h''_{jm}(t)w_j(x)
\end{aligned}$$

substituindo no problema aproximado temos:

$(\sum_{j=1}^{m} g''_{jm}(t)w_j(x), w_j(x)) - (M(., t, |\nabla \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j(x)|^2) \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\Delta w_j(x), w_l(x))$
$+ ((a \cdot \nabla) \sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)w_j(x), w_l(x) = 0$

$(\sum_{j=1}^{m} h'_{jm}(t)w_j(x), w_l(x)) + (B(t) \sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)w_j(x), w_l(x)) + ((a \cdot \nabla) \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)w_j(x), w_l(x)) =$
0

Reescrevendo as equções acima

$$\begin{cases}
\sum_{j=1}^{m} g''_{jm}(t)(w_j(x), w_l(x)) - M(., t, |\nabla \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j(x)|^2) \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)(\Delta w_j(x), w_l(x)) + \\
\qquad \sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)((a \cdot \nabla))(w_j(x), w_l(x)) = 0\\
\sum_{j=1}^{m} h'_{jm}(t)(w_j(x), w_l(x)) + \sum_{j=1}^{m} B(t)h_{jm}(t)(w_j(x), w_l(x)) + \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)((a \cdot \nabla)w_j(x), w_l(x)) = 0
\end{cases}$$

para $l = 1, 2, 3, ..., n$ podemos escrever na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & 0\\ 0 & 1 & .. & 0\\ . & . & .. & .\\ 0 & 0 & .. & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g''_{1m}(t)\\ g''_{2m}(t)\\ .\\ g''_{mm}(t) \end{pmatrix} - M(|\nabla \textstyle\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j(x)|^2) \begin{pmatrix} (\Delta w_1, w_1) & .. & (\Delta w_m, w_1)\\ (\Delta w_1, w_2) & .. & (\Delta w_m, w_2)\\ . & .. & .\\ (\Delta w_1, w_m) & .. & (\Delta w_m, w_m) \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} ((a.\nabla)w_1, w_1) & .. & ((a.\nabla)w_m, w_1) \\ ((a.\nabla)w_1, w_2) & .. & ((a.\nabla)w_m, w_2) \\ . & .. & . \\ ((a.\nabla)w_1, w_m) & .. & ((a.\nabla)w_m, w_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{1m}(t) \\ h_{2m}(t) \\ . \\ h_{mm}(t) \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & .. & 0 \\ . & . & .. & . \\ 0 & 0 & .. & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h'_{1m}(t) \\ h'_{2m}(t) \\ . \\ h'_{mm}(t) \end{pmatrix} + B(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & .. & 0 \\ . & . & .. & . \\ 0 & 0 & .. & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{1m}(t) \\ h_{2m}(t) \\ . \\ h_{mm}(t) \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} ((a.\nabla)w_1, w_1) & .. & ((a.\nabla)w_m, w_1) \\ ((a.\nabla)w_1, w_2) & .. & ((a.\nabla)w_m, w_2) \\ . & .. & . \\ ((a.\nabla)w_1, w_m) & .. & ((a.\nabla)w_m, w_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g'_{1m}(t) \\ g'_{2m}(t) \\ . \\ g'_{mm}(t) \end{pmatrix} = 0$$

ainda podemos escrever o sistema acima da seguinte maneira:

$A = (w_i, w_l)$, $F = ((a.\nabla)w_j, w_l), E = (\Delta w_j, w_l), Y = (g_{1m}(t), ..., g_{mm}(t))^t$,
$X = (h_{1m}(t), ..., h_{mm}(t))^t$, $D(Y) = M(., t, \sum_{j=1}^{m} \int_\Omega Y_i \nabla w_j dx)$
observe que a matriz A é invertível pois $\det A \neq 0$ assim temos que:

$$\begin{cases} AY'' - D(Y)EY + FX = 0 \\ AX' + B(t)AX + FY' = 0 \end{cases}$$

multiplicando pela matriz inversa A^{-1} teremos

$$\begin{cases} Y'' = A^{-1}D(Y)EY - A^{-1}FX \\ X' = -A^{-1}B(t)AX - A^{-1}FY' \end{cases}$$

Fazendo $Z(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Y'(t) \end{pmatrix}$ então:

$$Z'(t) = \begin{pmatrix} X'(t) \\ Y'(t) \\ Y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A^{-1}B(t)AX - A^{-1}FY' \\ Y'(t) \\ A^{-1}D(Y)EY - A^{-1}FX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A^{-1}FY' \\ Y'(t) \\ A^{-1}FX \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} -A^{-1}B(t)AP_1(Z) \\ 0 \\ A^{-1}D(P_2(Z))EP_2(Z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -A^{-1}F & 0 \\ 0 & 0 & I \\ -A^{-1}F & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Y'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -A^{-1}B(t)AP_1(Z) \\ 0 \\ A^{-1}D(P_2(Z))EP_2(Z) \end{pmatrix}$$

tomando que:

$$F_1(Z,t) = \begin{pmatrix} 0 & -A^{-1}F & 0 \\ 0 & 0 & I \\ -A^{-1}F & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad F_2(Z,t) = \begin{pmatrix} -A^{-1}B(t)AP_1(Z) \\ 0 \\ A^{-1}D(P_2(Z))EP_2(Z) \end{pmatrix}$$

assim o sistema é equivalente a:

$$\begin{cases} Z' = F(Z,t) \\ Z(0) = Z_0 \end{cases}$$

onde $F(Z,t) = F_1(Z,t) + F_2(Z,t)$ e $F : \mathbb{R}^{3m} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3m}$ e as funções $P_i : \mathbb{R}^{3m} \to \mathbb{R}$ são funções projeções. A seguir mostra-se que o sistema acima esta nas condições do Teorema de Caracthéodory. De fato, seja $U = J \times [0,T]$ onde $J = \{Z \in \mathbb{R}^{3m}; |Z| < k_J\}$

1º $F(z,t)$ é mensurável para cada t fixo. De fato, sendo $F_1(Z,t)$ uma função que independe de t é mensurável para cada t fixo. Como $B(t)$ é um funcional linear contínuo, $B(t) \in L^1(\Omega) \times (0,\infty]$ então a função $F_2(Z,t)$ é mensurável em t, assim resulta que $F : \mathbb{R}^{3m} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3m}$ é mensurável em t para cada Z fixado

2º $F(z,t)$ é uma função contínua em Z para cada t fixo. De fato como as projeções P_1 P_2 são contínuas e pela continuidade de D obtempos que $D \circ P_1$ então $F_2(Z,t)$ é uma função contínua, temos diretamente que $F_1(Z,t)$ é também uma função contínua em Z, para cada t fixo.

3º $F(z,t)$ exite uma função integravel $m(t)$ de tal modo que $|F(z,t)| \leqslant m(t)$, $\texttt{onde}(Z,t) \in U$, de fato, temos :

$$|F(z,t)| \leqslant |F_1(Z,t)| + |F_2(Z,t)|.$$

Como Z pertence ao compacto $\mathbb{K}$ então existe uma constante tal que

$$|F_1(Z,t)| \leqslant k_0$$

e pela continuidade das funções $P_1, P_2, D \circ P_1$ no compacto $\mathbb{K}$ existem constantes reais tais que

$$|F_2(Z,t)| \leqslant k_1 B(t) + k_2.$$

Concluimos que o problema de Cauchy satisfaz as condições de Caracthéodory. Assim as funções $g_{jm}(t), h_{jm}(t), j = 1, 2, ..., m$ existem e satisfazem o problema aproximado, sendo $g_{jm}(t), h_{jm}(t)$ absolutamente contínuas em $[0, t_m[$ com $t_m < T$.

2.1.2 Estimativas "a priori"das Soluções Aproximadas

$$\begin{cases} (u''_m(t), v) - (M(.,t,|\bigtriangledown u_m|^2, v) + ((a.\bigtriangledown)\theta_m(t), v) = 0 \\ (\theta'_m(t), w) + (B(t)\theta_m, w) + ((a.\bigtriangledown)u'_m(t), w) = 0 \\ u_m(x,0) = u_{0m}(x) \to u_0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\ \theta_m(x,0) = \theta_{0m}(x) \to \theta_0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \\ u'_m(x,0) = u_{1m}(x) \to u_1 \text{ em } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \end{cases} . \tag{2.10}$$

Na seção anterior, mostramos a existência de funções $\{u_m(t), \theta_m(t)\}$ soluções do problema aproximado 2.10 em $[0, t_m)$. Este intervalo será estendido ao intervalo $[0, T]$, onde T é arbitrário, graças as estimativas I.

Observação 2.1.1. *No cálculo dessas estimativas por questão de simplifcação dos cálculos fazemos* $u_m = u$ *e* $\theta_m = \theta$

Estimativas I. Tomando $v = -\Delta u'(t)$ e $w = -\Delta\theta(t)$ no problema aproximado, temos:

$$\bullet \frac{d}{dt}(\nabla u', \nabla u') = 2(\nabla u'', \nabla u') = 2\int_\Omega \nabla u'' \nabla u' dx = 2(-\int_\Omega u'' \Delta u') = 2(u'', -\Delta u')$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u|^2 = (u'', -\Delta u') \tag{2.11}$$

$$\bullet \frac{d}{dt}(\nabla\theta, \nabla\theta) = 2(\nabla\theta', \nabla\theta) = 2\int_\Omega \nabla\theta' \nabla\theta dx = 2(-\int_\Omega \theta' \Delta\theta) = 2(\theta', -\Delta\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla\theta|^2 = (\theta', -\Delta\theta) \tag{2.12}$$

$$\bullet(B(t)\cdot\theta(t),-\Delta\theta(t))=\Big(-\sum_{i,j=1}^{n}B_{ij}(\theta(t),t)\partial^2_{x_ix_j}\theta(t),-\Delta\theta(t)\Big)=$$

$$\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{n}B_{ij}(\theta(t),t)\partial^2_{x_ix_j}\theta(t)\sum_{k=1}^{n}\partial^2_{x_k}\theta(t)dx=\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{n}B_{ij}(\theta(t),t)\partial^2_{x_ix_j}\theta(t)\nabla\cdot(\nabla\theta)dx$$

aplicando o teorema do divergente e integrando por partes, bem com a hipotese sobre os funcional $B(t)$,:

$$=\int_\Omega\sum_{i,j,k=1}^{n}B_{ij}(\theta(t),t)\partial^3_{x_ix_jx_k}\theta(t)\nabla\theta dx=$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}B_{ij}(\theta(t),t)\partial^2_{x_ix_j}\theta(t)\nabla\theta\Big|_{\partial\Omega}-\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{n}B_{ij}(\theta(t),t)\partial^2_{x_ix_k}\theta(t)\sum_{j=1}^{n}\partial^2_{x_j}\nabla\theta(t)dx=$$

$$\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{n}B_{ij}(\theta(t),t)\partial^2_{x_ix_k}\theta(t)\partial^2_{x_jx_k}\theta dx=(\sum_{i,j=1}^{n}B_{ij}(\theta(t),t)\partial^2_{x_ix_k}\theta(t),\partial^2_{x_jx_k}\theta)\geqslant B_0|\theta(t)|^2_{H^2_{(\Omega)}}$$

$$\Rightarrow(B(t)\cdot\theta(t),-\Delta\theta(t))\geqslant B_0|\theta(t)|^2_{H^2_{(\Omega)}}\tag{2.13}$$

$$\bullet\frac{d}{dt}\Big(M(.,t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}\Big)=\frac{d}{dt}M(.,t,|\nabla u(t)|^2).|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}+M(.,t,|\nabla u(t)|^2)\frac{d}{dt}|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}$$

$$=\frac{d}{dt}\Big(M_1(x,t)+M_2(.,t,|\nabla u(t)|^2\Big)|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}+M(.,t,|\nabla u(t)|^2)\frac{d}{dt}|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}=$$

$$\partial_tM_1(x,t)|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}+\partial_tM_2(.,.t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}+2\partial_\lambda M_2(.,.t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}(\nabla u',\nabla u)$$

$$+M(.,t,|\nabla u(t)|^2)\frac{d}{dt}|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}$$

