



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA -
PROFMAT

**Uma proposta de aplicação do conteúdo
geometria espacial no Ensino Médio**

Ademar Rosa de Araújo

Parnaíba - 2017

Ademar Rosa de Araújo

Dissertação de Mestrado:

**Uma proposta de aplicação do conteúdo geometria espacial
no Ensino Médio**

Dissertação submetida à Coordenação do
Curso de Pós-Graduação em Matemática,
da Universidade Federal do Piauí, como
requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Msc. ROBERTO RAMOS DAS
NEVES

Parnaíba - 2017

A658p

ARAÚJO, Ademar Rosa de.
Uma Proposta de Aplicação do Conteúdo Geometria Espacial no
Ensino Médio./Ademar Rosa de Araújo. - Parnaíba: UFPI, 2017.
65f: il.

Orientador: Prof. Msc. Roberto Ramos das Neves.

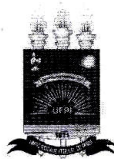
Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal
do Piauí, 2017.

1. Geometria Espacial. 2. Proposta de Ensino. 3. Ensino Médio.
I. Araújo, Ademar Rosa de. II. Universidade Federal do Piauí.
III. Título

CDD: 516.



PROFMAT



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada: Uma proposta de aplicação do conteúdo geometria espacial no Ensino Médio, defendida por Ademar Rosa de Araújo em **31/08/2017** e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Prof. Msc. Roberto Ramos das Neves
Presidente da Banca examinadora

Prof. Dr. Alexandre Marinho Oliveira
Examinador

Prof. Dr. Israel de Sousa Evangelista
Examinador Externo

Dedico este trabalho a minha esposa Lilian Raquel, aos meus filhos Lunara e Jefté, aos meus pais Antônio e Raimunda e aos meus irmãos Gilcivan, Gilvan e Gilmar.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me iluminado e me dado força para que pudesse chegar até aqui, por seu amor incondicional e por indicar o melhor caminho a seguir.

À minha esposa e companheira Lilian Raquel por ter me ajudado em todos momentos, por ter me encorajado, motivado e acreditado na minha capacidade.

Agradeço ao professor Roberto Ramos por sua paciência e dedicação em minha orientação, a qual culmina neste trabalho, e a todos os meus professores pela parceria e ensinamentos.

Aos meus amigos da turma do mestrado pela amizade, companheirismo, espírito de cooperação, pelas risadas nos momentos de descontração.

À CAPES, pelo apoio financeiro, à Universidade Federal do Piauí - Campus Ministro Reis Velloso pelo PROFMAT que possibilitou meus estudos.

Confia os teus cuidados ao Senhor, e ele te susterá;
jamais permitirá que o justo seja abalado.

Salmos 55:22

Resumo

Este trabalho apresenta uma proposta de ensino do conteúdo de geometria espacial para os professores de Matemática que lecionam no Ensino Médio. Abordamos a teoria por meio de conceitos, definições, teoremas, propriedades e figuras, descrevemos a abordagem de alguns livros didáticos e sugerimos o uso de alguns softwares e materiais manipuláveis como material para o ensino do conteúdo.

Palavras-chave: Geometria Espacial; Proposta de Ensino; Ensino Médio.

Abstract

This paper presents a proposal of teaching the content of Spatial Geometry for Mathematics teachers who teach in High School. We approach the theory through concepts, definitions, theorems, properties and figures, describe the approach of some books and suggest the use of some softwares and to manipulate materials as material for teaching content.

Keywords: Spatial Geometry, Teaching Proposal, High School.

Sumário

0.1	Geometria Espacial	1
0.1.1	Aspectos Históricos	1
0.1.2	Geometria Espacial de Posição	8
0.1.3	Geometria Espacial Métrica	17
0.2	Abordagem de alguns livros didáticos utilizados no Ensino Médio .	49
0.3	Proposta de abordagem para o Ensino Médio	51
0.4	Considerações finais	63
	Referências Bibliográficas	65

Introdução

O estudo de geometria espacial no ensino médio é de grande importância, pois ela está aplicada em diversas áreas da atividade humanas. Uma evidência muito forte desse uso é encontrada na arquitetura. Porém, atualmente, no ensino médio, esse estudo se restringe a geometria de posição, sólidos geométricos e poliedros, isso ocorre de maneira explanatória dos conceitos, propriedades, teoremas, elementos dos sólidos e formas de áreas e volumes dos sólidos, ou seja, os livros didáticos costumam abordá-los de maneira mecanizada e as situações-problemas sobre o conteúdo fica pra segundo plano ou a cargo do docente.

0.1 Geometria Espacial

Nesta seção damos um embasamento teórico do estudo de geometria espacial para professores de matemática do Ensino Médio, explorando aspectos históricos, conceitos, postulados, teoremas, propriedades e exemplos.

0.1.1 Aspectos Históricos

Os primeiros conhecimentos geométricos que o homem teve, a respeito da geometria partiram das necessidades em compreender melhor o meio onde vivia. Motivo este que talvez justifique a origem da sua palavra, pois o termo “geometria” deriva do grego $geo = terra + metria = medida$ que significa medição de terra.

De acordo com Eves (1997), as primeiras considerações feitas a respeito da geometria são muito antigas tendo como origem a simples observação e a capacidade de reconhecer figuras, comparar formas e tamanhos. Um dos primeiros conceitos geométricos a serem desenvolvidos foi a noção de distância.

Ainda, segundo Eves (1997), foi das necessidades da sociedade, quando o homem teve que delimitar terras, que teve origem uma geometria caracterizada pelo traçado de desenho de formas, fórmulas, cálculo de medidas de comprimento de área, volume, etc. Foi nessa época que se desenvolveu a noção de figuras geométricas como, retângulo, quadrado e triângulos. Outros conceitos geométricos, como noções de paralelismo e perpendicularidade teriam sido sugeridas pela construção de muros e moradias.

Boyer (1974) no livro *História da Matemática*, faz colocações que descrevem a história da geometria que vem ao encontro do que diz Eves (1997), também descreve que a geometria teve sua origem no Egito, e seu surgimento veio da necessidade de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual no vale do

rio Nilo. As inundações anuais sobrepunham-se sobre o Delta do referido rio. Ano após ano o Nilo transbordava seu leito natural, espalhando um rico limo sobre os campos ribeirinhos.

A inundaçãoz fazia desaparecer os marcos fixados no ano anterior, de delimitaçãoz entre as propriedades de terras. Para demarcarem novamente os limites existiam os “puxadores de corda”, (assim chamados devido aos instrumentos de medida e cordas entrelaçadas que usavam para marcar ângulos, e determinar as áreas de lotes de terrenos, dividindo-os em retângulos e triângulos).

Os egípcios levavam os direitos de propriedade muito a sério e sem os marcos fronteirizos, tinham início muitos conflitos entre indivíduos e comunidades. Assim, sem as demarcaçõez, os agricultores não tinham como saber qual era a sua propriedade, tanto para o cultivo, quanto para o pagamento de impostos aos governantes.

Segundo Mlodinow (2005), a cobrança de impostos, talvez tenha sido o primeiro motivo, para o desenvolvimento da geometria, pois o governo determinava os impostos da terra baseado na altura da enchente do ano e na área de superfície das propriedades. Aqueles que se recusavam a pagar podiam ser espancados pelos guardas, até que se submetessem.

De acordo com Boyer (1974), para resolver esta situação, os faraós passaram a nomear funcionários, os agrimensores, cuja tarefa era avaliar prejuízos das cheias, medir as terras e fixar os limites das propriedades, restabelecendo as fronteiras entre as diversas propriedades, refazendo os limites de suas áreas de cultivo. No momento de refazer os limites, os agrimensores tinham apenas informações parciais ou até mesmo nenhuma, pois as fronteiras podiam ter sido destruídas por completo. Estes agrimensores acabaram por aprender a determinar áreas de terrenos dividindo-os em retângulos e triângulos, e quando se deparavam com superfícies irregulares utilizavam o método de triangulaçãoz, (dividir um campo em porçõez menores e triangulares cujas áreas somadas correspondiam à área total).

Segundo Boyer (1974), os Egípcios tinham muita habilidade em delimitar terras e com isso descobriram e utilizaram inúmeros princípios. Um destes princípios era utilizado para marcar ângulos retos, onde usavam cordas cheias de nós equidistantes um do outro, fazendo assim a divisãoz das terras. Essa técnica empírica, para obter resultados aproximados, mais tarde viria a ser demonstrada pelo teorema de Pitágoras.

É importante lembrar que a geometria, de uma maneira mais rústica, foi utilizada na Babilônia, na China, entre outros países. Mas seu uso como ciência dedutiva surgiu no vale do rio Nilo, no Antigo Egito.

Eles diziam que este rei [Sesóstris] dividia a terra entre os egípcios de modo a dar a cada um deles um lote quadrado de igual tamanho e impondo-lhes o pagamento de um tributo anual. Mas qualquer homem despojado pelo rio de uma parte de sua terra teria de ir a Sesóstris e notificar-lhe o ocorrido. Ele então mandava homens seus observarem e medirem quanto a terra se tornava menor, para que o proprietário pudesse pagar sobre o que restara, proporcionalmente ao tributo total. (HERÓDOTO, século V a.C apud, EVES 1997, p.3).

Segundo Eves (1997), nos primórdios, o homem só considerava problemas geométricos concretos, onde não se observava nenhuma ligação, cada problema era apresentado individualmente, só mais tarde que se tornou capaz de observar formas, tamanhos e relações espaciais de objetos físicos específicos, e delas extrair certas propriedades que tinham relações com outras observações já vistas. Com isso os homens da época começaram a ordenar os problemas geométricos práticos em conjuntos, de tal forma que podiam ser resolvidos pelo mesmo procedimento. Assim chegou-se a noção da lei ou regra geométrica.

Da prática dos egípcios e Babilônios, com atividades ligadas à agricultura e engenharia no antigo Egito, deu-se o primeiro passo para o surgimento da geometria como ciência.

Esse nível mais elevado do desenvolvimento da natureza da geometria pode ser chamado “geometria científica” uma vez que indução, ensaio, erro e procedimentos empíricos eram instrumentos de descobertas. A geometria transformou-se num conjunto de receitas práticas e resultados de laboratório, alguns corretos e alguns apenas aproximados, referentes a áreas, volumes e relações entre figuras sugeridas por objetos físicos. (EVES, 1997, p. 3)

O desenvolvimento da geometria teve como base o povo egípcio e babilônio, mas, segundo Eves (1997), as mudanças políticas e econômicas ocorridas nos últimos séculos do segundo milênio a.C. diminuíram o poder dessas nações, passando os desenvolvimentos posteriores da geometria para os gregos. Para os gregos, os fatos geométricos deveriam ser estabelecidos, não por procedimentos empíricos, mas por

raciocínio dedutivo, eles transformaram a geometria empírica dos egípcios e babilônios em geometria demonstrativa.

Para Mlodinow (2005), os gregos valorizavam a busca do conhecimento e foi com seus matemáticos que a geometria foi estabelecida, começando com Tales de Mileto 640 a.C. e 564 a.C. Tales fez muitas viagens para o Egito, e lá passou longos períodos. Em uma dessas viagens, buscou explicações teóricas para o fato dos egípcios construírem as pirâmides, mas não terem conhecimento para medir a sua altura, com isso Tales deduziu técnicas geométricas, como propriedades de triângulos semelhantes para medir a altura da pirâmide de Quéops. Tales foi o primeiro a demonstrar teoremas geométricos, que, séculos mais tarde, se juntariam com os elementos de Euclides.

Para Mlodinow (2005) outro matemático importante foi Pitágoras. Ele não só aprendeu a geometria egípcia, como também, foi o primeiro grego a aprender os hieróglifos egípcios, tornou-se sacerdote, de onde teve acesso a todos os mistérios egípcios, chegando, até mesmo aos aposentos secretos do templo Pitágoras permaneceu no Egito por 13 anos, somente partindo quando os persas invadiram o Egito e o levaram prisioneiro. Por causa de sua genialidade, um importante cálculo matemático leva seu nome: o Teorema de Pitágoras.

Conforme Garbi (2006), outro matemático que contribuiu significativamente para as descobertas matemáticas foi Euclides. Pouco se sabe sobre ele, nem mesmo onde e quando nasceu e morreu. É possível que tenha estudado na Academia de Platão, devido à semelhança entre a visão platônica do conhecimento e a visão de Euclides, e pelo desinteresse em aplicações práticas.

Euclides foi o primeiro a apresentar, a geometria como ciência de natureza lógica e dedutiva. Ele não se limitou a anunciar um grande número de leis geométricas, mas preocupou-se em demonstrar esses teoremas. Operava a partir de hipóteses básicas e, com seus conhecimentos, adquiridos ao longo do tempo, estabelecem-se o conceito de lugar geométrico.

Euclides escreveu o clássico livro: “Os Elementos”, uma série de 13 livros que serviu de base para o ensino da geometria. Em sua obra, Euclides procurou fazer afirmações simples que seriam aceitas e entendidas por todas as pessoas, até por iniciantes.

“Os Elementos, de Euclides, o mais antigo livro de matemática ainda em vigor nos dias de hoje, uma obra que somente perde para a Bíblia em número de edições

e, para muitos, o mais influente livro matemático de todos os tempos” (GARBI, 2006, p.49).

Conforme Eves (1997) Euclides, por volta do ano 300 a.C. coletou e arranjou proposições da geometria plana, apoiando-se num conjunto de cinco postulados, onde definiu retas paralelas, sendo este conhecido como “Postulado das Paralelas”.

Mais tarde segundo Eves (1997), Platão também se interessou pela geometria. Ele acreditava na geometria intuitiva, e era um matemático que defendia a teoria dos cinco elementos, o fogo sendo tetraedro, o ar octaedro, a água icosaedro, a terra o cubo e o Universo o dodecaedro, sendo sólidos geométricos regulares. Platão e seus seguidores estudaram esses sólidos, conhecidos como “Poliedros de Platão”, com muita intensidade.

Para Platão, os poliedros regulares estavam presentes na natureza e o universo era formado por um corpo e uma alma. Na matéria havia porções limitadas por triângulos, quadrados ou pentágonos, formando elementos diferentes conforme a forma e as características da natureza.

Platão entendia que cada elemento era justificado. Para ele, o tetraedro (modelo de fogo) era um sólido formado por 4 faces, triângulos equiláteros. Platão dizia que o átomo do fogo teria a forma de um poliedro com 4 faces. O cubo (modelo da terra) era o único poliedro regular com faces quadrangulares, justificando a associação da terra porque, assenta sobre qualquer uma das faces, e é o sólido de maior estabilidade. Os átomos de terra seriam cubos, os quais permitem ser colocados lado a lado, com solidez. O octaedro (modelo de ar) são triângulos equiláteros, mas em cada vértice reúnem-se quatro triângulos. É formado por 8 faces, e representa o ar, porque o modelo de Platão para um átomo de ar, era um poliedro com 8 faces. O dodecaedro (modelo do cosmos) é o único poliedro regular cujas faces são pentágonos regulares. Este sólido representa o universo porque, para Platão, a associação entre o universo e o dodecaedro é que este tem 12 faces tal como o zodíaco tem doze signos. O icosaedro (modelo de água) é o poliedro composto por vinte faces. Para Platão, este sólido representa água, que seria constituída por icosaedros.

Percebe-se que, no decorrer de sua história, a geometria sempre teve muita importância em vários sentidos, facilitando a vida do homem. Nos dias atuais, a geometria é um componente essencial para a construção da cidadania, pois a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e tecnológicos, e isso tem tudo a ver com a geometria.

