UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

O Teorema fraco de Hadamard

Francisco Bruno Linhares de Alcântara

Parnaíba - 2017

Francisco Bruno Linhares de Alcântara

Dissertação de Mestrado:

O Teorema fraco de Hadamard

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Paulo Sérgio Marques dos Santos

Parnaíba - 2017

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial Prof. Cândido Athayde – Campus Parnaíba
Serviço de Processamento Técnico

A16t Alcântara, Francisco Bruno Linhares de.
O teorema fraco de Hadamard [manuscrito] / Francisco Bruno Linhares de Alcântara. – 2017.
30 f. : il. color.

Impresso por computador (printout).
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Piauí, 2017.
Orientação: Prof. Dr. Paulo Sérgio Marques dos Santos.

1. Matemática - Ensino Básico. 2. Teoria dos Números. 3. Números Primos. I. Titulo.

CDD: 510.07

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

SBM

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada: **O Teorema fraco de Hadamard**, defendida por **Francisco Bruno Linhares de Alcântara** em **26/ 01 / 2017** e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Paulo Sérgio Marques dos Santos

Prof. Dr. Paulo Sérgio Marques dos Santos – (UFPI) - (Presidente da Banca Examinadora)

Sissy da Silva Souza

Prof. Dra. Sissy da Silva Souza - (UFPI)-(Examinador)

Jeferson Nascimento Silva

Prof. Msc. Jeferson Nascimento Silva - (UFPI) - (Examinador externo)

Dedico esta dissertação a meu avô paterno, José Arteiro Linhares (In memoriam), na certeza de sua real felcidade por mais uma de minhas conquistas.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por sempre me acompanhar em minhas batalhas, guiando-me e ensinando-me qual caminhos trilhar.

Agradeço à minha família por sempre me apoiar em meus estudos de modo incondicional. Aos meus pais, Antônio Carlos e Antônia Maura, meus avós maternos, Jóse Arteiro(*In memorian*) e Maria de Lourdes, meu irmão, Vinícius, meus tios. Minha esposa Camila, por sempre acompanhar-me e compreender-me, nos momentos mais difíceis.

Agradeço ao professor Paulo Sérgio, por sua orientação e ajuda para que este trabalho fosse possível. A todos os professores por compartilharem o que sabem conosco, em especial ao professor Cleyton Natanael, que através de suas belas aulas fui incentivado a fazer o que aqui culmina.

Aos colegas de pós-graduação, Ademar, César, Diógenes, Maciel e Raphael , por toda a solidariedade e companheirismo. Sempre visando o bem mútuo, principalmente nas madrugadas que passamos estudando, guardo boas recordações. Sempre levarei comigo nossas melhores risadas.

Agradeço a Universidade Federal do Piauí e a Sociedade Brasileira de Matemática, por ter disponibilizado que concluísse meus estudos de mestrado com o PROFMAT.

Aos professores da banca examinadora.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

"A Matemática é a rainha das ciências, a Teoria dos números é a rainha da matemática.".

C.F. Gauss.

Resumo

Este trabalho apresenta assuntos referentes a Teoria dos Números, visando a demonstração do Teorema fraco de Hadamard, bem como ferramentas necessárias para que a mesma seja compreendida. Alguns resultados sobre primos e algumas funções aritméticas ganham destaque. O real intuito deste é servir de suplemento aos professores de matemática do ensino básico, bem como aos alunos de graduação em Licenciatura em Matemática.
Palavras-Chave:Números primos; Teorema fraco de Hadamard; Teoria dos Números.

Abstract

This paper presents subjects related to the Theory of Numbers, aiming at the demonstration of the weak Hadamard Theorem, as well as the necessary tools to be understood. Some results on primes and some arithmetic functions are highlighted. The real purpose of this is to supplement mathematics teachers in elementary education as well as undergraduate students in Mathematics Degree.
Keywords: Prime numbers. Hadamard's Weak Theorem. Number theory.

Sumário

Introdução

A Teoria dos números é um dos ramos da matemática que mais fascina os matemáticos desde os tempos mais remotos. Talvez porque a essencia da matemática são os padrões. Na Teoria dos Números encontrar padrões numéricos é essencial. Embora tal área seja bem quista, as escolas de Ensino Médio não angariam-a com muita frequência.

Esta dissertação foi criada com o intuito de auxiliar alunos de graduação em matemática a compreenderem melhor o comportamento dos números primos, além de estimulá-los a estudar Teoria dos Números.

O intuito do trabalho é estimular o aprendizado em Teoria dos Números, por meio da demonstração do Teorema Fraco de Hadamard, para isso, neste trabalho constará um breve estudo de séries, passando por convergências e divergências de séries importantes para uma boa compreensão da demonstração do Teorema Fraco de Hadamard.

Dada a função $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $\pi(x)$ é a quantidade de números primos p, onde $p \leqslant x \in \mathbb{R}$. Muitos matemáticos buscaram uma função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{\pi(x)} = 1$. Esta função, como veremos nos capítulos anteriores, é $g(x) = \frac{x}{\ln(x)}$, de grande importância ao Teorema forte de Hadamard.

Quando o problema em questão é fazer uma estimativa sobre a quantidade de primos na reta, o Teorema fraco devido ao francês Jacques Hadamard responde a essa pergunta. E o conjunto dos números primos se revela com densidade nula. Neste trabalho, mostraramemos como Hadamard chegou a tal conclusão, mas para tal, abordaremos alguns resultados preliminares sobre séries e suas convergências. Alguns resultados preliminares sobre os números primos, funções que nos auxiliarão na compreensão da demonstração.

O capítulo 1, versará sobre séries numéricas, desde exemplos básicos até resultados mais elaborados como a divergência da série harmônica, série esta que possui uma papel de destaque em Teoria dos Números, uma vez que não raramente ela surge como ferramenta para encontrar os mais variados resultados.

No capítulo 2 veremos conquistas matemáticas envolvendo primos, desde sua infinitude e averiguação de sua distribuição desuniforme até curiosidades envolvendo primos de Fibonacci.

O capítulo 3, é o capítulo onde veremos e estudaremos funções que nos auxiliarão na compreensão da demonstração do Teorema fraco de Hadamard, mostrando e definindo funções aritméticas: Número de divisores e Totiente de Euler. Também neste capítulo aplicaremos alguns resultados inerentes a tais funções em questões.

O capítulo 4 é onde culmina nosso trabalho, usaremos o que até aqui foi trabalhado para demonstrar o teorema fraco de Hadamard, o mesmo possui esse nome pois um resultado mais forte, também devido a Hadamard, é o Teorema dos Números Primos.

No apêndice vislumbraremos o Teorema dos Números Primos, ou Teorema de Hadamard, a primeira demonstração deste Teorema foi feita de modo analítico, sendo a mesma longa e de difícil compreensão. Paul Erdös, juntamente com A. Selberg, fizeram uma demonstração elementar do Teorema dos números primos, contudo a mesma ainda é um tanto longa.

Capítulo 1

Um pouco sobre séries

Para seguirmos rumo ao teorema de Hadamard faz-se necessário conhecimentos básicos de séries numéricas, trataremos aqui de convergências e divergências de séries numéricas, séries importantes como as dos inversos dos quadrados, a série harmônica e a função zeta de Riemann.