Multiplicando por $\frac{1}{2}$ e integrando em Ω, observando que $\partial_\lambda M=\partial_\lambda M_2$ temos que:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega\frac{d}{dt}\Big(M(.,t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}\Big)dx=\frac{1}{2}\int_\Omega\partial_tM_1(x,t)|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_\Omega\partial_tM_2(.,.t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}dx+\frac{1}{2}\int_\Omega 2\partial_\lambda M_2(.,.t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}(\nabla u',\nabla u)dx+$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega M(.,t,|\nabla u(t)|^2)\frac{d}{dt}|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}dx.$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\tfrac{1}{2}\int_\Omega M(.,t,|\nabla u(t)|^2)\tfrac{d}{dt}|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}dx&=\tfrac{1}{2}\int_\Omega\tfrac{d}{dt}(M(.,t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}dx\\-\tfrac{1}{2}\int_\Omega\partial_tM_1(x,t)|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}dx&-\tfrac{1}{2}\int_\Omega\partial_tM_2(.,.t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}dx-\\&\Big[\int_\Omega\partial_\lambda M_2(.,.t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}dx\Big](\nabla u',\nabla u).\end{aligned}\tag{2.14}$$

Somando as equações do sistema aproximado obtemos:

$$\begin{cases} (u''(t), -\Delta u'(t)) + (\theta'(t), -\Delta\theta(t)) - (M(.,t,|\bigtriangledown u|^2), -\Delta u'(t)) + (B(t)\theta, -\Delta\theta(t)) \\ \qquad +((a.\bigtriangledown)\theta(t), -\Delta u'(t)) + ((a.\bigtriangledown)u'(t), -\Delta\theta(t)) = 0 \end{cases}$$

Usando as estimativas (2.11) - (2.14) acima obtemos:

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u'(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla\theta(t)|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}(M(.,t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_t M_1(x,t)|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega \partial_t M_2(.,.t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}dx - \Big[\int_\Omega \partial_\lambda M_2(.,.t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}dx\Big](\nabla u', \nabla u)$$

$$-(B(t)\theta, -\Delta\theta(t)) = 0.$$

Aqui, temos o cancelamento do termos $((a\cdot\nabla)\theta(t), -\Delta u'(t)) + ((a\cdot\nabla)u'(t), -\Delta\theta(t)) = 0$. Pois aplicando o teorema do divergente temos que:

$$((a\cdot\nabla)u'(t), \Delta\theta(t)) = \int_\Omega (a\cdot\nabla)u'(t)\Delta\theta(t)dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^m a_i\partial_{x_i}u'(t)\Delta\theta(t)dx$$

$$= -\int_\Omega a_i u'(t)\sum_{i=1}^m \partial_{x_i}\Delta\theta(t)dx = -\int_\Omega a_i\Delta u'(t)\sum_{i=1}^m \partial_{x_i}\theta(t)dx = \int_\Omega \Delta u'(a\cdot\nabla)\theta(t)dx =$$

$$((a\cdot\nabla)\theta(t), \Delta u'(t)).$$

Assim temos que:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\Big[|\nabla u'(t)|^2 + |\nabla\theta(t)|^2 + \int_\Omega M(.,t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}dx\Big] - \\ &\Big[\int_\Omega \partial_\lambda M_2(.,.t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}dx\Big](\nabla u', \nabla u) = \\ &\tfrac{1}{2}\int_\Omega \partial_t M_1(x,t)|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}dx + (B(t)\cdot\theta(t), \Delta\theta) \\ &\leqslant \tfrac{\rho}{2}|\Delta u(t)|^2 - B_0|\theta(t)|^2_{H^2_\Omega} \end{aligned} \tag{2.15}$$

isso implica que:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\Big[|\nabla u'(t)|^2 + |\nabla\theta(t)|^2 + \int_\Omega M(.,t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}dx\Big] + B_0|\theta(t)|^2_{H^2_\Omega} - \tfrac{\rho}{2}|\Delta u(t)|^2 \\ &\leqslant \tfrac{1}{2}\int_\Omega \partial_t M_2(x,t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}dx + \Big[\int_\Omega \partial_\lambda M_2(.,.t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}dx\Big](\nabla u', \nabla u) \end{aligned} \tag{2.16}$$

Agora usando as hipoteses sobre $\partial_t M_2, \partial_\lambda M$ temos $|\partial_t M_2|_{\mathbb{R}} \leqslant C_1 g(\lambda), \quad |\partial_\lambda M|_{\mathbb{R}} \leqslant C_2 h(\lambda)$ assim podemos majorar o ultimo termo da desigualdade acima:

$$\Big|\frac{1}{2}\int_\Omega \partial_t M_2(x,t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta u(t)|_{\mathbb{R}}^2 dx + \Big\{\int_\Omega \partial_\lambda M_2(.,.t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta u(t)|_{\mathbb{R}}^2 dx\Big\}(\nabla u', \nabla u)\Big|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega \Big|\partial_t M_2(x,t,|\nabla u(t)|^2)\Big|_{\mathbb{R}} dx |\Delta u(t)|_{\mathbb{R}}^2 dx + \int_\Omega \Big|\partial_\lambda M_2(.,.t,|\nabla u(t)|^2)\Big|_{\mathbb{R}} |\Delta u(t)|_{\mathbb{R}}^2 dx |\nabla u'||\nabla u|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega C_1 g(\lambda)|\Delta u(t)|_{\mathbb{R}}^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega C_2 h(\lambda)|\Delta u(t)|_{\mathbb{R}}^2 dx |\nabla u'||\nabla u|$$

$$\leqslant |\Delta u(t)|^2 \Big\{\frac{C_1 g(\lambda)}{2} + C_2 h(\lambda)|\nabla u'||\nabla u|\Big\}$$

substituindo na desigualdade (2.16) temos que:

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[|\nabla u'(t)|^2 + |\nabla\theta(t)|^2 + \int_\Omega M(.,t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta u(t)|_{\mathbb{R}}^2 dx\Big] + B_0|\theta(t)|_{H_\Omega^2}^2 - \frac{\rho}{2}|\Delta u(t)|^2$$

$$\leqslant |\Delta u(t)|^2 \Big\{\frac{C_1 g(|\nabla u(t)|^2)}{2} + C_2 h(|\nabla u(t)|^2)|\nabla u'||\nabla u|\Big\}.$$

As inequações acimas são o ponto chave para obtermos estimativas das soluções aproximada $\{u, \theta\}$ e como consequência a restrição aos dados iniciais, defina:

$$\gamma(t) := \frac{C_1}{2} g(|\nabla u(t)|^2) + C_2 h(|\nabla u(t)|^2)|\nabla u'||\nabla u| \tag{2.17}$$

$$K(t) := \frac{1}{2}\Big[|\nabla u'(t)|^2 + |\nabla\theta(t)|^2 + \int_\Omega M(.,t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta u(t)|_{\mathbb{R}}^2 dx\Big] \tag{2.18}$$

$$\gamma_0 := -\frac{\rho}{2} \tag{2.19}$$

assim temos:

$$K'(t) + B_0|\theta(t)|_{H_\Omega^2}^2 + (\gamma_0 - \gamma(t))|\Delta u(t)|^2 \leqslant 0 \tag{2.20}$$

usando a desigualdade de Poincaré $|z|^2 \leqslant C_\Omega |\nabla z|^2$ e $|\nabla z|^2 \leqslant C_\Omega |\Delta z|^2$, juntamente com a hipotese que $M(.,t,|\nabla u(t)|^2) \geqslant m_0 > 0$ é facil ver que:

$$2K(t) = |\nabla u^{'}(t)|^2 + |\nabla\theta(t)|^2 + \int\limits_{\Omega} M(.,t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}} dx \geqslant |\nabla u^{'}(t)|^2$$

$$\Rightarrow |\nabla u^{'}(t)|^2 \leqslant 2K(t)$$

Agora observe que:

$$\begin{aligned}
K(t) &= \frac{1}{2}|\nabla u^{'}(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla\theta(t)|^2 + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} M(.,t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}} dx \\
&\geqslant \frac{1}{2}|\nabla u^{'}(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla\theta(t)|^2 \frac{1}{2} m_0 |\Delta u(t)|^2 \\
&\geqslant \frac{1}{2} m_0 |\Delta u(t)|^2.
\end{aligned}$$

$$\text{Logo} \frac{2}{m_0} K(t) \geqslant |\Delta u(t)|^2.$$

Usando a desigualdade Poincaré obtemos:

$$|\nabla u(t)|^2 \leqslant C_\Omega |\Delta u(t)|^2 \leqslant \frac{2C_\Omega}{m_0} K(t), \tag{2.21}$$

como g e h são funções positivas decrescentes obtemos que:

$$\begin{aligned}
0 < \gamma(t) &< \tfrac{C_1}{2} g(\tfrac{2C_\Omega}{m_0}K(t)) + C_2 h(\tfrac{2C_\Omega}{m_0}K(t))\sqrt{K(t)}\sqrt{\tfrac{C_\Omega}{m_0}}\sqrt{K(t)} \\
&\leqslant \tfrac{C_1}{2} g(\tfrac{2C_\Omega}{m_0}K(t)) + 2C_2 \tfrac{\sqrt{C_\Omega}}{\sqrt{m_0}} h(\tfrac{2C_\Omega}{m_0}K(t))K(t)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

fazendo $\max\{\frac{C_1}{2}, 2C_2\frac{\sqrt{C_\Omega}}{\sqrt{m_0}}\} = C_3$ temos que :

$$\gamma(t) \leqslant C_3 \Big[g(\frac{2C_\Omega}{m_0}K(t)) + h(\frac{2C_\Omega}{m_0}K(t))K(t) \Big] \tag{2.23}$$

Agora usando a hipotese que $M(x,t,\lambda) \leqslant C_0 f(\lambda)$ obtemos:

$$\begin{aligned}
K(t) &= \frac{1}{2}\Big\{ |\nabla u^{'}(t)|^2 + |\nabla\theta(t)|^2 + \int\limits_{\Omega} M(.,t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}} dx \Big\} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\Big\{ |\nabla u^{'}(t)|^2 + |\nabla\theta(t)|^2 + \int\limits_{\Omega} C_0 f(|\nabla u(t)|^2)|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}} dx \Big\} \\
&= \frac{1}{2}\Big\{ |\nabla u^{'}(t)|^2 + |\nabla\theta(t)|^2 + C_0 f(|\nabla u(t)|^2)|\Delta u(t)|^2 \Big\}
\end{aligned}$$

Fazendo $t = 0$ temos que :

$$K(0) \leqslant \frac{1}{2}\Big\{|\nabla u'(0)|^2 + |\nabla\theta(0)|^2 + C_0 f(|\nabla u(0)|^2)|\Delta u(0)|^2\Big\}.$$

Para a existência global de soluções é estabelecido restrições sobre a norma u_0, u_1, θ_0 onde $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ definindo uma constante real positiva,

$$K_0 = \frac{1}{2}\Big[|\nabla u'(0)|^2 + |\nabla\theta(0)|^2 + C_0 f(|\nabla u(0)|^2)\Big]|\Delta u(0)|^2. \tag{2.24}$$

levando em conta esta constante positiva temos que

$$K(0) \leqslant K_0.$$

Sendo g, h estritamente decrescente temos que:

$$\gamma(0) \leqslant C_3\Big[g(\frac{2C_\Omega}{m_0}K(0)) + h(\frac{2C_\Omega}{m_0}K(0))K(0)\Big]$$

$$\leqslant C_3\Big[g(\frac{2C_\Omega}{m_0}K_0) + h(\frac{2C_\Omega}{m_0}K_0)K_0\Big].$$

Da hipotese do Teorema 1.2, obtemos:

$$g(\frac{2C_\Omega}{m_0}K_0) + h(\frac{2C_\Omega}{m_0}K_0)K_0 < \frac{-\rho}{2}$$
$$\Rightarrow 0 < \gamma(0) < \gamma_0, \tag{2.25}$$

apartir da desigualdade acima formulamos o seguinte lema:

Lema 2.1.1. *A função γ é limitada na semireta positiva $t \geqslant 0$, isto é*

$$0 < \gamma(t) \leqslant \gamma_0, \forall t \geqslant 0. \tag{2.26}$$

Prova 1. *Argumentando por contradição. De fato, suponha que $\gamma(s) > \gamma_0$ para algum $s > 0$. Da desigualdade $0 < \gamma(0) < \gamma_0$ e da continuidade da função γ implica que $0 < \gamma(t) < \gamma_0$ no intervalo $0 < t < t_0$.*

O conjunto $\{t > 0; \gamma(t) = \gamma_0\}$ é não-vazio pelo teorema do valor intermediário e, como é a imagem inversa de um ponto, temos que é também fechado e limitado na semirreta positiva. Portanto,tem mínimo t^*.

