Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Rigidez de superfícies minimizantes de área com bordo livre em variedades tridimensionais

Arilson da Cruz de Santana

Teresina - 2018

Arilson da Cruz de Santana

Dissertação de Mestrado:
Rigidez de superfícies minimizantes de área com bordo livre em variedades tridimensionais

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista

Teresina - 2018

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

S959r Santana, Arilson da Cruz de.
Rigidez de superfícies minimizantes de área com bordo livre em variedades tridimensionais / Arilson da Cruz de Santana. – Teresina, 2018.
57f.: il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2018.
Orientador: Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista.

1. Geometria. 2. Superfícies Mínimas. 3. Curvatura Escalar. I. Título.

CDD 516

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes / CRB3-1461

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Rigidez de superfícies minimizantes de área com bordo livre em variedades tridimensionais

ARILSON DA CRUZ DE SANTANA

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 13 de Julho de 2018.

Banca Examinadora:

Rondinelle Marcolino Batista

Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista - Presidente

Halyson Irene Baltazar

Prof. Dr. Halyson Irene Baltazar - membro interno

Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Junior - membro externo

Luciano Ramos (In memoriam).

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pai todo poderoso pelo fôlego e a força, sem sua anuência não teria conseguido, agradeço minha mãe , Lucineide Galdino, e meu pai, Francisco Neto, que sempre me incentivaram e deram o apoio necessário para que conseguisse concluir essa jornada, sempre priorizando minha educação em declínio de seus interesses.

Agradeço minha namorada, Lazeane Bispo, pela sua compreensão, companheirismo e por sempre ter me incentivado, sem sua ajuda dificilmente teria conseguido.

Agradeço aos Prof. Dr. Antonio Wilson, Prof. Dr. Paulo Alexandre, Prof. Dr. Humberto, Prof. Dr.Jose Francisco, Prof. Dr. Jurandir e Prof. Dr. Franciane de Brito que fizeram parte da minha formação acadêmica, muito Obrigado.

Ao meu egregium orientador, Prof. Dr. Rondinelle Marcolino, fica meu grande respeito e admiração, sempre exigiu muito mas também ajudou quando necessitava indicando os melhores caminhos a serem seguidos, agradeço também pela sua compreensão e paciência para explicar certos assuntos inúmeras vezes e por proporcionar momentos de descontração.

Agradeço aos meus companheiros de estudos e agora amigos que entraram junto comigo no mestrado, Leonardo, Edimilson, Rafaelber, Cicero Nadiel e todos aqueles que conheci no decorrer do mestrado, Edilson, Kelvin, Josimauro, Juliana, Lucas Cassiano, Marcos, Luan, Valeria, Ronnyê e Luciano, in memoria, que proporcionaram momentos inesquecíveis que ficaram em minha memória.

Agradeço aos professores Prof. Dr.Halyson Irene e Prof. Dr.Ernani de Sousa por terem aceito o convite para compor minha banca.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

“ A Matemática, quando a compreendemos bem, possui não somente a verdade, mas também a suprema beleza”.

Bertrand Russel.

Resumo

Neste trabalho, apresentaremos um teorema de splitting local para uma variedade tridimensional com curvatura escalar limitada inferiormente e bordo médio convexo que contém uma superfície localmente minimizante de área com bordo livre. Além disso usaremos esse resultado local para obter um teorema de rigidez global para discos minimizantes de área com bordo livre. Tais resultados foram obtidos por Lucas Ambrozio no artigo *Rigidity of Area Minimizing Free Boundary Surfaces in Mean Convex Three-Manifold.*

Palavras - chaves: Superfícies mínimas com bordo livre, curvatura escalar, curvatura média, rigidez.

Abstract

In this work, we will present a local splitting theorem for a three-dimensional manifold with scalar curvature bounded from lower and boundary mean convex that contains a locally area- minimizing free boundary. In addition we will use this local result to obtain a global rigidity theorem for area-minimizing free boundary disks. Such results were obtained by Lucas Ambrozio in the article *Rigidity of Area Minimizing Free Boundary Surfaces in Mean Convex Three-Manifold*.

Sumário

Introdução

Seja M uma variedade Riemanniana com bordo ∂M, subvariedades minimas surgem como pontos críticos do funcional área quando restringem a variação que preservam o bordo ∂M (mas que necessariamente não o deixam fixo). Em um grande trabalho Schoen e Yau provaram o seguinte resultado.

Teorema 1. *Seja M uma variedade tridimensional orientada com bordo e curvatura escalar positiva. Então M não tem uma superfície mínima, imersa e estável de gênero positivo.*

Eles também usaram esse resultado para provar que qualquer métrica Riemanniana com curvatura escalar no toro deve ser plana [12].

Em [13], Fischer, Colbrie e Schoen observaram que um toro bidimensional minimo, estável, imerso e de dois lados em uma variedade Riemanniana tridimensional com curvatura escalar não negativa deve ser plano e totalmente geodésico. Eles conjucturaram que o resultado de Schoen e Yau [12] seria válido se simplesmente asssumisse a existência de um toro bidimensional minimizante de área. Essa conjuctura foi provado por Cai e Galloway [11].

Nos últimos anos, alguns resultados semelhantes foram comprovados para superfícies fechadas que não são toro sob diferentes hipóteses de curvatura escalar em particular mencionaremos [8] e [7]. Uma interessante abordagem foi fornecida por Micallef e Moraru [10], baseados em folheações por superfícies de curvatura média constante. O ponto principal desse trabalho, que é baseado no artigo do Lucas Ambrozio [6], é provar que uma superfície minima, bordo livre, imersa em uma variedade tridimensional com a segunda forma fundamental estritamente maior do que zero e com curvatura escalar limitada inferiormente seja localmente isométrico a um produto cartesiano, com esse resultado local provaremos um teorema de rigidez global.

Capítulo 1

Noções Preliminares

1.1 Variedade Riemanniana

Nesta secção iremos abordar definições básicas e necessárias de variedades Riemannianas baseadas em [1] e [18]. Seja M^n uma variedade diferenciável de dimensão n e T_pM o espaço tangente de M^n, com $p \in M^n$. A seguir definiremos métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável.

Definição 1. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido, se $\boldsymbol{x} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M^n$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $\boldsymbol{x}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = q \in \boldsymbol{x}(U)$ e $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\boldsymbol{x}(0, \cdots, 1, \cdots, 0)$, então $\left\langle \dfrac{\partial}{\partial x_i}(q), \dfrac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \cdots, x_n)$ é uma função diferenciável em U.*

Observe que essa definição não depende da escolha do sistema de coordenadas, a diferenciabilidade da métrica Riemanniana também pode ser expressa de outras maneiras, para mais informações veja [1].

É usual omitirmos índice p em $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ sempre que não houver possibilidade de confusão. As funções g_{ij} são chamadas de expressão da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M^n$. Uma variedade Riemanniana $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é uma variedade diferenciável munida de uma métrica Riemanniana. Por fim vamos definir o que é uma isometria.

Definição 2. *Sejam M^n e N^n variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M^n$*

$\longrightarrow N^n$*(isto é,* f *é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável) é chamado uma isometria se:*

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)},$$

para todo $p \in M^n$ *e* $u, v \in T_pM$.

Definição 3. *Sejam* M^n *e* N^n *variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável* f *:* $M^n \longrightarrow N^n$ *é uma isometria local em p* $\in M^n$*, se existe uma vizinhança* $U \subset M^n$ *de* p *tal que* $f : U \subset M^n \longrightarrow f(U) \subset N^n$ *é uma isometria.*

1.2 Curvaturas e tensores

Nesta seção iremos definir conexões Riemannianas e apresentar algumas de suas propriedades, também falaremos sobre curvaturas e tensores, suas propriedades e alguns resultados que serão úteis ao longo do texto. Seja $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores em M^n de classe C^∞ e $\mathcal{F}(M)$ o conjunto das funções reais de classe C^∞ definidas em M^n.

Definição 4. *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável* M^n *é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

que se indica por $(X, Y) \longrightarrow \nabla_Y X$ *e que satisfaz as seguintes propriedades:*

i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$.

ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$.

iii) $\nabla_X fY = f\nabla_Z + X(f)Y$.

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $f, g \in \mathcal{F}(M)$.

Definição 5. *Seja* M^n *uma variedade diferenciável com uma conexão afim* ∇*. Um campo vetorial V ao longo de uma curva* $c : I \longrightarrow M^n$ *é chamado paralelo quando* $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$ *= 0, para todo t* $\in I$.

Definição 6. *Seja* M^n *uma variedade diferenciável com uma conexão* ∇ *e uma métrica Riemanniana* $\langle \cdot, \cdot \rangle$*. A conexão é dita compatível com a métrica* $\langle \cdot, \cdot \rangle$*, quando para toda curva diferenciável* c *e quaisquer pares de campos de vetores paralelos P e P' ao longo de* c*, tivermos* $\langle P, P' \rangle$ *constante.*

Definição 7. *Uma conexão* ∇ *em uma variedade Riemanniana* M^n *é compatível com a métrica se*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \tag{1.1}$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 8. *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável* M^n *é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Note que em um sistema de coordenadas $(U, \mathbf{x})$, o fato de ∇ ser simétrica implica que para todo $i, j = 1, \cdots, n$,

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0,$$

onde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Agora iremos definir curvaturas, que intuitivamente mede o quanto uma variedade Riemanniana deixa de ser Euclidiana.

Definição 9. *A curvatura de Riemann* R *de uma variedade Riemanniana* M^n *é uma correspondência que associa a cada par* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *uma aplicação* $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ *dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \tag{1.2}$$

para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e* ∇ *é a conexão Riemanniana de* M^n.

Observe que se $M^n = \mathbb{R}^n$, então $R(X, Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Com efeito, se indicarmos por $Z = (z_1, \cdots, z_n)$ as componentes do campo Z nas coordenadas canônicas do $\mathbb{R}^n$, obtemos

$$\nabla_Y Z = (Yz_1, \cdots, Yz_n) \;\; \text{e} \;\; \nabla_X Z = (Xz_1, \cdots, Xz_n),$$

donde

$$\begin{aligned} \nabla_Y \nabla_X Z &= (YXz_1, \cdots, YXz_n) = \sum_j \nabla_Y (XZ_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \\ \nabla_X \nabla_Y Z &= (XYz_1, \cdots, XYz_n) = \sum_j, \nabla_X (YZ_j) \frac{\partial}{\partial x_j}, \end{aligned}$$

implicando

$$\nabla_{[X,Y]}Z = ([X,Y]z_1, \cdots, [X,Y]z_n) = \sum_j (XYZ_j - YXZ_j)\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Logo por (1.2), temos que

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y\nabla_Y Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\ &= \sum_j \nabla_X(YZ_j)\frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_j \nabla_Y(XZ_j)\frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_i (XYZ_j - YXZ_j)\frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Proposição 1.2.1. *A curvatura de Riemann R de uma variedade Riemanniana satisfaz as seguintes propriedades:*

i) R *é bilinear em* $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ *isto é;*

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1)$$

e

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

para quaisquer f, $g \in \mathcal{F}(M)$ *e* X_1, X_2, Y_1, $Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

ii) O operador curvatura $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ *é linear, ou seja, para todo par de vetores* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$R(X,Y)(Z + W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W$$

e

$$R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z$$

para quaisquer $f \in \mathcal{F}(M)$ *e* $Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

iii) Vale a primeira Identidade de Bianchi

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0,$$

Para uma prova veja [1].

Agora definiremos tensor em uma variedade Riemanniana. A noção de curvatura é um caso particular da noção de tensor que é um objeto de grande utilidade em Geometria Diferencial. Apresentaremos aqui a definição clássica de tensores em variedades Riemanniana. A ideia de tensor é uma generalização natural de campos de vetores e o ponto importante é que, analogamente aos campos de vetores, também podemos "derivar" tensores.

Definição 10. *Um tensor* T *de ordem* r *em uma variedade Riemanniana é uma aplicação multilinear:*

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times ... \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M).$$

Isso significa que, dados campos $Y_1, Y_2, \cdots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$*, temos que* $T(Y_1, Y_2, \cdots, Y_r)$ *é uma função diferenciável em* M^n*, e* T *é linear em cada entrada, isto é*

$$T(Y_1, \cdots, fX + gY, \cdots, Y_r) = fT(Y_1, \cdots, X, \cdots, Y_r) + gT(Y_1, \cdots, Y, \cdots, Y_r),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $f, g \in \mathcal{F}(M)$.

Fixado um ponto $p \in M^n$ seja U uma vizinhança de p em M^n de forma que seja possível definir campos $E_1, \cdots, E_n \in \mathfrak{X}(M)$ de modo que em cada $q \in U$, $\{E_i(q), i = 1, 2, \cdots, n\}$ é uma base de T_qM. Nesse caso, diremos que $\{E_i\}_{i=1}^n$ é um referencial móvel em U. Com isso, dizemos que um tensor T é um objeto pontual, dados $Y_1, \cdots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$. Em termos do referencial móvel $\{E_i\}_{i=1}^n$, as restrições a U dos campos $Y_1, \cdots, Y_r$ são dadas por:

$$Y_1 = \sum_{i_1} y_{i_1} E_{i_1}, \ Y_2 = \sum_{i_2} y_{i_2} E_{i_2}, \ \cdots, \ Y_r = \sum_{i_r} y_{i_r} E_{i_r}$$

com $i_1, \cdots, i_r = 1, \cdots, n$. Como T é linear, temos

$$T(Y_1, ..., Y_n) = \sum_{i_1,...,i_r} y_{i_1}, ..., y_{i_n} T(E_{i_1}, ..., E_{i_r}),$$

O tensor curvatura é a aplicação

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$

definida por

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle,$$

para todos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$. As componentes de R em um referencial $\{e_i\}$ são representadas por

$$R(X_i, X_j, X_k, X_l) = R(e_i, e_j, e_k, e_l) = R_{ijkl}.$$

Proposição 1. *O tensor curvatura de Riemann satisfaz as seguintes propriedades.*

i) $R(X, Y, Z, W) + R(X, Y, Z, W) + R(X, Y, Z, W) = 0,$

ii) $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W),$

iii) $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, W, Z)$,

iv) $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$.

Para uma prova veja [1].

É conveniente escrever esses elementos em um sistema de coordenadas $(U, \mathbf{x})$ em torno de um ponto $p \in M^n$. Fazendo

$$\langle R(X_i, X_j)X_k, X_s\rangle = \sum_l R^l_{i,j,k} g_{ls} = R_{ijkl},$$

podemos escrever as identidades da proposição anterior da seguinte forma:

$$R_{ijkl} + R_{jkli} + R_{klij} = 0$$

$$R_{ijkl} = -R_{jikl}$$

$$R_{ijkl} = -R_{ijlk}$$

$$R_{ijkl} = R_{klij}.$$

Agora vamos estudar a noção de derivada covariante em tensores.

