Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Controle exato às trajetórias via estratégia de Stackelberg-Nash para equações parabólicas

Luan Soares de Sousa

Teresina - 2019

Luan Soares de Sousa

Dissertação de Mestrado:

Controle exato às trajetórias via estratégia de Stackelberg-Nash para equações parabólicas

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora:
Profa. Dra Franciane de Brito Vieira

Teresina - 2019

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Controle exato às trajetórias via estratégia Stackelberg-Nash para equações parabólicas

Luan Soares de Sousa

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 19 de Fevereiro de 2019.

Banca Examinadora:

Franciane de Brito Vieira

Profa. Dra. Franciane de Brito Vieira - Orientadora

Isaías Pereira de Jesus

Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus (UFPI)

[illegible]

Prof. Dr. Gilcênio Rodrigues de Sousa Neto (UFPE)

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco

S725c Sousa, Luan Soares de.
Controle exato às trajetórias via estratégia de Stackelberg-Nash para equações parabólicas / Luan Soares de Sousa. – 2019.
78 f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2019.
"Orientadora: Profª. Drª. Franciane de Brito Vieira".

1. Controlabilidade (Matemática). 2. Estratégia de Stackelberg-Nash. 3. Desigualdade de Carleman. I. Título.

CDD 510

Ao meu amigo e colega de curso Luciano (in memoriam) e a minha esposa Franciele por sempre acreditar em meu potencial.

Agradecimentos

Agradeço antes de tudo a Deus, por me dar sabedoria e força suficiente para chegar até aqui, pois sem suas bençãos nada disso seria possível.

Agradeço à minha mãe Maria de Sousa, meu padrasto Edson, minha irmã Luana e meu sobrinho afilhado Lucas Emanuel por todo o carinho e apoio, e também ao meu pai, Luís.

Agradeço à minha esposa Maria Franciele, por seu apoio e companheirismo. Agradeço também à toda sua família, em especial ao meu sogro Francisco e minha sogra Ângela, por todo o apoio que me deram durante essa caminhada, assim como a minha madrinha de formatura, Cândida. A todos vocês meu muito obrigado.

Agradeço aos meus amigos, alguns mais antigos, tais como Danilo, Márcio (novo motos) e meu compadre Ironilson (Piauí), esses que são os irmãos que não tive de meus pais, pessoas que contribuíram ao longo de muitos anos durante a minha infância e atualmente. Agradeço também a todos os meus colegas de curso, desde a graduação até o mestrado, alguns deles são: (graduação) Guilherme, Ellma, Amanda Suellen, Manoel França, Marcos Vinícius, Geovane, Mikael. (Mestrado): Luciano(in memorian), esse que, desde a graduação com certeza foi o maior colaborador para que eu chegasse a iniciar e concluir esse curso, Marcos Paulo, Ronniê, Oliveiro, Raul Kazan, Ray, Juliana, Hércules, Ronaldo, Rafael, Edimilson, Edilson, Arilson, Leonardo, Lucas Emanuel, Nadiel, Rafaelber, Josimauro, Márcio, Tássio Luan, Marcelo e Filipe.

Agradeço aos professores dos departamentos de matemática dos campus CSHNB e CMPP da UFPI que contribuíram com minha formação acadêmica, desde a graduação até o mestrado, são eles: (Picos) Gilberto, João, Daniel, Alex Sandro, Cícero Fagner, Anísia, Cláudia, Antônio José, Pedro Paulo e Bruno. (Teresina) Jurandir, Marcondes, Barnabé, Newton, Roger, Leandro e Kelton. A todos vocês o meu muito obrigado.

Agradeço aos meus orientadores, Franciane de Brito Vieira e Gilcenio Rodrigues de Sousa Neto por toda a paciência e os ensinamentos transmitidos, eles que se tornaram meus pais acadêmicos de verdade. Agradeço também ao professor Isaías Pereira de Jesus por aceitar fazer parte da banca examinadora e contribuir para o aperfeiçoamento desse trabalho.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro, desde a graduação até o mestrado, pois sem esse auxílio seria praticamente impossível para mim ter chegado onde cheguei.

"*Nunca desista dos seus sonhos, pois são eles que mantêm viva sua vontade de viver*".

Luan Soares.

Resumo

Neste trabalho apresentamos a controlabilidade exata às trajetórias para uma equação linear parabólica via estratégia de Stackelberg - Nash.

Devido à linearidade do problema aqui estudado, a controlabilidade exata às trajetórias é equivalente à controlabilidade nula. Por esse motivo, usaremos um argumento padrão de observabilidade que reduz o problema de controle nulo à uma estimativa para as soluções do sistema adjunto do problema principal. Apresentamos também uma nova Desigualdade de Carleman, que será utilizada na obtenção do resultado principal.

Palavras-chave: Controlabilidade, Estratégia de Stackelberg - Nash, Desigualdade de Carleman.

Abstract

In this work we present the exact controllability to the trajectory for a linear parabolic equation via Stackelberg - Nash strategy.

Due to the linearity of the problem studied here, the exact controllability of the trajectory is equivalent to zero controllability. For this reason, we will use a standard observability argument that reduces the null-control problem to an estimate for the adjunct solutions of the main problem. We also present a new inequality of Carleman, which will be used to obtain the main result.

Keywords: Controllability, Stackelberg- Nash Strategies, Carleman Inequalities.

Sumário

Notações e Simbologias

As simbologias abaixo são utilizadas no decorrer do texto.

- $(\cdot,\cdot)$ denota o produto interno em $L^2(\Omega)$;
- $\|\cdot\|$ denota a norma em $L^2(\Omega)$;
- $\langle\cdot,\cdot\rangle$ quando não especificado, denota diferentes pares de dualidades;
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ denota o gradiente da função u;
- $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o operador Laplaciano da função u;
- q.s. - quase sempre;
- $\hookrightarrow$ denota a imersão contínua;
- $\overset{c}{\hookrightarrow}$ denota a imersão compacta;
- C quando não especificada, é uma constante positiva e arbitrária;
- $\mathcal{L}(X,Y)$ denota o espaço dos operadores lineares e contínuos de X em Y;
- $D(f)$ denota o domínio de f;
- E' denota o dual topológico do espaço vetorial E;
- $\sigma(E,E')$ denota a topologia fraca de E induzida por E';
- $\|\|\|_\infty$ denota a norma de L^∞.

Introdução

Ao longo da história, o ser humano desenvolveu de maneira significativa sua capacidade de manipular a natureza a fim de melhorar seu estilo de vida. Exemplos simples dessas modificações estão na criação de animais e agricultura, onde o homem percebeu que poderia interferir na natureza para que esta trabalhasse em seu favor. Nasce então a ideia de controle, como uma ação ou ações do homem sobre um meio de modo a obter um objetivo predeterminado. Essa ideia desenvolveu-se ao longo dos anos e passou a fazer parte do cotidiano da humanidade.

No início, a noção de controle esteve intimamente ligada à engenharia, na construção de barragens, sistemas de irrigação, na criação da máquina à vapor, ponto crucial da revolução industrial, entre outros exemplos. Porém com o desenvolvimento do cálculo e das equações diferenciais, a teoria do controle foi separada da engenharia, do ponto de vista de estudos científicos, e passou a dar seus primeiros passos como um ramo da matemática. Atualmente, todo e qualquer fenômeno físico que pode ser modelado por uma equação diferencial é um potencial objeto de estudo da teoria do controle.

Um sistema de controle é uma equação de evolução (EDO OU EDP) que depende de um parâmetro u, descrito pela expressão:

$$y' = f(t, y, u), \tag{1}$$

onde $t \in [0, T]$ representa a variável temporal, $y : [0, T] \to X$ é a função estado e $u : [0, T] \to Y$ é um controle. Nesse modelo, X e Y são espaços de funções adequados, $T > 0$ é um valor real fixado e y' representa a derivada de y em relação ao tempo t.

Em seguida, destacamos algumas das principais definições de controlabilidade presentes na literatura.

Definição 0.1 ***(Controlabilidade exata)*** *Sejam $T > 0$ e $y_0, y_1 \in X$ dois estados do sistema* (1)*. Dizemos que tal sistema é exatamente controlável se existe $u : [0, T] \to Y$*

tal que;

$$\begin{cases} y' = f(y,u) \ \ em \ [0,T] \\ y(0) = y_0, \quad y(T) = y_1 \end{cases}$$

Definição 0.2 ***(Controlabilidade aproximada)*** *Sejam $T > 0$ um número real e y_0, y_1 dois possíveis estados do sistema (1). Dizemos que tal sistema é aproximadamente controlável se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir $u_\epsilon : [0,T] \to Y$ tal que;*

$$\begin{cases} y' = f(y,u_\epsilon) \ \ em \ [0,T] \\ y(0) = y_0, \quad \|y(T) - y_1\| \leq \epsilon. \end{cases}$$

Definição 0.3 ***(Controlabilidade nula)*** *Sejam $T > 0$ um número real dado e $y_0 \in X$ um estado arbitrário do sistema (1). Dizemos que tal sistema é nulamente controlável se existe $u : [0,T] \to Y$ tal que;*

$$\begin{cases} y' = f(y,u) \ \ em \ [0,T] \\ y(0) = y_0, \quad y(T) = 0 \end{cases}$$

Definição 0.4 ***(Controlabilidade exata às trajetórias)*** *Sejam $T > 0$ um número real dado, $y_0 \in X$ um estado e $\overline{y}$ uma trajetória (isto é, uma solução arbitrária do sistema (1) sem controle). Dizemos que tal sistema é exatamente controlável às trajetórias se existe $u : [0,T] \to Y$ tal que;*

$$\begin{cases} y' = f(y,u) \ \ em \ [0,T] \\ y(0) = y_0, \quad y(T) = \overline{y}(T). \end{cases}$$

É bem sabido que, em problemas lineares, as definições de controle nulo e exato às trajetórias são equivalentes.

Em problemas clássicos de controlabilidade, encontramos geralmente uma equação ou sistema de estado e um controle cuja a missão é atingir uma meta predeterminada. Na maioria dos casos, o objetivo é minimizar um funcional custo em uma família prescrita de controles admissíveis. Essas situações podem ser denominadas problemas de controle mono - objetivo.

Situações mais interessantes surgem quando consideramos vários objetivos a serem alcançados ou considerados, em geral conflitantes. Isso pode acontecer, por exemplo, se o funcional custo for a soma de vários termos e não está claro como calcular a média. Também é esperado que mais de um controle seja utilizado para atingir tais objetivos. Esses casos são denominados problemas de controle multi-objetivos.

Em contraste com o caso mono-objetivo, várias estratégias para a escolha de bons controles podem aparecer, depedendo das características do problema. Além disso, essas estratégias podem ser cooperativas (quando os controles cooperam entre si para atingir seus objetivos), ou não cooperativas, caso contrário. Existem vários conceitos de equilíbrio para problemas multi-objetivos, como por exemplo, a estratégia proposta por Nash [17], a estratégia cooperativa de Pareto [18], e a estratégia cooperativa hierárquica de Stackelberg [21].

No contexto de controle multi-objetivo de fenômenos governados por EDP's, aplicando controles que correspondem à uma dessas estratégias, temos abaixo alguns trabalhos nessa direção;

- O artigo de Lions [12, 13], onde o autor dá alguns resultados sobre estratégia de Pareto e Stackelberg, respectivamente.
- O artigo de Diaz e Lions [5], onde a controlabilidade aproximada de um sistema é estabelecido seguindo uma estratégia de Stackelberg -Nash e a extensão de Diaz [6], que fornece uma caracterização da solução por meio da teoria de dualidade de Fenchel-Rockafellar.
- Os artigos [20, 19], onde Ramos et. al estudaram equilíbrio de Nash dos pontos de vista teórico e numérico para EDP's parabólicas lineares.

As questões de controlabilidade consideradas nos trabalhos acima citados fornecem apenas respostas em nível aproximado. A principal novidade apresentada nesse trabalho é a extensão da análise e os resultados à uma estrutura de controlabilidade exata, mais precisamente, controle exato às trajetórias. Precisamente, este trabalho baseia-se nos artigos [1] e [2] e está dividido da seguinte forma:

No capítulo 1 apresentamos os resultados preliminares, essenciais ao desenvolvimento do nosso trabalho.

No capítulo 2 apresentamos formalmente o problema de controle a ser estudado.

No capítulo 3 provaremos a existência e unicidade do equilíbrio de Nash para os funcionais custo associados ao problema principal. Daremos ainda uma caracterização desse equilíbrio como solução de um sistema de equações diferenciais.

No capítulo 4 apresentamos uma nova desigualdade de Carleman que será utilizada na obtenção do resultado principal.

No capítulo 5 provaremos a desigualdade de observabilidade, mais uma peça fundamental para a prova do teorema principal.

Finalmente, no capítulo 6 provaremos o Teorema 2.2, que é equivalente ao resultado principal.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns resultados e definições que serão utilizados no decorrer do texto para ajudar o leitor a ter uma melhor compreensão do conteúdo abordado nos capítulos seguintes.

1.1 Tópicos de Análise Funcional

1.1.1 Convergência Fraca e Fraca Estrela

Definição 1.1 ***(Convergência Fraca)*** *Sejam E um espaço de Banach e $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E. Então $u_k \rightharpoonup u$ se, e somente se, $\langle \phi, u_k\rangle \to \langle \phi, u\rangle, \forall \phi \in E'$.*

Definição 1.2 ***(Convergência Fraca Estrela)*** *Sejam E um espaço de Banach, $\phi \in E'$ e $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma squência de E'. Dizemos que $\phi_k \overset{*}{\rightharpoonup} \phi$ fraco estrela se, e somente se, $\langle \phi_k, u\rangle \to \langle \phi, u\rangle,\ \forall u \in E$.*

Proposição 1.1 *Sejam E um espaço de Banach e $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E. Então:*

(i) Se $u_k \rightharpoonup u$ em $\sigma(E,E')$ então $\langle \varphi, u_k\rangle \to \langle \varphi, u\rangle,\ \forall \varphi \in E'$;

(ii) Se $u_k \to u$ forte então $u_k \rightharpoonup u$ fracamente na topologia $\sigma(E,E')$;

(iii) Se $u_k \rightharpoonup u$ em $\sigma(E,E')$ e se $\varphi_k \to \varphi$ fortemente em E', então $\langle \varphi_k, u_k\rangle \to \langle \varphi, u\rangle$.

Demonstração: *Jesus et. al ([11], pág. 98).* $\square$

1.1.2 Espaços Separáveis e Reflexivos

Definição 1.3 *Um espaço métrico E é dito separável se existe um subconjunto $A \subset E$ enumerável e denso.*

Definição 1.4 *Sejam E um espaço de Banach e J a injeção canônica de E em E''. O espaço E é dito reflexível se quando $J(E) = E''$.*

Teorema 1.1 ***(Banach - Alaoglu - Bourbaki)***. *Sejam E um espaço de Banach e E' seu dual topológico. Então o conjunto*

$$B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\} \text{ é compacto na topologia fraca estrela.}$$

Demonstração: *Brezis([4], pág. 66)* □

Teorema 1.2 *Sejam E um espaço de Banach separável e E' seu dual topológico. Então o conjunto*

$$B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\} \text{ é metrizável na topologia fraca estrela.}$$

Reciprocamente, se $B_{E'}$ é metrizável na topologia fraca estrela, então E é separável.
Demonstração: *Brezis([4], pág. 74)* □

Corolário 1.1 *Sejam E um espaço de Banach separável e $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E'. Então existe uma subsequência $(g_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que converge na topologia fraca estrela.*
Demonstração: *Brezis([4] pág. 76).* □

Teorema 1.3 *Seja E um espaço de Banach reflexivo e suponhamos que a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ é limitada. Então existe uma subsequência $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $f \in E$ tal que*

$$f_{n_j} \rightharpoonup f.$$

Demonstração: *Evans([7] pág. 639).* □

1.2 Os Espaços L^p

Nesta seção, faremos uma breve descrição dos espaços L^p e algumas de suas propriedades.

Definição 1.5 *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < +\infty$. Definimos*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \quad \textit{mensurável e} \int_\Omega |f|^p dx < +\infty\}.$$

O espaço acima definido munido com a norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço de Banach.

Definição 1.6 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto. Definimos*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \quad \textit{é mensurável e} \ \ \exists\ C \geq 0; |f(x)| \leq C \quad q.s \ \ em \ \ \Omega\}.$$

O espaço L^∞ munido com a norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; |f(x)| \leq C \quad q.s. \ \ \text{em} \ \ \Omega\}$$

é um espaço de Banach.

Teorema 1.4 *(**Desigualdade de Young**) Sejam $1 < p$ e $1 < q$ números reais conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall\ a \geq 0 \quad e \quad b \geq 0.$$

Em particular, se $p = q = 2$, a relação é válida para quaisquer dois números reais.

Demonstração: *Brezis ([4], pág. 92).* □

Teorema 1.5 *(**Desigualdade de Hölder**) Sejam as funções $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e q o expoente conjugado de p; isto é $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |fg| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Brezis ([4], pág. 92). □

Definição 1.7 *Dizemos que uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω, quando f é integrável a Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$. Em símbolos temos*

$$f \in L^1_{loc}(\Omega) \Leftrightarrow \int_K |f| dx < +\infty, \ \forall K \subset \Omega.$$

Lema 1.2.1 ***(Du Bois Raymond)*** *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. Se*

$$\int_\Omega u(x)v(x)dx = 0, \ \forall\, v \in D(\Omega), \tag{1.1}$$

então $u = 0$ quase sempre em Ω.

Demonstração: Medeiros ([15], pág. 14) □

1.3 Teoria das Distribuições Escalares

Motivado pela noção de integração por partes do cálculo diferencial, Sobolev prospôs a ideia de derivada fraca para uma função em L^1_{loc}, porém essa definição possuía algumas falhas, então, posteriormente, Schwarz aprimorou a ideia definindo a derivada fraca no sentido das distribuições ou derivada distribucional. Faremos agora algumas considerações sobre esse assunto.

No que se segue abaixo, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto.

Definição 1.8 *Denomina-se suporte de uma função continua $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, ao fecho em Ω do conjunto onde $\varphi \neq 0$, simbolicamente,*

$$supp(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^{\Omega}.$$

Definição 1.9 *$C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções infinitamente diferenciaveis com suporte compacto em Ω.*

Exemplo 1.1 *Sejam Ω aberto de $\mathbb{R}^n$ e $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x||_n < 1\} \subset \Omega$. Consideremos $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, dada por*

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|_n^2 - 1}}, & se\ \|x\|_n < 1, \\ 0, & se\ \|x\|_n \geq 1, \end{cases}$$

onde $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $\|x\|_n = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ é a norma euclidiana de x. Temos que $\varphi(x) \in C^\infty$ e $supp(\varphi) = \overline{B_1(0)}$ é compacta , isto é, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Definição 1.10 *Diz-se que uma sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando forem satisfeitas as condições:*

i) Todas as $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possuem suportes contidos em um compacto fixo K de Ω;

ii) A sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ em K, juntamente com suas derivadas de todas as ordens.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, munido da noção de convergência acima definida, representado por $D(\Omega)$ é chamado de Espaço das Funções Teste sobre Ω.

Definição 1.11 *Denomina-se Distribuição sobre Ω toda forma linear contínua sobre $D(\Omega)$. Dito de modo explícito, uma distribuição sobre Ω é uma forma linear $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$, satisfazendo as condições:*

i. $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g), \forall\, f, g \in D(\Omega), \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

ii. T é contínua , isto é, se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ em $D(\Omega)$, então $\langle T, \varphi_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$, onde $\langle T, \varphi\rangle$ denota o valor da distribuição T aplicada em φ.

Exemplo 1.2 *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$e defina a forma linear $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$\langle T, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx,\ \forall\varphi \in\ D(\Omega).$$

Então T é uma distribuição sobre Ω.

Agora, seja $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de distribuições sobre $D(\Omega)$. Dizemos que a sucessão $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para T quando a sucessão $\langle T_n, \varphi\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$ para toda φ em $D(\Omega)$. O espaço das distribuições sobre $D(\Omega)$, munido com essa noção de convergência é denotado por $D'(\Omega)$.

Definição 1.12 *Denomina-se o operador derivação D^α, com $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ uma n-upla de inteiros não negativos, sendo $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ sua ordem, como sendo*

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1}\ldots\partial^{\alpha_n}}.$$

Definição 1.13 *Sejam $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ uma distribuição e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice. Definimos a forma linear e contínua $D^\alpha T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = \langle T, D^\alpha\varphi\rangle,\quad \forall\varphi \in D(\Omega), \tag{1.2}$$

como a derivada fraca no sentido das distribuições de T.

Segue das definições acima e da noção de convergência introduzida em $D'(\Omega)$ que o operador derivação é contínuo, mais ainda, com essa definição de derivada, uma distribuição T admite derivadas de todas as ordens.

1.4 Espaços de Sobolev

Tendo em vista as definições de distribuição e derivada fraca, pode se verificar que toda função $f \in L^p(\Omega), \quad 1 \leq p < +\infty$, define uma distribuição e possui derivada fraca de todas as ordens, porém, uma pergunta natural surge: essas derivadas ainda pertencem a algum espaço L^p? Esse tipo de questionamento levou à noção de espaços de Sobolev, como veremos a seguir.

1.4.1 O espaço $W^{m,p}(\Omega)$

Definição 1.14 *Sejam $p \in [1, +\infty]$ e $m \in \mathbb{N}$. Definimos como espaço de Sobolev de ordem P o conjunto das funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq m$, ou seja, $W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\, D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall |\alpha| \leq m\}$.O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido com a norma*

$$||u||_{W^{m,p}}(\Omega) = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||_{L^p}^p \right)^{1/p}$$

é um espaço de Banach.

Quando $p = 2$ eles recebem uma notação especial, a saber,

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega).$$

O espaço $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

1.4.2 O espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$

Definimos $W_0^{m,p}(\Omega)$ como o fecho em $W^{m,p}(\Omega)$ do espaço $D(\Omega)$, isto é,

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

O espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ é fechado em $W^{m,p}(\Omega)$, dessa forma, ele próprio é um espaço de Banach. Como consequência da Desigualdade de Poincaré, (vide próxima seção), temos que

$$\|f\|_{W_0^{m,p}} = \left(\sum_{0<|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

define uma norma em $W_0^{m,p}(\Omega)$ e, além disso, ela é equilvalente à norma de $W^{m,p}(\Omega)$.