Se existe $0 \leqslant \tau < t^*$ então $\gamma(\tau) \neq \gamma_0$ temos duas possibilidades

$$\begin{cases} 0 < \gamma(\tau) < \gamma_0 \\ \gamma(\tau) > \gamma_0 \end{cases}$$

Sunponha que $\gamma(\tau) > \gamma_0$, assim da continuidade da função γ e do teorema valor intermediário, existe s_1 com $t_0 \leqslant s_1 < \tau < t^*$ e tal que $\gamma(s_1) = \gamma_0$. Mas isso é uma contradição , pois t^*, consequetemente, a continuidade da função γ garante que $\gamma(t) < \gamma_0$ com $0 \leqslant t \leqslant t^*$ e $\gamma(t) = \gamma_0$. Da desigualdade (2.20) obtemos que $K'(t) \leqslant 0 \ \forall t, \ \in \ [0, t^*)$. De fato temos que $(\gamma_0 - \gamma(t))$ será positivo, logo

$$K'(t) \leqslant K'(t) + B_0|\theta(t)|^2_{H^2_{(\Omega)}} + (\gamma_0 - \gamma(t))|\Delta(t)|^2 \leqslant 0.$$

Seja $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, tal que $0 < t^* - \epsilon < t^*$. Integrando $K'(t) \leqslant 0$, de 0 a $t^* - \epsilon$, temos:

$$\int_0^{t^*-\epsilon} K'(t)dt \leqslant \int_0^{t^*-\epsilon} dt \Rightarrow K(t^* - \epsilon) \leqslant K(0) \leqslant K_0.$$

Agora, fazendo $t = t^* - \epsilon$ em (2.23) temos:

$$\gamma(t^* - \epsilon) \leqslant \frac{C_1}{2} g\Big(\frac{2C_\Omega}{m_0} K(t^* - \epsilon)\Big) + 2C_2 \frac{\sqrt{C_\Omega}}{\sqrt{m_0}} h\Big(\frac{2C_\Omega}{m_0} K(t^* - \epsilon)\Big) K(t^* - \epsilon).$$

Usando que $K(t^* - \epsilon) \leqslant K(0) \leqslant K_0$ e que g, h são estritamente descrescente, temos

$$\gamma(t^* - \epsilon) \leqslant C_3\Big[g(\frac{2C_\Omega}{m_0} K_0) + h(\frac{2C_\Omega}{m_0} K_0) K_0\Big].$$

Quando $\epsilon \to 0$ usando a hipotese que $\gamma_0 = \frac{-\rho}{2}$ temos que $\gamma(t^*) < \gamma_0$, o que é uma contradição.$\square$

Logo da desigualdade (2.20) temos:

$$K'(t) + B_0|\theta(t)|^2_{H^2_{(\Omega)}} + (\gamma_0 - \gamma(t))|\Delta(t)|^2 \leqslant 0 \Rightarrow K'(t) + B_0|\theta(t)|^2_{H^2_{(\Omega)}} \leqslant 0 \ \forall t \geqslant 0.$$

Integrando a desigualdade acima temos que

$$\int_0^t K'(s) + B_0|\theta(s)|^2_{H^2_{(\Omega)}} ds \leqslant 0 \text{ ou}$$

$$K(t) - K(0) + B_0 \int_0^t |\theta(s)|^2_{H^2_{(\Omega)}} dt \text{ ou}$$

$$K(t) + B_0 \int_0^t |\theta(s)|^2_{H^2_{(\Omega)}} ds \leqslant K(0) \leqslant K_0 \ \ \forall\ t \geqslant 0.$$

Com a hipotese que $M(x,t,\lambda) \geqslant m_0$ vamos obter as seguintes estimativas

$$\begin{cases} (u_m) \ \mathit{limitada\ em}\ L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \\ (u_m') \ \mathit{limitada\ em}\ L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega)) \\ (\theta_m) \ \mathit{limitada\ em}\ L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,\infty; H^2(\Omega)) \\ \end{cases} \tag{2.27}$$

De fato,

$\bullet(u_m)\ \mathit{limitada\ em}\ L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$.

pois $(u_m(t)) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ usando a desigualdade de Poincaré temos que

$$|u_m|^2 \leqslant C_\Omega |\nabla u_m|^2 \leqslant \tfrac{2C_\Omega}{m_0} K(t) \leqslant \tfrac{2C_\Omega}{m_0} \left(K(t) + B_0 \int_0^t |\theta(s)|^2_{H^2_{(\Omega)}} ds \right) \leqslant \tfrac{2C_\Omega}{m_0} K_0$$

logo $\sup |u_m|^2 \leqslant \frac{2C_\Omega}{m_0} K_0$ isso implica que $(u_m)\ \mathit{limitada\ em}\ L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$

$\bullet(u_m')\ \mathit{limitada\ em}\ L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega))$

De fato, $u_m' \in H_0^1(\Omega)$, e da desigualdade de Poincaré obtemos:

$$|u_m'|^2 \leqslant C_\Omega |\nabla u_m'|^2 \leqslant \tfrac{2C_\Omega}{m_0} K(t) \leqslant \tfrac{2C_\Omega}{m_0} \left(K(t) + B_0 \int_0^t |\theta(s)|^2_{H^2_{(\Omega)}} ds \right) \leqslant \tfrac{2C_\Omega}{m_0} K_0.$$

Logo $\sup |u_m'|^2 \leqslant 2C_\Omega K_0$,isso implica que $(u_m')\ \mathit{limitada\ em}\ L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega))$.

$\bullet(\theta_m)\ \mathit{limitada\ em}\ L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,\infty; H^2(\Omega))$

De fato como $\theta_m(t) \in H_0^1(\Omega)$ podemos usar a desigualdade de Poincaré da segunite forma

$$2|\theta_m(t)| \leqslant 2|\nabla\theta_m(t)| \leqslant 2\Big(|\nabla u'(t)|^2 + |\nabla\theta(t)|^2 + \int_\Omega M(.,t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}dx\Big) \leqslant$$
$$2K(t) \leqslant 2\Big(K(t) + B_0\int_0^t |\theta(s)|^2_{H^2_{(\Omega)}}ds\Big) \leqslant 2K_0$$

Logo $\sup|\theta_m(t)| \leqslant K_0$,isso implica que (θ_m) $limitada\ em$ $L^\infty(0,\infty;H^1_0(\Omega))$.

Veja também da desigualdade $K(t) + B_0\int_0^t |\theta(s)|^2_{H^2_{(\Omega)}}ds \leqslant K(0) \leqslant K_0$ temos que

$$\int_0^t |\theta(s)|^2_{H^2_{(\Omega)}}ds \leqslant K(t) + B_0\int_0^t |\theta(s)|^2_{H^2_{(\Omega)}}ds \leqslant K_0$$

.

Isso implica que (θ_m) $limitada\ em$ $L^2(0,\infty;H^2(\Omega))$

Estimaticas II

Fazendo $v = u''$ e $w = \theta'$ em (2.10), obtemos:

$$\begin{cases} (u''_m(t),u'') - (M(.,t,|\nabla u_m|^2,u'') + ((a\cdot\nabla)\theta_m(t),u'') = 0 \\ \\ (\theta'_m(t),\theta') + (B(t)\theta_m,\theta') + ((a\cdot\nabla)u'_m(t),\theta') = 0 \end{cases} . \tag{2.28}$$

De (2.28) e usando a hipotese (2.5) obtemos as seguintes estimativas

$\bullet|u''(t)|^2 - (M(.,t,|\nabla u_m|^2,u'') + ((a\cdot\nabla)\theta_m(t),u'') = 0$

$$\begin{aligned} |u''(t)|^2 &= (M(.,t,|\nabla u|^2),u'') - ((a\cdot\nabla)\theta(t),u'') \\ &\leqslant |(M(.,t,|\nabla u|^2),u'') - ((a.\nabla)\theta(t),u'')| \\ &\leqslant |(M(.,t,|\nabla u|^2),u'')| + |(a\cdot\nabla)\theta(t),u'')| \\ &\leqslant C_0f(\lambda)|\Delta u||u''| + |\sum_{i=1}^n \partial_{x_i}\theta_i,u''| \\ &\leqslant C_0f(\lambda)|\Delta u||u''| + n\max|a_i||\nabla\theta||u''| \end{aligned}$$

$\bullet(\theta'(t),\theta') + (B(t)\theta,\theta') + ((a\cdot\nabla)u'(t),\theta') = 0$

$$\begin{aligned}
|\theta'(t)| &= \Big| -(B(t)\theta,\theta') - ((a\cdot\nabla)u'(t),\theta')\Big| \\
&\leqslant |(B(t)\theta,\theta')| + |((a\cdot\nabla)u'(t),\theta')| \\
&\leqslant |(B(t)\theta,\theta')| + |\sum_{i=1}^{n}\partial_{x_i}u',\theta'| \\
&\leqslant |(B(t)\theta,\theta')| + n\max|a_i||\nabla u'||\theta'|
\end{aligned}$$

da estimativa anterior de (2.21) e como f é estritamente decrescente e contínua obtemos;

$$(u_m'') \text{ é limitada } L^{\infty}(0,\infty;L^2(\Omega).)$$

Agora vejamos que existe uma constante real $C_{\Omega,T} := C(\Omega,T)$ tal que

$$\Big|(B(t)\cdot\theta(t),\theta')\Big|_{\mathbb{R}} \leqslant C_{\Omega,T}|\theta(t)|_{H^2(\Omega)}.$$

De fato de (2.6),

$$\Big|B_{ij}(\theta(x,t),t) - B_{ij}(0,0)\Big| \leqslant L(|\theta(t)| + |t|_{\mathbb{R}}).$$

Daí

$$\Big|B_{ij}(\theta(x,t),t)\Big| - \Big|B_{ij}(0,0)\Big| \leqslant \Big|B_{ij}(\theta(x,t),t) - B_{ij}(0,0)\Big| \leqslant L(|\theta(t)| + |t|_{\mathbb{R}})$$

ou

$$\Big|B_{ij}(\theta(x,t),t)\Big| \leqslant L(|\theta(t)| + |t|_{\mathbb{R}}) + \Big|B_{ij}(0,0)\Big|.$$

Observe que $B(t)\cdot\theta(t) = -\sum_{i,j}^{n} B_{ij}(\theta(x,t),t)\partial^2_{x_ix_j}\theta(t)$ com $B_{ij} : L^1 \times [0,\infty[\to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\Big|(B(t)\cdot\theta(t),\theta'(t))\Big| &= \Big|\int_\Omega B(t)\cdot\theta(t)\theta'(t)dx\Big| \\
&= \Big|\int_\Omega\sum_{i.j=1}^{n} -B_{ij}(\theta(x,t),t)\partial^2_{x_ix_j}\theta(t)\theta'(t)dx\Big| \\
&\leqslant \sum_{i.j=1}^{n}\int_\Omega |B_{ij}(\theta(x,t),t)\partial^2_{x_ix_j}\theta(t)\theta'(t)|dx \\
&\leqslant \sum_{i.j=1}^{n}\Big\{L(|\theta(t)| + |t|_{\mathbb{R}}) + |B_{ij}(0,0)|\Big\}\int_\Omega|\partial^2_{x_ix_j}\theta(t)\theta'(t)|dx.
\end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Poincaré obtemos:

$$\Big|(B(t)\cdot\theta(t),\theta'(t))\Big| \leqslant \sum_{i.j=1}^{n}\Big\{L(C_\Omega|\theta(t)| + |t|_{\mathbb{R}}) + |B_{ij}(0,0)|\Big\}|\theta(t)|_{H^2}|\theta'(t)| \tag{2.29}$$

da estimativa (2.27) mostra que uma constante real $C_{\Omega,T} := C(\Omega,T)$ tal que

$$\sum_{i.j=1}^{n}\Big\{L(C_\Omega|\theta(t)|+|t|_{\mathbb{R}})+|B_{ij}(0,0)|\Big\}\leqslant C_{\Omega,T}$$