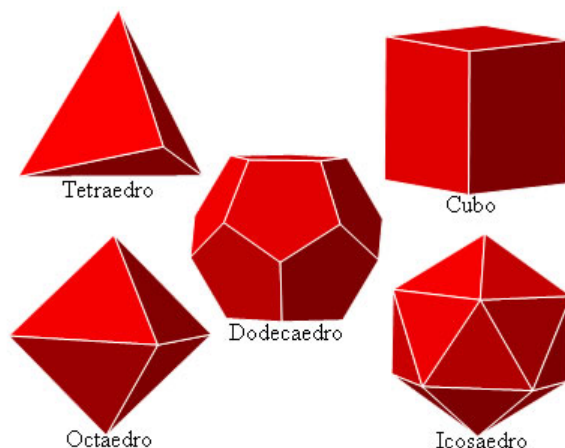


Figura 1: Sólidos de Platão

Fonte: <https://www.google.com.br/search?q=poliedros+de+plat>

Os mais antigos registros da atividade são algumas tábulas de argilas cozidas desenterradas na Mesopotâmia e se acredita datarem, pelo menos em parte, do tempo dos sumérios, por volta do ano 3000 a.C. A partir dessas tábulas vemos que a geometria babilônica antiga estava intimamente relacionada com a mensuração prática. Numerosos exemplos concretos mostram que os babilônicos do período 2000-1600 a.C. conheciam as regras gerais para o cálculo de áreas de retângulos, áreas de triângulos retângulos e isósceles, a área do trapézio retângulo, o volume do paralelepípedo retângulo e o volume do prisma reto com base trapezoidal. A circunferência de um círculo era tomada como sendo o triplo do diâmetro e a área do círculo como um doze avos da área do quadrado construído sobre um lado de comprimento igual à circunferência do círculo (ambas medidas corretas para $\pi = 3$): então o volume de um cilindro circular reto era obtido fazendo-se o produto da base pela altura. O volume de um tronco de cone ou de pirâmide quadrangular aparece incorretamente como o produto da altura pela semi-soma das bases.

Todo o conhecimento a respeito da geometria egípcia antiga que temos hoje se baseiam em documentos, denominados **PAPIROS**. Os papiros que tratam da geometria são: Papiro de Moscou e Papiro de Rhind. Esses papiros são textos matemáticos que contém, respectivamente, 25 e 85 problemas, e datam de aproximadamente 1850 a.C. e 1650 a.C. Há também, no Museu de Berlim, o mais antigo instrumento de astronomia ou de agrimensura conhecido, que é uma combinação de fio de prumo e colimador, procedente do Egito, aproximadamente do ano 1850 a.C. O Museu de Berlim também tem o mais antigo relógio de sol que se conhece.

É egípcio e data de cerca de 1500 a.C. Esses instrumentos revelam, naturalmente, alguns conhecimentos de geometria prática aos quais estariam associados.

Dos 110 problemas dos papiros de Moscou e Rhind, 26 são de geometria. A maioria desses problemas provém de fórmulas de mensuração necessárias para calcular áreas de terras e volumes de celeiros. A área de um círculo era tomada como sendo igual à de um quadrado de lado igual a $\frac{8}{9}$ de seu diâmetro e o volume de um cilindro circular reto como produto da área da base pelo comprimento da altura.

PAPIRO DE MOSCOU

Escrito em hierático por um escriba desconhecido por volta de 1850 a.C., as suas dimensões são, aproximadamente, 8 centímetros de largura por 5 metros de comprimento. Contém 25 problemas, sendo impossível interpretar muitos deles devido o grau de degradação do manuscrito. Nesse papiro é apresentada uma forma de cálculo do tronco de uma pirâmide quadrada.

Um tronco de pirâmide tem 6 cúbicos de altura, 4 cúbicos de base por dois cúbicos no topo. qual o volume?



Figura 2: Papiro de Moscou

Fonte:<https://www.google.com.br/search?q=papiro+de+moscou>

PAPIRO DE RHIND

O papiro de Rhind intitula-se instruções para conhecer todas as coisas secretas, sendo considerado um dos documentos mais importantes referente aos conhecimentos matemáticos egípcios. Não se sabe se as intenções do papiro eram pedagógicas ou simples anotações. Basicamente o papiro apresenta informações sobre trigonometria, aritmética, equações, progressões e cálculo de área e volume.



Figura 3: Papiro de Rhind

Fonte: <https://www.google.com.br/search?q=papiro+de+Rhind+imagem>

Estes papiros são compostos por exposições de problemas e suas resoluções. Na verdade o que distingue a Matemática babilônica da grega (posterior) é o fato de não serem conhecidos seus criadores. O que se encontra são exemplos comprobatórios da existência e a preocupação do estudo geométrico.

PITÁGORAS DE SAMOS

Discípulo de Thales de Mileto, Pitágoras nasceu em Samos, uma das ilhas do Dodecaneso na Grécia, Pitágoras foi responsável pelo estudo da Geometria (forma) com a Aritmética (número). Criou a escola Pitagórica, onde associava tudo existente na natureza com números (religião, música, etc.). Seu erro foi não acreditar na existência dos números irracionais, que ao serem descobertos levaram a decadência da sua doutrina. Na Geometria Espacial trabalhou um especial com o tetraedro, o cubo, o dodecaedro e a esfera. A “harmonia das esferas” era para os pitagóricos a origem de tudo.

0.1.2 Geometria Espacial de Posição

Noções Primitivas e Axiomas

[ELON] Na nossa opinião, não é apropriado apresentar, no Ensino Médio, uma teoria axiomática formal para a Geometria Espacial. Mas é importante estabelecer as regras básicas do jogo, introduzindo as entidades fundamentais (ponto, reta, plano e espaço) como noções primitivas e apresentando alguns dos axiomas como propriedades a serem aceitas sem demonstração.

O fato de ponto, reta, plano e espaço serem noções primitivas da Geometria não significa que não se possa reforçar a intuição do aluno a respeito dessas noções. De

uma certa forma, isto ocorria já nos Elementos de Euclides, em que, por exemplo, ponto é definido como “aquilo que não possui partes” (é indivisível), linha é “o que possui comprimento mas não largura” e reta é “uma linha que jaz igualmente com respeito a todos os pontos”.

Embora tais descrições não possam ser utilizadas como definições, pois usam termos não definidos, como “comprimento” e “largura”, ajudam a correlacionar entidades matemáticas com imagens intuitivas.

Propriedades essenciais relacionando as noções de ponto, reta, plano e espaço, e que podem ser utilizadas como postulados da Geometria Espacial.

Postulado 1. Dados dois pontos distintos do espaço, existe uma, e somente uma reta que os contém.

Postulado 2. Dados três pontos não colineares do espaço, existe um, e somente um, plano que os contém.

Postulado 3. Se uma reta possui dois de seus pontos em um plano, ela está contida no plano.

Uma vez vistas e estabelecidas estas propriedades como axiomas, podemos utilizá-las na demonstração dos teoremas a seguir.

Teorema 1. *Existe um único plano que contém uma reta e um ponto não pertencente a ela.*

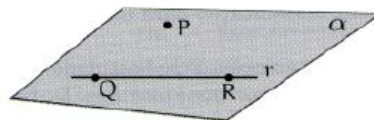


Figura 4: Uma reta e um ponto exterior determinam um plano.

Fonte: Lima (2016)

Prova. Seja P um ponto não pertencente à reta r . Tomemos, sobre r , dois pontos distintos Q e R (figura 4). Os pontos P, Q e R não são colineares (de fato, pelo Postulado 1, r é a única reta que passa por Q e R e, por hipótese, P não pertence a r). Pelo Postulado 2, sabemos que existe um único plano α contendo P, Q e R . Como a reta r tem dois de seus pontos (Q e R) em α , o Postulado 3 estabelece que r está contida em α . Logo, de fato existe um plano contendo r e P . Como este é o único plano que contém P, Q e R , ele é o único que contém P e r .

Posições Relativas entre Retas

Pelo Postulado 1, temos:

Duas retas distintas podem ter no máximo um ponto comum.

De fato, como existe uma única reta que passa por dois pontos distintos, duas retas que tenham mais de um comum são obrigatoriamente coincidentes (isto é, são a mesma reta).

Quando duas retas têm exatamente um ponto em comum, elas são chamadas de *concorrentes* e sempre determinam um plano.

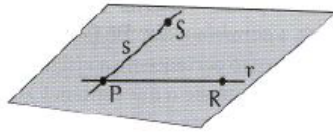


Figura 5: Duas retas concorrentes determinam um plano.

Fonte: Lima (2016)

De fato, seja P o ponto de interseção das retas r e s (figura 5). Sejam R e S pontos de r e s , respectivamente, distintos de P . Os pontos P , R e S são não colineares; portanto, determinam um único plano α , que certamente contém r e s , já que essas retas têm dois de seus pontos em α .

Quando duas retas não possuem ponto em comum, elas podem ou não determinar um plano. Consideremos a situação da figura 6, que mostra três pontos não colineares A , B e C , que determinam um plano α , um ponto D exterior a α , e as retas r e s , definidas por A e B e por C e D , respectivamente. É claro que não existe nenhum ponto comum a r e s .

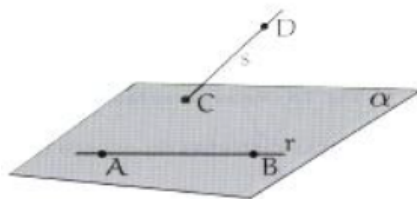


Figura 6: Retas reversas.

Fonte: Lima (2016)

Notemos que s só tem o ponto C em comum com α ; se tivesse um outro ponto comum, s teria que estar contida em α , o que é impossível, pois D é exterior a α . Por outro lado, não existe nenhum plano que contenha simultaneamente, r e s .

é o único plano que passa por A , B e C , e que D não pertence a este plano. Retas como r e s são chamadas de retas *não-coplanares* ou *reversas*.

Retas reversas sempre possuem interseção vazia. Mas duas retas do espaço podem não ter pontos de interseção e serem coplanares. Neste caso, dizemos que as retas são paralelas.

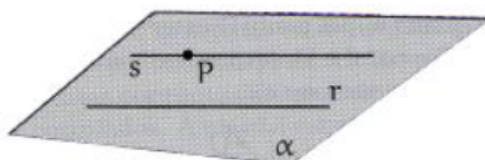


Figura 7: Retas paralelas.
Fonte: Lima (2016)

Da Geometria Plana, temos que por um ponto do plano exterior a uma reta, passa uma única reta paralela a ela. O mesmo ocorre no espaço. isto é, *por um ponto P exterior a uma reta r do espaço passa uma única reta s paralela a ela.* De fato, seja r uma reta do espaço e seja P um ponto não pertencente a r da figura 7. Existe um único plano α que contém P e r ; nesse plano, existe uma, e somente uma, reta s paralela a r passando por P . Por outro lado, não existem retas paralelas a r passando por P que não estão contidas em α , já que todas as retas coplanares com r passando por P estão contidas em α . Assim, a reta s é a única reta do espaço que contém P e é paralela a r .

Na tabela abaixo, está em resumo os possíveis casos de posições de duas retas distintas do espaço:

Posição relativa de r e s	Interseção de r e s	r e s são coplanares?
Concorrentes	exatamente um ponto	sim
Paralelas	vazia	sim
Reversas	vazia	não

Posição Relativa entre Reta e Plano

Pelo postulado 3, se uma reta r possui dois ou mais pontos pertencentes a um plano α , todos os seus pontos estarão em α ; isto é, r estará *contida* em α .

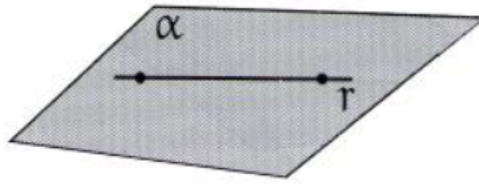


Figura 8: Uma reta contida em um plano.
 Fonte: Lima (2016)

Um outro caso possível é aquele em que r tem apenas um ponto em comum com α (dizemos, nesse caso, que r é *secante* a α). A figura 9 mostra um ponto P pertencente a um plano α e um ponto exterior Q . A reta r definida por P e Q , é secante a α .

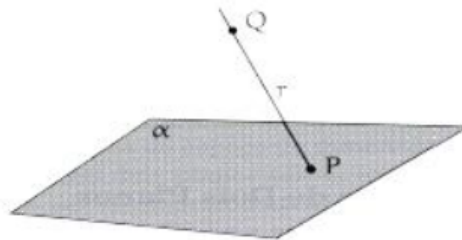


Figura 9: Uma reta secante a um plano.
 Fonte: Lima (2016)

E uma reta pode não ter pontos em comum com um plano (dizemos que a reta e o plano são *paralelos*). Seja a um plano, r uma reta contida em α e P um ponto exterior a α (figura 10). A reta s , paralela a r passando por P , é paralela a α . De fato, seja β o plano definido por r e s . Se s não fosse paralela a α , a interseção de r e α seria um ponto Q não pertencente a r , já que r e s são paralelas. Mas isto faria com que os planos distintos α e β tivessem em comum a reta r e o ponto exterior Q , o que é impossível.

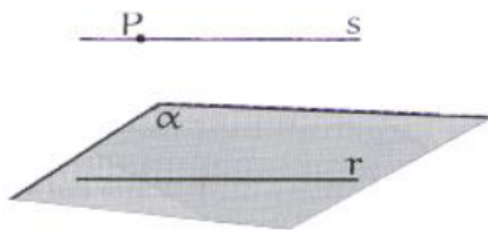


Figura 10: Uma reta paralela a um plano.
 Fonte: Lima (2016)

Na tabela abaixo, está em resumo os possíveis casos de posições de uma reta r e um plano:

Posição relativa de r e α	Interseção de r e α
r contida em α	a própria reta r
r secante a α	um único ponto
r paralela a α	vazia

Teorema 2. (Teorema do paralelismo entre reta e plano)

Se uma reta não está contida em um plano e é paralela a uma reta do plano, então ela é paralela ao plano.

Posição Relativa entre Dois Planos

Se dois planos distintos possuem mais de um ponto em comum, sua interseção é uma reta, e dizemos que os planos são *secantes*.

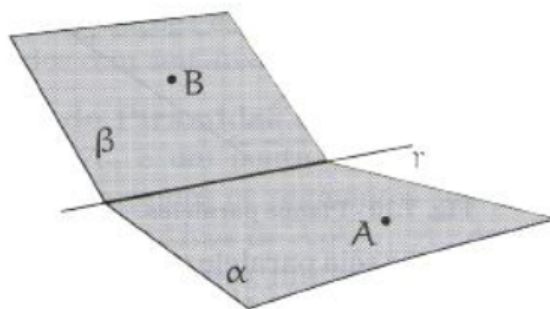


Figura 11: Planos secantes.
 Fonte: Lima (2016)

De fato, se os pontos P e Q são comuns a α e β , então, pelo Postulado 3, a reta r definida por P e Q está contida, simultaneamente, em α e β e, portanto,

em sua interseção. Por outro lado, se houvesse um ponto R comum a α e β que não pertencesse a r , os planos α e β seriam coincidentes, já que r e R determinam um único plano. Logo, r é a reta de interseção de α e β .

Na figura 11, temos dois planos secantes. O plano α é definido pela reta r e pelo ponto exterior A . O ponto B é exterior a α e define com r um outro plano β . Os planos α e β têm, por interseção, a reta r ; são, portanto, secantes.

Postulado 4. Se dois planos possuem um ponto em comum, então, eles possuem pelo menos uma reta em comum.

Quando dois planos não possuem pontos em comum estes são chamados de planos *Paralelos*.

Na tabela abaixo, está em resumo os possíveis casos de posições de dois planos distintas do espaço:

Posição relativa de α e β	Interseção de α e β
Secantes	uma reta r
Paralelos	vazia

Teorema 3. (Teorema do paralelismo entre dois planos)

Se um plano contém duas retas concorrentes, ambas paralelas a um outro plano, então esses planos são paralelos.

PERPENDICULARISMO

Vamos estabelecer as condições de perpendicularismo entre reta e plano dois planos.

Reta e plano perpendiculares

Uma reta é perpendicular a um plano se for concorrente ao plano e perpendicular a todas as retas do plano que passam pelo ponto de concorrência. Dizemos que uma reta é perpendicular a um plano quando ela é ortogonal a todas as retas desse plano. Isto equivale a dizer que ela é perpendicular a todas as retas do plano que passam pelo seu ponto de interseção com ele.

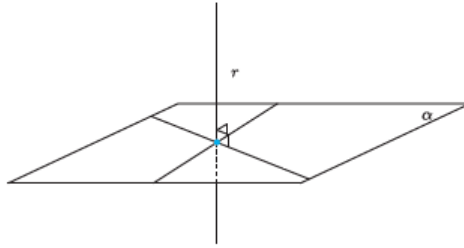


Figura 12: Retas perpendiculares a um plano.
 Fonte: Lima (2016)

Por qualquer ponto de um plano pode-se traçar uma única reta perpendicular a esse plano.