Definição 11. *Seja T um tensor de ordem r. A diferencial covariante ∇T de T é um tensor de ordem (r+1) dada por*

$$\nabla T(Y_1, \cdots, Y_r, Z) = Z(T(Y_1, \cdots, Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1, \cdots, Y_r) - \cdots - T(Y_1, \cdots, \nabla_Z Y_r)$$

Assim, para $Z \in \mathfrak{X}(M)$, definimos a derivada covariante $\nabla_Z T$ de T em relação a Z sendo um tensor de ordem r dado por

$$\nabla_Z T(Y_1, ..., Y_r) = \nabla T(Y_1, ..., Y_r, Z)$$

Definição 12. *O tensor curvatura de Ricci $\mathrm{Ric} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$ é um tensor de ordem 2, obtido pelo "traço"do tensor curvatura de Riemann, ou seja,*

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \mathrm{tr}(Z \longrightarrow R(X, Z)Y),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Dado uma base ortonormal $\{e_i\}$ é uma base de T_pM, temos que

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \sum_i \langle R(X, e_i)Y, e_i\rangle.$$

Definição 13. *A curvatura escalar é a função* $S : M \longrightarrow \mathbb{R}$*, dada por*

$$S(p) = \text{trRic}.$$

Se $\{e_i\}$ é uma base ortonormal de T_pM, então

$$S(p) = \sum_i \text{Ric}(e_i, e_i) = \sum_{k,i} \langle R(e_k, e_i)e_i, e_k\rangle.$$

A próxima proposição permite definir a curvatura seccional.

Proposição 2. *Seja* $\sigma \subset T_pM$ *um subespaço bidimensional e sejam* $X, Y \in \sigma$ *dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(X, Y) = \frac{R(X, Y, X, Y)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2}$$

não depende da escolha dos vetores $X, Y \in \sigma$*.*

Para uma prova veja [1].

Com essa proposição podemos definir o objeto geométrico denominado de curvatura seccional.

Definição 14. *Dado um ponto* $p \in M^n$ *e um subespaço bidimensional* $\sigma \subset T_pM$ *o número real* $K(X, Y) = K(p, \sigma)$*, onde* X *e* Y *são linearmente independentes em* σ*, é chamado curvatura seccional de* σ *em* p*.*

1.3 Imersões Isométricas

Nesta seção iremos apresentar alguns resultados necessários para o nosso texto. Sejam $(M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_M)$ e $(\overline{M}^k, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\overline{M}})$ variedades Riemannianas, dizemos que uma aplicação $\varphi\colon M^n \longrightarrow \overline{M}^k$ é uma imersão isométrica se

$$\langle d\varphi_p(X_p), d\varphi_p(Y_p)\rangle_{\overline{M}} = \langle X_p, Y_p\rangle_M,$$

para quaisquer $p \in M^n$ e $X_p, Y_p \in T_pM$. Em particular, toda imersão isométrica é uma imersão, como tal, localmente um mergulho. Portanto, sempre que não houver perigo de confusão, identificaremos $p \in M^n$ com $\varphi(p) \in \overline{M}^k$ e denotaremos as métricas de M^n e $\overline{M}^k$ simplesmente por $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Seja agora $\varphi\colon M^n \longrightarrow \overline{M}^{k+n}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M^n em uma variedade Riemanniana $(\overline{M}^{k+n}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\overline{M}})$. Definindo, para $p \in M^n$ e $X_p, Y_p \in T_pM$,

$$\langle d\varphi_p(X_p), d\varphi_p(Y_p)\rangle_{\overline{M}} = \langle X_p, Y_p\rangle,$$

obtemos uma métrica Riemanniana em M^n, denominada a métrica induzida pela imersão φ. Munindo M^n com tal métrica tornamos φ uma imersão isométrica. Para cada $p \in M^n$, o produto interno de $T_p\overline{M}$ induz uma decomposição de $T_p\overline{M}$ como soma direta ortogonal,

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp}.$$

Denotamos por $\mathfrak{X}(M)^{\perp}$ o espaço dos campos normais. Seja $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana de $\overline{M}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M, e $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ extensões locais a $\overline{M}$, definimos uma conexão em M^n por

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T.$$

Verifica-se que esta é a conexão Riemanniana relativa á métrica induzida de M. Consideramos em $TM^{\perp}$ a métrica obtida pela restrição da métrica de $T\overline{M}$. Para $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, uma verificação permite mostrar que

$$\nabla^{\perp}_X\eta = (\overline{\nabla}_X\eta)^{\perp}, \tag{1.3}$$

onde $(\quad)^{\perp}$ denota projeção sobre $TM^{\perp}$, defini uma conexão $\nabla^{\perp} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^{\perp} \longrightarrow \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ no fibrado normal de M. Tal conexão é compatível com a métrica de $TM^{\perp}$, uma vez que se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta, \xi \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ então

$$X\langle\eta,\xi\rangle = \langle\overline{\nabla}_X\eta,\xi\rangle + \langle\eta,\overline{\nabla}_X\xi\rangle = \langle\xi,\nabla^{\perp}_X\eta\rangle + \langle\eta,\nabla^{\perp}_X\xi\rangle,$$

a conexão $\nabla^{\perp}$ é denominada a conexão normal da imersão.

A segunda forma fundamental (vetorial) da imersão φ é a aplicação $\beta : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, definida para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ por

$$\beta(X,Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^{\perp} = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y,$$

onde β é bilinear, simétrica e suave. Em particular, para cada $p \in M$ a aplicação $\beta_p(X,Y) = \beta(X,Y)_{(p)}$ depende somente dos valores de X e Y em p, daí

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \beta(X,Y).$$

Associada a β temos a aplicação $S : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^{\perp} \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada pela igualdade

$$\langle S(X,\eta), Y\rangle = \langle \beta(X,Y), \eta\rangle.$$

Denotando $S_\eta X = S(X,\eta)$ e $\Pi = \langle S_\eta X, Y\rangle$, obtemos um operador auto-adjunto S_η : $\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, denominado o operador de forma, ou de Weingarten, da imersão na direção η. Assim,

$$\begin{aligned}
\langle S_\eta X, Y\rangle &= \langle S(X,\eta), Y\rangle \\
&= \langle \beta(X,Y), \eta\rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y, \eta\rangle \\
&= -\langle \overline{\nabla}_X \eta, Y\rangle = \langle -(\overline{\nabla}_X \eta)^{T}, Y\rangle,
\end{aligned}$$

implicando,

$$S_\eta X = -(\overline{\nabla}_X \eta)^{T}, \tag{1.4}$$

por (1.3) e (1.4), obtemos a equação de Weingarten

$$\overline{\nabla}_X \eta = -S_\eta X + \nabla^{\perp}_X \eta$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\eta \in \mathfrak{X}(M)^{T}$.

A proposição a seguir relaciona, para campos em M, as componentes tangencial e normal do tensor curvatura de $\overline{M}$ com o tensor curvatura de M e a segunda forma fundamental da imersão. As fórmulas presentes na proposição abaixo são conhecidas na literatura como as equações de Gauss e Codazzi.

Proposição 1.3.1. *Se* φ*:* $M^n \longrightarrow \overline{M}^k$ *é uma imersão isométrica e* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$*, então:*

a) ***(Gauss)*** $(\overline{R}(X,Y)Z)^{T} = R(X,Y)Z + S_{\beta(X,Z)}Y - S_{\beta(X,Z)}.X$

b) ***(Codazzi)*** $(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_X \beta)(Y,Z) - (\nabla^{\perp}_Y \beta)(X,Z)$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X,Y)Z &= \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z \\
&= \overline{\nabla}_X(\nabla_Y X + \beta(Y,Z)) - \overline{\nabla}_Y(\nabla_X Z + \beta(X,Z)) - (\nabla_{[X,Y]} Z + \beta([X,Y],Z)) \\
&= (\nabla_X \nabla_Y Z + \beta(X, \nabla_Y Z)) - S_{\beta(Y,Z)}X + \nabla^{\perp}_X \beta(Y,Z) - (\nabla_Y \nabla_X Z \\
&+ \beta(Y, \nabla_X Z)) + S_{\beta(X,Z)}Y - \nabla^{\perp}_Y \beta(X,Z) - (\nabla_{[X,Y]} Z + \beta(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= R(X,Y)Z + S_{\beta(X,Z)}Y - S_{\beta(Y,Z)}X + \nabla^{\perp}_X \beta(Y,Z) - \beta(\nabla_X Y, Z) - \beta(Y, \nabla_X Z)\\
&- (\nabla^{\perp}\beta(X,Z) - \beta(\nabla_Y X, Z) - \beta(X, \nabla_Y Z)\\
&= R(X,Y)Z + S_{\beta(X,Z)Y} - S_{\beta(Y,Z)}X + (\nabla^{\perp}_X \beta)(Y,Z) - (\nabla^{\perp}_Y \beta)(X,Y).
\end{aligned}$$

Basta agora tomar componente tangente e normal em ambos os membros da igualdade.

□

A fórmula do corolário a seguir são conhecidas genericamente pelo nome de equação de Gauss.

Corolário 1. *Se* $\varphi\colon M^n \longrightarrow \overline{M}^k$ *é uma imersão isométrica e* $W, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$*, então*

$$\langle R(W,X)Y, Z\rangle = \langle \overline{R}(W,X)Y, Z\rangle + \langle \beta(W,Y), \beta(X,Z)\rangle - \langle \beta(W,Z), \beta(X,Y)\rangle \tag{1.5}$$

Em particular, se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *são ortonormais, então*

$$K(X,Y) = \overline{K}(X,Y) + \langle \beta(X,X), \beta(Y,Y)\rangle - |\beta(X,Y)|^2,$$

onde K *e* $\overline{K}$ *denotam as curvaturas seccionais de* M *e* $\overline{M}$*, respectivamente.*

Demonstração. Segue da Proposição 1.3.1 que

$$\begin{aligned}
\langle \overline{R}(W,X)Y, Z\rangle &= \langle (\overline{R}(W,X)Y)^T, Z\rangle\\
&= \langle R(W,X)Y + S_{\beta(W,Y)}X - S_{\beta(X,Y)}W, Z\rangle\\
&= \langle R(W,X)Y, Z\rangle + \langle \beta(X,Z), \beta(W,Y)\rangle - \langle \beta(W,Z), \beta(X,Y)\rangle \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

Para o que falta, usando (1.6) obtemos

$$\begin{aligned}
K(X,Y) &= \langle R(X,Y)Y, X\rangle\\
&= \langle \overline{R}(X,Y)Y, X\rangle - \langle \beta(Y,X), \beta(X,Y)\rangle + \langle \beta(X,X), \beta(Y,Y)\rangle\\
&= \overline{K}(X,Y) + \langle \beta(X,X), \beta(Y,Y)\rangle - |\beta(X,Y)|^2
\end{aligned}$$

□

Para o próximo resultado, consideramos um campo vetorial ortonormal $\{e_1, e_2\}$ em T_pM e um campo vetorial em $\overline{M}^k$ tal que é normal a T_pM, obteremos uma expressão para a curvatura média de M em função do Ric, K e Π.

Lema 1. *Se* $\varphi\colon M^n \longrightarrow \overline{M}^k$ *é uma imersão isométrica e* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e um* N *sendo um campo vetorial em* $\overline{M}^k$ *tal que é normal a* T_pM*, então*

$$R^M = 2(Ric(N,N) + K) - H^2 + |\Pi|^2.$$

Demonstração. Considere $\{e_1, e_2, N\}$ uma base de $T_p\overline{M}^k$ de modo que $\{e_1, e_2\}$ sejam autovetores do operador de forma S_N definido em T_pM, daí

$$\begin{aligned}
R^M &= Ric(e_1,e_1) + Ric(e_2,e_2) + Ric(N,N) \\
&= \overline{R}(e_1,e_2,e_1,e_2) + \overline{R}(e_1,N,e_1,N) + \overline{R}(e_2,e_1,e_2,e_1) + \overline{R}(e_2,N,e_2,N) + Ric(N,N) \\
&= 2Ric(N,N) + R(e_1,e_2,e_1,e_2) + \langle\beta(e_1,e_1),\beta(e_2,e_2)\rangle - \langle\beta(e_1,e_2),\beta(e_1,e_2)\rangle \\
&+ R(e_2,e_1,e_2,e_1) + \langle\beta(e_2,e_2),\beta(e_1,e_1)\rangle - \langle\beta(e_2,e_1),\beta(e_2,e_1)\rangle \\
&= 2(Ric(N,N) + K) - 2\langle\beta(e_1,e_1),\beta(e_2,e_2)\rangle + 2|\beta(e_1,e_2)|^2. \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

Assim, temos que $2|\beta(e_1,e_2)| = 0$, pois $\{e_1, e_2\}$ são autovetores, uma vez que

$$H = \langle\beta(e_1,e_1),N\rangle + \langle\beta(e_2,e_2),N\rangle = \langle\nabla_{e_1}N, e_1\rangle + \langle\nabla_{e_2}N, e_2\rangle,$$

segue que

$$\begin{aligned}
H^2 &= (\langle\nabla_{e_1}N,e_1\rangle + \langle\nabla_{e_2}N,e_2\rangle)^2 \\
&= (\langle\nabla_{e_1}N,e_1\rangle)^2 + 2\langle\nabla_{e_1}N,e_1\rangle\langle\nabla_{e_2}N,e_2\rangle + (\langle\nabla_{e_2}N,e_2\rangle)^2 \\
&= (\langle\nabla_{e_1}N,e_1\rangle)^2 + 2\langle\beta(e_2,e_2),N\rangle\langle\beta(e_1,e_1),N\rangle + (\langle\nabla_{e_2}N,e_2\rangle)^2 \\
&= (\langle\beta(e_1,e_1),N\rangle)^2 + 2\langle\beta(e_1,e_1),\beta(e_2,e_2)\rangle + (\langle\beta(e_2,e_2),N\rangle)^2. \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

Substituindo (1.8) em (1.7) obtemos

$$R^M = 2(Ric(N,N) + K) - H^2 + (\langle\beta(e_2,e_2),N\rangle)^2 + (\langle\beta(e_1,e_1),N\rangle)^2. \qquad (1.9)$$

Por outro lado

$$|\Pi|^2 = (\langle\beta(e_1,e_1),N\rangle)^2 + (\langle\beta(e_2,e_2),N\rangle)^2$$

, substituindo em (1.9), obtemos

$$R^M = 2(Ric(N,N) + K) - H^2 + |\Pi.|^2$$

Que finaliza a prova do lema. $\square$

Se $\varphi\colon M^n \longrightarrow \overline{M}^{k+n}$ é uma imersão isométrica, um referencial ortonormal $\{\overline{e}_1, ..., \overline{e}_{k+n}\}$ em um aberto $\overline{U} \subset \overline{M}$ é dito adaptado à imersão se as restrições de $\overline{e}_1, ..., \overline{e}_{k+n}$ a $U = \overline{U} \bigcap M$ formarem um referencial em U. A existência de referenciais adaptados a uma imersão φ como acima é decorrência imediata da aplicação do algoritmo de ortonormalização de Gramm - Schmidt aos campos coordenados de uma parametrização adaptada à imersão.

