Universidade Federal do Piauí
Campus Ministro Reis Velloso
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede-PROFMAT
Mestrado em Matemática

UMA INTRODUÇÃO À PROGRAMAÇÃO LINEAR COM ÊNFASE PARA O ENSINO MÉDIO

MACIEL DOS SANTOS SILVA

PARNAÍBA - 2017

Maciel dos Santos Silva

Dissertação de Mestrado:

Uma Introdução à Programação Linear com Ênfase para o Ensino Médio

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora:
Prof. Dra.Sissy da Silva Souza
Co-Orientador:
Prof. Dr. Paulo Sérgio M. dos Santos

Parnaìba - 2017

S586i

SILVA,Maciel dos Santos.

Uma Introdução à Programação Linear com Ênfase para o Ensino Médio./ Maciel dos Santos Silva.-Parnaíba: UFPI,2017.

39f.:il

Orientadora: Prof. Dra. Sissy da Silva Souza.

Co-Orientador: Prof. Dr. Paulo Sérgio M. dos Santos.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Piaui, 2017.

1. Programação Linear. 2. Sistema Lineares. 3. Ensino Médio.

I. Silva, Maciel dos Santos. II. Universidade Federal do Piaui.

III. Título

CDD 512.5

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

SBM

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada: Uma Introdução à Programação Linear com Ênfase para o Ensino Médio, defendida por Maciel dos Santos Silva em 10/02/2017 e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Sissy da Silva Souza (Presidente)

Paulo Sérgio Marques dos Santos (UFPI)

Ray Victor Guimarães Serra (UFPI – externo ao programa)

Dedicatória. (Para minha vó, Sebastiana Clementina dos Santos, In memoriam).

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente e Deus por não me deixar fraquejar e até mesmo quando achei que estava tudo perdido, mostrou-me que era só ter um pouquinho mais de paciência.

Agradeço a minha família, Antônio Balduino(papai) e Mazé(mamãe), que tenha certeza, que até mais que eu, sempre acreditaram que conseguiria, a meu irmão, Marcílio e minha lora, Gerciane, e claro, a Princesa, Ayla Maria, que preencheu completamente minha vida.

Agradeço também aos meus amigos que torceram por mim, em especial ao estrela aro dilatado, José Luanderson, que deu um apoio todo especial nesse trabalho,ajudando muito mais que o necessário,Ray, Jullyette,enfim todos que ajudaram a chegar até aqui... não deixando esquecer é claro, meus amigos e parceiros de longas horas de estudos, sintam-se lembrados na poessoa do Ademar. .....

Agradeço,é claro, aos meus profesores compartilharam um pouco de seu conhecimento, e tiveram grande importância nessa vitória.
Agradeço (a CAPES, ao CNPq) não só pelo apoio financeiro, mas também pela oportunidade de concluir essa etapa.

"*Uma mente que se abre a uma nova idéia jamais voltará a seu tamanho original*".

Albert Einstein.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre Programação Linear, com enfoque para o ensino médio. Isto é, a partir de um problema prático, modelar matematicamente o problema e encontrar a solução de modo geométrico, fazendo uso dos conhecimentos básicos de retas, semi-espaços, sistemas de inequações lineares, plano cartesiano, dentre outros conhecimentos a nível de ensino médio. A Programação Linear possui aplicabilidade nas mais diversas ciências e este é um ponto de partida para motivar os alunos de ensino médio do papel fundamental que a matemática desempenha dentro do contexto social. A simplicidade do método que iremos tratar, convida este aluno a uma vivência prática da aplicação da matemática, ponto abordado com veemência no PCN´s de matemática do ensino médio. Nesse contexto tentamos buscar algumas aplicações que modelam situações reais e que possibilite ao aluno uma relação entre teoria e prática, aspecto importante de sua formação. Além disso, apresentamos também um método prático, para encontrar solução de problemas de programação linear.

PALAVRAS CHAVES:Programação Linear; Sistemas Lineares; Ensino Médio.

Abstract

This paper presents a study on Linear Programming, focusing on high school. That is, from a practical problem, to model the problem mathematically and find a solution in a geometric way, make use of the basic knowledge of straight lines, semi-spaces, systems of linear inequalities, Cartesian plane, among other knowledge a level of education medium . Linear Programming has an application in several categories and is a starting point to motivate high school students the fundamental role that a mathematics plays within the social context. The simplicity of the method that we are going to treat invites this student to a practical practice of the application of mathematics, a point that is approached with vehemence without PCN's of high school mathematics. In this context we try to find some applications that model real real and that allows students a relationship between theory and practice, an important aspect of their formation. In addition, it also presents a practical method, to find solution of linear programming problems.

KEY WORDS: Linear Schedule; Linear System; High School.

Sumário

Introdução

A Programação Linear pode ser vista como uma técnica de tomadas de decisões de situações que demandam custos ou lucros, por meio da maximização ou minimização de funções afins com restrições lineares. Trata-se de uma fonte de grande aplicabilidade em várias áreas da sociedade, e, por isso, pode ser vista como uma fonte para despertar no aluno de ensino médio mais uma aplicação da matemática no cotidiano.

São vários os métodos utilizados para solucionar problemas de Programação Linear, como o famoso método simplex (veja por exemplo, [4] para mais detalhes) mas, aqui estamos interessados naqueles de abordagem simples, a saber: Método geométrico (ou gráfico) e com o uso do excel.

No primeiro capítulo abordamos um pouco da teoria de Álgebra Linear, comentando sobre matrizes, sistemas lineares, bem como sobre inequações e sistema de inequações lineares, a fim de nos dar subsidios para encontrar a solução de um Problema de Programa de Linear.

No segundo capítulo apresentamos aspectos históricos de Pesquisa Operacional e Programação Linear, algumas definições e resultados que serão utilizados no decorrer do trablho, o Teorema Fundamental da Programação Linear para $\mathbb{R}^2$, bem como aspectos fundamentais para encontrar a solução que otimiza o Problema de Programação Linear.

No terceiro capítulo apresentamos a determinação de solução de um PPL através do modelo gráfico, buscando construir esta solução de maneira clara, mostrando o passo a passo.

Neste trabalho apresentamos uma introdução à Programação Linear, abordando a solução da mesma através de métodos simples, possíveis de serem lecionados para alunos do ensino médio, com o intuito de que este seja um material de apoio aos professores.

Capítulo 1

Noções de Álgebra Linear

1.1 Álgebra Linear

Será abordado neste capítulo as definições de matrizes e determinantes, assim como suas propriedades, para aplicá-los na teoria de sistemas lineares que será abordado na próxima seção. Ressaltamos que esses conteúdos fazem parte da estrutura curricular de Matemática do Ensino Médio e formam uma base para as formas de resolução de problemas de programação linear que serão abordadas nesta dissertação.

Matrizes

Serão apresentadas nessa seção teoria sobre matrizes que são relevantes na formação básica dos alunos de ensino médio e servirão para o desenvolvimento deste trabalho.

Definição 1.1.1. *Sejam* $m \geqslant 1$ *e* $n \geqslant 1$ *dois números inteiros. Uma matriz* mxn *é uma dupla sequência de números reais,distribuídos em* m *linhas e* n *colunas, formando uma tabela que se indica da seguinte maneira:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Genericamente esta matriz pode ser expressa da forma (a_{ij}) com $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ou apenas por $a_{i,j}$, se não houver possibilidade de confusão quanto à variação dos índices. Desta forma, cada número que compõe uma matriz chama-se *termo* dessa matriz. Dada a matriz $(a_{ij})1 \leqslant j \leqslant m/1 \leqslant j \leqslant n$, ao símbolo a_{ij} que representa indistintamente todos os seus termos daremos o nome de *termo geral* dessa matriz. Algumas notações faremos aqui. $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ denotamos matrizes reais $m \times n$. Se $m = n$, adotaremos a notação de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, usaremos a notação $M_n(\mathbb{R})$. Uma matriz $M_n(\mathbb{R})$ chamemos *matriz quadrada de ordem n*. Em contraposição, quando $m \neq n$, uma matriz $m \times n$ se diz uma *matriz retangular*, mais detalhes especificaremos a frente para alguns casos de matrizes particulares. Utilizaremos letras maiúscula para representar matrizes.

Exemplo 1.1.1. *Seja uma matriz* A *da seguinte forma*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos perceber que se trata de uma matriz real 3×2 , ou seja $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$. A representacão dos elementos de uma matriz além de ser feita entre parênteses como citada acima também pode se apresentar em forma de colchetes, ou seja, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ou $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. Uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}(\mathbb{R})$ pode ser vista na forma de sequências de números sob certas condições. Dada a matriz abaixo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \dots, A^{(m)} = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

denotaremos as m sequências horizontais por *linhas* de uma matriz A. De forma análoga, definiremos as n sequências verticais

$$A_{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, A_{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

por *colunas* de uma matriz A. Notemos ainda que cada $A^{(i)} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e cada $A_{(j)} \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$.