1.4.3 Teoremas de Imersão

Definição 1.15 *Sejam X e Y espaços de Banach. Dizemos que X está continuamente imerso em Y, e denotamos por $X \hookrightarrow Y$, quando $X \subset Y$ e existir uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X, \ \forall x \in X.$$

Se toda sequência limitada em X admitir uma subsequência convergente em Y, dizemos que X é compactamente imerso em Y e escrevemos $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$.

Teorema 1.6 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto limitado. Se $1 \leq q \leq p \leq \infty$, então $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.*

Demonstração: *Matos ([14], pág. 111).* □

Teorema 1.7 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado , $n \geq 2$, Ω de classe C^m e $1 \leq p < \infty$. Então*

(i) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), 1 \leq q \leq \dfrac{np}{n-mp}$, *se* $mp < n$;

(ii) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), 1 \leq q < \infty$, *se* $mp = n$.

Demonstração: *Miranda- Medeiros ([16], pág. 75).* □

Teorema 1.8 ***(Rellich-Kondrachov)*** *Seja Ω um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 e $1 \leq p \leq \infty$. Então as seguintes imersões são compactas;*

(i) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), 1 \leq q < \dfrac{np}{n-p}$, *se* $p < n$,

(ii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), 1 \leq q < \infty$, *se* $p = n$,

(iii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, *se* $p > n$.

Demonstração: Miranda-Medeiros ([16], pág. 79). □

1.5 Resultados Importantes

Teorema 1.9 ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ seja um subconjunto aberto e limitado e $1 \leq p < \infty$. Então existe uma constante C, dependendo de Ω e p, tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \text{ para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração: Brezis ([4], p. 290). □

Teorema 1.10 ***(Lax - Milgram)*** *Sejam H um espaço de Hilbert sobre o corpo dos números reais e $T : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear contínua e coerciva. Para todo funcional linear contínuo $\varphi \in H'$ existe um único vetor $x_0 \in H$ tal que $\varphi(x) = T(x, x_0)$, para todo $x \in H$.*

Demonstração: *Botelho ([3], pág.131).* □

Teorema 1.11 ***(Fórmulas de Green)*** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira Γ de classe C^2.*

(i) Se $\gamma \in H^2(\Omega)$, então

$$\int_\Omega \nabla\gamma\nabla u dx = -\int_\Omega u\Delta\gamma dx + \int_\Gamma \frac{\partial\gamma}{\partial\nu} u ds, \ \forall u \in H^1(\Omega); \tag{1.3}$$

(ii) Se $u, \gamma \in H^2(\Omega)$, então

$$\int_\Omega (u\Delta\gamma - \gamma\Delta u)\, dx = \int_\Gamma \left(u\frac{\partial\gamma}{\partial\nu} - \gamma\frac{\partial u}{\partial\nu}\right) ds. \tag{1.4}$$

Demonstração: *Ver Brezis [4].* □.

Lema 1.5.1 ***(Desigualdade de Gronwall)*** *Sejam $u, \alpha \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $\beta \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$. Se α for crescente e*

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t \beta(s)u(s)ds, \quad \forall t \geq t_0, \tag{1.5}$$

então

$$u(t) \leq \alpha(t)e^{\int_{t_0}^t \beta(s)ds}, \quad \forall t \geq t_0. \tag{1.6}$$

Demonstração: Defina $R(\tau) = \alpha(t) + \int_{t_0}^t \beta(s)u(s)ds$ e observe que $\beta u \in L^1[t_0, t]$, então $R'(\tau) = \beta(\tau)u(\tau)$ q.s. em em $[t_0, t]$. Multiplicando (1.6) por $\beta(\tau)$, obtemos $R'(\tau) \leq \beta(\tau)R(\tau)$ q.s. em $[t_0, t]$. Reescrevendo a desigualdade anterior e integrando de t_0 a t obtemos

$$R(t) \leq R(t_0)e^{\int_{t_0}^t \beta(s)ds}$$

Portanto, pela definição de $R(t)$, o resultado segue. □

Capítulo 2

Formulação do Problema

Nesse capítulo apresentamos formalmente o problema a ser estudado. Mais precisamente, faremos uma descrição suscinta do problema proposto.

2.1 Descrição Geral

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado cuja fronteira Γ é uma superfície suficientemente regular e $T > 0$ um escalar dado. Definimos o cilindro $Q := \Omega \times (0, T)$, com fronteira lateral $\Sigma := \partial\Omega \times (0, T)$. Por $C = C(\Omega, T)$ denotamos uma constante positiva. Consideremos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + a(x,t)y = \quad f 1_{\mathcal{O}} + v^1 1_{\mathcal{O}_1} + v^2 1_{\mathcal{O}_2} & \text{em } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $a \in L^\infty(Q)$, $y_0 = y_0(x)$ são funções dadas em $L^2(\Omega)$ e $y = y(x,t)$ é um estado. Em (2.1), o conjunto $\mathcal{O} \subset \Omega$ é o domínio do controle principal, $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subset \Omega$ são os domínios dos controles secundários (todos eles são supostos pequenos), $1_{\mathcal{O}}, 1_{\mathcal{O}_1}$ e $1_{\mathcal{O}_2}$ são funções características de $\mathcal{O}, \mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$ respectivamente, a função $f = f(x,t)$ é o controle líder e $v^1 = v^1(x,t)$ e $v^2 = v^2(x,t)$ são os controles seguidores.

Sejam $\mathcal{O}_{1,d}, \mathcal{O}_{2,d} \subset \Omega$ conjuntos abertos, representando domínios de observação para os seguidores. Definimos como funcionais custo

$$J_i(f; v^1, v^2) = \frac{\alpha_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} |y - y_{i,d}|^2 dxdt + \frac{\mu_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} |v^i|^2 dxdt, \quad i = 1, 2 \tag{2.2}$$

onde $\alpha_i > 0$ e $\mu_i > 0$ são constantes e as $y_{i,d} = y_{i,d}(x,t)$ são funções dadas.

A estrutura do processo de controle pode ser descrita da seguinte forma:

1- Para cada líder f, os seguidores v^1 e v^2 devem ser um equilíbrio de Nash para os custos $J_i, (i = 1, 2)$. Em outras palavras, uma vez fixado o controle líder f, procuramos um par (v^1, v^2), com $v^i \in L^2(\mathcal{O}_i \times (0,T)), i = 1, 2$, tais que;

$$J_1(f; v^1, v^2) = \min_{\hat{v}^1} J_1(f; \hat{v}^1, v^2), \;\; J_2(f; v^1, v^2) = \min_{\hat{v}^2} J_1(f; v^1, \hat{v}^2). \tag{2.3}$$

Como veremos mais adiante, se os funcionais $J_i, (i = 1, 2)$ forem C^1 e convexos, então (v^1, v^2) é um equilíbrio de Nash se, e somente se,

$$J_1'(f; v^1, v^2)(\hat{v}^1, 0) = 0, \; \forall \; \hat{v}^1 \in L^2(\mathcal{O}_1 \times (0,T)), \;\; v^i \in L^2(\mathcal{O}_i \times (0,T))$$

e

$$J_2'(f; v^1, v^2)(0, \hat{v}^2) = 0, \; \forall \; \hat{v}^2 \in L^2(\mathcal{O}_2 \times (0,T)), \;\; v^i \in L^2(\mathcal{O}_i \times (0,T)).$$

Essa estratégia de controle multi-objetivo é denominada *estratégia de Stackelberg-Nash.*

2 - Seja $\overline{y} : Q \to \mathbb{R}$ uma trajetória de (2.1), isto é, $\overline{y}$ é uma solução regular do sistema

$$\begin{cases} \overline{y}_t - \Delta \overline{y} + a(x,t)\overline{y} = \;\; 0 & \text{em } Q, \\ \overline{y} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \overline{y}(x,0) = \overline{y}_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{2.4}$$

Uma vez que o equilíbrio de Nash (v^1, v^2) tenha sido identificado e fixado, nós procuramos por um controle $f \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$ tal que a solução de (2.1) satisfaz

$$y(x,T) = \overline{y}(x,T) \text{ em } \Omega. \tag{2.5}$$

Um exemplo físico onde tal modelo de problema de controle pode ser aplicado surge, por exemplo, quando consideramos $y(x,t)$ uma distribuição de temperatura em um corpo, e o objetivo é levar y até $\overline{y}$ no tempo T por meio de aquecimento ou resfriamento (atuando apenas nos subdomínios $\mathcal{O}, \mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$), tentanto ao mesmo tempo manter as temperaturas razoáveis em $\mathcal{O}_{1,d}$ e $\mathcal{O}_{2,d}$, durante todo o intervalo de tempo $(0,T)$.

2.2 O Resultado Principal

Teorema 2.1 *Suponhamos que:*

$$\mathcal{O}_{i,d} \cap \mathcal{O} \neq \emptyset, i = 1, 2. \tag{2.6}$$

Além disso, suponhamos que uma das seguintes condições seja verdadeira:

$$\mathcal{O}_{1,d} = \mathcal{O}_{2,d} \tag{2.7}$$

ou

$$\mathcal{O}_{1,d} \cap \mathcal{O} \neq \mathcal{O}_{2,d} \cap \mathcal{O}. \tag{2.8}$$

Então, existem $\mu_0 > 0$, dependendo apenas de $\Omega, \mathcal{O}, T, \mathcal{O}_i, \mathcal{O}_{i,d}, \alpha_i$ e $\|a\|_{L^\infty(Q)}$ e uma função positiva $\hat{\rho} = \hat{\rho}(t)$ explodindo em $t = T$ tal que, se $\mu_i \geq \mu_0$ e as funções $y_{i,d}$ são tais que

$$\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} \hat{\rho}^2 |\overline{y} - y_{i,d}|^2 dxdt < +\infty, i = 1, 2, \tag{2.9}$$

então existe um controle $f \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$ e um equilíbrio de Nash (v^1, v^2) tal que a solução y do sistema (2.1) *correspondende aos controles v^1, v^2 e f satisfaz* (2.5) *para qualquer trajetória $\overline{y}$.*

Observação 2.1 *Fazendo a mudança de variáveis $z = y - \overline{y}$, da linearidade dos sistemas* (2.1) *e* (2.4) *obtemos que*

$$\begin{cases} (y-\overline{y})_t - \Delta(y-\overline{y}) + a(x,t)(y-\overline{y}) = & f1_{\mathcal{O}} + v^1 1_{\mathcal{O}_1} + v^2 1_{\mathcal{O}_2} \quad \text{em } Q, \\ (y-\overline{y}) = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ (y-\overline{y})(x,0) = (y-\overline{y})_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{2.10}$$

Dessa forma, $y(\cdot,T) = \overline{y}(\cdot,T)$ se, e somente se $z(\cdot,T) = 0$. Daí, temos que $z \in L^2(Q)$ é solução do problema

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + a(x,t)z = & f1_{\mathcal{O}} + v^1 1_{\mathcal{O}_1} + v^2 1_{\mathcal{O}_2} \quad \text{em } Q, \\ z = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(x,0) = z_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{2.11}$$

Assim, podemos enunciar o seguinte:

Teorema 2.2 *Suponhamos que*

$$\mathcal{O}_{i,d} \cap \mathcal{O} \neq \emptyset, i = 1, 2. \tag{2.12}$$

Além disso, suponhamos que uma das seguintes condições seja verdadeira:

$$\mathcal{O}_{1,d} = \mathcal{O}_{2,d} \tag{2.13}$$

ou

$$\mathcal{O}_{1,d} \cap \mathcal{O} \neq \mathcal{O}_{2,d} \cap \mathcal{O}. \tag{2.14}$$

Então, existem $\mu_0 > 0$, *dependendo apenas de* $\Omega, \mathcal{O}, T, \mathcal{O}_i, \mathcal{O}_{i,d}, \alpha_i$ *e* $\|a\|_{L^\infty(Q)}$ *e uma função positiva* $\hat{\rho} = \hat{\rho}(t)$ *explodindo em* $t = T$ *tal que, se* $\mu_i \geq \mu_0$ *e as funções* $z_{i,d} = y_{i,d} - \overline{y}$ *são tais que*

$$\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} \hat{\rho}^2 |z_{i,d}|^2 dxdt < +\infty, i = 1, 2, \tag{2.15}$$

então existe um controle $f \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$ *e um equilíbrio de Nash* (v^1, v^2) *tal que, a solução* z *do problema* (2.11) *correspondende aos controles* v^1, v^2 *e* f *satisfaz*

$$z(\cdot, T) = 0.$$

Capítulo 3

Equilíbrio de Nash e Sistema Otimizado

Nessa seção, provaremos a existência e unicidade do equilíbrio de Nash para os funcionais custo $J_i, i = 1, 2$, definidos em (2.2). Isso será feito utilizando algumas equivalências e o Teorema de Lax-Milgran. Além disso, vamos expor o par (v^1, v^2) como solução de um sistema de equações diferenciais e por fim, obteremos um sistema otimizado que será fundamental na demonstração do resultado principal.

3.1 Existência e Unicidade do equilíbrio de Nash

Usando a mudança de variáveis $z = y - \overline{y}$ e $z_{i,d} = y_{i,d} - \overline{y}$ feita anteriormente, podemos reescrever (2.2) como segue.

Lema 3.1.1 *Os funcionais*

$$J_i(f; v^1, v^2) = \frac{\alpha_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} |z - z_{i,d}|^2 dxdt + \frac{\mu_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} |v^i|^2 dxdt, \quad i = 1, 2 \tag{3.1}$$

são de classe C^1 e estritamente convexos.

Demonstração: Primeiro, decompomos os fucionais $J_i, i = 1, 2$, da seguinte forma:

$$J_i(f; v^1, v^2) = \hat{J}_i(z) + \tilde{J}_i(v^i), \tag{3.2}$$

onde

$$\hat{J}_i(z) = \frac{\alpha_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} |z - z_{i,d}|^2 dxdt \text{ e } \tilde{J}_i(v^i) = \frac{\mu_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} |v^i|^2 dxdt.$$

Dados $\lambda \in (0,1), z, \tilde{z} \in L^2(Q)$, com $z \neq \tilde{z}$, pela Desigualdade de Young, temos que

$$\begin{aligned}
&\hat{J}_i(\lambda z + (1-\lambda)\tilde{z}) = \frac{\alpha_i}{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} |\lambda z + (1-\lambda)\tilde{z} - (\lambda z + (1-\lambda)\tilde{z})_{i,d}|^2 dxdt \\
&= \frac{\alpha_i}{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} |\lambda(z - z_{i,d}) + (1-\lambda)(\tilde{z} - \tilde{z}_{i,d})|^2 dxdt \\
&= \frac{\alpha_i}{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} \Big(\lambda^2(z - z_{i,d})^2 + 2\lambda(1-\lambda)(z - z_{i,d})(\tilde{z} - \tilde{z}_{i,d}) + (1-\lambda)^2(\tilde{z} - \tilde{z}_{i,d})^2\Big) dxdt \\
&< \frac{\alpha_i}{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} \Big(\lambda^2(z - z_{i,d})^2 + \lambda(1-\lambda)[|z - z_{i,d}|^2 + |\tilde{z} - \tilde{z}_{i,d}|^2]\Big) dxdt \\
&\quad + \frac{\alpha_i}{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} (1-\lambda)^2(\tilde{z} - \tilde{z}_{i,d})^2 dxdt \\
&= \lambda\frac{\alpha_i}{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} |z - z_{i,d}|^2 dxdt + (1-\lambda)\frac{\alpha_i}{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} |\tilde{z} - \tilde{z}_{i,d}|^2 dxdt \\
&= \lambda\hat{J}_i(z) + (1-\lambda)\hat{J}_i(\tilde{z}).
\end{aligned}$$

Observemos que a desigualdade estrita vem do fato de que $z \neq \tilde{z}$. Analogamente, olhando para os funcionais $\tilde{J}_i$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_i(\lambda v^i + (1-\lambda)\tilde{v}^i) &= \frac{\mu_i}{2}\iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} |\lambda v^i + (1-\lambda)\tilde{v}^i|^2 dxdt \\
&= \frac{\mu_i}{2}\iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} \Big(\lambda^2|v^i|^2 + 2\lambda(1-\lambda)v^i\tilde{v}^i + (1-\lambda)^2|\tilde{v}^i|^2\Big) dxdt \\
&\leq \frac{\mu_i}{2}\iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} \Big(\lambda^2|v^i|^2 + \lambda(1-\lambda)[|v^i|^2 + |\tilde{v}^i|^2] + (1-\lambda)^2|\tilde{v}^i|^2\Big) dxdt \\
&= \lambda\frac{\mu_i}{2}\iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} |v^i|^2 dxdt + (1-\lambda)\frac{\mu_i}{2}\iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} |\tilde{v}^i|^2 dxdt \\
&= \lambda\tilde{J}_i(v^i) + (1-\lambda)\tilde{J}_i(\tilde{v}^i).
\end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que os funcionais $J_i, i = 1, 2$, são estritamentes convexos.

Agora, definamos os espaços $\mathcal{H}_i = L^2(\mathcal{O}_i \times (0,T)), \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ e os operadores $L_i : \mathcal{H}_i \to L^2(Q), i = 1, 2$, dados por $L_i(\hat{v}^i) = z^i$, onde z^i é a solução do sistema

$$\begin{cases}
z^i_t - \Delta z^i + a(x,t)z^i = \hat{v}^i 1_{\mathcal{O}_i} & \text{em } Q, \\
z^i = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\
z^i(x,0) = 0 & \text{em } \Omega.
\end{cases} \tag{3.3}$$

O sistema (3.3) admite uma única solução, e assim, L_i está bem definido. Além disso, sua linearidade decorre imediatamente da linearidade do sistema (3.3). A continuidade pode ser verificada facilmente. Logo, $L_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_i; L^2(Q)), i = 1, 2$. Por outro lado, para cada

$f \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$, existe uma única solução $u \in L^2(Q)$ para o sistema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + a(x,t)u = \ f1_{\mathcal{O}} & \text{em } Q, \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ u(x,0) = z^0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{3.4}$$

Dessa forma, podemos escrever $z = L_1v^1 + L_2v^2 + u$ e assim, (3.1) pode ser reescrito como sendo

$$J_i(f; v^1, v^2) = \frac{\alpha_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} |L_1v^1 + L_2v^2 + u - z_{i,d}|^2 dxdt + \frac{\mu_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} |v^i|^2 dxdt. \tag{3.5}$$

Agora, definimos a função

$$\begin{aligned} \phi_1(\lambda) &= J_1(f; v^1 + \lambda\hat{v}^1, v^2) \\ &= \frac{\alpha_1}{2} \iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} |L_1v^1 + \lambda L_1\hat{v}^1 + L_2v^2 + u - z_{1,d}|^2 dxdt \\ &\quad + \frac{\mu_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} |v^1 + \lambda\hat{v}^1|^2 dxdt, \end{aligned} \tag{3.6}$$

onde $f \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$ e $v^2 \in \mathcal{H}_2$. Calculando a derivada de Gateaux de ϕ_1, com $a = \lambda L_1\hat{v}^1$ e $b = L_1v^1 + L_2v^2 + u - z_{1,d}$ resulta que

$$\begin{aligned} \frac{\phi_1(\lambda) - \phi_1(0)}{\lambda} &= \frac{1}{\lambda}\Bigg(\frac{\alpha_1}{2} \iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} |a+b|^2 dxdt - \frac{\alpha_1}{2} \iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} |b|^2 dxdt \\ &\quad - \frac{\mu_1}{2} \iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} |v^1|^2 dxdt + \frac{\mu_1}{2} \iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} |v^1 + \lambda\hat{v}^1|^2 dxdt\Bigg) \\ &= \frac{1}{\lambda}\Bigg(\frac{\alpha_1}{2} \iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} |a|^2 dxdt + \alpha_1 \iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} (ab) dxdt \\ &\quad + \lambda^2\frac{\mu_1}{2} \iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} |\hat{v}^1|^2 dxdt + \lambda\mu_1 \iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} v^1\hat{v}^1 dxdt\Bigg) \\ &= \frac{1}{\lambda}\Bigg(\lambda^2\frac{\alpha_1}{2} \iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} |L_1\hat{v}^1|^2 dxdt + \lambda\alpha_1 \iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} L_1\hat{v}^1(L_1v^1 + L_2v^2 + u - z_{1,d}) dxdt \\ &\quad + \lambda\mu_1 \iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} v^1\hat{v}^1 dxdt + \lambda^2\frac{\mu_1}{2} \iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} |\hat{v}^1|^2 dxdt\Bigg) \\ &= \lambda\frac{\alpha_1}{2} \iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} |L_1\hat{v}^1|^2 dxdt + \lambda\frac{\mu_1}{2} \iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} |\hat{v}^1|^2 dxdt + \mu_1 \iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} v^1\hat{v}^1 dxdt \\ &\quad + \alpha_1 \iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} L_1\hat{v}^1(L_1v^1 + L_2v^2 + u - z_{1,d}) dxdt. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda\to 0} \frac{\phi_1(\lambda) - \phi_1(0)}{\lambda} &= \alpha_1 \iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} L_1\hat{v}^1(L_1v^1 + L_2v^2 + u - z_{1,d}) dxdt \\ &\quad + \mu_1 \iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} v^1\hat{v}^1 dxdt, \forall\ \hat{v}^1 \in \mathcal{H}_1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$J_1'(f;v^1,v^2)(\hat{v}^1,0)=\alpha_1\iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)}(z-z_{1,d})L_1\hat{v}^1dxdt+\mu_1\iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)}v^1\hat{v}^1dxdt,\forall\ \hat{v}^1\in\mathcal{H}_1.$$

De maneira análoga obtemos

$$J_2'(f;v^1,v^2)(0,\hat{v}^2)=\alpha_2\iint_{\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T)}(z-z_{2,d})L_2\hat{v}^2dxdt+\mu_2\iint_{\mathcal{O}_2\times(0,T)}v^2\hat{v}^2dxdt,\ \forall\ \hat{v}^2\in\mathcal{H}_2.$$

A linearidade das derivadas dos J_i é imediata.