Teorema 4. *Se uma reta é ortogonal a duas retas concorrentes de um plano ela é perpendicular ao plano (ou seja, ela forma ângulo reto com cada reta do plano).*

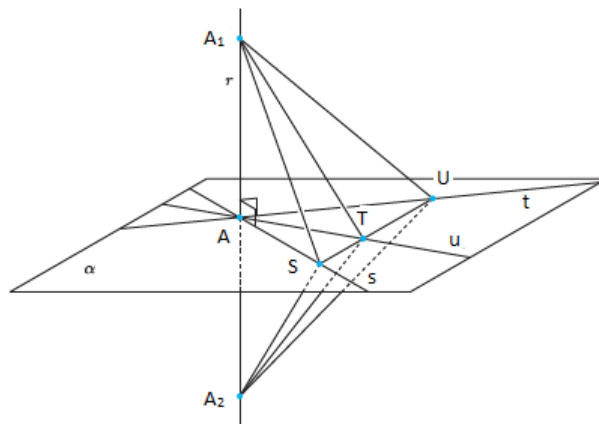


Figura 13: Condição para perpendicularismo.
 Fonte: Lima (2016)

Demonstração. Sejam s e t duas retas de α que se encontram em A , ambas ortogonais a r . Sem perda de generalidade, podemos supor que r passa por A (senão, tomamos uma paralela a r passando por A) (figura 13). Vamos mostrar que toda reta u de α passando por A é perpendicular a r . Se u coincide com s ou t , então u é certamente perpendicular a r . Senão, tomemos uma reta v de α tal que seu ponto de interseção U com u esteja entre os pontos de interseção S e T

com s e t . Em cada semiespaço determinado por α , tomemos pontos A_1 e A_2 tais que $AA_1 = AA_2$.

Os triângulos retângulos A_1AS e A_2AS são certamente congruentes, já que $A_1A = A_2A$ e o cateto AS é comum (os triângulos são congruentes pelo critério lado, ângulo, lado - LAL). Logo, $A_1S = A_2S$. Analogamente, os triângulos A_1AU e A_2AU são congruentes, daí resultando $A_1U = A_2U$. Examinando, então, os triângulos A_1SU e A_2SU , observamos que o lado SU é comum e os demais lados são respectivamente iguais. Portanto, estes triângulos são congruentes. Mas da congruência de A_1ST e A_2ST resulta também a congruência de A_1ST e A_2ST (ST é comum, $A_1S = A_2S$ e os ângulos A_1ST e A_2ST são congruentes). Logo, $A_1T = A_2T$ e, daí, os triângulos A_1AT e A_2AT são congruentes, por possuírem lados respectivamente iguais. Mas isto acarreta a igualdade dos ângulos A_1AT e A_2AT . Como A_1 , A e A_2 são colineares, cada um daqueles ângulos é necessariamente reto. Ou seja, u é perpendicular a r . Assim, provamos que toda de α passando por A é perpendicular a r e portanto, r e α são perpendiculares. Consequência dos seguintes fatos a respeito de retas e planos perpendiculares.

- Se uma reta é perpendicular a um plano, toda reta paralela a ela é também perpendicular à mesma reta.
- Se um plano é perpendicular a uma reta, todo plano paralelo a ele é também perpendicular à mesma reta.
- Se duas retas distintas são perpendiculares ao mesmo plano, elas são paralelas entre si.
- Se dois planos distintos são perpendiculares à mesma reta, eles são paralelos entre si.

PLANOS PERPENDICULARES.

Definição 1. Dizemos que dois planos secantes α e β são perpendiculares, relação denotada por $\alpha \perp \beta$, se

$$m(\sphericalangle(r, t)) = 90^\circ$$

Exemplo. Se $\alpha \perp \beta$ e $l = \alpha \cap \beta$, então toda reta $r \subset \alpha$ perpendicular a l é perpendicular a β .

De fato, seja P o ponto de encontro de l e r , e tome $t \subset \beta$ a reta que passa por P e é perpendicular a l . Então o plano γ determinado por r e t é perpendicular a l . Assim, $m(\sphericalangle(r, t)) = 90^\circ$, pela definição de perpendicularidade de planos. Logo $r \perp \beta$.

Teorema 5. Sejam dados um plano α e uma reta r não perpendicular a α . Então existe um único plano perpendicular a α passando por r .

Demonstração. A construção é bem simples: tome um ponto $P \in r$ qualquer, e por P trace a reta t perpendicular a α . O plano β determinado por r e t é o plano procurado (veja a figura 14), pois:

- (i) $r \subset \beta$ por construção;
- (ii) $\beta \perp \alpha$, pois $t \subset \beta$ é uma reta perpendicular a α por construção.

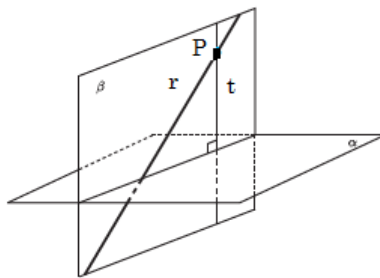


Figura 14: Planos e retas.
Fonte: Lima (2016)

A unicidade também é simples: suponha que exista um outro plano β' passando por r e perpendicular a α , e seja $l' = \beta' \cap \alpha$. Certamente l' não está contido em β pois, caso contrário, $\beta = \beta'$. Tome $t' \subset \beta'$ uma reta passando por P e perpendicular a l' . Pelo exemplo anterior temos que $t' \perp \alpha$, uma contradição, já que por P não podem passar duas perpendiculares a α . Logo β é único.

□

0.1.3 Geometria Espacial Métrica

Poliedros

Nesta subseção apresentaremos definições e propriedades dos poliedros: cubos, paralelogramos, prismas e pirâmides. Chamaremos estes de corpos sólidos ou simplesmente sólidos.

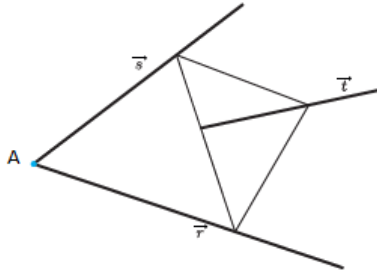


Figura 15: Triedro
 Fonte: Lima (2012)

O primeiro objeto deste tipo do qual falaremos é o triedro, que tem três faces: tome três planos passando por um ponto A , como representado na figura 15, e considere a figura formada pelas regiões angulares dos ângulos $\sphericalangle(r, s)$, $\sphericalangle(r, t)$ e $\sphericalangle(s, t)$. Nas notações da figura 15 dizemos que A é o vértice do triedro, as semirretas r , s e t suas arestas, e as regiões angulares correspondentes aos ângulos $\sphericalangle(r, s)$, $\sphericalangle(r, t)$ e $\sphericalangle(s, t)$ suas *faces*. O triedro é um poliedro aberto, como se fosse uma espécie de copo infinito, e não lhe cabe bem a designação de sólido, palavra que sempre lembra um objeto de certa forma finito.

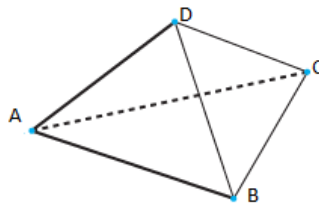


Figura 16: Pirâmide
 Fonte: Lima (2012)

Se “tamparmos” o lado aberto de um triedro, obtemos uma figura conhecida: uma pirâmide, no caso de base triangular, como representado na figura 16. Esta pirâmide também recebe o nome de tetraedro, pois tem quatro (tetra, em grego, significa quatro) faces, que são as regiões planas triangulares delimitadas pelos triângulos $\Delta(ABC)$, $\Delta(ABD)$, $\Delta(BCD)$ e $\Delta(ADC)$. Seguindo as notações da figura, chamamos os pontos A , B , C e D de vértices da pirâmide, e os segmentos AB , AC , AD , BC , BD e CD de arestas. Em geral, um poliedro é a região do espaço o delimitada pela interseção de um número finito de regiões diedrais e de suas faces seguindo certas regras precisas.

Descrições formais de alguns poliedro.

Prismas

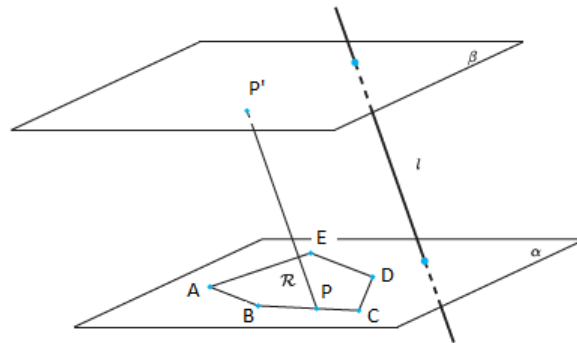


Figura 17: Construção de um Prisma
Fonte: Lima (2012)

Passos da construção de um Prisma (acompanhe as figuras 17 e 18).

Passo 1 Tome dois planos α e β paralelos entre si;

Passo 2 em um dos planos, por exemplo α , tome uma região poligonal R ;

Passo 3 tome uma reta l secante aos planos que não passe pelos pontos de R ;

Passo 4 para cada ponto $P \in R$ tome a reta l_P que passa pelo ponto e é paralela a l ; cada reta l_P encontra β em um ponto P' .

Passo 5 Então a união de todos os segmentos $\overline{PP'}$ é chamada de *prisma*.

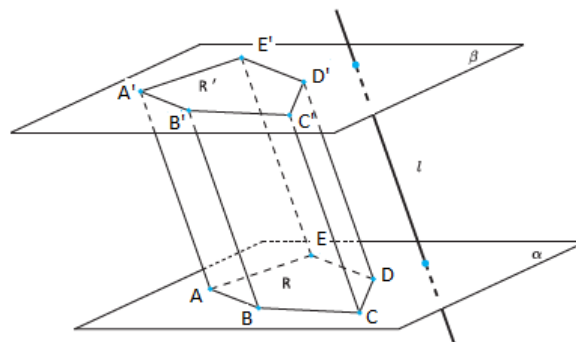


Figura 18: Prisma
Fonte: Lima (2012)

Observe que o conjunto dos pontos P' em β compõem uma região poligonal R'

congruente a R .

Os vértices de um prisma são os vértices das regiões poligonais R e R' . As suas arestas são:

- (i) os segmentos paralelos a l que ligam os respectivos vértices de R e R' ; e
- (ii) os lados das regiões R e R' .

As suas faces são as regiões poligonais determinadas pelos seus vértices consecutivos. Geralmente as faces R e R' são chamadas de bases do prisma, e as outras de faces laterais. As bases são categorizadas muitas vezes como base inferior, ou simplesmente base, e base superior, designação que depende do nosso ponto de vista. No nosso exemplo R é a base, ou base inferior, e R' a base superior do prisma. As arestas das faces que não são comuns com as bases são chamadas de arestas laterais. A reta l é comumente denominada reta-diretriz do prisma.

Problema Liste os vértices, as arestas laterais e as faces do prisma ilustrado na figura 19.

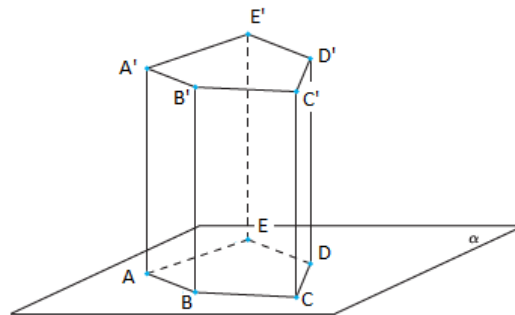


Figura 19: Prisma
Fonte: Lima (2012)

Se a reta-diretriz l for perpendicular a α , dizemos que o prisma é reto (figura 18).

Os prismas (e os poliedros em geral) possuem vários tipos de estruturas similares a ângulos.

Os principais já conhecemos:

- (i) ângulos planos, que são os ângulos de suas faces;
- (ii) ângulos diedros, que são os diedros determinados por cada par de faces com uma aresta em comum.

Problema . Liste todos os ângulos e diedros do prisma ilustrado na figura 19.

Problema. Mostre que os diedros entre as faces laterais e as base de um

prisma reto são retos.

Paralelepípedos e cubos

Um importante exemplo particular de prismas são os paralelepípedos, os poliedros análogos aos paralelogramos. Um prisma é um paralelepípedo se sua base é um paralelogramo. Neste caso é fácil de verificar que todas as faces também são paralelogramos. Um paralelogramo é chamado de reto quando as mesmas condições de um prisma reto forem satisfeita, isto é, quando as arestas laterais forem perpendiculares ao plano da base.

Uma situação mais particular ainda surge quando a base de um paralelepípedo é um retângulo e ele é um prisma reto. Nestas condições o chamamos de paralelepípedo retângulo.

Na figura 20a representamos um paralelepípedo genérico, enquanto que na figura 20b representamos um paralelepípedo retângulo.

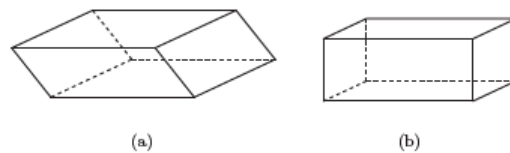


Figura 20: Paralelepípedos
Fonte: Lima (2012)

Finalmente, se as faces e as bases de um paralelepípedo forem quadrados, ele recebe o nome de cubo. Na figura 21 representamos um cubo.

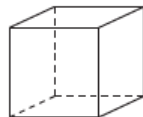


Figura 21: Cubo
Fonte: Lima (2012)

Problema. Mostre que todas as arestas de um cubo são congruentes. Mostre ainda que todos os ângulos e diedros de um cubo são retos.

Pirâmide

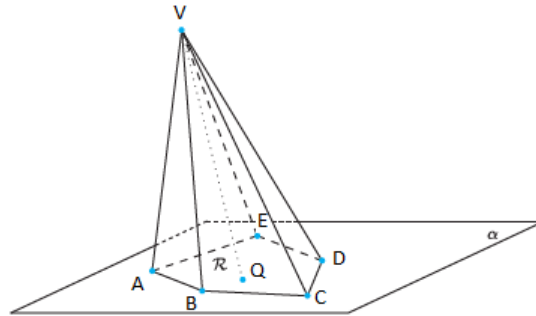


Figura 22: Pirâmide
Fonte: Lima (2012)

Passos da construção de uma pirâmide (observe a figura 22)

Primeiro passo. Tome uma região poligonal plana R e um ponto V qualquer fora do plano de R ;

Segundo passo. Por cada ponto $Q \in R$ trace o segmento \overline{QV} . Então a união de todos os segmentos \overline{QV} é chamada de pirâmide.

O ponto V é chamado de vértice ou cume da pirâmide, e a região R de sua base. Os triângulos com o vértice comum V são as faces laterais da pirâmide. Os vértices de R são também chamados de vértices da pirâmide, e para não confundir com o vértice V , costumamos chamá-los de vértices da base.

É comum denominarmos as pirâmides em função do polígono que constitui sua base. Por exemplo, na figura 22 a base é um polígono de cinco lados, e esta pirâmide recebe o nome de pirâmide pentagonal. Se a base da pirâmide tem quatro lados, a chamamos de quadrangular; se tem seis lados, de hexagonal, etc. No caso especial em que a base é um triângulo a pirâmide pode receber o nome de triangular, mas também é chamada de tetraedro, como já citamos mais acima (veja a figura 16)

O cubo todos já conhecem. Suas faces são quadrados congruentes entre si e todos os seus diedros são retos. Também já falamos de tetraedros, que são pirâmides triangulares. O tetraedro regular é uma pirâmide cujas faces são todos triângulos equiláteros congruentes entre si (veja a figura 23a).

O octaedro possui oito faces, como o nome diz. Suas faces são também triângulos equiláteros, e ele é “montado” com duas pirâmides quadrangulares cujas bases são um quadrado, como mostramos na figura 23b.

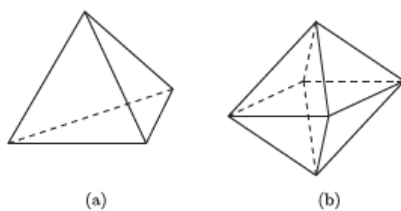


Figura 23: (a) → Tetraedro e (b) → Octaedro
 Fonte: Lima (2012)

O icosaedro é formado por vinte faces (*icosa* = vinte em grego) que, mais uma vez, são triângulos equiláteros, como mostramos na figura 24a. O dodecaedro é formado por doze faces (*dodeca* = doze, em grego). Suas faces são pentágonos regulares – veja a figura 24b.