1.1 Séries numéricas nos reais

Dada a sequência $(a_n)_{n\geqslant 1}$, definimos $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$ como uma série, onde

$$\forall\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow a_k \in (a_n)_{n\geqslant 1}.$$

Quando $(a_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{R}$ dizemos que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$ é uma série de números reais.
O número real $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ é denominado a n-ésima soma parcial da série $\sum_{k=1}^{n} a_k$. A série $\sum_{k=1}^{n} a_k$ converge se, e somente se, $\lim_{n\to+\infty} s_n = L$ onde $L \in \mathbb{R}$. Caso não haja real L que limite a série diremos que a mesma é divergente.

Vejamos alguns exemplos de séries:
(a)$\sum_{k=1}^{n} k$
(b)$\sum_{k=1}^{n} 2^k$
(c)$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{3^k+1}$
(d)$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k}$, onde p_k denota o n-ésimo natural primo.

As somas parciais de (a),(b) e (c) são, respectivamente,

(a') $x_n = 1 + 2 + \cdots + n$;

(b')$y_n = 2 + 4 + \cdots + 2^n$ e

(c')$z_n = \frac{2}{4} + \frac{4}{10} + \cdots + \frac{2^n}{3^n+1}$.

Subsequência: Dada uma sequência f de números reais, chamamos de subsequência de f uma restrição ao subconjunto ilimitado $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots\} \subset \mathbb{N}$. Assim, f é escrita como $f = (a_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ ou ainda $f = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \cdots, a_{n_i}, \cdots)$.

1.2 Critérios de convergência e alguns resultados

Critério 1. Dada uma sequência de números reais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e uma subsequência $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ desta, se $\sum_{k=1}^{n} a_n$ é convergente então $\sum_{k=1}^{n} a'_n$ também é convergente.

Critério 2. Se a série $\sum_{k=1}^{n} a_k$ é convergente então $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Demonstração. Seja $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ a soma parcial de $\sum_{k=1}^{n} a_k$, como a série é convergente, temos $\lim_{n\to+\infty} S_n = k \in \mathbb{R}$. Considere ainda $s_n = S_{n-1}$, é notório que

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = k.$$

Ao passo que,

$$S_n - s_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) = a_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} S_n - s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} s_n = k - k = 0$$

$\square$

Critério 3. Sejam $\sum_{k=1}^{n} a_k$ e $\sum_{k=1}^{n} b_k$ duas séries onde $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = a$ e $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = b$, tais que $a, b \in \mathbb{R}$. Se $\sum_{k=1}^{n} a_{n-k} b_k$ então $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} b_k = a \cdot b$.

Critério 4. Seja $(a_n)_{n\geqslant 1} \in \mathbb{R} \setminus [0, -\infty)$ uma sequência. Então, que $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = r \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (S_n)_{n\geqslant 1}$ for limitada. Aqui $S_n = a_1 + \cdots + a_n$.

Demonstração. Note que,$\sum_{k=1}^{n} a_k$ converge, então $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Relembrando o estudo sobre sequência de números reais, toda sequência convergente é também limitada, logo $(S_n)_{n\geqslant 1}$ é limitada.

Por outro lado, suponha que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ seja limitada. Como $(a_n)_{n\geqslant 1} \in \mathbb{R}\setminus[0,-\infty)$, temos que $a_k > 0; \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Observe que,

$$S_1 = a_1$$
$$< S_2 = a_1 + a_2$$
$$\vdots$$
$$< S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Ou seja, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, toda sequência monótona limitada possui uma subsequência comvergente. Aos interessados nas demonstrações dos critérios 1 e 3, recomendamos o clássico de E.Lima ([5]).

1.3 A Série geométrica

Uma série que é bastante estudada, desde o Ensino Médio, nas instituições de ensino básico é a série geométrica. Esta é a soma dos termos de uma progressão geométrica. Tal série tem suma importância nas mais variadas aréas da ciência, bem como, reprodução populacional, decaimento radioativo de uma partícula e em matemática financeira.

Definição. Dados $a, q \in \mathbb{R}$ tais que $q \neq 1$ e $a \neq 0$ tem-se que $\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}$ é chamada de série geométrica; uma vez que a sequência $a_n = q^{n-1}$ denota uma progressão geométrica, aqui a constante q é chamado de razão da série.

Vejamos alguns exemplos de séries geométricas:

Exemplo 1.1 $\sum_{k=1}^{n} 3^k$. Perceba que nesta série a razão é 3.

Exemplo 1.2$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Agora temos como razão o real $\frac{1}{2}$.

Exemplo 1.3$\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt[7]{\frac{e}{\pi}}\right)^k$. Aqui a razão da série é $\left(\sqrt[7]{\frac{e}{\pi}}\right)$.

1.4 Convergência da série geométrica

Trataremos a seguir da convergência da série geométrica, analisando a razão da série com critérios precisos para tal determinação. Como já citado, tal determinação deve-se ao limite de n tendendo ao infinito positivo de suas somas parciais. Mas na série geométrica conseguimos determinar a convergência de um modo bem mais simples, apenas analisando o módulo de sua razão. Vejamos:

Teorema 1. Seja $\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}$ uma série geométrica de razão q. Se $0 < q < 1$ a série é necessáriamente convergente.

Demonstração. Dada $\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}$ temos que sua soma parcial é

$$S_n = q + q^2 + \cdots + q^{n-1} \tag{1.1}$$

e, segue, multiplicando por (1.1) que

$$qS_n = q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n \tag{1.2}$$

Fazendo (1.1) subtraída de (1.2) temos

$$\begin{aligned} S_n(q-1) &= q^n - q && (1.3)\\ \Rightarrow S_n &= \frac{q^n - q}{q-1} && (1.4)\\ \Rightarrow S_n &= \frac{q}{q-1}(q^{n-1} - 1) && (1.5) \end{aligned}$$

Para verificar se existe $\lim_{n\to+\infty} S_n$ devemos mostrar que dado.

De fato, de 1.5 temos que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{q}{q-1}(q^{n-1} - 1)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{q}{q-1} \lim_{n\to+\infty}(q^{n-1} - 1)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{q}{q-1} \lim_{n\to+\infty} q^{n-1} - \frac{q}{q-1} \lim_{n\to+\infty} 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{q}{1-q} + \frac{q}{q-1} \lim_{n\to+\infty} q^{n-1}$$

Para o que falta devemos mostrar que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{q}{1-q}$ se $0 < q < 1$ e $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ se $q > 1$. Ou seja, se a série geométrica $\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}$ é convergente ou divergente.

Suponha que $q > 1$. Mostraremos que dado

$$\epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n > n_0 \Rightarrow |q^n| > \epsilon$$

Basta tomarmos $n_0 = [1 + \log_q \epsilon]$ onde $[x]$ denota o menor inteiro $\alpha \leqslant x$.

Logo,

$n > n_0 = [1 + \log_q \epsilon] > n_l = \log_q \epsilon \Rightarrow q^n > q^{n_l} = \epsilon > -q^n \Rightarrow |q^n| > \epsilon \Rightarrow$ $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty + \lim_{n\to+\infty} \frac{q}{1-q} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty + \frac{q}{1-q} = +\infty.$

Nesse caso a série seria divergente.