Sendo β a segunda forma fundamental de φ e $\{e_1, \cdots, e_n, n_1, \cdots, n_k\}$ as restrição de um referencial adaptado a um aberto $U \subset M$, considere o campo

$$\overrightarrow{H} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \beta(e_i, e_i). \tag{1.10}$$

A igualdade $\beta(e_i, e_i) = \sum_{j}^{k} \langle \beta(e_i, e_i), n_j \rangle n_j = \langle S_{n_j}(e_i), e_i \rangle n_j$, substituindo em (1.7) obtemos

$$\overrightarrow{H} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Tr}(S_{n_j}) n_j, \tag{1.11}$$

de maneira que $\overrightarrow{H}$ independe tanto do referencial tangente $\{e_1, \cdots, e_n\}$ quanto do referencial normal $\{n_1, ..., n_k\}$. Fica assim bem definido um campo $\overrightarrow{H} \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, sendo seu valor em $p \in M$ conhecido como o vetor curvatura média de φ em p.

Definição 15. *Uma imersão isométrica $\varphi\colon M^n \longrightarrow \overline{M}^{k+n}$ é minima se $\overrightarrow{H} \equiv 0$.*

Suponha agora M conexa, k = 1 e $\overline{M}^{n+1}$ orientada. Se M^n for orientável, oriente-a pela escolha de um campo normal unitário N globalmente definido. Denote também por H a função $H : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que HN seja o vetor curvatura média de φ, note que usando (1.8) temos $\overrightarrow{H} = \frac{1}{n}(\langle S_N(e_1), e_1 \rangle N + \cdots + \langle S_N(e_k), e_k \rangle N)$, daí considerando H = $\langle S_N(e_1), e_1 \rangle) + \cdots + \langle S_N(e_k), e_k \rangle$ logo $\overrightarrow{H} = HN$.

Definição 16. *Uma imersão isométrica $\varphi : M \longrightarrow \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$ se $\beta \equiv 0$. A imersão φ é totalmente geodésica se for geodésica em todo $p \in M$.*

Proposição 3. *Uma imersão isométrica $\varphi : M \longrightarrow \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$ se e só se toda geodésica de M que passa por p for geodésica de $\overline{M}$ em p.*

Para uma prova veja [1].

1.4 Primeira e segunda variação da área

Nesta seção demonstraremos algumas fórmulas gerais para variações de hipersuperfícies propriamente imersas em $(M^{n+1}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, tal que o bordo da hipersuperfície esteja contida no bordo do ambiente ∂M, dentre elas as fórmulas da primeira e segunda variação da área.

Nós inicialmente fixaremos algumas notações. Seja $(M^{n+1}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma variedade Riemanniana com bordo ∂M, considere X o campo normal unitário ao longo de ∂M apontando para fora de ∂M.

Considere Σ uma hipersuperfície com bordo $\partial\Sigma$ e assumimos Σ imerso em M tal que $\partial\Sigma$ esteja contido em ∂M. O conormal unitário de $\partial\Sigma$ apontando para fora de $\partial\Sigma$ será denotado por η. Seja N um campo local normal unitário em Σ, a segunda forma fundamental é um tensor simétrico Π em Σ dada por $\Pi(U,W) = g(\nabla_U N, W)$ para cada $U, W \in T\Sigma$ e Σ é bordo livre quando $\eta = X$ em $\partial\Sigma$.

Consideraremos uma variação de Σ dada por $\psi : (-\varepsilon,\varepsilon)\times\Sigma \longrightarrow M$ tal que, para cada $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, a aplicação $\psi_t : \Sigma \longrightarrow M$ é uma imersão de Σ em M com $\psi_t(\partial\Sigma)$ contido em ∂M.

Para cada t iremos denotar as quantidades associadas a hipersuperfície $\Sigma_t = \psi_t(\Sigma)$ por, N_t o campo normal unitário a Σ_t e H_t a curvatura média de Σ_t.

Para simplificar usaremos as seguintes notações

$$\partial_t = \frac{\partial\psi}{\partial t},\ \partial_i = \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \ \text{ e } \ g_{ij} = (\partial_i, \partial_j),$$

onde i varia de 1 a n. Nós podemos decompor o campo variacional na parte tangente e normal

$$\partial_t = \partial_t^T + \nu_t N_t,$$

onde ν_t é a função definida em Σ dada por $\nu_t = g(\partial_t, N_t)$.

Lema 2. *Seja* $G(t) = (a_{ij}(t))$, $t \in I$ *uma família suave de matrizes* $n \times n$*, então*

$$\frac{d}{dt}\det(G(t)) = \det(G(0))\operatorname{Tr}(G'(o)).$$

Para uma prova veja [15].

Lema 3.

$$\partial_t g^{ij} = -2g^{ik}g^{jl}g(\nabla_{\partial_k}\partial_t, \partial_l), \tag{1.12}$$
$$\partial_t g_{ij} = g(\nabla_{\partial_i}\partial_t, \partial_j) + g(\partial_i, \nabla_{\partial_j}\partial_t). \tag{1.13}$$

Demonstração. Como $[\partial_t, \partial_i] = 0$ então $\nabla_{\partial_t}\partial_i = \nabla_{\partial_i}\partial_t$, daí juntamente com a compatibilidade da métrica provamos (1.13).

Considere $g^{ij}.g_{kj} = \delta_{ij}$, logo derivando essa expressão obtemos

$$\sum_k \frac{dg^{ik}}{dt}g_{kj} + \sum_k g^{ik}\frac{dg_{kj}}{dt} = 0,$$

donde

$$\frac{dg^{ij}}{dt} = -\frac{dg_{ij}}{dt}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\frac{dg^{ij}}{dt} &= -2g(\nabla_{\partial_i}\partial_t, \partial_j) \\ &= \sum_k(-2g^{ik}g(\nabla_{\partial_k}\partial_t, \partial_j)) \\ &= \sum_{k,l}(-2g^{ik}g^{jl}g(\nabla_{\partial_k}\partial_t, \partial_l)).\end{aligned}$$

□

Com os Lemas 2 e 3 demonstraremos a primeira variação da área.

Proposição 4. *Dada uma variação $\{\Sigma_t\}$ de Σ, a primeira variação da área é dada por*

$$\frac{d}{dt}|\Sigma_t| = \int_\Sigma H_t\nu_t dA_t + \int_{\partial\Sigma} g(\eta_t, \frac{\partial\psi}{\partial t})d\Sigma_t$$

Demonstração. Considere a matriz $[g_{ij}]$, lembrando que $\int_\Sigma \sqrt{\det[g_{ij}]}dx_1...dx_n = \int_\Sigma d\Sigma$ temos que

$$\partial_t\sqrt{\det[g_{ij}]} = \frac{1}{2}(\det[g_{ij}])^{-\frac{1}{2}}\partial_t(\det[g_{ij}]).$$

Usando o lema 2, obtemos

$$\begin{aligned}\partial_t\sqrt{\det[g_{ij}]} &= \frac{1}{2}(\det[g_{ij}])^{-\frac{1}{2}}(\det[g_{ij}])g^{ij}\partial_t g_{ij} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\det[g_{ij}]}g^{ij}\partial_t g_{ij},\end{aligned}$$

Pelo lema 3, teremos

$$\partial_t\sqrt{\det[g_{ij}]} = \frac{1}{2}\sqrt{\det[g_{ij}]}g^{ij}(g(\nabla_{\partial_i}\partial_t,\partial_j)+g(\partial_i,\nabla_{\partial_j}\partial_t)),$$

daí

$$\begin{aligned}\partial_t\sqrt{\det[g_{ij}]} &= \sqrt{\det[g_{ij}]}g^{ij}(g(\nabla_{\partial_i}\partial_t,\partial_j))\\ &= \sqrt{\det[g_{ij}]}g^{ij}(g(\nabla_{\partial_i}(\partial_t^T+\nu_t N_t),\partial_j))\\ &= \sqrt{\det[g_{ij}]}g^{ij}(g(\nabla_{\partial_i}\partial_t^T,\partial_j)+g(\nabla_{\partial_i}\nu_t N_t,\partial_j)).\end{aligned}$$

Uma vez que $divX = g^{ij}g(\nabla_{\partial_i}X,\partial_j)$ e $g(N_t,\partial_j)=0$, segue que

$$\begin{aligned}\partial_t\sqrt{\det[g_{ij}]} &= \sqrt{\det[g_{ij}]}(g^{ij}g(\nabla_{\partial_i}\partial_t^T,\partial_j)+g^{ij}g(\nabla_{\partial_i}\nu_t N,\partial_j))\\ &= \sqrt{\det[g_{ij}]}(g^{ij}g(\nabla_{\partial_i}\partial_t^T,\partial_j)+g^{ij}g(\nu_t\nabla_{\partial_i}N_t+\partial_i(\nu_t)N_t,\partial_j))\\ &= \sqrt{\det[g_{ij}]}(div_{\Sigma_t}\partial^T+H_t\nu_t).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|\Sigma_t| &= \int_\Sigma\frac{d}{dt}dA_t\\ &= \int_\Sigma(div_{\Sigma_t}\partial^T+H_t\nu_t)dA_t\\ &= \int_{\partial\Sigma}g(\eta_t,\frac{\partial\psi}{\partial t})dL_t+\int_\Sigma(H_t\nu_t)dA_t,\end{aligned}$$

onde usamos o teorema da divergência na última igualdade. $\square$

Note que Σ é ponto crítico da primeira variação da área se e somente se, Σ é uma superfície mínima com bordo livre. De fato, segue da Proposição 4 que se Σ for mínima com bordo livre, então é ponto crítico da primeira variação da área. Reciprocamente, suponha que a imersão ψ seja ponto crítico da primeira variação da área, fixe um $p\in\Sigma$, $U\subset\Sigma$ uma bola regular centrada em p e uma função suave $f:\Sigma\longrightarrow[0,1]$ suportada em U, tal que $f(p)=1$. Seja exp a aplicação exponencial de M, considere a aplicação $\Psi:(-\varepsilon,\varepsilon)\times\Sigma\longrightarrow M$ dada por

$$\Psi(t,q)=exp_q(tf(q)\overrightarrow{H}(q))$$

diminuindo U e trocando f por $\frac{f}{K}$ para $K>0$ suficientemente grande se necessário, temos Ψ bem definida e suave. Segue daí

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}(q)\Big|_{t=0}=d(exp_{\Psi(q)})_0(f(q)\overrightarrow{H}(q))=f(q)\overrightarrow{H}(q).$$

Por hipótese ψ é ponto crítico da primeira variação da área, donde

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Sigma} g(\eta, \frac{\partial\Psi}{\partial t})dL + \int_{\Sigma} g(\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \overrightarrow{H})dA \\ &= \int_{\partial\Sigma} g(\eta, \frac{\partial\psi}{\partial t})dL + \int_{\Sigma} g(f\overrightarrow{H}, \overrightarrow{H})dA \\ &= \int_{\Sigma} f|\overrightarrow{H}|dA, \end{aligned}$$

logo $0 = \overrightarrow{H} = NH$ donde $H = 0$ portanto Σ é miníma, pela Proposição 4 temos $0 = \int_{\partial\Sigma} g(\eta, \frac{\partial\psi}{\partial t})d\Sigma_t$, de forma análoga acima teremos $g(\eta, N) = 0$ portanto $N \in T\partial\Sigma$ implicando que Σ é bordo livre.

Agora provaremos alguns lemas necessários para obtermos a segunda variação da área.

Lema 4.

$$\nabla_{\partial_i} N_t = g^{kl} g(\nabla_{\partial_i} N_t, \partial_l)\partial_k, \tag{1.14}$$

$$\nabla_{\partial_t} N_t = \nabla_{(\partial_t)^T} N_t - \nabla^{\Sigma_t}\nu_t. \tag{1.15}$$

Demonstração. Temos que $g(N_t, N_t) = 1$, daí

$$0 = \partial_i g(N_t, N_t) = 2g(\nabla_{\partial_i} N_t, N_t)$$

$$0 = \partial_t g(N_t, N_t) = 2g(\nabla_{\partial_t} N_t, N_t),$$

assim, tem-se que $\nabla_{\partial_t} N_t, \nabla_{\partial_i} N_t \in T\Sigma_t$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_i} N_t &= \alpha_k \partial_k \\ &= g(\nabla_{\partial_i} N_t, \partial_k)\partial_k \\ &= g^{kl} g(\nabla_{\partial_i} N_t, \partial_l)\partial_k. \end{aligned}$$

Provando assim (1.14). Para provarmos (1.15), use que $g(N_t, \partial_i) = 0$ para obter

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_t} N_t &= \alpha_k \partial_k \\ &= g(\nabla_{\partial_t} N_t, \partial_k)\partial_k \\ &= g^{ik} g(\nabla_{\partial_t} N_t, \partial_k)\partial_i \\ &= (-g^{ik} g(N_t, \nabla_{\partial_t}\partial_k)\partial_i) \\ &= (-g^{ik} g(N_t, \nabla_{\partial_k}\partial_t)\partial_i). \end{aligned}$$

Lembre que

$$\begin{aligned} \nabla^{\Sigma_t}\nu_t &= e_l(\nu_t)e_l \\ &= g^{lm} e_m(\nu_t)e_l. \end{aligned}$$

Como $\nabla_{\partial_i} N_t \in T\Sigma_t$, temos que

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_t} N_t &= [-g^{ik} g(N_t, \nabla_{\partial_k}(\partial_t)^T)\partial_i - g^{ik} g(N_t, \partial_k(\nu_t)N_t)\partial_i - g^{ik}\nu_t g(N_t, \nabla_{\partial_k} N_t)\partial_i] \\
&= [-g^{ik} g(N_t, \nabla_{\partial_k}(\partial_t)^T)\partial_i - g^{ik}\partial_k(\nu_t)\partial_i] \\
&= [-g^{ik} g(N_t, \nabla_{(\partial_t)^T}\partial_k)\partial_i - g^{ik}\partial_k(\nu_t))\partial_i].
\end{aligned}$$

Agora basta tomar o traço na igualdade acima, para obtermos

$$\nabla_{\partial_t} N_t = \nabla_{(\partial_t)^T} N_t - \nabla^{\Sigma_t}\nu_t.$$

Isto finaliza a prova do Lema. □

Prosseguindo a equação de Codazzi

$$g(R(U,V)N_t, W) = (\nabla^{\Sigma_t}_U \Pi)(V,W) - (\nabla^{\Sigma_t}_V \Pi)(U,W),$$

onde R denota o tensor de curvatura de Riemann de M e U, V e W campos tangentes a Σ_t.