Dada $(\hat{v}^1_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{H}_1$ tal que $\hat{v}^1_n\to\hat{v}^1$ em $\mathcal{H}_1$, obtemos pela desigualdade de Schwarz que

$$\begin{aligned}&\left|\alpha_1\iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)}(z-z_{1,d})L_1(\hat{v}^1_n-\hat{v}^1)dxdt\right|\\&\quad\leq\alpha_1\iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)}|(z-z_{1,d})L_1(\hat{v}^1_n-\hat{v}^1)|dxdt\\&\quad\leq\alpha_1\left(\iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)}|z-z_{1,d}|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)}|L_1(\hat{v}^1_n-\hat{v}^1)|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\\&\quad\leq\alpha_1\|z-z_{1,d}\|_{L^2(Q)}\|L_1\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_i;L^2(Q))}\|\hat{v}^1_n-\hat{v}^1\|_{\mathcal{H}_1},\end{aligned}$$

e

$$\left|\mu_1\iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)}v^1(\hat{v}^1_n-\hat{v}^1)dxdt\right|\leq\mu_1\|v^1\|_{\mathcal{H}_1}\|\hat{v}^1_n-\hat{v}^1\|_{\mathcal{H}_1}.$$

Logo, $J_1'(f;v^1,v^2)(\hat{v}^1_n,0)\to J_1'(f;v^1,v^2)(\hat{v}^1,0)$ quando $\hat{v}^1_n\to\hat{v}^1$. Isso prova que J_1' é contínuo. De modo análogo prova se a continuidade de J_2'. $\square$

Proposição 3.1 *Consideremos os funcionais J_i definidos em* (3.1). *As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) (v^1,v^2) *é um equilíbrio de Nash para os funcionais* $J_i, i=1,2;$

ii) $J_1'(f;v^1,v^2)(\hat{v}^1,0)=J_2'(f;v^1,v^2)(0,\hat{v}^2)=0,\ \forall\ \hat{v}^i\in L^2(\mathcal{O}_i\times(0,T)),i=1,2.$

iii) $\alpha_i\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}(z-z_{i,d})L_i\hat{v}^idxdt+\mu_i\iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)}v^i\hat{v}^idxdt=0,\forall\ \hat{v}^i\in\mathcal{H}_i.$

Demonstração: $(i)\Rightarrow(ii)$

Sendo (v^1,v^2) um equilíbrio de Nash para os custos $J_i,i=1,2,$ temos

$$J_1(f;v^1,v^2)\leq J_1(f;\tilde{v}^1,v^2),\qquad\forall\tilde{v}^1\in\mathcal{H}_1$$

e

$$J_2(f;v^1,v^2) \leq J_2(f;v^1,\tilde{v}^2), \qquad \forall \tilde{v}^2 \in \mathcal{H}_2.$$

Logo, $v^1 \in \mathcal{H}_1$ *é um mínimo do funcional* $F_1(\tilde{v}^1) = J_1(f;\tilde{v}^1,v^2)$*, isto é,*

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{F_1(v^1+\lambda\tilde{v}^1) - F_1(v^1)}{\lambda} &= \alpha_1 \iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} (z - z_{1,d}) L_1 \hat{v}^1 dxdt \\ &+ \mu_1 \iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} v^1 \hat{v}^1 dxdt, \forall\ \hat{v}^1 \in \mathcal{H}_1, \forall \tilde{v}^1 \in \mathcal{H}_1. \end{aligned}$$

O mesmo ocorre com J_2*.*

$(ii) \Rightarrow (i)$

Como os funcionais $J_i, i = 1,2$ *são estritamente convexos e limitados inferiormente, existem únicos* $v^1 \in \mathcal{H}_1$ *e* $v^2 \in \mathcal{H}_2$ *tais que*

$$J_1(f;v^1,v^2) \leq J_1(f;\tilde{v}^1,v^2), \forall \tilde{v}^1 \in \mathcal{H}_1,$$

onde f *e* v^2 *estão fixados. Da mesma forma*

$$J_2(f;v^1,v^2) \leq J_2(f;v^1,\tilde{v}^2), \forall \tilde{v}^2 \in \mathcal{H}_2,$$

para f *e* v^1 *fixados. Assim, pela unicidade do par* $(v^1,v^2) \in \mathcal{H}$ *segue que* $(ii) \Rightarrow (i)$*.*

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$

Considerando as expressões de $J_i', i = 1,2,$ *obtidas na demonstração do lema anterior e* (ii) *a equivalência acima é imediata.* $\square$

Agora, usaremos os fatos demonstrados acima para provarmos a existência e unicidade do equilíbrio de Nash. Nesse sentido, vale o seguinte resultado:

Proposição 3.2 *Suponhamos que:*

$$\alpha_1 \|1_{\mathcal{O}_{1,d}} L_2\|_{(1)} < 4\mu_2 \quad e \quad \alpha_2 \|1_{\mathcal{O}_{2,d}} L_1\|_{(2)} < 4\mu_1, \tag{3.7}$$

onde $\|\|_{(i)}$ *denota a norma do espaço* $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{3-i}; L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)))$*. Então, o operador* $\mathbb{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})$*, definido por*

$$\mathbb{L}(v^1,v^2) = (\alpha_1 L_1^*((L_1v^1 + L_2v^2)1_{\mathcal{O}_{1,d}}) + \mu_1 v^1, \alpha_2 L_2^*((L_1v^1 + L_2v^2)1_{\mathcal{O}_{2,d}}) + \mu_2 v^2),$$

para todo $(v^1,v^2) \in \mathcal{H}$*, é um isomorfismo. Em particular, para cada* $f \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$ *existe exatamente um equilíbrio de Nash* $(v^1(f), v^2(f))$*.*

Demonstração: *O item (iii) da Proposição 3.1 é equivalente a*

$$\alpha_i \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} (L_1v^1 + L_2v^2 - (z_{i,d} - u))L_i\hat{v}^i dxdt + \mu_i \iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} v^i\hat{v}^i dxdt = 0,$$
$$\forall\ \hat{v}^i \in \mathcal{H}_i,\ \ i = 1, 2.$$

Considerando o operador $L_i^* \in \mathcal{L}(L^2(Q); \mathcal{H}_i)$*, adjunto de* L_i*, temos*

$$\iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} \alpha_i L_i^*((L_1v^1 + L_2v^2 - (z_{i,d} - u))1_{\mathcal{O}_{i,d}})\hat{v}^i dxdt + \mu_i \iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} v^i\hat{v}^i dxdt = 0,$$
$$\forall\ \hat{v}^i \in \mathcal{H}_i.$$

Consequentemente,

$$\iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} \left(\alpha_i L_i^*((L_1v^1 + L_2v^2 - (z_{i,d} - u))1_{\mathcal{O}_{i,d}}) + \mu_i v^i\right) \hat{v}^i dxdt = 0, \forall\ \hat{v}^i \in \mathcal{H}_i.$$

Assim,

$$\alpha_i L_i^*((L_1v^1 + L_2v^2)1_{\mathcal{O}_{1,d}}) + \mu_i v^i = \alpha_i L_i^*((z_{i,d} - u)1_{\mathcal{O}_{i,d}}) \text{ em } \mathcal{H}_i.$$

Portanto, $(v^1, v^2) \in \mathcal{H}$ *é um equilíbrio de Nash se, e somente se,*

$$\alpha_i L_i^*((L_1v^1 + L_2v^2)1_{\mathcal{O}_{i,d}}) + \mu_i v^i = \alpha_i L_i^*((z_{i,d} - u)1_{\mathcal{O}_{i,d}}) \text{ em } \mathcal{H}_i. \quad i = 1, 2.$$

Dessa forma, para garantirmos a existência e unicidade do equilíbrio de Nash para os funcionais custos definidos em (3.1) *é necessário e suficiente provarmos que existe uma única solução da equação*

$$\mathbb{L}(v^1, v^2) = \Psi,$$

onde

$$\Psi = (\alpha_1 L_1^*((z_{1,d} - u)1_{\mathcal{O}_{1,d}}), \alpha_2 L_2^*((z_{2,d} - u)1_{\mathcal{O}_{2,d}})).$$

Considerando em $\mathcal{H}$ *o produto interno* $\langle (v^1, v^2), (u^1, u^2)\rangle_{\mathcal{H}} = (v_1, u_1)_{\mathcal{H}_1} + (v_2, u_2)_{\mathcal{H}_2}$ *definimos a forma bilinear* $A : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$A((v^1, v^2), (u^1, u^2)) = \langle \mathbb{L}(v^1, v^2), (u^1, u^2)\rangle_{\mathcal{H}}.$$

A continuidade de A *segue imediatamente da continuidade de* $\mathbb{L}$ *e do operador identidade* *de $\mathcal{H}$. Agora, mostraremos que A é coerciva. Com efeito, dado $(v^1, v^2) \in \mathcal{H}$, temos*

$$\begin{aligned}
\langle \mathbb{L}(v^1, v^2), (v^1, v^2) \rangle_{\mathcal{H}} &= \sum_{i=1}^{2} (\alpha_i L_i^*((L_1 v^1 + L_2 v^2) 1_{\mathcal{O}_{i,d}}) + \mu_i v^i, v^i)_{\mathcal{H}_i} \\
&= \sum_{i=1}^{2} ((\alpha_i L_i^*((L_1 v^1 + L_2 v^2) 1_{\mathcal{O}_{i,d}}), v^i)_{\mathcal{H}_i} + \sum_{i=1}^{2} \mu_i \|v^i\|_{\mathcal{H}_i}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} L_i^*(\alpha_i((L_1 v^1 + L_2 v^2) 1_{\mathcal{O}_{i,d}}) v^i dxdt + \sum_{i=1}^{2} \mu_i \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} |v^i|^2 dxdt \\
&= \sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} (\alpha_i((L_1 v^1 + L_2 v^2) 1_{\mathcal{O}_{i,d}}) L_i(v^i) dxdt + \sum_{i=1}^{2} \mu_i \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} |v^i|^2 dxdt \\
&= \sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} \alpha_i(L_1 v^1 + L_2 v^2) L_i(v^i) dxdt + \sum_{i=1}^{2} \mu_i \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} |v^i|^2 dxdt \\
&= \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} \alpha_i L_i v^i L_j v^j dxdt \right) + \sum_{i=1}^{2} \mu_i \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} |v^i|^2 dxdt \\
&= \sum_{i,j=1}^{2} \alpha_i (L_i v^i, L_j v^j)_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T))} + \sum_{i=1}^{2} \mu_i \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} |v^i|^2 dxdt \\
&= \sum_{i=1}^{2} \left(\mu_i \|v^i\|_{\mathcal{H}_i}^2 + \alpha_i \|L_i v^i\|_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T))}^2 \right) + \sum_{i=1}^{2} \alpha_i (L_{3-i} v^{3-i}, L_i v^i)_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T))}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Por outro lado, sabemos que em qualquer espaço de Hilbert H vale

$$-\frac{1}{2}(|a|_H^2 + |b|_H^2) \leq -\langle a, b \rangle_H, \forall a, b \in H.$$

Usando esse fato obtemos

$$\begin{aligned}
&-\sum_{i=1}^{2} \alpha_i \left(\|L_i v^i\|_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)}^2 + \frac{1}{4} \|L_{3-i} v^{3-i}\|_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T))}^2 \right) \\
&\quad = -\sum_{i=1}^{2} \left(\| - \sqrt{\alpha_i} L_i v^i\|_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)}^2 + \left\| \frac{\sqrt{\alpha_i}}{2} L_{3-i} v^{3-i} \right\|_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T))}^2 \right) \\
&\quad \leq -2 \sum_{i=1}^{2} \left(-\sqrt{\alpha_i} L_i v^i, \frac{\sqrt{\alpha_i}}{2} L_{3-i} v^{3-i} \right)_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T))} \\
&\quad = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i (L_i v^i, L_{3-i} v^{3-i})_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T))}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2} \alpha_i (L_i v^i, L_{3-i} v^{3-i})_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} \\
&\qquad \geq -\sum_{i=1}^{2} \alpha_i \left(\|L_i v^i\|_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)}^2 + \frac{1}{4} \|L_{3-i} v^{3-i}\|_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T))}^2 \right).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Somando $\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\Big(\mu_i\|v^i\|^2_{\mathcal{H}_i}+\alpha_i\|L_iv^i\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))}\Big)$ *em ambos os membros da desigualdade* (3.9) *obtemos*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2}\Big(\mu_i\|v^i\|^2_{\mathcal{H}_i}+\alpha_i\|L_iv^i\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))}\Big)&+\sum_{i=1}^{2}\alpha_i(L_iv^i,L_{3-i}v^{3-i})_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}\\ \geq\sum_{i=1}^{2}\Big(\mu_i\|v^i\|^2_{\mathcal{H}_i}&+\alpha_i\|L_iv^i\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))}\Big)\\ -\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\left(\|L_iv^i\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))}+\frac{1}{4}\|L_{3-i}v^{3-i}\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))}\right)&.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Comparando (3.8) *e* (3.10), *concluímos que*

$$\begin{aligned}\langle\mathbb{L}(v^1,v^2),(v^1,v^2)\rangle_{\mathcal{H}}\geq&\sum_{i=1}^{2}\Big(\mu_i\|v^i\|^2_{\mathcal{H}_i}+\alpha_i\|L_iv^i\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))}\Big)\\&-\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\left(\|L_iv^i\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))}+\frac{1}{4}\|L_{3-i}v^{3-i}\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))}\right).\end{aligned}\tag{3.11}$$

Em seguida, usando a continuidade dos operadores $L_i:\mathcal{H}_i\to L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)),\ i=1,2,$ *temos que*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2}\frac{\alpha_i}{4}\|L_{3-i}v^{3-i}\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))}&=\sum_{i=1}^{2}\frac{\alpha_i}{4}\|1_{\mathcal{O}_{i,d}}L_{3-i}v^{3-i}\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))}\\&\leq\sum_{i=1}^{2}\frac{\alpha_i}{4}\|1_{\mathcal{O}_{i,d}}L_{3-i}\|^2_{(i)}\|v^{3-i}\|^2_{\mathcal{H}_{3-i}}\\&=\sum_{i=1}^{2}\frac{\alpha_{3-i}}{4}\|1_{\mathcal{O}_{3-i,d}}L_i\|^2_{(3-i)}\|v^i\|^2_{\mathcal{H}_i}.\end{aligned}$$

Combinando a desigualdade acima com (3.11) *segue que*

$$\langle\mathbb{L}(v^1,v^2),(v^1,v^2)\rangle_{\mathcal{H}}\geq\sum_{i=1}^{2}\left(\mu_i-\frac{\alpha_{3-i}}{4}\|1_{\mathcal{O}_{3-i,d}}L_i\|^2_{(3-i)}\right)\|v^i\|^2_{\mathcal{H}_i}.\tag{3.12}$$

Tomando $\gamma=min\{\mu_i-\frac{\alpha_{3-i}}{4}\|1_{\mathcal{O}_{3-i,d}L_i}\|^2_{(3-i)}\},i=1,2,$ *segue da hipótese* (3.7) *que* $\gamma>0$, *e portanto,*

$$\langle\mathbb{L}(v^1,v^2),(v^1,v^2)\rangle_{\mathcal{H}}\geq\gamma\|(v^1,v^2)\|^2_{\mathcal{H}},\forall\ (v^1,v^2)\in\mathcal{H}.$$

Feito isso, o Teorema de Lax-Milgran garante que, para cada $\Psi=(\alpha_1L_1^*((z_{1,d}-u)1_{\mathcal{O}_{1,d}}),\alpha_2L_2^*((z_{2,d}-u)1_{\mathcal{O}_{2,d}}))\in\mathcal{H}$, *existe um único* $(v^1,v^2)\in\mathcal{H}$ *tal que*

$$A((v^1,v^2),(u^1,u^2))=\langle\Psi,(u^1,u^2)\rangle_{\mathcal{H}},\forall\ (u^1,u^2)\in\mathcal{H}.$$

Portanto $\mathbb{L}(v^1,v^2)=\Psi$ *em* $\mathcal{H}$. □

Agora, expressaremos o equilíbrio de Nash como solução do adjunto do sistema (3.3). Com efeito, multiplicando formalmente a primeira equação de (3.3) por uma função $\phi^i \in L^2(Q)$ e integrando em Q obtemos

$$\iint_Q z_t^i \phi^i dxdt - \iint_Q \Delta z^i \phi^i dxdt + \iint_Q a(x,t) z^i \phi^i dxdt = \iint_Q \hat{v}^i 1_{\mathcal{O}_i} \phi^i dxdt.$$

Usando integração por partes e o fato de $L_i \hat{v}^i = z^i$ ser solução de (3.3), se impusermos que $\phi^i(x,T) = 0$ em Ω temos

$$\iint_Q \left(-\phi_t^i - \Delta\phi^i + a(x,t)\phi^i\right) L_i \hat{v}^i dxdt = \iint_Q \hat{v}^i 1_{\mathcal{O}_i} \phi^i dxdt. \tag{3.13}$$

Pela Proposição 3.1, $(v^1, v^2) \in \mathcal{H}$ é um equilíbrio de Nash se, e somente se,

$$\alpha_i \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} (z - z_{i,d}) L_i \hat{v}^i dxdt + \mu_i \iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} v^i \hat{v}^i dxdt = 0, \forall\ \hat{v}^i \in \mathcal{H}_i, \quad i = 1,2. \tag{3.14}$$

Vamos impor que ϕ^i seja solução do sistema

$$\begin{cases} -\phi_t^i - \Delta\phi^i + a(x,t)\phi^i = \ \alpha_i(z - z_{i,d}) 1_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{em } Q, \\ \phi^i = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \phi^i(x,T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{3.15}$$

Multiplicando a primeira equação de (3.15) por $L_i \hat{v}^i$ e integrando em Q encontramos

$$\iint_Q \left(-\phi_t^i - \Delta\phi^i + a(x,t)\phi^i\right) L_i \hat{v}^i dxdt = \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} \alpha_i (z - z_{i,d}) L_i \hat{v}^i dxdt. \tag{3.16}$$

De (3.13), (3.14) e (3.16) segue que

$$\iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} (\phi^i + \mu_i v^i) \hat{v}^i dxdt = 0, \forall\ \hat{v}^i \in \mathcal{H}_i, \quad i = 1,2. \tag{3.17}$$

Portanto, pelo Lema de Du Bois Raymond obtemos:

$$v^i = -\frac{1}{\mu_i} \phi^i|_{\mathcal{O}_i\times(0,T)}, \quad i = 1,2. \tag{3.18}$$

Combinando essas novas informações com o sistema (2.11) temos:

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + a(x,t) z = f 1_{\mathcal{O}} - \sum\limits_{i=1}^{2} \dfrac{1}{\mu_i} \phi^i 1_{\mathcal{O}_i} & \text{em } Q, \\ -\phi_t^i - \Delta\phi^i + a(x,t)\phi_i = \alpha_i(z - z_{i,d}) 1_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{em } Q, \\ z = 0, \phi_i = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(\cdot,0) = z^0, \phi^i(\cdot,T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{3.19}$$

O sistema acima é conhecido na literatura como sistema otimizado relacionado ao problema de controlabilidade nula dado pelo Teorema 2.2.

3.2 O Adjunto do Sistema Otimizado

Com os fatos apresentados na seção anterior, demonstrar o Teorema 2.1 é equivalente a provarmos que o sistema de otimalidade (3.19) é nulamente controlável. Para isso, usaremos alguns argumentos de dualidade os quais reduzem a controlabilidade nula de um sistema linear à desigualdade de observalbilidade para as soluções do sistema adjunto associado. Vejamos qual será o sistema adjunto de (3.19).