Suponha agora que $0 < q < 1$. Logo, $\frac{1}{|q|} > 1 \Rightarrow \frac{1}{|q|} = 1 + l; 0 < l \in \mathbb{R}$. Temos da desigualdade de Bernoulli que

$$\frac{1}{|q|^n} = (1+l)^n \geqslant 1 + nl$$

$$\Rightarrow |q|^n \leqslant \frac{1}{1+nl}.$$

Para o que falta, basta tomarmos $n_0 > \frac{1}{l}\left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right)$.

$$\epsilon > 0 \ \exists \ n_0 \in \mathbb{N};\ \forall \ n > n_0 \Rightarrow |q^n| < \epsilon.$$

Nesse caso a série seria convergente, uma vez que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{q}{q-1} \lim_{n\to+\infty} (q^{n-1} - 1)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{q}{q-1}(q^{n-1}) - \lim_{n\to+\infty} \frac{q}{q-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = 0 + \frac{q}{1-q}.$$

Ou seja, S_n converge para $\frac{q}{1-q}$.

Exemplo 1.4: A série do exemplo 1.2 é convergente pois $q = \frac{1}{2}$. Logo, $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ converge para $\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

Exemplo 1.5: Dado p um primo ímpar, temos que $\sum_{k=1}^{n} (\log_p 2)^k$ converge para $\log_{\frac{p}{2}} 2$. De fato, como a função log é crescente no intervalo $(1, +\infty)$ temos que dados $a, b \in \mathbb{R} \setminus (-\infty; 1), a > b \Rightarrow a^1 > b > a^0 \Rightarrow \log_a a^1 > \log_a b > \log_a a^0 \Rightarrow 1 < \log_a b < 0$.

Sendo p um primo ímpar, temos que p é necessariamente maior que 2, temos que $0 < \log_p 2 < 1$. Assim, como $\sum_{k=1}^{n} (\log_p 2)^k$ é uma série geométrica de razão menor que 1, temos que a mesma converge para

$$\frac{\log_p 2}{1 - \log_p 2} = \frac{\log_p 2}{\log_p p - \log_p 2} = \frac{\log_p 2}{\log_p \frac{p}{2}} = \log_{\frac{p}{2}} 2$$

Note que p não precisa ser necessáriamente primo ou ímpar, tão somente maior que 2.

Exemplo 1.6: Sejam $a, b \in \mathbb{R} \setminus [0, -\infty)$ e $a \neq 1$, temos que $\sum_{k=1}^{n} (\log_a b)^k$ converge para $\log_{\frac{a}{b}} b$.

De fato, pela razão da série $\sum_{k=1}^{n} (\log_a b)^k$ ser menor que 1, temos que a mesma converge para

$$\frac{\log_a b}{1 - \log_a b} = \frac{\log_a b}{\log_a a - \log_a b} = \frac{\log_a b}{\log_a \frac{a}{b}} = \log_{\frac{a}{b}} b.$$

1.5 A série harmônica

Nesta seção vislumbraremos uma das mais belas séries, a série harmônica. Esta recebe este nome pela semelhança que possui com a proporcionalidade das vibrações dos comprimentos de onda de uma corda. Tal série tem um papel muito importante neste trabalho, não só por dá uma idéia intuitiva de espaçamento numérico na reta real, mas também por sua importância no estudo de funções primordiais em Teoria dos Números, como é o caso da função zeta de Riemann. Comentaremos um pouco mais sobre essa função nos capítulos a seguir.

Definição: A série harmônica é a soma dos inversos dos natuarais, ou seja, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$, onde a mesma é divergente.

Demonstração. Seja $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função *logaritmo natural*, definida por

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{y} dy. \tag{1.6}$$

Temos que dado $y > 1 \Rightarrow \frac{1}{y} < 1$, assim

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \int_1^{1+\frac{1}{x}} \frac{1}{y} dy < \int_1^{1+\frac{1}{x}} dy = \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 = \frac{1}{x}.$$

Ou seja,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1)$$

Observe que $(S_n)_{n \geqslant 1}$ não é limitada, pois quando $n \longrightarrow +\infty$ temos que $S_n \longrightarrow +\infty$. Portanto, a série harmônica é divergente.

Uma pergunta interessante é, a soma dos inversos dos quadrados dos naturais converge? A resposta a essa pergunda está no problema a seguir, e de modo intuitivo, como os quadrados dos naturais são espaços na reta a resposta é positiva.

Exemplo 1.7 A série $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}$ é convergente.

Demonstração. Seja $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}$, temos que

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \cdots$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow S_n &= 1+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}\right)+\left(\frac{1}{8^2}+\cdots+\frac{1}{15^2}\right)+\cdots\\ &< 1+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}\right)+\left(\frac{1}{8^2}+\cdots+\frac{1}{8^2}\right)+\cdots\\ &= 1+2\cdot\frac{1}{2^2}+4\cdot\frac{1}{4}+8\cdot\frac{1}{8}+\cdots=\sum_{k=1}^{t}\frac{1}{2^{t-1}}.\end{aligned}$$

Como vimos a série $\sum_{k=1}^{t}\frac{1}{2^{t-1}}$ é geométrica, logo, convergente. Portando, a série $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}$ converge para algum real.

Exemplo 1.8 *(Série harmônica generalizada)*A série $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$ é conhecida popularmente como série harmônica generalizada, ou p-série. A mesma converge se $p>1$, senão a série é divergente.

Curiosidade: A série harmônica generalizada , quando $p>1$ converge para a função zeta de Riemann em ordema p, isto é, $\zeta(p)$.

Aos interessados recomendamos o livro de Antônio Caminha ([8]).

Já vimos que a soma dos inversos dos quadrados dos naturais, bem como a soma dos inversos das potências, maiores que quadrados, dos naturais são convergentes. De modo intuitivo, isto significa que as potências dos naturais são cada vez mais espaças na reta real.

Consideremos $(p_n)_{n\geqslant 1}$ a sequência dos números naturais primos. Embora o conjunto dos primos seja um conjunto magro dentro dos naturais, provaremos no capítulo 2 que $\lim_{n\to+\infty}\sum k=1^n\frac{1}{p_k}=+\infty$

Um dos maiores contribuintes em Teoria dos Números foi, sem dúvidas, o húngaro Paul Erdös. Ele até hoje encanta matemáticos com suas demonstrações elegantes. E a divergência da série harmônica foi uma das provas contempladas por ele. Tal demonstração, que veremos loga a seguir, fascina com sua simplicidade, podendo fácilmente ser compreendida por um aluno do ensino fundamental que tenha um mínimo de conhecimento sobre frações. Vejamos como este célebre matemático nos presenteou com sua poesia em forma de prova.

Demonstração da divergencia da Série Harmônica: Dada a série $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, vamos supor que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=t\in\mathbb{R}$.

Note que, $\forall i\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{1}{2i}<\frac{1}{2i-1}$.

De posse de tais afirmações, substitua todas as parcelas $\frac{1}{2i-1}$ pelas parcelas $\frac{1}{2i}$. Logo,

$$t < \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)+\cdots$$

$$\Rightarrow t < 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)+2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)+\cdots=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\right)=t$$

$$\Rightarrow t < t$$

Absurso!