Em seguida tome os campos $U = \partial_i$, $W = \partial_k$, tomando o traço equação de Codazzi temos

$$\begin{aligned}
g^{ik} g(R(\partial_i, V)N_t \partial_k) &= Ric(V, N_t) \\
&= g^{ik}(\nabla^{\Sigma_t}_{\partial_i}\Pi)(V,\partial_k) - g^{ik}(\nabla^{\Sigma_t}_V \Pi)(\partial_i,\partial_k)) \\
&= g^{ik}(\nabla^{\Sigma_t}_{\partial_i}\Pi)(V,\partial_k) - (\nabla^{\Sigma_t}_V g^{ik}\Pi)(\partial_i,\partial_k)).
\end{aligned}$$

Lembre que $H = g^{ij}\Pi(\partial_i, \partial_k)$, então

$$Ric(V, N_t) = g^{ik}(\nabla^{\Sigma_t}_{\partial_i}\Pi)(V,\partial_k) - dH(V), \tag{1.16}$$

para cada V tangente a Σ_t.

Lema 5. *A variação da curvatura média é dada por*

$$\partial_t H_t = dH_t(\partial_t^T) - L_{\Sigma_t}\nu_t,$$

onde $L_{\Sigma_t} = \Delta_{\Sigma_t} + Ric(N_t, N_t) + |\Pi|^2$ *é operador de Jacobi.*

Demonstração. Temos que a curvatura média é dada por

$$\begin{aligned}
H_t &= g(\nabla_{\partial_i} N_t, \partial_i) \\
&= g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} N_t, \partial_j),
\end{aligned}$$

daí

$$\partial_t H_t = \partial_t g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} N_t, \partial_j) + g^{ij} g(\nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_i} N_t, \partial_j) + g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} N_t, \nabla_{\partial_t} \partial_j)$$

usando o Lema (3) e a equação (1.2), temos que

$$\begin{aligned} \partial_t H_t &= -2g^{ik} g^{jl} g(\nabla_{\partial_k} \partial_t, \partial_l) g(\nabla_{\partial_i} N_t, \partial_j) - g^{ij} g(R(\partial_t, \partial_i) N_t, \partial_j) \\ &+ g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_t} N_t, \partial_j) + g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} N_t, \nabla_{\partial_j} \partial_t). \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} g^{jl} g(\nabla_{\partial_k} \partial_t, \partial_l) g(\nabla_{\partial_i} N_t, \partial_j) &= g(\nabla_{\partial_k} \partial_t, \partial_l) g(\nabla_{\partial_i} N_t, \partial_l) \\ &= g(\nabla_{\partial_k} \partial_t, g(\nabla_{\partial_i} N_t, \partial_l) \partial_l) \\ &= g(\nabla_{\partial_k} \partial_t, \nabla_{\partial_i} N_t), \end{aligned}$$

além disso,

$$g^{ij} g(R(\partial_t, \partial_i) N_t, \partial_j) = Ric(\partial_t, N_t).$$

Portanto usando (1.15), teremos

$$\begin{aligned} \partial_t H_t &= -g^{ij} g(\nabla_{\partial_k} \partial_t, \nabla_{\partial_i} N_t) - Ric(\partial_t, N_t) + g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} (\nabla_{(\partial_t)^T} N_t), \partial_j) \\ &- g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} (\nabla^{\Sigma_t} v_t), \partial_j). \end{aligned}$$

Agora usaremos o traço da equação de Codazzi para obter

$$\begin{aligned} Ric((\partial_t)^T, N_t) &= g^{ik} (\nabla^{\Sigma_t}_{\partial_i} \Pi)((\partial_t)^T, \partial_j) - dH_t((\partial_t)^T) \\ &= g^{ij} \partial_i g(\nabla_{(\partial_t)^T} N_t, \partial_j) - g^{ij} g(\nabla_{(\nabla_{\partial_i} (\partial_t)^T)} N_t, \partial_j) \\ &- g^{ij} g(\nabla_{(\partial_t)^T} N_t, (\nabla_{\partial_i} \partial_j)^T) - dH((\partial_t)^T) \\ &= g^{ij} (\partial_i g(\nabla_{(\partial_i)^T} N_t, \partial_j) - g(\partial_{(\partial_t)^T} N_t, \nabla_{\partial_i} \partial_j)) \\ &- g^{ij} g(\nabla_{\partial_j} N_t, (\nabla_{\partial_i} (\partial_t)^T)^T) - dH((\partial_t)^T) \\ &= g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} (\nabla_{(\partial_t)^T} N_t), \partial_j) - g^{ij} g(\nabla_{\partial_j} N_t, \nabla_{\partial_i} (\partial_t)^T) - dH((\partial_t)^T). \end{aligned}$$

Daí temos que

$$\begin{aligned}
\partial_t H_t &= -g^{ij} g(\nabla_{\partial_k}\partial_t, \nabla_{\partial_i} N_t) - Ric((\partial_t)^T + \nu_t N_t, N_t) \\
&+ g^{ij} g(\nabla_{\partial_i}(\nabla_{(\partial_t)^T} N_t, \partial_j) - g^{ij} g(\nabla_{\partial_i}(\nabla^{\Sigma_t}\nu_t), \partial_j) \\
&= -g^{ij} g(\nabla_{\partial_k}\partial_t, \nabla_{\partial_i} N_t) - Ric((\partial_t)^T, N_t) - \nu_t Ric(N_t, N_t) \\
&+ g^{ij} g(\nabla_{\partial_i}(\nabla_{(\partial_t)^T} N_t, \partial_j) - g^{ij} g(\nabla_{\partial_i}(\nabla^{\Sigma_t}\nu_t), \partial_j) \\
&= -g^{ij} g(\nabla_{\partial_k}\partial_t, \nabla_{\partial_i} N_t) - g^{ij} g(\partial_{\partial_i}(\nabla_{(\partial_t)^T} N_t), \partial_j) \\
&+ g^{ij} g(\nabla_{\partial_j} N_t, \nabla_{\partial_i}(\partial_t)^T) + dH((\partial_t)^T) - \nu_t Ric(Nt, N_t) \\
&+ g^{ij} g(\nabla_{\partial_i}(\nabla_{(\partial_t)^T} N_t, \partial_j) - g^{ij} g(\nabla_{\partial_i}(\nabla^{\Sigma_t}\nu_t), \partial_j) \\
&= g^{ij} g(\nabla_{\partial_k}(-\partial_t + (\partial_t)^T), \nabla_{\partial_i} N_t) \\
&+ dH((\partial_t)^T) - \nu_t Ric(N_t, N_t) - g^{ij} g(\nabla_{\partial_i}(\nabla^{\Sigma_t}\nu_t), \partial_j) \\
&= -g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} N_t, \partial_j(\nu_t) N_t) + g(\nabla_{\partial_i} N_t, \nabla_{\partial_j} N_t)\nu_t] \\
&+ dH((\partial_t)^T) - \nu_t Ric(Nt, N_t) - g^{ij} g(\nabla_{\partial_i}(\nabla^{\Sigma_t}\nu_t), \partial_j) \\
&= dH((\partial_t)^T) - g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} N_t, \nabla_{\partial_j} N_t)\nu_t - \nu_t Ric(N_t, N_t) \\
&- g^{ij} g(\nabla_{\partial_i}(\nabla^{\Sigma_t}\nu_t), \partial_j) \\
&= dH((\partial_t)^T) + g^{ij}(g(\nabla_{\partial_i} N_t, \nabla_{\partial_j} N_t)\nu_t \\
&- Ric(N_t, N_t)\nu_t - g^{ij} g(\nabla_{\partial_i}(\nabla^{\Sigma_t}\nu_t), \partial_j))
\end{aligned}$$

□

Lema 6. *Se Σ_0 é bordo livre e $(\partial_t)^T = 0$ em t=0, então*

$$(\partial_t H_t)\Big|_{t=0} = -L_{\Sigma_t}\nu_0$$

e

$$\partial_t g(N_t, X)\Big|_{t=0} = -\frac{\partial \nu_o}{\partial \eta_o} + g(N_0, \nabla_{N_0} X)\nu_o.$$

Demonstração. A primeira expressão segue diretamente do Lema 5, para a segunda expressão note que

$$\partial_t g(N_t, X)\Big|_{t=0} = g(\nabla_{\partial_t} N_t, X)\Big|_{t=0} + g(N_t, \nabla_{\partial_t} X)\Big|_{t=0}.$$

Usando o fato que $\nabla_{\partial_t} N_t \in T\Sigma_0$ e Σ_0 é bordo livre, teremos

$$\begin{aligned}
\partial_t g(N_t, X)\Big|_{t=0} &= -g(\nabla^{\Sigma_0}\nu_0, \eta_0) + \nu_0 g(N_0, \nabla_{N_0} X) \\
&= -\frac{\partial \nu_0}{\partial \eta_0} + g(N_0, \nabla_{N_0} X)\nu_0.
\end{aligned}$$

$\square$

Lema 7. *Se cada* Σ_t *é uma superfície com bordo livre e curvatura média constante, então*

$$\partial_t H_t = -L_{\Sigma_t} \nu_t$$

e

$$\frac{\partial \nu_t}{\partial \nu_t} = g(N_t, \nabla_{N_t} X)\nu_t.$$

Demonstração. A primeira expressão segue do Lema 5, pois como sua curvatura média é constante então a sua diferencial é nula. A segunda expressão também segue do Lema 5, pois como Σ_t é bordo livre então g(N_t, X) = g(N_t, η_t) = 0, onde ν_t é o vetor normal de $\partial\Sigma_t$. $\square$

Dado um ponto crítico do funcional área, isto é, uma superfície miníma com bordo livre Σ, usaremos as fórmulas acima para obtermos a fórmula da segunda variação da área, restrita a variações com ∂_t^T ao longo de Σ.

Proposição 5. *Seja* Σ *uma superfície minima com bordo livre. Para cada* $\partial_t = \nu_t N_t$ *em* Σ*, a segunda variação da área é dada por*

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}|\Sigma_t| &= -\int_\Sigma L_\Sigma(\nu)\nu dA + \int_{\partial\Sigma} (\frac{\partial \nu}{d\eta}) - \Pi(N,N)^{\partial M}\nu)\nu d\Sigma \\
&= \int_\Sigma |\nabla \nu|^2 - ((Ric(N,N) + |\Pi^M|^2)\nu^2 \\
&- \int_{\partial\Sigma} \Pi^{\partial M}(N,N)\nu d\partial\Sigma.
\end{aligned}$$

Demonstração. Suponha que Σ_0 seja ponto crítico da primeira variação da área, segue da Proposição 4 que superfícies minímas com bordo livre são pontos críticos da primeira variação da área, então derivando a primeira variação no instante $t = 0$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}|\Sigma_t| &= \partial_t(\int_\Sigma H_t\nu_t dA_t)\Big|_t + \frac{d}{dt}(\int_{\partial\Sigma} g(\eta_t, \frac{\partial\psi}{\partial t})d\Sigma_t)\Big|_t \\
&= \int_\Sigma \partial_t(H_t\nu_t)\Big|_t dA_t + \int_\Sigma H_t\nu_t\partial_t(dA_t)\Big|_t \\
&+ \int_{\partial\Sigma} \frac{d}{dt}(g(\eta_t, \frac{\partial\psi}{\partial_t})\Big|_t d\Sigma_t) + \int_{\partial\Sigma} g(\eta_t, \frac{\partial\psi}{\partial t})\frac{d}{dt}(d\Sigma_t)\Big|_t.
\end{aligned}$$

Usando o fato de Σ_0 ser miníma com bordo livre temos que $H_0 = 0$ e $g(\eta_t, \frac{\partial\psi}{\partial 0}) = 0$ segue

$$\frac{d^2}{dt^2}|\Sigma_t|\Big|_{t=0} = \int_\Sigma \partial_t(H_t\nu_t)\Big|_{t=0} dA_0 + \int_{\partial\Sigma} \frac{d}{dt}(g(\eta_t, \frac{\partial\psi}{\partial t})\Big|_{t=0} d\Sigma_0. \qquad (1.17)$$

Note

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(g(\eta_t,\frac{\partial\psi}{\partial t})\Big|_{t=0} &= g(\nabla_{\partial_t}\eta_t,\frac{\partial\psi}{\partial_t})\Big|_{t=0}+g(\eta_t,\nabla_{\partial_t}\frac{\partial\psi}{\partial t})\Big|_{t=0}\\
&= g(\nabla_{\partial t}\eta_t,\partial_t^T+\nu_tN_t)\Big|_{t=0}+g(\eta_t,\nabla_{\partial_t}(\partial_t^T+\nu_tN_t))\Big|_{t=0}\\
&= g(\nabla_{\partial_t}\eta_t,\partial_t^T)\Big|_{t=0}+g(\nabla_{\partial_t}\eta_t,\nu_tN_t)\Big|_{t=0}+g(\eta_t,\nabla_{\partial_t}\partial_t^T)\Big|_{t=0}\\
&+ g(\eta_t,\nabla_{\partial_t}\nu_tN_t)\Big|_{t=0}.
\end{aligned}$$

Como $\partial_t^T=0$ então

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(g(\eta_t,\frac{\partial\psi}{\partial t})\Big|_{t=0} &= g(\nabla_{\partial_t}\eta_t,\nu_tN_t)\Big|_{t=0}+g(\eta_t,\nabla_{\partial_t}\nu_tN_t)\Big|_{t=0}\\
&= \nu_tg(\nabla_{\partial_t}\eta_t,N_t)\Big|_{t=0}+\nu_tg(\eta_t,\nabla_{\partial_t}N_t)\Big|_{t=0}+\partial_t(\nu_t)g(\eta_t,N_t)\Big|_{t=0}
\end{aligned}$$

Usando o Lema 4 e Σ_0 ser bordo livre obtemos no instante $t=0$

$$\frac{d}{dt}(g(\eta_t,\frac{\partial\psi}{\partial t})\Big|_{t=0} = -\nu_0g(\eta_0,\nabla^{\Sigma_0}\nu_0). \tag{1.18}$$

Agora substituindo (1.18) em (1.17) e usando o Lema 5 obtemos

$$\frac{d^2}{dt^2}|\Sigma_t|=-\int_\Sigma L_{\Sigma_0}\nu_0dA_0-\int_{\partial\Sigma}\nu_0\frac{\partial\nu}{\partial\eta}d\Sigma_0$$

□

Dado uma superfície mínima com bordo livre Σ em (M,g). Consideraremos a forma quadrática Q sobre $C^\infty(\Sigma)$ associada a segunda variação da área, como

$$Q(\phi,\psi)=-\int_\Sigma L_\Sigma(\phi)\psi dA+\int_{\partial\Sigma}(\frac{\partial\phi}{d\eta})-\Pi(N,N)^{\partial M}\phi)\psi d\Sigma. \tag{1.19}$$

Uma superfície mínima Σ em M é estável com bordo livre quando a segunda variação da área é não negativa para toda variação de Σ. Isto é equivalente dizermos que a forma quadrática é não negativa. No caso de superfícies fechadas, uma superfície mínima Σ é dita estável se, e somente se, seu operador de Jacobi L_Σ possui somente autovalor não negativos.