Combinando os resultados obtidos acima, temos que:

$$|\theta^{'}(t)|\leqslant C_{\Omega,T}|\theta(t)|_{H^2}+n\max|a_i||\nabla u^{'}|.$$

Logo $(\theta^{'}_m)$ é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$

2.1.3 Passagem ao Limite no Problema Aproximado

Das imersões: $H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega)\hookrightarrow H^1_0(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ temos que (u_m) é limitada em $L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega))$ e que $u^{'}_m$ é limitada em $L^\infty((0,T;H^1_0(\Omega))$. Sendo Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, usamos fato que $1\leqslant q\leqslant p\leqslant\infty$ implica que $L^p(\Omega)\subset L^q(\Omega)$ assim temos:

$$\begin{cases}(u_m)\ \text{é limitada em}\ \ L^2(0,T;H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega))\\ \quad (u^{'}_m)\ \text{é limitada em}\ \ L^2(0,T;H^1_0(\Omega)).\end{cases}$$

Do Teorema de compacidade de Aubin-Lions resulta que (u_m) possui uma subsequência que converge forte em $L^2(0,T;H^1_0(\Omega)$

$$u_\mu\to u\ \ \text{em}\ \ L^2(0,T;H^1_0(\Omega))\ \text{e q.s em}\ \Omega\times]0,T[$$

Sendo (θ_m) limitada em $L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$ e que $(\theta^{'}_m)$ é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ considerando que $H^1_0(\Omega)\hookrightarrow H^1_0(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ do Teorema Aubin-Lions temos que existe (θ_μ) em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ tal que:

$$\theta_\mu\to\theta\ \ \text{em}\ \ L^2(0,T;L^2)(\Omega))\ \text{e q.s em}\ \Omega\times]0,T[$$

- Analise da convergência do termo $M(.,.,|\nabla u_\mu(t)|^2)$

Queremos mostrar que a diferença abaixo tende a zero

$$\int_0^T\Big(M(.,t,|\nabla u_\mu(t)|^2)\Delta u_\mu(t)-M(.,t,|\nabla u(t)|^2)\Delta u(t),v(t)\Big)dt.$$

Somando e subtraindo o termo $M(.,t,|\nabla u(t)|^2)\Delta u_\mu(t)$ teremos que:

$$\int_0^T \Big(M(.,t,|\nabla u_\mu(t)|^2)\Delta u_\mu(t) - M(.,t,|\nabla u(t)|^2)\Delta u(t), v(t)\Big)dt = \int_0^T \Big(M(.,t,|\nabla u_\mu(t)|^2)\Delta u_\mu(t) -$$
$$M(.,t,|\nabla u(t)|^2)\Delta u_\mu(t), v\Big)dt + \int_0^T \Big(M(.,t,|\nabla u(t)|^2)\Delta u_\mu(t) - M(.,t,|\nabla u(t)|^2)\Delta u(t), v(t)\Big)dt =$$
$$\int_0^T \Big(\Big[M(.,t,|\nabla u_\mu(t)|^2) - M(.,t,|\nabla u(t)|^2)\Big]\Delta u_\mu, v\Big)dt + \int_0^T \Big(M(.,t,|\nabla u(t)|^2)\Big[\Delta u_\mu(t) - \Delta u(t)\Big], v\Big)dt.$$

para toda $v \in L^2(0,T;L^2)(\Omega))$

Das limitações de (2.27) onde (u_m) é limitada em $L^\infty(0,T;H_0^1) \cap H^2(\Omega))$ temos que (Δu_m) é limitada em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ e da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ temos que (Δu_m) é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, que é reflexivo e uniformente convexo, logo existe (Δu_μ) em $L^2(\Omega)$ tal que

$$\Delta u_\mu \rightharpoonup \Delta u \;\text{ em }\; L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Da desigualdade de Poincaré, temos:

$$|\nabla u_\mu - \nabla u|^2 \leqslant C_\Omega |\Delta u_\mu - \Delta u|^2$$

$$\text{Daí } \int_0^T |\nabla u_\mu - \nabla u|^2 dt \leqslant \int_0^T C_\Omega |\Delta u_\mu - \Delta u|^2 dt \to 0 \;\text{ quando }\; \mu \to \infty. \tag{2.30}$$

Da hipotese (2.5), $|\partial_\lambda M|_{\mathbb{R}}| \leqslant C_2 h(\lambda)$, podemos escrever:

$$\Big|M(.,t,|\nabla u_\mu(t)|^2) - M(.,t,|\nabla u(t)|^2)\Big|_{\mathbb{R}} = \Big|\int_{|\nabla u(t)|^2}^{|\nabla u_\mu(t)|^2} \partial_\lambda M(.,.,\lambda)d\lambda\Big| \leqslant \int_{|\nabla u(t)|^2}^{|\nabla u_\mu(t)|^2} C_2 h(\lambda)d\lambda.$$

$\Big($Como $h \in C^1([0,\infty);[0,\infty))$, então para qualquer compacto $[|\nabla u(t)|^2, |\nabla u_\mu(t)|^2]$ existe uma constante que majora, ou seja existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $h(\lambda) \leqslant C$ portanto teremos que $\Big)$

$$\leqslant C \int_{|\nabla u(t)|^2}^{|\nabla u_\mu(t)|^2} d\lambda = C(|\nabla u_\mu(t)|^2 - |\nabla u(t)|^2) \leqslant C(|\nabla u_\mu(t) - \nabla u(t)|^2).$$

Assim temos que

$$|M(.,t,|\nabla u_\mu(t)|^2) - M(.,t,|\nabla u(t)|^2)\Big|_{\mathbb{R}} \leqslant C(|\nabla u_\mu(t) - \nabla u(t)|^2)$$

Assim,

$$\left|\int_0^T \left(\left[M(.,t,|\nabla u_\mu(t)|^2) - M(.,t,|\nabla u(t)|^2)\right]\Delta u_\mu, v\right)dt\right| \leqslant$$
$$\int_0^T \left|M(.,t,|\nabla u_\mu(t)|^2) - M(.,t,|\nabla u(t)|^2)\right||\Delta u_\mu||v|dt \leqslant \int_0^T C(|\nabla u_\mu(t) - \nabla u(t)|^2)|\Delta u_\mu||v|dt$$
$$\leqslant C|\Delta u_\mu|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\left(\int_0^T |\nabla u_\mu(t) - \nabla u(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T |v|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Da hipotese (2.5) e da convergência feita acima ,(2.30) obtemos que

$$\int_0^T \left(\left[M(.,t,|\nabla u_\mu(t)|^2) - M(.,t,|\nabla u(t)|^2)\right]\Delta u_\mu, v\right)dt \leqslant C|\Delta u_\mu|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\left(\int_0^T |\nabla u_\mu(t) - \nabla u(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T |v|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \text{ quando } \mu \to \infty.$$

Pela hipotese (2.5), temos que $|M(.,.,\lambda)| \leqslant C_0 f(\lambda)$ e como $f \in C^1([0,\infty);[0,\infty))$ então para qualquer compacto existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $f(\lambda) \leqslant C$. Portanto, $M(.,t,|\nabla u(t)|^2)$ pertence a $L^\infty(\Omega \times (0,T))$. Daí, $M(.,t,|\nabla u(t)|^2)$ pertence a $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, ganhando assim que:

$$\left|\int_0^T \left(M(.,t,|\nabla u(t)|^2)\left[\Delta u_\mu(t) - \Delta u(t)\right], v\right)dt\right| \leqslant$$
$$|M(.,t,|\nabla u(t)|^2)|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}|v|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\int_0^T \left[\Delta u_\mu(t) - \Delta u(t)\right]dt \to 0 \text{ quando } \mu \to \infty$$

Concluimos das duas convergência feitas acima que :

$$\int_0^T \left(M(.,t,|\nabla u_\mu(t)|^2)\Delta u_\mu(t) - M(.,t,|\nabla u(t)|^2)\Delta u(t), v(t)\right)dt \to 0 \text{ quando } \mu \to \infty$$
$\forall v \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

- Analise da convergência do termo $B\theta_\mu$: vamos prova que:

$$\int_0^T \left(B \cdot \theta_\mu, w\right)dt \to \int_0^T \left(B \cdot \theta, w\right)dt \text{ quando } \mu \to \infty, \quad \forall w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

Observe que $w \in H_0^1(\Omega))$ assim, podemos usar o teorema da divergência de Gauss, obtendo

$$\int_0^T\Big(B\cdot\theta_\mu - B\cdot\theta, w\Big)dt = \int_0^T\int_\Omega\Big(B\theta_\mu - B\theta\Big)wdxdt = \int_0^T\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n B_{ij}(\theta_\mu(t),t)\partial_{x_ix_j}\theta_\mu w -$$
$$\sum_{i,j=1}^n B_{ij}(\theta(t),t)\partial_{x_ix_j}\theta wdxdt = \int_0^T\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n B_{ij}(\theta_\mu(t),t)\partial_{x_i}\theta_\mu\partial_{x_j}w - \sum_{i,j=1}^n B_{ij}(\theta(t),t)\partial_{x_i}\theta\partial_{x_j}wdxdt$$
$$= \sum_{i,j=1}^n\int_0^T\int_\Omega\{B_{ij}(\theta_\mu(t),t)\partial_{x_i}\theta_\mu\partial_{x_j}w - B_{ij}(\theta(t),t)\partial_{x_i}\theta\}\partial_{x_j}wdxdt.$$

Somando e subtraindo o termo $B_{ij}(\theta(t),t)\partial_{x_i}\theta_\mu\partial_{x_j}w$ teremos que

$$\int_0^T\Big(B\cdot\theta_\mu - B\cdot\theta, w\Big)dt = \int_0^T\int_\Omega\Big(B\theta_\mu - B\theta\Big)wdxdt =$$
$$\sum_{i,j=1}^n\int_0^T\int_\Omega\{B_{ij}(\theta_\mu(t),t)\partial_{x_i}\theta_\mu\partial_{x_j}w - B_{ij}(\theta(t),t)\partial_{x_i}\theta\}\partial_{x_j}wdxdt =$$
$$\sum_{i,j=1}^n\int_0^T\int_\Omega\{B_{ij}(\theta_\mu(t),t)\partial_{x_i}\theta_\mu\partial_{x_j}w - B_{ij}(\theta(t),t)\partial_{x_i}\theta_\mu$$
$$+B_{ij}(\theta(t),t)\partial_{x_i}\theta_\mu - B_{ij}(\theta(t),t)\partial_{x_i}\theta\}\partial_{x_j}wdxdt =$$
$$\sum_{i,j=1}^n\int_0^T\int_\Omega\{B_{ij}(\theta_\mu(t),t)\partial_{x_i}\theta_\mu - B_{ij}(\theta(t),t)\partial_{x_i}\theta_\mu\}\partial_{x_j}wdxdt +$$
$$\sum_{i,j=1}^n\int_0^T\int_\Omega\{\partial_{x_i}\theta_\mu - \partial_{x_i}\theta\}B_{ij}(\theta(t),t)\partial_{x_j}wdxdt$$

Note que, $\theta_\mu \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)$ e $w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)$. Assim usando a desigualdade de Holder ao termo adicionado temos que:

$$\Big|\sum_{i,j=1}^n\int_0^T\int_\Omega\{B_{ij}(\theta_\mu(t),t)\partial_{x_i}\theta_\mu - B_{ij}(\theta(t),t)\partial_{x_i}\theta_\mu\}\partial_{x_j}wdxdt\Big|_{\mathbb{R}}$$
$$\leqslant \sum_{i,j=1}^n\int_0^T\int_\Omega |B_{ij}(\theta_\mu(t),t)\partial_{x_i}\theta_\mu - B_{ij}(\theta(t),t)|_{\mathbb{R}}|\partial_{x_i}\theta_\mu|_{\mathbb{R}}|\partial_{x_j}w|_{\mathbb{R}}dxdt$$