Portanto, a série harmônica é divergente.

Capítulo 2

Resultados interessantes sobre números primos

Algumas perguntas sobre primos, bem elegantes, seja dito, permeiam a cabeça dos matemáticos. Perguntas como: Qual seria o comportamento dos primos em um intervalo dado? E no infinito? E se os mesmos fazem essa dança no infinito, qual seriam seus passos? Graças a curiosidade de alguns hoje podemos responder algumas destas. Veremos neste capítulo alguns resultados sobre os números primos.

2.1 Existem infinitos números primos

Um número primo é aquele natural que é divisível apenas por 1 e por ele mesmo. Uma pergunta comum, ao se deliciarem com a teoria dos números é se existem infinitos primos. Essa pergunta foi feita, 300 anos antes de Cristo, por Euclides. Graças ao sua habilidade com a matemática o mesmo pode respondê-la.

Teorema 2.1 O número de naturais primos é infinito.

Demonstração devido Euclides. Suponha, por absurdo, que exista um número finito k de naturais primos e que $\mathbb{F} = \{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$ seja o conjunto de todos os naturais primos. Seja ainda $P = \prod_{i=1}^{k} p_i$, como o número de primos é finito

$$\exists\ p_j \in \mathbb{F};\ \ p_j | P + 1$$

$$\Rightarrow P + 1 = p_j \cdot r; \; r \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

Mas sabemos que $P = p_j \cdot R$, onde

$$R = \prod_{i=1, i \neq j}^{k} p_i.$$

De 2.1 temos

$$P + 1 = p_j \cdot r$$

$$\Rightarrow p_j \cdot R + 1 = p_j \cdot r \Rightarrow p_j \cdot (r - R) = 1 \Rightarrow p_j | 1.$$

O que claramente é um absurdo! Portanto, existem infinitos números primos.

Depois de Euclides vários outros matemáticos contribuiram com as mais variadas demonstrações para a infinitude de primos nos naturais. O grande matemático suíço, Leohnard Euler, contribuiu com uma elegante demonstração.

Demonstração devido a Euler. Considere $\mathcal{P}$ o conjunto dos números primos. Sejam $p_k, p_q \in \mathcal{P}$ dois números primos. Note que $p_k, p_q > 1$ então $\frac{1}{p_k}, \frac{1}{p_q} < 1$.
Assim, da convergência da série geométrica e do critério 3,

$$\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p_q}\right)^{-1} = \left(\sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{{p_k}^{x-1}}\right) \left(\sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{{p_q}^{x-1}}\right) = \sum_{x,y=1}^{+\infty} \frac{1}{{p_k}^{x-1} {p_q}^{y-1}} \tag{2.2}$$

Percebemos que dado $n > 0; n \in \mathbb{N}$, onde $n = {p_k}^t {p_q}^r$ para alguns $t, r \in \mathbb{N}$. Aperece uma única vez na série 2.2. Ou seja,

$$\sum_{x,y=1}^{+\infty} \frac{1}{{p_k}^{x-1} {p_q}^{y-1}} = \lim_{n \to +\infty} \sum \frac{1}{n} = \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p_q}\right)^{-1}$$

De modo geral, temos que para $\{p_1, p_2, \cdots, p_k\} \subset \mathcal{P}$,

$$\prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1} = \sum \frac{1}{n}$$

agora, $n = \prod_{j=1}^{k} {p_j}^{\alpha_j}$, com $\alpha_j \geqslant 0$.

Se $\mathcal{P}$ for finito, suponha $\#\mathcal{P} = k \in \mathbb{N}$, teremos, pelo Teorema Fundamental da Aritmética,

$$\prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}.$$

Absurso! Uma vez que a série harmônica diverge, conforme vimos no capítulo anterior. Sendo assim, $\mathcal{P}$ é infinito.

2.2 Os primos gêmeos

Considere os pares ordenados a seguir:

$$(3,5),(5,7),(11,13),(17,19),(29,31),(41,43)$$

O que eles tem em comum? Todos esses pares ordenados possuem primos onde o módulo da diferença entre eles é sempre 2. São os chamados *Primos Gêmeos*, por definição.
Uma pergunta inerente é: Existem infinitos primos gêmeos? Antes de responder tais perguntas vejamos alguns resultados sobre os primos gêmeos.

Seja $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}$ o conjunto dos primos gêmeos, ou seja,

$$p_{2k-1} \in \mathcal{G} \Rightarrow p_{2k} = p_{2k-1} + 2; k \in \mathbb{N}.$$

Usando um pouco de Cálculo, podemos responder a questão:

"Qual é o valor de $\lim_{k \to +\infty}(p_{k+1} - p_k)$?"

Onde $k \in \mathbb{N}$ e $p_k \in \mathcal{P}$.
Perceba, inicialmente, que o menor elemento é $p_2 - p_1 = 3 - 2 = 1$ E mais,

$$\inf\{p_{k+1} - p_k | k \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}\} = 2.$$

Tal afirmação nos levam a conjecturar o seguinte,

"Existem infinitos primos gêmeos"

Ou ainda,

$$\lim_{n \to +\infty}(p_{n+1} - p_n) = 2$$

Um fato interessante a respeito dos primos gêmeos é que a soma de seus inversos é convergente. Contrariando o que nosso intuito nos aponta. Ou seja,

$$x_i \in \mathcal{G} \Rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{x_i}$$

é convergente. Isto nos mostra que $\mathcal{G}$ é um conjunto magro em $\mathbb{N}$. Aos interessados na demonstração deste fato, recomendamos ([11]).

2.3 $\mathcal{P}$ não é tão magro em $\mathbb{N}$

Nesta seção trataremos da densidade de $\mathcal{P}$ via a série dos inversos de seus elementos. Como foi comentado no capítulo anterior, dedicaremos esta seção a provar sua divergência, fato que se deve a sua densidade em $\mathbb{N}$. Grandes matemáticos trabalharam nesta linha de pensamento, um grande contribuinte foi, sem dúvidas, Tchebyshev.

O Russo, Pafnuty L. Tchebyshev, viveu no século XIX, foi um matemático que fez fortes contribuições com seus trabalhos relacionados a Estatística e a Probabilidade. Trabalhou com números, e é responsável pela demonstração do teorema a seguir.

Teorema de Tchebyshev. Se $x \in \mathbb{N} \backslash \{1, 2\}$, então existem constantes positivas, $C, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$c \cdot \frac{x}{\ln(x)} \leqslant \pi(x) \leqslant C \cdot \frac{x}{\ln(x)}.$$

A demonstração de tal teorema foge largamente ao escopo deste trabalho. Ao leitor interessado recomendamos [12].

Definição 2.1 Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é denso, quando qualquer intervalo aberto (a, b) contém algum ponto $x \in X$, onde $a, b \in \mathbb{R}$.

Corolário 2.2 Existem constantes reais positivas α e β, tais que

$$\alpha k \ln(p_k) < p_k < \beta k \ln(p_k)$$

onde $p_k \in \mathcal{P}$ e $k \geqslant 2$.