Exemplo 1.1.2. *Na matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

as linhas são $(1, 2, 5)$ e $(3, 1, 2)$ enquanto que as colunas são respectivamente

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Definição 1.1.2. *Duas matrizes* $A_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n}$ *e* $B_{m\times n} = (a_{ij})r \times s$ *são Iguais,* $A = B$*, se elas têm o mesmo número de linhas* $(m = r)$ *e colunas* $(n = s)$ *e seus elementos correspondentes são iguais* $a_{ij} = b_{ij}(i = 1, 2, \ldots, m)$ *e* $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Exemplo 1.1.3. *Ilustraremos a seguir alguns casos de matrizes iguais e diferentes:*

Matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ diferentes. Temos $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemplo 1.1.4. *Escreva a matriz* $A = [a_{ij}]2 \times 3$*, onde seus elementos são dados por:*

$$a_{ij} = \begin{cases} i & se \ \ i = j \\ i + j & se \ \ i \neq j \end{cases}$$

Podemos notar que para determinar todos elementos da matriz A teremos que usar sua lei de formação, ou seja, devemos obedecer as restrições impostas. Vemos que a matriz A da questão é do tipo 2×3 e disto teremos uma matriz com 6 elementos, onde:

$$a_{ij} \begin{cases} a_{11} = 1 \text{ pois } 1 = 1, a_{12} = 1 + 2 = 3 \text{ pois } 1 \neq 1, a_{13} = 1 + 3 = 4 \text{ pois } 1 \neq 4 \\ a_{21} = 1 + 2 = 3 \text{ pois } 2 \neq 1, a_{22} = 2 + 2 = 4 \text{ pois } 2 \neq 2, a_{23} = 2 + 3 = 5 \text{ pois } 2 \neq 3. \end{cases}$$

Portanto, a matriz procurada é representada e dada, respectivamente por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1.1.5. *Considere abaixo as matrizes quadradas* $A_{3\times 3}$ *e* $B_{2\times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e;} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Definição 1.1.3. *Definimos por* ***diagonal principal*** *de uma matriz a diagonal formada por todos elementos* a_{ij} *de uma matriz tais que* $i = j\ \forall\ i$ *e* j.

Exemplo 1.1.6. *Seja a matriz abaixo*

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2} & 5 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & \boldsymbol{5} & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & \boldsymbol{2} & 0 & 5 \\ 9 & 5 & 6 & \boldsymbol{1} & 7 \\ 2 & 5 & 6 & 2 & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

e os elementos $a_{11} = 2, a_{22} = 5, a_{33} = 2, a_{44} = 1$ e $a_{55} = 1$. Estes denominaremos por elementos da diagonal principal da matriz $A_{5\times 5}$.

Definição 1.1.4. *Definimos por* ***diagonal secundária*** *de uma matriz a diagonal formada por todos elementos* a_{ij} *tais que* $i + j = n + 1\ \forall\ i$ *e* j, *onde* n *é a ordem da matriz.*

Exemplo 1.1.7. *Seja a matriz abaixo*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 2 & \boldsymbol{0} \\ 1 & 5 & 2 & \boldsymbol{1} & 1 \\ 2 & 0 & \mathit{2} & 0 & 5 \\ 9 & \boldsymbol{5} & 6 & 1 & 7 \\ \boldsymbol{2} & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e os elementos $a_{15} = 0, a_{24} = 1, a_{33} = 2, a_{42} = 5 e a_{51} = 2$. Estes denominaremos por elementos da diagonal secundária da matriz $A_{5\times 5}$.

Definição 1.1.5. *Uma matriz* $M = (a_{ij})m \times n$ *é* ***nula****, quando* $a_{ij} = 0,\ \forall\ i$ *e* j.

Exemplo 1.1.8. *A matriz* $A_{3\times 3}$ *abaixo possui todos seus elementos* $a_{ij} = 0,\ \forall\ i, j \in$ $1, 2, 3$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definição 1.1.6. *Uma matriz* $M = (a_{ij})m \times n$ *é* ***diagonal****, quando for quadrada e* $a_{ij} = 0,\ \forall\ i \neq j$.

Exemplo 1.1.9. *A matriz* $A_{4\times4}$ *abaixo é diagonal*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Definição 1.1.7. *Uma matriz* $A = (a_{ij})m \times n$ *é* ***identidade****, quando for quadrada e* $a_{ij} = 1,\ \forall\ i = j$ *e* $a_{ij} = 0\ \forall\ i \neq j$.

Exemplo 1.1.10. *A matriz* $A_{4\times4}$ *abaixo é uma matriz indentidade*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observemos que a partir de agora uma matriz indentidade de ordem n será denotada por I_n.

Definição 1.1.8. *Uma matriz* $A = (a_{ij})m \times n$ *é dita* ***triangular superior****, quando for quadrada e todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, ou seja,* $a_{ij} = 0,\ \forall\ i > j$.

Exemplo 1.1.11. *A matriz* $A_{4\times4}$ *abaixo é dita uma matriz triangular superior*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definição 1.1.9. *Uma matriz* $A = (a_{ij})m \times n$ *é diata* ***triangular inferior****, quando for quadrada e todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, ou seja,* $a_{ij} = 0, \forall\, i < j$.

Exemplo 1.1.12. *A matriz* $A_{4\times 4}$ *abaixo é dita uma matriz triangular inferior*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.1 Operações com Matrizes

Apresentamos aqui a aplicação de operações que permitam o manuseio das matrizes em diversas situações. As pricipais referências utilizadas foram [1] e [2]

Definição 1.1.10. *Consideremos* A *e* B *duas matrizes de mesma ordem. Indicaremos a soma dessas matrizes por uma matriz* $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$*, cujos elementos são a soma dos elementos correspondentes das matrizes* A *e* B*, ou seja*

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

A operação que transforma cada par (A, B) de matrizes do mesmo tipo e ordem na matriz $A + B$ chama-se adição de matrizes. É uma operação no conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Exemplo 1.1.13. *Apresentamos agora um exemplo para soma de matrizes. seja a matriz* $A_{3\times 3}$ *e* $B_{3\times 3}$*, encontraremos a soma* $A + B = (a_{ij} + b_{ij})3 \times 3$.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix}$$

Tomando as matrizes A e B como definidas abaixo, teremos:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 3 & 0 \\ 3+5 & 1+4 & 1 \\ 5+(-1) & 2 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 8 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Para a adicão de matrizes definida acima valem as seguintes propriedades:

(I)$(A+B)+C = A+(B+C) =, \; \forall\, A, B, C \; \in \; M_{m\times n}(\mathbb{R})$(**Associativa**).

(II)$A+B = B+A, \; \forall\, A, B \; \in \; M_{m\times n}(\mathbb{R})$(**Comutativa**).

(III) Existe uma matriz $O \; \in \; M_{m\times n}(\mathbb{R})$ denominada matriz *nula* tal que a se define a operação $A+O = A, \forall\, A \; \in \; M_{m\times n}(\mathbb{R})$(**Existe elemento neutro**).

(IV) Dada uma matriz $A \; \in \; M_{m\times n}(\mathbb{R})$, existe uma matriz $(-A)$, também $m \times n$, tal que $A + (-A) = O$ ***(Existe a oposta de qualquer matriz)***.

Verificaremos o item (I). Os demais são de forma análoga. Sejam as matrizes $A = a_{ij}$, $B = b_{ij}$ e $C = c_{ij}$, então

$$
\begin{aligned}
(A+B)+C &= (A = a_{ij} + B = b_{ij}) + (C = c_{ij}) \\
&= ((A = a_{ij} + B = b_{ij}) + C = c_{ij})) \\
&= (A = a_{ij} + (B = b_{ij} + C = c_{ij})) \\
&= (A = a_{ij}) + (B = b_{ij} + C = c_{ij}) \\
&= (A+B)+C
\end{aligned}
$$

Enquanto ao item (IV) podemos ver facilmente que a matriz nula $O_{m\times n}$ denominada *matriz nula* é dada por

$$
O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}
$$

Exemplo 1.1.14. *Seja a matriz $A = a_{ij}$, podemos perceber que $(-A) = (-a_{ij})$. Desta forma tem-se que*

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ então} - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ -5 & -2 & -1 \end{pmatrix}
$$

Definição 1.1.11. *Seja uma matriz* $A = (a_{ij})_{m \times n}(\mathbb{R})$, *a multiplicação da matriz* A *por um núemro real* k*se define pelo produto de* k *por cada um dos termos da matriz* A, *ou seja,* $kA = (ka_{ij})_{m \times n}(\mathbb{R})$. *Ou seja, dar-se por*

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemplo 1.1.15. *Seja a matriz* $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ *e o número real* $k \in \mathbb{R}$ *definidos abaixo. A multiplicação da matriz* A *pelo número real* k *dar-se por:*

$$(-2)A = (-2)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)-1 & (-2)0 & (-2)0 \\ (-2)3 & (-2)1 & (-2)0 \\ (-2)5 & (-2)-2 & (-2)1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -10 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Para a operação multiplicação de uma matriz por um número real que transforma cada par (k, A) de $\mathbb{R} \times M_{m \times n}(\mathbb{R})$ na matriz real $kA \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ conjuntos das matrizes reais, valem as seguintes propriedades:

I) $(k_1 k_2)A = k_1(k_2 A)$;

II) $(k_1 + k_2)A = k_1 A + k_2 A$;

III) $k_1(A + B) = k_1 A + k_1 B$

IV) $1A = A$

Para quaisquer que sejam as matrizes A e $B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ e os números reais $k_1, k_2 \in (\mathbb{R})$.