Agora usando a hipotese (2.6) sobre o funcional B temos que:

$$\sum_{i,j=1}^n\int_0^T\int_\Omega L|\theta_\mu-\theta|_{L^2(\Omega)}|\partial_{x_i}\theta_\mu|_{\mathbb{R}}|\partial_{x_j}w|_{\mathbb{R}}dxdt \leqslant \sum_{i,j=1}^n\int_0^T L|\theta_\mu-\theta|_{L^2(\Omega)}\int_\Omega|\partial_{x_i}\theta_\mu|_{\mathbb{R}}|\partial_{x_j}w|_{\mathbb{R}}dxdt \leqslant$$
$$\sum_{i,j=1}^n\int_0^T L|\theta_\mu-\theta|_{L^2(\Omega)}dt\sum_{i,j=1}^n\int_0^T|\partial_{x_i}\theta_\mu||\partial_{x_j}w|dxdt \leqslant \int_0^T n^2L|\theta_\mu-\theta|_{L^2(\Omega)}dt\sum_{i,j=1}^n\int_0^T|\partial_{x_i}\theta_\mu||\partial_{x_j}w|dt \leqslant$$
$$n^2L|\theta_\mu-\theta|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}|w|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}|\theta_\mu|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}.$$

Da convergência $\theta_\mu \to \theta$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega) \equiv L^2(Q)$ temos a seguinte convergência

$$\sum_{i,j=1}^n\int_0^T\int_\Omega\{B_{ij}(\theta_\mu(t),t) - B_{ij}(\theta(t),t)\}\partial_{x_i}\theta\partial_{x_j}wdxdt \to 0 \quad \text{quando} \quad \mu\to\infty.$$

Voltando ao termo $B_{i,j}$ temos que:

$$|B_{ij}(\theta(t),t)|_{\mathbb{R}} \leqslant \Big(C_{\Omega}|\nabla\theta(t)| + |t|_{\mathbb{R}}\Big) + |B_{ij}(0,0)|_{\mathbb{R}},$$

e, como $\theta \in L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega)$ e $w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ então temos que $B_{ij} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ pois $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, assim

$$B_{ij}(\theta(t),t)\partial_{x_j} w \in L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Por outro lado da, estimativa (2.22), (θ_m) é limitada em $L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega)$ garante que $(\nabla\theta_m)$ é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ que é reflexivo e uniformente convexo e assim existe uma subsequência $\nabla\theta_\mu \to \nabla\theta$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, resultando na convergência do termo

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega \{\partial_{x_i}\theta_\mu - \partial_{x_i}\theta\} B_{ij}(\theta(t),t)\partial_{x_j} w dxdt \to 0 \quad \text{quando} \quad \mu \to \infty$$

portanto $B\cdot\theta_\mu \to B\cdot\theta$.

Concluimos da passagem ao limite e da convergência dos termos lineares que

$$\begin{cases} \int_0^T \Big(u'' - M(x,t,|\nabla u(t)|^2)\Delta u(t) + (a\cdot\nabla)\theta, v\Big)dt = 0; \\ \int_0^T \Big(\theta' + B(t)\cdot\theta + (a\cdot\nabla)u'(t), w\Big)dt = 0. \end{cases}$$

$\forall v \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e $\forall w \in L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega)$.
Além disso, as expressões acima são válidas $\forall v, w \in D(\Omega\times(0,T))$ assim sendo $u'' - M(x,t,|\nabla u(t)|^2)\Delta u(t) + (a\cdot\nabla)\theta$ e $\theta' + B(t)\cdot\theta + (a\cdot\nabla)u'(t)$ pertence a $L^2(Q)$ isso implica que

$$\begin{cases} u'' - M(x,t,|\nabla u(t)|^2)\Delta u(t) + (a\cdot\nabla)\theta = 0 \quad \text{q.t.p} \quad \Omega\times]0,T[\\ \theta' + B(t)\cdot\theta + (a\cdot\nabla)u'(t) = 0 \quad \text{q.t.p} \quad \Omega\times]0,T[\end{cases}$$

$\forall T > 0$.

2.1.4 Verificação dos Dados Iniciais

Nesta seção mostraremos que par o $\{u,\theta\}$ de soluções satisfaz as condições iniciais do problema (2.1)- (2.2). De fato verificamos que:

- $u(0) = u_0$

Sendo $u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ e $u' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ pela proposição 1.5.2 temos que $u \in C^0(0,T;H_0^1(\Omega))$ assim, faz sentindo calcular $u(0)$. Além disso, como $u_m \to u$ fraco estrela em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ temos:

$$\int_0^T < u_m(t), w >_{V,V'} \varphi(t)dt \to \int_0^T < u(t), w >_{V,V'} \varphi(t)dt$$

$\forall w \in V', \forall \varphi \in L^1(0,T)$.

Tomando, em particular, $w \in L^2(\Omega)$, a dualidade $< u_m(t), w >_{V,V'}$ é dada por $(u_m(t), w)$, desse modo

$$\int_0^T (u_m(t), w)\varphi(t)dt \to \int_0^T (u(t), w)\varphi(t)dt$$

com $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(T) = 0$.

Analogamente (u_m') é limidata em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ logo $u_m \to u$ fraco estrela em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ o que nos garante que

$$\int_0^T (u_m'(t), w)\varphi(t)dt \to \int_0^T (u'(t), w)\varphi(t)dt$$

com $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(T) = 0$, $\forall w \in L^2(\Omega), \forall \varphi \in C^1(0,T)$. Somando as convergências acima teremos que

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u_m(t), w\varphi(t))dt \to \int_0^T (u(t), w\varphi(t))dt.$$

Portanto,

$$(u_m(0), w) \to (u(0), w), \forall w \in L^2(\Omega)$$

isto é,

$$u_m(0) \to u(0), \quad \text{em} \quad \in L^2(\Omega)$$

Como por hipotese $u_m(0) \to u_0$ em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, pela unicidade do limite fraco concluímos que $u(0) = u_0$.

- $\theta(0) = \theta_0$

Como $\theta \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $\theta' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ obtemos da proposição 1.5.2 que $\theta \in C^0(0,T;H_0^1(\Omega))$ assim faz sentindo calcular $\theta(0)$. Além disso, como $\theta_m \to \theta$ fraco estrela em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ então:

$$\int_0^T < \theta_m(t), w >_{V,V'} \varphi(t)dt \to \int_0^T < \theta(t), w >_{V,V'} \varphi(t)dt$$

$\forall w \in V', \forall \varphi \in L^1(0,T)$.

Tomando, em particular, $w \in L^2(\Omega)$, a dualidade $< \theta_m(t), w >_{V,V'}$ é dada por $(\theta_m(t), w)$ desse modo

$$\int_0^T (\theta_m(t), w)\varphi(t)dt \to \int_0^T (\theta(t), w)\varphi(t)dt$$

com $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(T) = 0$.

Analogamente, (θ_m') é limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ logo $\theta_m \to \theta$ fraco estrela em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ o que nos garante que

$$\int_0^T (\theta_m'(t), w)\varphi(t)dt \to \int_0^T (\theta(t)', w)\varphi(t)dt$$

com $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(T) = 0$, $\forall w \in L^2(\Omega), \forall \varphi \in C^1(0,T)$. Somando as convergências acima teremos que

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(\theta_m(t), w\varphi(t))dt \to \int_0^T (\theta(t), w\varphi(t))dt.$$

Portanto,

$$(\theta_m(0), w) \to (\theta(0), w), \forall w \in L^2(\Omega)$$

isto é,

$$\theta_m(0) \to \theta(0), \text{ em } L^2(\Omega).$$

Como por hipotese $\theta_m(0) \to \theta_0$ em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ pela unicidade do limite fraco concluímos que $\theta(0) = \theta_0$.

- $u'(0) = u_1$

Sendo $u' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $u'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ temos pela proposição 1.5.2 temos que $u' \in C^0(0,T;L^2(\Omega))$. Assim faz sentindo calcular $u'(0)$. Além disso como $u'_m \to u'$ fraco estrela em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $u''_m \to u''$ fraco estrela em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ resulta:

$$\int_0^T (u'_m(t), w)\varphi(t)dt \to \int_0^T (u'(t), w)\varphi(t)dt$$

$$\int_0^T (u''_m(t), w)\varphi(t)dt \to \int_0^T (u''(t), w)\varphi(t)dt$$

com $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(T) = 0$, $\forall w \in L^2(\Omega), \forall \varphi \in C^1(0,T)$. Somando as convergências acima obtemos que:

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u'_m(t), w\varphi(t))dt \to \int_0^T (u(t)', w\varphi(t))dt.$$

Portanto,

$$(u'_m(0), w) \to (u'(0), w), \forall w \in L^2(\Omega)$$

isto é,

$$u'_m(0) \to u'(0), \text{ em } L^2(\Omega)$$

Como por hipotese $u'_m(0) \to u_1$ em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, temos pela unicidade do limite fraco que $u'(0) = u_1$.

2.1.5 Unicidade de Soluções

Mostraremos a unicidade de soluções usando o Método da Energia. Suponha que existam duas soluções $\{u, \theta\}$ e $\{\widehat{u}, \widehat{\theta}\}$ do sistema, (2.1) e (2.2) então:

$$\begin{cases} u''(t) - M(\cdot,\cdot,|\nabla u(t)|^2)\Delta u + (a\cdot\nabla)\theta(t) = 0; \\ \theta'(t) + B\cdot\nabla\theta + (a\cdot\nabla)u' = 0; \\ u = \theta = 0 \text{ em } \Sigma; \\ u(x,0) = u_0(x), u'(x,0) = u_1(x), \theta(x,0) = \theta_0(x). \end{cases} \tag{2.31}$$

$$\begin{cases} \widehat{u}''(t) - M(\cdot,\cdot,|\nabla\widehat{u}(t)|^2)\Delta\widehat{u} + (a\cdot\nabla)\widehat{\theta}(t) = 0; \\ \widehat{\theta}'(t) + B\cdot\nabla\widehat{\theta} + (a\cdot\nabla)\widehat{u}' = 0; \\ \widehat{u} = \widehat{\theta} = 0 \text{ em } \Sigma; \\ \widehat{u}(x,0) = u_0(x), \widehat{u}'(x,0) = u_1(x), \widehat{\theta}(x,0) = \theta_0(x). \end{cases} \tag{2.32}$$

Subtraindo os sistemas acima temos que as funções $\phi = u - \widehat{u}$ e $\psi = \theta - \widehat{\theta}$ são soluções do problema de valor inicial e fronteira:

$$\begin{cases} \Big(\phi''(t) - M(\cdot,\cdot,|\nabla u(t)|^2)\Delta u + M(\cdot,\cdot,|\nabla\widehat{u}(t)|^2)\Delta\widehat{u} + (a\cdot\nabla)\psi(t), \rho(t)\Big) = 0; \\ \Big(\psi'(t) + B\cdot\nabla\theta - B\cdot\nabla\widehat{\theta} + (a\cdot\nabla)\phi', \xi(t)\Big) = 0; \\ \phi = \psi = 0 \text{ em } \Sigma; \\ \phi = \psi = 0 \text{ em } \Sigma, \phi(x,0) = 0, \phi'(x,0) = 0, \psi(x,0) = 0 \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{2.33}$$

A seguir faremos algumas estimativs para o sistema acima:

- somando e subtraindo $M(\cdot,\cdot,|\nabla u(t)|^2)\Delta\widehat{u}$ em (2.33) temos que:

$$\Big(\phi''(t) - M(\cdot,\cdot,|\nabla u(t)|^2)\Delta u + M(\cdot,\cdot,|\nabla u(t)|^2)\Delta\widehat{u} - M(\cdot,\cdot,|\nabla u(t)|^2)\Delta\widehat{u} + M(\cdot,\cdot,|\nabla\widehat{u}(t)|^2)\Delta\widehat{u} + (a\cdot\nabla)\psi(t), \rho(t)\Big) = 0$$

$$\Big(\phi''(t) - M(\cdot,\cdot,|\nabla u(t)|^2)\Delta u + M(\cdot,\cdot,|\nabla u(t)|^2)\Delta\widehat{u} + (a\cdot\nabla)\psi(t), \rho(t)\Big) - \Big(\Big[M(\cdot,\cdot,|\nabla u(t)|^2) - M(\cdot,\cdot,|\nabla\widehat{u}(t)|^2)\Big]\Delta\widehat{u}, \rho(t)\Big) = 0 \text{ ou}$$

$$\Big(\phi''(t) - M(\cdot,\cdot,|\nabla u(t)|^2)\Delta u + M(\cdot,\cdot,|\nabla u(t)|^2)\Delta\widehat{u} + (a\cdot\nabla)\psi(t), \rho(t)\Big) = \Big([M(\cdot,\cdot,|\nabla u(t)|^2) - M(\cdot,\cdot,|\nabla\widehat{u}(t)|^2)]\Delta\widehat{u}, \rho(t)\Big).$$