Demonstração. Do Teorema de Tchebyshev, temos que

$$c \cdot \frac{p_k}{\ln(p_k)} \pi(p_k) < C \cdot \frac{p_k}{\ln(p_k)}.$$

Note que,

$$\exists x \in \mathbb{R}; \ \frac{p_k^{\frac{1}{2}}}{\ln(p_k)} \ > \ c \ \forall k > x.$$

Sendo assim, são válidas

$$(1) \quad p_k < \frac{1}{c} k \ln(p_k) < \frac{1}{c} k c p_k^{\frac{1}{2}}$$

e

$$p_k^{\frac{1}{2}} \ < \ k.$$

Onde

$$(2) \quad p_k^{\frac{1}{2}} \ < \ k \Rightarrow \ln(p_k) \ < \ 2\ln(k).$$

Onde $k \ > \ x$.

Substituindo (2) em (1), temos

$$p_k \ < \ \frac{1}{c} k \ln(p_k) \ < \frac{2}{c} k \ln(k).$$

Para $k \geqslant 2$, fazendo $\alpha = \frac{2}{c}$. Concluímos que,

$$p_k < \alpha k \ln(k). \tag{2.3}$$

De posse desse corolário podemos demonstrar que $\mathcal{P}$ não é tão magro quanto se pensava. Pois a soma de seus inversos diverge.

Corolário 2.2 A série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k}$ é divergente.

Demonstração.A equação 2.3 nos garante que

$$p_k < \alpha k \ln(k), \quad para \ \ k \geqslant 2.$$

Assim,

$$\frac{1}{\alpha k \ln(k)} < \frac{1}{p_k}.$$

Tendo em vista que,

$$L : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \ L(x) = \frac{1}{x \ln(x)}, \forall x > 1$$

Temos que a mesma é crescente e positiva.

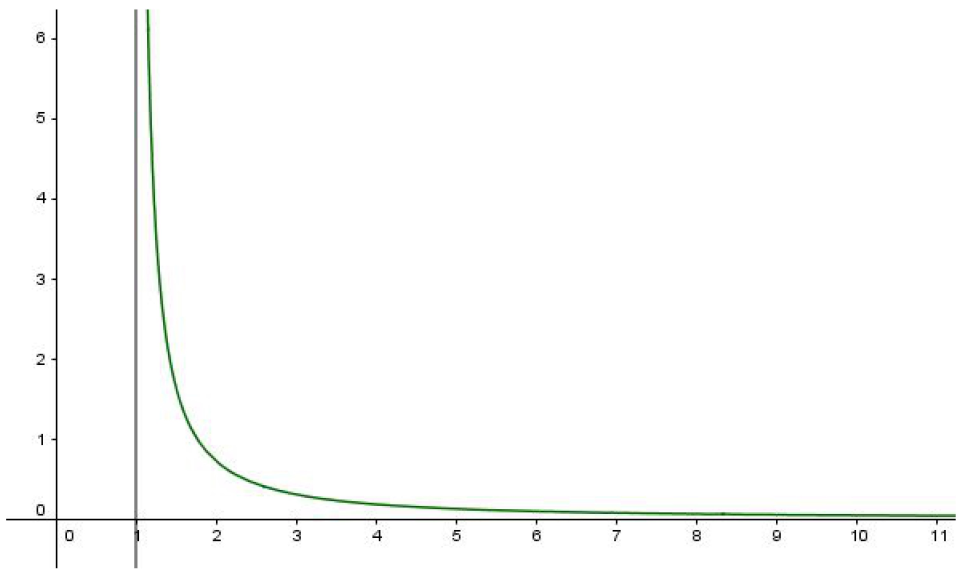

Gráfico de $L(x)$

São válidas as desigualdades,

$$\frac{1}{\alpha}\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln(x)} < \frac{1}{\alpha}\sum_{i=2}^{+\infty}\frac{1}{i\ln(i)} < \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{p_i}.$$

Perceba que,

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln(x)} = \lim_{b\to+\infty}\int_{2}^{b}\frac{dx}{x\ln(x)} = \lim_{b\to+\infty}\ln\left(\frac{\ln(b)}{\ln(2)}\right) = +\infty$$

$\boxdot$

Capítulo 3

Funções aritméticas auxiliares

A Teoria dos números é um ramo da matemática que a séculos fascina e atormenta, concomitantemente, matemáticos que nela se aventura. Esta que seria rainha, segundo Gauss, nos presenteou com belas funções aritméticas, que não raramente revela os segredos mais profundos dos números.

Aqui faremos uma breve esplanação de algumas funções aritméticas que em siguida nos guiarão rumo a demonstração do Teorema Fraco de Hadamard.

Definição 3.1 Uma função f é dita aritmética quando $f : \mathbb{R} \longrightarrow M$, onde $M \subset \mathbb{N}$.

3.1 Função número de divisores

A primeira função aritmética a ser tratada aqui é a função número de divisores de um número natural qualquer. Para tal, vejamos o problema a seguir:

Definição. Dado um número natural $n = \prod_{k=1}^{r} {p_k}^{a_k}$, a função número de divisores de n, $d : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ é definida por $d(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_r + 1)$.

Exemplo 2.1 Determine o valor de s onde dado $n = 3^2 \cdot 4^s$ temos $d(n) = 15$.

Ora, como $n = 2^{2s} \cdot 3^2$ temos, por definição que $d(n) = (2s + 1)(2 + 1) = 15 \Rightarrow s = 2$.

3.2 Função totiente de Euler

Definição. Dados $a, b \in \mathbb{N}$, a é dito primo com b se, e somente se $mdc(a, b) = 1$.

Por exemplo, 3 é primo com 8, pois $mdc(3, 8) = 1$. Ao passo que 2 não é primo com 8, pois $mdc(2, 8) = 2 \neq 1$.

Definição A função $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ é conhecida na literatura como **função totiente de Euler**. Onde dado $a \in \mathbb{N}$, $\varphi(a)$ representa a quantidade de números naturais menores que a que são primos com a. Veremos nas próximas linhas como cálcular o valor numérico de tal função, esta terá um papel destacado neste trabalho, por ser essencial na demonstração do teorema fraco de Hadamard.

Proposição 3.1 Dados

$$k, q \in \mathbb{N}; mdc(k, q) = 1 \Rightarrow \varphi(k \cdot q) = \varphi(k) \cdot \varphi(q).$$

Demonstração. Suponha que $q = 1$ ou $k = 1$. É trivial que $\varphi(k \cdot q) = \varphi(k) \cdot \varphi(q)$, pois $\varphi(1) = 1$

Suponha agora que $k > 1$ e $q > 1$. Considere a matriz N com k linhas e q colunas, a seguir,

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & q \\ q+1 & q+2 & \dots & 2q \\ 2q+1 & 2q+2 & \dots & 3q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (k-1)q+1 & (k-1)q+2 & \dots & kq \end{bmatrix}$$

Sabemos que $mdc(x, k \cdot q) = 1 \Leftrightarrow mdc(x, q) = mdc(x, k) = 1$. Portanto, para o cálculo de $\varphi(k \cdot q)$ precisamos enconrar todos os $n_{ij} \in N; mdc(n_{ij}, k) = mdc(n_{ij}, q) = 1$.