Para encerramos o capítulo, apresentaremos um importante resultado que será usado no texto.

Teorema 2. *Seja $\alpha\in(0,1)$, U domínio de $C^{2,\alpha}$ e seja $f\in C^{0,\alpha}(\overline{V})$ e $g\in C^{1,\alpha}(\overline{V})$ tal que*

$$\int_V f = \int_{\partial V} g.$$

Então o problema

$$\begin{cases} \Delta u &= f \quad em \quad V \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= g \quad em \quad \partial V \end{cases}$$

admite uma única solução na classe

$$E = \Big\{ u \in C^{2,\alpha}(\overline{V}) : \frac{1}{|V|}\int_V u = 0 \Big\}.$$

Para uma demonstração veja [16].

1.5 Teorema de Gauss-Bonnet

Nesta secção iremos apresentar o teorema de Gauss-Bonnet. Ele liga informações sobre a geometria com informações sobre a topologia da variedade. O Enunciado do teorema é apresentado sem demonstração.

Teorema 3. *Seja* (M^2, g) *uma variedade Riemanniana compacta, orientada com bordo* ∂M *e triangular, então*

$$\int_M K dA + \int_{\partial M} k = 2\pi \mathcal{X}(M)$$

onde K *é a curvatura seccional da variedade* M^2*,* k *a curvatura geodésica do bordo* ∂M^2 *e* $\mathcal{X}(M)$ *a característica de Euler da variedade* M^2*.*

Para uma demonstração veja [5]

Capítulo 2

Rigidez infinitesimal e folheações CMC

Neste capítulo apresentaremos resultados fundamentais que serão usados nos teoremas de rígidez. Primeiramente consideraremos o funcional definido no espaço das superfícies propriamente imersas em M que preservam o bordo ∂M, onde a curvatura escalar de M e a curvatura média do ∂M são limitadas inferiormente, e se existe uma superfícies que atinge esse valor ela é denominada superfície infinitesimalmente rígida.

2.1 Superfícies infinitesimalmente rígidas

Seja M uma variedade Riemanniana tridimensional com bordo ∂M. Denotemos por R^M sendo a curvatura escalar de M e $H^{\partial M}$ a curvatura média de ∂M. Seja Σ uma superfície compacta, conexa com bordo $\partial\Sigma$. Dizemos que Σ está propriamente mergulhada (ou imersa) em M, se ela for mergulhada (ou imersa) em M e $\Sigma \bigcap \partial M = \partial\Sigma$. Dizemos que Σ é localmente minimizante de área em M, se para cada superfícies propriamente imersas em M tem área maior ou igual do que a área de Σ. Pela primeira variação da área, temos que superfícies minimizantes de área são mínimas e de bordo livre, isto é, Σ intercepta ∂M ortogonalmente ao longo de $\partial\Sigma$. Além disso segue da segunda variação da área que Σ é estável com bordo livre, isto é, a segunda variação é não negativa para cada variação que preserva o bordo ∂M.

Quando R^M e $H^{\partial M}$ são limitados inferiormente, podemos considerar o funcional definido no espaço das superfícies propriamente imersas

$$I(\Sigma) = \frac{1}{2}\inf R^M|\Sigma| + \inf H^{\partial M}|\partial\Sigma|,$$

onde $|\Sigma|$ denota a área de Σ e $|\partial\Sigma|$ denota o comprimento de $\partial\Sigma$.

A próxima proposição da um limite superior para $I(\Sigma)$ quando assumimos que Σ é uma superfície mínima estável com bordo livre.

Antes de provarmos a próxima proposição , seja M uma variedade Riemanniana com bordo, diremos que M tem bordo médio convexo quando a segunda forma fundamental do bordo é estritamente maior do que zero.

Proposição 6. *Seja* (M^3, g) *uma variedade Riemanniana com bordo* ∂M. *Suponha* R^M *e* $H^{\partial M}$ *limitados inferiormente. Se* Σ *é uma superfície minima, estável, bordo livre, propriamente imersa e de dois lados, então*

$$I(\Sigma) \leqslant 2\pi\mathcal{X}(\Sigma) \tag{2.1}$$

onde $\mathcal{X}(\Sigma)$ *é a característica de Euler de* Σ. *Além disso, a igualdade ocorre se e somente se,* Σ *satisfaz as seguintes propriedades:*

a) Σ *é totalmente geodésica em M e* $\partial\Sigma$ *consiste de uma geodésica de* ∂M*;*

b) A curvatura escalar R^M *é constante ao longo* Σ *e igual a* $\inf R^M$, *e a curvatura média* $H^{\partial M}$ *é constante ao longo de* $\partial\Sigma$ *e igual a* $\inf H^{\partial M}$*;*

c) $\mathrm{Ric}(N, N) = 0$, *e N pertence ao núcleo do operador de forma de* ∂M *ao longo de* $\partial\Sigma$ *onde N é um campo normal unitário de* Σ.

Em particular, a),b) e c) implicam que $K = \frac{1}{2}\inf R^M$ *em* Σ *e* $k = \inf H^{\partial M}$ *de* $\partial\Sigma$ *em* Σ.

Demonstração. Como Σ é dois lados, existe um campo de vetores unitários N ao longo de Σ e normal a Σ. Seja X um campo de vetores em M que é normal a ∂M e apontando para fora de M. Como Σ é bordo livre, o conormal unitário ν de $\partial\Sigma$ apontando para fora de Σ coincide com X ao longo de $\partial\Sigma$.

A hipótese de ser bordo livre nos leva a deduzir que k, a curvatura geodésica de $\partial\Sigma$ em Σ, pode ser considerado sendo $k = g(T, \nabla_T\nu) = g(T, \nabla_T X)$ onde T é um campo unitário tangente a $\partial\Sigma$.

Daí

$$H^{\partial M} = k + g(N, \nabla_N X). \tag{2.2}$$

De fato, temos que $\partial\Sigma \subset \partial M$, pois $\Sigma \bigcap \partial M = \partial\Sigma$, portanto

$$T_p\partial M = T_p\partial\Sigma \oplus (T_p\partial\Sigma)^{\perp}.$$

Como Σ tem bordo livre então N teremos N $\in (T_p\partial\Sigma)^{\perp}$ ao longo de $\partial\Sigma$. Assim $\{N, T\}$ é uma base para $T_p\partial M$, donde

$$\begin{aligned} H^{\partial M} &= \langle S_X(T), T\rangle + \langle S_X(N), N\rangle \\ &= \langle T, \nabla_T X\rangle + \langle N, \nabla_N X\rangle. \end{aligned}$$

Como por hipótese Σ é estável com bordo livre, então para cada $\varphi \in C^{\infty}(\Sigma)$

$$Q(\varphi,\varphi) = \int_{\Sigma} |\nabla\varphi|^2 - (Ric(N,N) + |\Pi|^2)\varphi^2 dA - \int_{\partial\Sigma} g(N, \nabla_N X)\varphi^2 dL \geqslant 0$$

onde Π é a segunda forma fundamental de Σ. $Q(\varphi,\varphi)$ é a segunda variação da área do campo variacional φN ao longo de Σ.

Tomando $\varphi \equiv 1$, teremos

$$\begin{aligned} 0 &\geqslant \int_{\Sigma} (Ric(N,N) + |\Pi|^2) dA + \int_{\partial\Sigma} g(N, \nabla_N X) dL \\ &= \frac{1}{2}\int_{\Sigma} (R^M + |H|^2 + |\Pi)|^2) dA - (\int_{\Sigma} K dA + \int_{\partial\Sigma} k dL) + \int_{\partial\Sigma} H^{\partial M} \\ &\geqslant \frac{1}{2}\inf R^M |\Sigma| + \inf H^{\partial M}|\partial\Sigma| - \int_{\partial\Sigma} k dL - \int_{\Sigma} K dA \\ &\geqslant \frac{1}{2}\inf R^M |\Sigma| + \inf H^{\partial M}|\partial\Sigma| - 2\pi\mathcal{X}(\Sigma) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Então

$$2\pi\mathcal{X}(\Sigma) \geqslant \frac{1}{2}\inf R^M|\Sigma| + \inf H^{\partial M}|\partial\Sigma|$$

Usamos o Lema 1 e o teorema de Gauss-Bonnet, obtendo

$$I(\Sigma) \leqslant 2\pi\mathcal{X}(\Sigma)$$

Quando igualdade ocorre, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\inf R^M|\Sigma| + \inf H^{\partial M}|\partial\Sigma| + \int_{\Sigma} |\Pi|^2 dA - \int_{\partial\Sigma} k dL - \int_{\Sigma} K dA \\ &= \frac{1}{2}\inf R^M|\Sigma| + \inf H^{\partial M}|\partial\Sigma| - 2\pi\mathcal{X}(\Sigma), \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde $|\Pi|^2 = 0$, ou seja, Σ é totalmente geodésica em M.

Agora provaremos que $\mathrm{Ric}(N,N) = 0$ ao longo de Σ, e $g(N, \nabla_N X) = 0$ em $\partial\Sigma$, note que por (2.4) teremos $Q(1,1) = 0$ e $Q(\varphi,\varphi) \geqslant 0$ $\forall \varphi \in C^\infty(\Sigma)$, pois Σ é estável. Afirmamos que $Q(1,\varphi) = 0$ para $\forall \varphi \in C^\infty(\Sigma)$.

De fato, dados $t \in \mathbb{R}$ e $\phi \in C^\infty(\Sigma)$, temos

$$\begin{aligned} Q(1 - t\varphi, 1 - t\varphi) &= Q(1,1) - Q(1, t\varphi) - Q(t\varphi, 1) + Q(t\varphi, t\varphi) \\ &= t^2 Q(\varphi,\varphi) - 2tQ(1,\varphi) \geqslant 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Como $Q(\varphi,\varphi) \geqslant 0$, então o discriminante da equação (2.5) é dada por

$$\Delta = 4Q(1,\varphi^2) \leqslant 0, \tag{2.6}$$

implicando $Q(1,\varphi) = 0$ para cada $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$.

Assim, segue de (1.19)

$$0 = Q(1,\varphi) = \int_\Sigma (\mathrm{Ric}(N,N)\varphi dA + \int_{\partial\Sigma} g(N, \nabla_N X)\varphi dL \tag{2.7}$$

Suponha $\mathrm{Ric}(N,N)(p) \neq 0$ para algum $p \in \Sigma$ daí existe uma vizinhança $U \subset \Sigma$ de p, onde $U/\partial\Sigma$, tal que $\mathrm{Ric}(N,N)(x) \neq 0$ para todo $x \in U \subset \Sigma$. Considerando $\varphi : \Sigma \longrightarrow [0,1]$ suportada em U tal que $\varphi(p) = 1$, segue de (2.7)

$$0 = \int_U \mathrm{Ric}(N,N)\varphi dA,$$

contradição pois $\mathrm{Ric}(N,N)\varphi$ tem sinal em U. Portanto $\mathrm{Ric}(N,N)\varphi = 0$ ao longo de Σ, analogamente provamos que $g(N, \nabla_N X) = 0$ em $\partial\Sigma$. Como Σ é totalmente geodésico em M, temos $\nabla_T T, \nabla_T \nu = \nabla_T X \in T_p\Sigma$, de fato para $N \in (T_p\Sigma)^\perp$ e $\forall p \in \Sigma$ tem-se $\Pi_N(\cdot,\cdot) = 0$, logo

$$\Pi_N(T,T) = \langle \nabla_T N, T\rangle = \langle N, \nabla_T T\rangle = 0. \tag{2.8}$$

Temos também que $X \perp \nabla_T X$,

$$\langle X, X\rangle = 1 \Longrightarrow T\langle X, X\rangle = 0 \Longrightarrow \langle \nabla_T X, X\rangle = 0.$$

Como $X = \nu$ em $\partial\Sigma$ então $\nabla_T X$ é proporcional a T.

Como a curvatura geodésica de $\partial\Sigma$ em ∂M é dada por (2.8) então $\partial\Sigma$ é uma geodésica em ∂M.

Segue que T e N são autovetores do operador de forma S_X, afirmamos que N está no núcleo do operador de forma S_X, de fato como o núcleo do operador de forma é um subespaço de $T\partial M$ com $\dim \mathrm{Ker}(S_X) = 1$, pelo teorema do núcleo e da imagem, e $T\partial M = T\partial\Sigma \oplus T\partial\Sigma^{\perp}$ então ou $\mathrm{Ker}(S_X) \subset T\partial\Sigma$ ou $\mathrm{Ker}(S_X) \subset T\partial\Sigma^{\perp}$ portanto $\mathrm{Ker}(S_X) \subset T\partial\Sigma^{\perp}$ pois $S_X(T)$ é proporcional a T, provando assim os itens a), b) e c).

Usando o teorema de Gauss-Bonnet e os itens a), b) e c) temos que

$$0 = \frac{1}{2}\inf R^M|\Sigma| + \inf H^{\partial M}|\partial\Sigma| - \int_{\partial\Sigma} k dL - \int_{\Sigma} K dA,$$

donde segue de (2.4) que $\frac{1}{2}\inf R^M = \frac{1}{2}R^M = K$, logo $k = H^{\partial M} = \inf H^{\partial M}$.