Multiplicando formalmente a primeira equação de (3.19) por uma função $\psi : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, tal que $\psi = 0$ em Σ e integrando em Q, obtemos

$$\begin{aligned}&\iint_Q z_t\psi dxdt - \iint_Q \Delta z\psi dxdt + \iint_Q a(x,t)z\psi dxdt - \iint_Q f1_{\mathcal{O}}\psi dxdt\\ &\quad + \sum_{i=1}^{2}\iint_Q \frac{1}{\mu_i}\phi^i 1_{\mathcal{O}_i}\psi dxdt = 0,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega z(x,T)\psi(x,T)dx - \int_\Omega z(x,0)\psi(x,0)dx - \iint_Q z\psi_t dxdt - \iint_Q z\Delta\psi dxdt\\ &\quad + \iint_Q a(x,t)z\psi dxdt - \iint_Q f1_{\mathcal{O}}\psi dxdt + \sum_{i=1}^{2}\iint_Q \frac{1}{\mu_i}\phi^i 1_{\mathcal{O}_i}\psi dxdt = 0.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Analogamente, multiplicando formalmente a segunda equação de (3.19) por $\gamma^i : \overline{Q} \to \mathbb{R}, i = 1,2$, tal que $\gamma^i = 0$ em Σ e integrando em Q encontramos

$$-\iint_Q \phi^i_t\gamma^i dxdt - \iint_Q \Delta\phi^i\gamma^i dxdt + \iint_Q a(x,t)\phi^i\gamma^i dxdt - \iint_Q \alpha_i(z - z_{i,d})1_{\mathcal{O}_{i,d}}\gamma^i dxdt = 0.$$

Assim

$$\begin{aligned}&-\int_\Omega \phi^i(x,T)\gamma^i(x,T)dx + \int_\Omega \phi^i(x,0)\gamma^i(x,0)dx + \iint_Q \phi^i\gamma^i_t dxdt - \iint_Q \phi^i\Delta\gamma^i dxdt\\ &\quad + \iint_Q a(x,t)\phi^i\gamma^i dxdt - \iint_Q \alpha_i z1_{\mathcal{O}_{i,d}}\gamma^i dxdt + \iint_Q \alpha_i z_{i,d}1_{\mathcal{O}_{i,d}}\gamma^i dxdt = 0.\end{aligned}$$

Lembrando que $\phi^i(x,T) = 0$ em Ω, temos

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \phi^i(x,0)\gamma^i(x,0)dx + \iint_Q \phi^i\gamma^i_t dxdt - \iint_Q \phi^i\Delta\gamma^i dxdt + \iint_Q a(x,t)\phi^i\gamma^i dxdt\\ &\quad - \iint_Q \alpha_i z1_{\mathcal{O}_{i,d}}\gamma^i dxdt + \iint_Q \alpha_i z_{i,d}1_{\mathcal{O}_{i,d}}\gamma^i dxdt = 0.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Somando as equações (3.20) e (3.21), com $i = 1,2$ e evidenciando os termos adequadamente, segue que

$$
\begin{aligned}
&\iint_Q \left(-\psi_t - \Delta\psi + a(x,t)\psi - \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \gamma^i 1_{\mathcal{O}_{i,d}} \right) z dxdt + \int_\Omega z(x,T)\psi(x,T)dx \\
&+ \sum_{i=1}^{2} \iint_Q \left(\gamma^i_t - \Delta\gamma^i + a(x,t)\gamma^i + \frac{1}{\mu_i}\psi 1\mathcal{O}_i \right) \phi^i dxdt - \int_\Omega z(x,0)\psi(x,0)dx \\
&- \iint_Q f 1_{\mathcal{O}} \psi dxdt - \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \phi^i(x,0)\gamma^i(x,0)dx + \sum_{i=1}^{2} \iint_Q \alpha_i z_{i,d} 1_{\mathcal{O}_{i,d}} \gamma^i dxdt = 0.
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

Assumindo que $\psi(x,T), \psi(x,0) \in L^2(\Omega)$, $\gamma^i(x,0) = 0$ em $Q, i = 1,2,$ concluímos que o adjunto do sistema (3.19) é:

$$
\begin{cases}
-\psi_t - \Delta\psi + a(x,t)\psi = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \gamma^i 1_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{em } Q, \\
\gamma^i_t - \Delta\gamma^i + a(x,t)\gamma^i = -\dfrac{1}{\mu_i}\psi 1_{\mathcal{O}_i} & \text{em } Q, \\
\psi = 0, \gamma^i = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\
\psi(x,T) = \psi^T, \gamma^i(x,0) = 0 & \text{em } \Omega.
\end{cases} \tag{3.23}
$$

Feitas essas hipóteses, em vista do sistema (3.23), a expressão (3.22) transforma-se em

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega z(x,T)\psi(x,T)dx - \int_\Omega z(x,0)\psi(x,0)dx - \iint_Q f 1_{\mathcal{O}} \psi dxdt \\
&+ \sum_{i=1}^{2} \iint_Q \alpha_i z_{i,d} 1_{\mathcal{O}_{i,d}} \gamma^i dxdt = 0.
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

A igualdade acima fornece uma relação entre os sistemas (3.19) e (3.23). Essa relação é essencial para caracterizarmos a controlabilidade do sistema (3.19) como uma desigualdade de observabilidade para o sistema adjunto (3.23). A estimativa de observabilidade é dada pelo seguinte resultado:

Teorema 3.1 *Sob as condições do Teorema 2.1, existe uma constante* $C > 0$, *dependendo apenas de* $\Omega, \mathcal{O}, T, \mathcal{O}_i, \mathcal{O}_{i,d}, \alpha_i, \mu_i$ *e* $\|a\|_{L^\infty(Q)}$ *e uma função peso* $\hat{\rho} = \hat{\rho}(t)$ *explodindo em* $t = T$ *tal que*

$$
\int_\Omega |\psi(x,0)|^2 dx + \sum_{i=1}^{2} \iint_Q \hat{\rho}^{-2} |\gamma^i|^2 dxdt \le C \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\psi|^2 dxdt. \tag{3.25}
$$

A fim de provarmos (3.25), usaremos algumas estimativas de Carleman adequadas para esta situação, com escolhas específicas e um tanto incomuns das funções peso. Isso será feito em detalhes no próximo capítulo.

Capítulo 4

Desigualdade de Carleman

Nesta capítulo introduzimos as funções peso necessárias para a prova do Teorema 3.1, relembramos algumas estimativas de Carleman já conhecidas e por fim, enunciamos e provamos uma nova Desigualdade de Carleman.

4.1 Funções Peso e Resultados Auxiliares

Utilizando as hipóteses (2.12) e (2.14) do Teorema 2.1, podemos obter um subconjunto aberto não vazio $\widetilde{\mathcal{O}} \subset\subset \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{O}_{i,d} \cap \widetilde{\mathcal{O}} \neq \emptyset, i = 1, 2$ e subconjuntos abertos conexos não vazios ω_i tais que

$$\omega_i \subset\subset \mathcal{O}_{i,d} \cap \widetilde{\mathcal{O}},\ i = 1, 2,\ \omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset. \tag{4.1}$$

Mais ainda, por (4.1) podemos assumir que, ou

$$\omega_1 \cap \mathcal{O}_{2,d} = \emptyset \text{ e } \omega_2 \cap \mathcal{O}_{1,d} = \emptyset \tag{4.2}$$

ou

$$\omega_i \subset \mathcal{O}_{j,d} \text{ e } \omega_j \cap \mathcal{O}_{i,d} = \emptyset,\ \text{com } (i, j) = (1, 2) \text{ ou } (i, j) = (2, 1). \tag{4.3}$$

Para definirmos as funções peso, o lema abaixo será fundamental. Para mais detalhes ver [1].

Lema 4.1.1 *Existem funções $\eta_i \in C^2\left(\overline{\Omega}\right), (i = 1, 2)$ tais que:*

$$\begin{cases} \eta_i > 0 \ \text{em } \Omega,\ \eta_i = 0 \ \text{sobre } \partial\Omega, \\ |\nabla \eta_i| > 0 \ \text{em } \overline{\Omega} \setminus \omega_i,\ \eta_1 = \eta_2 \ \text{em } \Omega \setminus \widetilde{\mathcal{O}}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Observação 4.1 *Sabemos que (cf. [9] ,Lema 1.1) para cada conjunto aberto $\omega_0 \subset \Omega$, existe $\eta_0 \in C^2(\overline{\Omega})$ satisfazendo*

$$\begin{cases} \eta_0 > 0 \text{ em } \Omega, \;\; \eta_0 = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \\ |\nabla \eta_0| > 0 \text{ em } \overline{\Omega} \setminus \omega_0. \end{cases}$$

Na prova desse lema (cf. [9],pp.20-21) fica claro que a função η_0 pode ser escolhida com um número finito de pontos críticos.

Observação 4.2 *O Lema 4.1.1 estabelece a existência de funções η_1 e η_2 que coincidem fora de $\widetilde{\mathcal{O}}$ mas que podem ser bem diferentes dentro de $\widetilde{\mathcal{O}}$. Mesmo assim, pode ser visto na sua demonstração que podemos encontrar η_1 e η_2 satisfazendo $\|\eta_1\|_\infty = \|\eta_2\|_\infty$.*

Usando as funções η_1 e η_2, definimos as seguintes funções peso:

$$\sigma_i(x,t) := \frac{e^{4\lambda\|\eta_i\|_\infty} - e^{\lambda(2\|\eta_i\|_\infty + \eta_i(x))}}{t(T-t)}, \;\; \xi_i(x,t) := \frac{e^{\lambda(2\|\eta_i\|_\infty + \eta_i(x))}}{t(T-t)}. \tag{4.5}$$

Por comodidade, introduzimos as seguintes notações:

$$I_m^i(\psi) := s^{m-4}\lambda^{m-3} \iint_Q e^{-2s\sigma_i}(\xi_i)^{m-4}(|\psi_t|^2 + |\Delta\psi|^2)dxdt + L_m^i(\psi),$$

onde

$$L_m^i(\psi) := s^{m-2}\lambda^{m-1} \iint_Q e^{-2s\sigma_i}(\xi_i)^{m-2}|\nabla\psi|^2 dxdt + s^m\lambda^{m+1} \iint_Q e^{-2s\sigma_i}(\xi_i)^m|\psi|^2 dxdt.$$

Agora, consideremos o sistema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + a(x,t)u = f + \sum_{k=1}^{n} \partial_k f_k & \text{em } Q, \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ u(\cdot, T) = u^T & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{4.6}$$

onde $u^T \in L^2(\Omega)$ e $f, f_1, ..., f_n \in L^2(Q)$.

Feito isso, temos as estimativas de Carleman:

Proposição 4.1 *Suponhamos que em (4.6), $f_k = 0$ para todo $k = 1, ..., n$. Então, existe $C = C(\Omega, \mathcal{O}) > 0$ tal que, para cada $s \geq C(T + T^2)$ e cada $\lambda \geq C$, a solução u de (4.6) associada a $u^T \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^2(Q)$ satisfaz:*

$$\begin{aligned} I_m^j(u) \leq C\Bigg(& s^m\lambda^{m+1} \iint_{\omega_j \times (0,T)} e^{-2s\sigma_j}(\xi_j)^m|u|^2 dxdt \\ & + s^{m-3}\lambda^{m-3} \iint_Q e^{-2s\sigma_j}(\xi_j)^{m-3}|f|^2 dxdt\Bigg), j = 1, 2. \end{aligned}$$

Se as funções f_k não são todas nulas, então

Proposição 4.2 *Existe* $C = C(\Omega, \mathcal{O}) > 0$ *tal que, para cada* $s \geq C(T + T^2)$ *e cada* $\lambda \geq C$*, a solução* u *de* (4.6) *associada a* $u^T \in L^2(\Omega), f \in L^2(Q)$ *e* $f_k \in L^2(Q)$ *satisfaz:*

$$L^j_m(u) \leq C\bigg(s^m\lambda^{m+1}\iint_{\omega_j\times(0,T)} e^{-2s\sigma_j}(\xi_j)^m|u|^2dxdt + s^{m-3}\lambda^{m-3}\iint_Q e^{-2s\sigma_j}(\xi_j)^{m-3}|f|^2dxdt$$
$$+ s^{m-1}\lambda^{m-1}\sum_{k=1}^{n}\iint_Q e^{-2s\sigma_j}(\xi_j)^{m-1}|f_k|^2dxdt\bigg), i = 1, 2.$$

Esses resultados são bem conhecidos atualmente. Por exemplo, quando $m = 3$, suas provas podem ser encontradas em [9] e [10], respectivamente.

4.2 Uma Nova Desigualdade de Carleman

Nessa seção, provaremos uma Desigualdade de Carleman adequada para as soluções do sistema (3.23).

Proposição 4.3 *Suponhamos que as hipóteses* (2.12) *e* (2.14) *sejam satisfeitas. Então existe* $C = C(\Omega, \mathcal{O}) > 0$ *tal que, para cada* $s \geq C(T + T^2)$ *e cada* $\lambda \geq C$*, a solução* $(\psi, \gamma^1, \gamma^2)$ *de* (3.23) *associada a* $\psi^T \in L^2(\Omega)$ *satisfaz uma das seguintes relações:*
(I) *Se vale* (4.2)*, então*

$$\begin{aligned} &I^1_0(\gamma^1) + I^2_0(\gamma^2) + s^{-3}\lambda^{-2}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2dxdt \\ &\leq Cs^4\lambda^5\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} (e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^4 + e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^4)|\psi|^2dxdt. \end{aligned} \tag{4.7}$$

(II) *Se vale* (4.3) *para* $(i, j) = (i_0, j_0)$*, com* $(i_0, j_0) = (1, 2)$ *ou* $(i_0, j_0) = (2, 1)$*,então*

$$\begin{aligned} &I^{j_0}_0(\gamma^{j_0}) + I^{i_0}_0(h) + s^{-3}\lambda^{-2}\iint_Q e^{-2s\sigma_{j_0}}(\xi_{j_0})^{-3}|\psi|^2dxdt \\ &\leq Cs^4\lambda^5\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} (e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^4 + e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^4)|\psi|^2dxdt, \end{aligned} \tag{4.8}$$

onde $h := \alpha_1\gamma^1 + \alpha_2\gamma^2$.

Demonstração: *As provas de* (I) *e* (II) *são ligeiramente diferentes, por isso serão apresentadas separadamente. Em toda a demonstração,* C *denotará uma constante positiva suficientemente grande cujo valor pode variar a cada linha.*

Prova de (I)*:*

De (3.23)*, com* $i = 1, 2$*, temos que*

$$\begin{cases} \gamma_t^i - \Delta\gamma^i + a(x,t)\gamma^i = -\dfrac{1}{\mu_i}\psi 1_{\mathcal{O}_i} & em\ Q, \\ \gamma^i = 0 & sobre\ \Sigma, \\ \gamma^i(\cdot,0) = 0 & em\ \Omega. \end{cases}$$

Fazendo a mudança de variável $s = T - t$ *obtemos um sistema equivalente*

$$\begin{cases} \gamma_s^i - \Delta\gamma^i + a(x,s)\gamma^i = -\dfrac{1}{\mu_i}\psi 1_{\mathcal{O}_i} & em\ Q, \\ \gamma^i = 0 & sobre\ \Sigma, \\ \gamma^i(\cdot,T) = 0 & em\ \Omega. \end{cases}$$

Dessa forma, aplicando a Proposição 4.1, com $m = 0$ *e* $j = i$ *à função* $(x,t) \to \gamma^i(x, T-t)$ *resulta que*

$$I_0^i(\gamma^i) \leq C\left(\lambda \iint_{\omega_i\times(0,T)} e^{-2s\sigma_i}|\gamma^i|^2 dxdt + s^{-3}\lambda^{-3}\iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} e^{-2s\sigma_i}(\xi_i)^{-3}|\psi|^2 dxdt\right). \quad (4.9)$$

Agora, seja $\theta_3 \in C^2(\overline{\Omega})$ *definida por:*

$$\begin{cases} \theta_3(x) = 0, & se\ x \in \widetilde{\mathcal{O}}, \\ \theta_3(x) = 1, & se\ x \in \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}. \end{cases}$$

De (3.23) *temos que*

$$\begin{cases} -\psi_t - \Delta\psi + a(x,t)\psi = \sum\limits_{j=1}^{2} \alpha_j \gamma^j 1_{\mathcal{O}_{j,d}} & em\ Q, \\ \psi = 0 & sobre\ \Sigma, \\ \psi(x,T) = \psi^T & em\ \Omega. \end{cases}$$

Multiplicando o sistema acima por θ_3 *obtemos*

$$\begin{cases} -\theta_3\psi_t - \theta_3\Delta\psi + a(x,t)\theta_3\psi = \sum\limits_{j=1}^{2} \alpha_j \theta_3\gamma^j 1_{\mathcal{O}_{j,d}} & em\ Q, \\ \theta_3\psi = 0 & sobre\ \Sigma, \\ (\theta\psi)(x,T) = \theta\psi^T & em\ \Omega. \end{cases}$$

Substituindo a relações $\theta_3\psi_t = (\theta_3\psi)_t$ *e* $-\theta_3\Delta\psi = -\Delta(\theta_3\psi) + 2\nabla(\psi\nabla\theta_3) - \Delta\theta_3\psi$ *no sistema acima encontramos*

$$\begin{cases} -(\theta_3\psi)_t - \Delta(\theta_3\psi) + a(x,t)(\theta_3\psi) = \sum\limits_{j=1}^{2} \alpha_j \theta_3\gamma^j 1_{\mathcal{O}_{j,d}} - 2\nabla(\psi\nabla\theta_3) + \Delta\theta_3\psi & em\ Q, \\ \theta_3\psi = 0 & sobre\ \Sigma, \\ (\theta_3\psi)(x,T) = \theta_3\psi^T & em\ \Omega. \end{cases}$$

Aplicando a Proposição 4.2 à função $\theta_3\psi$, *com* $m=-3,\ j=1,\ f=\sum\limits_{j=1}^{2}\alpha_j\theta_3\gamma^j 1_{\mathcal{O}_{j,d}}+\Delta\theta_3\psi$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\partial_k f_k=-2\nabla(\psi\nabla\theta_3)$ *e observando que,* $\theta_3\psi=0$ *em* $\omega_1\times(0,T)$ *segue que*

$$
\begin{aligned}
L^1_{-3}(\theta_3\psi)\le C\Bigg(&s^{-6}\lambda^{-6}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}\Big|\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\theta_3\gamma^j 1_{\mathcal{O}_{j,d}}+\Delta\theta_3\psi\Big|^2dxdt\\
&+s^{-4}\lambda^{-4}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-4}|2\nabla\theta_3\psi|^2dxdt\Bigg).
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
L^1_{-3}(\theta_3\psi)\le C\Bigg(&s^{-3}\lambda^{-2}\iint_{\omega_1\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2dxdt\\
&+s^{-6}\lambda^{-6}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}\Big|\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\theta_3\gamma^j 1_{\mathcal{O}_{j,d}}+\Delta\theta_3\psi\Big|^2dxdt\\
&+s^{-4}\lambda^{-4}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-4}|2\nabla\theta_3\psi|^2dxdt\Bigg).
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Usando a desigualdade $(a+b)^2\le 2(|a|^2+|b|^2)$, *com* $a,b\in\mathbb{R}$, *na segunda parcela do lado direito da desigualdade* (4.10), *com* $a=\sum\limits_{j=1}^{2}\alpha_j\theta_3\gamma^j 1_{\mathcal{O}_{j,d}}$ *e* $b=\Delta\theta_3\psi$ *obtemos*

$$
\begin{aligned}
&s^{-6}\lambda^{-6}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}\Big|\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\theta_3\gamma^j 1_{\mathcal{O}_{i,d}}+\Delta\theta_3\psi\Big|^2dxdt\\
&\qquad\le 2s^{-6}\lambda^{-6}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}\Big|\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\theta_3\gamma^j 1_{\mathcal{O}_{i,d}}\Big|^2dxdt\\
&\qquad\quad+2s^{-6}\lambda^{-6}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\Delta\theta_3\psi|^2dxdt.
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Analogamente, olhando para a primeira parcela do lado direito da desigualdade acima, *agora com* $a = \alpha_1\theta_3\gamma^1 1_{\mathcal{O}_{1,d}}$ *e* $b = \alpha_2\theta_3\gamma^2 1_{\mathcal{O}_{2,d}}$ *temos*

$$\begin{aligned} 2s^{-6}\lambda^{-6}\iint_Q & e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\theta_3\gamma^j 1_{\mathcal{O}_{i,d}}|^2 dxdt \\ &\le \Bigg(4s^{-6}\lambda^{-6}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\alpha_1\theta_3\gamma^1 1_{\mathcal{O}_{1,d}}|^2 dxdt \\ &\quad + 4s^{-6}\lambda^{-6}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\alpha_2\theta_3\gamma^2 1_{\mathcal{O}_{i,d}}|^2 dxdt\Bigg) \\ &= \Bigg(4\alpha_1^2 s^{-6}\lambda^{-6}\iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\theta_3\gamma^1|^2 dxdt \\ &\quad + 4\alpha_2^2 s^{-6}\lambda^{-6}\iint_{\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\theta_3\gamma^2|^2 dxdt\Bigg) \\ &\le C\Bigg(s^{-6}\lambda^{-6}\iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\gamma^1|^2 dxdt \\ &\quad + s^{-6}\lambda^{-6}\iint_{\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\theta_3\gamma^2|^2 dxdt\Bigg). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Por outro lado, como $\theta_3 \in C^2(\Omega)$ *e* $\xi_1 \ge 1$ *para* λ *suficientemente grande, existe uma constante* $K_1 > 0$ *tal que* $0 \le |\Delta\theta_3| \le K_1$ *e* $0 \le (\xi_1)^{-2} \le 1$. *Assim*

$$\begin{aligned} 2s^{-6}\lambda^{-6}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\Delta\theta_3\psi|^2 dxdt &\le 2K_1 s^{-6}\lambda^{-6}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-4}|\psi|^2 dxdt \\ &\le Cs^{-4}\lambda^{-4}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-4}|\psi|^2 dxdt. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Substituindo (4.12) *e* (4.13) *em* (4.11) *obtemos*

$$\begin{aligned} s^{-6}\lambda^{-6}\iint_Q & e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\theta_3\gamma^j 1_{\mathcal{O}_{i,d}} + \Delta\theta_3\psi|^2 dxdt \\ &\le C\Bigg(s^{-6}\lambda^{-6}\iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\gamma^1|^2 dxdt \\ &\quad + s^{-6}\lambda^{-6}\iint_{\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\theta_3\gamma^2|^2 dxdt \\ &\quad + s^{-4}\lambda^{-4}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-4}|\psi|^2 dxdt\Bigg). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Substituindo (4.14) *em* (4.10) *resulta que*

$$
\begin{aligned}
L^1_{-3}(\theta_3\psi) \leq C\bigg(& s^{-3}\lambda^{-2}\iint_{\omega_1\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt \\
& + s^{-6}\lambda^{-6}\iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\gamma^1|^2 dxdt \\
& + s^{-6}\lambda^{-6}\iint_{\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\theta_3\gamma^2|^2 dxdt \\
& + s^{-4}\lambda^{-4}\iint_{Q} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-4}|\psi|^2 dxdt \\
& + s^{-4}\lambda^{-4}\iint_{Q} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-4}|2\nabla\theta_3\psi|^2 dxdt\bigg).
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

Novamente, como $\theta_3 \in C^2(\overline{\Omega})$*, existe* $K_3 > 0$ *tal que* $0 \leq |\nabla\theta_3| \leq K_3$*. Assim, na quinta parcela do lado direito da desigualdade acima temos*

$$
\begin{aligned}
s^{-4}\lambda^{-4}\iint_{Q} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-4}|2\nabla\theta_3\psi|^2 dxdt &\leq 4s^{-4}\lambda^{-4}K_3^2\iint_{Q} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-4}|\psi|^2 dxdt \\
&\leq Cs^{-4}\lambda^{-4}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-4}|\psi|^2 dxdt.
\end{aligned}
$$

Finalmente, substituindo a relação acima em (4.15) *obtemos*

$$
\begin{aligned}
L^1_{-3}(\theta_3\psi) \leq C\bigg(& s^{-3}\lambda^{-2}\iint_{\omega_1\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt \\
& + s^{-6}\lambda^{-6}\iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\gamma^1|^2 dxdt \\
& + s^{-6}\lambda^{-6}\iint_{\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\theta_3\gamma^2|^2 dxdt \\
& + s^{-4}\lambda^{-4}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-4}|\psi|^2 dxdt\bigg).
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

Agora, utilizando o fato de que $\theta_3(x) = 1$ *em* $\Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$, *deduzimos que:*

$$\begin{aligned}
L^1_{-3}(\theta_3\psi) &= \Bigg(s^{-5}\lambda^{-4}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-5}|\nabla(\theta_3\psi)|^2 dxdt \\
&\quad + s^{-3}\lambda^{-2}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\theta_3\psi|^2 dxdt\Bigg) \\
&\geq \left(s^{-3}\lambda^{-2}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\theta_3\psi|^2 dxdt\right) \\
&= \Bigg(s^{-3}\lambda^{-2}\iint_{(\Omega\setminus\overline{\mathcal{O}})\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt \\
&\quad + s^{-3}\lambda^{-2}\iint_{(\overline{\mathcal{O}}\setminus\widetilde{\mathcal{O}})\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\theta_3\psi|^2 dxdt\Bigg) \\
&\geq \left(s^{-3}\lambda^{-2}\iint_{(\Omega\setminus\overline{\mathcal{O}})\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt\right) \\
&= \Bigg(s^{-3}\lambda^{-2}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt \\
&\quad - s^{-3}\lambda^{-2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt\Bigg),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$L^1_{-3}(\theta_3\psi) \geq s^{-3}\lambda^{-2}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt - s^{-3}\lambda^{-2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt.$$