Provaremos o item (II) e os demais são de forma análoga. Seja a matriz $A = a_{ij}(\mathbb{R})$ de ordem $m \times n$. Então, tem-se

$$
\begin{aligned}
(k_1 + k_2).A &= ((k_1 + k_2).A = a_{ij}) \\
&= (k_1.A = a_{ij} + k_2.A = a_{ij}) \\
&= (k_1.A = a_{ij}) + (k_2.A = a_{ij}) \\
&= k_1.A + k_1.A
\end{aligned}
$$

Definição 1.1.12. *Considere a matriz* $A_{m\times n}(\mathbb{R})$*, pode-se obter uma outra matriz* $A^t = (b_{ji})n \times m$*, onde os elementos das linhas da matriz* A *são os elementos das colunas de* A^t*, e a matriz* A^t*, isto é,* $a_{ij} = b_{ji}$ *chamada de* ***matriz transposta*** *de* A*.*

Exemplo 1.1.16. *Seja a matriz* $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$*, sua transposta é* $A^t_{3\times 2} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Sejam as matrizes matrizes A, B e $k \in \mathbb{R}$, tem-se as seguintes propriedades para a Transposicão de matrizes:

I)$(A^t)t = A$;

II)$(A + B)^t = A^t + B^t$;

III)$(kA)^t = kA^t$

para quaisquer matrizes A e $B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Definição 1.1.13. *Considere a matriz* $A = a_{ij}$ *de ordem* $m \times n$ *e a matriz* $B = b_{jk}$ *de ordem* $n \times p$*. O produto das matrizes indicado por* AB *é a matriz de ordem* $m \times p$ *cujo termo geral é dado por*

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} = a_{i1} \cdot b_{1k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}.$$

Usando a notação de matriz linha e matriz coluna a definição acima de um produto de matrizes é dada por:

$$AB = \begin{pmatrix} A^{(1)}.B_{(1)} & A^{(1)}.B_{(2)} & \dots & A^{(1)}.B_{(p)} \\ A^{(2)}.B_{(1)} & A^{(2)}.B_{(2)} & \dots & A^{(2)}.B_{(p)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A^{(m)}.B_{(1)} & A^{(m)}.B_{(2)} & \dots & A^{(m)}.B_{(p)} \end{pmatrix}$$

Tal que

A^m= m-ésima linha da matriz A

B_p= p-ésima coluna da matriz B

A multiplicação entre duas matrizes só existe se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda matriz, ou seja, tomando $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{jk})_{n\times p}$ duas matrizes, então AB só é possível se $m = n$ e o resultado do produto será uma matriz, $AB = C = (c_{ik})_{m\times p}$, isto é, o resultado será uma matriz do tipo $m \times p$.

Exemplo 1.1.17. *Sejam* $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ *e* $B_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

nota-se que o produto de AB dar-se por elementos da matriz produto

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} = a_{i1} \cdot b_{1k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}.$$

Diante disso, têm-se

$$c_{11} = \sum_{j=1}^{3} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} \quad c_{12} = \sum_{j=1}^{3} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32}$$
$$c_{21} = \sum_{j=1}^{3} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{33} \quad c_{22} = \sum_{j=1}^{3} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32}$$

Agora, substituindo as matrizes A e B numericamente tem-se

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 5 \cdot -1 & -1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + -2 \cdot -1 & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + -2 \cdot 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Supondo que nas matrizes A, B e C, seja possível a realização do produto entre si, levando em conta a ordem e natureza destas considera-se algumas propriedade operatórias definidas abaixo:

1. $AB = BA$;

2. $AI = IA = A$;

3. $A(B + C) = AB + AC$;

4. $(A + B)C = AC + BC$;

5. $(AB)C = A(BC)$;

6. $(AB)^t = B^tA^t$;

7. $0_{m\times n}A = A0_{m\times n}$

para quaisquer matrizes $A_{m\times n}, B_{m\times n}$ e $O_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{N})$.

1.1.2 Sistema Linear

Definição 1.1.14. *Dados os números reais* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots, \alpha_n,\ \beta\ \ (n \geqslant 1)$*, a equação:*

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 + \dots \alpha_nx_n = \beta$$

onde os $x_{i's}$ *são variáveis em* $\mathbb{R}$*, damos o nome de equação linear sobre* $\mathbb{R}$ *nas incógnitas* $x_1, x_2 \dots x_n$.

Uma solução dessa equação é uma sequência de n números reais $n - upla$ não necessariamente distintos entre si, indicada por $(b_1, b_2, b_3 \dots b_n)$, tal que

$$\alpha_1b_1 + \alpha_2b_2 + \alpha_3b_3 + \dots \alpha_nb_n = \beta$$

é verdadeira.
Toda equação desse tipo, pode ser transformada a menos da igualdade, em uma inequação.

Definição 1.1.15. *Dados os números reais* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots, \alpha_n,\ \beta\ \ (n \geqslant 1)$*, a expressão:*

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 + \dots \alpha_nx_n \leqslant ou(\leqslant, \geqslant, \neq)\beta$$

onde os $x_{i's}$ *são variáveis em* $\mathbb{R}$*, damos o nome de inequação linear sobre* $\mathbb{R}$ *nas incógnitas* $x_1, x_2 \dots x_n$.

Definição 1.1.16. *Um sistema de* m *equações lineares com* n *incógnitas* $(m, n \geqslant 1)$ *é um conjunto de* m *equações, cada uma delas com* n *incógnitas.*

Um sistema pode ser representado da seguinte forma:

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \beta_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \beta_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

Uma solução do sistema acima é uma $n - upla$ $(b_1, b_2, b_3 \ldots b_n)$ de números reais que é solução de cada uma das equações do sistema.

Não faremos aqui um estudo detalhado sobre as soluções de um sistema linear, porém, mais detalhes podem ser encontrado em [2]. Para o sistema acima, caso ocorra $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \ldots = \beta_m = 0$, S é chamado ***homogêneo***. Neste caso, a $n - upla$ $(0, 0, \ldots, 0)$ é solução do sistema, por isso todo sistema homogêneo é compatível e a solução $(0, 0, \ldots, 0)$ chama-se solução trivial do sistema homogêneo.

Definição 1.1.17. *Dizemos que um sistema linear* S *é incompatível se* S *não admite nenhuma solução. Um sistema linear que admite uma única solução é chamado de compatível e determinado. Se um sistema linear* S *admitir mais do que uma solução então ele recebe o nome de compatível e indeterminado.*

Um sistema do tipo

$$S : \begin{cases} x_1 = \beta_1 \\ \ldots\ldots \\ x_i = \beta_i \\ \ldots\ldots \\ x_n = \beta_m \end{cases}$$

é compatível e determinado e $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_n)$ é sua solução única. Um sistema do tipo $S_{n\times n}$ da forma:

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \beta_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n = \beta_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n_1-1}x_1 + \alpha_{n_2-1}x_2 + \ldots + \alpha_{n_n-1}x_n = \beta_{n-1} \end{cases}$$

tal que o número de equações e menos do que o número de incógnitas é compatível e indeterminado, não sendo este o único.

Exemplo 1.1.18. *Um sistema do tipo abaixo é compatível e determinado*

$$S : \begin{cases} x_1 = \beta_1 \\ \ldots\ldots \\ x_i = \beta_i \\ \ldots\ldots \\ x_n = \beta_m \end{cases}$$

Este sistema é compatível e determinado e $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_n)$ é sua solução única.

Exemplo 1.1.19. *Um sistema do tipo* $S_{n\times n}$ *da forma:*

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \beta_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n = \beta_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n_1-1}x_1 + \alpha_{n_2-1}x_2 + \ldots + \alpha_{n_n-1}x_n = \beta_{n-1} \end{cases}$$

tal que o número de equações e menos do que o número de incógnitas é compatível e indeterminado, não sendo este o único.

Definição 1.1.18. *Um sistema de* m *inequações lineares com* n *incógnitas* $(m, n \geqslant 1)$ *é um conjunto de* m *inequações, cada uma delas com* n *incógnitas.*

Um sistema se apresenta da seguinte forma:

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant \mathrm{ou}(\leqslant, \geqslant, \neq)\beta_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant \mathrm{ou}(\leqslant, \geqslant, \neq)\beta_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant \mathrm{ou}(\leqslant, \geqslant, \neq)\beta_m \end{cases}$$

Exemplo 1.1.20. *Encontre a solução do sistema abaixo com* $x_1 \geqslant 0$ *e* $x_2 \geqslant 0$

$$S : \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leqslant 16 \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 12 \end{cases}$$

Então o conjunto que soluciona o sistema de inequação linear e dado por:

Para $x_1 = 0$, $x_2 \geqslant 8$

Para $x_1 = 1$, $x_2 \geqslant 7$

Para $x_1 = 2$, $x_2 \geqslant 6$

Para $x_1 = 3$, $x_2 \geqslant 3$

Para $x_1 = 4$, $x_2 \geqslant 0$

. Então a solução e dada pelo conjunto $(0 \leqslant x_1 \leqslant 4)$ e $(0 \leqslant x_2 \leqslant 8)$

1.1.3 Escalonamento de um Sistema Linear

Este método de resolução de um sistema linear é bastante propício quando se trata de sistemas com muita equações, ou seja, em comparaçao com outros métodos de resolucão este é melhor aplicável e é também conhecido como método da eliminação de Gauss [2]

Definição 1.1.19. *Seja S um Sistema Linear, onde cada uma das equações possui pelo menos um coeficiente não nulo, diz-se que S está na forma escalonada se o número de coeficientes nulos, antes do primeiro não nulo, aumenta de equações para equacão.*

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \beta_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \beta_2 \\ \qquad a_{33}x_2 + a_{34}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = \beta_3 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

O sistema acima esta na sua forma escalonada.