Observe que, $mdc(n_{1j}, q) = 1 \Rightarrow mdc(n_{ij}, q) = 1$, pois $n_{ij} = rq + j$, para algum $1 \leqslant r \leqslant k$ e $1 \leqslant j \leqslant q$. É fácil ver que existem $k\varphi(q)$ números n_{ij} que são primos com q. Nos resta agora verificar quais destes são primos com k. Da hipótese, $mdc(q, k) = 1$. Assim, fixado $y; 1 \leqslant y \leqslant k$, os elementos da coluna n_{iy} deixam restos diferentes na divisão por k e, portanto, temos $\varphi(k)$ números na coluna y que são primos com k. Pelo teorema fundamental da contagem, o número de números primos com q e k, simultaneamente, dentre os elementos da matriz N é $\varphi(q) \cdot \varphi(k)$.

Proposição 3.2 Se p é um número primo, então $\varphi(p) = p - 1$.

De fato, segue direto da definição de número primo que no conjunto $\mathbb{N}_p = \{1, 2, \cdots, p\}$ apenas $x = p \Rightarrow mdc(x, p) \neq 1$. Restando, $p - 1$ números primos com p.

Proposição 3.3 Seja p um natural primo e t, um natural qualquer, então

$$\varphi(p^t) = p^t \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Demonstração. Sabemos que $\#\mathbb{N}_{p^t} = \#\{1, \cdots, p^t\} = p^t$. Destes, não são primos com p, somente $x \in \mathbb{N}_{p^t}$ tal que x é múltiplo de p. Ou seja, $x = kp$ tal que $k \in \{p, 2p, \cdots, p^{t-1}p\}$. Como existem, p^{t-1} possíveis valores para k, pelo princício de exclusão,

$$\varphi(p^t) = p^t - p^{t-1}$$
$$\Rightarrow \varphi(p^t) = p^t\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Teorema 3.2 Seja $x > 1$ tal que $x = \prod_{k=1}^{n} P_k{}^{\alpha_k}$, onde $i \neq j \Rightarrow p_i \neq p_j$ com $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ e p_i primo, $\forall i \in \mathbb{N}$. Então, temos que

$$\varphi(x) = \prod_{k=1}^{n} p_k{}^{\alpha_k}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \tag{3.1}$$

Demonstração. De posse que $x = \prod_{k=1}^{n} P_k{}^{\alpha_k}$, temos que $\varphi(x) = \varphi(\prod_{k=1}^{n} P_k{}^{\alpha_k})$. A Proposição 2.2 nos garante que que φ é uma função multiplicativa. Ou seja,

$$\varphi(\prod_{k=1}^{n} P_k{}^{\alpha_k}) = \prod_{k=1}^{n} \varphi(P_k{}^{\alpha_k})$$

Ao passo que a proposição 2.3, nos garante que $\varphi(p_k{}^{\alpha_k}) = p_k{}^{\alpha_k}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$.
Portanto,

$$\varphi(x) = \prod_{k=1}^{n} P_k{}^{\alpha_k}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Observe ainda que, como $x = \prod_{k=1}^{n} P_k{}^{\alpha_k}$, podemos escrever

$$\varphi(x) = x\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_n}\right).$$

Esta função nos tem as mais variadas aplicações em teoria dos números. Talvez pelo fato dos números primos exercerem um certo fascínio nos amantes da teoria dos números.

Exemplo 3.4 Qual a quantidade de números que não são primos com 420?

Observe que $420 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1$, então a quantidade de números primos com 420 é igual a $\varphi(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1) = 420 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 192$. Logo, a quantidade de números que não são primos com 420 é 420-192=228.

3.3 Função menor inteiro.

A função menor inteiro tem seu lugar reservado neste trabalho, uma vez que a mesma serve de ferramenta na demonstração do Teorema dos números primos, tornando-se, juntamente com a função de Tchebyshev, uma arma poderosa. Esta função aritmética, apesar de simples, tem características interessantes, bem como desigualdades elegantes. Nesta seção, além da definição, apresentaremos algumas proposições a respeito da mesma, bem como suas demonstrações.

Definição. Seja $x \in \mathbb{R} \setminus [0, -\infty)$, então existem $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $a \leqslant x \leqslant b$, onde a é o maior inteiro que não é maior que x.

A função $\lfloor \ \rfloor : \mathbb{R} \setminus [0, -\infty) \longrightarrow \mathbb{N}$, é conhecida na literatura como a função menor inteiro, ou função parte inteira. Ou seja, $\lfloor x \rfloor = a \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leqslant x$.

Exemplo 3.4 O número real $x = 4,666\ldots$ pertence ao intervalo $[4, 5]$. Assim, $\lfloor 4,666\ldots \rfloor = 4$.

Exemplo 3.5 Dados os números $3, 5, \frac{15}{9}$ e 7, temos que $\lfloor 3 \rfloor$, $\lfloor 1 \rfloor$ e $\lfloor 7 \rfloor$.

Proposição 3.6 Sejam $x, y, z \in \mathbb{N}$. Temos

$$\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{x}{y} \rfloor}{z} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{yz} \right\rfloor.$$

Demonstração. Sejam $k = \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor$ e $q = \left\lfloor \frac{k}{z} \right\rfloor$. Note que, $x = ky + r; 0 \leqslant r < y$ e $k = zq + s; 0 \leqslant s < z$. Sendo assim,

$$x = ky + r = y(zq + s) + r = yzq + ys + r.$$

Como $ys + r \leqslant yz$, concluímos que $q = \left\lfloor \frac{x}{yz} \right\rfloor$.

Proposição 3.7 São válidas as desigualdades a seguir, onde $x_i, y \in \mathbb{N} | \ \ i \in \{1, \cdots, k\}; \ \ k \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{x_i}{y} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{1}{y} \sum_{i=1}^{k} x_i \right\rfloor < \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{x_i}{y} \right\rfloor + k$$

Demonstração. Seja

$$x_i = q_i + r_i; q_i \in \mathbb{N}$$

e

$$0 \leqslant r_i \leqslant y - 1 < y.$$

Pela definição da função menor inteiro, $q_i = \lfloor x_i \rfloor$. Sendo assim, temos

$$q_i \leqslant q_i + r_i < q_i + y$$

$$\Rightarrow \frac{q_i}{y} \leqslant \frac{x_i}{y} < \frac{q_i + y}{y} = \frac{q_i}{y} + 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \frac{q_i}{y} \leqslant \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i}{y} < \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{q_i}{y} + 1 \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{x_i}{y} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i}{y} \right\rfloor < \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{x_i}{y} + 1 \right\rfloor$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{x_i}{y} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i}{y} \right\rfloor < \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{x_i}{y} \right\rfloor + k.$$

3.4 O Teorema fraco de Hadamard

Nesta seção iremos demonstrar o Teorema fraco de Hadamard, o mesmo mostra que,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0$$

aqui $\pi(x) = \#\{p \in \mathbb{N} |\ p \leqslant x, \mathtt{com}\ p - \mathtt{primo}\}$, ou seja, a quantidade de números primos até um dado natural x. O que nos dá uma ideia de **densidade nula** (vide Definição 2.1) de $\mathcal{P}$. Tal teorema serve de alicerce para o Teorema dos números primos. O Teorema dos números primos pode ser demonstrado analíticamente, bem como de modo elementar, para o leitor interessado recomendamos [7]. A primeira prova elementar do Teorema dos números primos foi feita em 1949, pelos matemáticos a A. Selberg e P. Erdös.