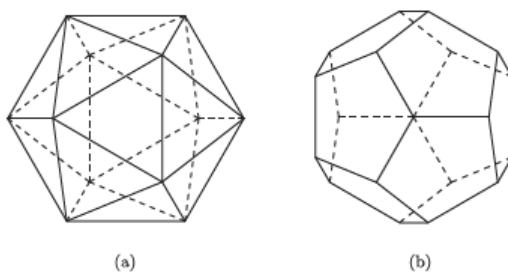


Figura 24: (a) → Icosaedro e (b) → Dodecaedro
 Fonte: Lima (2012)

Volumes dos Poliedros

Estudaremos nesta subseção o conceito de volume, mais especificamente de regiões poliedrais e calcularemos os volumes de alguns sólidos. Queremos medir o “tanto” que um objeto espacial ocupa um lugar no espaço. Este “tanto” é o que chamaremos de *volume*.

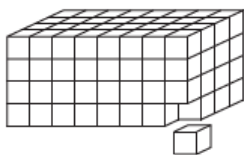


Figura 25: Sólido
 Fonte: Lima (2012)

Vejamos um exemplo. Na figura 25 representamos um paralelepípedo cujas arestas medem 8, 4 e 4. Cortamos então o paralelepípedo com vários planos paralelos, formando pequenos cubos de aresta 1. Então o paralelepípedo é formado de $8 \times 4 \times 4 = 128$ destes cubos. Assim poderíamos dizer que o “tanto” (= volume) que o paralelepípedo ocupa no espaço é equivalente a 128 cubos de aresta 1. Se dissermos que o volume do cubo de aresta 1 é 1, então o volume do paralelepípedo seria 128.

No exemplo acima apresentamos um paralelepípedo cujas arestas têm comprimentos inteiros. E se não for assim? Bem, se as arestas possuísem comprimentos racionais, ainda seria possível dividir o paralelepípedo em cubos iguais com lados racionais. Por exemplo, se as arestas medissem $3 \div 4, 5 \div 7$ e $2 \div 3$, então podemos dividi-lo em $3 \times 5 \times 2 = 30$ cubos de aresta $1 \div 84$ (verifique!); e então poderíamos dizer que o volume do paralelepípedo corresponde ao volume de 30 cubos de aresta $1 \div 84$, ou que o seu volume é $30 \div 84 = 5 \div 14$. Se as arestas do paralelepípedo não tiverem todas medidas racionais, podemos tomar aproximações racionais destas medidas e, através de um processo de limite, mostrar que é razoável afirmar que o volume de um paralelepípedo é dado pelo produto das medidas de suas arestas. E como poderíamos fazer para medir o volume de figuras mais gerais, como prismas que não sejam paralelepípedos, pirâmides, etc.? Poderíamos “aproximar” a figura através de blocos de paralelepípedos, como mostramos na figura 26 e, através de um processo de limite, aumentando o número de paralelepípedos, calcular o volume da figura. No entanto não utilizaremos este procedimento, mas um outro equivalente, conhecido como Princípio de Cavalieri, que introduziremos mais adiante.

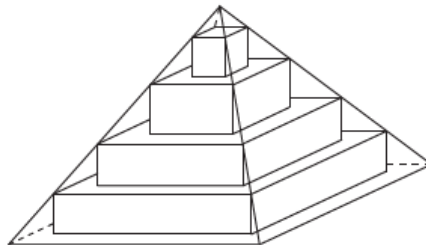


Figura 26: Pirâmide
Fonte: Lima (2012)

Volumes de regiões poliedrais

Procuraremos, nesta subseção, apresentar de maneira sucinta como poderia ser feito a abordagem da teoria de volumes das figuras espaciais. Por isto, enunciaremos as propriedades que o volume de regiões poliedrais deve satisfazer com o

título de princípios, e não de axiomas, como seria usual.

O que é, de fato, uma região *poliedral*?

Uma região *poliedral* é uma união finita de tetraedros que não têm pontos interiores em comum, onde os pontos interiores de um tetraedro são os pontos do espaço que pertencem simultaneamente a todas as seis regiões diedrais determinadas pelas faces do tetraedro.

Na figura 27 apresentamos uma divisão de um cubo em cinco tetraedros.

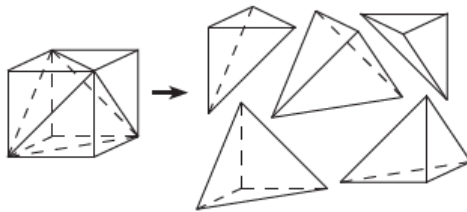


Figura 27: Cubo dividido em cinco tetraedros.

Fonte: Lima (2012)

Na figura 28, a divisão de um octaedro em quatro tetraedros.

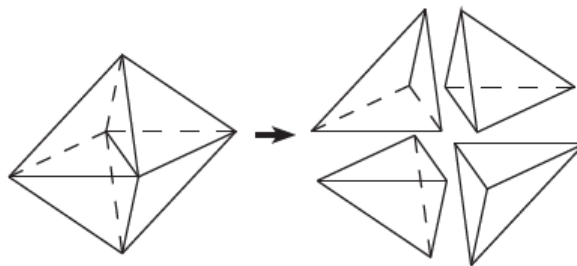


Figura 28: Octaedro dividido em quatro tetraedros.

Fonte: Lima (2012)

Primeiro princípio. É o de existência.

Princípio da Existência do Volume. A cada região poliedral R está associado um único número real positivo, denotado por $V(R)$, chamado de *volume* do poliedro R .

Se um poliedro é seccionado em vários poliedros que não têm pontos interiores em comum, é natural assumir que o volume do poliedro é igual à soma dos volumes dos poliedros em que foi seccionado.

Princípio da Soma de Volumes. Se o poliedro R se decompõe na forma

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_n,$$

onde R_i são poliedros que não possuem pontos interiores em comum, então

$$V(R) = V(R_1) + V(R_2) + \dots + V(R_n).$$

Precisamos agora dar uma “referência” para o cálculo de volumes. No espaço o natural é utilizar paralelepípedos retangulares, como foi discutido na subseção anterior.

Princípio da Unidade para Volumes. O volume de um paralelepípedo retangular é o produto dos comprimentos de suas três arestas não paralelas que se encontram em um mesmo vértice.

Na figura 29 representamos um paralelepípedo retângulo cujo volume é $V = a \times b \times h$, pelo princípio da unidade para volumes, onde $AB = a$, $BC = b$ e $BG = h$.

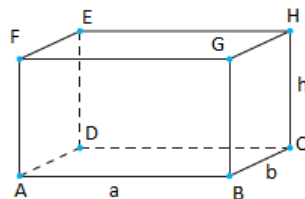


Figura 29: Paralelepípedo
Fonte: Lima (2012)

Problema . Mostre que o volume de um cubo de aresta l é $V = l^3$.

Precisamos agora de um princípio que nos permita calcular volumes de poliedros quaisquer, sabendo como calcular volumes de paralelepípedos retângulos, seguindo a ideia que apresentamos na figura 26 Para entender o princípio que enunciaremos mais abaixo, imagine uma pilha de moedas como representada na figura 31 à esquerda. Se “entortarmos” a pilha, como representado na mesma figura à direita, o volume do conjunto não se modifica, pois este depende só das moedas, e não da forma da pilha.



Figura 30: Pilha de moedas
Fonte: Lima (2012)

Agora imagine que cada moeda vá sendo afinada, de forma que sua espessura diminua, e que se vá colocando mais moedas, para que a forma das pilhas não se modifique. Este procedimento mantém o volume das pilhas. No limite, teremos como que seções planas nas duas pilhas com mesma área, cuja “soma” dá o volume das pilhas. Esta ideia (que nada mais é do que uma forma de se pensar em integração múltipla) para se calcular volumes de sólidos ocorreu a um matemático italiano chamado Bonaventura Cavalieri (1598–1647) e deu origem ao princípio que enunciamos a seguir.

Princípio de Cavalieri. Sejam R e R' dois corpos sólidos (por exemplo, poliedros), e α um plano qualquer. Suponha que todo plano paralelo a α que intercepte R também intercepte R' , e que as interseções são figuras planas com áreas iguais. Então os dois corpos possuem o mesmo volume.

Vejam um exemplo para o **Princípio de Cavalieri**. Na figura 31 representamos dois paralelepípedos cujas bases são dois retângulos B e B' congruentes, e cujas bases superiores T e T' são coplanares. Cada plano paralelo ao plano α (plano das bases dos paralelepípedos) que intercepta os paralelepípedos neles determina duas seções; na figura representamos as seções S e S' . Não é difícil de ver que estas seções são retângulos congruentes às bases dos respectivos paralelepípedos e, portanto congruentes entre si. Em particular, temos que

$$A(B) = A(B') = A(S) = A(S') = A(T) = A(T'),$$

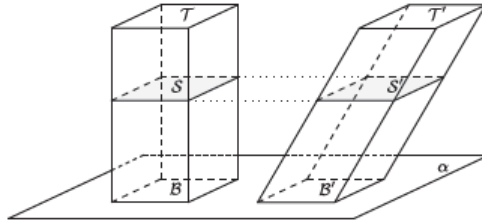


Figura 31: Dois paralelepípedos
 Fonte: Lima (2012)

onde $A(\cdot)$ é a área de cada um dos polígonos. Logo, pelo Princípio de Cavalieri, temos que os dois paralelepípedos têm o mesmo volume. Na subseção seguinte voltaremos a este exemplo, formalizando-o de maneira mais clara.

Volume de prismas

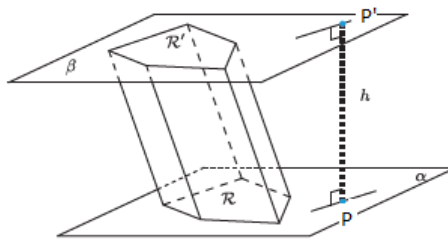


Figura 32: Prisma
 Fonte: Lima (2012)

Antes de começarmos a calcular o volume de prismas utilizando os princípios apresentados na subseção anterior, estabeleceremos, primeiramente, algumas propriedades destas figuras. Começamos com algumas definições.

Definição 2. *A altura de um prisma é a distância entre os planos de suas bases inferior e superior.*

Na figura 32 indicamos por $h = \overline{PP'}$ a altura do prisma ilustrado.

Definição 3. *Uma seção transversal de um prisma é a interseção do prisma com um plano paralelo aos planos das bases.*

Examinando a figura 33 nos fica parecendo que os polígonos R , R' e S são “iguais” (ou, em termos mais técnicos, congruentes). De fato, isto é verdade, mas mostraremos apenas que têm a mesma área, que é o fato que nos interessa no momento.

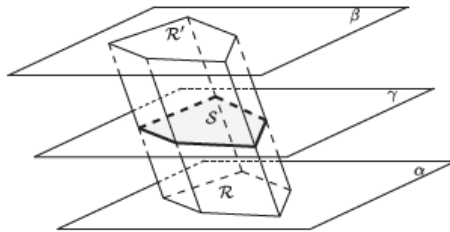


Figura 33: Prisma
Fonte: Lima (2012)

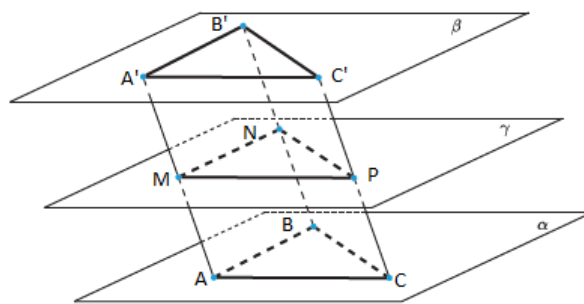


Figura 34: Prismas
Fonte: Lima (2012)

Teorema 6. *Todas as seções transversais de um prisma triangular são congruentes com a base.*

DEMONSTRAÇÃO. Na figura 34 representamos um prisma triangular cuja base é o triângulo $\triangle ABC$ no plano α . Seja γ um plano paralelo a α cuja interseção com o prisma seja não vazia. Então γ corta as arestas laterais do prisma nos pontos M , N e P , como ilustrado. Como $\square ACPM$ é um paralelogramo, já que $\overline{AC} \parallel \overline{MP}$ (pois $\gamma \parallel \alpha$) e $\overline{AM} \parallel \overline{CP}$ (pois as arestas laterais são paralelas entre si), então $\overline{AC} \cong \overline{MP}$. Analogamente $\overline{AB} \cong \overline{MN}$ e $\overline{BC} \cong \overline{NP}$. Logo

$$\triangle ABC \cong \triangle MNP$$

pelo critério LLL.

Corolário. Todas as seções transversais de um prisma têm a mesma área.

DEMONSTRAÇÃO. Não escreveremos todos os detalhes da demonstração, mas daremos a ideia. Observe na figura 35 que podemos dividir a base de um prisma e cada seção transversal em regiões triangulares ligando os vértices correspondentes. Dividimos assim o prisma em subprismas triangulares. Para cada um destes prismas as seções triangulares correspondentes são delimitadas por triângulos congruentes entre si, e portanto têm a mesma área. A área de cada seção transversal é a soma das áreas das regiões triangulares em que ela foi dividida, assim como a área da base. Logo todas as seções transversais de um prisma têm a mesma área que a base do mesmo.

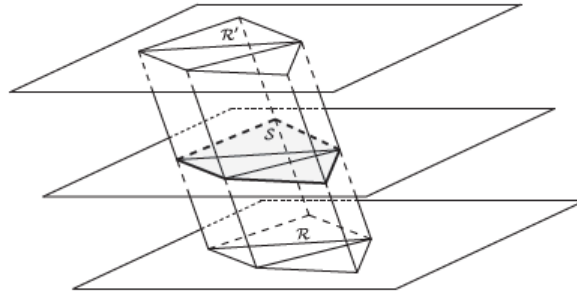


Figura 35: Prismas
Fonte: Lima (2012)

Teorema 7. *O volume de um prisma qualquer é o produto da área de sua base pela sua altura.*

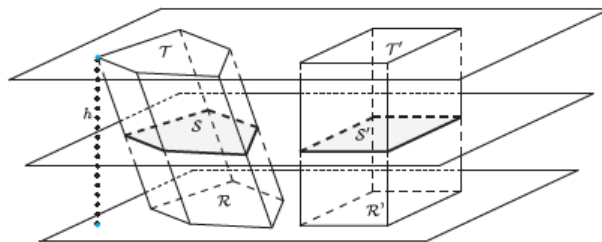


Figura 36: Dois prismas
Fonte: Lima (2012)

DEMONSTRAÇÃO. Acompanhe os argumentos a seguir na figura 36 Tome um prisma T qualquer de altura h e cuja base seja um polígono R . Construa um paralelepípedo retângulo T' tal que

(a) sua base seja um retângulo R' no mesmo plano que R , e tal que

$$A(R) = A(R');$$

(b) sua altura seja a mesma que a do prisma;

(c) estejam do mesmo lado do espaço em relação ao plano de suas bases.

Cada plano paralelo ao plano de suas bases que corta o prisma corta o paralelepípedo. As seções que este plano determina no prisma e no paralelepípedo têm a mesma área que as respectivas bases, como vimos no corolário Como as áreas das bases são iguais, as áreas das seções também o são. Por exemplo, na figura 36,

$$A(S) = A(S').$$

Logo, pelo Princípio de Cavalieri o volume dos dois sólidos são iguais. Mas $V(T') = A(R') \cdot h$ pelo Princípio da Unidade para Volumes, donde

$$V(T) = A(R) \cdot h.$$

Volume de pirâmides

Nesta subseção iremos apresentar propriedades de pirâmides e o cálculo do volume de uma pirâmide.

Propriedades básicas de pirâmides

Definição 4. A altura de uma pirâmide é a distância de seu vértice (ou cume) ao plano de sua base.

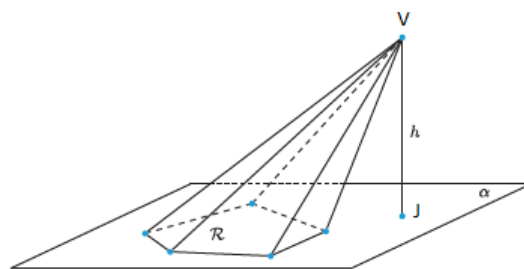


Figura 37: Pirâmide
Fonte: Lima (2012)

Na figura 37 o comprimento h do segmento $\overline{VJ} \perp \alpha$ é a altura da pirâmide de base pentagonal R .