Definição 1.1.20. *Se multiplicar uma equação de um sistema linear S por um real número real* α*, então o sistema* S1 *obtido será equivalente a S.*

Definição 1.1.21. *Se substituir uma equação de um sistema linear S por uma soma membro a membro, dela com uma outra previamente multiplicada por um real* α*, então o sistema* S2 *obtido é equivalente a S.*

Exemplo 1.1.21. *Escalone e encontre a solucão do sistema*

$$S : \begin{cases} 4x - y + 2z & = 0 \\ 3x + 2yz & = 5 \\ x - 2y + 6z & = -11 \end{cases}$$

1.Troca-se a 1° linha com a 3° linha, obtendo o sistema equivalente S_1.

$$S_1 \begin{cases} x - 2y + 6z & = -11(L_1) \\ 3x + 2y - z & = 5(L_2) \\ 4x - y + 2z & = 0(L_3) \end{cases}$$

2. Operando com as linhas de acordo com as definições (1.1.24) e (1.1.25), obtendo S_2.

$$S_1 \begin{cases} x - 2y + 6z & = -11(L_1) \\ 3x + 2y - z & = 5 \rightarrow (L_2 - 3L_1) \\ 4x - y + 2z & = 0 \rightarrow (L_3 - 4L_1) \end{cases} \approx S_2 \begin{cases} x - 2y + 6z & = -11 \\ 8y - 19z & = 38(L_2') \\ 7y - 22z & = 44(L_3') \end{cases}$$

$$S_2 \begin{cases} x - 2y + 6z & = -11 \\ 8y - 19z & = 38 \\ 7y - 22z & = 44 \rightarrow 7(L_2') - 8(L_3') \end{cases} \approx S_3 \begin{cases} x - 2y + 6z & = -11 \\ 8y - 19z & = 38 \\ -43z & = 86 \end{cases}$$

4. Ao final do processo, o resultado será um sistema escalonado do tipo S_3 que é equivalente ao sistema inicial S.

5. A partir do sistema S_3, inicia-se a resolução do sistema, começando pela sua 3° linha, em seguida pela 2°linha e por fim a 1° linha. Assim irar-se resolver equações lineares provenientes do sistema escalonado. Portanto a terna que satisfaz o sistema S, ou seja, a solução do sistema é $(1, 0, -2)$.

Capítulo 2

Programação Linear

Nesse capítulo apresentaremos um breve estudo sobre programação linear,com base em [3] e [6] mostrando o contexto histórico bem como sua relevância dentro de vários aspectos da sociedade, com aplicações na área de administração, economia e contabilidade .
A Programação Linear tem por finalidade principal maximizar ou minimizar problemas modelados por uma função, do tipo

$$f(x_1, ...x_n) = a_1x_1 + ... + a_nx_n + b \tag{2.1}$$

Note que essa função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma transformação afim, ou seja, $f(x) = L(x) + b$ onde L é uma transformação linear e $b \in \mathbb{R}$.
A nomenclatura de Programação Linear, o termo *Linear* vem do fato de tanto as expressões que formam a função

$$f(x_1, ...x_n) = a_1x_1 + ... + a_nx_n + b \tag{2.2}$$

vista logo a frente, quanto as variáveis que modelam o problema, todas aparecem com expoente igual a uma unidade.

2.1 Aspectos Históricos de Pesquisa Operacional

A Pesquisa Operacional é um método de tomada de decisões que surgiu em meados da segunda guerra mundial, no intuito de resolver problemas de ordem estratégica. Alguns dos alicerces do que conhecemos hoje como Pesquisa Operacional, vem das forças armadas britânicas e americanas.
(*Lima, 1977)* defende isso ao especificar que

...o começo da atividade chamada Pesquisa Operacional tem sido geralmente atribuído a algumas iniciativas militares da Segunda Guerra Mundial. Por causa do esforço de guerra, existia uma necessidade urgente de alocar recurssos escassos às várias operações militares e às atividades dentro de cada operação de uma maneira efetiva. Várias seções de Pesquisa Operacional foram estabelecidas nas forças amrmadas britânicas. Logo após, esforços similares foram empreendidos nos Estados Unidos. Um grande número de cientistas foi reunido para aplicar uma abordagem científica a problemas estratégicos e táticos. Esses cientistas foram chamados realizar pesquisas (sobre atividades) operacionais militares, daí o nome de sua atividade **Operational Research**, *na inglaterra, vinda daí sua tradução para o português.*

Com o fim dos períodos pós guerra foi natural o processo de expansão da Pesquisa Operacional, visto que o sucesso de tal processo foi evidente, não distante, começaram a relacionar os problemas de esferas civis com aqueles processos militares vistos em outrora, tendo ai o ponto de partida para sua expansão dentro da sociedade, em pouco tempo a Programação Linear estava sendo empregada em vários aspectos do meio social,empresas e indústria se sobresaiam. E com os avanços contínuos das tecnologias a partir da décadas de 1970, a Pesquisa Operacional ganhou novas ferramentas, e cálculos que antes eram assustadores, hoje graças a softwares, não nos dá tanto trabalhos o que, segundo os historiadores, favoreceu sua rápida expansão.

A pesquisa operacional lida com problemas e se utiliza de métodos cientificos para tratá-los, sempre em busca de uma solução ótima. para tanto é necessário modelar tais situações para chegar na melhor solução possível, pensando nisso [5] descreve etapas para a solução de um problema de Pesquisa Operacional.

Definição da situação-problema: Essa fase requer o transformação das informações genéricas da em um problema estruturado.

Formulação do modelo quantitativo: Aqui relaciona-se as variáveis do problema com sistemas de símbolos e relações matemáticas.

Resolução de modelo e encontro de melhor solução: Manipular as relações encontradas a fim de chegar na melhor solução.

Considerações de fatores imponderávies: Aqui devemos nos perguntar se algumas informações relevantes que não podem ser quantificadas podem intervir na melhor solução.

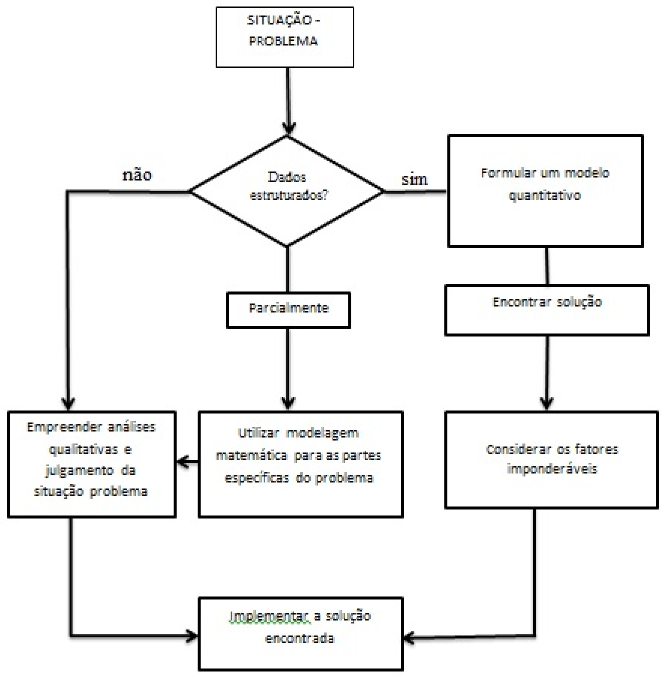

Figura 2.1: Processo de solução de um problema de Pesquisa Operacional, [3]

Implementação da solução: Nesse processo devemoos assegurar que a solução seja implementada de maneira suave, de tal forma que os impactos gerados pela mudança seja mínima.

Uma das técnicas mais usadas para resolver problemas de Pesquisa Operacional é a Programação Linear, vista a seguir, esta se sobressai das demais pela simplicidade no desenvolvimento do processo e pela possibilidade de utilizar softwares que facilitam a determinação das soluções dos problemas.

2.2 Programação Linear

A Programação Linear ou simplesmente PL é uma ramificação da Pesquisa Operacional, vista como uma técnica de planejamento e tomadas de decisões com grande aplicações em várias ciências. [6] conceitua PL como

A PL é uma técnica de otimização utilizada como ferramenta para encontrar o lucro máximo ou o custo mínimo em situações nas quais temos diversas alternativas de escolhas sujeitas a algum tipo de restrição ou regulamentação.

Um Problema de Programação Linear (PPL) de maximização, por exemplo, pode ser escrito sob a forma

Maximizar

$$\mathsf{Lucro} = ax + by + c$$

Sujeito as seguintes restrições

$$\begin{aligned} mx + ny &\leqslant d \\ px + qy &\leqslant c \\ x &\geqslant 0 \\ y &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Diante disso, é facil buscar algumas áreas onde a programação linear mostra sua grande aplicabilidade, pode-se argumentar a produção de empresas, onde o lucro deve ser maximizado e o custo minimizado, bem como logística de transporte, agricultura, dentre outros.

Antes de causar alguma distorção no significado de Programação Linear com Programação de Computadores, a primeira tem significado completamente diferente da última, a PL é uma técnica de planejamento baseada em relações matemáticas, enquanto a outra é um processo de escrita de programas computacionais, portanto *programação* tem significados diferentes nas duas ciências.

A seguir mostraremos algumas definições e resultados importantes acerca de PL.

2.2.1 Algumas Definições e Resultados sobre PL

Nesta seção apresentaremos algumas definições importante sobre PL, que serão utilizadas no decorrer das próximas secções, estas nos darão uma idéia dos passos sobre a formulação de um problema de PL.

Definição 2.2.1. *Um subconjunto D do* $\mathbb{R}^n$ *é chamado convexo se para quaisquer dois pontos* A *e* B *de* D *o segmento* AB *está inteiramente contido em* D*.*

A figura abaixo representa o conjunto Convexo e não convexo do R^2.