- Somando e subtraindo o termo $\sum\limits_{i,j=1}^{n} B_{ij}(\theta(t),t)\partial_{X_i}\widehat{\theta}(t)$ em (2.33) temos que

$$\Big(\psi'(t) + B\cdot\nabla\theta - \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}(\theta(t),t)\partial_{X_i}\widehat{\theta}(t) + \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}(\theta(t),t)\partial_{X_i}\widehat{\theta}(t)$$
$$- B\cdot\nabla\widehat{\theta} + (a\cdot\nabla)\phi', \xi(t)\Big) = 0$$

$$(\psi'(t),\xi(t)) + \Big(B\cdot\nabla\theta - \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}(\theta(t),t)\partial_{X_i}\widehat{\theta}(t), \xi(t)\Big) + \Big(\sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}(\theta(t),t)\partial_{X_i}\widehat{\theta}(t) -$$
$$B\cdot\nabla\widehat{\theta}, \xi(t)\Big) + \Big((a\cdot\nabla)\phi', \xi(t)\Big) = 0 \text{ ou}$$

$$(\psi'(t),\xi(t)) + \Big(\sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}(\theta(t),t)\partial_{x_ix_j}\theta(t) - \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}(\theta(t),t)\partial_{X_i}\widehat{\theta}(t), \xi(t)\Big)$$
$$+ \Big(\sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}(\theta(t),t)\partial_{X_i}\widehat{\theta}(t) - \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}(\theta(t),t)\partial_{x_ix_j}\widehat{\theta}, \xi(t)\Big) + (a\cdot\nabla)\phi', \xi(t)\Big) = 0$$

Usando o Teorema da Divergência temos que:

$$\Big(\sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}(\theta(t),t)\partial_{x_ix_j}\theta(t), \xi(t)\Big) = -\sum_{i,j=1}^{n}\Big(B_{ij}(\theta(t),t)\partial_{x_i}\theta, \partial_{x_j}\xi(t)\Big)$$

$$\Big(\sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}(\widehat{\theta},t)\partial_{x_ix_j}\widehat{\theta}(t), \xi(t)\Big) = -\sum_{i,j=1}^{n}\Big(B_{ij}(\widehat{\theta}(t),t)\partial_{x_i}\widehat{\theta}, \partial_{x_j}\xi(t)\Big).$$

logo,

$$(\psi'(t),\xi(t)) + \sum_{i,j=1}^{n}\Big(B_{ij}(\theta(t),t)\partial_{x_i}\psi, \partial_{x_j}\xi(t)\Big) + (a\cdot\nabla)\phi', \xi(t)\Big) =$$
$$-\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\{B_{ij}(\theta(t),t) - B_{ij}(\widehat{\theta}(t),t)\}\partial_{x_i}\widehat{\theta}(t), \partial_{x_j}\xi(t)\Big).$$

Assim o sistema (2.33) é equivalente a:

$$\begin{cases} \Big(\phi''(t) - M(\cdot,\cdot,|\nabla u(t)|^2)\Delta u + M(\cdot,\cdot,|\nabla u(t)|^2)\Delta\widehat{u} + a\cdot\nabla)\psi(t), \rho(t)\Big) = \\ \qquad \Big([M(\cdot,\cdot,|\nabla u(t)|^2) - M(\cdot,\cdot,|\nabla\widehat{u}(t)|^2)]\Delta\widehat{u}, \rho(t)\Big) \\ (\psi'(t),\xi(t)) + \sum_{i,j=1}^{n}\Big(B_{ij}(\theta(t),t)\partial_{x_i}\psi, \partial_{x_j}\xi(t)\Big) + (a\cdot\nabla)\phi', \xi(t)\Big) = \\ \qquad -\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\{B_{ij}(\theta(t),t) - B_{ij}(\widehat{\theta}(t),t)\}\partial_{x_i}\widehat{\theta}(t), \partial_{x_j}\xi(t)\Big) \\ \qquad \phi = \psi = 0 \text{ em } \Sigma \\ \phi = \psi = 0 \text{ em } \Sigma, \phi(x,0) = 0, \phi'(x,0) = 0, \psi(x,0) = 0 \text{ em } \Omega \end{cases} \tag{2.34}$$

Somando as expressões do sistema (2.34), fazendo $\rho(t) = \phi'(t)$ e $\xi(t) = \psi$ em seguinda somando as equações e observando que pelo teorema da divergência que $\Big((a\cdot\nabla)\psi(t),\phi'(t)\Big) + \Big((a\cdot\nabla)\phi'(t),\psi(t)\Big) = 0$ e da hipotese (2.6) que $B_{ij}(\theta(t),t)\partial_{x_i}\partial_{x_i} \geqslant B_0|\nabla\psi|^2_{\mathbb{R}^n}$, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\phi'(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\psi(t)|^2 - \Big(M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)\Delta\phi(t),\phi'(t)\Big) + B_0|\nabla\psi|^2 \leqslant \\ (\phi'',\phi') + (\psi'',\psi') - \Big(M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)\Delta\phi,\phi'(t)\Big) + \sum_{i,j=1}^{n}\Big(B_{ij}(\theta(t),t)\partial_{x_i},\partial_{x_i}\Big) = \\ \Big([M(\cdot,\cdot,|\nabla u(t)|^2) - M(\cdot,\cdot,|\nabla\widehat{u}(t)|^2)]\Delta\widehat{u},\phi'(t)\Big) \\ - \sum_{i,j=1}^{n}\Big(\{B_{ij}(\theta(t),t) - B_{ij}(\widehat{\theta}(t),t)\}\partial_{x_i}\widehat{\theta}(t),\partial_{x_j}\psi(t)\Big)\end{aligned} \tag{2.35}$$

Analizemos os termos da expressão acima. Temos que:

$$\begin{aligned}-\Big(M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)\Delta\phi(t),\phi'(t)\Big) = \int_\Omega M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)\Delta\phi(t)\phi'(t)dx = \\ \int_\Omega \nabla\Big(M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)\phi'(t)\Big)\nabla\phi dx = \\ \int_\Omega \nabla M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)\phi'(t)\nabla\phi dx + \int_\Omega M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)\nabla\phi'(t)\nabla\phi dx = \\ \int_\Omega \nabla M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)\phi'(t)\nabla\phi dx + \int_\Omega M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla\phi(t)|^2 dx\end{aligned}$$

do último termo desta igualdade temos que:

$$\begin{aligned}\int_\Omega M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla\phi(t)|^2dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)|\nabla\phi(t)|^2dx \\ -\frac{1}{2}\int_\Omega \partial_t M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)|\nabla\phi(t)|^2dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_\lambda M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)|\nabla\phi(t)|^2dx(\nabla u',\nabla u).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}-\Big(M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)\Delta\phi(t),\phi'(t)\Big) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)|\nabla\phi(t)|^2dx \\ -\frac{1}{2}\int_\Omega \partial_t M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)|\nabla\phi(t)|^2dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_\lambda M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)|\nabla\phi(t)|^2dx(\nabla u',\nabla u) \\ +\int_\Omega \nabla M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)\phi'\nabla\phi dx.\end{aligned}$$

Substituindo o termo acima em (2.35), obtemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\phi'(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\psi(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)|\nabla\phi(t)|^2dx$$

$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \partial_t M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)|\nabla \phi(t)|^2 dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \partial_\lambda M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)|\nabla\phi(t)|^2 dx(\nabla u', \nabla u)$
$+\int\limits_{\Omega} \nabla M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)\phi'\nabla\phi dx + B_0|\nabla\psi|^2 \leqslant \Big([M(\cdot,\cdot,|\nabla u(t)|^2) - M(\cdot,\cdot,|\nabla\widehat{u}(t)|^2)]\Delta\widehat{u}, \phi'(t)\Big) -$
$\sum\limits_{i,j=1}^{n} \Big(\{B_{ij}(\theta(t),t) - B_{ij}(\widehat{\theta}(t),t)\}\partial_{x_i}\widehat{\theta}(t), \partial_{x_j}\psi(t)\Big)$

Usando as hipoteses (2.5) e (2.8) podemos limitar a expressão acima. De fato, existe uma constante C tal que

$\bullet \frac{1}{2}\Big|\int\limits_{\Omega} \partial_t M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)|\nabla\phi(t)|^2 dx\Big|_{\mathbb{R}} \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\partial_t M|_{\mathbb{R}}|\nabla\phi(t)|^2_{\mathbb{R}} dx \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} C_1 g(\lambda)|\nabla\phi(t)|^2_{\mathbb{R}} dx$

como $g \in C^1([0,\infty);[0,\infty))$ então, em compactos de $[0,\infty)$ existe C tal que
$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} C_1 g(\lambda)|\nabla\phi(t)|^2_{\mathbb{R}} dx \leqslant C|\nabla\phi(t)|^2.$

Logo
$$\frac{1}{2}\Big|\int\limits_{\Omega} \partial_t M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)|\nabla\phi(t)|^2 dx\Big|_{\mathbb{R}} \leqslant C|\nabla\phi(t)|^2$$
assim temos que:

$\bullet \Big|\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \partial_\lambda M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)|\nabla\phi(t)|^2 dx(\nabla u',\nabla u)\Big|_{\mathbb{R}} \leqslant \int\limits_{\Omega} |\partial_\lambda M|_{\mathbb{R}}||\nabla\phi(t)|^2_{\mathbb{R}} dx|\nabla u'||\nabla u| \leqslant \int\limits_{\Omega} C_2 h(\lambda)|\nabla\phi(t$

Como $|\nabla u| \leqslant \frac{2C_\Omega}{m_0}K_0$ e $|\nabla u'| \leqslant K_0$ usando para $h(\lambda)$ o mesmo argumento feito para $g(\lambda)$ obtemos que existe C tal que

$$\Big|\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \partial_\lambda M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)|\nabla\phi(t)|^2 dx(\nabla u',\nabla u)\Big|_{\mathbb{R}} \leqslant C|\nabla\phi(t)|^2.$$

$\bullet \Big|\int\limits_{\Omega} \nabla M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)\phi'\nabla\phi dx\Big|_{\mathbb{R}} \leqslant \int\limits_{\Omega} |\nabla M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)|_{\mathbb{R}}|\phi'|_{\mathbb{R}}|\nabla\phi|_{\mathbb{R}} dx$
$\leqslant \int\limits_{\Omega} C_4 l(\lambda)|\phi'|_{\mathbb{R}}|\nabla\phi|_{\mathbb{R}} dx.$

Como l é uma função real contínua e decrescente definida no intervalo $[0,\infty)$ temos que para qualquer compacto de $[0,\infty)$ existe $C \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\Big|\int\limits_{\Omega} \nabla M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)\phi'\nabla\phi dx\Big|_{\mathbb{R}} \leqslant \int\limits_{\Omega} C_4 l(\lambda)|\phi'|_{\mathbb{R}}|\nabla\phi|_{\mathbb{R}} dx \leqslant \int\limits_{\Omega} C|\phi'|_{\mathbb{R}}|\nabla\phi|_{\mathbb{R}} dx,$$

e usando a desigualdade de Young, temos:

$$\Big|\int_\Omega \nabla M(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2)\phi'\nabla\phi dx\Big|_{\mathbb{R}} \leqslant C\int_\Omega \frac{|\phi'|^2_{\mathbb{R}}}{2}+\frac{|\nabla\phi|^2_{\mathbb{R}}}{2}dx = C(|\phi'|^2+|\nabla\phi|)^2$$

O primeiro termo do lado direito pode ser limitado usando a hipotese (2.5) e um argumento similiar feito anteriormente

$$\bullet\Big|\Big([M(\cdot,\cdot,|\nabla u(t)|^2)-M(\cdot,\cdot,|\nabla\widehat{u}(t)|^2)]\Delta\widehat{u},\phi'(t)\Big)\Big|_{\mathbb{R}}$$
$$\leqslant \int_\Omega \Big|M(\cdot,\cdot,|\nabla u(t)|^2)-M(\cdot,\cdot,|\nabla\widehat{u}(t)|^2)\Big|_{\mathbb{R}}|\Delta\widehat{u}|_{\mathbb{R}}|\phi'(t)|_{\mathbb{R}}.$$