Definição 5. *Uma seção transversal de uma pirâmide é a interseção da pirâmide com um plano paralelo ao plano de sua base.*

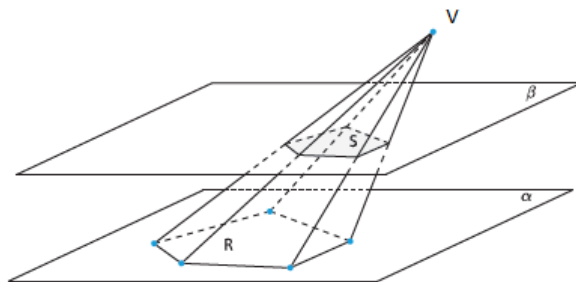


Figura 38: Pirâmide
Fonte: Lima (2012)

Na figura 38 o plano β corta a pirâmide ilustrada na seção transversal S . Observe que S tem a mesma forma da base R , só que em tamanho menor, com todos os lados mantendo a mesma proporção.

Teorema 8. *Toda seção transversal de uma pirâmide triangular é uma região triangular semelhante à sua base, e a razão de semelhança entre seus lados é*

$$\rho = \frac{d}{h},$$

onde d é a distância do vértice da pirâmide ao plano da seção, e h é a altura da pirâmide.

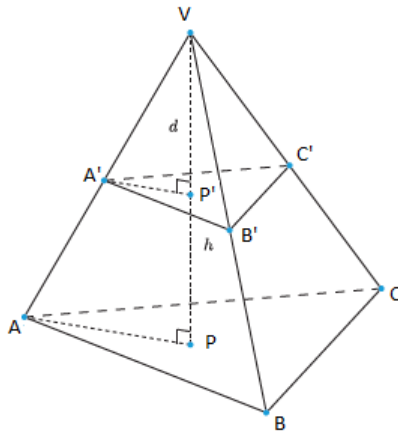


Figura 39: Pirâmide
 Fonte: Lima (2012)

Demonstração. Sejam T a pirâmide triangular de base ΔABC e vértice V , e $\Delta A'B'C'$ uma seção transversal de T , como representado na figura 39. Assumimos ainda que, seguindo a notação da figura 39,

- $VP = h$ é a altura de T , onde P é o ponto do plano α determinado por ΔABC tal que $\overline{VP} \perp \alpha$;
- P' é o ponto do plano α da seção $\Delta A'B'C'$ em que \overline{VP} o encontra. Como $\alpha \parallel \beta$ temos que $\overline{VP'} \parallel \alpha$, donde $d = \overline{VP'}$ é a distância de V a α .

Com estas notações o que queremos mostrar é que $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$, com

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{d}{h} = \rho$$

Estamos assumindo na figura que $\overline{VP} = \overline{VA}$, agora se caso considerarmos $\overline{VP} \neq \overline{VA}$, teremos a demonstração, que segue essencialmente os mesmos passos que daremos a seguir.

O primeiro passo é mostrar que

$$\Delta VA'P' \sim \Delta VAP.$$

De fato, como

- (i) $\angle A'VP' = \angle AVP$ e
- (ii) $\angle VP'A' \equiv \angle VPA$ (pois são ambos retos)

Então $\Delta VA'P' \sim \Delta VAP$ é verdadeira pelo critério AA de semelhança de triângulos.

Em particular

$$\frac{VA'}{VA} = \frac{VP'}{VP} = \frac{d}{h} = \rho$$

Em seguida verificamos que

$$\Delta VA'B' \sim \Delta VAB, \Delta VB'C' \sim \Delta VBC \text{ e } \Delta VA'C' \sim \Delta VAC.$$

As três relações seguem do fato que $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$, $\overline{A'C'} \parallel \overline{AC}$ e $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$. Logo temos que

$$\frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB} = \frac{A'B'}{AB}$$

$$\frac{VB'}{VB} = \frac{VC'}{VC} = \frac{B'C'}{BC}$$

$$\frac{VC'}{VC} = \frac{VA'}{VA} = \frac{A'C'}{AC}$$

Observe que das igualdades acima, obtemos

$$\frac{d}{h} = \frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB} = \frac{VC'}{VC}$$

Logo, das três relações citadas acima e da relação acima concluímos

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{d}{h} = \rho$$

Em particular, pelo critério LLL de semelhança de triângulos, temos que

$$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC,$$

com razão de semelhança $\rho = d/h$, como queríamos provar.

Teorema 9. *Em toda pirâmide a razão da área de uma seção transversal pela área da sua base é d^2/h^2 , onde h é a altura da pirâmide e d é a distância de seu vértice ao plano da seção transversal.*

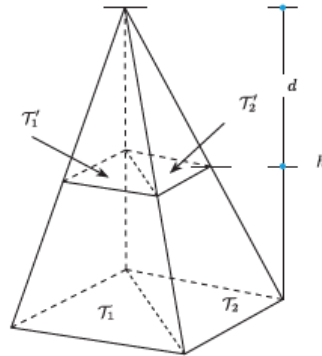


Figura 40: Pirâmide
Fonte: Lima (2012)

Demonstração. Para provar isto basta decompor a base da pirâmide em regiões triangulares T_1, T_2, \dots, T_n e aplicar o corolário anterior para cada uma das pirâmides formadas. Como ilustração, veja a figura 40, onde representamos o caso $n = 2$. Neste exemplo temos que

$$A(T'_1) = d^2/h^2 A(T_1)$$

e

$$A(T'_2) = d^2/H^2 A(T_2)$$

donde

$$B' = A(T'_1) + A(T'_2) = d^2/h^2(A(T_1) + A(T_2)) = d^2/h^2 B,$$

onde indicamos por B e B' as áreas da base da seção transversal da pirâmide, respectivamente. A única diferença desta conta para o caso geral é que aparecem n parcelas nas somas envolvidas.

Teorema 10. *Se duas pirâmides têm a mesma altura e a área de suas bases também é a mesma, então as seções determinadas por um mesmo plano têm as mesmas áreas.*

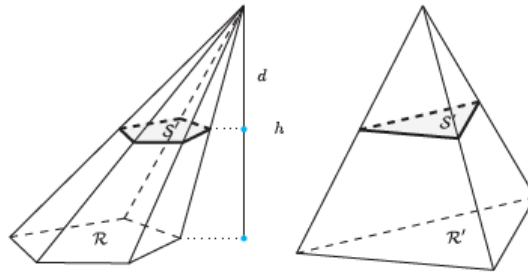


Figura 41: Pirâmide
Fonte: Lima (2012)

Demonstração. Na figura 41 representamos duas pirâmides nas condições enunciadas no teorema. Seguindo as notações da figura, pelo teorema anterior temos que

$$A(S) = d^2/h^2 A(R)$$

e

$$A(S') = d^2/H^2 A(R')$$

Como $A(R) = A(R')$, então deduzimos que

$$A(S) = A(S')$$

como queríamos.

Corolário. Se duas pirâmides têm a mesma altura e se suas bases são coplanares e têm a mesma área, então o volume das duas pirâmides é o mesmo.

Demonstração. Observe que mostramos no teorema anterior que todas as seções transversais de duas pirâmides nestas condições têm a mesma área. Assim, pelo Princípio de Cavalieri, ambas possuem o mesmo volume.

Calculo do volume de uma pirâmide

Teorema 11. *O volume de uma pirâmide qualquer é um terço do volume do prisma de mesma base e mesma altura. Ou, dito de outra forma, se B é a base da pirâmide, e h sua altura então seu volume é*

$$V = \frac{1}{3} A(B) \cdot h$$

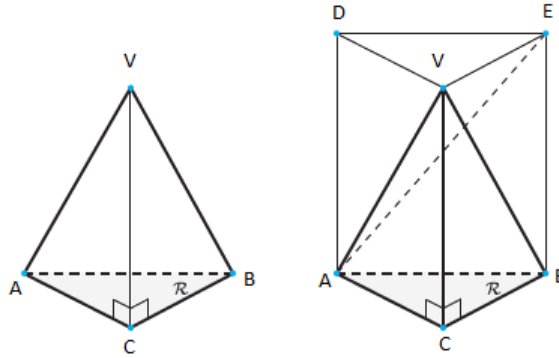


Figura 42: Pirâmide e prisma
 Fonte: Lima (2012)

Demonstração. Observamos primeiro que basta fazer o caso em que a pirâmide é triangular (um tetraedro). De fato, dada uma pirâmide qualquer, construa uma outra de mesma altura e cuja base seja um triângulo de mesma área da pirâmide dada. Assim, pelo corolário estas duas pirâmides possuem o mesmo volume. Resumindo: assumimos que a pirâmide é triangular com uma de suas arestas laterais perpendicular ao plano da base, sem perda de generalidade. Agora construimos sobre esta pirâmide um prisma triangular reto, como apresentado na figura 42 (na figura 42 representamos a pirâmide original e um prisma). Em seguida desmembramos o prisma em três pirâmides, como mostramos na figura 43. As três pirâmides são: ADEV, ABEV e ABCV (que é a pirâmide original). Mostraremos agora que estas três pirâmides possuem o mesmo volume.

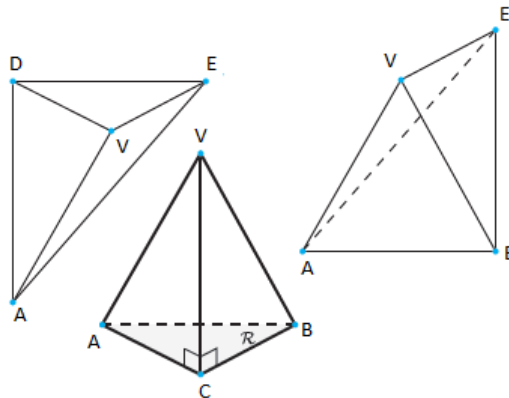


Figura 43: Três pirâmides
 Fonte: Lima (2012)

(a) As pirâmides $ADEV$ e $ABEV$ possuem o mesmo volume:

Consideremos $\triangle ADE$ e $\triangle AEB$ como bases, respectivamente, destas duas pirâmides. Com esta escolha a distância h de V ao plano determinado pelos triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle AEB$ (preste atenção: os triângulos são coplanares!) é a altura das duas pirâmides. Para finalizar, observe que $\triangle ADE \equiv \triangle AEB$, donde $A(\triangle ADE) = A(\triangle AEB)$. Logo as duas pirâmides possuem bases de mesma área e a mesma altura, e portanto

$$V(ADEV) = V(ABEV).$$

(b) As pirâmides $ADEV$ e $ABCV$ possuem o mesmo volume:

Consideremos $\triangle DEV$ e $\triangle ABC$ como bases, respectivamente, das duas pirâmides. Como estes triângulos são as bases do prisma reto que construímos, é claro que $\triangle DEV \equiv \triangle ABC$. Além disso a altura destas duas pirâmides relativa às bases escolhidas é exatamente a distância entre os planos das bases, donde é a mesma altura. Assim são pirâmides com mesma área da base e mesma altura, donde

$$V(ADEV) = V(ABCV).$$

(c) Concluimos então que

$$V(ADEV) = V(ABEV) = V(ABCV).$$

Para terminarmos, observamos que o volume do prisma que construímos é

$$V(ABCVDE) = A(B) \cdot h,$$

onde $B = \triangle ABC$ é a base do prisma; e $h = \overline{VC}$ é a altura do prisma relativa a esta base. Mas temos ainda que

$$V(ABCVDE) = V(ADEV) + V(ABEV) + V(ABCV) = 3 \cdot V(ABCV),$$

donde

$$V = V(ABCD) = \frac{1}{3}A(B) \cdot h$$

como desejado.

Aplicações

Aplicação 1. Calcule o volume de um tetraedro regular de aresta l .

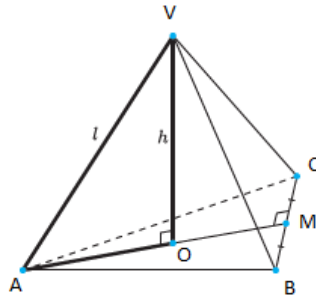


Figura 44: Tetraedro de aresta l
 Fonte: Lima (2012)

Lembramos que um tetraedro regular é uma pirâmide triangular cujas faces e base são triângulos equiláteros congruentes. Para calcular o seu volume precisamos encontrar a área de sua base e a sua altura. Na figura 44 a base do tetraedro é o triângulo equilátero $\triangle ABC$, cujos lados medem todos l . Assim sua altura

$$AM = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Logo sua área é

$$A = \frac{1}{2} \cdot l \cdot (AM) = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

Observe agora na figura 44 que a altura do tetraedro ilustrado o comprimento h do segmento \overline{VO} . Como V é equidistante dos vértices da base $\triangle ABC$ do tetraedro, e \overline{VO} é perpendicular ao plano da base, então pelo problema sabemos que O é o circuncentro do triângulo $\triangle ABC$. Ora, O também é o baricentro do triângulo, donde

$$OA = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Para calcular h aplicamos o Teorema de Pitágoras ao triângulo $\triangle VOA$:

$$h^2 + (OA)^2 = l^2 \Rightarrow h = \frac{l\sqrt{6}}{3}.$$

Então o volume V do tetraedro é

$$V = \frac{1}{2}A \cdot h = \frac{1}{3} \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{l\sqrt{6}}{3} = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}.$$

Aplicação 2. Calcule o volume de um octaedro regular de aresta l .

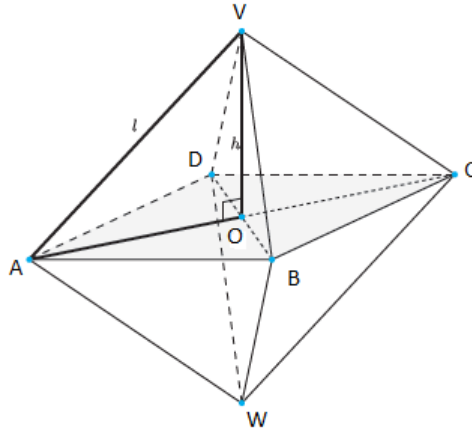


Figura 45: octaedro de aresta l
 Fonte: Lima (2012)

Lembramos que um octaedro regular, representado na figura 45 é um poliedro cujas oito faces são triângulos equiláteros. O octaedro da figura pode ser seccionado em duas pirâmides quadrangulares $VABCD$ e $WABCD$ cuja base comum é o quadrado $\square ABCD$ e cujas alturas são iguais. Então o volume V do octaedro pode ser escrito assim:

$$V = V(VABCD) + V(WABCD) = 2 \cdot V(VABCD).$$

Logo basta calcular o volume $V' = V(VABCD)$. Vamos lá. A área A da base da pirâmide é a área do quadrado $\square ABCD$, ou seja,

$$A = l^2$$

Para calcular a altura da pirâmide observe que se O é o centro de $\square ABCD$ (isto é, o encontro de suas diagonais), então VO é perpendicular ao plano do quadrado, donde a altura da pirâmide é $h = VO$. Calculamos h aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $\triangle VOA$:

$$h^2 + (AO)^2 = l^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - (AO)^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - \left(\frac{l\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{l\sqrt{2}}{2}.$$

Então

$$V' = \frac{1}{3}A \cdot h = \frac{l^3\sqrt{2}}{6}$$

Logo o volume do octaedro é

$$V = 2 \cdot V' = \frac{l^3\sqrt{2}}{3}.$$

Corpos redondos

Nesta subseção apresentaremos os sólidos redondos(ou corpos redondos): cilindro, cone e esferas. listar algumas propriedades destes sólidos e calcular seus volumes.

CILINDRO

Apresentamos a seguir uma definição do *cilindro* de forma análoga à do prisma.