Para reciproca basta usarmos (2.3), de fato

$$\int_{\partial\Sigma} k dL + \int_{\Sigma} K dA = 2\pi\mathcal{X}(\Sigma) \geqslant \frac{1}{2}\inf R^M|\Sigma| + \inf H^{\partial M}|\partial\Sigma| = I(\Sigma)$$

donde segue a igualdade. □

Quando $I(\Sigma) = 2\pi\mathcal{X}(\Sigma)$ dizemos que Σ é uma superfície infinitesimalmente rígida.

2.2 Construção da Folheação CMC

Considere uma superfície propriamente imersa e infinitesimalmente rígida em M, existem campos de vetores suaves Z em M tal que $Z(p) = N(p), \forall p \in \Sigma$ e $Z(p) \in T_p\partial M, \forall p \in \partial M$. Fixemos $\phi = \phi(x,t)$ o fluxo desse campo e α um numero real entre 0 e 1.

A próxima proposição nos dá uma família de superfícies com bordo livre e curvatura média constante entorno de uma superfície infinitesimalmente rígida.

Para o que segue

Proposição 7. *Seja* (M^3, g) *uma variedade Riemanniana com bordo suave* ∂M*. Assumindo* R^M *e* $H^{\partial M}$ *limitadas inferiormente. Seja* Σ *uma superfície, com bordo livre, dois lados e propriamente mergulhada. Se* Σ *é infinitesimalmente rígida, então existe* $\varepsilon > 0$ *e uma função* $w : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que, para cada* $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$*, o conjunto*

$$\Sigma_t = \{\phi(x, w(x,t)); x \in \Sigma\} \tag{2.9}$$

é uma superfície com bordo livre e curvatura média constante H(t). Além disso, para cada $x \in \Sigma$ *e cada* $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$*, temos w(x,0) = 0,* $\int_{\Sigma}(w(x,t) - t)dA = 0$ *e* $\frac{\partial w}{\partial t}(x,t)\Big|_{t=0} = 1$.

Em particular, para $\varepsilon << 0$*, temos que* $\{\Sigma_t\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ *é uma folheação de uma vizinhança de* $\Sigma_0 = \Sigma$ *em* M.

Demonstração. Como Σ é dois lados então existe um campo normal unitário em Σ e X um campo normal unitário em ∂M que coincide com o conormal exterior η de $\partial\Sigma$. Denotemos dA o elemento da área de Σ e dL o comprimento da curva $\partial\Sigma$.

Dada uma função u no espaço de Holder $C^{2,\alpha}(\Sigma)$, $0 < \alpha < 1$, consideremos $\Sigma_u = \{\Phi(x, u(x)); x \in \Sigma\}$, que é uma superfície propriamente mergulhada, se a normal de u é suficientemente pequeno. Nós iremos denotar por u aos quantidade associada a Σ_u. Por exemplo, H_u sera curvatura média de Σ_u, N_u denotará campo normal unitário Σ_u e X_u a restrição de X a Σ_u. Em particular, $\Sigma_0 = \Sigma$, $H_0 = 0$ (que Σ seja totalmente geodésico.) e $g(N_0, X_0)= 0$ (desde que Σ seja bordo livre.)

Consideremos os espaços de Bannach $E = \{u \in C^{2,\alpha}; \int_\Sigma u dA = 0\}$ e $F = \{u \in C^{0,\alpha}; \int_\Sigma u dA = 0\}$. Dado $\delta << 1$ e $\varepsilon << 1$, podemos definir a aplicação $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (B(0; \delta) \subset E) \longrightarrow F \times C^{1,\alpha}(\partial\Sigma)$ dada por

$$\varphi(t, u) = (H_{t+u} - \frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma H_{t+u} dA, g(N_{t+u}, X_{t+u})).$$

Afirmamos que $D\varphi_{(0,0)}$ é um isomorfismo restrito ao domínio $(0 \times E)$. De fato, para cada $\nu \in E$ a aplicação $f : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ dada por $f(x, s) = \phi(x, s\nu(x))$, defini uma variação com campo variacional $\frac{\partial f}{\partial s}|_{s=0} = \nu Z = \nu N$ em Σ. Note que, para cada $\nu \in E$.

$$D\varphi_{(0,0)}(0, \nu) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}(\varphi \circ \gamma)(s) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\varphi(0, s\nu),$$

onde consideramos a curva $\gamma(s) = (0, s\nu)$ em $0 \times E$. Daí,

$$D\phi_{(0,0)}(0, \nu) = (\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} H_{s\nu} - \frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} H_{s\nu} dA, \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} g(N_{s\nu}, X_{s\nu})).$$

Mas por hipótese Σ é de bordo livre e como $\frac{\partial f}{\partial s}|_{s=0} = \nu N$ em Σ pelo Lema 5 temos que

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} H_{s\nu} = -\Delta_\Sigma \nu - (Ric(N_0, N_0) - |\Pi|^2)\nu.$$

Como Σ é infnitesialmente rígida, então pela Proposição 6 itens c) e a) teremos

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} H_{s\nu} = -\Delta_\Sigma \nu.$$

Pelo teorema da divergência temos,

$$\int_\Sigma -\Delta_\Sigma \nu d\Sigma = \int_{\partial\Sigma} -\langle \nabla \nu, \eta \rangle d\partial\Sigma.$$

onde η é um campo normal unitário a $\partial\Sigma$, note também que pelo Lema 4 e Proposição 6 item c) temos

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} g(N_{s\nu}, X_{s\nu}) = -\frac{\partial \nu}{\partial \eta} + g(N_0, \nabla_{N_0} X)\nu,$$

Logo

$$D\varphi_{(0,0)}(0,v) = (-\Delta_\Sigma v + \frac{1}{|\Sigma|}\int_{\partial\Sigma}\frac{\partial v}{\partial \nu}d\partial\Sigma, -\frac{\partial v}{\partial \nu}). \tag{2.10}$$

Afirmação: $D\varphi_{(0,0}(0,v)$ é um isomorfismo.

De fato, dado $(f,g) \in F \times C^{1,\alpha}(\partial\Sigma)$ o problema

$$\begin{cases} (-\Delta_\Sigma v) + \frac{1}{|\Sigma|}\int_{\partial\Sigma}\frac{\partial v}{\partial \nu}d\partial\Sigma & = & f & em & \Sigma \\ -\frac{\partial v}{\partial \nu} & = & g & em & \partial\Sigma \end{cases}$$

equivale a

$$\begin{cases} \Delta_\Sigma v & = & -f - \frac{1}{|\Sigma|}\int_{\partial\Sigma} g d\partial\Sigma & em & \Sigma \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} & = & -g & em & \partial\Sigma \end{cases}$$

Observe que

$$-\int_\Sigma (f + \frac{1}{|\Sigma|}\int_{\partial\Sigma} g d\partial\Sigma)d\Sigma \;=\; -\int_\Sigma f d\Sigma + (-\frac{1}{|\Sigma|}\int_{\partial\Sigma} g d\partial\Sigma)\int_\Sigma d\Sigma.$$

e como $-\int_\Sigma f d\Sigma = 0$, segue

$$-\int_\Sigma (f + \frac{1}{|\Sigma|}\int_{\partial\Sigma} g d\partial\Sigma)d\Sigma \;=\; -\int_{\partial\Sigma} g d\partial\Sigma.$$

Pelo Teorema 2 existe uma única solução $v \in E = \left\{u \in C^{2,\alpha}(\overline{V}) : \frac{1}{|V|}\int_V u = 0\right\}$, provando assim que (2.10) é uma aplicação bijetivo linear limitada, como $(0 \times E)$ e $(F \times C^{1,\alpha}(\partial\Sigma))$ são Banach, então (2.10) é um isomorfismo, provando assim a afirmação.

Agora vamos aplicar o teorema da função implicita: Para $\varepsilon << 1$ existe uma função $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \longmapsto u(t) \in B_\delta(0) \subset E$ tal que $u(0) = 0$ e $\varphi(t, u(t)) = \varphi(0,0) = (0,0)$ para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, Daí

$$\varphi(t, u(t)) = (H_{t+u(t)} - \frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma H_{t+u(t)d\Sigma}, g(N_{t+u(t)}, X_{t+u(t)}) = (0,0).$$

Portanto $\Sigma_{t+u(t)}$ possui curvatura média constante para cada t.

Seja $w(x,t) \in \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longmapsto t + u(t)(x) \in \mathbb{R}$. Por definição, para cada $x \in \Sigma$ $w(x, 0) = u(0)(x) = 0$, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e $w(\cdot, t) - t = u(t)(\cdot) \in B_\delta(0) \subset E$ para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

$$\begin{aligned} G: \;\; \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow M \\ (x, s) &\longmapsto \phi(x, w(x,s)). \end{aligned}$$

implica

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}G(x,s)\Big|_{s=0} &= \frac{\partial}{\partial s}\phi(x,w(x,s))\Big|_{s=0}\\
&= (\frac{\partial}{\partial s}w\Big|_{s=0})N.
\end{aligned}$$

Para cada t teremos

$$(0,0)=\varphi(t,u(t))=(H_{w(.,t)}-\frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma H_{w(.,t)}d\Sigma, g(N_{w(.,t)},X_{w(.,t)}),$$

implicando $D\varphi_{(0,0}(0,\frac{\partial}{\partial s}w|_{s=0})=(0,0)$. Assim segue de 2.10 que $\frac{d}{ds}w|_{s=0}$ satisfaz o problema de Neumann e pela proposição 6.15 de [14] concluímos que $\frac{\partial}{\partial s}w\Big|_{s=0}$ é constante em Σ. Sendo $\int_\Sigma(w(x,t)-t)d\Sigma=\int_\Sigma u(t)d\Sigma=0$ para cada t, tomando a derivada no instante $t=0$ concluímos, que

$$\int_\Sigma(\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}w-1)d\Sigma \;=0,$$

ou seja,

$$\int_\Sigma \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}w d\Sigma \;=|\Sigma|.$$

Logo $\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}w=1$, dai $G_0(x)=\phi(x,0)=x$, $\frac{\partial}{\partial s}G(x,0)|_{s=0}=(\frac{\partial}{\partial s}w\Big|_{s=0})N_0=N_0$. Para cada $x\in\Sigma$ e Σ propriamente mergulhado, podemos tomar $\varepsilon<<1$, se necessário, e assumir que G parametriza uma folheação de M em uma vizinhança de Σ. Isto finaliza a prova da Proposição. □

Agora iremos considerar uma variedade Riemanniana com bordo médio convexo e curvatura escalar limitada inferiormente. Primeiramente, iremos analisar o comportamento da área das superfícies construídas na anterior.

Proposição 8. *Seja* (M^3,g) *uma variedade Riemanniana com bordo convexo e curvatura escalar limitada inferiormente. Seja* Σ *infinitesimalmente rígida com bordo livre e dois lados.*

Assuma que uma das seguintes hipóteses seja válida:

(i) Cada componente de $\partial\Sigma_0$ *localmente minimizam área em* ∂M.

(ii) $\inf H^{\partial M}=0$

Seja $\{\Sigma_t\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ *obtida na Proposição 7. Então* $|\Sigma_0| \geqslant |\Sigma_t|$ *para cada* $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Demonstração. Segue da proposição 7, e considerando $\Sigma = \Sigma_0$, que $G : \Sigma_0 \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ dada por $G_t(x) = \varphi(x, w(x,t))$ é a parametização da folheação $\{\Sigma_t\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ em uma vizinhança de Σ_0. Iremos utilizar o subscrito t, para denotar as quantidades associadas $\Sigma_t = G_t(\Sigma_0)$.

Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a função lapso em Σ_t é dada por $\rho_t = g(\partial_t G, N_t)$, lembremos que

$$\partial_t G(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(x, w(x,t)) = (\frac{\partial}{\partial t} w(x,t))N_t$$

Assim, segue da Proposição 7 que para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ temos que Σ_t possui a curvatura média constante, portanto pelo Lema 6 teremos

$$-H'(t) = \Delta_{\Sigma_t}\rho_t + (Ric(N_T, N_t) + |\Pi|^2)\rho_t, \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial \nu_t} = g(N_t, \nabla_{N_t} X)\rho_t, \tag{2.12}$$

Além disso , $\rho_0 = 1$, onde $\partial_t G(x,0) = N_0$ para cada $x \in \Sigma_o$. Consequentemente, pela continuidade da função lapso, diminuindo ε, se necessário, $\rho_t > 0$ $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Segue de (2.11) que

$$H'(t)\frac{1}{\rho_t} = (-\Delta_{\Sigma_t}\rho_t)\frac{1}{\rho_t} - (Ric(N_T, N_t) + |\Pi|^2) \tag{2.13}$$

e usando a equação de Gauss, temos que

$$H'(t)\frac{1}{\rho_t} = (-\Delta_{\Sigma_t}\rho_t)\frac{1}{\rho_t} + K_t - \frac{1}{2}(R_t^M + |H(t)|^2 + |\Pi|^2). \tag{2.14}$$

Note que pela Proposição 7 deduzimos $H(t)$ é constante em Σ_t, integrando por partes (2.14) e usando o fato de $H'(t)$ não dependem de $x \in \Sigma_t$, obtemos a igualdade

$$\begin{aligned} H'(t)\int_\Sigma \frac{1}{\rho_t} d\Sigma_t &= \int_\Sigma (-\Delta_{\Sigma_t}\rho_t)\frac{1}{\rho_t} d\Sigma_t + \int_\Sigma K_t d\Sigma_t \\ &- \int_\Sigma \frac{1}{2}(R_t^M + |H(t)|^2 + |\Pi|^2) d\Sigma_t \end{aligned} \tag{2.15}$$

Como o valor de H(t) não depende do ponto da superfície Σ_t, pois é constante para todo $x \in \Sigma_t$, naturalmente H'(t) também não depende do ponto.