Daí,

$$s^{-3}\lambda^{-2}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt \leq L^1_{-3}(\theta_3\psi) + s^{-3}\lambda^{-2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt.$$

Substituindo (4.16) *na expressão acima e observando que* $\omega_1 \times (0,T) \subset \mathcal{O} \times (0,T)$, *obtemos*

$$\begin{aligned}
&s^{-3}\lambda^{-2}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt \\
&\quad\leq C\Bigg(s^{-3}\lambda^{-2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt \\
&\qquad + s^{-6}\lambda^{-6}\iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\gamma^1|^2 dxdt \\
&\qquad + s^{-6}\lambda^{-6}\iint_{\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\theta_3\gamma^2|^2 dxdt \\
&\qquad + s^{-4}\lambda^{-4}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-4}|\psi|^2 dxdt\Bigg).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

De (4.9), *vale*

$$I^1_0(\gamma^1) \leq C\left(\lambda\iint_{\omega_1\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}|\gamma^1|^2 dxdt + s^{-3}\lambda^{-3}\iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt\right),$$

e

$$I^2_0(\gamma^2) \leq C\left(\lambda\iint_{\omega_2\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}|\gamma^2|^2 dxdt + s^{-3}\lambda^{-3}\iint_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^{-3}|\psi|^2 dxdt\right).$$

Somando as três últimas desigualdades obtemos

$$\begin{aligned}
&I_0^1(\gamma^1) + I_0^2(\gamma^2) + s^{-3}\lambda^{-2}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt \\
&\leq C\bigg(\lambda\iint_{\omega_1\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}|\gamma^1|^2 dxdt \\
&\quad + s^{-6}\lambda^{-6}\iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\gamma^1|^2 dxdt \\
&\quad + \lambda\iint_{\omega_2\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}|\gamma^2|^2 dxdt \\
&\quad + s^{-6}\lambda^{-6}\iint_{\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\theta_3\gamma^2|^2 dxdt \\
&\quad + s^{-3}\lambda^{-3}\iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt \\
&\quad + s^{-3}\lambda^{-3}\iint_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^{-3}|\psi|^2 dxdt \\
&\quad + s^{-3}\lambda^{-2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt \\
&\quad + s^{-4}\lambda^{-4}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-4}|\psi|^2 dxdt\bigg)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

É fácil ver que o último termo do lado direito da relação acima é absorvido pelo lado esquerdo. Agora, olhando para o segundo e quinto termo do lado direito, lembrando que $\xi_1 \geq 1$ *para* λ *suficientemente grande e pelo fato de* $s \geq CT$ *e* $\lambda \geq C$ *temos*

$$\begin{aligned}
&s^{-6}\lambda^{-6}\iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\gamma^1|^2 dxdt + s^{-3}\lambda^{-3}\iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt \\
&\leq s^{-6}\lambda^{-6}\iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}|\gamma^1|^2 dxdt + s^{-3}\lambda^{-3}\iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt \\
&\leq \lambda\iint_Q e^{-2s\sigma_1}|\gamma^1|^2 dxdt + s^{-3}\lambda^{-2}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt \\
&\leq \epsilon_1\bigg(I_0^1(\gamma^1) + s^{-3}\lambda^{-2}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt\bigg),
\end{aligned} \tag{4.19}$$

onde $0 < \epsilon_1 < 1$.

Agora, pelo Lema 4.1.1 temos que $\eta_1 = \eta_2$ *em* $\Omega \setminus \widetilde{\mathcal{O}}$. *Por outro lado, da definição de* $\theta_3, (supp(\theta_3) \cap \mathcal{O}_{2,d}) \subset \Omega \setminus \widetilde{\mathcal{O}}$. *Daí* $\eta_1 = \eta_2$ *em* $supp(\theta_3) \cap \mathcal{O}_{2,d}$, *o que implica* $\xi_1 = \xi_2$ *e*

$\sigma_1 = \sigma_2$ em supp$(\theta_3) \cap \mathcal{O}_{2,d}$. Assim, o quarto termo do lado direito de (4.18) *nos leva a*

$$\begin{aligned}
&s^{-6}\lambda^{-6} \iint_{\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\theta_3\gamma^2|^2 dxdt \\
&\quad = s^{-6}\lambda^{-6} \iint_{\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^{-6}|\theta_3\gamma^2|^2 dxdt \\
&\quad \leq s^{-6}\lambda^{-6} \iint_{Q} e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^{-6}|\gamma^2|^2 dxdt \\
&\quad \leq \lambda \iint_{Q} e^{-2s\sigma_2}|\gamma^2|^2 dxdt \\
&\quad \leq \epsilon_2(I_0^2(\gamma^2)),
\end{aligned} \tag{4.20}$$

onde $0 < \epsilon_2 < 1$.

Do fato de $\eta_1 = \eta_2$ em $\Omega \setminus \mathcal{O}$ e como $\lambda \geq C$, podemos estimar o sexto termo do lado direito de (4.18) *da seguinte forma*

$$\begin{aligned}
&s^{-3}\lambda^{-3} \iint_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^{-3}|\psi|^2 dxdt \\
&\quad = s^{-3}\lambda^{-3} \iint_{(\mathcal{O}_2\cap\mathcal{O})\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^{-3}|\psi|^2 dxdt \\
&\qquad + s^{-3}\lambda^{-3} \iint_{(\mathcal{O}_2\setminus\mathcal{O})\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^{-3}|\psi|^2 dxdt \\
&\quad = s^{-3}\lambda^{-3} \iint_{(\mathcal{O}_2\cap\mathcal{O})\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^{-3}|\psi|^2 dxdt \\
&\qquad + s^{-3}\lambda^{-3} \iint_{(\mathcal{O}_2\setminus\mathcal{O})\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt \\
&\quad \leq s^{-3}\lambda^{-3} \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^{-3}|\psi|^2 dxdt \\
&\qquad + \lambda^{-1}s^{-3}\lambda^{-2} \iint_{Q} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt \\
&\quad = s^{-3}\lambda^{-3} \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^{-3}|\psi|^2 dxdt \\
&\qquad + \epsilon_3\left(s^{-3}\lambda^{-2} \iint_{Q} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt\right),
\end{aligned} \tag{4.21}$$

onde $0 < \epsilon_3 < 1$.

Dessa forma, descartando os termos absorvidos pelo lado esquerdo de (4.18)*, restaram* *apenas*

$$
\begin{aligned}
I_0^1(\gamma^1) + I_0^2(\gamma^2) + s^{-3}\lambda^{-2} \iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt& \\
\leq C\bigg(\lambda \iint_{\omega_1\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}|\gamma^1|^2 dxdt& \\
+ \lambda \iint_{\omega_2\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}|\gamma^2|^2 dxdt& \\
+ s^{-3}\lambda^{-3} \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^{-3}|\psi|^2 dxdt& \\
+ s^{-3}\lambda^{-2} \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt\bigg).&
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

Da definição de ξ_1, ξ_2, para λ suficientemente grande, temos $1 \leq \xi_1, \xi_2$, assim

$$
\begin{aligned}
s^{-3}\lambda^{-2} \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} (e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3} + e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^{-3})|\psi|^2 dxdt& \\
\leq s^4\lambda^5 \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} (e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{4} + e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^{4})|\psi|^2 dxdt.&
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

Agora, estimaremos o primeiro e segundo termo do lado direito de (4.22). *Para o primeiro termo, da hipótese* (4.2), *podemos obter $\widetilde{\omega}_1$ aberto tal que $\omega_1 \subset\subset \widetilde{\omega}_1 \subset\subset \mathcal{O}_{1,d} \cap \widetilde{\mathcal{O}}$, com $\widetilde{\omega}_1 \cap \mathcal{O}_{2,d} = \emptyset$ e uma função $\theta_1 \in C_0^2(\widetilde{\omega}_1)$ tal que $\theta_1(x) = 1$ em ω_1 e $0 \leq \theta_1 \leq 1$. Logo, multiplicando a primeira equação de* (3.23) *por $\theta_1 e^{-2s\sigma_1}\gamma^1$ e integrando em Q temos*

$$
\iint_Q \Big(-\psi_t - \Delta\psi + a(x,t)\psi\Big)\theta_1 e^{-2s\sigma_1}\gamma^1 dxdt - \iint_Q \Big(\sum_{i=1}^{2} \alpha_i \gamma^i 1_{\mathcal{O}_{i,d}}\Big)\theta_1 e^{-2s\sigma_1}\gamma^1 dxdt = 0.
$$

Por outro lado, como $\lambda > 0$ e $\theta_1 = 1$ em ω_1 e $0 \leq \theta_1 \leq 1$, segue que

$$
\begin{aligned}
\lambda \iint_{\omega_1\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}|\gamma^1|^2 dxdt &\leq \lambda \iint_{\widetilde{\omega}_1\times(0,T)} \theta_1 e^{-2s\sigma_1}|\gamma^1|^2 dxdt \\
&= \frac{\lambda}{\alpha_1} \iint_Q \Big(-\psi_t - \Delta\psi + a(x,t)\psi\Big)\theta_1 e^{-2s\sigma_1}\gamma^1 dxdt \\
&\quad - \frac{\lambda\alpha_2}{\alpha_1} \iint_Q \theta_1 e^{-2s\sigma_1}\gamma^1\gamma^2 1_{\mathcal{O}_{2,d}} dxdt.
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

Observe que supp$(\theta_1) \cap \mathcal{O}_{2,d} = \emptyset$, *e portanto*

$$
-\frac{\lambda\alpha_2}{\alpha_1} \iint_Q \theta_1 e^{-2s\sigma_1}\gamma^1\gamma^2 1_{\mathcal{O}_{2,d}} dxdt = -\frac{\lambda\alpha_2}{\alpha_1} \iint_{\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T)} \theta_1 e^{-2s\sigma_1}\gamma^1\gamma^2 dxdt = 0. \tag{4.25}
$$

Agora,

$$\begin{aligned}
&\iint_Q \Big(-\psi_t - \Delta\psi + a(x,t)\psi\Big)\theta_1 e^{-2s\sigma_1}\gamma^1 dxdt \\
&\quad = -\iint_{\widetilde{\omega}_1\times(0,T)} \theta_1 e^{-2s\sigma_1}\gamma^1\psi_t dxdt - \iint_{\widetilde{\omega}_1\times(0,T)} \theta_1 e^{-2s\sigma_1}\gamma^1\Delta\psi dxdt \\
&\quad\quad + \iint_{\widetilde{\omega}_1\times(0,T)} \theta_1 e^{-2s\sigma_1}\gamma^1 a(x,t)\psi dxdt \\
&\quad = \iint_{\widetilde{\omega}_1\times(0,T)} \partial_t(\theta_1 e^{-2s\sigma_1}\gamma^1)\psi dxdt - \iint_{\widetilde{\omega}_1\times(0,T)} \Delta(\theta_1 e^{-2s\sigma_1}\gamma^1)\psi dxdt \\
&\quad\quad + \iint_{\widetilde{\omega}_1\times(0,T)} a(x,t)\theta_1 e^{-2s\sigma_1}\gamma^1\psi dxdt \\
&\quad = \iint_{\widetilde{\omega}_1\times(0,T)} \Big(\partial_t(\theta_1 e^{-2s\sigma_1}\gamma^1) - \Delta(\theta_1 e^{-2s\sigma_1}\gamma^1) + a(x,t)\theta_1 e^{-2s\sigma_1}\gamma^1\Big)\psi dxdt.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Substituindo

$$\partial_t(\theta_1 e^{-2s\sigma_1}\gamma^1) = \partial_t(\theta_1 e^{-2s\sigma_1})\gamma^1 + \theta_1 e^{-2s\sigma_1}\gamma^1_t$$

e

$$-\Delta(\theta_1 e^{-2s\sigma_1}\gamma^1) = -\Delta(\theta_1 e^{-2s\sigma_1})\gamma^1 - 2\nabla(\theta_1 e^{-2s\sigma_1})\nabla\gamma^1 - \theta_1 e^{-2s\sigma_1}\Delta\gamma^1$$

em (4.26), *obtemos*

$$\begin{aligned}
&\iint_Q \Big(-\psi_t - \Delta\psi + a(x,t)\psi\Big)\theta_1 e^{-2s\sigma_1}\gamma^1 dxdt \\
&\quad = \iint_{\widetilde{\omega}_1\times(0,T)} \Big((\partial_t(\theta_1 e^{-2s\sigma_1}) - \Delta(\theta_1 e^{-2s\sigma_1}))\gamma^1 - 2\nabla(\theta_1 e^{-2s\sigma_1})\nabla\gamma^1\Big)\psi dxdt \\
&\quad\quad - \frac{1}{\mu_1}\iint_{\widetilde{\omega}_1\times(0,T)} \theta_1 e^{-2s\sigma_1}|\psi|^2 1_{\mathcal{O}_1} dxdt,
\end{aligned} \tag{4.27}$$

pois γ^1 *é solução do sistema dado em* (3.23). *Assim, substituindo a relação* (4.27) *e a equação* (4.25) *em* (4.24) *resulta que*

$$\begin{aligned}
&\lambda\iint_{\omega_1\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}|\gamma^1|^2 dxdt \\
&\quad \le \frac{\lambda}{\alpha_1}\iint_{\widetilde{\omega}_1\times(0,T)} \Big((\partial_t(\theta_1 e^{-2s\sigma_1}) - \Delta(\theta_1 e^{-2s\sigma_1}))\gamma^1 - 2\nabla(\theta_1 e^{-2s\sigma_1})\nabla\gamma^1\Big)\psi dxdt \\
&\quad\quad - \frac{\lambda}{\alpha_1\mu}\iint_{\widetilde{\omega}_1\times(0,T)} \theta_1 e^{-2s\sigma_1}|\psi|^2 1_{\mathcal{O}_1} dxdt.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Admitiremos, por um instante, que as seguintes estimativas são verdadeiras:

$$|\partial_t(\theta_1 e^{-2s\sigma_1})| + |\Delta(\theta_1 e^{-2s\sigma_1})| \le Cs^2\lambda^2(\xi_1)^2 e^{-2s\sigma_1} \;\; e \;\; |\nabla(\theta_1 e^{-2s\sigma_1})| \le Cs\lambda\xi_1 e^{-2s\sigma_1}. \tag{4.29}$$

Por (4.28) *temos*

$$\begin{aligned}
&\lambda\iint_{\omega_1\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}|\gamma^1|^2 dxdt \\
&\quad \le \frac{\lambda}{\alpha_1}\iint_{\widetilde{\omega}_1\times(0,T)} \Big((\partial_t(\theta_1 e^{-2s\sigma_1}) - \Delta(\theta_1 e^{-2s\sigma_1}))\gamma^1 - 2\nabla(\theta_1 e^{-2s\sigma_1})\nabla\gamma^1\Big)\psi dxdt.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Assim, utilizando (4.29) *obtemos de* (4.30)

$$\begin{aligned}
\lambda \iint_{\omega_1\times(0,T)} & e^{-2s\sigma_1}|\gamma^1|^2 dxdt \\
& \leq \frac{\lambda}{\alpha_1}\iint_{\widetilde{\omega}_1\times(0,T)} \Big(Cs^2\lambda^2(\xi_1)^2 e^{-2s\sigma_1}|\gamma^1| + 2Cs\lambda\xi_1 e^{-2s\sigma_1}|\nabla\gamma^1|\Big)|\psi| dxdt \\
& = \frac{Cs\lambda^2}{\alpha_1}\iint_{\widetilde{\omega}_1\times(0,T)} \xi_1 e^{-2s\sigma_1}(s\lambda\xi_1|\gamma^1|)|\psi| dxdt \\
& \quad + \frac{2Cs\lambda^2}{\alpha_1}\iint_{\widetilde{\omega}_1\times(0,T)} \xi_1 e^{-2s\sigma_1}(|\nabla\gamma^1|)|\psi| dxdt.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Agora, vejamos cada uma das integrais de (4.31) *separadamente:*

$$\begin{aligned}
& \frac{Cs\lambda^2}{\alpha_1}\iint_{\widetilde{\omega}_1\times(0,T)} \xi_1 e^{-2s\sigma_1}(s\lambda\xi_1|\gamma^1|)|\psi| dxdt \\
& \quad = \frac{\lambda}{\alpha_1}\iint_{\widetilde{\omega}_1\times(0,T)} (C^{-1}e^{-s\sigma_1}|\gamma^1|)(C^2\lambda^2 s^2\xi_1^2 e^{-s\sigma_1}|\psi|) dxdt \\
& \quad \leq \frac{\lambda}{2C^2\alpha_1}\iint_{\widetilde{\omega}_1\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}|\gamma^1|^2 dxdt + \frac{C^4\lambda}{2\alpha_1}\iint_{\widetilde{\omega}_1\times(0,T)} \lambda^4 s^4(\xi_1)^4 e^{-2s\sigma_1}|\psi|^2 dxdt \\
& \quad \leq \frac{1}{2C^2\alpha_1}\lambda\iint_Q e^{-2s\sigma_1}|\gamma^1|^2 dxdt + C^4\lambda^5 s^4\iint_Q (\xi_1)^4 e^{-2s\sigma_1}|\psi|^2 dxdt.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
& \frac{2Cs\lambda^2}{\alpha_1}\iint_{\widetilde{\omega}_1\times(0,T)} \xi_1 e^{-2s\sigma_1}|\nabla\gamma^1||\psi| dxdt \\
& \qquad = \frac{2}{\alpha_1}\iint_{\widetilde{\omega}_1\times(0,T)} (C^{-1}s^{-1}\lambda^{-\frac{1}{2}}e^{-s\sigma_1}\xi_1^{-1}|\nabla\gamma^1|)(C^2\xi_1^2 s^2\lambda^{\frac{5}{2}}e^{-s\sigma_1}|\psi|) dxdt \\
& \qquad \leq \frac{1}{\alpha_1}\iint_{\widetilde{\omega}_1\times(0,T)} \frac{s^{-2}}{C^2}\lambda^{-1}e^{-2s\sigma_1}\xi_1^{-2}|\nabla\gamma^1|^2 dxdt \\
& \qquad \quad + \frac{1}{\alpha_1}\iint_{\widetilde{\omega}_1\times(0,T)} C^4 s^4\lambda^5\xi_1^4 e^{-2s\sigma_1}|\psi|^2 dxdt \\
& \qquad \leq \frac{1}{C^2\alpha_1}s^{-2}\lambda^{-1}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-2}|\nabla\gamma^1|^2 dxdt \\
& \qquad \quad + C^4 s^4\lambda^5\iint_Q (\xi_1)^4 e^{-2s\sigma_1}|\psi|^2 dxdt.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Somando (4.32) *e* (4.33) *em* (4.31), *e tomando* $\epsilon_4 = 1/(2C^2\alpha_1)$ *e lembrando a definição de* $L_0^1(\gamma^1)$, *resulta que*

$$\begin{aligned}
\lambda\iint_{\omega_1\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}|\gamma^1|^2 dxdt & \leq \epsilon_4 L_0^1(\gamma^1) + C^4 s^4\lambda^5\iint_Q (\xi_1)^4 e^{-2s\sigma_1}|\psi|^2 dxdt \\
& \leq \epsilon_4 I_0^1(\gamma^1) + C^4 s^4\lambda^5\iint_Q \xi_1^4 e^{-2s\sigma_1}|\psi|^2 dxdt.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

De forma análoga é possível mostrarmos que:

$$\lambda\iint_{\omega_2\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}|\gamma^2|^2 dxdt \leq \varepsilon I_0^2(\gamma^2) + C^4 s^4\lambda^5\iint_Q (\xi_2)^4 e^{-2s\sigma_2}|\psi|^2 dxdt. \tag{4.35}$$

Substituindo (4.23), (4.34) e (4.35) em (4.22), descartando os termos absorvidos pelo lado direito de(4.22), concluímos que

$$\begin{aligned} I_0^1(\gamma^1) + I_0^2(\gamma^2) + s^{-3}\lambda^{-2} \iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt \\ \leq Cs^4\lambda^5 \iint_{\tilde{\omega}_1\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^4 dxdt + Cs^4\lambda^5 \iint_{\tilde{\omega}_2\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^4|\psi|^2 dxdt \\ \leq Cs^4\lambda^5 \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} (e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^4 + e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^4)|\psi|^2 dxdt. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Para completarmos a demostração de (I) resta apenas provar as estimativas dadas em (4.29). É isso que faremos agora.