3.5 Uma importante desigualdade relacionando $\pi(x)$ e $\varphi(x)$

Proposição 3.8 Para todo $k \in \mathbb{N}$ temos que

$$\frac{\pi(n)}{n} < \frac{\varphi(k)}{k} + \frac{2k}{n}. \tag{3.2}$$

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}$, assim pelo algoritmo de Euclides, $n = km + r$, onde $0 \leqslant r < k$.

Considere o conjunto

$$\{1, 2, \cdots, n\} = \{1, \cdots, k\} + \cup_{j=1}^{m-1} (jk + 1, jk + 2, \cdots, k(j + 1)) + (mk + 1, \cdots, mk + r).$$

Observe, que notoriamente, não há mais que k números primos no conjunto $\{1, \cdots, k\}$. Observe ainda que no conjunto $(jk + 1, jk + 2, \cdots, k(j + 1))$ um número é primo se, e somente se, for primo com k, ou seja, não há mais que $\varphi(k)$ primos no conjunto $(jk + 1, jk + 2, \cdots, k(j + 1))$. Sabemos também que $m = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$. Em vista disso.

$$\pi(n) < k + (m - 1)\varphi(k) + r < m\varphi(k) + 2k < \lfloor \frac{n}{k} \rfloor + 2k < \frac{n}{k}\varphi(k) + 2k$$

$$\Rightarrow \frac{\pi(n)}{n} < \frac{\varphi(k)}{k} + \frac{2k}{n}.$$

Lema 3.1 Considerando $n > 0; n \in \mathbb{N}$ e p_i primos tais que $p_i \geqslant n$ onde $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$. Temos que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} < \left[\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \right]^{-1}$$

Demonstração. Sabemos que, $0 < \frac{1}{p_i} < 1$ assim

$$\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1} = \lim_{t \to +\infty} \sum_{y=1}^{t} \left(\frac{1}{{p_i}^{y-1}} \right) \tag{3.3}$$

De 3.3 temos que

$$\lim_{t \to +\infty} \prod_{i=1}^{k} \sum_{y=1}^{t} \left(\frac{1}{{p_i}^{y-1}} \right) = \left[\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \right]^{-1}$$

Ao passo que, pelo Teorema fundamental da aritmética, $\{1, \cdots, n\} \subset \{{p_1}^{\alpha_i}, {p_2}^{\alpha_i}, \cdots, {p_k}^{\alpha_i}\}$, onde $n = {p_1}^{\alpha_1} {p_2}^{\alpha_2} \cdots {p_k}^{\alpha_k}$ e $\alpha_i \in \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\}$.

Ou seja,

$$\left\{ 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n} \right\} \subset \left\{ \frac{1}{\prod_{j=1}^{k} {p_j}^{\alpha_i}} \right\}.$$

o que nos garante,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} < \sum_{j=1, i=1}^{k} \frac{1}{\prod_{j=1}^{k} {p_j}^{\alpha_i}}$$

Observe, ainda, que

$$\sum_{j=1, i=1}^{k} \frac{1}{\prod_{j=1}^{k} {p_j}^{\alpha_i}} = \lim_{t \to +\infty} \prod_{i=1}^{k} \sum_{y=1}^{t} \left(\frac{1}{{p_i}^{y-1}} \right)$$

Portanto,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} < \lim_{t \to +\infty} \prod_{i=1}^{k} \sum_{y=1}^{t} \left(\frac{1}{{p_i}^{y-1}} \right) = \left[\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \right]^{-1}$$

.

3.6 Demonstração do Teorema fraco de Hadamard

A priori, note que devemos mostrar que dado um real $\epsilon > 0$ arbitrário devemos mostrar que dado $\forall n > n_0$, onde $n_0 \in \mathbb{N}$ temos que $\frac{\pi(n)}{n} < \epsilon$.

Tomemos $k = \prod_{k=1}^{r} p_k$, tais que p_k é primo.

Por 3.2 e pelo Teorema(3.2), temos

$$\frac{\pi(n)}{n} < \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right) + \frac{2\prod_{k=1}^{r} p_k}{n}$$

Como

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right)\right]^{-1} = +\infty$$

então,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right) = 0$$

O que nos garante que dado $\epsilon > 0$ temos,

$$\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right) < \frac{\epsilon}{2}$$

Para o que falta, tomemos $n_0 = \frac{4\prod_{k=1}^{r} p_k}{\epsilon}$. Assim, caso $n > n_0$, então

$$\frac{\pi(n)}{n} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{2\prod_{k=1}^{r} p_k}{n} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{2\prod_{k=1}^{r} p_k}{\frac{4\prod_{k=1}^{r} p_k}{\epsilon}} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Capítulo 4

Considerações finais

Após cursar a disciplina de Aritmética, no período de 2015.2, criei um certo gosto por Teoria dos Números. Tal disciplina contribuiu diretamente, para a escolha do tema de minha dissertação, seus comentários sobre os primos e a função Zeta de Riemann ficaram guardadas em minha memória com bastante zelo.

O resultado aqui exposto partiu do desejo de conhecer melhor esse ramo tão fascinante da matemática, que busca padrões nos números, e mais ainda nos números primos. Após enveredar-me pelas estradas tortuosas dos primos percebi que pouco (ou quase nada) sabia sobre os mesmos, mas o que descobri me instigou a compartilhar com outros, culminando neste trabalho que vos fora apresentado.

E foi com esta intenção, de contribuir na literatura matemática, e na formação de futuros professores do Ensino Básico, que resolvi compreender o Teorema Fraco de Hadamard. Para tal, fora necessário que alguns alicerces fossem registrados. Isto para que um aluno de graduação pudesse acompanhar a demonstração do Teorema objeto de estudo deste trabalho. Resolvi restringir-me ao conjunto dos naturais, não descartando os inteiros, mas para que ficasse melhor compreendido assuntos referentes aos primos positivos, deixando o comportamento de seus simétricos nos naturais fora destas anotações. Optei por começar os estudos por séries numéricas, uma vez que a noção de densidade dos primos, funções como a Tchebyshev e Von Mangoldt usavam este estudo como ferramentas de sua compreensão. Foram feitas observações sobre séries de inversos ora de quadrados, ora de naturais e outras ainda de primos (gêmeos ou não).

É perceptível que o Teorema de Tchebyshev já norteava a densidade nula de $\mathcal{P}$ nos naturais, mas somente com o Teorema fraco de Hadamard podemos concluir o que nossa intuição matemática nos revelava.

Contudo, espera-se que as ideias aqui apresentadas sirvam para motivar alunos de graduação e professores de matemática a pesquisas em Teoria dos Números, para que mais jovens alunos despertem o prazer por essa bela ciência: A Matemática.

Apêndice A

Apêndice A

Uma função que muito contribui para o Teorema dos Números primos é devida ao alemão Von Mangoldt. Este fora em 1878 um célebre aluno de Karl Weierstrass na Universidade de Humboldt em Berlim. Von Mangoldt forneceu com rigor provas que contribuiram para a demonstração do Teorema dos Números primos, que afirma que $\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}$. Antes Riemann havia apresentado alguns resultados parciais, estes contribuiram para a demonstração devida a Von Mangoldt.