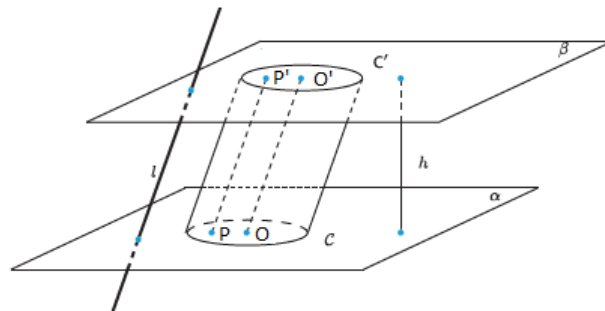


Figura 46: Cilindro

Fonte: Lima (2012)

Um cilindro circular, denominado simplesmente cilindro, é um corpo sólido análogo a um prisma, mas cuja bases são uma regiões circulares, e não uma região poligonal. A forma de defini-lo construtivamente é inteiramente análoga à forma que definimos prismas anteriormente.

Na figura 46 representamos um cilindro cuja base é a região circular do plano α delimitada pela circunferência C , e cuja reta diretriz é a reta l secante aos planos α e β .

Como definimos para prismas, dizemos que a altura de um cilindro é a distância dos planos paralelos que o delimita – na figura 46 a altura do cilindro representado é a distância h dos planos α e β .

Dizemos que um cilindro é reto se sua reta-diretriz for perpendicular aos planos que delimitam o cilindro, como representado na figura 47. Quando isto não acontece dizemos que o cilindro é oblíquo, como representado na figura 48.

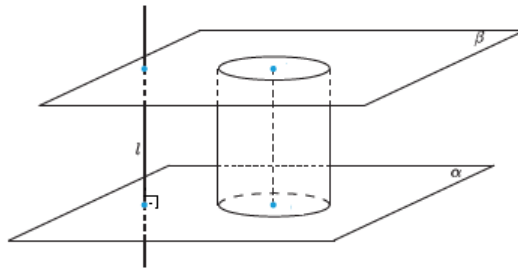


Figura 47: Cilindro Reto
 Fonte: Lima (2012)

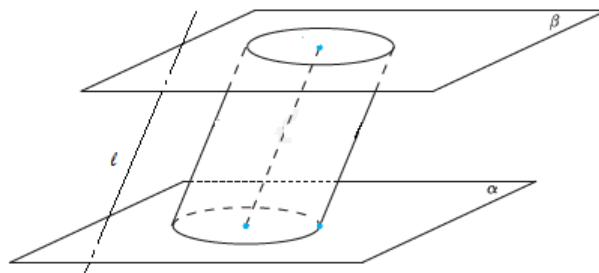


Figura 48: Cilindro Oblíquo
 Fonte: Lima (2012)

Definição 6. *A interseção de um cilindro com um plano paralelo aos planos de suas bases é uma seção transversal do mesmo.*

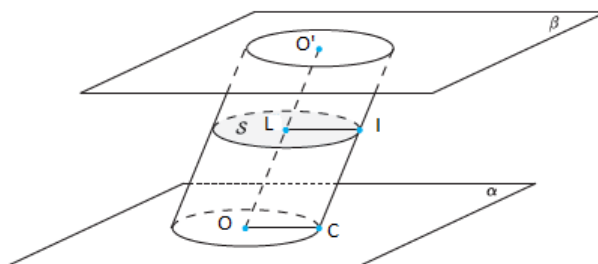


Figura 49: Seção Transversal de um cilindro
 Fonte: Lima (2012)

Na figura 49 a região S é uma seção transversal do cilindro.

Teorema 12. *Dado um cilindro, a área de cada uma de suas seções transversais é igual à área de sua base.*

Teorema 13. *O volume de um cilindro qualquer é o produto da área de sua base pela sua altura.*

Demonstração. Sejam r o raio da base do cilindro e h sua altura. Então a área de sua base é $B = \pi r^2$. Construa um prisma de altura h e base quadrada cujo lado meça $l = r\sqrt{\pi}$.

Pelo Princípio de Cavalieri sabemos que o volume deste prisma e o volume do cilindro são iguais, donde o volume do cilindro é

$$V = Bh = \pi r^2 h.$$

CONES

Assim como cilindros são análogos a prismas, cones são análogos a pirâmides, e a sua definição é inteiramente análoga à de pirâmide.

Cones circulares, isto é, cuja base é uma região circular, como ilustrado na figura 50; assim o termo cone sempre designará este tipo de sólido.

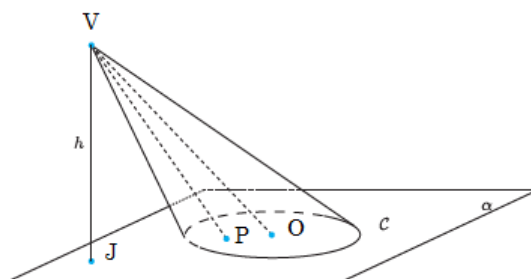


Figura 50: Cone
Fonte: Lima (2012)

Como definimos para pirâmides, a altura de um cone é a distância de seu vértice ao plano de sua base. No cone representado na figura 50, a sua altura é o comprimento do segmento \overline{VJ} , denotada por h .

Dizemos que um cone é reto se o segmento que liga seu vértice ao centro de sua base for perpendicular ao plano da base, caso contrário dizemos que o cone é oblíquo. Na figura 50 representamos um cone oblíquo, enquanto que na figura 51 representamos um cone reto.

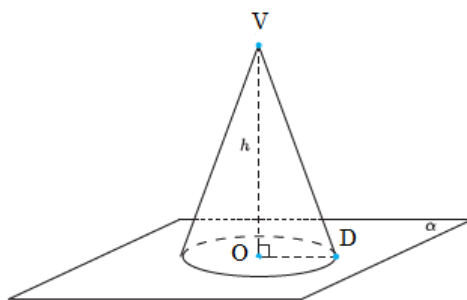


Figura 51: Cone Reto
 Fonte: Lima (2012)

Teorema 14. *Em todo cone a razão da área de uma seção transversal pela área de sua base é $\frac{d^2}{h^2}$, onde h é a altura do cone e d é a distância de seu vértice ao plano da seção transversal.*

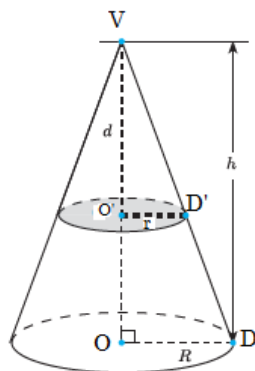


Figura 52: Cone com seção transversal
 Fonte: Lima (2012)

Demonstração. Seguiremos as notações da figura 52. Se S é uma seção do cone correspondente à circunferência de centro O' e raio r , e sua base é o círculo B de centro O e raio R , queremos mostrar que

$$\frac{A(S)}{A(B)} = \frac{d^2}{h^2}$$

Para ver isto observe os triângulos $\triangle VOD$ e $\triangle VO'D'$ representados na figura, obtidos cortando-se o cone com um plano perpendicular ao plano de sua base e

passando pelo seu vértice. Estes triângulos são semelhantes, donde

$$\frac{VO'}{VO} = \frac{O'D'}{OD} \Rightarrow \frac{d}{h} = \frac{r}{R}$$

logo

$$\frac{A(S)}{A(B)} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{d}{h}\right)^2 = \frac{d^2}{h^2}$$

como queríamos.

Teorema 15. *O volume V de um cone de altura h e cujo raio da base é r é dado por*

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

,
ou seja, corresponde a um terço do volume de um cilindro de mesma base e mesma altura.

Demonstração. Seja T uma pirâmide de altura h e cuja base seja um quadrado de lado $r\sqrt{\pi}$. Se S'_d é uma seção transversal de T cuja distância ao vértice da pirâmide é d então, pelo teorema 7.10, sabemos que

$$\frac{A(S'_d)}{\pi r^2} = \frac{d^2}{h^2}$$

Analogamente, se S_d é uma seção do cone que dista de seu vértice de d então, pelo teorema 15 temos que

$$\frac{A(S_d)}{\pi r^2} = \frac{d^2}{h^2}$$

Logo $A(S'_d) = A(S_d)$ donde, pelo Princípio de Cavalieri, obtemos $V(T) = V$, ou seja,

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

como queríamos.

ESFERA

As esferas são os objetos espaciais análogos aos círculos no plano. Uma definição formal é a seguinte:

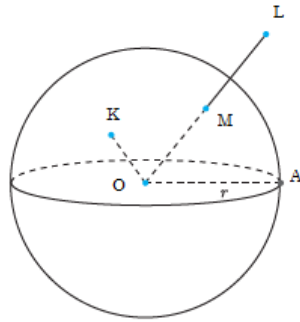


Figura 53: Esfera
Fonte: Lima (2012)

Definição 7. Dado um ponto O e um número real positivo r , o conjunto de todos os pontos do espaço cuja distância a O é no máximo r é chamado de esfera. O ponto O é o centro da esfera, e o número r seu raio.

Dizemos que um ponto P é interior à esfera se $OP < r$, e é exterior se $OP > r$. O conjunto dos pontos do espaço cuja distância a O é exatamente r é chamado de superfície esférica.

Na figura 53 representamos uma esfera de raio $OA = r$. No desenho $OM = r$, donde M é um ponto da superfície da esfera, $OK < r$, donde K é um ponto interior à esfera, e $OL > r$, donde L é um ponto exterior à esfera.

Calcular o volume de uma esfera, novamente aplicando o Princípio de Cavalieri. Para isto precisamos analisar as seções planas de uma esfera.

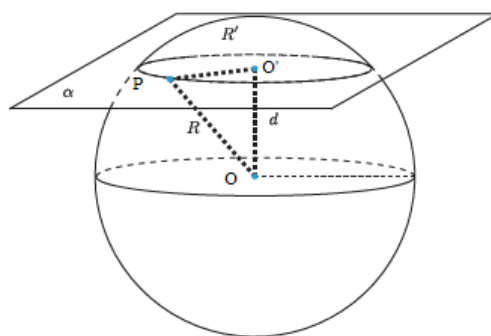


Figura 54: Esfera cortada por um plano α
Fonte: Lima (2012)

Intuitivamente podemos perceber que este corte determina um círculo contido no plano e na esfera, fato que não demonstraremos com rigor aqui (o leitor interessado poder á encontrar a demonstração em algumas das referências indicadas). Vamos calcular a área desta seção plana da esfera em função da distância d do plano α ao centro O da esfera e de seu raio R . Na sequência utilizaremos as notações indicadas na figura 54.

Sejam $O' \in \alpha$ o pé da perpendicular a α por O , e P um ponto da circunferência que o plano α determina na superfície da esfera. Nestas condições o triângulo $\Delta OO'P$ é um triângulo retângulo em O' , $OO' = d$, $OP = R$ é o raio da esfera, e $O'P = R'$ é o raio da circunferência. Assim, pelo Teorema de Pitágoras,

$$(OP)^2 = (OO')^2 + (O'P)^2 \Rightarrow R^2 = d^2 + R'^2$$

donde,

$$R' = \sqrt{R^2 - d^2}.$$

Logo a área da seção plana que está a uma distância d do centro da esfera é:

$$A_d = \pi(R^2 - d^2)$$

Para aplicar o Princípio de Cavalieri a uma esfera de raio R precisamos encontrar um sólido S que:

- (i) tenha volume conhecido, e
- (ii) as seções planas da esfera e do sólido S obtidas pelo corte com um mesmo plano tenham as mesmas áreas.

Um sólido S com estas características pode ser obtido assim (acompanhe na figura 55):

- (a) tome um cilindro de altura $2R$ e raio da base R ;
- (b) tome V o “centro” do cilindro, isto é, o ponto médio do segmento $\overline{O_1O_2}$, onde O_1 e O_2 são os centros das bases inferior e superior do cilindro, respectivamente;
- (c) retire fora do cilindro dois cones com vértices em V , sendo a base de um deles a base inferior do cilindro, e a base do outro a base superior do cilindro.

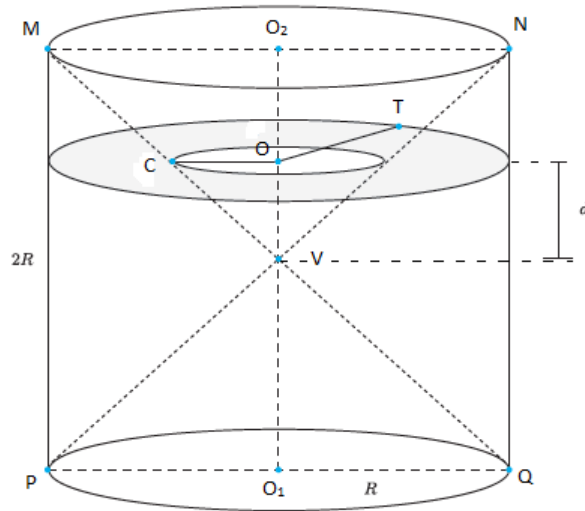


Figura 55: Cilindro com dois cones inscritos
 Fonte: Lima (2012)

A parte do cilindro que sobra é o sólido que usaremos para calcular o volume de uma esfera de raio R . Observe que se cortarmos o sólido por um plano perpendicular aos planos das bases e passando pelos centros da mesma obtemos dois triângulos, representados na figura 55 como sendo os triângulos $\triangle MVN$ e $\triangle PVQ$. E se cortarmos o sólido com um plano paralelo às bases do cilindro obtemos uma seção que é um anel circular. Na figura representamos a seção obtida com o corte por um plano cuja distância a V é d .

Prestemos atenção agora no triângulo $\triangle VO_2M$. Este triângulo é reto em O_2 e é isósceles, pois $VO_2 = R = O_2M$. Os pontos O e C são os pontos em que $\overline{O_1O_2}$ e \overline{VM} encontram o plano da seção, respectivamente. Não é difícil de perceber que $\triangle VOC$ também é isósceles, com $VO = d = OC$. A área da seção representada do sólido na figura 55 é dada por

$$A'_d = \pi(OT)^2 - \pi(OC)^2 = \pi R^2 - \pi d^2 = \pi(R^2 - d^2)$$

vemos que as áreas das seções da esfera de raio R e do sólido S construído acima que estão à mesma distância do centro dos respectivos sólidos são iguais donde, pelo Princípio de Cavalieri, ambos possuem o mesmo volume. O volume do sólido S é dado por

$$V_S = V_{cilindro} - V_{cones}$$

onde $V_{cilindro}$ é o volume do cilindro e V_{cones} é o volume de cada um dos cones. Substituindo pelos nossos dados:

$$V_S = \pi R^2 \cdot 2R - 2 \left(\frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R \right) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

que é o volume da esfera de raio R.

0.2 Abordagem de alguns livros didáticos utilizados no Ensino Médio

Neste capítulo será feita uma descrição de como o conteúdo de geometria espacial vêm sendo abordados por alguns livros didáticos utilizados no ensino médio.

No livro Matemática: **Contexto & Aplicações Volume 2** de Luiz Roberto Dante inicialmente trata a geometria citando a aplicabilidade da mesma em diversas áreas da atividade humana. Em seguida, o livro trata da geometria de posição de forma intuitiva e lista alguns axiomas ou postulados e a partir delas aborda alguns teoremas, todos demonstrados, usando raciocínio lógico. Trata dos poliedros mostrando exemplos que os representam, cita a relação de Euler e não a demonstra. Aborda a ideia intuitiva de volume e cita o **Princípio Cavalieri** e usa o mesmo no cálculo de volume de um prisma qualquer. Os corpos redondos é abordado de forma análoga a dos prismas, na qual são demonstradas todas as formas de volume dos: cones, cilindros e esferas. Além disso, o livro traz alguns exercícios sobre ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e vestibulares de Norte a Sul.

No livro **Coneções com a Matemática 2** da Editora Moderna introduz o assunto geometria espacial com noções primitivas. logo, em seguida, define figura

Qualquer conjunto de pontos, com pelo menos um ponto, considerado no espaço. (2013, p. 116).

O livro trata do sistema dedutivo, listando alguns postulados e que todos teoremas na parte da geometria de posição apresentam demonstrações, já as propriedades de paralelismo, e perpendicularismo não são demonstradas. Definem poliedro

Poliedro é o sólido geométrico formado pela reunião de uma *superfície poliédrica fechada* com todos os pontos do espaço delimitados por ela (2013, p.138).

Este livro cita sem demonstrá-la a **relação de Euler**. Mostra a forma planificada, áreas de superfície e definições de volume dos sólidos: poliedro regulares, prismas,

pirâmides, cilindros, cones. A editora Moderna teve o cuidado de demonstrar o volume de todos os sólidos geométricos citados anteriormente, e também o volume da esfera. contém exercícios propostos, complementares, aprofundamento e de autoavaliação.