Um cálculo direto nos mostra que

$$\partial_t(\theta_1 e^{-2s\sigma_1}) = 2s\theta_1 e^{-2s\sigma_1}\frac{T-2t}{t(T-t)}\sigma_1,$$

e como $\sigma_1 = \dfrac{e^{4\lambda\|\eta_1\|_\infty}}{t(T-t)} - \xi_1$, *temos*

$$\begin{aligned} |\partial_t(\theta_1 e^{-2s\sigma_1})| &= 2se^{-2s\sigma_1}|\theta_1|\frac{|T-2t|}{t(T-t)}\sigma_1 = 2se^{-2s\sigma_1}|\theta_1|\frac{|T-2t|}{t(T-t)}\left(\frac{e^{4\lambda\|\eta_1\|_\infty}}{t(T-t)} - \xi_1\right) \\ &\leq 2se^{-2s\sigma_1}|\theta_1||T-2t|\left(\frac{e^{2\lambda\|\eta_1\|_\infty}}{t(T-t)}\right)^2 \leq 2se^{-2s\sigma_1}|\theta_1||T-2t|\left(\frac{e^{2\lambda\|\eta_1\|_\infty+\eta_1(x)}}{t(T-t)}\right)^2 \\ &\leq 2se^{-2s\sigma_1}|\theta_1||T-2t|\xi_1^2. \end{aligned}$$

É fácil ver que para todo $t \in [0,T]$ *se tem* $0 \leq |T-2t| \leq T$. *Por esse fato e por* $\theta_1 \in C^2(\Omega)$ *temos*

$$|\partial_t(\theta_1 e^{-2s\sigma_1})| \leq Cs^2\lambda^2(\xi_1)^2 e^{-2s\sigma_1}. \tag{4.37}$$

Agora, já que

$$\frac{\partial e^{-2s\sigma_1}}{\partial x_i} = 2s\lambda\frac{\partial\eta_1(x)}{\partial x_i}e^{-2s\sigma_1}, \quad i = 1,2,...,n,$$

e, consequentemente,

$$\nabla(e^{-2s\sigma_1}) = \nabla\eta_1(x)2s\lambda e^{-2s\sigma_1}\xi_1, \tag{4.38}$$

obtemos que

$$\nabla(\theta_1 e^{-2s\sigma_1}) = \nabla\theta_1 e^{-2s\sigma_1} + \theta_1\nabla e^{-2s\sigma_1} = \nabla\theta_1 e^{-2s\sigma_1} + \theta_1\nabla\eta_1(x)2s\lambda e^{-2s\sigma_1}\xi_1.$$

Dessa forma

$$|\nabla(\theta_1 e^{-2s\sigma_1})| \leq |\nabla\theta_1|e^{-2s\sigma_1} + |\theta_1||\nabla\eta_1(x)|2s\lambda e^{-2s\sigma_1}\xi_1.$$

Como $\theta_1, \eta_1 \in C^2(\Omega)$, *temos* $|\nabla\theta_1(x)| \leq K_1, |\nabla\eta_1(x)| \leq K_2$. *Daí*

$$|\nabla(\theta_1 e^{-2s\sigma_1})| \leq Cs\lambda e^{-2s\sigma_1}\xi_1. \tag{4.39}$$

Por outro lado,

$$\Delta(\theta_1 e^{-2s\sigma_1}) = \Delta\theta_1 e^{-2s\sigma_1} + 2\nabla\theta_1\nabla e^{-2s\sigma_1} + \theta_1\Delta e^{-2s\sigma_1}.$$

Assim,

$$|\Delta(\theta_1 e^{-2s\sigma_1})| \leq |\Delta\theta_1|e^{-2s\sigma_1} + 2|\nabla\theta_1||\nabla e^{-2s\sigma_1}| + |\theta_1||\Delta e^{-2s\sigma_1}|. \tag{4.40}$$

Como $s \geq C(T+T^2), \lambda \geq C$ *e* $\xi \geq 1$ *temos que*

$$|\Delta\theta_1|e^{-2s\sigma_1} \leq Cs^2\lambda^2(\xi_1)^2 e^{-2s\sigma_1}. \tag{4.41}$$

Agora, usando (4.38), *temos*

$$2|\nabla\theta_1||\nabla e^{-2s\sigma_1}| = 2|\nabla\theta_1||\nabla\eta_1(x)2s\lambda e^{-2s\sigma_1}\xi_1| \leq Cs^2\lambda^2(\xi_1)^2 e^{-2s\sigma_1}. \tag{4.42}$$

Ainda usando (4.38), *vale*

$$\begin{aligned}|\Delta(e^{-2s\sigma_1})| &= |2s\lambda\Delta\eta_1(x)\xi_1 e^{-2s\sigma_1} + 2s\lambda\nabla\eta_1(x)\nabla\xi_1 e^{-2s\sigma_1} + 4s^2\lambda^2\nabla\eta(x)^2\xi_1^2 e^{-2s\sigma_1}| \\ &\leq Cs^2\lambda^2\xi_1^2 e^{-2s\sigma_1}.\end{aligned} \tag{4.43}$$

Logo, substituindo as estimativas (4.41),(4.42) *e* (4.43) *em* (4.40) *obtemos*

$$|\Delta(\theta_1 e^{-2s\sigma_1})| \leq Cs^2\lambda^2\xi_1^2 e^{-2s\sigma_1}. \tag{4.44}$$

De (4.37), (4.39) *e* (4.44) *concluímos que*

$$|\partial_t(\theta_1 e^{-2s\sigma_1})| + |\Delta(\theta_1 e^{-2s\sigma_1})| \leq Cs^2\lambda^2(\xi_1)^2 e^{-2s\sigma_1} \ \ e \ \ |\nabla\theta_1 e^{-2s\sigma_1}| \leq Cs\lambda\xi_1 e^{-2s\sigma_1}.$$

Isso finaliza a prova de (I).

Prova de (II):

*Na prova de **(I)**, afim de absorver o primeiro e o segundo termo do lado direito de* (4.22), *a hipótese* (4.2) *foi crucial. Entretanto, é claro que* (4.2) *não abrange todos os caso onde* (2.14) *é verdadeiro. Então procederemos de maneira ligeiramente diferente.*

Mostraremos o caso $\omega_2 \subset \mathcal{O}_{1,d}$ *e* $\omega_1 \cap \mathcal{O}_{2,d} = \emptyset$. *Por* (3.23)

$$\begin{cases} -\alpha_i\gamma^i_t - \Delta\alpha_i\gamma^i + a(x,t)\alpha_i\gamma^i = & -\dfrac{\alpha_i}{\mu}\psi 1_{\mathcal{O}_i} \qquad \textit{em } Q, \\ \alpha_i\gamma^i = 0 & \qquad\qquad \textit{sobre } \Sigma, \\ \alpha_i\gamma^i(\cdot,0) = 0 & \qquad\qquad \textit{em } \Omega. \end{cases} \tag{4.45}$$

Fazendo a mudança de variável $s = T - t$ e lembrando que $h = \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2$ temos

$$\begin{cases} -h_s - \Delta h + a(x,s)h = & -\dfrac{1}{\mu}\psi(\alpha_1 1_{\mathcal{O}_1} + \alpha_2 1_{\mathcal{O}_2}) \quad \textit{em } Q, \\ h = 0 & \qquad\qquad \textit{sobre } \Sigma, \\ h(\cdot,T) = 0 & \qquad\qquad \textit{em } \Omega. \end{cases}$$

Aplicando a Proposição 4.1 à função $(x,s) \to h(x,s)$, com $m = 0, j = 2, f = -\dfrac{1}{\mu}\psi(\alpha_1 1_{\mathcal{O}_1} + \alpha_2 1_{\mathcal{O}_2})$ obtemos

$$\begin{aligned} I^2_0(h) &\le C\Big(\lambda \iint_{\omega_2\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}|h|^2 dxdt \\ &\quad + s^{-3}\lambda^{-3} \iint_Q e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^{-3}\frac{1}{\mu^2}|\psi|^2|\alpha_1 1_{\mathcal{O}_1} + \alpha_2 1_{\mathcal{O}_2}|^2 dxdt\Big) \\ &\le C\Big(\lambda \iint_{\omega_2\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}|h|^2 dxdt \\ &\quad + \frac{1}{\mu^2}s^{-3}\lambda^{-3} \iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^{-3}|\psi|^2(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2) dxdt \\ &\quad + \frac{1}{\mu^2}s^{-3}\lambda^{-3} \iint_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^{-3}|\psi|^2(\alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_2) dxdt\Big) \\ &\le C\Big(\lambda \iint_{\omega_2\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}|h|^2 dxdt \\ &\quad + s^{-3}\lambda^{-3} \sum_{k=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_k\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^{-3}|\psi|^2 dxdt\Big). \end{aligned} \tag{4.46}$$

Por (4.9) temos, para $i = 1$

$$I^1_0(\gamma^1) \le C_2\left(\lambda \iint_{\omega_1\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}|\gamma^1|^2 dxdt + s^{-3}\lambda^{-3} \iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt\right). \tag{4.47}$$

Mais ainda, por (4.17) *temos*

$$
\begin{aligned}
& s^{-3}\lambda^{-2}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2dxdt \\
& \quad \leq C\Big(s^{-3}\lambda^{-2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2dxdt \\
& \qquad + s^{-6}\lambda^{-6}\iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\gamma^1|^2dxdt \\
& \qquad + s^{-6}\lambda^{-6}\iint_{\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\theta_3\gamma^2|^2dxdt \\
& \qquad + s^{-4}\lambda^{-4}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-4}|\psi|^2dxdt\Big).
\end{aligned} \tag{4.48}
$$

Somando (4.46), (4.47) *e* (4.48) *obtemos*

$$
\begin{aligned}
& I_0^2(h) + I_0^1(\gamma^1) + s^{-3}\lambda^{-2}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2dxdt \\
& \quad \leq C\Big(\lambda\iint_{\omega_1\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}|\gamma^1|^2dxdt \\
& \qquad + s^{-6}\lambda^{-6}\iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\gamma^1|^2dxdt \\
& \qquad + \lambda\iint_{\omega_2\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}|h|^2dxdt \\
& \qquad + s^{-6}\lambda^{-6}\iint_{\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\theta_3\gamma^2|^2dxdt \\
& \qquad + s^{-3}\lambda^{-3}\iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2dxdt \\
& \qquad + s^{-3}\lambda^{-3}\sum_{k=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_k\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^{-3}|\psi|^2dxdt \\
& \qquad + s^{-3}\lambda^{-2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2dxdt\Big),
\end{aligned} \tag{4.49}
$$

onde o termo

$$s^{-4}\lambda^{-4}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-4}|\psi|^2dxdt$$

foi absorvido por

$$s^{-3}\lambda^{-2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-4}|\psi|^2dxdt.$$

Já que estamos provando o caso $(i,j) = (2,1)$, *da hipótese* (4.3) *temos* $\omega_2 \subset \mathcal{O}_{1,d}$ *e* $\omega_1 \cap \mathcal{O}_{2,d} = \emptyset$. *Daí, como* $\omega_1 \subset \mathcal{O}_{1,d}$, *por* (4.1) *podemos obter* $\tilde{\omega}_1$ *aberto tal que* $\omega_1 \subset\subset \tilde{\omega}_1 \subset\subset \mathcal{O}_{1,d} \cap \widetilde{\mathcal{O}}$, *com* $\tilde{\omega}_1 \cap \mathcal{O}_{2,d} = \emptyset$. *Com isso, podemos estimar o primeiro* *termo do lado direito de (4.49) por (4.34), assim*

$$\begin{aligned}\lambda \iint_{\omega_1\times(0,T)} & e^{-2s\sigma_1}|\gamma^1|^2 dxdt \\ & \le \epsilon_4 I_0^1(\gamma^1) + Cs^4\lambda^5 \iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} \xi_1^4 e^{-2s\sigma_1}|\psi|^2 dxdt \\ & \le \epsilon_4 I_0^1(\gamma^1) + Cs^4\lambda^5 \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \left(e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^4 + e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^4\right)|\psi|^2 dxdt.\end{aligned} \tag{4.50}$$

Agora, olhando para o segundo e o quinto termo do lado direito de (4.49), a hipótese (4.3) não faz restrições quanto à $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_{1,d}$, então podemos estimar estes termos por (4.19), assim

$$\begin{aligned} s^{-6}\lambda^{-6} & \iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\gamma^1|^2 dxdt + s^{-3}\lambda^{-3}\iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt \\ & \le \epsilon_1\left(I_0^1(\gamma^1) + s^{-3}\lambda^{-2}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt\right).\end{aligned} \tag{4.51}$$

Mais uma vez, considerando o fato de que $\eta_1 = \eta_2$ em $supp(\theta_3)\cap\mathcal{O}_{2,d}$, temos $\xi_1 = \xi_2$ e $\sigma_1 = \sigma_2$. Dessa forma, no quarto termo do lado direito de (4.49), aplicando a desigualdade $(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2, a, b \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} s^{-6}\lambda^{-6} & \iint_{\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\theta_3\gamma^2|^2 dxdt \\ & \le \frac{1}{\alpha_2^2}s^{-6}\lambda^{-6}\iint_{\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\theta_3 h - \theta_3\alpha_1\gamma^1|^2 dxdt \\ & \le \Bigg(\frac{2}{\alpha_2^2}s^{-6}\lambda^{-6}\iint_{\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\theta_3 h|^2 dxdt \\ & \qquad + \frac{2\alpha_1^2}{\alpha_2^2}s^{-6}\lambda^{-6}\iint_{\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\theta_3\gamma^1|^2 dxdt\Bigg) \\ & \le \epsilon_5\left(\lambda\iint_Q e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^{-6}|h|^2 dxdt + \lambda\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-6}|\gamma^1|^2 dxdt\right) \\ & \le \epsilon_5\left(I_0^2(h) + I_0^1(\gamma^1)\right),\end{aligned} \tag{4.52}$$

onde $0 < \epsilon_5 < 1$.

Agora, como $\eta_1 = \eta_2$ em $\Omega\setminus\mathcal{O}$, por (4.21) obtemos

$$\begin{aligned} s^{-3}\lambda^{-3}\iint_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^{-3}|\psi|^2 dxdt & \le s^{-3}\lambda^{-3}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^{-3}|\psi|^2 dxdt \\ & \quad + \epsilon_3\left(s^{-3}\lambda^{-2}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt\right).\end{aligned}$$

Mais ainda

$$\begin{aligned} s^{-3}\lambda^{-3}\iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^{-3}|\psi|^2 dxdt & \le s^{-3}\lambda^{-3}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^{-3}|\psi|^2 dxdt \\ & \quad + \lambda^{-1}\left(s^{-3}\lambda^{-2}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt\right).\end{aligned}$$

Dessa forma

$$\begin{aligned}
&s^{-3}\lambda^{-3}\sum_{k=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_k\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^{-3}|\psi|^2dxdt\\
&\quad\le 2s^{-3}\lambda^{-3}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^{-3}|\psi|^2dxdt+\epsilon s^{-3}\lambda^{-2}\iint_{Q} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2dxdt.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como $s\ge C(T+T^2)$ e $\lambda\ge C$, é evidente que

$$\begin{aligned}
&2s^{-3}\lambda^{-3}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^{-3}|\psi|^2dxdt\\
&\quad\le s^4\lambda^5\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)}\left(e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^4+e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^4\right)|\psi|^2dxdt.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
&s^{-3}\lambda^{-3}\sum_{k=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_k\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^{-3}|\psi|^2dxdt\\
&\quad\le \epsilon s^{-3}\lambda^{-2}\iint_{Q} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2dxdt\\
&\qquad+s^4\lambda^5\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)}\left(e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^4+e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^4\right)|\psi|^2dxdt.
\end{aligned}\tag{4.53}$$

Lembrando que estamos supondo $\omega_2\subset\mathcal{O}_{1,d}$ e $\omega_1\cap\mathcal{O}_{2,d}=\emptyset$, e por definição temos $\omega_2\subset\subset\mathcal{O}_{2,d}\cap\widetilde{\mathcal{O}}$, podemos obter um aberto conexo não vazio $\tilde\omega_2$ satisfazendo $\omega_2\subset\subset\tilde\omega_2\subset\subset\mathcal{O}_{2,d}\cap\widetilde{\mathcal{O}}$ e uma função $\theta_2\in C_0^2(\tilde\omega_2)$ tal que $\theta_2(x)=1$, para todo $x\in\tilde\omega_2$ e $0\le\theta_2\le1$. Usando o fato de que $h=\alpha_1\gamma^1+\alpha_2\gamma^2$ é solução de $-\psi_t+\Delta\psi+a\psi=h$ em $\tilde\omega_2\times(0,T)$ e um procedimento análogo ao que foi feito para obter (4.28) obtemos

$$\begin{aligned}
&\lambda\iint_{\omega_2\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}|h|^2dxdt\\
&\quad\le\lambda\iint_{\tilde\omega_2\times(0,T)}\theta_2e^{-2s\sigma_2}h\Big(-\psi_t-\Delta\psi+a(x,t)\psi\Big)dxdt\\
&\quad=\lambda\iint_{\tilde\omega_2\times(0,T)}\Big((\partial_t(\theta_2e^{-2s\sigma_2})-\Delta(\theta_2e^{-2s\sigma_2}))h-2\nabla(\theta_2e^{-2s\sigma_2})\nabla h\Big)\psi dxdt\\
&\qquad-\lambda\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{\mu}\iint_{\tilde\omega_2\times(0,T)}\theta_2e^{-2s\sigma_2}|\psi|^2 1_{\mathcal{O}_k}dxdt.
\end{aligned}\tag{4.54}$$

substituindo

$$|\partial_t(\theta_2e^{-2s\sigma_2})|+|\Delta(\theta_2e^{-2s\sigma_2})|\le Cs^2\lambda^2(\xi_2)^2e^{-2s\sigma_2}\ \ e\ \ |\nabla\theta_2e^{-2s\sigma_2}|\le Cs\lambda\xi_2e^{-2s\sigma_2}$$

em (4.54) encontramos

$$\begin{aligned}
\lambda\iint_{\omega_2\times(0,T)} e^{-2s\sigma_2}|h|^2dxdt&\le Cs\lambda^2\iint_{\tilde\omega_2\times(0,T)}(\xi_2)^4e^{-2s\sigma_2}(s\lambda\xi_2|h|+|\nabla h|)|\psi|dxdt\\
&\le\varepsilon I_0^2(h)+Cs^4\lambda^5\iint_{\tilde\omega_2\times(0,T)}(\xi_2)^4e^{-2s\sigma_2}|\psi|^2dxdt.
\end{aligned}\tag{4.55}$$

Finalmente, no sétimo termo do lado direito de (4.49) *temos*

$$s^{-3}\lambda^{-2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt \leq \varepsilon s^{-3}\lambda^{-2}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt. \tag{4.56}$$

Substituindo a relações (4.50), (4.51), (4.52), (4.53), (4.55) *e* (4.56) *em* (4.49) *e descartando os termos absorvidos pelo lado direito, concluímos que*

$$\begin{aligned} I_0^2(h) + I_0^1(\gamma^1) + s^{-3}\lambda^{-2}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt \\ \leq Cs^4\lambda^5 \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \left(e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^4 + e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^4\right)|\psi|^2 dxdt. \end{aligned} \tag{4.57}$$

$\square$

Capítulo 5

Desigualdade de Observabilidade

Este capítulo é destinado à prova do Teorema 3.1. A desigualdade de observabilidade descrita nesse teorema é fundamental para provarmos o Teorema 2.1, que será tratado no próximo capítulo. Antes de provarmos o Teorema 3.1, tratemos de dois lemas necessários à sua demonstração.

5.1 Resultados Auxiliares.

Lema 5.1.1 *Existe μ_{00} tal que , para cada $\mu \geq \mu_{00}$ e quaisquer t_1, t_2, com $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$, a solução de $(\psi, \gamma_i), i = 1, 2,$ do sistema (3.23) satisfaz*

$$\|\psi(\cdot, t_1)\|^2 \leq C\|\psi(\cdot, t_2)\|^2, \tag{5.1}$$

onde $C > 0$ depende apenas de $\Omega, \mathcal{O}, T, \mathcal{O}_i, \mathcal{O}_{i,d}, \alpha_i$ e $\|a\|_{L^\infty(Q)}$.

Demonstração: Multiplicando a segunda equação de (3.23) por γ^i e integrando em $(0, t) \times \Omega$, temos

$$\begin{aligned} &\iint_{\Omega\times(0,t)} \gamma^i_s \gamma^i dxds - \iint_{\Omega\times(0,t)} \Delta\gamma^i\gamma^i dxds + \iint_{\Omega\times(0,t)} a(x,s)|\gamma^i|^2 dxds \\ &\quad = -\frac{1}{\mu}\iint_{\Omega\times(0,t)} \psi\gamma^i 1_{\mathcal{O}_i} dxds. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Agora, observemos que

$$\iint_{\Omega\times(0,t)} \gamma^i_s\gamma^i dxds = \frac{1}{2}\iint_{\Omega\times(0,t)} \frac{d}{ds}|\gamma^i|^2 dx = \frac{1}{2}\|\gamma^i(\cdot, t)\|^2, \tag{5.3}$$

e pela Fórmula de Green,

$$-\iint_{\Omega\times(0,t)} \Delta\gamma^i\gamma^i dxds = \int_0^t \|\nabla\gamma^i(\cdot,s)\|^2 ds. \tag{5.4}$$

Mais ainda,

$$\iint_{\Omega\times(0,t)} a(x,s)|\gamma^i|^2 dxds \leq \|a\|_\infty \int_0^t \|\gamma^i(\cdot,s)\|^2 ds, \tag{5.5}$$

e, pela Desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\mu}\iint_{\Omega\times(0,t)} \psi\gamma^i 1_{\mathcal{O}_i} dxds &= \iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} \left(-\frac{\psi}{\mu}\right)\gamma^i dxds \\ &\leq \frac{1}{2\mu^2}\int_0^t \|\psi(\cdot,s)\|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \|\gamma^i(\cdot,s)\|^2 ds.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Combinando (5.3)-(5.6) e (5.2) obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|\gamma^i(\cdot,t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla\gamma^i(\cdot,s)\|^2 \\ &\qquad\leq \|a\|_\infty \int_0^t \|\gamma^i(\cdot,s)\|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \|\gamma^i(\cdot,s)\|^2 ds + \frac{1}{2\mu^2}\int_0^t \|\psi(\cdot,s)\|^2 ds,\end{aligned}$$

donde

$$\|\gamma^i(\cdot,t)\|^2 \leq C\int_0^t \|\gamma^i(\cdot,s)\|^2 ds + \frac{1}{\mu^2}\int_0^t \|\psi(\cdot,s)\|^2 ds.$$

Assim, aplicando a Desigualdade de Gronwall com

$$u(t) = \|\gamma^i(\cdot,t)\|^2, \quad \alpha(t) = \frac{C}{\mu^2}\int_0^t \|\psi(\cdot,s)\|^2 ds \ \text{ e } \ \beta(s) = 1,$$

segue que

$$\|\gamma^i(\cdot,t)\|^2 \leq \frac{C}{\mu^2}\int_0^t \|\psi(\cdot,s)\|^2 ds.$$

Integrando a desigualdade acima de t a $t' < T$, temos

$$\int_t^{t'} \|\gamma^i(\cdot,t)\|^2 ds \leq \frac{C}{\mu^2}\int_0^{t'} \|\psi(\cdot,s)\|^2 ds, \qquad \forall t' \in [t,T], \tag{5.7}$$

onde C independe de μ.