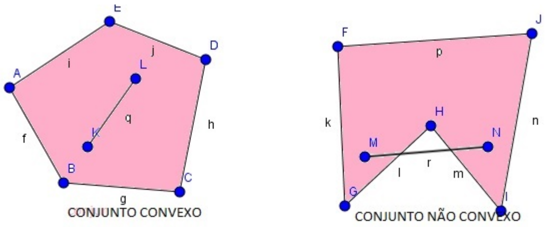

Figura 2.2: Representação do conjunto convexo e não convexo : Fonte:Autor

Definição 2.2.2. *Dada uma região* D *poliedral convexa fechada do* $\mathbb{R}^n$ *(determinada por um sistema de equações e inequações lineares), os vértices desta região* D *são os pontos que satisfazem um dos possíveis sistemas de* n *equações lineares independentes, obtidas substituindo-se as desigualdades por igualdades. Estes vértices são pontos extremos da região* D *e portanto possíveis soluções dos problemas de programação linear.*

Definição 2.2.3. ***Função Objetivo*** *é a função* $f : \Omega \subset R^n \to R$*, definida por* $f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b$*,* $a_i, b \in R$ *(*$i = 1, ..., n$*) para a qual procuramos o valor de máximo ou mínimo.*

Definição 2.2.4. ***Variáveis de Decisão*** *São as variáveis* $(x_1, x_2, ..., x_n)$*fundamentais do problema, sobre o que se trata o problema, cuja quantidades será a solução do problema.*

Definição 2.2.5. ***Restrições*** *é o conjunto de inequações que resringe o problema de PPL.*

A seguir, apresentamos alguns resultados importantes que são usados para a determinação de solução de um (PPL).

Lema 2.2.1. *Seja* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função definida por* $f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b$*,* $a_i, b \in R$ *(*$i = 1, ..., n$*) e seja* P *um ponto no interior do segmento* $AB \subset \Omega$ *do* R^n*, isto é,* $P = \lambda A + (1-\lambda)B$*,* $0 < \lambda < 1$*. Então teremos* $f(A) \leqslant f(P) \leqslant f(B)$ *ou* $f(B) \leqslant f(P) \leqslant f(A)$*.*

Lema 2.2.2. $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função definida por* $f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b$*,* $a_i, b \in \mathbb{R}$ *(*$i = 1, ..., n$*). Se dentre os valores que* f *assumir num segmento* AB *do* $\mathbb{R}^n$*, o valor máximo (mínimo) for assumido no ponto* P *no interior de* AB*, então este é constante em* AB*.*

As provas desses dois lemas podem ser encontradas em [1].

Teorema 2.2.1. *(Teorema Fundamental da Programação Linear) Seja* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *uma função definida numa região poliedral convexa* D *de* $\mathbb{R}^n$ *por* $f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b$, $a_i, b\mathbb{R}$ *(*$i = 1, ..., n$*). Suponha que* f *possua valor de máximo (ou mínimo) nesta região. Então,se* D *possui vértices, esse valor de máximo (ou mínimo) será assumido no vértice.*

Demonstração. A demonstração será feita para $n = 2$.
Seja $D \subset \mathbb{R}^2$. Suponhamos que o valor máximo (mínimo) de f seja assumido em um ponto P de D, considerando todas as regiões poliedrais convexas possíveis de $\mathbb{R}^2$ podemos ter:

(i) P é um vértice. Neste caso, o teorema já está provado.

(ii) P está sobre uma aresta. Do Lema 2.2.2, f assumirá o valor de máximo (mínimo) em toda a aresta. Como a região D possui vértice(s,) esta aresta conterá um vértice v obrigatoriamente, portanto, $f(P) = f(v)$.

iii) P está no interior de D. Neste caso, f será constante em toda região D. De fato, seja Q um outro ponto de interior de D. Como D é poliedral convexa, o segmento QP está contido em D; além disso, como P é interior podemos considerar um prolongamento QQ' que contém P deste ainda contido em D. Do Lema 2.2.2 segue que f é constante em QQ' e, portanto, $f(P) = f(Q)$.

□

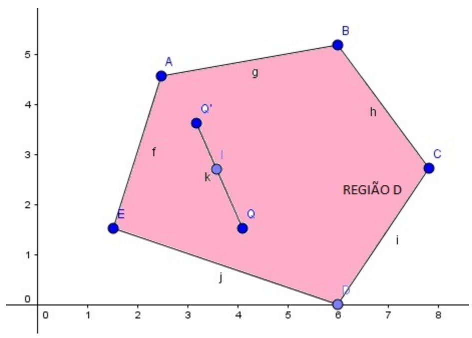

Figura 2.3: Ponto máximo da Região Poliedral convexa D

2.2.2 Exemplo de Modelagem

Nessa secção estamos interessados na modelagem de um Problema de Programação Linear, ou simplismente PPL, e criar o modelo matemático de como devemos atacar o problema é aqui que formulamos as relações matemáticas, observando o que deve ser maximizado ou minimizado, quais as variáveis que temos e sobre quais condições estas são apresentadas.

Exemplo 2.2.1. *Uma fábrica produz dois tipos de produtos A e B. Cada um deles pode ser processados por dua máquinas , M1 e M2. Devido a programação de outros produtos, que também utilizam essas máquinas, a máquina M1 tem 24 horas de tempo disponível para produzir os produtos A e B, enquanto a máquina M2 tem apenas 16 horas de tempo disponível. Para produzir um produto A, gatam-se 4 horas em cada máquina, para produzir o produto B, gastam-se 6 na M1 e 2 na M2. Cada unidade do produto gera um lucro de 80 unidades monetãrias e cada produto B, gera 60 unidades monetárias. Existe ainda uma demanda máxima de 3 unidades do produto B e nenhuma restrição de quantidade de A. qual deve ser as regras de produção para maximizar o lucro dessa empresa em relação aos produtos relacionados?*

Em toda modelagem de um PPL, muitas são as informações a cerca do problema, então acreditamos que a melhor forma de organizá-las, seja a criação de uma tabela que possa sintetizar as informações apresentadas no problema.

De acordo com os dados apresentados no problema sobre os produtos A e B e as restrições de tempo das maquinas M1 e M2, podemos escrever a seguinte tabela

produto	horas gastas (M1)	horas gastas (M2)	demanda máxima	lucro
A	4	4	ILIMITADA	80
B	6	2	3	60
horas disponíveis	24	16	ILIMITADA	

Diante disso podemos identificar os elementos de um PPL e escolher o melhor modelo para solucioná-lo.

Variáveis de Decisão

As variaveis de decisão podem ser facilmente reconhecidas, pois estas são os produtos fabricados pela empresa, a qual deve-se produzir para lucro máximo.

Relacionaremos a **A** a variável x e a **B** a variável y.

Função Objetivo

A Função Objetivo é a sentença formada pela combinação da variáveis formando assim a a expressão que queremos maximizá-la.

$$80x + 60y$$

Restrições

As restrições formam uma série de imposições restrita ao problema, a qual a função objetivo deve se moldar, a fim buscar a maximização do lucro.

$$\begin{aligned} 4x + 6y &\leqslant 24 \\ 4x + 2y &\leqslant 16 \\ y &\leqslant 3 \\ x \geqslant y &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Portanto, o modelo matemático adequado ao nosso problema será:
Maximizar

Lucro = 80x+60y

Sujeito às restrições

$$\begin{aligned} 4x + 6y &\leqslant 24 \\ 4x + 2y &\leqslant 16 \\ y &\leqslant 3 \\ x \geqslant y &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Depois de modelado o problema devemos nos concentrar em solucioná-lo, o próximo capítulo fará abordagem a um modelo de solução gráfica a um PPL, ressaltamos aqui que tal modelo pode ser facilmente acompanhado por um aluno de ensino médio.

Capítulo 3

Solução Gráfica de um Problema de Programação Linear

Nesse capítulo estaremos interessados em abordar um modelo gráfico ou geométrico de solucionar o problema, modelo este que pode ser facilmente apresentado aos alunos de ensino médio.

Um PPL de duas variáveis pode ser solucionado a partir de um modelo gráfico representado no sistema cartesiano, as variáveis de decisão serão representadas pelos eixos cartesianos e o conjunto de restrições formam retas que delimitam uma região sobre o plano, a análise dessa região comum a todas as restrições dará a solução final do problema.

A solução gráfica tem como principal ponto positivo, o fato do aluno poder acompanhar a solução do problema e identificar a construção dessa solução.

3.1 Solução Gráfica de um PPL de maximização

Nessa seção abordaremos um modelo geométrico para solucionar o PPL de duas variáveis, com base em [5].

Um PPL de duas variáveis pode ser solucionado a partir de um modelo gráfico representado no sistema cartesiano, as variáveis de decisão serão representadas pelos eixos cartesianos e o conjunto de restrições formam retas (semi-espaços) que delimitam uma região sobre o plano. A análise dessa região comum a todas as restrições dará a solução final do problema.

Vimos no capítulo anterior um exemplo de como modelar o problema. A partir de agora estudaremos sua solução a partir do modelo gráfico.