Por outro lado

$$\int_\Sigma (\Delta_{\Sigma_t}\rho_t)\frac{1}{\rho_t} d\Sigma_t + \int_\Sigma \langle \nabla\rho_t, \nabla\frac{1}{\rho_t}\rangle d\Sigma_t = \int_{\partial\Sigma} \frac{1}{\rho_t}\frac{\partial\rho_t}{\partial\nu_t} d\partial\Sigma_t,$$

implicando

$$\int_{\Sigma}(\Delta_{\Sigma_t}\rho_t)\frac{1}{\rho_t}d\Sigma_t = \int_{\partial\Sigma}\frac{1}{\rho_t}\frac{\partial\rho_t}{\partial\nu_t}d\partial\Sigma_t - \int_{\Sigma}\frac{|\nabla\rho_t|^2}{\rho_t}d\Sigma_t, \tag{2.16}$$

multiplicando (2.16) por -1, obtemos

$$\int_{\Sigma}(-\Delta_{\Sigma_t}\rho_t)\frac{1}{\rho_t}d\Sigma_t = -\int_{\partial\Sigma}\frac{1}{\rho_t}\frac{\partial\rho_t}{\partial\nu_t}d\partial\Sigma_t + \int_{\Sigma}\frac{|\nabla\rho_t|^2}{\rho_t}d\Sigma_t \tag{2.17}$$

substituindo (2.17) em (2.15) e usando (2.12) temos que

$$\begin{aligned} H'(t)\int_{\Sigma}\frac{1}{\rho_t}d\Sigma_t = & - \int_{\partial\Sigma} g(N_t, \nabla_{N_t}X)d\partial\Sigma_t - \int_{\Sigma}\frac{|\nabla\rho_t|^2}{\rho_t}d\Sigma_t \\ & + \int_{\Sigma} K_t d\Sigma_t - \int_{\Sigma}\frac{1}{2}(R_t^M + |H(t)|^2 + |\Pi|^2)d\Sigma_t. \end{aligned}$$

Sendo cada Σ_t de bordo livre, teremos

$$H_t^{\partial M} = k_t + g(N_t, \nabla_{N_t}X).$$

Daí

$$\begin{aligned} H'(t)\int_{\Sigma}\frac{1}{\rho_t}d\Sigma_t = & - \int_{\partial\Sigma} H_t^{\partial M}d\partial\Sigma_t + \int_{\Sigma} k_t d\Sigma_t - \int_{\Sigma}\frac{|\nabla\rho_t|^2}{\rho_t}d\Sigma_t \\ & + \int_{\Sigma} K_t d\Sigma_t - \int_{\Sigma}\frac{1}{2}(R_t^M + |H(t)|^2 + |\Pi|^2)d\Sigma_t. \end{aligned}$$

Como Σ_0 é infinitesialmente rígida temos $I(\Sigma_0) = 2\pi\mathcal{X}(\Sigma_0) = \int_{\Sigma} k_t d\Sigma_t + \int_{\Sigma} K_t d\Sigma_t$, portanto,

$$\begin{aligned} H'(t)\int_{\Sigma}\frac{1}{\rho_t}d\Sigma_t \leqslant & - \frac{1}{2}\int_{\partial\Sigma}\inf H_t^{\partial M}d\partial\Sigma_t - \int_{\Sigma}\frac{|\nabla\rho_t|^2}{\rho_t}d\Sigma_t \\ & - \frac{1}{2}\int_{\Sigma}\inf R_t^M d\Sigma_t - \frac{1}{2}\int_{\Sigma}|\Pi|^2 d\Sigma_t \\ & + 2\pi\mathcal{X}(\Sigma_0), \\ \leqslant & -\frac{1}{2}\inf R^M|\Sigma_t| - \frac{1}{2}\inf H_t^{\partial M}|\partial\Sigma_t| + I(\Sigma_0) \\ = & \; I(\Sigma_0) - I(\Sigma_t) \\ = & \; \frac{1}{2}\inf R^M(|\Sigma_0| - |\Sigma_t|) + \frac{1}{2}\inf H_t^{\partial M}(|\partial\Sigma_0| - |\partial\Sigma_t|). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Por hipótese, $\inf H_t^{\partial M} \geqslant 0$. Se cada componente do bordo é localmente minimizante de comprimento então $|\partial\Sigma_0| - |\partial\Sigma_t| \leqslant 0$, e se $\inf H^{\partial M} = 0$, naturalmente $\inf H^{\partial M}(|\Sigma_0| - |\Sigma_t||) = 0$, daí

$$\begin{aligned} H'(t)\int_{\Sigma}\frac{1}{\rho_t}d\Sigma_t \leqslant & \; \frac{1}{2}\inf R^M(|\Sigma_0| - |\Sigma_t|) \\ = & -\frac{1}{2}\inf R^M\int_0^t\frac{d}{ds}|\Sigma_t|ds. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Já que cada Σ_t é bordo livre, segue a primeira variação da área

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}|\Sigma_t| = A'(t) &= \int_\Sigma \langle V, \overrightarrow{H}\rangle d\Sigma_t + \int_{\partial\Sigma} \langle V^T, \nu\rangle d\Sigma_t \\ &= \int_\Sigma \langle V, \overrightarrow{H}(t)\rangle d\Sigma_t \\ &= \int_\Sigma \langle V, H(t)N(t)\rangle d\Sigma_t \\ &= \int_\Sigma H(t)\langle V, N(t)\rangle d\Sigma_t,\end{aligned}$$

considerando $V = \partial_t G(x,t)$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}|\Sigma_t| &= \int_\Sigma H(t)\rho_t d\Sigma_t \\ &= H(t)\int_\Sigma \rho_t d\Sigma_t, \end{aligned} \tag{2.20}$$

substituindo (2.20) em (2.19), teremos

$$H'(t)\int_\Sigma \frac{1}{\rho_t} d\Sigma_t \leqslant -\frac{1}{2}\inf R^M \int_0^t H(s)\Big(\int_\Sigma \rho_t d\Sigma_s\Big) ds. \tag{2.21}$$

Afirmação: Existe $\varepsilon > 0$ tal que $H_t \leqslant 0$ para $\forall t \in [0, \varepsilon)$

Analisaremos, 3 casos separadamente.

a) $\inf R^M = 0$.

Então segue imediatamente de (2.21) que $H'(t) \leqslant 0$ para cada $t \in [0, \varepsilon)$, além disso $H(0) = 0$, pois Σ_0 é minima, então $H(t) \leqslant 0$, pois $H'(0) = 0$.

b) $\inf R^M > 0$.

Seja $\varphi(t) = \int_\Sigma \frac{1}{\rho_t} d\Sigma_t$ e $\xi(t) = \int_\Sigma \rho_t d\Sigma_t$. podemos rescrever a inequação (2.21) como

$$H'(t) \leqslant -\frac{1}{2}\inf R^M \frac{1}{\varphi(t)}\int_0^t H(s)\xi(s) ds. \tag{2.22}$$

Por continuidade, podemos assumir que existe uma constante $C > 0$ tal que $\frac{1}{\varphi(t)}\int_0^t H(s)\xi(s)d \leqslant 2C$, para cada $t \in [0, \varepsilon]$.

Escolhamos ε suficientemente pequeno tal que $C \inf R^M \varepsilon < 1$. Então $H(t) \leqslant 0$ para cada $t \in [0, \varepsilon)$. De fato, suponha que exista um $t_+ \in (0, \varepsilon)$ tal que $H(t_+) > 0$. Novamente segue da continuidade que existe $t_- \in [0, t_+]$ tal que $H(t_-) \leqslant H(t)$ para cada $t \in [0, t_+]$. Note que $H(t_-) \leqslant H(0) = 0$. Pelo teorema do valor médio existe $t_1 \in (t_-, t_+)$ tal que $H(t_+) - H(t_-) = H'(t_1)(t_+ - t_-)$. Consequentemente, desde que $\inf R^M > 0$, a inequação

2.22 nos dá

$$\begin{aligned}
\frac{H(t_+) - H(t_-)}{t_+ - t_-} = H'(t_1) &\leqslant \frac{1}{2} \inf R^M \frac{1}{\varphi(t_1)} \int_0^{t_1} (-H(s)\xi(s)) ds \\
&\leqslant \frac{1}{2} \inf R^M (-H(t_-)) \frac{1}{\varphi(t_1)} \int_0^{t_1} \xi(s) ds \\
&\leqslant \inf R^M (-H(t_-)) C.
\end{aligned}$$

Então $H(t_+) \leqslant H(t_-) - \inf R^M H(t_-) C(t_+ - t_-) \leqslant H(t_-)(1 - \inf R^M H(t_-) C\varepsilon)$ que é uma contradição pois $H(t_+) > 0$ e $H(t_+) \leqslant 0$.

c) $\inf R^M < 0$

Analogamente como foi feito no item b), escolhamos $\varepsilon > 0$ tal que $-C \inf R^M \varepsilon < 1$, para um $C < 0$. Então $H(t) \leqslant 0$ para cada $t \in [0.\varepsilon]$. De fato, suponha que exista $t_0 \in (0, \varepsilon)$ tal que $H(t_0) > 0$. Considere o conjunto

$$W = \{\ t \in [0, t_0]; H(t) \geqslant H(t_0)\}.$$

Seja $t^* \in [0, \varepsilon]$ o ínfimo de W. Note que por definição de t^*, para cada $t \in [0, t^*]$ então $t \neq W$, daí $H(t) \leqslant H(t_0) \leqslant H(t^*)$, pois $t^* \in W$. Por outro lado, para $t_n \in [0, t^*]$ com $t_n \longrightarrow t^*$, temos que $H(t_n) \leqslant H(t_0)$ e $H(t_n) \longrightarrow H(t^*)$, donde $H(t^*) \leqslant H(t_0)$. Portanto, para cada $t \in [0, t^*]$ temos $H(t) \leqslant H(t_0) = H(t^*)$.

Se $t^* > 0$ então pelo teorema do valor médio existe $t_1 \in (0, t^*)$ tal que $H(t^*) = H'(t_1)t^*$, já que $H(0) = 0$. Consequentemente, sendo $\inf R^M < 0$, a inequação 2.22 nos dá:

$$\begin{aligned}
\frac{H(t^*)}{t^*} = H'(t_1) &\leqslant -\frac{1}{2} \inf R^M \frac{1}{\varphi(t_1)} \int_0^{t_1} (H(s)\xi(s)) ds \\
&\leqslant -\frac{1}{2} \inf R^M (H(t^*)) \frac{1}{\varphi(t_1)} \int_0^{t_1} \xi(s) ds \\
&\leqslant -\frac{1}{2} \inf R^M (H(t^*)) C.
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
H(t^*) &\leqslant -t^* H(t^*).C \inf R^M \\
&\leqslant -\varepsilon H(t^*).C \inf R^M
\end{aligned}$$

ou seja

$$H(t^*)(1 + C \inf R^M H(t^*)\varepsilon),$$

o que é uma contradição pois $H(t_0) = H(t^*) > 0$.

Consequentemente $t^* = 0$, donde $H(t_0) \leqslant H(t^*) = H(0) = 0$ que é um absurdo, pois $H(t_0) > 0$. Provando assim a afirmação.

Logo de 2.20 temos que $\frac{d}{ds}|\Sigma_t| \leqslant 0$ para todo $t \in [0, \varepsilon)$ mas $\frac{d}{ds}|\Sigma_0| = 0$, daí $|\Sigma_0| \geqslant |\Sigma_t|$ para cada $t \in [0, \varepsilon)$. Analogamente podemos provar que para cada $t \in (-\varepsilon, 0]$, $|\Sigma_0| \geqslant |\Sigma_t|$. $\square$

Capítulo 3

Rígidez local e Global

Neste capítulo demonstraremos os resultados principais deste trabalho a saber os teoremas de rigidez local e global para superfície minimizante de área com bordo livre. Provaremos que existe para superfícies localmente minimizante de área com bordo livre em M e que existe uma vizinhança desta superfície que é isométrica ao produto cartesiano de um intervalo da reta com tal superfície, com esse resultado local provaremos um teorema de rigidez global.

3.1 Teorema de rigidez local.

Teorema 4. *Seja* (M^3, g) *uma variedade Riemanniana com bordo médio convexo. Assumimos que* R^M *é limitada inferiormente. Seja* Σ *uma superfície localmente minimizante de área com bordo livre, propriamente mergulhada e dois lados tal que* $I(\Sigma) = 2\pi\mathcal{X}(\Sigma)$*. Se uma das seguintes hipóteses é satisfeitas*

i) Cada componente de $\partial\Sigma$ *localmente minimiza comprimento*

ou

ii) $\inf H^{\partial M} = 0$.

Então existe uma vizinhança de Σ *em* (M, g) *que é isométrico a* $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_\Sigma)$*, onde* (Σ, g_Σ) *tem curvatura gaussiana constante igual a* $\frac{1}{2} \inf R^M$ *e* $\partial\Sigma$ *tem curvatura geodésica constante igual a* $\inf H^{\partial M}$ *em* Σ*.*

Demonstração. Já que Σ é localmente minimizante de área e $I(\Sigma) = 2\pi\mathcal{X}(\Sigma)$, então é infinitesimalmente rígida. Pela Proposição 7 e 8 obtemos uma folheação $\{\Sigma\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ na vizinhança de $\Sigma_0 = \Sigma$ tal que $|\Sigma_t| \leqslant |\Sigma|$ para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, já que Σ é localmente minimizante de área, cada Σ_t é localmente minimizante de área, com $|\Sigma_t| = |\Sigma|$. Portanto, cada $\{\Sigma\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ da folheação é minima e estável, basta usarmos o fato de $|\Sigma_t| = |\Sigma|$ e aplicarmos a primeira e segunda variação da área, segue também da Proposição 6 que as superfícies da folheação tem bordo livre.

Agora suponha $\inf H^{\partial M} = 0$, daí:

$$2\pi\mathcal{X}(\Sigma) = I(\Sigma) = \frac{1}{2}\inf R^M|\Sigma| = \frac{1}{2}\inf R^M|\Sigma_t| = I(\Sigma_t),$$

como $2\pi\mathcal{X}(\Sigma) = 2\pi\mathcal{X}(\Sigma_t)$, então $I(\Sigma_t) = 2\pi\mathcal{X}(\Sigma_t)$.

Agora suponha que cada componente de $\partial\Sigma$ minimiza localmente comprimento, daí:

$$\begin{aligned} 2\pi\mathcal{X}(\Sigma) &= I(\Sigma) \\ &= \frac{1}{2}\inf R^{\partial M}|\Sigma| + \inf H^{\partial M}|\partial\Sigma| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\inf R^{\partial M}|\Sigma_t| + \inf H^{\partial M}|\partial\Sigma_t| \\ &= I(\Sigma_t) \\ &\leqslant 2\pi\mathcal{X}(\Sigma_t), \end{aligned}$$

donde

$$2\pi\mathcal{X}(\Sigma) \leqslant I(\Sigma_t) \leqslant 2\pi\mathcal{X}(\Sigma_t).$$

Portanto, $I(\Sigma_t) = 2\pi\mathcal{X}(\Sigma_t)$, em ambos os casos, ou seja cada Σ_t da folheação é infinitesimalmente rígida.