Observe que

$$|M(\cdot,\cdot,|\nabla u(t)|^2)-M(\cdot,\cdot,|\nabla\widehat{u}(t)|^2)|_{\mathbb{R}} = \Big|\int_{|\nabla\widehat{u}(t)|^2}^{|\nabla u(t)|^2}\partial_\lambda M(\cdot,\cdot,\lambda)d\lambda\Big|_{\mathbb{R}} \leqslant \int_{|\nabla\widehat{u}(t)|^2}^{|\nabla u(t)|^2}|\partial_\lambda M(\cdot,\cdot,\lambda)|_{\mathbb{R}}d\lambda$$
$$\leqslant \int_{|\nabla\widehat{u}(t)|^2}^{|\nabla u(t)|^2} C_2 h(\lambda)d\lambda \leqslant C(|\nabla u(t)|^2-|\nabla\widehat{u}(t)|^2) \leqslant C|\nabla u(t)-\nabla\widehat{u}(t)|^2$$

Daí, $|M(\cdot,\cdot,|\nabla u(t)|^2)-M(\cdot,\cdot,|\nabla\widehat{u}(t)|^2)|_{\mathbb{R}} \leqslant \int_\Omega C|\nabla u(t)-\nabla\widehat{u}(t)|^2|\Delta\widehat{u}|_{\mathbb{R}}|\phi'(t)|_{\mathbb{R}}dx$. Usando a desigualdade de Holder obtemos que

$|M(\cdot,\cdot,|\nabla u(t)|^2)-M(\cdot,\cdot,|\nabla\widehat{u}(t)|^2)|_{\mathbb{R}} \leqslant C(|\nabla u(t)|^2-|\nabla\widehat{u}(t)|^2)\int_\Omega|\Delta\widehat{u}|_{\mathbb{R}}|\phi'(t)|_{\mathbb{R}}dx \leqslant C|\nabla u(t)-\nabla\widehat{u}(t)|^2|\Delta\widehat{u}||\phi'(t)|$

Como $|\nabla u(t)|^2 \leqslant C_\Omega|\Delta u(t)|^2 \leqslant \frac{2C_\Omega}{m_0}K_0$ então existe uma constante C tal que $\Big|\Big([M(\cdot,\cdot,|\nabla u(t)|^2)-M(\cdot,\cdot,|\nabla\widehat{u}(t)|^2)]\Delta\widehat{u},\phi'(t)\Big)\Big|_{\mathbb{R}} \leqslant C|\phi'(t)| \leqslant C(|\phi'(t)|+|\nabla\phi(t)|)$

• Como $\widehat{\theta}\in L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega))$ pela hipotese (2.5) e da desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\Big|-\sum_{i,j=1}^n\Big(\{B_{ij}(\theta(t),t)-B_{ij}(\widehat{\theta}(t),t)\}\partial_{x_i}\widehat{\theta}(t),\partial_{x_j}\psi\Big)\Big|_{\mathbb{R}} \leqslant$$
$$\Big|-\sum_{i,j=1}^n\Big(Ln^2|\theta(t)-\widehat{\theta}(t)|\partial_{x_i}\widehat{\theta}(t),\partial_{x_j}\psi\Big)\Big|_{\mathbb{R}} \leqslant$$
$$Ln^2|\psi(t)||\nabla\theta|_{L^\infty(\Omega)}|\nabla\psi| \leqslant C|\psi(t)|^2+\frac{B_0}{2}|\nabla\psi(t)|^2$$

Substituindo as limitações acimas obtemos que:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|\phi'(t)|^2 + |\psi(t)|^2 + \int_\Omega M(\cdot, t, |\nabla u(t)|^2)|\nabla\phi(t)|^2_{\mathbb{R}} dx\right\} + \frac{B_0}{2}|\nabla\psi(t)|^2 \leqslant$$
$$C\{|\phi'(t)|^2 + |\psi(t)|^2 + |\nabla\phi(t)|^2\}$$

Fazendo $E(t) = |\phi'(t)|^2 + |\psi(t)|^2$ e aplicando a desigualdade de Gronwall com $E(0) = 0$ temos que as funções ϕ e ψ são nulas, mostrando assim a unicidade.

Capítulo 3

Decaimento da Energia

Neste capítulo estudaremos o decaimento da energia do sistema termoelástico (2.1) - (2.2), onde definimos energia das soluções fortes por:

$$E(t) = \frac{1}{2}\Big\{|u^{'}(t)|^2 + |\theta(t)|^2 + \int\limits_{\Omega} M(\cdot, t, |\nabla u(t)|^2)|\nabla u(t)|^2_{\mathbb{R}} dx\Big\}$$

Aqui usamos o mesmo método análogo encontrada em kormonil e zuazua.

3.1 Estabilidade

O seguinte teorema garante que a energia $E(t)$ decaí exponencialmente a zero.

Teorema 3.1.1. *Seja* $\{u, \theta\}$ *um para de soluções fortes do sistema (2.1) - (2.2). Então a energia satisfaz*

$$E(t) \leqslant 3C_\Omega K(0) \exp\Big\{-\frac{4\tau}{3}t\Big\} \textit{ para todo } t \geqslant 0 \tag{3.1}$$

onde a constante $K(0)$ *é o valor de* $K(t)$ *e aplicado em* $t = 0$*, onde*

$$0 < \tau = \min\Big\{\delta, \frac{B_0}{2}, \frac{\gamma_0}{4C_0C_5}\Big\}; \tag{3.2}$$

$$0 < \delta < \min\Big\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2C_6}, \frac{\gamma_0/4}{C_0 f(2C_\Omega K_0/m_0) + (\| a \|^2 n^2)/(4B_0)}\Big\}; \tag{3.3}$$

γ_0 *ja esta definido em 2.19, e*

$$C_5 = \sup\Big\{f(\varphi); |\varphi|_{L^\infty_{loc}(0;\infty,H^1_0(\Omega))} \leqslant C\Big\} \textit{ e } C_6 = C_\Omega + \frac{1}{m_0}. \tag{3.4}$$

Prova 2. *A prova da desigualdade (2.20) permite escrevemos* u *e* θ *em vez de* u_m *e de* θ_m *sem modificações. assim a função*

$$K(t) = \frac{1}{2}\Big\{|\nabla u'(t)|^2 + |\nabla\theta(t)|^2 + \int\limits_{\Omega} M(.,t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta(t)|^2_{\mathbb{R}}dx\Big\}$$

satisfas (2.20) ou seja

$$K'(t) + B_0|\theta(t)|^2_{H^2_\Omega} + (\gamma_0 - \gamma(t))|\Delta u|^2 \leqslant 0. \tag{3.5}$$

usando fato que $|\nabla z|^2 \leqslant |z|^2_{H^2_\Omega}, \forall z \in H^1_0 \cap H^2(\Omega)$ *ganhamos que* $B_0|\nabla\theta|^2 \leqslant B_0|\theta|^2_{H^2_\Omega}$ *daí:*

$$K'(t) + B_0|\nabla\theta(t)|^2 + (\gamma_0 - \gamma(t))|\Delta u|^2 \leqslant 0$$

isso implica que:

$$K'(t) \leqslant -B_0|\nabla\theta(t)|^2 - (\gamma_0 - \gamma(t))|\Delta u|^2.$$

Logo da desigualdade acima temos que 3.5 :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{|\nabla u'(t)|^2 + |\nabla\theta(t)|^2 + \int\limits_{\Omega} M(.,t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta(t)|^2_{\mathbb{R}}dx\Big\} \leqslant -B_0|\nabla\theta(t)|^2 - (\gamma_0 - \gamma(t))|\Delta u|^2$$

Agora introduzindo a função $\sigma(t) = (u'(t), \Delta u(t))$ *e limitando por cima temos que*

$|\sigma(t)|_{\mathbb{R}} = |(u'(t), \Delta u(t))|_{\mathbb{R}} \leqslant |u'||\Delta u| \leqslant \frac{|u'|^2}{2} + \frac{|\Delta u|^2}{2} \leqslant \frac{C_\Omega}{2}|\nabla u'|^2 + \frac{2K(t)}{2m_0} = \frac{C_\Omega}{2}|\nabla u'|^2 + \frac{1}{m_0}K(t) = \frac{C_\Omega}{2}|\nabla u'|^2 + \frac{1}{m_0}\Big[\frac{1}{2}\Big\{|\nabla u'(t)|^2 + |\nabla\theta(t)|^2 + \int\limits_{\Omega} M(.,t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta(t)|^2_{\mathbb{R}}dx\Big\}\Big] = \frac{C_\Omega}{2}|\nabla u'(t)|^2 + \frac{1}{2m_0}|\nabla u'(t)|^2 + \frac{1}{2m_0}|\nabla\theta(t)|^2 + \frac{1}{2m_0}\int\limits_{\Omega} M(.,t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta u|_{\mathbb{R}}dx = \Big(\frac{C_\Omega}{2} + \frac{1}{2m_0}\Big)|\nabla u'(t)|^2 + \frac{1}{2m_0}|\nabla\theta(t)|^2 + \frac{1}{2m_0}\int\limits_{\Omega} M(.,t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta u|_{\mathbb{R}}dx \leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{C_\Omega}{2} + \frac{1}{2m_0}\Big)\Big\{|\nabla u'(t)|^2 + |\nabla\theta(t)|^2 + \int\limits_{\Omega} M(.,t,|\nabla u(t)|^2)|\Delta u|_{\mathbb{R}}dx \leqslant \Big(\frac{C_\Omega}{2} + \frac{1}{2m_0}\Big)K(t)$

Assim temos que:

$$|\sigma(t)|_{\mathbb{R}} \leqslant \Big(\frac{C_\Omega}{2} + \frac{1}{2m_0}\Big)K(t) \tag{3.6}$$

Fazendo $C_6 = \Big(\frac{C_\Omega}{2} + \frac{1}{2m_0}\Big)$ *como no teorema, temos que* $|\sigma(t)|_{\mathbb{R}} \leqslant C_6K(t)$. *Tomando* $\delta > 0$, *temos que* $-\delta C_6K(t) \leqslant \delta\sigma(t) \leqslant \delta C_6K(t)$

Usando a desigualdade acima e tomando $K_\delta(t) := K(t) + \delta\sigma(t)$ *com* $0 < \delta \leqslant \frac{1}{2C_6}$ *obtemos que*

$K_\delta(t) \leqslant K(t) + \frac{1}{2C_6}C_6K(t) = K(t) + \frac{1}{2}K(t) = \frac{3}{2}K(t)$. *Analogamente fazendo* $-\frac{1}{2C_6} \leqslant -\delta$ *teremos que* $\frac{1}{2}K(t) \leqslant K_\delta K(t)$

Portanto, $\forall t \geqslant 0$ *e* $0 \leqslant \delta \leqslant \frac{1}{2C_6}$, *teremos que* $\frac{1}{2}K(t) \leqslant K_\delta(t) \leqslant \frac{3}{2}K(t)$

Vamos mostra que

$$K(t) \leqslant 3K(0)\exp\{(-\frac{4}{3})t\}, \forall t \geqslant 0.$$

De fato, como $\sigma'(t) = (u''(t), \Delta(t)) + (u'(t), \Delta u'(t))$ *e* $\{u, \theta\}$ *um par de funções que satisfaz o problema aproximado em* Q, *então:*

$$u'' - M(., t, |\nabla(t)|^2)\Delta u + (a \cdot \nabla)\theta = 0$$
$$(u''(t), \Delta u(t)) = \Big(M(., t, |\nabla u(t)|^2)\Delta u(t), \Delta u(t)\Big) - ((a \cdot \nabla)\theta(t), \Delta u(t)).$$

Usando as Fórmula de Green temos que $\int\limits_{\Omega} u'\Delta u' dx = \int\limits_{S} u'\partial u' dS - \int\limits_{\Omega} \nabla u' \cdot \nabla' dx = -|\nabla u'|^2$

Daí, temos que

$$\sigma'(t) = (M(., t, |\nabla(t)|^2)\Delta u, \Delta u) - ((a \cdot \nabla)\theta, \Delta u) - |\nabla u'|^2.$$