Exemplo 3.1.1. *Uma fábrica produz dois tipos de produtos A e B. Cada um deles pode ser processado por duas máquinas , M1 e M2. Devido a programação de outros produtos, que também utilizam essas máquinas, a máquina M1 tem 24 horas de tempo disponível para produzir os produtos A e B, enquanto a máquina M2 tem apenas 16 horas de tempo disponível. Para produzir um produto A, gatam-se 4 horas em cada máquina, para produzir o produto B, gastam-se 6 na M1 e 2 na M2. Cada unidade do produto gera um lucro de 80 unidades monetãrias e cada produto B, gera 60 unidades monetárias. Existe ainda uma demanda máxima de 3 unidades do produto B e nenhuma restrição de quantidade de A. qual deve ser as regras de produção para maximizar o lucro dessa empresa em relação aos produtos relacionados?*

Portanto, o modelo matemático adequado ao nosso problema é:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & \mathsf{Lucro} = 80x + 60y \\ \text{Sujeito à} \quad & \\ & 4x + 6y \leqslant 24 \\ & 4x + 2y \leqslant 16 \\ & y \leqslant 3 \\ & x \geqslant 0 \\ & y \geqslant 0. \end{aligned}$$

Achando a região representada pela primeira restrição, devemos primeiramente transformar $4x + 6y \leqslant 24$ na equação $4x + 6y = 24$ e fazendo $x = 0$ temos que $y = 4$, fazendo $y = 0$ temos que $x = 6$, assim teremos a reta mostrada abaixo

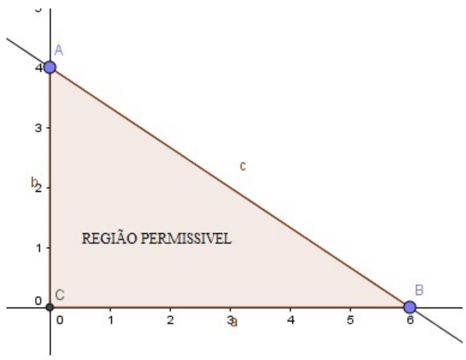

Figura 3.1: 1° restrição: horas disponíveis na máquina M1

Encontrando agora a região que representa a segunda restrição $4x + 2y \leqslant 16$, procedento de modo análogo, fazendo $x = 0$, temos $y = 8$ e para $y = 0$ temos $x = 4$

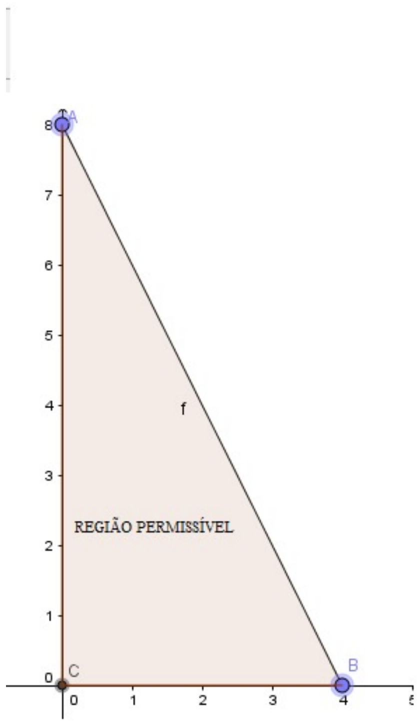

Figura 3.2: 2° restrição: horas disponíveis na máquina M2

Encontrando agora a região que representa a terceira restrição $y \leqslant 3$, temos

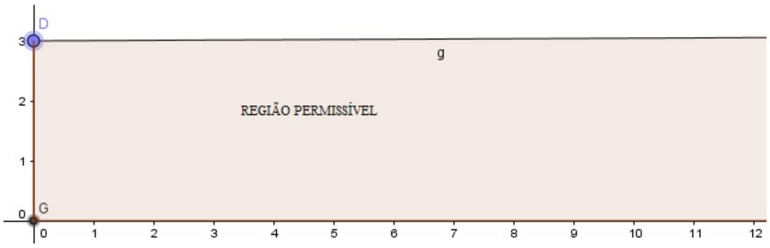

Figura 3.3: 3° restrição: demanda máxima do produto B

Por fim, colocando as três restrições em um só grafico temos.

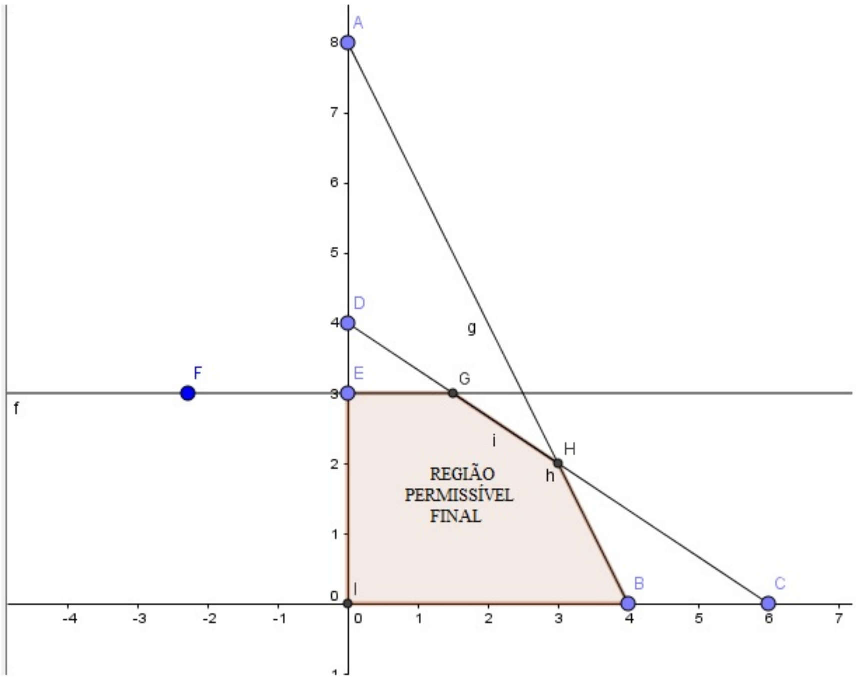

Figura 3.4: Polígono das Restrições

A região delimitada pela conjunto de todas as restrções formam um polígono, devemos agora nos concentrar em achar as coordenadas de seue vértices. E fácil ver que as coordenadas dos pontos P(0,0) de Q(4,0)e de T(0,3).Para os pontos S devemos resolver a equação

$$4x + 6y = 24,$$

como S tem coordenada $y = 3$, então

$$\begin{aligned} 4x + 6(3) &= 24 \\ 4x &= 6 \\ x &= \tfrac{3}{2}. \end{aligned}$$

As coordenadas de R, são representadas pela intersecção de $4x + 6y = 24$ e $4x + 2y = 16$, então uma combinação das duas equações darão as coordenadas de R, então

$$4x + 6y = 24$$
$$4x + 2y = 16$$

Subtraindo as equações membro a membro, temos

$$(4x - 4x) + (6y - 2y) = 24 - 16$$
$$4y = 8$$
$$y = 2$$

Fazendo $y = 2$ em $4x + 2y = 16$, temos

$$4x + 2(2) = 16$$
$$4x = 12$$
$$x = 3$$

Pelo Teorema 2.2.1, a solução ótima deve estar em um dos pontos extremos da região delimitada pelo conjunto de restrições. Para mostrar qual deles é a solução que maximiza o lucro, basta substituir as coordenadas na função objetivo. Veja a tabela:

Vértice	valor x	valor y	Função objetivo $80x + 60y$
P	0	0	0
Q	4	0	320
R	3	2	360
S	$\frac{3}{2}$	3	300
T	0	3	180

Portanto a extremidade R determina uma solução ótima para o PPL, sendo assim a fábrica deverá produzir 3 produtos A e 2 produtos B, a fim de maximizar seu lucro.

Exemplo 3.1.2. *Um vendedor de frutas pode transportar 800 caixas de frutas para sua região de vendas. Ele necessita transportar 200 caixas de laranja a 20 u.m de lucro por caixa, pelo menos 100 caixas de pêssego a 10 u.m de lucro por caixa, e no máximo 200 caixas de tangerinas a 30 u.m de lucro por caixa. De que forma deverá carregar o caminhão para obter lucro máximo.*

O modelo matemático adequado a nosso problema será:

Maximizar

$$\mathsf{Lucro} = 10x + 30y + 4000$$

Sujeito às restrições

$$\begin{aligned} x + y &\leqslant 600 \\ x &\geqslant 100 \\ y &\leqslant 200 \\ x &\geqslant 0 \\ y &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Para encontrar a região delimitada pela primeira restrição, basta transformar a primeira inequação e em equação, daí para $x = 0$, temos $y = 600$ e para $y = 0$, tems $x = 600$, portanto

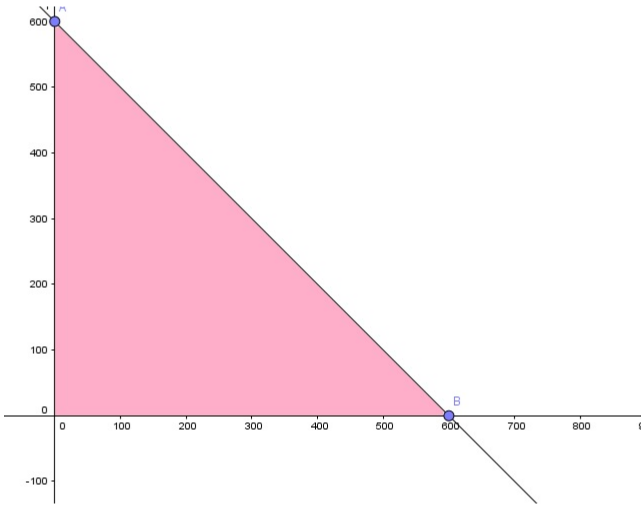

Figura 3.5: região delimitada pela $x + y \leqslant 600$

Para encontrar a região delimita por $x \geqslant 100$, basta traçar a reta $x = 100$, assim