Agora, multiplicando a primeira equação de (3.23) por ψ e integrando em $(t,t')\times\Omega$ temos

$$\begin{aligned}-\iint_{\Omega\times(t,t')} \psi_s\psi dxds - \iint_{\Omega\times(t,t')} \Delta\psi\psi dxds + \iint_{\Omega\times(t,t')} a(x,s)|\psi|^2 dxds \\ = \sum_{i=1}^{2}\iint_{\Omega\times(t,t')} \alpha_i\gamma^i\psi 1_{\mathcal{O}_{i,d}} dxds.\end{aligned} \tag{5.8}$$

Desenvolvendo cada membro dessa igualdade de maneira semelhante ao que foi feito anteriormente, resulta que

$$\begin{aligned}&\|\psi(\cdot,t)\|^2 + 2\int_t^{t'} \|\nabla\psi(\cdot,s)\|^2\\ &\qquad \le \|\psi(\cdot,t')\|^2 + (2\|a\|_\infty + 1)\int_t^{t'} \|\psi(\cdot,s)\|^2 ds + \sum_{i=1}^{2}|\alpha_i|\int_t^{t'} \|\gamma^i(\cdot,s)\|^2 ds.\end{aligned}$$

Utilizando (5.7) na desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}&\|\psi(\cdot,t)\|^2 + 2\int_t^{t'} \|\nabla\psi(\cdot,s)\|^2\\ &\qquad \le \|\psi(\cdot,t')\|^2 + (2\|a\|_\infty + 1)\int_t^{t'} \|\psi(\cdot,s)\|^2 ds + \frac{C}{\mu^2}\int_0^{t'} \|\psi(\cdot,s)\|^2 ds.\end{aligned}$$

Dessa forma

$$\|\psi(\cdot,t)\|^2 \le \|\psi(\cdot,t')\|^2 + \frac{C}{\mu^2}\int_0^{t'} \|\psi(\cdot,s)\|^2 ds + (2\|a\|_\infty + 1)\int_0^{t'} \|\psi(\cdot,s)\|^2 ds.$$

Novamente pela Desigualdade de Gronwall, agora com

$$u(t) = \|\psi(\cdot,t)\|^2, \beta(s) = (2\|a\|_\infty + 1) \ \text{ e } \ \alpha(t) = \|\psi(\cdot,t')\|^2 + \frac{C}{\mu^2}\int_0^{t'} \|\psi(\cdot,s)\|^2 ds,$$

temos

$$\|\psi(\cdot,t)\|^2 \le C\|\psi(\cdot,t')\|^2 + \frac{C}{\mu^2}\int_0^{t'} \|\psi(\cdot,s)\|^2 ds. \tag{5.9}$$

Integrando (5.9) de 0 até t' e tomando μ suficientemente grande, podemos garantir que

$$\int_0^{t'} \|\psi(\cdot,t)\|^2 \le C\|\psi(\cdot,t')\|^2.$$

Da desigualdade acima e de (5.9) concluímos (5.1). Isso prova o lema. □

Lema 5.1.2 *Existe uma constante $M > 0$, independente de s, λ, tal que*

(1) $t(T-t)e^{-M\lambda} \le (\xi_i)^{-1}, i = 1, 2;$

(2) $\dfrac{e^{-Mse^{M\lambda}}}{T^6} \le \dfrac{e^{-2s\sigma_i}}{t^3(T-t)^3}$ *em* $\Omega \times \left(\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right);$

(3) $\dfrac{e^{-2s\sigma_i}}{t^3(T-t)^3} \le M;$

(4) $e^{-2s\sigma_i}(\xi_i)^4 \le M.$

para s, λ suficientemente grandes.

Demonstração: Observemos primeiramente que,

$$\xi_i(x,t) = \frac{e^{\lambda(2\|\eta_i\|_\infty + \eta_i(x))}}{t(T-t)} \leq \frac{e^{M\lambda}}{t(T-t)},$$

com $M \geq 3\|\eta_i\|_\infty$, donde segue (1). Em seguida, notemos que

$$\frac{1}{t(T-t)} \leq \frac{16}{3T^2}, \ \forall t \in \left(\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right).$$

Utilizando a estimativa acima, obtemos

$$2s\sigma_i = 2s\frac{e^{4\lambda\|\eta_i\|_\infty} - e^{\lambda(2\|\eta_i\|_\infty + \eta_i(x))}}{t(T-t)} \leq 2s\frac{16}{3T^2}e^{4\lambda\|\eta_i\|_\infty} \leq Mse^{M\lambda}, \ \forall t \in \left(\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right), \quad (5.10)$$

onde $M \geq \max\{\frac{32}{3T^2}, 4\|\eta_i\|_\infty\}$. Combinando (5.10) com o fato de

$$\frac{1}{T^6} \leq \frac{1}{t^3(T-t)^3}, \ \forall t \in (0,T),$$

encontramos (2).

Agora, notemos que, para λ é suficientemente grande,

$$e^{4\lambda\|\eta_i\|_\infty} - e^{\lambda(2\|\eta_i\|_\infty + \eta_i(x))} \geq e^{3\lambda\|\eta_i\|_\infty}(e^{\lambda\|\eta_i\|_\infty} - 1) \geq e^{3\lambda\|\eta_i\|_\infty} \geq 1, \quad (5.11)$$

e, consequentemente, $\sigma_i \geq [t(T-t)]^{-1}$. Daí e do fato que $e^x \geq x, \ \forall x \geq 0$, temos que

$$e^{2s\sigma_i} = \left(e^{\frac{2s\sigma_i}{3}}\right)^3 \geq \left(\frac{2s\sigma_i}{3}\right)^3 \geq \frac{8}{27}s^3[t(T-t)]^{-3} \geq \frac{8}{27}[t(T-t)]^{-3},$$

já que $s \geq 1$. Portanto,

$$\frac{e^{-2s\sigma_i}}{t^3(T-t)^3} \leq \frac{27}{8}, \quad (5.12)$$

Tomando $M \geq 27/8$, concluímos (3). Finalmente, por (5.11), temos

$$\sigma_i \geq e^{3\lambda\|\eta_i\|_\infty}[t(T-t)]^{-1} \geq e^{\lambda(2\|\eta_i\|_\infty + \eta_i(x))}[t(T-t)]^{-1} = \xi_i,$$

donde, utilizando que $s \geq 1$,

$$e^{2s\sigma_i} = \left(e^{\frac{s\sigma_i}{2}}\right)^4 \geq \left(\frac{s\sigma_i}{2}\right)^4 \geq \frac{1}{16}(\xi_i)^4. \quad (5.13)$$

Tomando $M \geq 16$, deduzimos (4) a partir de (5.13). Isso conclui a prova do lema. $\square$

5.2 Demonstração do Teorema 3.1

Nesta seção apresentamos a demonstração da estimativa de observabilidade. Dividiremos a demonstração em duas partes, a primeira parte usando as hipóteses (2.12) e (2.14) do Teorema 2.2, e a segunda parte usando as hipóteses (2.12) e (2.13). As partes em comum serão utilizadas em ambos os casos para evitarmos algumas repetições.

5.2.1 Com as hipóteses (2.12) e (2.14)

Da desigualdade dada em (4.7), temos que

$$\begin{aligned} s^{-3}\lambda^{-2}&\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2dxdt \\ &\leq Cs^4\lambda^5\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)}(e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^4+e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^4)|\psi|^2dxdt. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Pelos itens (1) e (2) do Lema 5.1.2 temos

$$\begin{aligned} s^{-3}\lambda^{-2}\frac{e^{-Mse^{M\lambda}}}{T^6}e^{-3M\lambda}&\iint_{\Omega\times(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})}t^6(T-t)^6|\psi|^2dxdt \\ &\leq s^{-3}\lambda^{-2}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2dxdt. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Como

$$t\in\left(\frac{T}{4},\frac{3T}{4}\right)\Rightarrow\left(\frac{T}{4}\right)^6\leq t^6(T-t)^6\leq T^6\left(\frac{3}{4}\right)^6,$$

obtemos

$$\begin{aligned} s^{-3}\lambda^{-2}\left(\frac{3}{4}\right)^6 e^{-Mse^{M\lambda}}e^{-3M\lambda}&\iint_{\Omega\times(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})}|\psi|^2dxdt \\ &\leq s^{-3}\lambda^{-2}\iint_Q e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^{-3}|\psi|^2dxdt. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Agora, utilizando o item (4) do mesmo lema, resulta que

$$\begin{aligned} Cs^4\lambda^5&\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)}(e^{-2s\sigma_1}(\xi_1)^4+e^{-2s\sigma_2}(\xi_2)^4)|\psi|^2dxdt \\ &\leq Cs^4\lambda^5 2M\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)}|\psi|^2dxdt. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Por (5.16) e (5.17) obtemos

$$\begin{aligned} s^{-3}\lambda^{-2}\left(\frac{3}{4}\right)^6 e^{-Mse^{M\lambda}}e^{-3M\lambda}&\iint_{\Omega\times(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})}|\psi|^2dxdt \\ &\leq Cs^4\lambda^5 2M\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)}|\psi|^2dxdt. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Daí,

$$\iint_{\Omega\times(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})}|\psi|^2dxdt\leq CK\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)}|\psi|^2dxdt, \tag{5.19}$$

onde $K:=K(s,\lambda)=s^7\lambda^7e^{se^{M\lambda}}e^{3M\lambda}$.

Por outro lado, pelo Lema 5.1.1, vale

$$\|\psi(\cdot,0)\|^2\leq C\|\psi(\cdot,t)\|^2,\quad\forall t\in\left(\frac{T}{4},\frac{3T}{4}\right).$$

Utilizando a relação acima, encontramos

$$\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \|\psi(\cdot,t)\|^2 dt \geq \frac{1}{C}\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \|\psi(\cdot,0)\|^2 dt = \frac{T}{2C}\|\psi(\cdot,0)\|^2. \tag{5.20}$$

Por (5.19) e (5.20), concluímos que

$$\|\psi(\cdot,0)\|^2 \leq \frac{2C}{T}\iint_{\Omega\times(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})} |\psi|^2 dxdt \leq \frac{2C}{T}CK\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\psi|^2 dxdt. \tag{5.21}$$

Assim,

$$\|\psi(\cdot,0)\|^2 \leq Cs^7\lambda^7 e^{se^{M\lambda}} e^{3M\lambda}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\psi|^2 dxdt. \tag{5.22}$$

Agora, para obtermos a relação (3.25), temos que adicionar integrais ponderadas globais de γ^i do lado esquerdo de (5.22). Consideremos separadamente duas possibilidades.

Primeiro caso: Se a condição (I) da Proposição 4.3 é satisfeita.

Consideremos a função:

$$l(t) = \begin{cases} \dfrac{T^2}{4}, & \text{se } 0 \leq t \leq \dfrac{T}{2}, \\ t(T-t), & \text{se } \dfrac{T}{2} \leq t \leq T, \end{cases} \tag{5.23}$$

e as funções peso

$$\overline{\sigma}_i(x,t) := \frac{e^{4\lambda\|\eta_i\|_\infty} - e^{\lambda(2\|\eta_i\|_\infty + \eta_i(x))}}{l(t)}, \quad \overline{\xi}_i(x,t) := \frac{e^{\lambda(2\|\eta_i\|_\infty + \eta_i(x))}}{l(t)}. \tag{5.24}$$

Por (5.1) e pela Desigualdade de Carleman (4.3), existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} s^{-3}\lambda^{-2} &\iint_Q e^{-2s\overline{\sigma}_1}(\overline{\xi}_1)^{-3}|\psi|^2 dxdt \\ &\leq Cs^4\lambda^5 \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} (e^{-2s\overline{\sigma}_1}(\overline{\xi}_1)^4 + e^{-2s\overline{\sigma}_2}(\overline{\xi}_2)^4)|\psi|^2 dxdt. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Agora, seja $\hat{\rho} = \hat{\rho}(t)$ uma função de classe C^1, positiva e não-decrescente tal que $\hat{\rho}(t) \to \infty$, quando $t \to T$. Como $\gamma^i, i = 1,2$, é solução das EDP's dadas em (3.19), multiplicando formalmente a segunda equação de (3.19) por $\hat{\rho}^{-2}\gamma^i$ e integrando em Ω obtemos

$$\int_\Omega \hat{\rho}^{-2}\gamma^i_t\gamma^i dx - \int_\Omega \Delta\gamma^i\gamma^i\hat{\rho}^{-2}dx + \int_\Omega a(x,t)|\gamma^i|^2\hat{\rho}^{-2}dx = -\frac{1}{\mu}\int_{\mathcal{O}_i} \psi\gamma^i\hat{\rho}^{-2}dx. \tag{5.26}$$

Agora, observemos que

$$\int_\Omega \hat{\rho}^{-2}\gamma^i_t\gamma^i dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \hat{\rho}^{-2}|\gamma^i|^2 dx - \int_\Omega \hat{\rho}^{-3}\hat{\rho}_t|\gamma^i|^2 dx,$$

e pela fórmula de Green

$$-\int_\Omega \Delta\gamma^i\gamma^i\hat{\rho}^{-2}dx = \int_\Omega \hat{\rho}^{-2}|\nabla\gamma^i|^2 dx.$$

Por outro lado,

$$\int_\Omega a(x,t)|\gamma^i|^2\hat{\rho}^{-2}dx \leq \|a\|_\infty \int_\Omega |\gamma^i|^2\hat{\rho}^{-2}dx,$$

e pela Desigualdade de Young

$$-\frac{1}{\mu}\int_{\mathcal{O}_i}\psi\gamma^i\hat{\rho}^{-2}dx \leq \frac{1}{\mu^2}\int_{\mathcal{O}_i}|\psi|^2\hat{\rho}^{-2}dx + \int_{\mathcal{O}_i}|\gamma^i|^2\hat{\rho}^{-2}dx.$$

Substituindo essas relações em (5.26) e organizando os termos obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \hat{\rho}^{-2}|\gamma^i|^2dx + \int_\Omega \hat{\rho}^{-3}\hat{\rho}_t|\gamma^i|^2dx + \int_\Omega \hat{\rho}^{-2}|\nabla\gamma^i|^2dx \\ \leq \frac{1}{\mu^2}\int_{\mathcal{O}_i}|\psi|^2\hat{\rho}^{-2}dx + (1+\|a\|_\infty)\int_\Omega |\gamma^i|^2\hat{\rho}^{-2}dx.\end{aligned}$$

Como $\hat{\rho}$ é não-decrescente, $\hat{\rho}_t > 0, \forall t \in (0,T)$. Assim,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \hat{\rho}^{-2}|\gamma^i|^2dx \leq \frac{1}{\mu^2}\int_{\mathcal{O}_i}|\psi|^2\hat{\rho}^{-2}dx + (1+\|a\|_\infty)\int_\Omega |\gamma^i|^2\hat{\rho}^{-2}dx.$$

Integrando ambos os membros da desigualdade acima de 0 a $\tau, \tau \in [0,T]$ e lembrando $\gamma^i(x,0) \equiv 0$, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \hat{\rho}(\tau)^{-2}|\gamma^i(x,\tau)|^2dx \leq \frac{1}{\mu^2}\iint_{\mathcal{O}_i\times(0,\tau)}|\psi|^2\hat{\rho}^{-2}dxdt + \int_0^\tau (1+\|a\|_\infty)\int_\Omega |\gamma^i|^2\hat{\rho}^{-2}dxdt.$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall com

$$u(\tau) = \frac{1}{2}\int_\Omega \hat{\rho}(\tau)^{-2}|\gamma^i(x,\tau)|^2dx, \beta(\tau) = (1+\|a\|_\infty) \text{ e } \alpha(\tau) = \frac{1}{\mu^2}\iint_{\mathcal{O}_i\times(0,\tau)}|\psi|^2\hat{\rho}^{-2}dx$$

obtemos

$$\int_\Omega \hat{\rho}(\tau)^{-2}|\gamma^i(x,\tau)|^2dx \leq C\iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)}|\psi|^2\hat{\rho}^{-2}dxdt, \ \forall\tau\in[0,T]. \tag{5.27}$$

Agora, considere $\overline{\sigma}^*(t) = \max_{x\in\overline{\Omega}}\overline{\sigma}_1(x,t)$ e defina $\hat{\rho}(t) = e^{s\overline{\sigma}_1^*(t)}, \forall t \in [0,T]$. Como

$$\lim_{t\to T} l(t) = 0 \text{ e } \lim_{t\to T}\hat{\sigma}^*(t) = +\infty, \text{ então} \lim_{t\to T}\hat{\rho}(t) = +\infty.$$

Integrando ambos os membros da desigualdade (5.27) de 0 a T e substituindo $\hat{\rho}(t) = e^{s\overline{\sigma}_1^*(t)}$ obtemos

$$\iint_Q \hat{\rho}(t)|\gamma^i|^2dxdt \leq C\iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} e^{-2s\overline{\sigma}_1^*}|\psi|^2dxdt. \tag{5.28}$$

Admitamos por um instante que a seguinte estimativa seja verdadeira:

$$\iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} e^{-2s\overline{\sigma}_1^*}|\psi|^2dxdt \leq C\iint_Q (\overline{\xi}_1)^{-3}e^{-2s\overline{\sigma}_1}|\psi|^2dxdt. \tag{5.29}$$

Assim, por (5.25)

$$\iint_Q (\overline{\xi}_1)^{-3} e^{-2s\overline{\sigma}_1} |\psi|^2 dxdt \leq Cs^4\lambda^5 \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} (e^{-2s\overline{\sigma}_1}(\overline{\xi}_1)^4 + e^{-2s\overline{\sigma}_2}(\overline{\xi}_2)^4)|\psi|^2 dxdt. \quad (5.30)$$

Aplicando o item (4) do Lema 5.1.2, nos leva a

$$Cs^4\lambda^5 \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} (e^{-2s\overline{\sigma}_1}(\overline{\xi}_1)^4 + e^{-2s\overline{\sigma}_2}(\overline{\xi}_2)^4)|\psi|^2 dxdt \leq Cs^4\lambda^5 \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\psi|^2 dxdt. \quad (5.31)$$

Combinando (5.28)-(5.31) e incorporando as potências de s e λ à constante C obtemos

$$\sum_{i=1}^{2} \iint_Q \hat{\rho}(t)|\gamma^i|^2 dxdt \leq Cs^4\lambda^5 \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\psi|^2 dxdt. \quad (5.32)$$

Com (5.22) e (5.32) chegamos a

$$\begin{aligned} &\|\psi(\cdot,0)\|^2 + \sum_{i=1}^{2} \iint_Q \hat{\rho}(t)|\gamma^i|^2 dxdt \\ &\qquad \leq C\left(s^7\lambda^7 e^{se^{M\lambda}} e^{3M\lambda} + s^4\lambda^5\right) \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\psi|^2 dxdt. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Fixando s e λ na desigualdade acima, encontramos a estimativa de observabilidade (3.25).

Resta-nos provar a estimativa (5.29), que segue diretamente do seguinte resultado:

Lema 5.2.1 *Para s, λ suficientemente grandes, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$e^{-2s\overline{\sigma}_1^*} \leq C(\overline{\xi}_1)^{-3} e^{-2s\overline{\sigma}_1} \text{ em } \mathcal{O}_i \times (0,T). \quad (5.34)$$

Demonstração: Vamos mostrar, equivalentemente, que

$$e^{2s(\overline{\sigma}_1^* - \overline{\sigma}_1)} \geq C(\overline{\xi}_1)^3 \text{ em } \mathcal{O}_i \times (0,T). \quad (5.35)$$

Observemos primeiramente que, uma vez que estamos considerando $\mathcal{O}_i$ pequenos, podemos assumir, sem perdas, que $\mathcal{O}_i \subset\subset \Omega$. Nesse caso, temos que

$$\min_{\mathcal{O}_i} \eta_1 \neq 0.$$

Agora, tomando $\lambda \geq ln2/(\min_{\mathcal{O}_i} \eta_1)^{-1}$, obtemos, das definições de $\overline{\sigma}_1^*$ e $\overline{\sigma}_1$, que

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_1^*(t) - \overline{\sigma}_1(x,t) &\geq \max_{x\in\overline{\Omega}} \overline{\sigma}_1(x,t) - \max_{x\in\mathcal{O}_i} \overline{\sigma}_1(x,t) \\ &= \frac{1}{l(t)}\left(e^{\lambda\left(2\|\eta_1\|_\infty + \min\limits_{\mathcal{O}_i}\eta_1\right)} - e^{2\lambda\|\eta_1\|_\infty}\right) \\ &= \frac{1}{l(t)} e^{2\lambda\|\eta_1\|_\infty}\left(e^{\lambda\min\limits_{\mathcal{O}_i}\eta_1} - 1\right) \\ &\geq \frac{e^{2\lambda\|\eta_1\|_\infty}}{l(t)}, \quad \text{em } \mathcal{O}_i \times (0,T). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Logo, usando o fato que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{Q}, \quad \exists C(y) > 0; \quad e^x \geq C(y)x^y,$$

segue que

$$\begin{aligned} e^{2s(\overline{\sigma}_1^*(t)-\overline{\sigma}_1(x,t))} &\geq \exp\left(\tfrac{e^{2\lambda\|\eta_1\|_\infty}}{l(t)}\right) \geq C\left(\frac{e^{2\lambda\|\eta_1\|_\infty}}{l(t)}\right)^{\frac{9}{2}} \geq C\left(\frac{e^{3\lambda\|\eta_1\|_\infty}}{l(t)}\right)^3 \frac{1}{l(t)^{\frac{3}{2}}} \\ &\geq C\left(\frac{e^{\lambda(2\|\eta_i\|_\infty+\eta_i(x))}}{l(t)}\right)^3 \frac{1}{l(t)^{\frac{3}{2}}} \geq C\left(\frac{e^{\lambda(2\|\eta_i\|_\infty+\eta_i(x))}}{l(t)}\right)^3 = C(\overline{\xi}_1)^3. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Aqui, usamos o fato que $l(t) \leq T^2/4$. □

Segundo caso: Se a condição (II) da Proposição 4.3 é satisfeita.

A prova nesse caso é exatamente a mesma do anterior, já que usamos apenas o terceiro termo no lado esquerdo de (4.7), mas também temos esse termo do lado esquerdo de (4.8).