A.1 A função de Von Mangoldt

Definição. A função $\Lambda : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln(p), & \text{se } n \text{ é potencia do primo } p \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definição.A função de Tchebyshev é $\psi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(x) = \sum_{n\leqslant x} \Lambda(n).$$

Note que

$$\psi(x) = \sum_{p^n\leqslant x} \ln(n) = \sum_{p\leqslant x} \lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(p)} \rfloor \ln(p)$$

Teorema A.1 Se $x \geqslant 1$ temos que

Demonstração.

$$\ln(x) = \sum_{d|x} \Lambda(x) \tag{A.1}$$

Note que se $x = 1$ todas as parcelas são iguais a 0, pois $\ln(1) = 0$.
Considere então $x > 1$, assim, pelo teorema fundamental da aritmética, podemos escrever de modo único

$$x = \prod_{k=1}^{r} {p_k}^{a_k}$$

$$\Rightarrow \ln(x) = \ln(\prod_{k=1}^{r} {p_k}^{a_k})$$

$$\Rightarrow \ln(x) = \sum_{k=1}^{r} a_k \ln(p_k)$$

Note que,

$$\sum_{d|x} \Lambda(x) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{q=1}^{a_k} \Lambda({p_k}^q),$$

onde $k \in \{1, \cdots, r\}$ e $q \in \{1, \cdots, a_k\}$. Assim,

$$\sum_{d|x} \Lambda(x) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{q=1}^{a_k} \ln(p_k) = \sum_{k=1}^{r} a_k \ln(p_k) = \ln(x)$$

A.2 Equivalência entre a função de Tchebyshev e o Teorema dos números primos

Uma proposição interessante que relaciona a função de Tchebyshev e o Teorema dos números primos é a seguinte:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = 1.$$

Demonstração. Temos por A.1 que:

$$\psi(x) = \sum_{p \leqslant x} \lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(p)} \rfloor \ln(p) \leqslant \ln(x) \sum_{p \leqslant x} 1 = \pi(x) \cdot \ln(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\psi(x)}{x} \leqslant \frac{\pi(x)}{x \ln(x)}.$$

Contudo, caso $1 < z < x$,

$$\pi(x) = \pi(z) + \sum_{z < p \leqslant x} 1 \leqslant \pi(z) + \sum_{z < p \leqslant x} \frac{\ln(p)}{\ln(z)} < z + \frac{\psi(x)}{\ln(z)}$$

Ao tomarmos x suficientemente grande, 3 por exemplo, temos que $1 < \frac{x}{\ln^2(x)} < x$, assim

$$\pi(x) < \frac{x}{\ln^2(x)} + \frac{\psi(x)}{\ln(\frac{x}{\ln^2(x)})}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi(x)\ln(x)}{x} < \frac{1}{\ln(x)} + \frac{\psi(x)}{\ln(\frac{x}{\ln^2(x)})}\frac{\ln(x)}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi(x)\ln(x)}{x} < \frac{1}{\ln(x)} + \frac{\psi(x)}{x}\frac{\ln(x)}{\ln(x)+2\ln(\ln(x))}.$$

Note ainda que, pela definição 1.6 e pelo Teorema de L'Hospital temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x)+2\ln(\ln(x))} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x\ln(x)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{\ln(x)}} = 1$$

Desse modo, concluímos a demonstração.

A equivalencia entre a função de Tchebyshev e o Teorema dos números primos é de suma importância em Teoria dos números, uma vez que provada $\lim_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$, provamos o Teorema dos números primos. Mas tal tarefa não é tão simples. Este teorema que foi demonstrado pela primeira vez em, 1896, de modo analítico. Modo este que foge largamente ao escopo destas linhas. Ao leitor interessado recomendamos [1] e [7]. Foi preciso nascer Paul Erdös, em 1913, e Atle Selberg, em 1917, para que em 1949, surgisse a primeira demonstração elementar do *Teorema dos números primos*. Ainda assim, a demonstração elementar é bastante longa e bem complicada.

Em 1980, o estadunidense, D.J. Newman fez a primeira demonstração curta do *Teorema dos números primos*, contudo, tal demonstração ainda é bem complicada.

Referências Bibliográficas

[1] ARBIETO, Alexander; Matheus, Carlos; MOREIRA, Carlos Gustavo. - *Aspectos Ergódicos da Teoria dos Números.* Disponível em:<http://www.impa.br/opencms/pt/biblioteca/pm/PM_34.pdf>

[2] BRUSAMARELLO, Rosali; CARMELO, Emerson L. Monte. - *Paul Erdös, O MAGO.* Disponível em:<http://rmu.sbm.org.br/Conteudo/n43/n43_Artigo05.pdf>

[3] HEFEZ, Abramo. - *Aritmética.* 1ªed. Rio de Janeiro:SBM,2014.

[4] JUNIOR, George B. Thomas. - *Cálculo Volume 2.* 1ªed. Rio de Janeiro:Editora da Universidade de São Paulo,1972.

[5] LIMA, Elon Lages. - *Análise Real Volume 1.* 11ªed. Rio de Janeiro:IMPA,2011.

[6] MARTINEZ, Fabio E. Brochero; MOREIRA, Carlos Gustavo Tamm de Araújo. - *Primos Gêmeos, Primos de Sophie Germain e o Teorema de Brun* . Disponível em:<http://rmu.sbm.org.br/Conteudo/n48_n49/n48_n49_Artigo06.pdf>.Acesso em: 07 de Dezembro de 2016

[7] MARTINEZ, Fabio E. Brochero; MOREIRA, Carlos Gustavo Tamm de Araújo; SALDANHA, Nicolau C.; TENGAN, Eduardo. - *Teoria dos Números: Um passeio pelos primos e familiares pelo mundo inteiro.* . Disponível em:<http://www.mat.ufmg.br/~fbrocher/TN/Teoria_dos_numeros_Um_passeio_com_primos_3ed.pdf>.Acesso em: 07 de Dezembro de 2016

[8] Neto, Antônio Caminha Muniz. - *Fundamentos de Cálculo.* 1ªed. Rio de Janeiro:SBM,2015.

[9] Neto, Antônio Caminha Muniz. - *Tópicos de Matemática Elementar Volume 3 Introdução à Análise*. 2ªed. Rio de Janeiro:SBM,2013.

[10] Neto, Antônio Caminha Muniz. - *Tópicos de Matemática Elementar Volume 5 Teoria dos Números*. 2ªed. Rio de Janeiro:SBM,2013.

[11] RIBENBOIN, Paulo. - *Existem funções que geram os números primos?*. Disponível em:<http://rmu.sbm.org.br/Conteudo/n15/n15_Artigo01.pdf>. Acesso em: 15 de Janeiro de 2016.

[12] Sidki, Said. - *Introdução a Teoria dos Números*. Disponível em: 15 de Janeiro de 2016.<http://www.impa.br/opencms/pt/biblioteca/cbm/10CBM/10_CBM_75_09.pdf>. Acesso em: 15 de Janeiro de 2016.