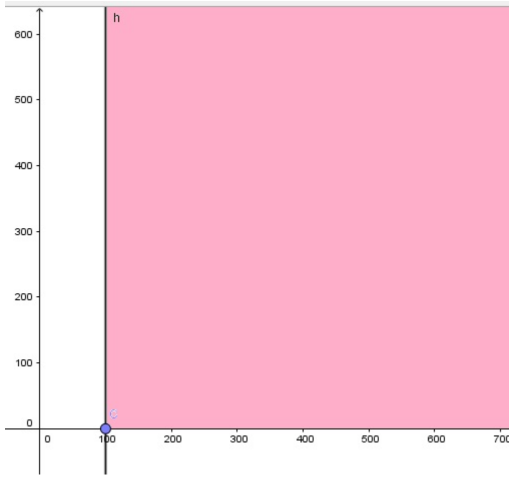

Figura 3.6: região delimitada pela $x \geqslant 100$

Encontrando a região delimitada por $y \leqslant 200$, temos

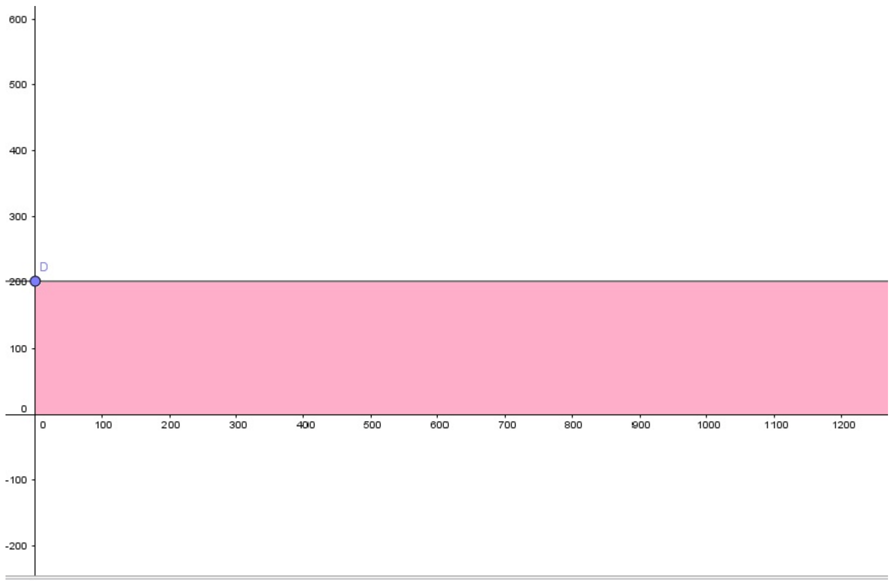

Figura 3.7: região delimitada pela $x \leqslant 200$

Por fim, a solução ótima do nosso PPL está situada em algum dos vértices que delimitam a região formada pelo conjunto das restrições, esta mostrada a seguir

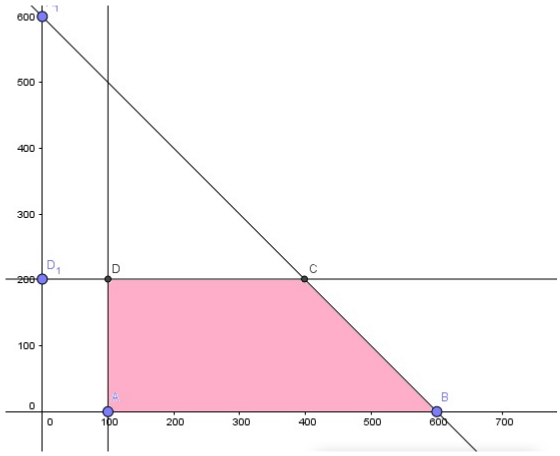

Figura 3.8: região delimitada por todas as restrições

Teremos agora que encontrar as coordenadas dos vértices dessa região. Facilmente podemos identificar as coordenadas dos pontos A $(100, 0)$, B $(600, 0)$ e de D $(100, 200)$, no entanto, para as coordenadas de C, devemos encontrá-la fazendo a intersecção das retas $y = 200$ com $x + y = 600$, assim

$$x + (200) = 600 \Rightarrow x = 400.$$

Daí as coordenadas de C$(400, 200)$.

Então nossa solução ótima será representada por um desses vértices. Tabela os dados para sintetizar as co ntas, teremos:

Vértice	valor x	valor y	Função objetivo $10x + 30y + 400$
A	100	0	1 400
B	600	0	6 400
C	400	200	10 400
D	100	200	7 400

Portanto o vértice C, representa a solução que maximiza o nosso PPL, ou seja, o vendedor deve encher seu caminhão com 200 caixas de laranja, 400 caixas de pêssego e 200 caixas de tangerina.

3.2 Solução Gráfica de PPL de minimização

Exemplo 3.2.1. *Para uma boa alimentação, o corpo nessecita de vitaminas e proteínas. a necessidade mínima de vitaminas é de 32 unidadespor dia e a de proteínas d e 36 unidades* *por dia. Uma pessoa tem disponível carne e ovos para sua alimetação. Cada unidade de carne contém 4 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas. Cada unidade de ovo contém 8 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas. Qual a quantidade diária de carne e ovos que deve ser consumida para suprir as necessidades de vitaminas e proteínas com o menor custo possível? Sabendo que cada unidade de carne custa 3 u.m e cada unidade de ovo custa 2,5 u.m.*

Portanto, o modelo matemático adequado a nosso problema será:
Minimizar

$$\mathsf{Custo} = 3x + 2,5y$$

Sujeito às restrições

$$\begin{aligned} 4x + 8y &\geqslant 32 \\ 6x + 6y &\geqslant 36 \\ x &\geqslant 0 \\ y &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Construindo a região delimitada pela primeira restrição, temos para $x = 0$, $y = 4$ e para $y = 0$, $x = 8$, portanto

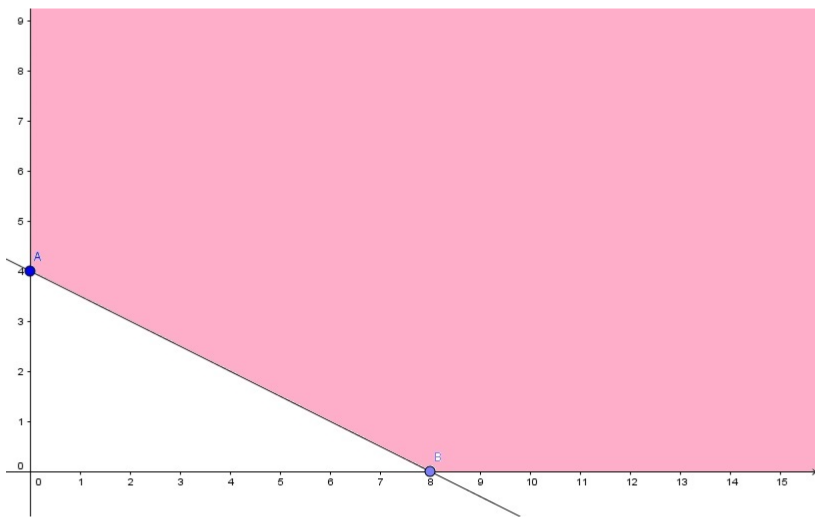

Figura 3.9: 1° restrição:necessidade minima de vitaminas

Construindo a região delimitada pela segunda restrição, temos para $x = 0$, $y = 6$ e para $x = 0$, $y = 6$, portanto

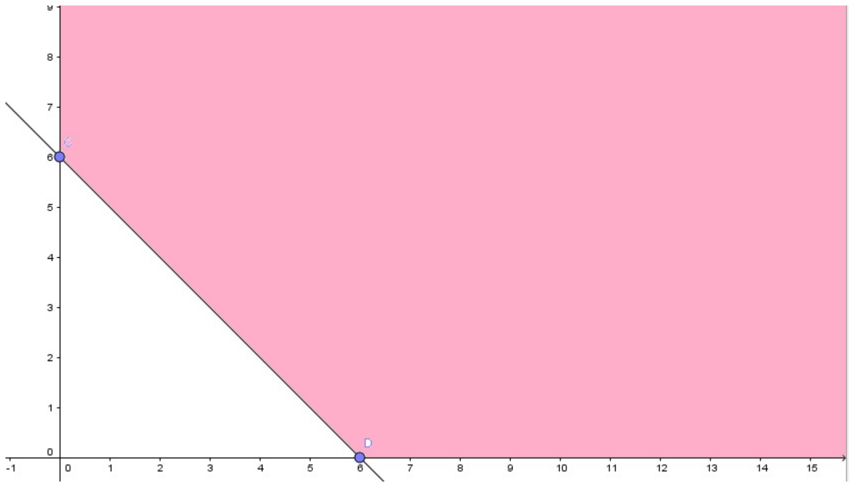

Figura 3.10: 2° restrição:necessidade minima de proteínas

Por fim, colocando o conjunto de todas as restrições em um só gráfico temos,

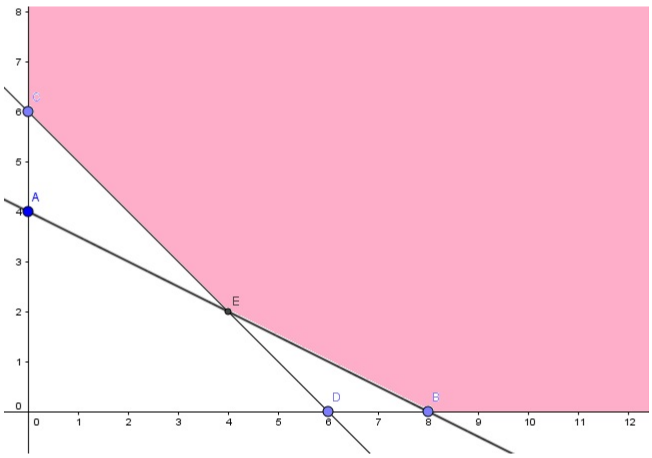

Figura 3.11: Conjunto de todas as restrições

A melhor solução do PPL se encontra em algum dos vértices C, B ou E que delimitam o polígono hachurado por baixo. Podemos notar que $C(0,6)$, B $(8,4)$ e E, são encontradas pela intersecção da reta $4x + 8y = 32$ com a reta $6x + 6y = 36$, assim, manipulandos as equações, temos