O livro **Matemática: Ciência & Aplicações Volume 2** de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida apresenta um pouco da história da geometria. logo, em seguida, introduz o conteúdo apresentando figuras geométricas que conhecemos da nossa vivência cotidiana. Trata das noções primitivas, dos postulados primitivos da geometria de posição, todos ilustrados com figuras. Cita as propriedades e teoremas, com apresentação das demonstrações dos teoremas nas páginas 179, 180 e 181.

O livro trata dos sólidos geométricos da seguinte forma: introduz o conteúdo mostrando fotos de arquitetura e engenharia, dando relevância a importância da geometria no mundo de hoje. Logo depois, conceitua e classifica, expressando as fórmulas da área e do volume dos sólidos: prisma, pirâmide, cilindro cone e esfera. aborda também o **Princípio Cavalieri**, usando o mesmo para calcular o volume de um prisma. O volume de cada sólido citado anteriormente, apresenta demonstração. O livro apresenta exercícios resolvidos e exercícios propostos.

O Livro **NOVO OLHAR MATEMÁTICA 3** de Joamir Souza introduz o conteúdo **geometria** comentando sobre as estruturas moleculares, logo em seguida, faz a abordagem da geometria de posição, na qual, fala um pouco da história, citando Tales Mileto e o Euclides de Alexandria.

O livro trata dos conceitos primitivos, postulados e teoremas. E apresenta as demonstrações de todos os teoremas na página 48. em seguida, traz uma abordagem sobre as posições relativas entre: reta e plano, duas retas e dois planos. Fazendo citações de propriedades e teoremas demonstrados.

O livro define os poliedros como sendo

Os **poliedros** são sólidos limitados por superfícies planas poligonais(2013, p.70)

Cita a **relação de Euler** na página 73, e na página seguinte, comenta um pouco da história sobre os **poliedros de Platão**.

O livro define e aborda o cálculo da área da superfície e do volume dos sólidos: prisma, pirâmide, cilindros, cone e esfera. Na página 86 cita o **princípio cavalieri**, sem demonstrá-lo, apenas considerando como verdadeiro. O livro contém bastante exercícios contextualizados e com figuras para um melhor entendimento do leitor.

Nota-se que, em geral, as abordagens dos livros didáticos são similares. Os livros trazem alguns exercícios resolvidos e exercícios diversificados, tanto abordando geometria espacial de posição, quanto geometria espacial métrica(ou sólidos geométricos).

0.3 Proposta de abordagem para o Ensino Médio

Com base no capítulo anterior, percebe-se que os livros didáticos de matemática voltados para o 2º ano do ensino médio explanam o conteúdo de geometria espacial da seguinte forma:

1. Introduzem o conteúdo mostrando a importância da geometria em diversas áreas da atividade humana;
2. Especificam noções primitiva, cita alguns postulados e teoremas;
3. Especificam as posições relativas entre: reta e plano, duas retas e dois planos;
4. Define poliedros e conceitua os sólidos geométricos: prismas, pirâmides, cilindro, cone e esfera;
5. Especificam fórmulas da área de superfície dos sólidos geométricos: prismas, pirâmides, cilindro, cone e esfera. E usam o **Princípio Cavalieri** para demonstrar as fórmulas dos sólidos geométricos: prismas, pirâmides, cilindro, cone e esfera;
6. Usam as fórmulas para resolver questões.

Depois de analisar alguns livros percebe-se que são similares na forma de abordagem do conteúdo e para que os alunos não tenham dificuldades no entendimento do assunto, na interpretação e resolução desses exercícios, a seguir sugere-se um roteiro com o intuito de trabalhar as ideias intuitivas desses assuntos e resolver questões diversas:

1. Explanar a teoria por meio de axiomas, propriedades, teoremas e definições de geometria espacial (a explanação apresentada na primeira seção pode servir de fonte para o docente mas, sugere-se que o mesmo adapte a forma de explanação conforme a realidade de cada turma) motivando com exemplos que envolvam situações cotidianas, bem como usar a história da matemática como recurso didático, pois os PCN's mencionam que:

Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns “porquês” e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento.(...) Entretanto, essa abordagem não deve ser entendida simplesmente que o professor deva situar no tempo e no espaço cada item do programa de Matemática ou contar sempre em suas aulas trechos da história da Matemática, mas que a encare como um recurso didático com muitas possibilidades para desenvolver diversos conceitos, sem reduzi-la a fatos, datas e nomes a serem memorizados (1998, p. 42).

Deste modo os alunos tem acesso aos conteúdos como um todo e podem perceber a relevância e utilidade dos mesmos em sua vida;

O utilização de recursos digitais é essencial à aprendizagem, e passa a ser parte integrante ao trabalho de investigação e entendimento dos assuntos abordados e que muitos problemas podem ser abordados com apoio de softwares e objetos educacionais digitais especialmente elaborados para isso. a seguir indicamos dois softwares que serve de apoio na abordagem do conteúdo de geometria espacial.

CABRI GEOMETRE

Este é um software educacional desenvolvido na Universidade Joseph Fourier de Grenoble(França) por Jean-Marie Laborde e Franck Bellemain. Trata-se de um programa que facilita o estudo da Geometria plana, da Geometria analítica e da **Geometria espacial**. Por se tratar de um software interativo de interface amigável, permite, com pouco esforço, a construção precisa de modelos que exigiriam grande perícia se desenhada na lousa ou em papel. Além da precisão e da beleza, as construções realizadas no Cabri, embora visuais, serve de apoio nas demonstrações das propriedades e teoremas, pois por se só, o Cabri apresenta um dinamismo que muitas vezes convence mais do que qualquer demonstração de resultados.

A seguir apresentamos algumas imagens da utilização do softwares Cabri Geometre no ensino de geometria espacial.

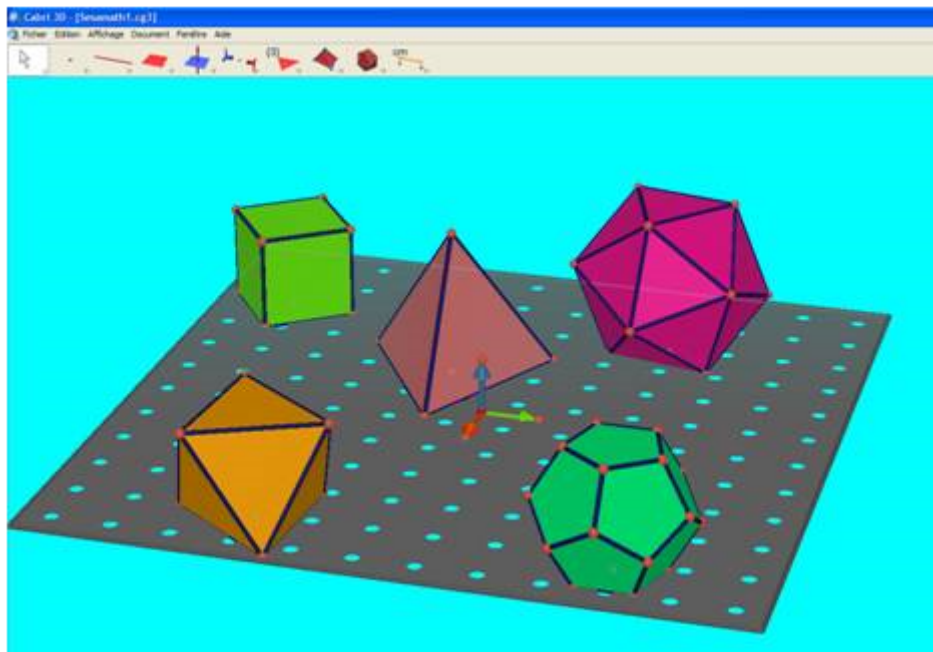


Figura 56: Imagem usando Cabri Geometre

Fonte: <https://www.google.com.br/search?q=imagem+usando+o+cabri+geometre>

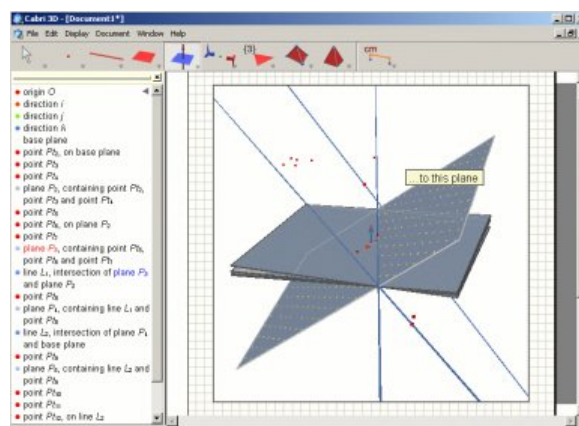


Figura 57: Imagem usando Cabri Geometre

Fonte:

<https://www.google.com.br/search?q=imagem+usando+o+cabri+geometre>

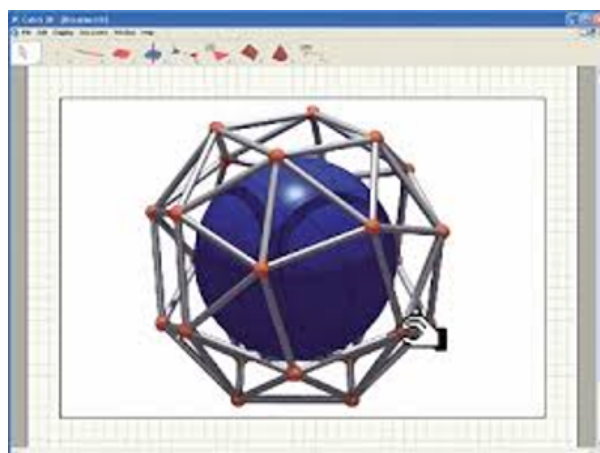


Figura 58: Imagem usando Cabri Geometre

Fonte: <https://www.google.com.br/search?q=imagem+usando+o+cabri+geometre>

GEOGEBRA

Criado por Markus Hohenwarter, é um software de Matemática dinâmica gratuito e desenvolvido para o ensino-aprendizagem da Matemática nos vários níveis do ensino. Ele reúne recursos de Geometria que possibilita uma melhor interpretação e compreensão dos sólidos geométricos.

A seguir apresentamos algumas imagens da utilização do softwares Geogebra no ensino de geometria espacial.

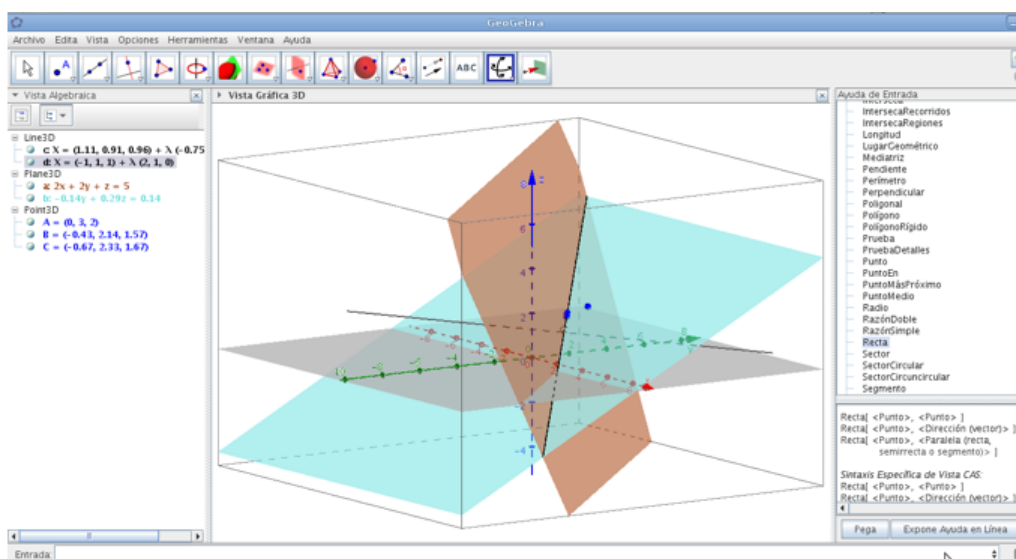


Figura 59: Imagem usando Geogebra

Fonte: [https://www.google.com.br/search?biw=1366 & bih=612 & tbm=isch & sa=1 & q= usando+o+geogebra & oq= usando+o+geogebra](https://www.google.com.br/search?biw=1366&bih=612&tbm=isch&sa=1&q=usando+o+geogebra&oq=usando+o+geogebra)

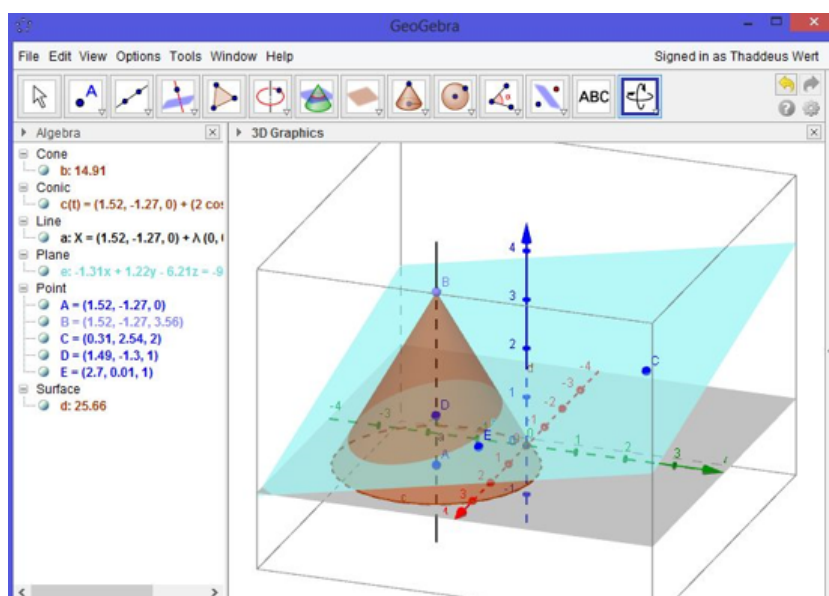


Figura 60: Imagem usando Geogebra

Fonte: [https://www.google.com.br/search?biw=1366 & bih=612 & tbm=isch & sa=1 & q= usando+o+geogebra & oq= usando+o+geogebra](https://www.google.com.br/search?biw=1366&bih=612&tbm=isch&sa=1&q=usando+o+geogebra&oq=usando+o+geogebra)

A utilização de materiais manipuláveis é uma outra ferramenta essencial à

aprendizagem, pois segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), a Matemática deverá apresentar novas informações e, além disso, deverá oferecer instrumentos necessários para que o aluno continue aprendendo. Ainda ressalta a importância de que a Educação esteja voltada para o desenvolvimento da capacidade de comunicação. Com relação aos objetivos gerais da Matemática, não podemos deixar de destacar o desenvolvimento da capacidade de raciocínio e a resolução de problemas para aprimorar o entendimento de conceitos matemáticos. Deste modo, a fim de que se cumpram essas metas, trazemos a proposta do uso do material manipulável.

Andrade(2014) diz que os alunos encontram bastante dificuldade na habilidade de visualização e pode-se perceber essa dificuldade durante a atuação em sala de aula e que o material manipulável vem contribuir para o desenvolvimento da capacidade de visualização. De acordo com Marcelo Becker:

Gutiérrez (1992) afirma que quando se trabalha Geometria Espacial, é fundamental que se tenha em mente a visualização. A capacidade de visualização é uma habilidade básica nesse campo de conhecimento. Uma pessoa que tem dificuldades em visualização terá problemas em entender contextos gráficos apresentados nos livros e apresentará dificuldades em expressar suas próprias ideias. (BECKER, 2009, p. 27)

Utilizar modelos concretos facilita a percepção e a abstração dos elementos geométricos, permitindo que a figura geométrica possa ser observada em diferentes ângulos e posições, tornando o registro da imagem mais dinâmico e enriquecendo o processo ensino aprendizagem por meio de uma nova abordagem. Kaleff afirma que:

Crianças pequenas percebem o espaço à sua volta por meio do conjunto de seus sentidos, isto é, o conhecimento dos objetos resulta de um contato direto com os mesmos. É a partir deste contato com as formas do objeto, a textura e as cores do material de que ele é composto, bem como da possibilidade de sua manipulação, que tem origem a construção de uma imagem mental, a qual permitirá evocar o objeto na sua ausência. Assim é que a criança vai formando um conjunto de imagens mentais que representam o objeto, as quais são envolvidas no raciocínio. A partir deste ponto, ela poderá vir a representar com sucesso o objeto observado, através da elaboração de um esboço gráfico ou de um modelo concreto. (KALEFF, 2008, p.16).