5.2.2 Com as hipóteses (2.12) e (2.13)

Denotamos por $\mathcal{O}_{1,d} = \mathcal{O}_{1,d} = \mathcal{O}_d$. Então (2.12) e (2.13) garantem que $\mathcal{O}_d \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$. Assim, podemos obter um conjunto aberto não-vazio $\omega \subset\subset \mathcal{O}_d \cap \mathcal{O}$. Daí, o Lema 4.1.1 assegura a existência de uma função $\eta_0 = \eta_0(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} \eta_0 > 0 \text{ em } \Omega, \ \eta_0 = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \\ |\nabla\eta_0| > 0, & \text{em } \overline{\Omega} \setminus \omega. \end{cases} \tag{5.38}$$

Com essa função η_0, consideremos as funções peso $\sigma(x,t)$ e $\xi(x,t)$ dadas por

$$\sigma(x,t) := \frac{e^{4\lambda\|\eta_0\|_\infty} - e^{\lambda(2\|\eta_0\|_\infty+\eta_0(x))}}{t(T-t)}, \quad \xi(x,t) := \frac{e^{\lambda(2\|\eta_0\|_\infty+\eta_0(x))}}{t(T-t)}. \tag{5.39}$$

Além disso,

$$I_m(\psi) := s^{m-4}\lambda^{m-3}\iint_Q e^{-2s\sigma}(\xi)^{m-4}(|\psi_t|^2 + |\Delta\psi|^2)dxdt + L_m(\psi), \tag{5.40}$$

onde

$$L_m(\psi) := s^{m-2}\lambda^{m-1}\iint_Q e^{-2s\sigma}(\xi)^{m-2}|\nabla\psi|^2dxdt + s^m\lambda^{m+1}\iint_Q e^{-2s\sigma}(\xi)^m|\psi|^2dxdt.$$

Sabemos que a função ψ é solução da EDP dada em (3.23). Dessa forma, aplicando a Proposição 4.1 à função ψ, com $m = 3$ e $f = \sum_{i=1}^{2}\alpha_i\gamma^i 1_{\mathcal{O}_{i,d}} = h1_{\mathcal{O}_d}$ segue que existe $C > 0$ tal que

$$I_3(\psi) \leq C\bigg(s^3\lambda^4\iint_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\sigma}(\xi)^3|\psi|^2dxdt + \iint_{\mathcal{O}_d\times(0,T)} e^{-2s\sigma}|h|^2dxdt\bigg). \tag{5.41}$$

Ainda por (3.23), aplicando a Proposição 4.1 à função $h1_{\mathcal{O}_d} = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \gamma^i 1_{\mathcal{O}_{i,d}}$, com $m = 0$, e $f = -\frac{1}{\mu}\psi(\alpha_1 1_{\mathcal{O}_1} + \alpha_2 1_{\mathcal{O}_2})$ encontramos

$$I_0(h) \leq C\left(\lambda \iint_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\sigma}|h|^2 dxdt + s^{-3}\lambda^{-3}\iint_Q e^{-2s\sigma}(\xi)^{-3}|\psi|^2 dxdt\right). \tag{5.42}$$

Logo, para λ e s suficientemente grandes

$$\begin{aligned}&\iint_Q e^{-2s\sigma}|h|^2 dxdt + I_0(h)\\ &\quad \leq C\left(\lambda \iint_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\sigma}|h|^2 dxdt + s^{-3}\lambda^{-3}\iint_Q e^{-2s\sigma}(\xi)^{-3}|\psi|^2 dxdt\right).\end{aligned} \tag{5.43}$$

Do fato de $\mathcal{O}_d \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$, obtemos outro conjunto aberto $\tilde{\omega}$ tal que $\omega \subset\subset \tilde{\omega} \subset\subset \mathcal{O}_d \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$. Assim, definimos $\tilde{\theta} \in C_0^2(\tilde{\omega})$ tal que $\tilde{\omega}(x) = 1$ em ω e $0 \leq \tilde{\theta} \leq 1$. Dessa forma, multiplicando a primeira equação de (3.23) por $\lambda\tilde{\theta}he^{-2s\sigma}$ e integrando em $\omega \times (0,T)$ vem

$$\begin{aligned}\lambda \iint_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\sigma}|h|^2 dxdt &\leq \lambda \iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} \tilde{\theta}e^{-2s\sigma}h(-\psi_t - \Delta\psi + a\psi)dxdt\\ &\leq \lambda \iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} e^{-2s\sigma}h_t\psi dxdt + \lambda \iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} e^{-2s\sigma}\Delta h\psi dxdt\\ &\quad + \lambda \iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} e^{-2s\sigma}a(x,t)h\psi dxdt.\end{aligned} \tag{5.44}$$

Usando a Desigualdade de Young, podemos estimar o primeiro termo do lado direito de (5.44) da seguinte forma

$$\begin{aligned}\lambda \iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} e^{-2s\sigma}h_t\psi dxdt &\leq \lambda \iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} e^{-s\sigma}(\lambda s\xi)^{-2}h_t\psi e^{-s\sigma}(\lambda s\xi)^2 dxdt\\ &\leq \frac{\lambda}{2}\iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} e^{-2s\sigma}\left((\lambda s\xi)^{-4}|h_t|^2 + (\lambda s\xi)^4|\psi|^2\right)dxdt.\end{aligned}$$

Aplicando o mesmo processo aos demais termos e combinando com (5.44) encontramos

$$\lambda \iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} e^{-2s\sigma}h_t\psi dxdt \leq \frac{1}{2}I_0(h) + C\lambda^5 s^4 \iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} e^{-2s\sigma}(\xi)^4|\psi|^2 dxdt \tag{5.45}$$

Combinando (5.41)-(5.45) segue que

$$I_0(h) + I_3(\psi) \leq Cs^4\lambda^4 \iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} (\xi)^4 e^{-2s\sigma}|\psi|^2 dxdt. \tag{5.46}$$

Agora, seja $l = l(t)$ definida por:

$$l(t) = \begin{cases} \dfrac{T^2}{4}, & \text{se } 0 \leq t \leq \dfrac{T}{2},\\ t(T-t), & \text{se } \dfrac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases} \tag{5.47}$$

e as funções peso

$$\overline{\sigma}(x,t) := \frac{e^{4\lambda\|\eta_0\|_\infty} - e^{\lambda(2\|\eta_0\|_\infty + \eta_0(x))}}{l(t)}, \quad \overline{\xi}(x,t) := \frac{e^{\lambda(2\|\eta_0\|\infty + \eta_0(x))}}{l(t)}. \tag{5.48}$$

Além disso, denotamos por $\overline{I}_m(\psi)$ a expressão definida em (5.40), apenas substituindo σ e ξ por $\overline{\sigma}$ e $\overline{\xi}$, respectivamente. Então, argumentando como em ([8], Lema 1), ou como na Subseção 5.2.1, vemos que (5.46) e as EDP's satisfeitas por ψ e $\gamma_i, i = 1,2$, implicam na existência de uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\psi(\cdot,0)\| + \overline{I}_0(h) + \overline{I}_3(\psi) \leq C \iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} (\xi)^4 e^{-2s\overline{\sigma}} |\psi|^2 dxdt. \tag{5.49}$$

Usaremos novamente a estimativa

$$\iint_Q \hat{\rho}(t)|\gamma^i|^2 dxdt \leq C \iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} e^{-2s\overline{\sigma}_1^*} |\psi|^2 dxdt. \tag{5.50}$$

Agora, definimos

$$\overline{\sigma}^* := \max_{x\in\overline{\Omega}} \overline{\sigma}(x,t), \;\; \hat{\rho}(t) := e^{s\tilde{\sigma}^*(t)}.$$

Substituindo $\hat{\rho}$ do lado direito de (5.50) temos

$$\iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} e^{-2s\overline{\sigma}_1^*} |\psi|^2 dxdt \leq \iint_Q e^{-2s\overline{\sigma}_1} |\psi|^2 dxdt \leq \overline{I}_3(\psi). \tag{5.51}$$

Combinando (5.49)-(5.51) segue que

$$\frac{1}{C}\iint_Q \hat{\rho}(t)|\gamma^i|^2 dxdt + \|\psi(\cdot,0)\| \leq C \iint_{\tilde{\omega}\times(0,T)} (\xi)^4 e^{-2s\overline{\sigma}} |\psi|^2 dxdt. \tag{5.52}$$

Aplicando o item (4) do Lema 5.1.2 ao lado direito de (5.52), concluímos a demonstração.

Capítulo 6

Controlabilidade Nula

Nesse capítulo, usaremos a desigualdade de observabilidade para provarmos o Teorema 2.2.

6.1 Prova do Teorema 2.2

Consideremos a relação de igualdade dada em (3.24):

$$\int_{\Omega}[z(x,T)\psi^T(x) - z^0(x)\psi(x,0)]dx = \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} f\psi dxdt - \sum_{i=1}^{2}\alpha_i \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} z_{i,d}\gamma^i dxdt, \quad (6.1)$$

onde (z, ϕ^1, ϕ^2) e $(\psi, \gamma^1, \gamma^2)$ são as soluções de (3.19) e (3.23) associados aos dados iniciais z^0 e ψ^T, respectivamente. Assim, provar a controlabilidade nula é equivalente a encontrar, para cada $z^0 \in L^2(\Omega)$, um controle $f \in L^2(\mathcal{O}\times(0,T))$ tal que, para cada $\psi^T \in L^2(\Omega)$ se tenha

$$\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} f\psi dxdt = -\int_{\Omega} z^0(x)\psi(x,0)dx + \sum_{i=1}^{2}\alpha_i \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} z_{i,d}\gamma^i dxdt. \quad (6.2)$$

Para isso, dado $\epsilon > 0$, consideremos o funcional $F_\epsilon : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\begin{aligned} F_\epsilon(\psi^T) = \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\psi|^2 dxdt + \epsilon\|\psi^T\| + \int_{\Omega} z^0(x)\psi(x,0)dx \\ - \sum_{i=1}^{2}\alpha_i \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} z_{i,d}\gamma^i dxdt, \quad \forall \psi^T \in L^2(\Omega). \end{aligned} \quad (6.3)$$

O lema seguinte nos dá algumas propriedades de F_ϵ.

Lema 6.1.1 *O funcional $F_\epsilon : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido em* (6.3) *é contínuo, coercivo e estritamente convexo.*

Demonstração: Usando o Teorema 3.1, temos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\psi|^2 dxdt + \epsilon\|\psi^T\| \\
&\quad = \frac{1}{4}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\psi|^2 dxdt + \frac{1}{4}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\psi|^2 dxdt + \epsilon\|\psi^T\| \\
&\quad \geq \frac{1}{4}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\psi|^2 dxdt + \epsilon\|\psi^T\| + \frac{1}{4C}\int_\Omega |\psi(x,0)|^2 dxdt \\
&\qquad + \frac{1}{4C}\sum_{i=1}^{2}\iint_Q \hat{\rho}^{-2}|\gamma^i|^2 dxdt.
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

Além disso, pela Desigualdade de Young,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega z^0(x)\psi(x,0)dx &= \int_\Omega \left(\sqrt{2C}z^0(x)\right)\left(\frac{\psi(x,0)}{\sqrt{2C}}\right) dxdt \\
&\geq -C\int_\Omega |z^0(x)|^2 dxdt - \frac{1}{4C}\int_\Omega |\psi(x,0)|^2 dxdt
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

e

$$
\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^{2}\alpha_i \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} z_{i,d}\gamma^i dxdt &= -\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} \left(\alpha_i\sqrt{2C}\hat{\rho}z_{i,d}\right)\left(\hat{\rho}^{-1}\frac{\gamma^i}{\sqrt{2C}}\right) dxdt \\
\geq -C\sum_{i=1}^{2}\alpha_i^2 \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} \hat{\rho}^2|z_{i,d}|^2 dxdt &- \frac{1}{4C}\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} \hat{\rho}^{-2}|\gamma^i|^2 dxdt.
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

Combinando (6.4) - (6.6), encontramos

$$
\begin{aligned}
F_\epsilon(\psi^T) &\geq \epsilon\|\psi^T\| + \frac{1}{4}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\psi|^2 dxdt \\
&\quad - C\left(\int_\Omega |z^0(x)|^2 dxdt + \sum_{i=1}^{2}\alpha_i^2\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} \hat{\rho}^2|z_{i,d}|^2 dxdt\right).
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

Como o termo negativo do lado direito da desigualdade acima independe de ψ^T, temos $F_\epsilon(\psi^T) \geq \tilde{\epsilon}\|\psi^T\|$, para $\|\psi^T\|$ suficientemente grande, isso garante a coercividade de F_ϵ.

Com um procedimento análogo ao que foi feito no capítulo 3, é possível mostrarmos que F_ϵ é contínuo e estritamente convexo. □

Mostraremos agora que existe um controle $f \in L^2(\Omega\times(0,T))$ que satisfaz a igualdade (6.2) para todo $\psi^T \in L^2(\Omega)$. Pelas propriedades de F_ϵ no lema acima, concluímos que existe um único mínimo ψ_ϵ^T para o funcional F_ϵ. Assim, ou $\psi_\epsilon^T = 0$ ou

$$
\langle F'_\epsilon(\psi_\epsilon^T), \psi^T\rangle = 0, \quad \forall \psi^T \in L^2(\Omega). \tag{6.8}
$$

Considerando o operador $L_\epsilon^i : L^2(\Omega) \to L^2(Q)$ dado por $L_\epsilon^i(\psi^T) = \gamma_i$, onde γ_i é solução de (3.23), reescrevemos

$$F_\epsilon(\psi^T) = \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\psi|^2 dxdt + \epsilon\|\psi^T\| + \int_\Omega z^0(x)\psi(x,0)dx$$
$$- \sum_{i=1}^{2}\alpha_i \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} z_{i,d}L^i_\epsilon(\psi^T)dxdt, \quad \forall \psi^T \in L^2(\Omega).$$

Notemos que, para $\|\psi^T_\epsilon\| \neq 0$,

$$\frac{F_\epsilon(\psi^T_\epsilon + \lambda\psi^T) - F_\epsilon(\psi^T_\epsilon)}{\lambda}$$
$$= \frac{\lambda}{2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\psi|^2 dxdt + \int_\Omega z^0(x)\psi(x,0)dx$$
$$- \sum_{i=1}^{2}\alpha_i \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} z_{i,d}\gamma^i dxdt + \epsilon\frac{\|\psi^T_\epsilon + \lambda\psi^T\| - \|\psi^T_\epsilon\|}{\lambda}$$
$$+ \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \psi_\epsilon\psi dxdt$$
$$= \int_\Omega z^0(x)\psi(x,0)dx + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \psi_\epsilon\psi dxdt$$
$$- \sum_{i=1}^{2}\alpha_i \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} z_{i,d}\gamma^i dxdt + \frac{\lambda}{2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\psi|^2 dxdt$$
$$+ \epsilon\frac{\|\psi^T_\epsilon + \lambda\psi^T\|^2 - \|\psi^T_\epsilon\|^2}{\lambda}\frac{1}{[\|\psi^T_\epsilon + \lambda\psi^T\| + \|\psi^T_\epsilon\|]}$$

Logo, $\langle F'_\epsilon(\psi^T_\epsilon), \psi^T\rangle = 0$ se, e somente se,

$$\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \psi_\epsilon\psi dxdt + \epsilon\left(\frac{\psi^T_\epsilon}{\|\psi^T_\epsilon\|}, \psi^T\right) + \int_\Omega z^0(x)\psi(x,0)dx$$
$$- \sum_{i=1}^{2}\alpha_i \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} z_{i,d}\gamma^i dxdt = 0, \quad \forall\psi^T \in L^2(\Omega), \tag{6.9}$$

onde denotamos $(\psi_\epsilon, \gamma^1_\epsilon, \gamma^2_\epsilon)$ como a solução de (3.23), associada ao estado $\psi^T = \psi^T_\epsilon$.

Fazendo $f = f_\epsilon = \psi_\epsilon 1_{\mathcal{O}\times(0,T)}$ em (6.1) obtemos,

$$\int_\Omega z^0(x)\psi(x,0)dx = -\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \psi_\epsilon\psi dxdt + \int_\Omega z_\epsilon(x,T)\psi^T(x)dx$$
$$+ \sum_{i=1}^{2}\alpha_i \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} z_{i,d}\gamma^i dxdt. \tag{6.10}$$

Substituindo (6.10) em (6.9), temos que

$$\int_\Omega \left(z_\epsilon(x,T) + \frac{\epsilon}{\|\psi^T_\epsilon\|}\psi^T_\epsilon\right)\psi^T dx = 0, \ \forall\psi^T \in L^2(\Omega). \tag{6.11}$$

Dessa forma, pelo Lema de Du Bois-Raymond, segue que

$$\|z_\epsilon(\cdot,T)\| \leq \epsilon. \tag{6.12}$$

Utilizando a relação (6.9) e a Desigualdade de Young, temos que

$$
\begin{aligned}
\|f_\epsilon\|^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} &\leq -\epsilon - \int_\Omega z^0(x)\psi(x,0)dx + \sum_{i=1}^{2}\alpha_i \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} z_{i,d}\gamma^i dxdt \\
&\leq \frac{C^2}{2}\sum_{i=1}^{2}\alpha_i^2 \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} \hat{\rho}^2|z_{i,d}|^2 dxdt + \frac{C^2}{2}\int_\Omega |z^0(x)|^2 dxdt \\
&\quad + \frac{1}{2C^2}\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} \hat{\rho}^{-2}|\gamma^i|^2 dxdt + \frac{1}{2C^2}\int_\Omega |\psi(x,0)|^2 dxdt,
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

onde C representa a constante da desigualdade de observabilidade. Como ψ_ϵ é solução de (3.23), segue da desigualdade de observabilidade (3.25) que

$$
\frac{1}{2C^2}\sum_{i=1}^{2}\iint_Q \hat{\rho}^{-2}|\gamma^i|^2 dxdt \leq \frac{1}{2}\|f_\epsilon\|^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} - \frac{1}{2C^2}\int_\Omega |\psi(x,0)|^2 dxdt. \tag{6.14}
$$

Combinando (6.14) e (6.13) e organizando os termos concluímos que

$$
\|f_\epsilon\|_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} \leq C\left(\int_\Omega |z^0(x)|^2 dxdt + \sum_{i=1}^{2}\alpha_i^2 \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} \hat{\rho}^2|z_{i,d}|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6.15}
$$

Até agora provamos que, para cada $\epsilon > 0$ dado, existe exatamente um controle $f_\epsilon = \psi_\epsilon 1_{\mathcal{O}\times(0,T)}$, tal que o estado associado z_ϵ, solução de (3.19) satisfaz (6.12). Dessa forma, fazendo $\epsilon_n = \dfrac{1}{n}$, por (6.15), obtemos uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada em $L^2(\mathcal{O}\times(0,T))$, com $f_n = \psi_{\epsilon_n} 1_{\mathcal{O}\times(0,T)}$. Daí, pelo Teorema 1.3, existe uma subsequência $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $f_{n_j} \rightharpoonup f$ em $L^2(\mathcal{O}\times(0,T))$ e, por (6.12) temos que a solução z de (3.19) associada ao controle f é tal que $\|z(\cdot,T)\| = 0$.

Referências Bibliográficas

[1] ARARUNA, F.D.; FERNÁNDEZ-CARA, E.; GUERRERO, S.; SANTOS,M.C. New results on the Stackelberg-Nash exact control of linear parabolic equations. Systems & Control Letters, v. 104, p. 78-85, 2017.

[2] ARARUNA, F. D.; FERNÁNDEZ-CARA, E.; SANTOS, M.C. Stackelberg-Nash exact controllability for linear and semilinear parabolic equations. ESAIM. Contrôle, Optimisation et Calculus des Variations, v. 21, p. 835-856, 2015.

[3] BOTELHO, G., PEREGRINO, D., TEIXEIRA, E.*Fundamentos de Análise Funcional* - Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[4] BREZIS, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer, 2011.

[5] DÍAZ, J.I.; LIONS, J.L.; On the approximate controllability of Stackelberg-Nash strategies. Ocean circulation and pollution control: a mathematical and numerical investigation, Madrid, 1997. Springer, Berlin, p. 17-27, 2004.

[6] DÍAZ, J.I.; On the von Neumann problem and the approximate controllability of Stackelberg -Nash strategies for some environmental problems.*Rev. R. Acad. Cien., Ser. A. Math.***96** p. 343-356, 2002.

[7] EVANS, L. C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol.19, AMS, 1997.

[8] FERNÁNDEZ-CARA, E.; GUERRERO, S.; IMANUVILOV, O.Y.; PUEL, J.P., Local exact controllability of the Navier-Stokes system. J. *Math. Pures Appl.* **83**, p. 1501-1542, 2004.

[9] FURSIKOV, A.V.; IMANUVILOV, O.Y. *Controllability of evolution equations.* Lecture Note Series 34, Research Institute of Mathematics, Seoul National University, Seoul, 1996.

[10] IMANUVILOV, O.Y.; YAMAMOTO, M.*Carleman estimates for a parabolic equation in a Sobolev space of native order and its applications*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 218, Dekker, New York, 2001.

[11] JESUS,I.P., LIMA,O.A., CLARK,M.R., Análise Funcional: Uma introdução, 1º ed. Teresina, EDUFPI, 2018.

[12] LIONS, J.L.; Contrôle de Pareto de systèmes distribués. Le cas d'èvolution. C.R. *Acad.Sci. Paris, Sér. I* **302** p. 413-417, 1986.

[13] LIONS, J.L.; Some remarks on Stackelberg's optimization.*Math. Models Methods Appl. Sci.* **4** p. 477-487, 1994.

[14] MATOS, M. P. *Integral de Bochner e os espaços* $L^p(0, T; X)$. Notas de Aula, UFPB, João Pessoa, 1998.

[15] MEDEIROS, L. A. & Milla Miranda, M., *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 2011.

[16] MIRANDA, M.M.; MEDEIROS, L.A.*Espaços de Sobolev:* Iniciação aos problemas elíticos não homogêneos. Rio de Janeiro: UFRJ, 2000.

[17] NASH, J.F.; *Noncoopertive games. Ann. Math.* **54** P.286-295, 1951.

[18] PARETO, V.; Cours d'économie politique. Rouge, Laussame, Switzerland, 1896.

[19] RAMOS, A.M.; GLOWINSKI, R.; PERIAUX, J. Nash equilibria for the multiobjective control of linear partial differential equations. *J. Optim. Theory Appl.* **112**, 457-498, 2002.

[20] RAMOS, A.M.; GLOWINSKI, R. PERIAUX, J. Pointwise control of the Burgers equation and related Nash equilibria problems: A computational approach. *J. Optim. Theory Appl.* **112** p.499-516, 2001.

[21] VON STACKELBERG, H. Marktform und gleichgewicht. Springer, Berlin, Germany, 1934.