$$(\mathrm{I})4x + 8y = 32$$
$$(\mathrm{II})6x + 6y = 36$$

Multiplicando a equação (I) por 3 e (II) por 2, teremos

$$12x + 24y = 96$$
$$12x + 12y = 72$$

subtraindo termo a termo,

$$\begin{aligned}(12x - 12x) + (24y - 12y) &= (96 - 72)\\ 12y &= 24\\ y &= 2\end{aligned}$$

Substituindo $y = 3$ na equação (I)

$$\begin{aligned}4x + 8(2) &= 32\\ 4x &= 16\\ x &= 4\end{aligned}$$

Portanto encontramos E $(4, 2)$. De posse de todas as coordenadas dos vértices, devemos aplicá-las na função objetivo e encontrar a solução que melhor resolve nosso PPL, assim

Vértice	valor x	valor y	Função objetivo $3x + 2,5y$
B	8	4	34
C	0	6	15
E	4	2	17

Portanto o vértice C, representa a solução ótima para nosso problema, ou seja, deve ser consumida 0 unidades de carne e 6 unidades de ovos, que minimizará os custos e suprirá a necessidade diária de vitaminas e proteínas.

Exemplo 3.2.2. *Uma companhia de transporte tem dois tipos de caminhões: O do tipo A, tem 2*m^3 *de espaço refrigerado e 3* m^3 *de espaço não refrigerado; O do tipo B, tem 2* m^3 *de espaço refrigerado e 1* m^3 *de espaço não refrigerado. O cliente quer transportar um produto que necessitará e 16* m^3 *de área refrigerada e e 12* m^3 *de área não refrigerada. A companhia calcula que 1.100 litros de combustível para uma viagem com o caminhão do tipo a e 750 litros com caminhão do tipo B. Quantos viagens precisará fazer cada caminhão de modo que a quantidade de combustível seja mínima?*

O modelo matemático aplicado para esse problema de PPL é:
Minimizar gasto de combustível que é:

$$\mathsf{Gasto} = 1100x + 750y$$

sujeita as restrições:

$$\begin{aligned} 2x + 2y &\leqslant 16 \\ 3x + y &\leqslant 12 \\ x &\geqslant 0 \\ y &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Devemos agora, nos concertrá-mos em delimitar as regiões representadas por cada restrição.

A primeira região delimitada por $2x + 2y \leqslant 16$,

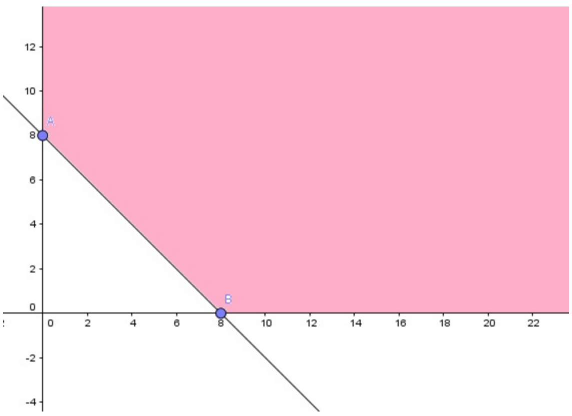

Figura 3.12: Região representa a área refrigerada

Religião delimitada pela segunda restrição,

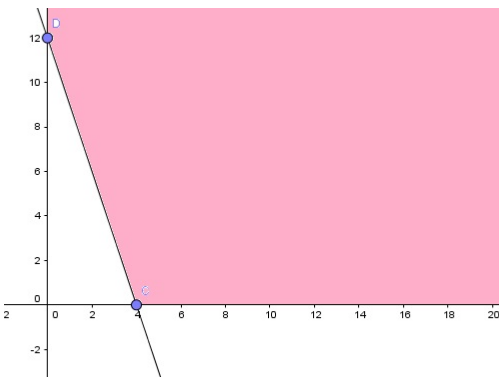

Figura 3.13: Região que representa a área não refrigerada

Por fim, delimitaremos a região formada pelo conjunto de todas as restrições,

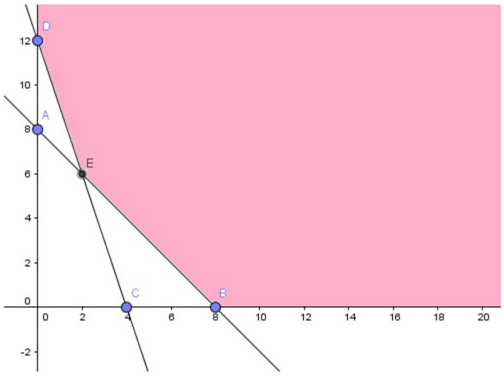

Figura 3.14: Região formada pelas restrições

A melhor solução do nosso PPL se encontra em algum dos vértices que delimitam figura formada pelo conjunto de todas as restrições por baixo, então devemos encontrarmos as coordenadas de cada vértice.

Notamos que as coordenadas do vértice B $(8, 0)$ e do vértice D $(0, 12)$, porém as coordenadas de E, será representa pela inteersecção das retas $2x + 2y = 16$ e $3x + y = 12$, então devemos manipulá-las algebricamente para encontrá-mos tais coordenadas.

(I) 2x + 2y=16

(II) 3x + y =12

Multiplicando a equação (II) por (2), temos

$$2x + 2y = 16$$
$$6x + 2y = 24$$

Subtraindo termo a termo a equação (II) pela equação (I), temos

$$(6x - 2x) + (2y - 2y) = (24 - 16)$$
$$4x = 8$$
$$x = 2$$

Substituindo $x = 2$, na equação (I), temos,

$$2(2) + 2y = 16$$
$$2y = 12$$
$$y = 6$$

Para sabermos quais dos vértices representa a melhor solução para nosso PPL, basta substuirmos as coordenadas suas coordenadas na função objetivo e ver qual nos dá a melhor solução, sintetizaremos essas contas na tabela.

Vértice	valor x	valor y	Função objetivo $1100x + 750y$
B	8	0	8 800
D	0	12	9 000
E	2	6	6 700

Portanto a solução que otimiza nosso PPL é o vértice E, ou seja, o caminhão do tipo A deverá fazer 2 viagens e o caminhão do tipo B deverá fazer 6 viagens.

Capítulo 4

Considerações Finais

Como Programação Linear é uma ferramenta utilizada para encontrar o lucro máximo ou o custo mínimo em situações gerais sujeitas a uma série de restrições (inequações), modeladas por funções matemáticas. O presente trabalho foi pensado como uma forma de apoio aos professores, e de pesquisa para alunos, de ensino médio buscando relacionar conteúdos dessa etapa escolar com abordagem de otimização de problemas de contexto social. De modo geral pensamos nesse tema, como ponto de partida para relacionar conteúdos dessa faixa de estudo com problemas de ordem prática, a fim de tentar despertar no aluno a importância da matemática no contexto social.

A princípio, a idéia era abordar um material de apoio exclusivo ao professor, porém com decorrer de nossas descobertas sobre o tema, imaginamos que este pode ser também aplicado ao aluno, visto que a simplicidade de conteúdos e as ferramentas necessária para a solução de um Problema de Programção Linear podem ser facilmente relacionados com conhecimentos que o aluno trás de série anteriores, inequações por exemplo.

Além disso, pensamos em continuar a desenvolver trabalhos sobre essa temática, pois despertaram no autor a idéia de tentar relacionar, além dos modelos de soluções apresentadas nesse trabalho, alguns outros que possam vir a servir até em etapas mais básicas da vida escolar.

Referências Bibliográficas

[1] Boldrini, José Luis ...[et al] - 3.ed.-*Álgebra Linear*. Harper & Row do Brasil, 1997.

[2] Hefez, Abramo; Fernandez, Cecília de Souza - *Introdução a Álgebra Linear*. Coleção PROFMAT - SBM, 2012.

[3] Lima, Puccini Abelardo de - *Introdução à Programação Linear*. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1977.

[4] Maculan, Nelson; Fampa, Marcia H. Costa - *Otimização Linear*.Rio de Janeiro, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2004.

[5] Moreira, Daniel Augusto, -2. ed.-*Pesquisa Operacional:Curso Introdutório*. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

[6] Prado, Darci Santos do; *Programação Linear*. Belo Horizonte: Editora de Desenvolvimento Gerencial, 1999.

[7] Silva, Ermes Medeiros da ...[et al]- 3. ed.-*Pesquisa Operacional: Programação Linear*. São Paulo: Atlas, 1988.