Sendo assim, esperamos que com a utilização de materiais alternativos possamos dar mais dinamismo ao ensino de Geometria Espacial despertando o interesse e a curiosidade dos alunos, saindo um pouco da rotina dos livros didáticos, do quadro pincel e giz, achando meios para diminuir as dificuldades no ensino do conteúdo.

A construção sólido geométrico ajuda a tornar a aula mais atraente, diversificada, ilustrada e, conseqüentemente, mais produtiva.

A construção de um material concreto, junto com os discente, tem por objetivo cristalizar o conteúdo aprendido em sala de aula. Tem também como ponto importante tornar a Matemática mais significativa para o aluno, contextualizando e relacionando a teoria com a prática.

A seguir apresentamos algumas imagens da utilização de material manipulável no ensino de geometria espacial.

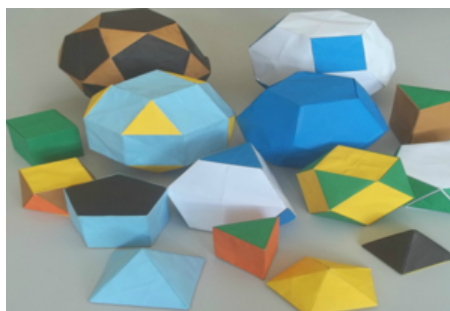


Figura 61: Imagem de material manipulável

Fonte:[https://www.google.com.br/search?biw=1366 & bih = 612 & tbm = isch & sa = 1 & q = Imagem+de+material+manipul](https://www.google.com.br/search?biw=1366&bih=612&tbm=isch&sa=1&q=Imagem+de+material+manipul)

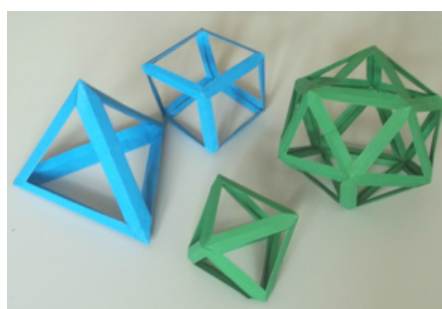


Figura 62: Imagem de material manipulável

Fonte:[https://www.google.com.br/search?biw=1366 & bih = 612 & tbm = isch & sa = 1 & q = Imagem+de+material+manipul](https://www.google.com.br/search?biw=1366&bih=612&tbm=isch&sa=1&q=Imagem+de+material+manipul)



Figura 63: Imagem de material manipulável

Fonte: [https://www.google.com.br/search?biw=1366 & bih = 612 & tbn = isch & sa = 1 & q = Imagem+de+material+manipul](https://www.google.com.br/search?biw=1366&bih=612&tbm=isch&sa=1&q=Imagem+de+material+manipul)



Figura 64: Imagem de material manipulável

Fonte: [https://www.google.com.br/search?biw=1366 & bih = 612 & tbn = isch & sa = 1 & q = Imagem+de+material+manipul](https://www.google.com.br/search?biw=1366&bih=612&tbm=isch&sa=1&q=Imagem+de+material+manipul)

POLY PRO

É um programa que pode ser utilizado como apoio, pois fornece a opção de usar a versão demonstrativa sem efetuar o registro. Esse programa apresenta mais de uma centena de sólidos geométricos e em todos eles é possível rotacionar, planificar, mudar cores, etc. A utilização é bem simples e intuitiva.

A seguir apresentamos algumas imagens da utilização do software Poly Pro no ensino de geometria espacial.

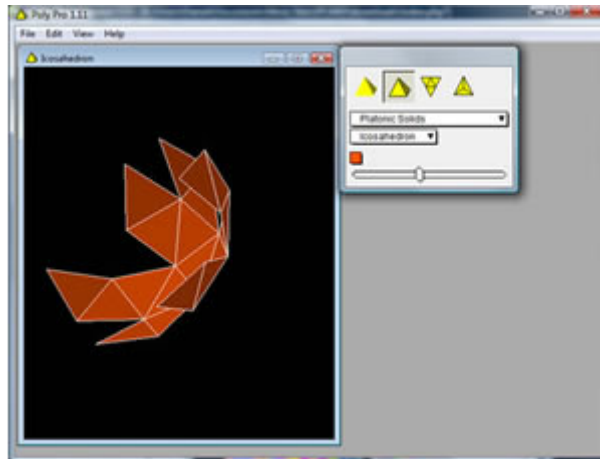


Figura 65: Imagem usando o Poly Pro

Fonte: <https://www.google.com.br/search?biw=1366&bih=612&tbm=isch&sa=1&q=imagem+usando+poly+pro&oq=imagem+usando+poly+pro>

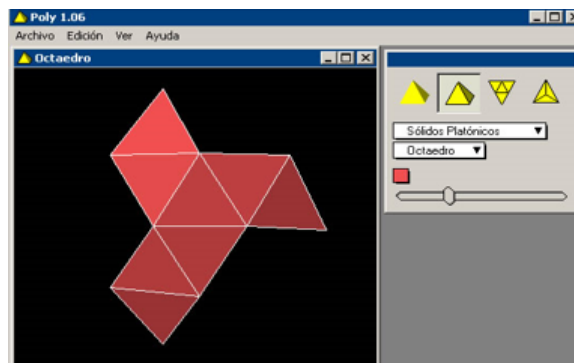


Figura 66: Imagem usando o Poly Pro

Fonte: <https://www.google.com.br/search?biw=1366&bih=612&tbm=isch&sa=1&q=imagem+usando+poly+pro&oq=imagem+usando+poly+pro>

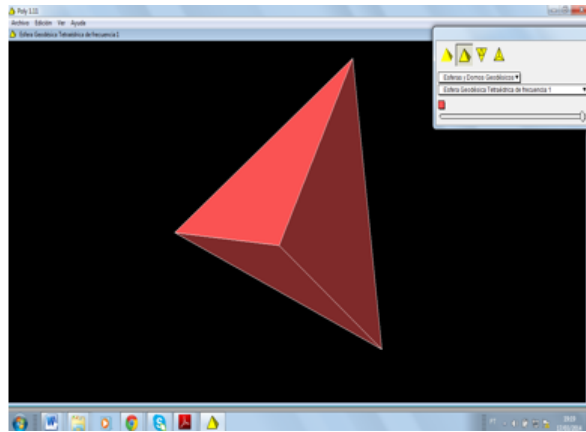


Figura 67: Imagem usando o Poly Pro

Fonte: <https://www.google.com.br/search?biw=1366&bih=612&tbm=isch&sa=1&q=imagem+usando+poly+pro>

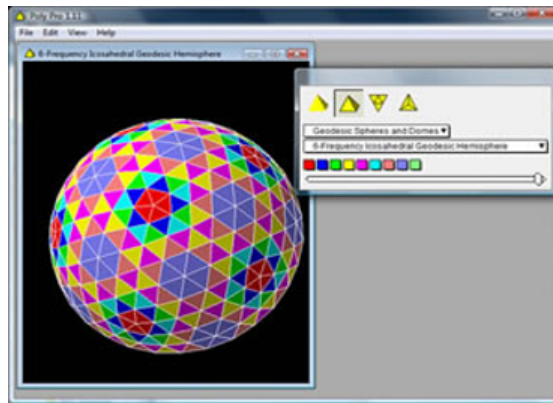


Figura 68: Imagem usando o Poly Pro

Fonte: <https://www.google.com.br/search?biw=1366&bih=612&tbm=isch&sa=1&q=imagem+usando+poly+pro>

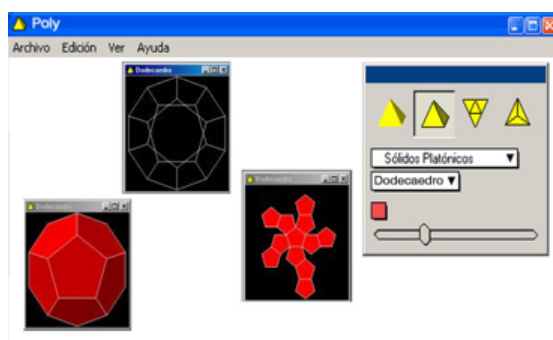


Figura 69: Imagem usando o Poly Pro

Fonte: <https://www.google.com.br/search?biw=1366&bih=612&tbm=isch&sa=1&q=imagem+usando+poly+pro&oq=imagem+usando+poly+pro>

2. Apresentar exemplos mostrando a geometria e em tais exemplos trabalhar esses conceitos de forma contextualizada. Assim os discentes tem uma noção mais ampla desses assuntos bem como sua aplicabilidade;

3. Resolver questões usando a ideia intuitiva, conceitos, definições, propriedades, teoremas e resultados de forma geral, sem classificar ou limitar as possibilidades.

A seguir segue algumas questões com solução que usam a ideia intuitiva, postulados, propriedades e definições de geometria espacial que possam servir de apoio aos docentes e discentes.

PROBLEMA 1. Se um plano α é perpendicular a um plano β , r é uma reta contida em α e r é perpendicular à reta de intersecção entre os planos α e β . Mostre que r é perpendicular ao plano β .

Solução. Como os planos α e β são perpendiculares, então β possui uma reta t perpendicular ao plano α . Como a reta t é perpendicular a α e à reta r no ponto P , temos que a reta r é perpendicular à reta r e à reta s de intersecção entre os planos α e β . Como a reta r é perpendicular a duas retas no plano β , então r é perpendicular ao plano β .

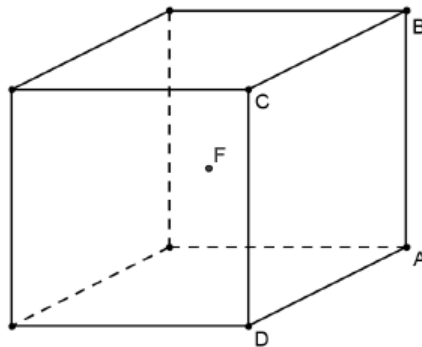
PROBLEMA 2. Sejam α e β planos paralelos distintos. A , B e C pontos não colineares(ou alinhados) de α e P um ponto de β tais que $\overline{PA} \perp \beta$. Se R , T e V são pontos médios de \overline{PB} , \overline{PA} e \overline{PC} , respectivamente, prove que o plano (RTV) é paralelo a β .

Solução. Como R , T e V são pontos médios de \overleftrightarrow{PB} , \overleftrightarrow{PA} e \overleftrightarrow{PC} , respectiva-

mente, então:

- \overrightarrow{TV} é paralelo a \overrightarrow{AC} ;
- \overrightarrow{TR} é paralelo a \overrightarrow{AB} ;
- \overrightarrow{PA} é perpendicular ao plano (RTV) .
- Como \overrightarrow{PA} é perpendicular aos planos α, β e (RTV) , temos que esses planos são paralelos entre si.

PROBLEMA 3. Na figura, F é o centro do cubo.

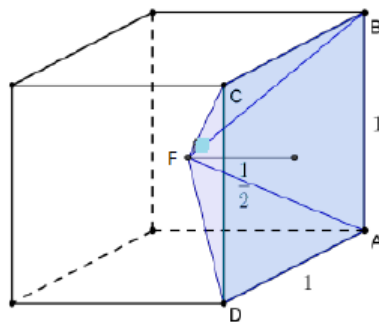


Se o volume do cubo é 1, o volume da pirâmide de base ABCD e vértice F é:

- a) $\frac{1}{2}$.
- b) $\frac{1}{3}$.
- c) $\frac{1}{4}$.
- d) $\frac{1}{6}$.
- e) $\frac{1}{8}$.

Solução. Se o volume do cubo é 1, temos $a^3 = 1$, segue que a medida de sua aresta é 1. A pirâmide formada é quadrangular regular, cuja aresta da base mede 1 e altura, $\frac{1}{2}$. Temos então que o volume da pirâmide é:

$$V = \frac{1^2 \cdot \frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}.$$



PROBLEMA 4. Sejam α e β dois planos perpendiculares entre si. Seja r uma reta perpendicular a β . Prove que ou $r \subset \alpha$ ou $r \parallel \alpha$.

Solução. Como $\alpha \perp \beta$, então existe uma reta $t \subset \alpha$ perpendicular a β (teorema 5). Temos duas possibilidades:

(i) r e t possuem um ponto P em comum: neste caso $r = t$ pois, caso contrário, teríamos duas retas passando por P e perpendiculares a β . Então $r \subset \alpha$.

(ii) r e t não possuem pontos em comum: neste caso, pelo teorema (**Teorema.** As seguintes propriedades são válidas:

(a) duas retas distintas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas entre si, e

(b) dois planos distintos perpendiculares a uma mesma reta são paralelos entre si.) temos que $r \parallel t$, donde $r \parallel \alpha$.

0.4 Considerações finais

Este trabalho apresentou uma proposta de abordagem do conteúdo Geometria Espacial para ensino médio mostrando o embasamento teórico da geometria de posição e dos sólidos geométricos, citando teoremas, definições e propriedades, também abordando o estudo dos volumes dos sólidos geométricos, com o intuito de contribuir no apoio aos docentes no ensino de geometria espacial.

Apresentou-se também uma análise da abordagem de alguns livros didáticos utilizados no ensino médio, bem como um roteiro de explanação dos conteúdos, citando alguns softwares e também o uso dos materiais manipuláveis para o apoio a explanação dos conteúdos. Com esse tipo de abordagem, acredita-se que os discentes poderão compreender melhor o conteúdo abordado, e assim, poderão desenvolver a capacidade de pensamento e interpretação dos problemas e tirar suas conclusões além de se tornarem mais aptos a resolver outros tipos de questões.

Essas aplicações possibilitam a explanação desses assuntos no ensino médio, mas a abordagem deve ser feita de acordo com a concepção do docente e com os objetivos estabelecidos para os alunos. Deseja-se que esta proposta possa servir como fonte de pesquisa para os professores que tenham interesse pelo tema.

Assim, almeja-se que ocorra o verdadeiro aprendizado, por meio do estudo das definições, propriedades gerais e teoremas utilizando o apoio dos softwares e matérias manipuláveis sob a orientação do professor, para que o discente explore os conceitos, reflita o que foi estudado e tenha autonomia para resolver questões diversas de Geometria Espacial e estimular os alunos a associar esse conteúdo com a vida cotidiana.

Referências Bibliográficas

- [1] Base Nacional Comum Curricular. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio>. Acesso em: 18/ago/2017.
- [2] Boyer, Carl B., – *História da Matemática*/ Edgard Blücher, São Paulo, 1974.
- [3] Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- [4] *Conexões com a matemática*/ organizadora Editora Moderna; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. – 2.ed. – São Paulo: Moderna, 2013.
- [5] Dante, Luiz Roberto - *Matemática: contexto & aplicações*/ Luiz Roberto Dante. – 2.ed. – São Paulo: Ática, 2013.
- [6] Eves, Howard, – *Introdução à História da Matemática*/ Unicamp, Campinas, 1997.
- [7] Garbi, G.G. – *A Rainha das Ciências, Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática*. São Paulo: Livraria da Física, 2006.
- [8] Guedj, Denis - *O Teorema do Papagaio*/ Denis Guedj; tradução Eduardo Brandão. – São Paulo: Campanhia das Letras, 1999.
- [9] Helena Beatriz Witte Cruz , – *O uso de recursos tecnológicos como auxiliares na cognição espacial*.– Rio de Janeiro, 2015.
- [10] Lima, Elon Lages - *A Matemática do Ensino Médio*/ Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado.- 7. ed.– Rio de Janeiro: SBM, 2016.
- [11] Marcelo Becker, – *Uma alternativa para o ensino de geometria: visualização geométrica e representações de sólidos no plano*.– Porto Alegre, 2009.

- [12] Souza, Joamir Roberto de, – *Novo olhar matemática: 3* / Joamir Roberto de Souza. – 2. ed. – São Paulo: FTD, 2013.