Afirmação: $\rho_t = g(\partial_t G, N_t)$ é constante para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

De fato, pelo Lema 7 e do fato de cada Σ_t é infinitesimalmente rígida, temos que

$$\begin{cases} \Delta\rho_t &= 0 \\ \frac{\partial\rho_t}{\partial\nu_t} &= 0 \end{cases}$$

Pela proposição 6.15 de [14], o problema de Neumann acima admite uma única solução, logo ρ_t é constante em Σ_t. Provando assim a afirmação. Além disso, o campo normal N_t define localmente um campo paralelo em M. Basta para verificar isso, notarmos que pelo Lema 4 temos

$$\begin{cases} \nabla_{\partial_i}N_t &= g^{ki}g(\nabla_{\partial_i}N_t, \partial_l)\partial_k \qquad (3.1) \\ \nabla_{\partial_t}N_t &= \nabla_{(\partial_t)^T}N_t - \nabla^{\Sigma_t}\rho_t \qquad (3.2) \end{cases}$$

onde (3.1) é zero pois Σ_t é infinitesialmente rigida portanto totalmente geodésica e (3.2) também é zero pois $\partial_t G$ não tem parte tangente e ρ_t é constante, logo N_t é um campo paralelo. Dado $x_0 \in \Sigma$, considere $\alpha(t) = exp_{x_0}(tN(x_0))$, onde exp é a aplicação exponencial de M, temos que α' é um campo paralelo ao longo de α e para $t = 0$, $\alpha'(0) = N(x_0) = \partial_t G(x_0, 0)$, segue da unicidade dos campos paralelos que $\alpha'(t) = \partial_t G$, agora note que existe uma única curva integral tal que N_t é a velocidade dessa trajetória logo $\alpha(t) = G(t, x_0)$, portanto $G(t, x) = exp_x(tN(x))$. Dado $(0, x) \in ((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma)$ e $\alpha(t) = G(t, x)$ como acima, com $\alpha'(t) = N_t$. Para cada $x \in \Sigma$ assim, temos que

$$\begin{aligned} G : \quad & (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \longrightarrow (M, g) \\ & (t, x) \longmapsto exp_x(tN(x)), \end{aligned}$$

satisfaz

$$(dG_{(0,x)}(\frac{\partial}{\partial t})) = N(x) \ e \ (dG)_{(0,x)}(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Logo dG leva base em base, donde dG é um isomorfismo, logo para cada $(0, x) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma$ existe uma vizinhança $U_{(0,x)}$ em $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma)$, onde $U_{(0,x)} = (-\delta_x, \delta_x) \times \Sigma_x$ tal que Σ_x é uma vizinhança de $x \in \Sigma$ e $(-\delta_x, \delta_x) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$, onde pelo teorema da aplicação inversa $G|_{U_{(0,x)}}$ é um difeomorfismo sobre a imagem, como Σ é compacto podemos considerar $\Sigma \subset \bigcup_{i=1}^{k} \Sigma_{x_i}$ e $\varepsilon_0 = min_i \delta_{x_i}$, portanto $G : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times \Sigma \longrightarrow M$ é localmente um difeomorfismo.

Suponha (t_0, x_0),$(t_1, x_1) \in ((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma)$ tal que $G(t_0, x_0) = G(t_1, x_1) = x$ pelo exercício do Capítulo 9 de [1], usando o fato de $G(t, x) = exp_x(tN(x))$ e M ser completa, podemos supor que a geodésica ligando x_1 a x_t é igual a distância da superfície a um ponto de M, daí $d(x, x_1) = d(x, \Sigma)$, observe que $d(x, x_1) = L(\beta(t_1)) = \int_0^{t_1} |\beta'(s)| dt$, onde $\beta(s) = G(s, x_1)$ e $\beta'(s) = \partial_s G(s, x_1) = N_s(x_1)$, portanto $d(x, x_1) = \int_0^{t_1} |\beta'(s)| dt = \int_0^{t_1} dt = t_1$, temos também que o campo variacional da curva ligando x_1 a x no instante $t = 0$ é normal a Σ, mas como também $G(t_0, x_0) = exp_{x_0}(t_0 N(x_0)) = x$ então $d(x, x_0) = d(x, \Sigma)$ segue que $d(x, x_0) = \int_0^{t_0} |\gamma'(s)| dt = \int_0^{t_0} dt = t_0$ onde $\gamma(s) = G(s, x_0)$, pela definição da função distância segue que $t_0 = t_1$, como G_t é um difeomorfismo segue que $x_0 = x_1$ portanto G é injetiva, concluindo que $G : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times \Sigma \longrightarrow M$ é um difeomorfismo.

Considere $G : ((-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times \Sigma, dt^2 + g|_\Sigma) \longrightarrow (W, g|_\Sigma)$, onde $W = G((-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times \Sigma)$, seja $h = dt^2 + g|_\Sigma$ a métrica produto em $((-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times \Sigma)$ e $g|_\Sigma$ a métrica induzida por g em Σ dada por g em M.

Dado $(t,x) \in ((-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times \Sigma)$, seja $\{\partial_1, \partial_2\}$ uma base para $T_x\Sigma$ então $\{1, \partial_1, \partial_2\}$ é uma base de $T_{(t,x)}((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma)$.

Seja $\{1\} \in T_t(-\varepsilon, \varepsilon)$ então $h(1,1) = 1$, veja que para uma curva $\theta(s) = (t+s, x)$ tal que $\theta(0) = (t,x)$ e $\theta'(0) = (1,0)$ então

$$d(G)_{(t,x)}(1) = \frac{d(G \circ \theta)}{ds}\Big|_{s=0} = N_t$$

pois $(G \circ \theta)$ é curva integral de N_t, daí

$$g((dG_{(t,x)}(1), (dG_{(t,x)}(1)) = g(N_t, N_t) = 1 = h(1,1)$$

Se $u, v \in T_x\Sigma$ então

$$\begin{aligned} g((dG_{(t,x)}(u), (dG_{(t,x)}(w)) &= g|_\Sigma(u,v) \\ &= h(u,v) \end{aligned}$$

segue do fato do campo N_t ser Killing logo G_t é uma isometria.

Se $u \in T_x\Sigma$ e $w \in T_t(-\varepsilon, \varepsilon)$, então $w = w.1$ logo

$$\begin{aligned} g((dG_{(t,x)}(u), (dG_{(t,x)}(w)) &= g((dG_{(t,x)}(u), (dG_{(t,x)}(w.1)) \\ &= wg((dG_{(t,x)}(u), (dG_{(t,x)}(1))) \\ &= wg((dG_{(t,x)}(u), N_t)) \\ &= 0 \\ &= h(v,w) \end{aligned}$$

Portanto para todo $w, v \in T_{(t,x)}((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma)$ teremos

$$g((dG_{(t,x)}(u), (dG_{(t,x)}(w)) = h(u,w),$$

ou seja, G é uma isometria sobre a imagem. □

3.2 Teorema de rigidez global.

Agora iremos demonstrar o teorema global usando o teorema local, mas antes considere $\mathcal{F}_M$ o conjunto de todos os discos imersos em M cujo o bordo são curvas em ∂M que são homotopicamente não triviais em ∂M, se $\mathcal{F}_M$ é não vazio, nós definiremos

$$\mathcal{A}(M,g) = \inf_{\Sigma \in \mathcal{F}_M} |\Sigma| \qquad e \qquad \mathcal{L}(M,g) = \inf_{\Sigma \in \mathcal{F}_M} |\partial\Sigma|.$$

Antes de provarmos o teorema global, afirmamos precisamente o resultado de Meeks e Yau sobre a existência de discos de bordo livre que minimizam área, veja [17].

Teorema 5. *Seja* (M^3, g) *uma variedade Riemanniana compacta com bordo médio convexo. Se* $\mathcal{F}_M$ *é não vazio, então:*

- *i) Existe um disco mínimo imerso* Σ_0 *em* M *tal que* $\partial\Sigma_0$ *representa homotopicamente uma curva não trivial em* ∂M *e* $|\Sigma_0| = \mathcal{A}(M, g)$
- *ii) Qualquer tal disco imerso cuja área realiza* $\mathcal{A}(M, g)$ *é de fato um disco propriamente mergulhado de bordo livre.*

Agora provaremos o teorema principal desta seção.

Teorema 6. *Seja* (M^3, g) *uma variedade Riemanniana compacta com bordo médio convexo. Assumimos que* $\mathcal{F}_M$ *é não vazio. Então:*

$$\frac{1}{2}\inf R^M \mathcal{A}(M, g) + \inf H^{\partial M} \mathcal{L}(M, g) \leqslant 2\pi. \tag{3.1}$$

Além disso, se a igualdade ocorre então o recobrimento universal de (M^3, g) *é isométrico a* $(\mathbb{R} \times \Sigma_0, dt^2 + g_0)$*, onde* (Σ_0, g_0) *é um disco com curvatura geodésica constante igual a* $\frac{1}{2}\inf R^M$ *e* $\partial\Sigma_0$ *tem curvatura geodésica igual a* $\inf H^{\partial M}$ *em* $\partial\Sigma_0$*.*

Demonstração. Suponha $\mathcal{F}_M$ não vazio, pelo Teorema 2 existe um disco mínimo mergulhado $\Sigma_0 \in \mathcal{F}_M$ tal que $\mathcal{A}(M, g) = |\Sigma_0|$. Além disso, Σ_0 é dois lados com bordo livre e estável, pois $\mathcal{A}(M, g) = |\Sigma_0|$ logo para cada $\Sigma \in \mathcal{F}_M$ obtemos $|\Sigma_0| \leqslant |\Sigma|$. Segue da Proposição 6 e do fato da característica de Euler do disco ser $\mathcal{X}(\Sigma_0) = 1$, que

$$\frac{1}{2}\inf R^M \mathcal{A}(M, g) + \inf H^{\partial M} \mathcal{L}(M, g) \leqslant \frac{1}{2}\inf R^M |\Sigma_0| + \inf H^{\partial M} |\partial\Sigma_0| \leqslant 2\pi \tag{3.2}$$

A Igualdade ocorrendo, se $\inf H^{\partial M}$ for diferente de zero, segue de (3.2) que $|\partial\Sigma_0| = \mathcal{L}(M, g)$. Considere o conjunto $S = \{t > 0; \psi : [0, t) \times \Sigma_0 \longrightarrow M$ é uma isometria local.$\}$. Agora iremos provar que $\psi|_{[0,\infty)\times\Sigma}$, onde $\psi(t, x) = \exp_x(tN_0(x))$ é uma isometria local. De modo análogo prova-se que $\psi|_{(\infty,0]\times\Sigma}$ é uma isometria local. Note que S é não vazio, pois Σ_0 é um disco de dois lados, bordo livre e estável logo pelo Teorema 4 existe uma vizinhança de Σ_0 em M que é isométrico a $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma_0)$, em particular é localmente isométrico. Veja que S é fechado, pois dado $t_n \longrightarrow t$, com $t_n \in S$, segue que $\psi|_{[0,t)}$ é uma isometria local.

Além disso, S é aberto, pois dado $t \in S$, considere $\Sigma_t = \psi(t, \Sigma_0)$ munido com a métrica induzida por ψ. Uma vez que Σ_0 é homotópico a Σ_t e de fato que ψ_t é isometrico, então $|\Sigma_t| = |\Sigma_0|$, daí Σ_t é localmente minimizante de área e $I(\Sigma_t) = 2\pi$. Consequentemente pelo teorema de rigidez local , Teorema 4, existe $\delta > 0$ tal que $\psi|_{[0,t+\delta)}$ é uma isometria local, logo $S = [0, \infty)$, para $t < 0$ é de modo análoga aos argumentos anteriores. Segue daí

$$\psi : (\mathbb{R} \times \Sigma, dt^2 + g|_{\Sigma_0}) \longrightarrow (M, g),$$

dada por $\psi(t, x) = exp_x(tN_0(x))$ é localmente isométrico.

Pelo lema 3.3 de [1] temos que ψ é uma aplicação de recobrimento, sendo $\mathbb{R} \times \Sigma_0$ simplesmente conexa, segue da unicidade do recobrimento universal de (M^3, g) que ψ é recobrimento universal de (M^3, g). Portanto $\mathbb{R} \times \Sigma_0$ é isométrico ao recobrimento universal de (M^3, g).

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] Do Carmo, M. P. - *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides - IMPA, (2005).

[2] Fakhi, S., Pacard, F. - *Existence result for minimal hypersurfaces with a prescrideb finite number of planar ends*. Manuscripta Math, 465-512, (2000).

[3] Hönig, C.S. - *Aplicações da Topologia à Análise*. Projeto Euclides - IMPA, (1976).

[4] Lee, M.J - *Introduction to Smoooth Manifolds*. Springer, 92, (2002).

[5] Lee, M.J - *An Introduction to Curvature*. Springer, 88, (1991).

[6] Ambrozio, L.C - *Rigidity of Area Minimizing Free Boundary Surfaces in Mean Convex Three-Manifolds*. J Geom Anal (2015), 1001-1017.

[7] H. Bray, S. Brendle and A. Neves, - Rigidity of area-minimizing two-spheres in three-manifolds. Anal. Geom. (2010), 821-830

[8] Nunes I.,-Rigidity of area-minimizing hyperbolic surfaces in three-manifolds.Geom. Anal. (2011), 821-830.

[9] Shen, Y. and Zhu, S. -Rigidity of stable minimal hypersurfaces.Math. Ann. 309 (1997), 107-116.

[10] Micallef, M., Moraru, V.-Splitting of 3-Manifolds and rigidity of area-minimizing surfaces. to appear in Proceedings of the American Mathematical Society.

[11] Cai, M., Galloway. -Rigidity of area-minimizing tori in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature. Commun. Anal. Geom, 565-573 (2000)

[12] Schoen, R., Yau, S.T. -Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three dimensional manifolds with non-negative scalar c. Ann. Math, 127-142 (1979)

[13] Fischer-Colbrie, D., Schoen, R. -The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature. Commun. Pure Appl. Math, 199-211 (1980)

[14] Gilbarg D.,Trudinger N.S.-Elliptic Partial Differential Equantions of Second Order. Springer 516 (1998)

[15] Lima, Elon Lages.-Curso de Análise, vol. 2 IMPA 547 (2015)

[16] Nardi, G.-Schauder estimate for solutions of Poisson's equation with Neumann boundary condition. L´Enseignement Mathématique 423-437 (2014)

[17] W. Meeks and S.T. Yau.-Topology of three-dimensional manifolds and the embedding problems in minimal surface theory. Ann. of Math 441-484 (1980).

[18] Caminha, A.-Notas de Geometria Diferencial. Fortaleza (2014).