Aplicando o Teorema da Divergência de Gauss juntamente com a hipotese $M(., t, |\nabla(t)|^2) \leqslant C_0 f(|\nabla(t)|^2)$, *obtemos:*

$\bullet (M(., t, |\nabla(t)|^2)\Delta u, \Delta u) \leqslant (C_0 f(|\nabla(t)|^2)\Delta u, \Delta u) \leqslant C_0 f(|\nabla(t)|^2)(\Delta u, \Delta u) \leqslant C_0 f(|\nabla(t)|^2)|\Delta u|^2$

$\bullet - ((a \cdot \nabla)\theta, \Delta u) = (a_1 \frac{\partial\theta}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial\theta}{\partial x_n}, \Delta u) \leqslant n \max\{a_i\}(\nabla\theta(t), \Delta u(t))$
$\leqslant n \parallel a \parallel |\nabla\theta(t)||\Delta u(t)| = \sqrt{2B_0}|\nabla\theta(t)|\frac{n\|a\||\Delta u(t)|}{\sqrt{2B_0}} \leqslant B_0|\nabla\theta(t)|^2 + \frac{n^2\|a\|^2}{4B_0}|\Delta u(t)|^2$
assim temos a seguinte a desigualdade

$$\sigma'(t) \leqslant C_0 f(\nabla u(t)|^2)|\Delta u(t)|^2 + B_0|\nabla\theta(t)|^2 + \frac{\parallel a \parallel^2 n^2}{4B_0}|\Delta u(t)|^2 - |\nabla u(t)|^2.$$

Da definição de K_δ *temos que* $K_\delta'(t) = K'(t) + \delta\sigma'(t)$ *portanto temos que*

$K_\delta'(t) \leqslant -B_0|\nabla\theta(t)|^2 - (\gamma_0 - \gamma(t))|\Delta u|^2 + \delta C_0 f(\nabla u(t)|^2)|\Delta u(t)|^2 + \delta B_0|\nabla\theta(t)|^2 + \delta\frac{\|a\|^2 n^2}{4B_0}|\Delta u(t)|^2 - \delta|\nabla u(t)|^2$. *ou*

$$K_\delta'(t) \leqslant -\delta|\nabla u(t)|^2 - B_0(1-\delta)|\nabla\theta|^2 - ((\gamma_0 - \gamma(t)) - \delta C_0 f(|\nabla u(t)|^2) - \delta\frac{\|a\|^2 n^2}{4B_0})|\Delta u(t)|^2.$$

Da desigualdade (2.9) temos uma constante $\gamma_0 > 0$ *, tal que* $0 < \gamma(t) \leqslant \frac{\gamma_0}{2}, \forall t \geqslant 0$ *isso implica que* $\gamma_0 - \gamma(t) > \frac{\gamma_0}{2}$*; da estimativa I, obtemos um par de funções* $\{u, \theta\}$ *tal que* $K(t)$ *em (2.18) satistfaz* $K(t) \leqslant k_0$ *para* $t \geqslant 0$*, também, temos que* $|\nabla(t)|^2 \leqslant 2\frac{C_\Omega K_0}{m_0}$*, como* f *é estritamente decrescente isso implica que*

$$f(|\nabla u(t)|^2) \leqslant f(2\frac{C_\Omega K_0}{m_0}), \forall t \geqslant 0.$$

Assim a desigualdade se transforma:

$$K_\delta'(t) \leqslant -\delta|\nabla u(t)|^2 - B_0(1-\delta)|\nabla\theta|^2 - (\frac{\gamma_0}{2} - \delta C_0 f(2\frac{C_\Omega K_0}{m_0}) - \delta\frac{\| a \|^2 n^2}{4B_0})|\Delta u(t)|^2$$

Escolhendo δ *com definido em 3.3, ou seja ,*

$$0 < \delta < \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2C_6}, \frac{\gamma_0/4}{(C_0 f(2\frac{C_\Omega K_0}{m_0}) + \frac{\|a\|^2 n^2}{4B_0})}\right\}.$$

Assim, observe que

$$\delta(C_0 f(2\frac{C_\Omega K_0}{m_0}) + \frac{\|a\|^2 n^2}{4B_0}) \leqslant \frac{\gamma_0/4}{(C_0 f(2\frac{C_\Omega K_0}{m_0}) + \frac{\|a\|^2 n^2}{4B_0})}\left(C_0 f(2\frac{C_\Omega K_0}{m_0}) + \frac{\|a\|^2 n^2}{4B_0}\right) \leqslant \frac{\gamma_0}{4}$$

portanto,

$$\frac{\gamma_0}{4} \geqslant \delta(C_0 f(2\frac{C_\Omega K_0}{m_0}) + \frac{\| a \|^2 n^2}{4B_0})$$

usando também o fato que $\delta \leqslant \frac{1}{2}$ *obtemos*

$$K_\delta'(t) \leqslant -\delta|\nabla u'(t)|^2 - \frac{B_0}{2}|\nabla\theta(t)|^2 - \frac{\gamma_0}{2}|\Delta u(t)|^2.$$

Como $0 < M(x, t, |\nabla u(t)|^2) \leqslant C_0 f(|\nabla u(t)|^2)$ *temos,* $-1 \leqslant -\frac{M(x,t,|\nabla u(t)|^2)}{C_0 f(|\nabla u(t)|^2)}$. *Como* $u \in L^\infty_{loc}(0, \infty; H^1_0(\Omega))$ *usando a constante* C_5 *definida por*

$$C_5 = \sup\{f(\varphi); |\varphi|_{L^\infty_{loc}(0,\infty;H^1_0(\Omega))} \leqslant C\}$$

com isso $0 < C_0 f(|\nabla u(t)|^2) < C_0 C_5$ *de onde tiramamos que* $-\frac{1}{C_0 f(|\nabla u(t)|^2)} \leqslant -\frac{1}{C_0 C_5}$. *Portantos temos que*

$$-1 \leqslant -\frac{M(x,t,|\nabla u(t)|^2)}{C_0 f(|\nabla u(t)|^2)} \leqslant -\frac{M(x,t,|\nabla u(t)|^2)}{C_0 C_5}$$

Fazendo $\tau = \min\{\delta, \frac{B_0}{2}, \frac{\gamma_0}{4C_0C_5}\}$ *e usando a majoração acima em* $K'_\delta(t)$ *temos que*

$$\begin{aligned} K'_\delta(t) &\leqslant -\delta|\nabla u'(t)|^2 - \tfrac{B_0}{2}|\nabla\theta(t)|^2 - \tfrac{\gamma_0}{4}\tfrac{M(x,t,|\nabla u(t)|^2)}{C_0C_5}|\Delta u(t)|^2 \\ &\leqslant -2\tau\Big\{\tfrac{1}{2}(|\nabla u'|^2 + |\nabla\theta|^2 + \int_\Omega M(.,t,|\nabla(t)|^2|\Delta u|_{\mathbb{R}} dx)\Big\}. \end{aligned}$$

Logo $K'_\delta(t) \leqslant -2\tau K(t)$. *Com esta desigualdade obtemos:*

$$K'_\delta(t) \leqslant -\frac{4}{3}\tau K_\delta(t).$$

Resolvendo a desigualdade diferencial: $K'_\delta(t) + \frac{4}{3}\tau K_\delta(t) \leqslant 0$. *Multiplicando pelo fator integrante* $\exp\{(\frac{4\tau}{3})t\}$ *teremos que*

$$\exp\{(\frac{4\tau}{3})t\}K'_\delta(t) + \frac{4\tau}{3}\exp\{(\frac{4\tau}{3})t\}K_\delta(t) \leqslant 0$$

ou,

$$\Big[\exp\{(\frac{4\tau}{3})t\}K_\delta(t)\Big]' \leqslant 0.$$

Daí,

$$\int_0^t \Big[\exp\{(\frac{4\tau}{3})s\}K_\delta(s)\Big]' ds \leqslant 0$$

ou,

$$\exp\{(\frac{4\tau}{3})t\}K_\delta(t) \leqslant K_\delta(0)$$

Logo

$$K_\delta(t) \leqslant K_\delta(0)\exp\{(-\frac{4\tau}{3})t\}, \forall t \geqslant 0$$

Voltando as desigualdades $\frac{1}{2}\mathsf{K}(t) \leqslant \mathsf{K}_\delta(t) \leqslant \mathsf{K}_\delta(0)\exp\{(-\frac{4\tau}{3})t\}$ *e sendo* $\mathsf{K}_\delta(0) \leqslant \frac{3}{2}\mathsf{K}(t)$ *temos* $\mathsf{K}(t) \leqslant 3\mathsf{K}(0)\exp\{(-\frac{4\tau}{3})t\}$. *Usando a desigualdade de Poincaré teremos que*

$$\begin{aligned}
E(t) &= \frac{1}{2}\Big\{|u'(t)|^2 + |\theta(t)|^2 + \int_\Omega M(\cdot, t, |\nabla u(t)|^2)|\nabla u(t)|^2_{\mathbb{R}}dx\Big\} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\Big\{C_\Omega|\nabla u'(t)|^2 + C_\Omega|\nabla\Omega(t)|^2 + \int_\Omega M(x, t, |\nabla u(t)|^2)|\Delta u|^2 dx\Big\} \\
&\leqslant C_\Omega K(t) \\
&\leqslant 3C_\Omega K(0)\exp\{(-\frac{4\tau}{3})t\}
\end{aligned}$$

assim, fica provado o teorema, pois $\mathsf{E}(t) \leqslant 3C_\Omega \mathsf{K}(0)\exp\{(-\frac{4\tau}{3})t\}$.

Referências Bibliográficas

[1] BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations* . Springer, 2011.

[2] CASTRO, N.N.O *Soluções fracas para um sistema hiperbólico envolvendo o operador p-laplaciano.* $(2 < \mathsf{p} < 3)$. UFPB,2005.

[3] CLARK, M.R; LIMA, A.L; JESUS,I.P *Análise Funcional: Uma Introdução* . Edufpi, 2018.

[4] E.FERNANDES-CARA.;, J.LIMACO.; S.B. MENEZES. *Null contrallability for a parabolic equation with nonlocal nonlinearities Systems Controll Lett.* 61 (2012) 107-111. 465–512, 2000.

[5] EVANS, L.C. *Partial differential equations.* American Mathematical Society, 2010.

[6] CLARK, H.R; GUARDIA, R.R *On Thermoelastic System with Nonlocal Coefficients*, J.Math, Anal.Appl 433 (2016) 338-354.

[7] LIONS, J.L. *Quelques Méthodes de Résolutions des Problémes aux Limites Non-Linéaries.* Dunod,Paris, 1969.

[8] LÍMACO, J; CLARK, H.R; MEDEIROS, L.A. *Vibrations of Elastic String with Nonhomogeneous Material*, J. Math. Anal Appl. 344 (2008) 806-820.

[9] KOMORNIK, V; ZUAZUA, E. *A Direct Method for Boundary Stabilization of Wave Equation*, J. Math. Pures Appl. 69 (1990) 33 - 54.

[10] MATOS, M.P. *Integral de Bochner e os Espaço* $\mathsf{L}^{\mathsf{p}}(0,\mathsf{T};\mathsf{X})$. Notas de aula, UFPB, João Pessoa, 1998.

[11] MARINHO, A.O; CLARK, H.R *Existence ande Boundary Stabilization of Solutions for coulpled Semilinear System* Nonlinear Anal. 70 (2009) 4226 - 4244.

[12] MIRANDA, M.M.; MEDEIROS, L.A. *Introdução aos espaços de Sobolev e ás Equações diferenciais parciais* . Rio de Janeiro: UFRJ, 2011.

[13] M, CHIPOT.; B,LOVAT. *On the asymtotic behaviour of some nonlocal problems.* 3 (1) (1999) 65-81.

[14] RIVERA, P.H.; MEDEIROS, L.A. *Espaços de Sobolev e equações diferenciais parciais.* Rio de Janeiro: UFRJ, 1975.

[15] TEIXEIRA, E.; PELLEGRINO, D.; BOTELHO, G. *Fundamentos de Análise Funcional.* Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[16] ZUAZUA, E. *Uniform Stabilization of Wave Equation by Nonlinear Boundary Feeback* SIAM J. Control Optim. 28 (1990) 466-478.